Вариационные Автоенкодеры с мультимодальным prior'ом

Д. Мазур

10 Б класс
Школа 1505 "Преображенская"

18 декабря 2018 г.

Моделируем сложные системы

Моделируем $p(x)$, где $x \in \mathcal{R}^D$

Моделируем сложные системы

Моделируем $p(x)$, где $x \in \mathcal{R}^D$
$p(x)-?$

Вводим латентные переменные

$$z \in \mathcal{R}^d$$

Кстати

$\mathbf{z}$ - приорное распределение

$\mathbf{x}$ - постериорное распределение

Вычисление постериорного распределения

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) p(\mathbf{z}) \ d\mathbf{z}$$

Применение методов Монте-Карло

Может быть

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}^{(m)})$$

$$\mathbf{z}^{(m)} \sim p(\mathbf{z})$$

Применение методов Монте-Карло

Может быть

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}^{(m)})$$

$$\mathbf{z}^{(m)} \sim p(\mathbf{z})$$

Нет.

Применение параметризованых распределений

$\theta \in \Theta$ - параметры нейронный сети

$$\theta^* = \arg\max_{\theta \in \Theta} p_\theta(\mathbf{x})$$

Проблема

Имеет экспоненциальную сложность

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) p(\mathbf{z}) \; d\mathbf{z}$$

Доказательство

$$q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})$$

$$\phi \in \Phi$$

Доказательство

$$p_\theta(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{z}) p_\theta(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) \; d\mathbf{z}$$

Доказательство

$$p_\theta(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{z}) p_\theta(\mathbf{x} \mid \mathbf{z})\ d\mathbf{z} =$$

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{z})} \left[p_\theta(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) \right]$$

Доказательство

$$p_\theta(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{z}) p_\theta(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) \; d\mathbf{z} =$$

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{z})} \left[p_\theta(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) \right] = \mathbb{E}_{p(\mathbf{z})} \left[\frac{q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})}{q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})} p_\theta(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) \right]$$

Доказательство

$$p_\theta(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{z}) p_\theta(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) \; d\mathbf{z} =$$

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{z})} \left[p_\theta(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) \right] = \mathbb{E}_{p(\mathbf{z})} \left[\frac{q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})}{q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})} p_\theta(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) \right] = \mathbb{E}_{q_\phi(\mathbf{x} \mid \mathbf{z})} \left[\frac{p_\theta(\mathbf{x} \mid \mathbf{z})}{q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})} p(\mathbf{z}) \right]$$

Доказательство

$$q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) =$$

Доказательство

$$q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) = \frac{q_\phi(\mathbf{x} \mid \mathbf{z})q(\mathbf{z})}{q(\mathbf{x})}$$

Доказательство

$$q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) = \frac{q_\phi(\mathbf{x} \mid \mathbf{z})q(\mathbf{z})}{q(\mathbf{x})}$$

$$q_\phi(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) - ???$$

Решение

- $p_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ - генеративная модель
  - $p_\theta(\mathbf{x} \mid \mathbf{z})$ - декодер
  - $p(\mathbf{z})$ - приорное распределение скрытых переменных
- $q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})$ - енкодер

Выведение функции потерь

$$
\begin{aligned}
&KL\left(q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) || p_\theta(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})\right) \\
&\quad = \mathbb{E}_{q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x})}\left[\log \frac{q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})}{p_\theta(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})}\right] \\
&\quad = \mathbb{E}_{q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x})}\left[\log q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) - \log p_\theta(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})\right] \\
&\quad = \mathbb{E}_{q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x})}\left[\log q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) - \log p_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{z})\right] + \log p_\theta(\mathbf{x}) \\
&\quad = -\mathcal{L}(\mathbf{x}, \theta, \phi) + \log p_\theta(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

Выведение формулы

$$p_\theta(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \theta, \phi) + KL\left(q_\phi(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) || p_\theta(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})\right)$$

Библиография

- Art B. Owen, Monte Carlo theory, methods and examples
- Adam Kosiorek, What's wrong with VAEs
- Diederik P Kingma, Max Welling, Auto-Encoding Variational Bayes
- Eric Jang, Normalizing Flows tutorial

Выкладки

$$-\log p(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) = -\log \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{p(\mathbf{x})} = -\log p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \log p(\mathbf{x})$$