Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

по курсу «Адаптивное и робастное управление»

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ МНОГОМЕРНЫМ ОБЪЕКТОМ ПО СОСТОЯНИЮ

Вариант № 20

Авторы работы: Кирбаба Д.Д.,

Курчавый В.В.

Группа: R3438

Преподаватель: Парамонов А.В.

“7” ноября 2023 г.

Работа выполнена с оценкой ___

Дата защиты “__” ________ 2023 г.

Санкт-Петербург

2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель работы

Освоение принципов построения робастной системы управления многомерным объектом на основе метода функций Ляпунова.

2. Постановка задачи

Дан возмущенный объект

$$\dot{x} = Ax + bu + \delta, \qquad x(0)$$

$$y = Cx,$$

где δ — вектор возмущающих воздействий, удовлетворяющий неравенству $\left\||\delta(t)|\right\| \le \bar{\delta}$, $x \in R^n$ – вектор состояния, u – управление, $y \in R$ – регулируемая переменная,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$a_i, i = \overline{0, n-1}$ – неизвестные параметры, b_0 – известный коэффициент.

Задача управления заключается в компенсации параметрической неопределенности объекта и обеспечении следующего целевого равенства:

$$\|x_M(t) - x(t)\| \le \Delta, \forall t \ge T$$

где Δ, T – точность работы системы управления и время её настройки соответственно, $x_M \in R^n$ – вектор, генерируемый эталонной моделью

$$\dot{x}_M = A_M x_M + b_M g,$$

$$y_M = C_M x_M$$

с задающим воздействием $g(t)$ и матрицами

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{M_0} & -a_{M_1} & -a_{M_2} & \cdots & -a_{M_{n-1}} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{M0} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметры эталонной модели $a_{M_i}, i = \overline{0, n-1}$ строятся на основе метода стандартных характеристических полиномов для обеспечения желаемого качества воспроизведения задающего воздействия $g(t)$.

Отметим, что в задаче имеет место следующее допущение.

Для некоторого n – мерного вектора θ и скаляра κ матрицы A, b, A_M, b_M связаны соотношениями

$$A_M = A + b\theta^T, \qquad b = \kappa b_M.$$

3. Ход работы

1. Исходные данные

Матрица A	**Коэффициент передачи b_0**	**Время переходного процесса t_n**
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$	2	1.2
Максимальное перерегулирование $\bar{\sigma}$,%	**Сигнал задания $g(t)$**	**Сигнал возмущения $\delta(t)$**
0	$7sign(\cos(0.9t)) + 8$	$[0.6sin10t + 0.1sin50t \quad 0.5cos12t + 0.2sin30t]^T$

Таблица 1. Исходные данные (20 вариант).

2. Эталонная модель

Так как модель второго порядка и имеет описанные выше показатели качества, то стандартный полином будет полиномом Ньютона второго порядка.

$$D^*(\lambda) = \lambda^2 + 2\omega_o\lambda + \omega_o^2$$

Пусть $\Delta = 0.05$ ед. от установившейся величины, тогда $t_n^* = 4.75$ с и

$$\omega_o = \frac{4.75}{1.2} = 3.958$$

$$D^*(\lambda) = \lambda^2 + 7.916\lambda + 15.6658\omega_o^2$$

Тогда матрицы эталонной модели:

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15.6684 & -7.9167 \end{bmatrix}, b_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 15.6684 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0].$$

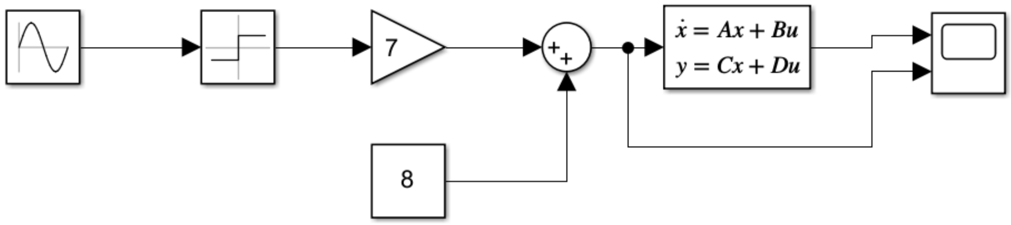

Рисунок 1. Схема моделирования эталонной модели.

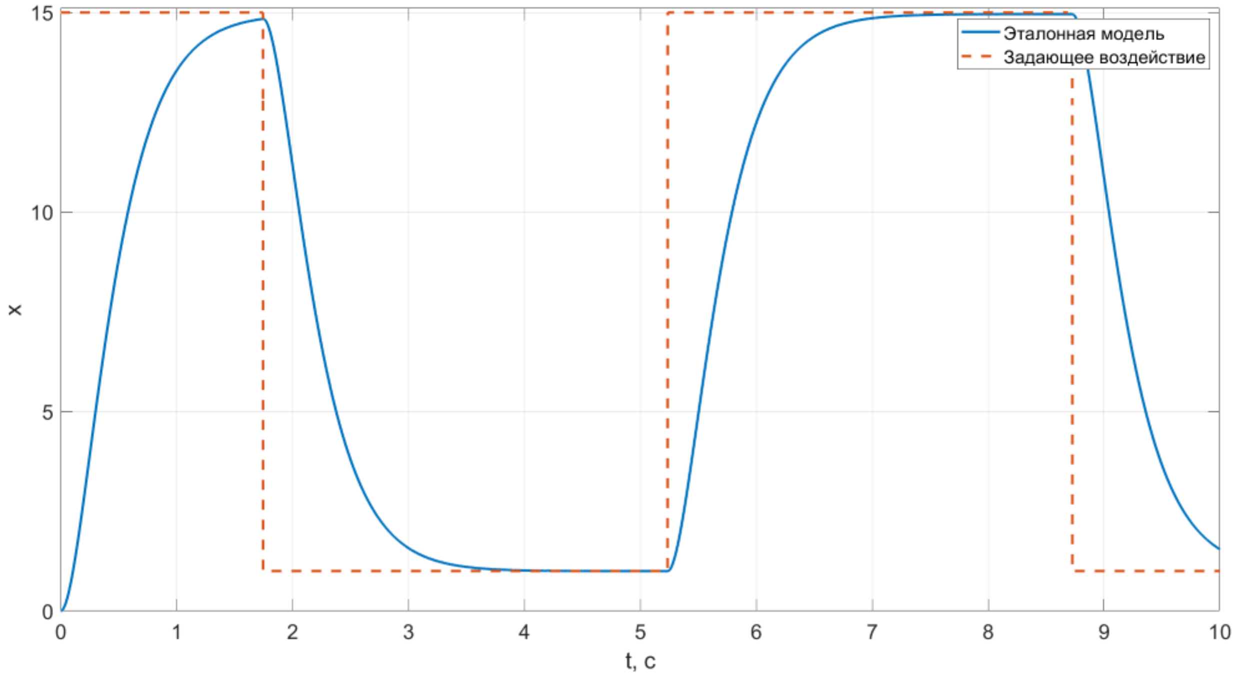

Рисунок 2. Графики задающего воздействия и переходного процесса эталонной модели.

Как видно, перерегулирование $= 0$ и время переходного процесса примерно равно 1.2 с (примерно, так как при расчете параметров модели мы ставили точность $\Delta = 0.05$ ед. от установившейся величины).

3. Закон нелинейного робастного управления

3.1. Схема моделирования

Алгоритм нелинейного робастного управления:

$$u = \hat{\theta}^T x + \frac{1}{\kappa} g,$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma x b^T P e,$$

где γ — коэффициент нелинейной обратной связи, P — симметричная матрица, из уравнения Ляпунова:

$$A_M^T P + P A_M = -Q, \qquad Q \succ 0.$$

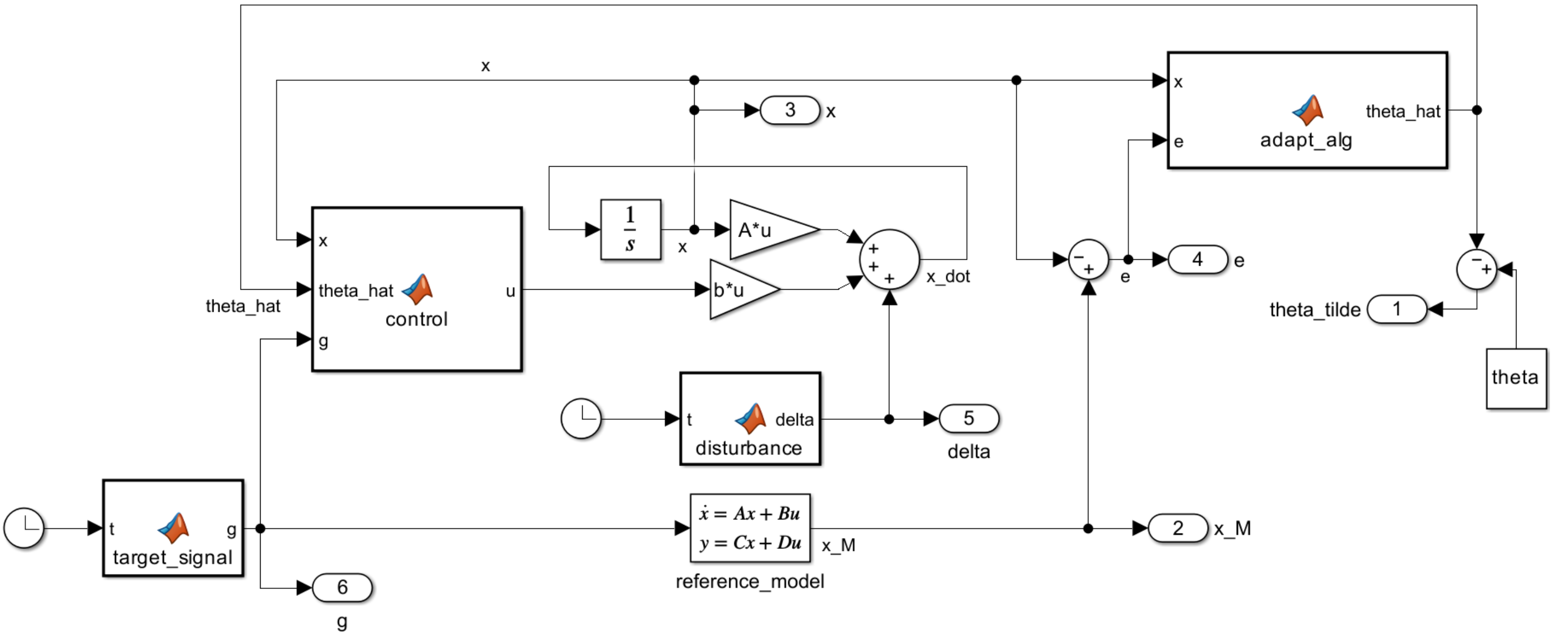

Рисунок 3. Схема моделирования системы с нелинейным робастным управлением.

3.2. Исследование при отсутствии внешнего возмущения

Проведем эксперименты с данной системой при $\delta = 0$. Будем рассматривать 3 случая с различными коэффициентами нелинейности обратной связи γ:

$$\gamma = 0.1$$

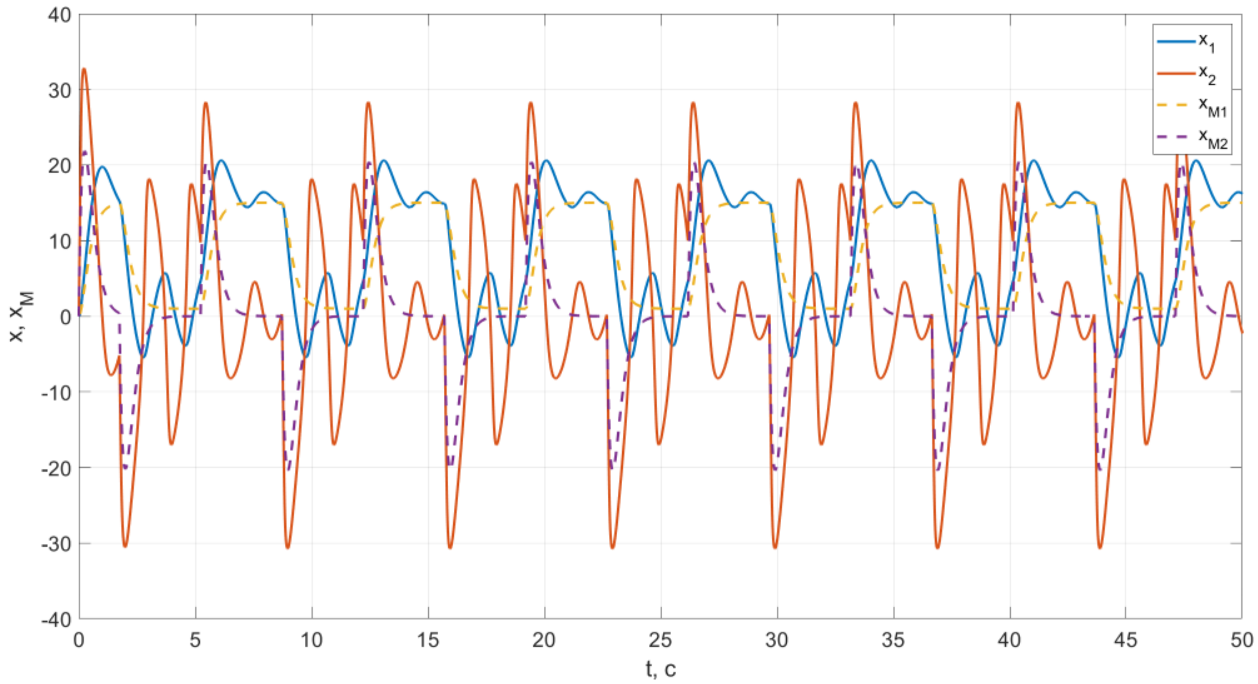

Рисунок 4. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с нелинейным робастным законом управления при $\gamma = 0.1, \delta = 0$.

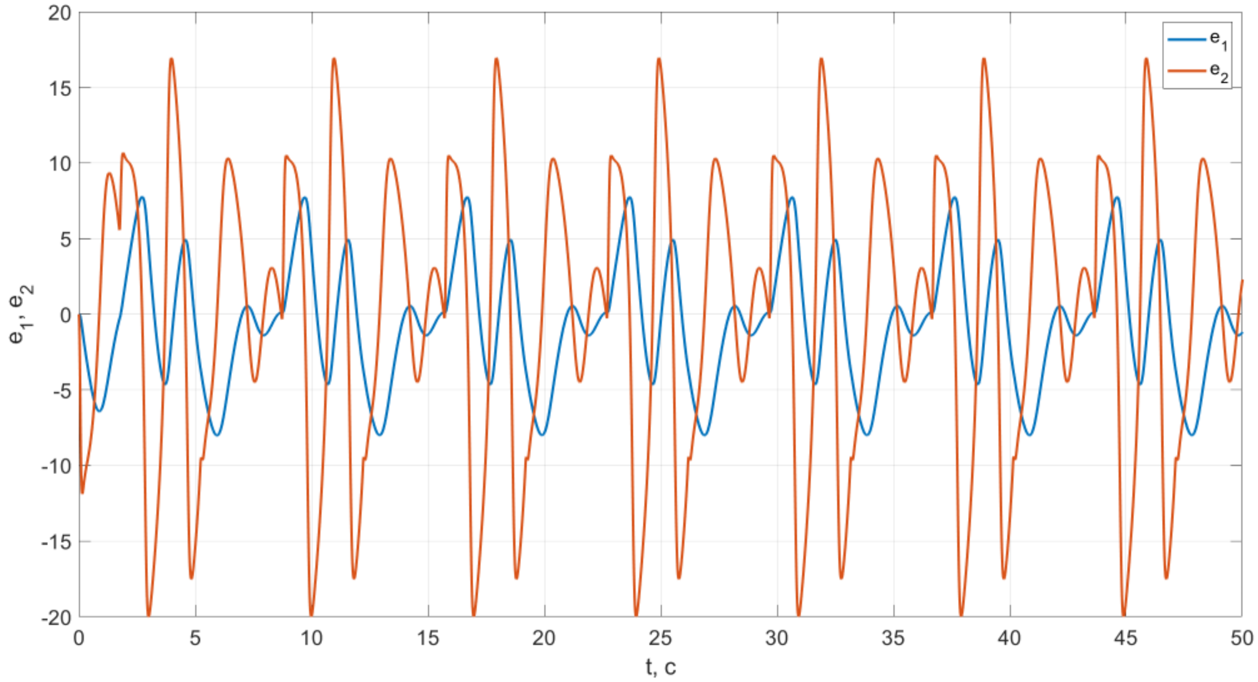

Рисунок 5. Графики компонент вектора ошибок системы с нелинейным робастным законом управления при $\gamma = 0.1, \delta = 0$.

$$\gamma = 1$$

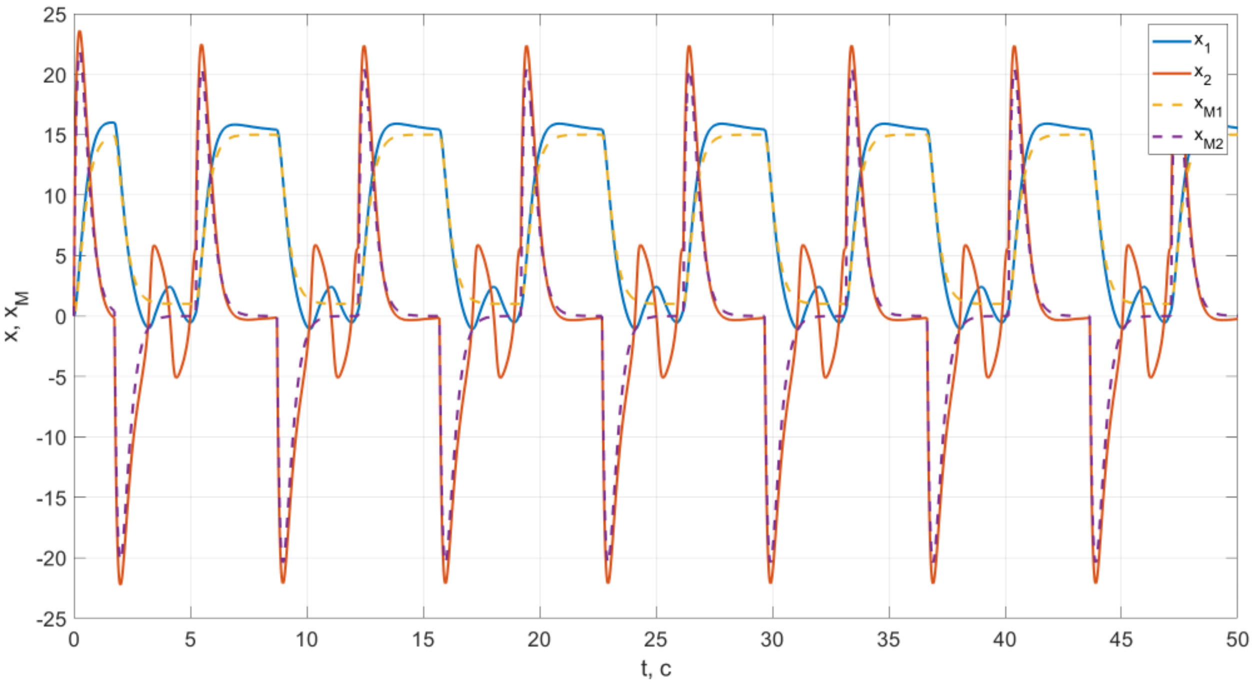

Рисунок 6. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с нелинейным робастным законом управления при $\gamma = 1, \delta = 0$.

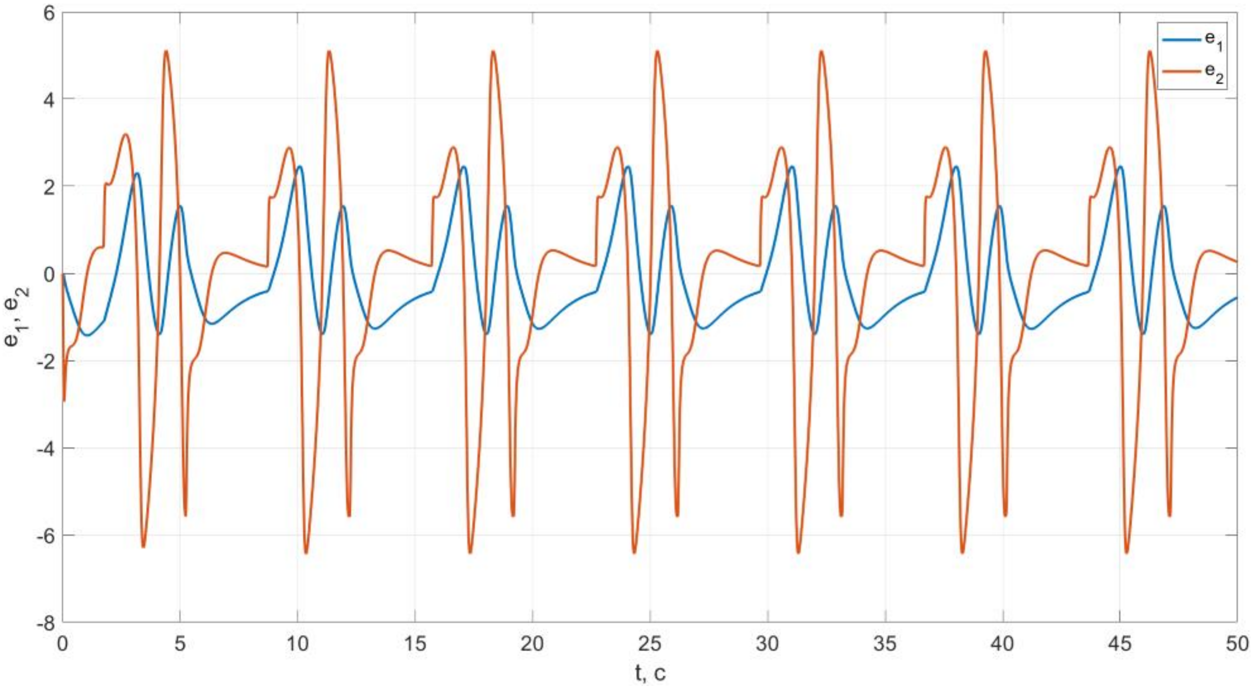

Рисунок 7. Графики компонент вектора ошибок системы с нелинейным робастным законом управления при $\gamma = 1, \delta = 0$.

$$\gamma = 10$$

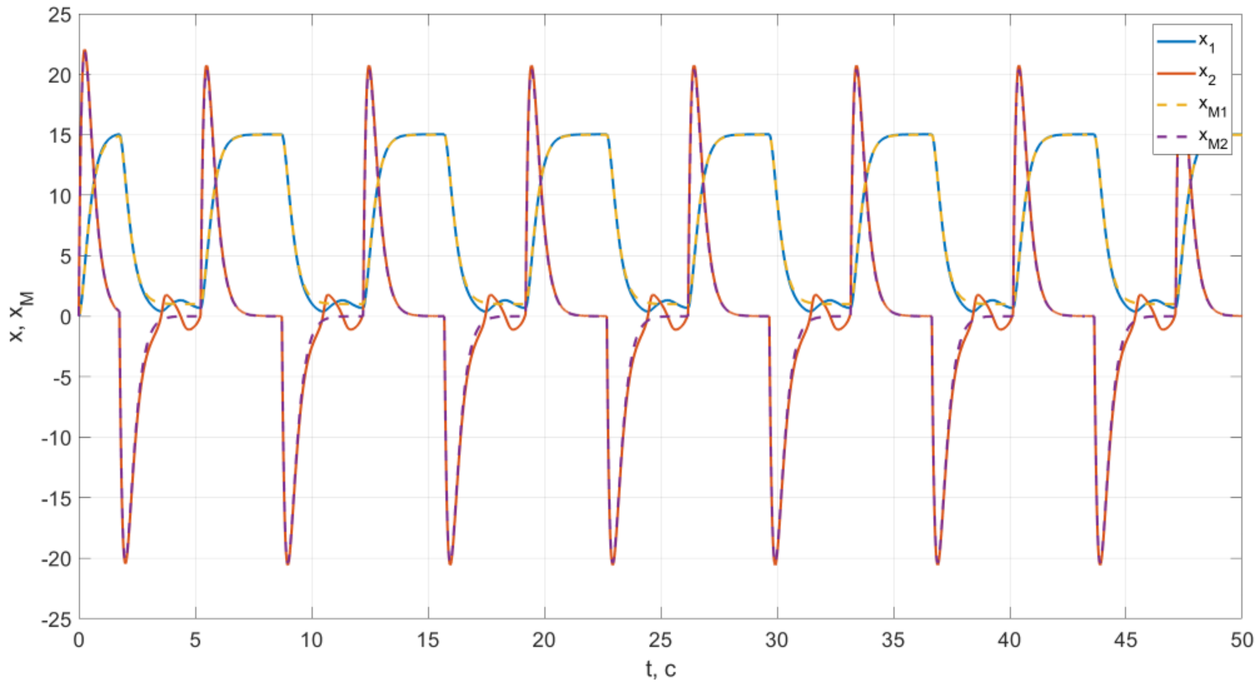

Рисунок 8. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с нелинейным робастным законом управления при $\gamma = 10, \delta = 0$.

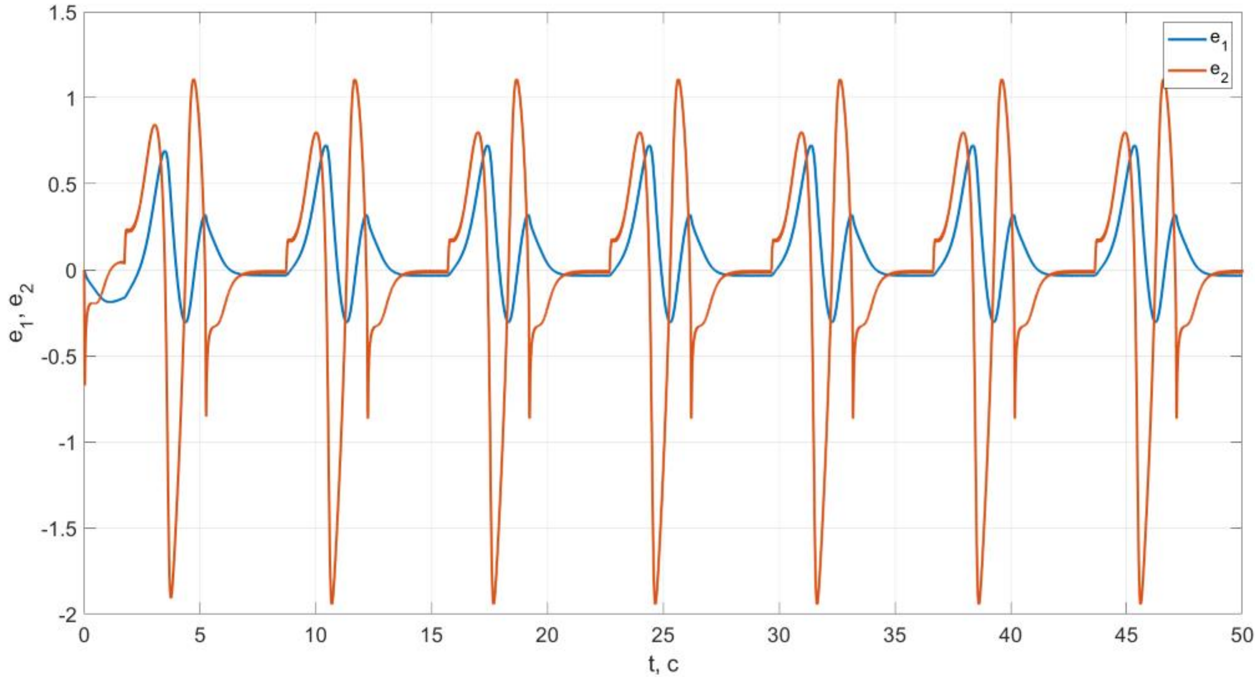

Рисунок 9. Графики компонент вектора ошибок системы с нелинейным робастным законом управления при $\gamma = 10, \delta = 0$.

Итого, по данным графикам можем наблюдать, что при нелинейном робастном законе управления без внешнего возмущения имеем ограниченные сигналы в системе, норма вектора ошибки стремится к некоторой окрестности, радиус которой уменьшается до некоторого предельного значения с увеличением γ.

3.3. Исследование при наличии внешнего возмущения

Теперь промоделирует те же случаи, но уже с некоторым ограниченным внешним возмущением δ.

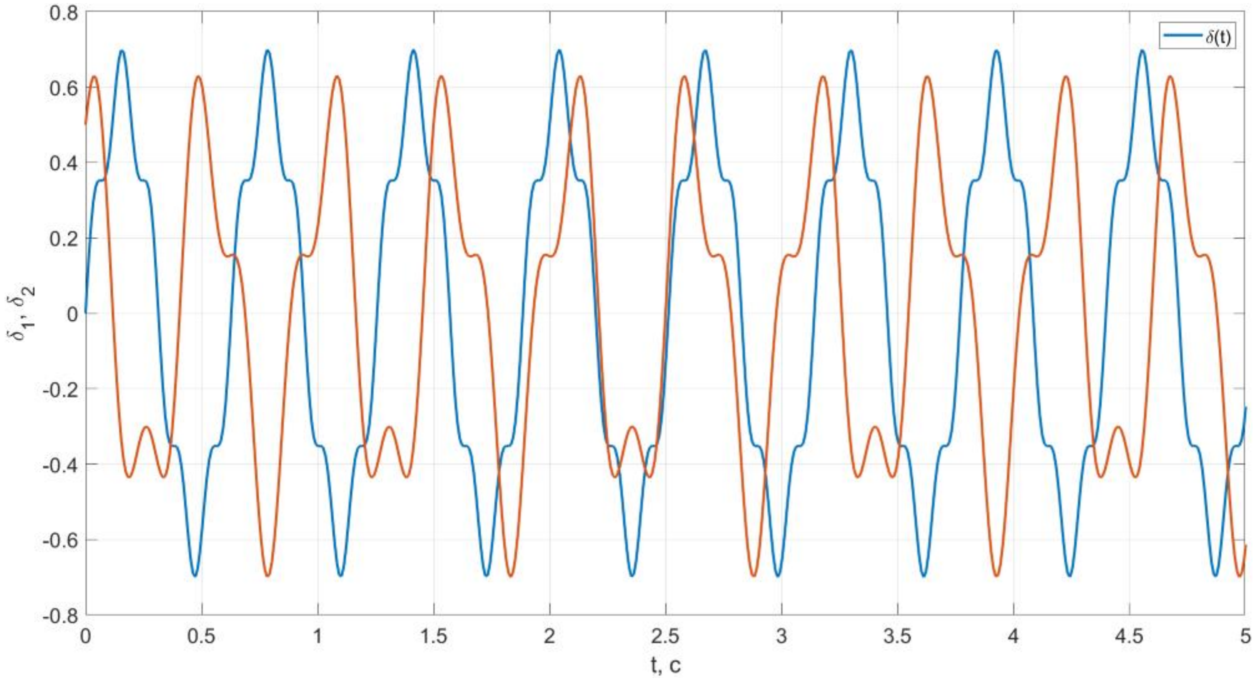

Рисунок 10. График внешнего возмущения.

$$\gamma = 0.1$$

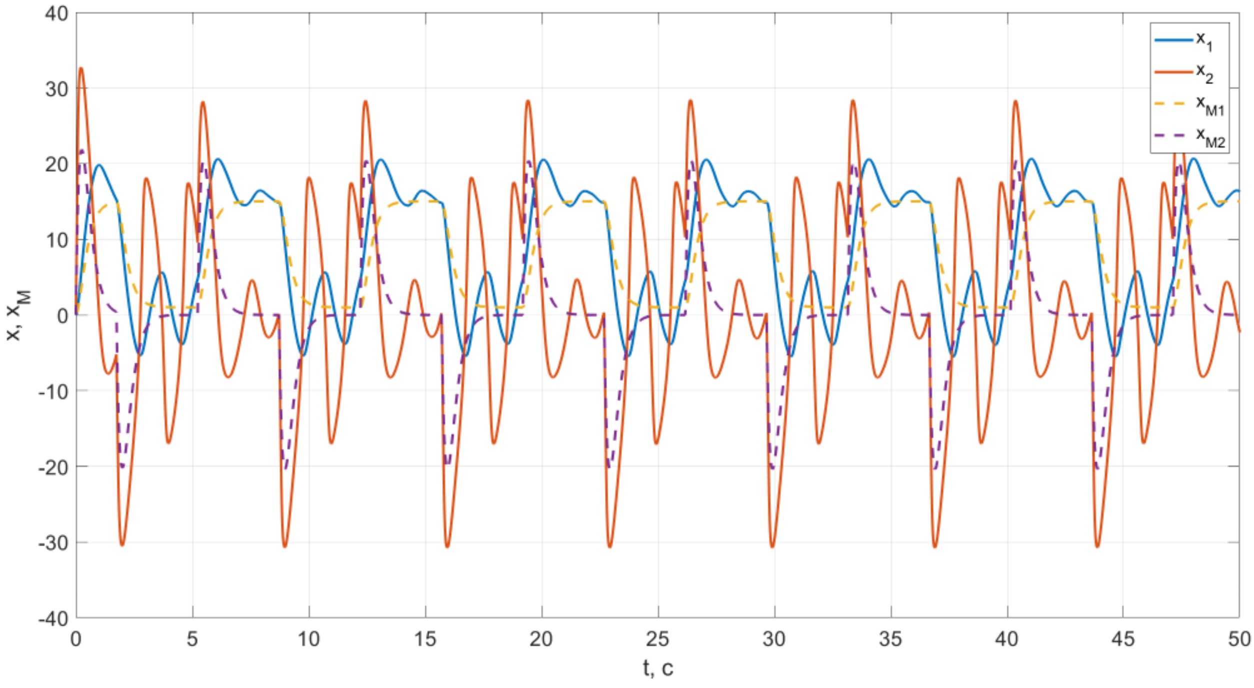

Рисунок 11. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с нелинейным робастным законом управления при $\gamma = 0.1, \delta \neq 0$.

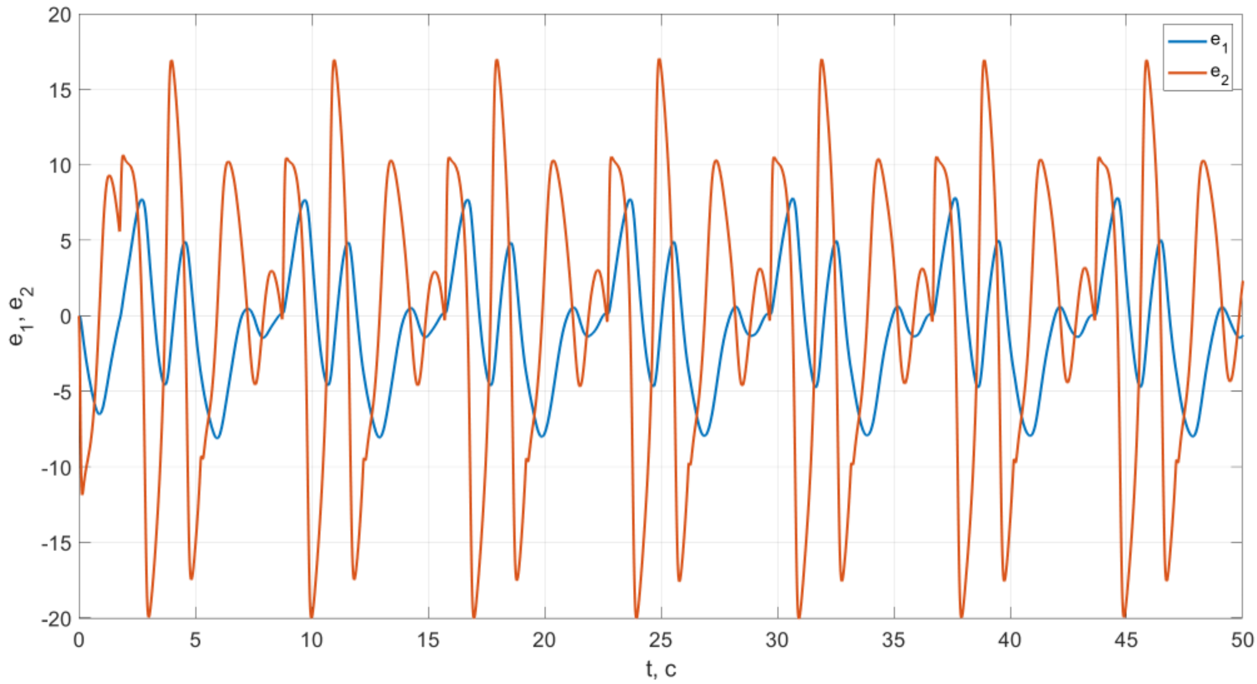

Рисунок 12. Графики компонент вектора ошибок системы с нелинейным робастным законом управления при $\gamma = 0.1, \delta \neq 0$.

$$\gamma = 1$$

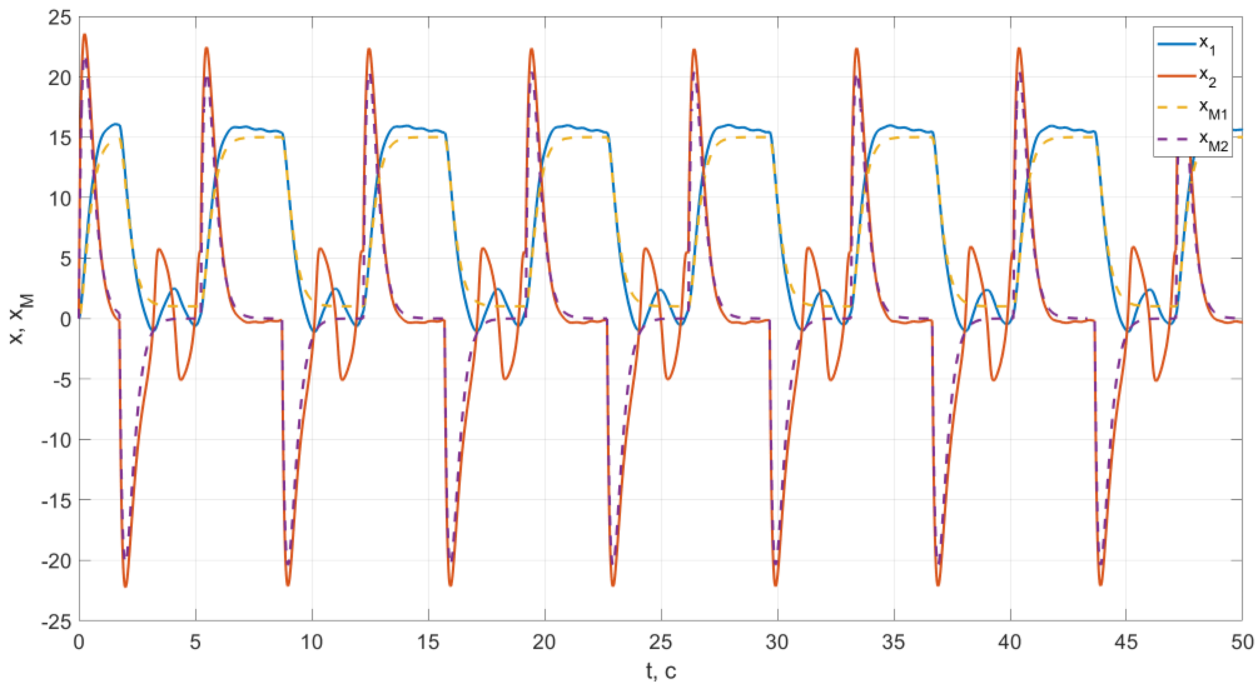

Рисунок 13. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с нелинейным робастным законом управления при $\gamma = 1, \delta \neq 0$.

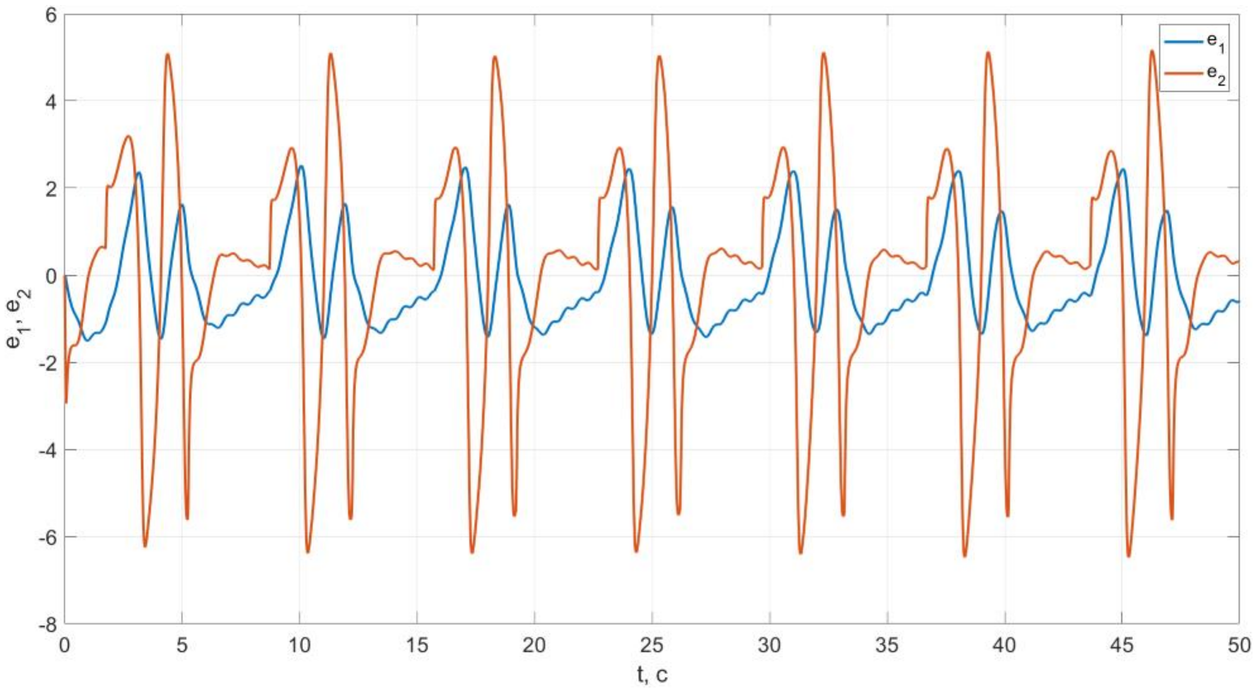

Рисунок 14. Графики компонент вектора ошибок системы с нелинейным робастным законом управления при $\gamma = 1, \delta \neq 0$.

$$\gamma = 10$$

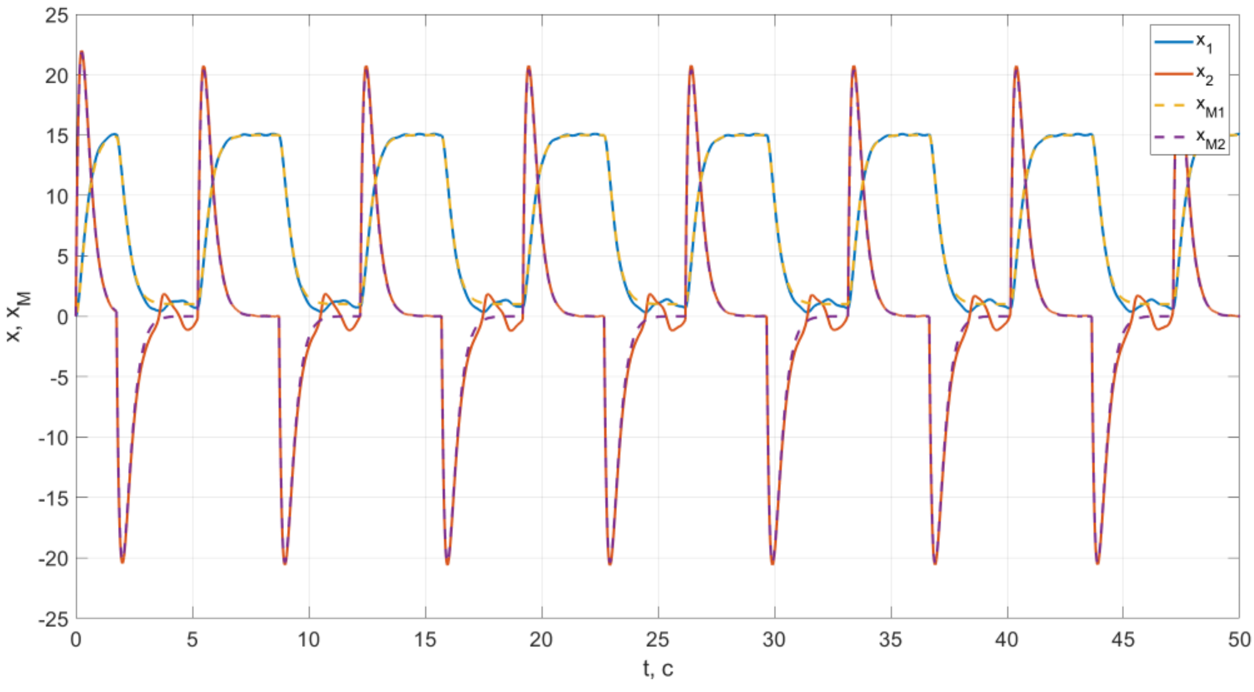

Рисунок 15. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с нелинейным робастным законом управления при $\gamma = 10, \delta \neq 0$.

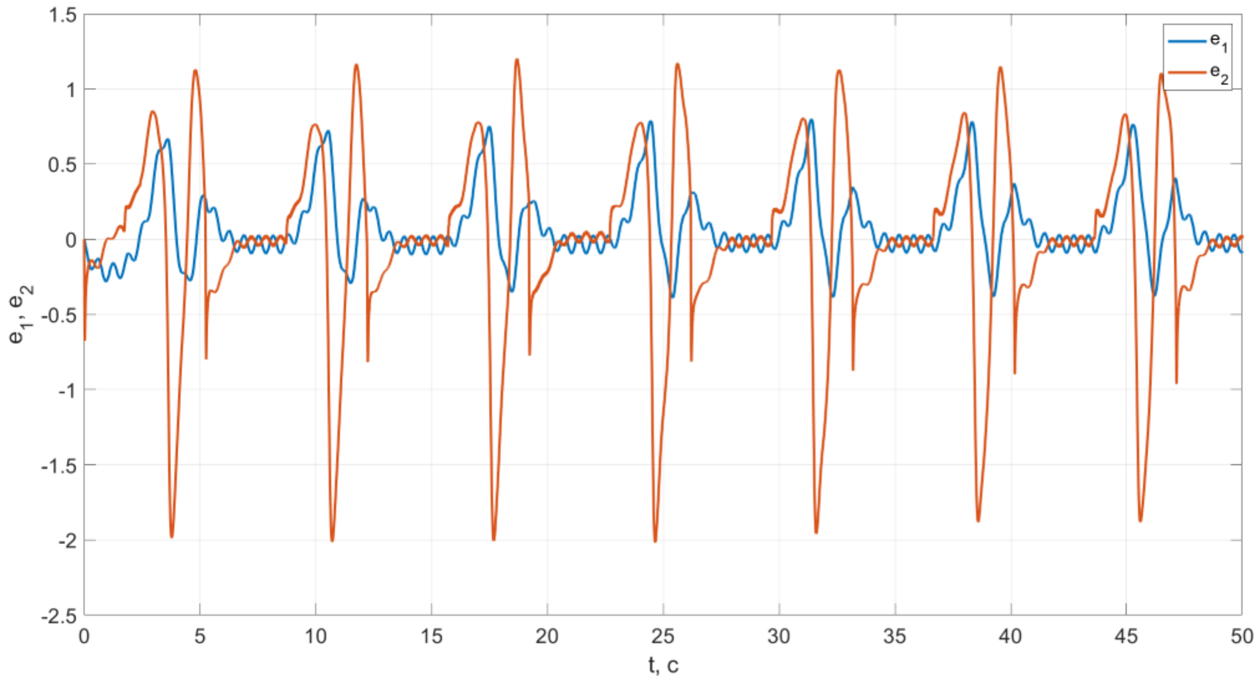

Рисунок 16. Графики компонент вектора ошибок системы с нелинейным робастным законом управления при $\gamma = 10, \delta \neq 0$.

Выводу по поведению системы при наличии внешних возмущений аналогичные с теми, когда они отсутствовали. Единственное различие – сигналы больше колеблются, однако всё равно ограничены.

4. Закон адаптивного и робастного управления

Применим следующий алгоритм адаптации:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\sigma\hat{\theta} + \gamma x b^T P e,$$

где σ – коэффициент параметрической обратной связи, γ – коэффициент адаптации.

Настраиваемый регулятор:

$$u = \hat{\theta}^T x + \frac{1}{\kappa} g.$$

4.1. Схема моделирования

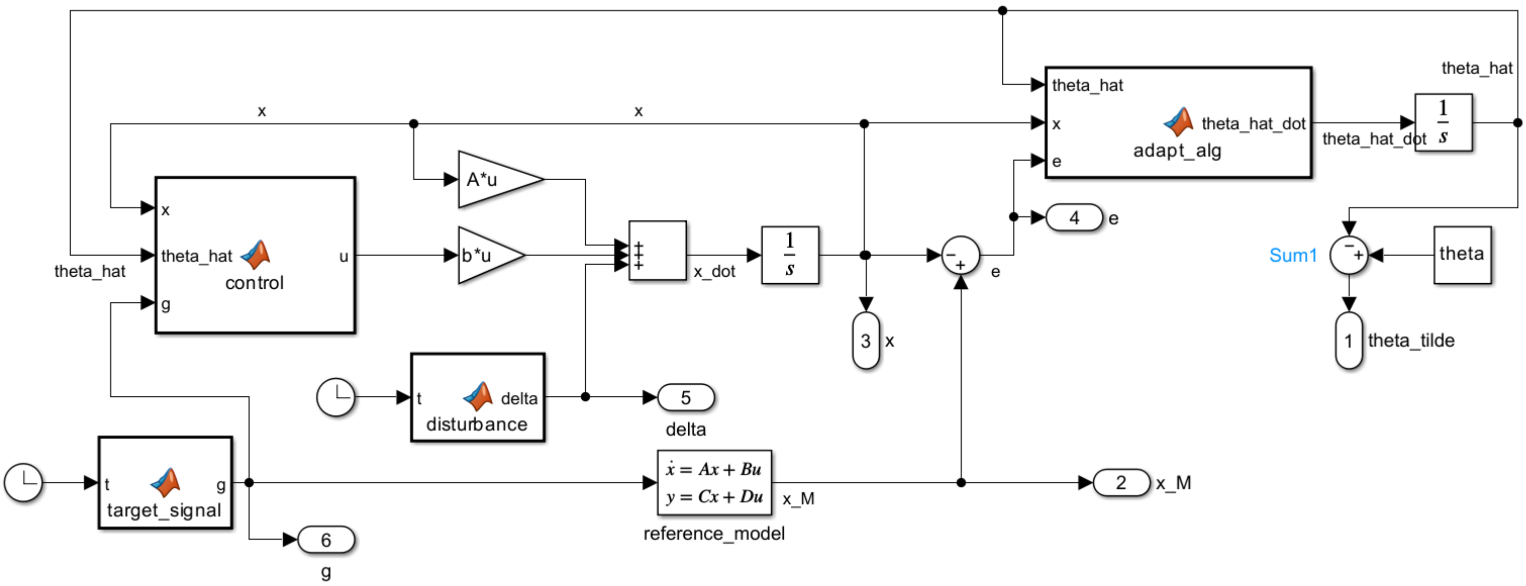

Рисунок 17. Схема моделирования системы с адаптивным и робастным управлением.

Для исследования данной системы проведем эксперименты с двумя различными $\sigma = [1, 0.1]$, двумя различными $\gamma = [0.1, 10]$ при наличии и отсутствия внешнего возмущения δ.

4.2. $\boldsymbol{\sigma = 1, \delta \equiv 0}$

$$\gamma = 0.1$$

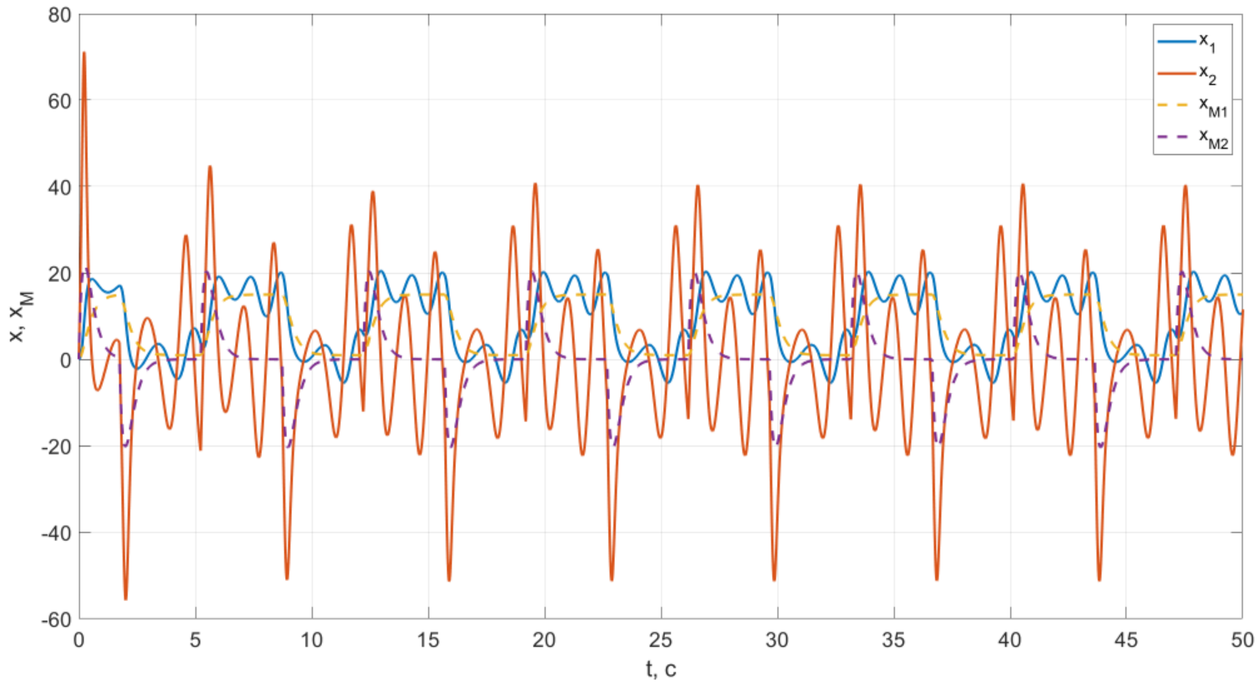

Рисунок 18. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 1, \gamma = 0.1, \delta \equiv 0$.

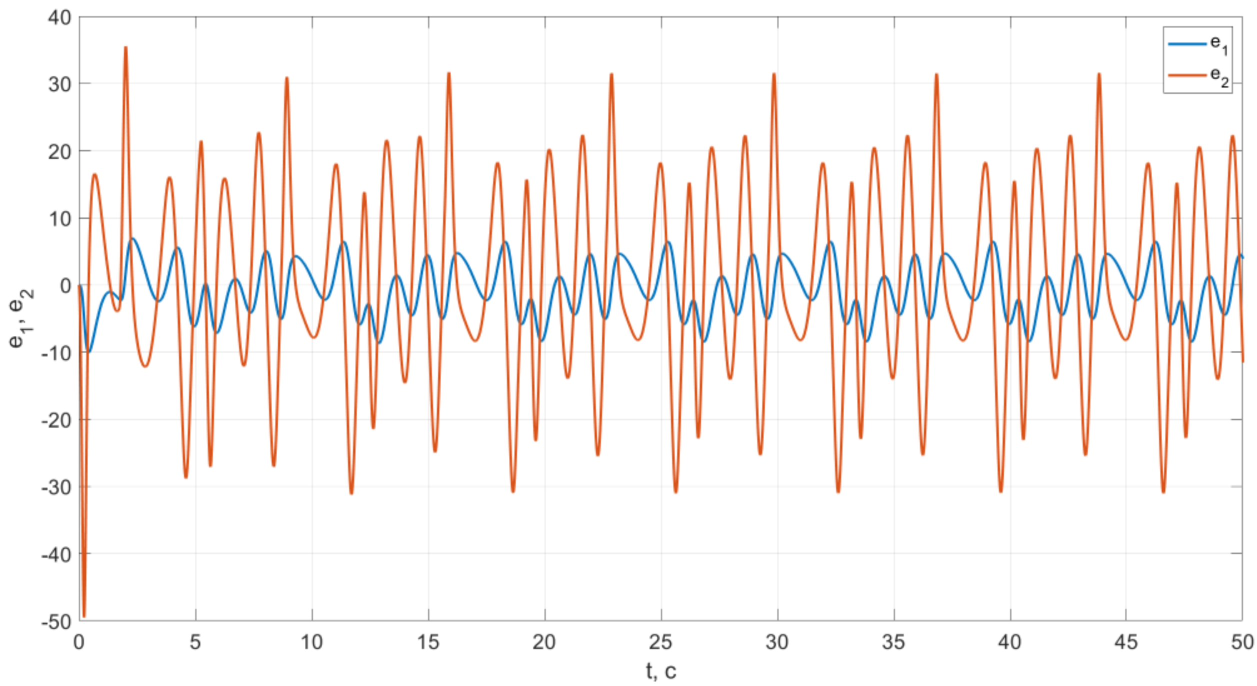

Рисунок 19. Графики компонент вектора ошибок системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 1, \gamma = 0.1, \delta \equiv 0$.

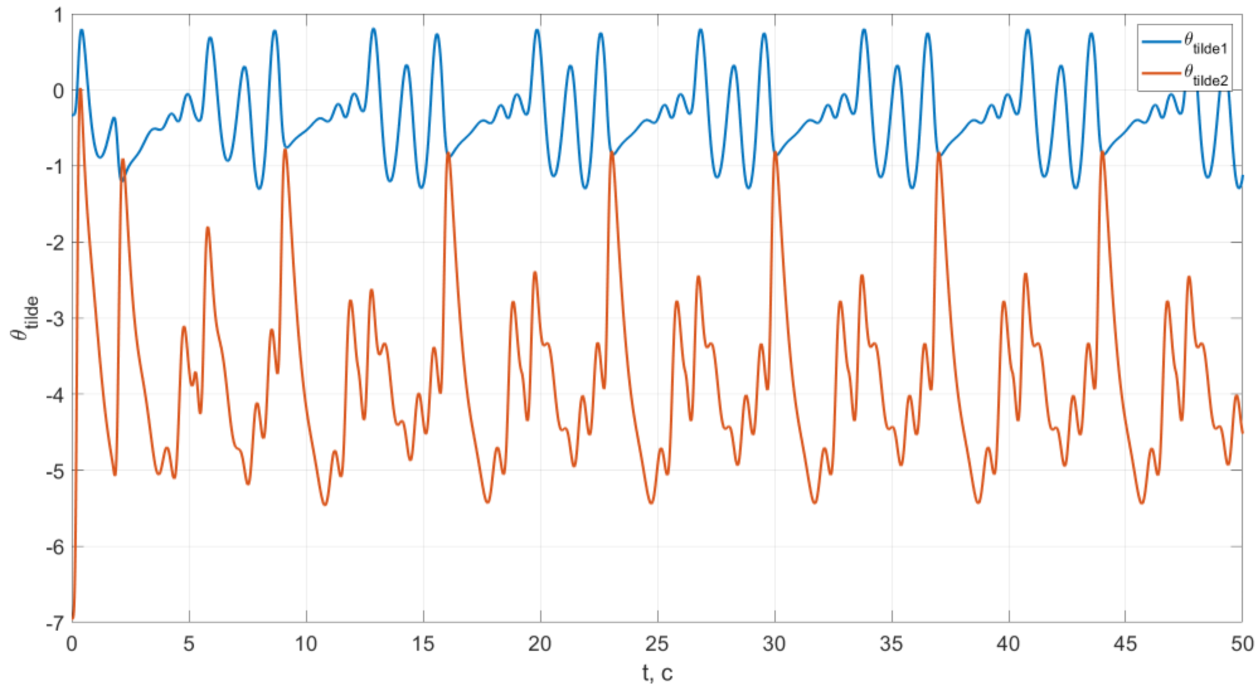

Рисунок 20. Графики компонент параметрической ошибки системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 1, \gamma = 0.1, \delta \equiv 0$.

$$\gamma = 10$$

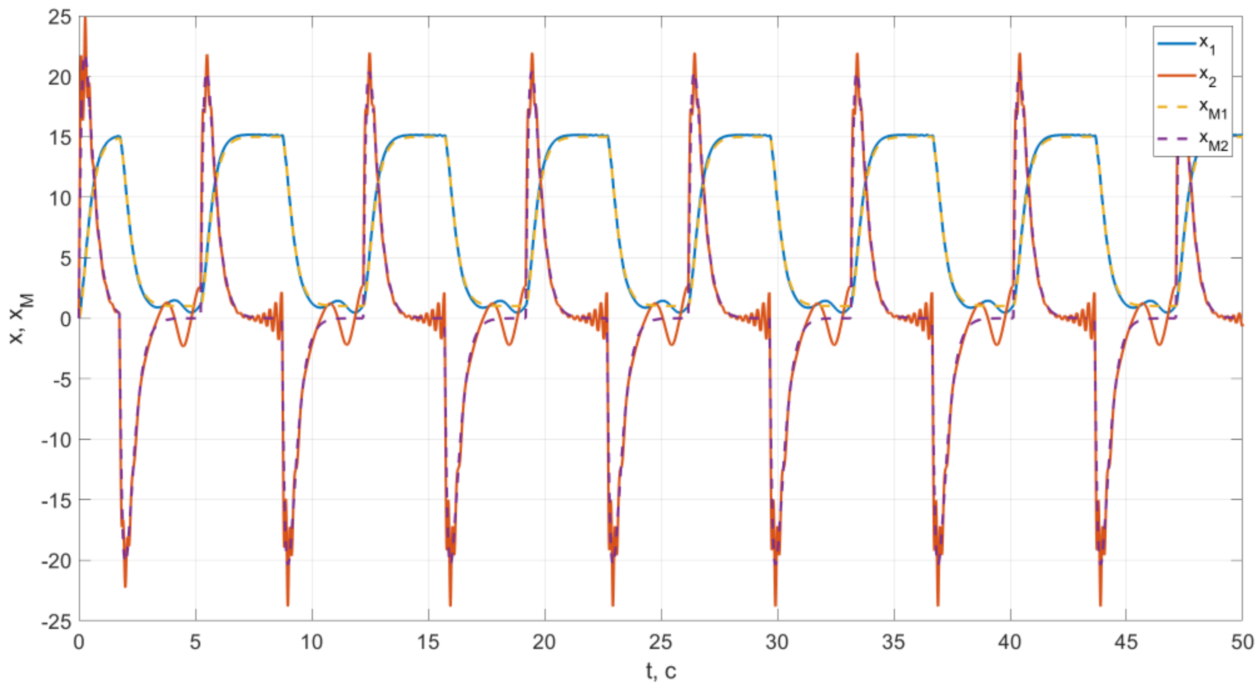

Рисунок 21. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 1, \gamma = 10, \delta \equiv 0$.

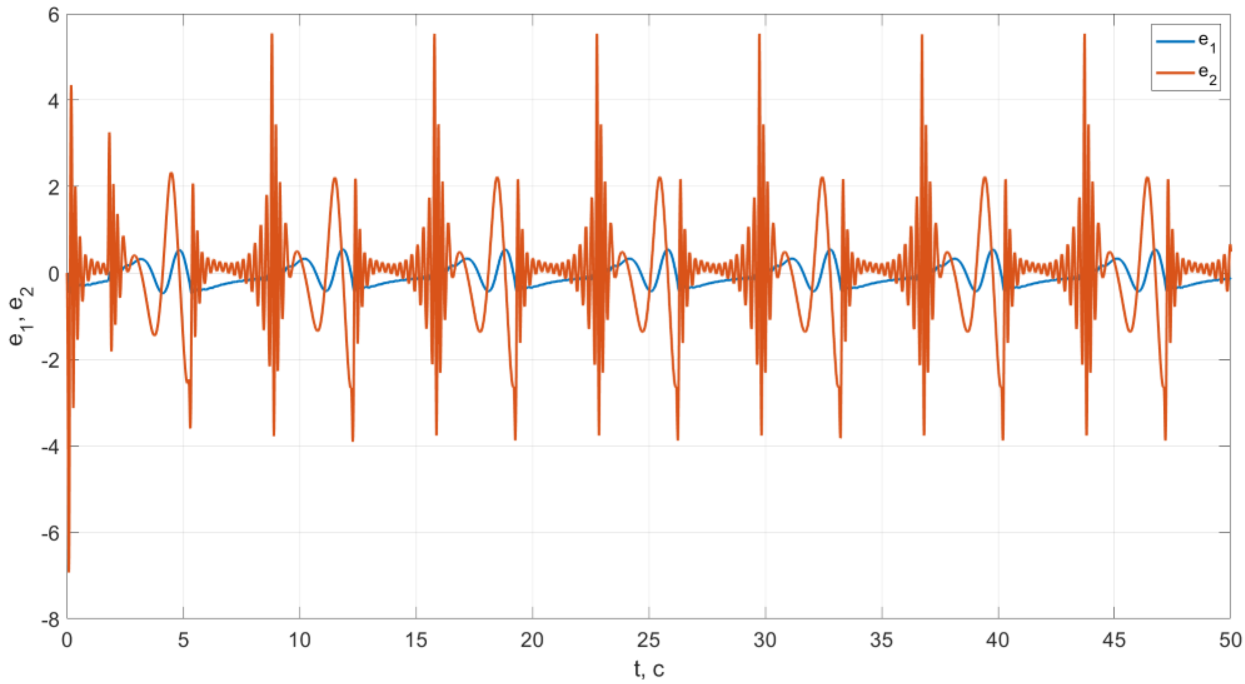

Рисунок 22. Графики компонент вектора ошибок системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 1, \gamma = 10, \delta \equiv 0$.

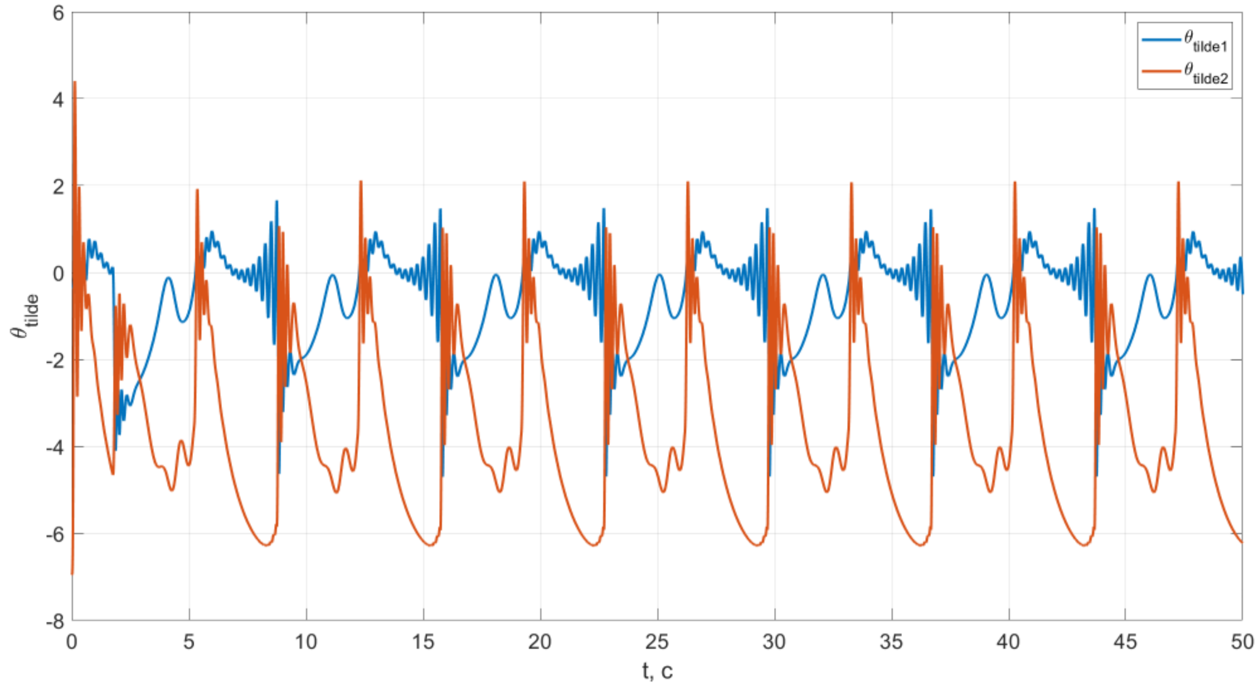

Рисунок 23. Графики компонент параметрической ошибки системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 1, \gamma = 10, \delta \equiv 0$.

4.3. $\boldsymbol{\sigma = 1, \delta \neq 0}$

$$\gamma = 0.1$$

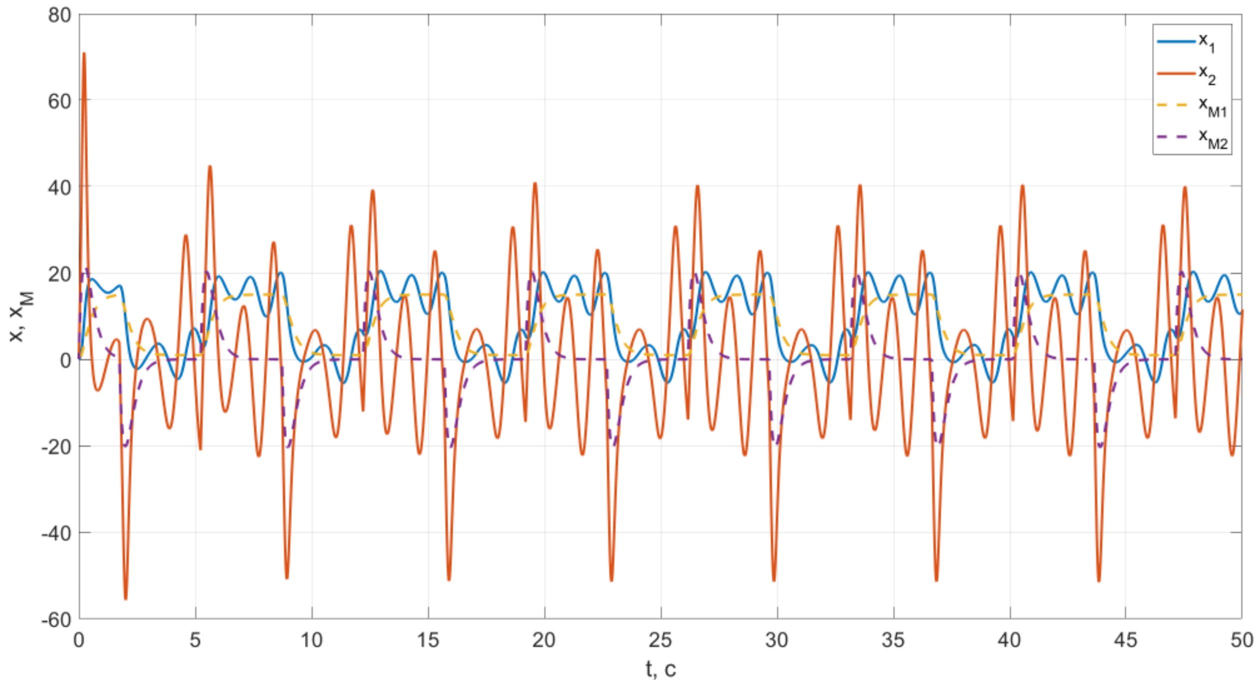

Рисунок 24. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 1, \gamma = 0.1, \delta \neq 0$.

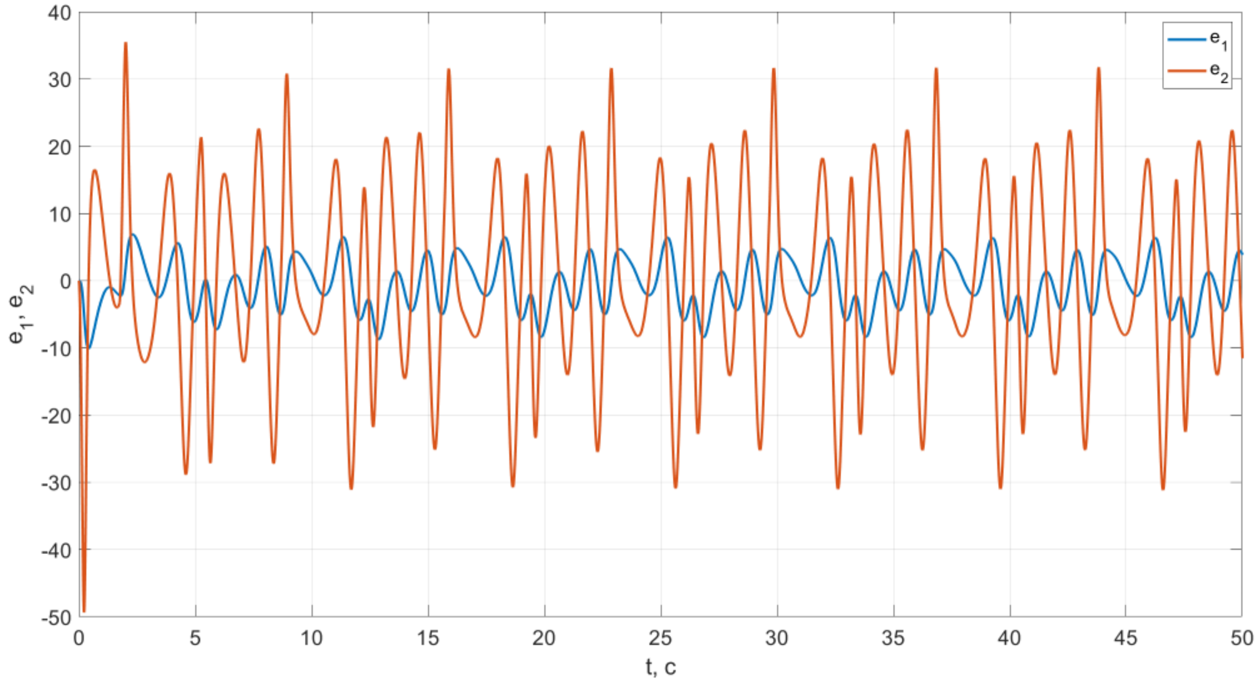

Рисунок 25. Графики компонент вектора ошибок системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 1, \gamma = 0.1, \delta \neq 0$.

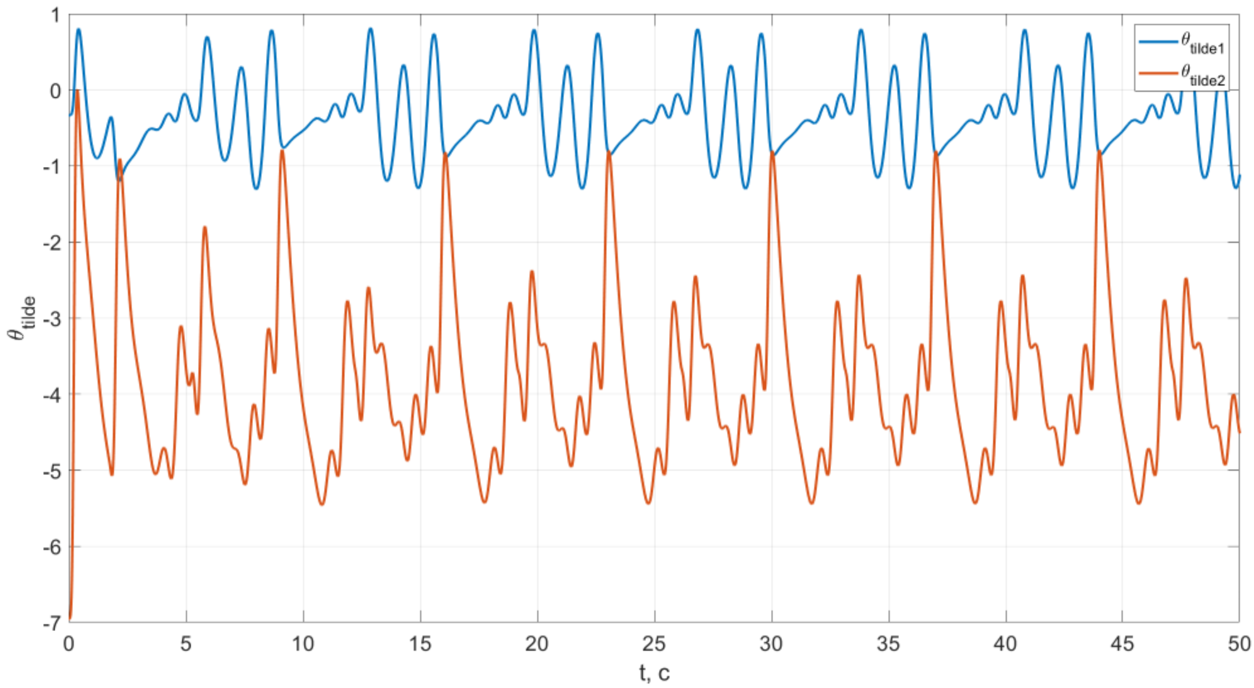

Рисунок 26. Графики компонент параметрической ошибки системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 1, \gamma = 0.1, \delta \neq 0$.

$$\gamma = 10$$

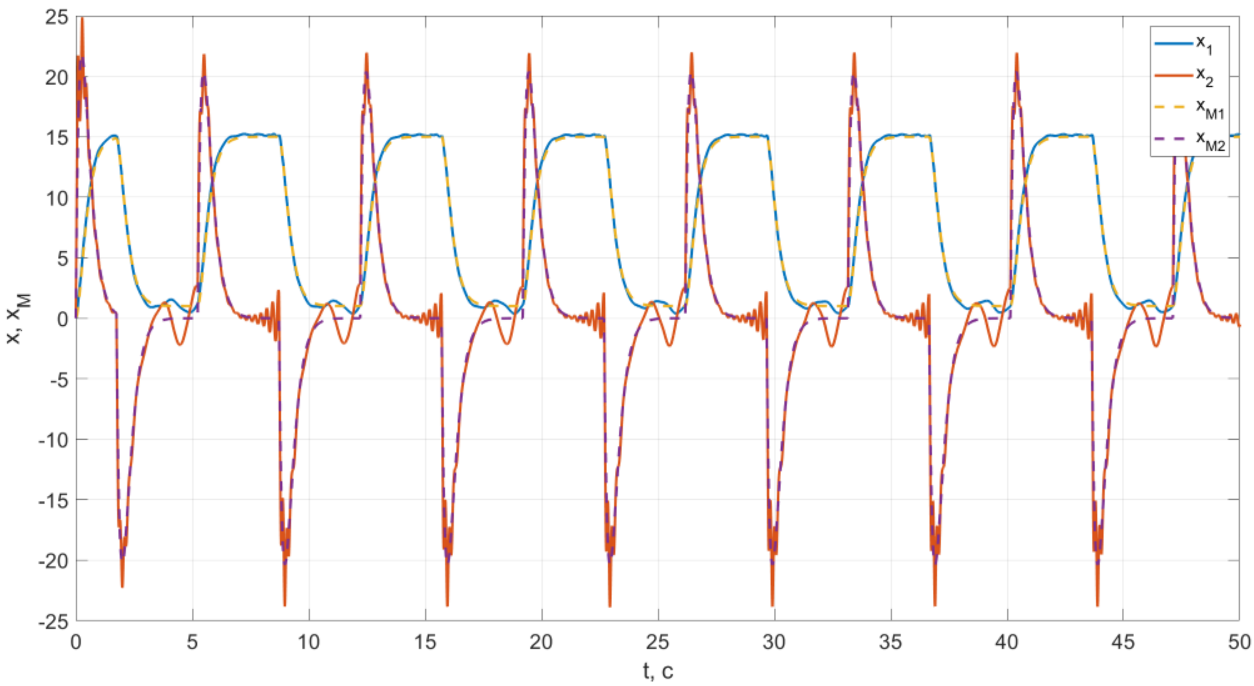

Рисунок 27. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 1, \gamma = 10, \delta \neq 0$.

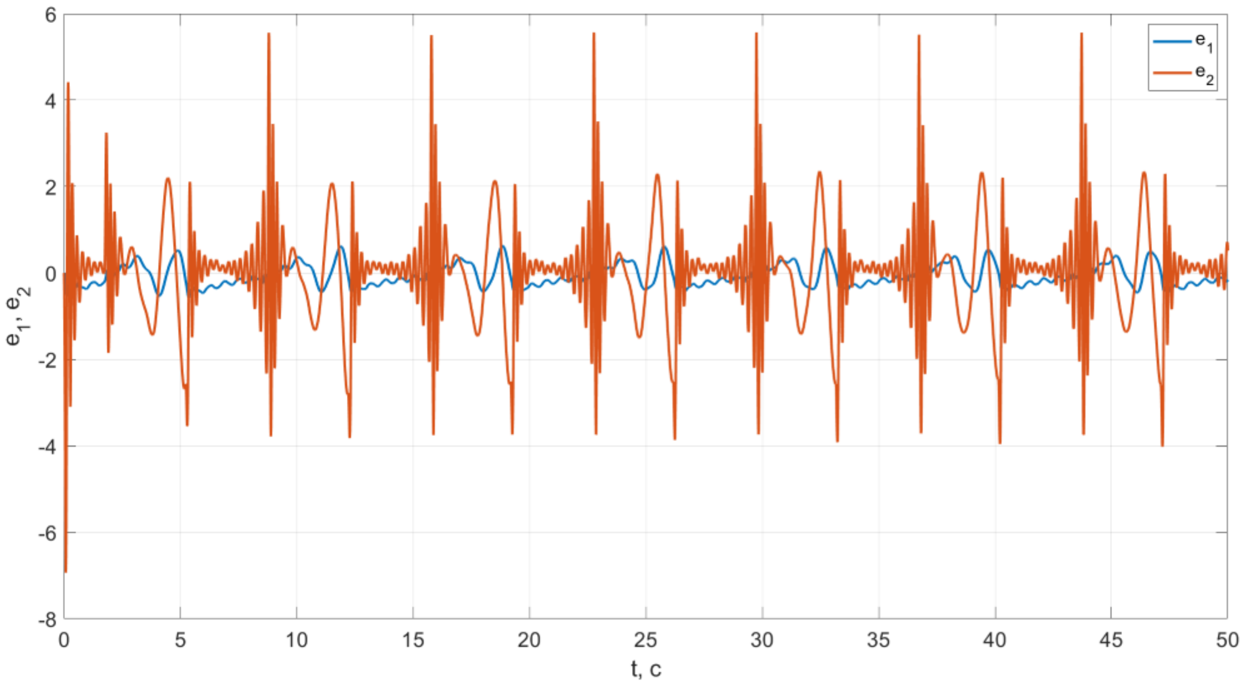

Рисунок 28. Графики компонент вектора ошибок системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 1, \gamma = 10, \delta \neq 0$.

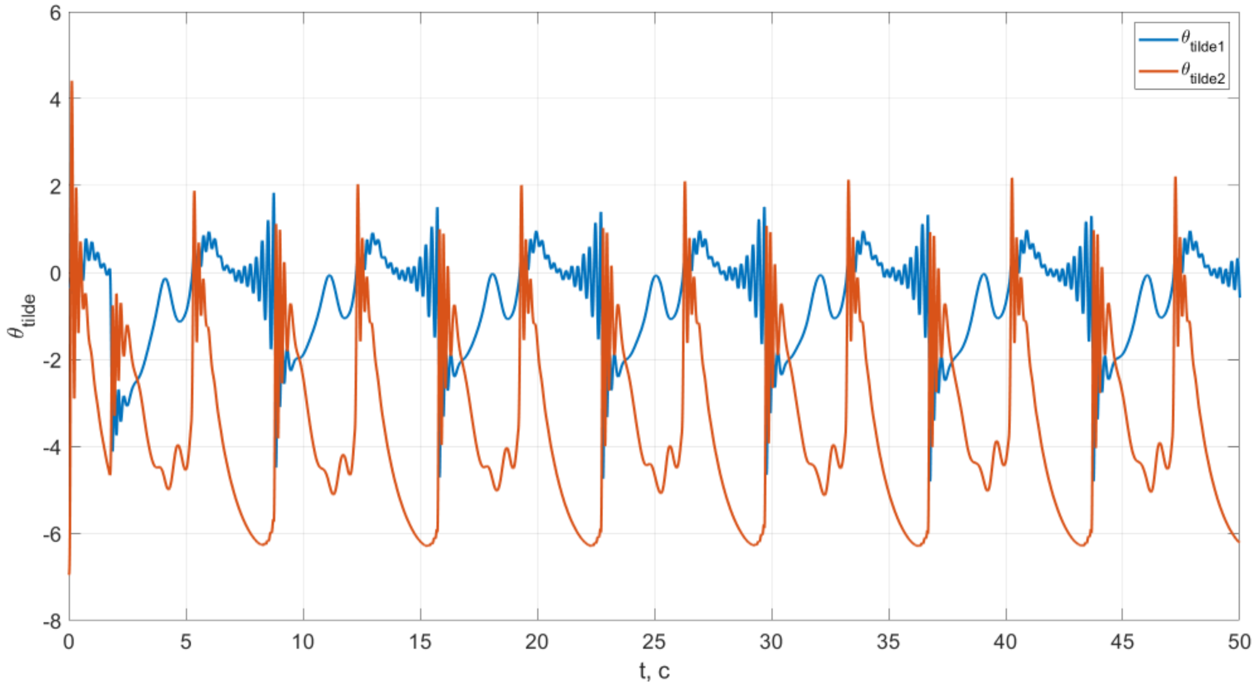

Рисунок 29. Графики компонент параметрической ошибки системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 1, \gamma = 10, \delta \neq 0$.

4.4. $\boldsymbol{\sigma = 0.1, \delta \equiv 0}$

$$\gamma = 0.1$$

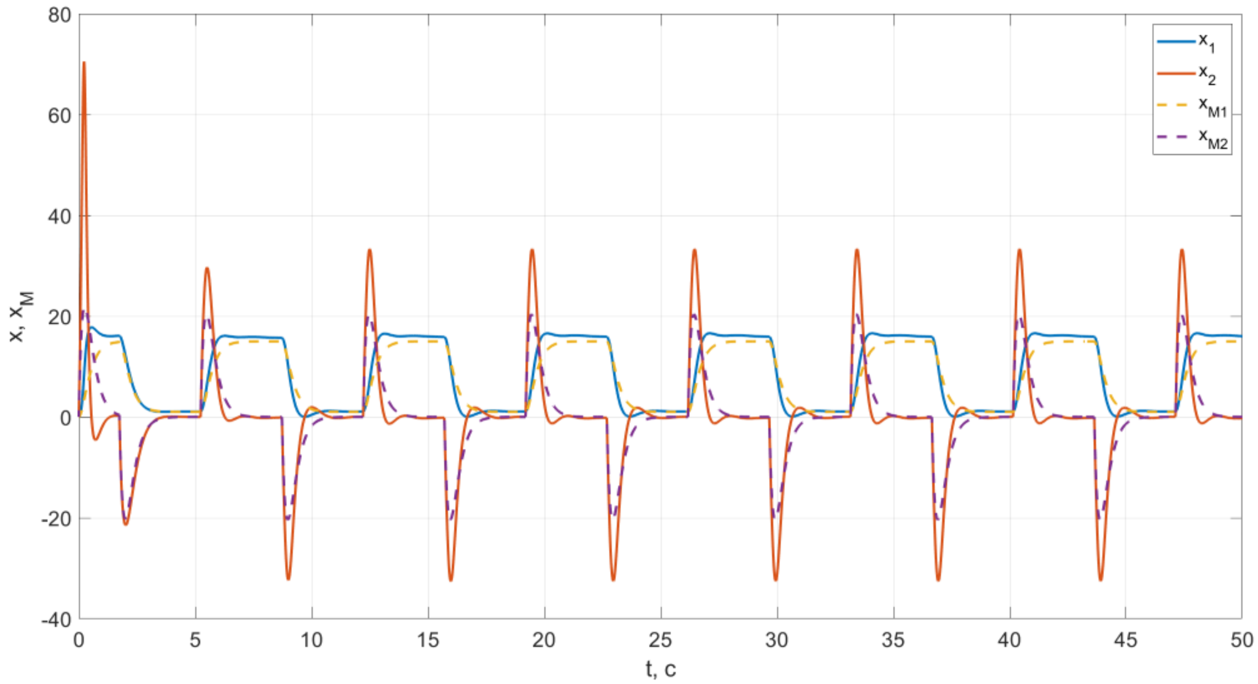

Рисунок 30. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 0.1, \gamma = 0.1, \delta \equiv 0$.

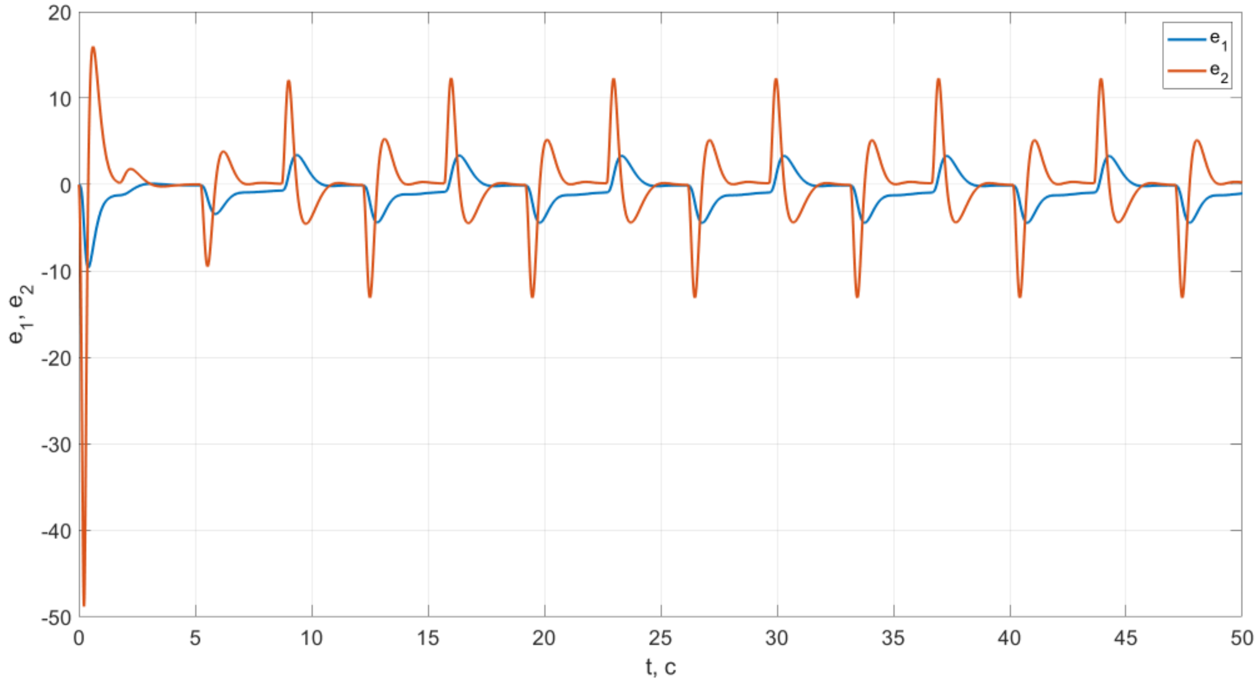

Рисунок 31. Графики компонент вектора ошибок системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 0.1, \gamma = 0.1, \delta \equiv 0$.

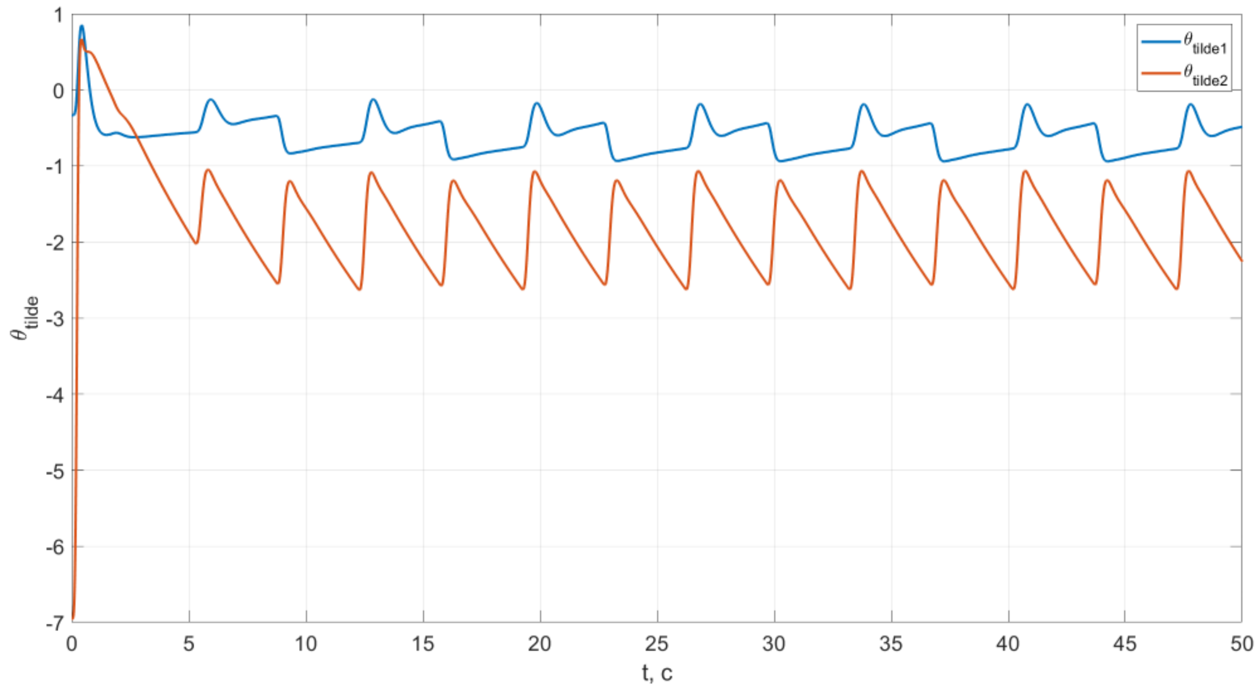

Рисунок 32. Графики компонент параметрической ошибки системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 0.1, \gamma = 0.1, \delta \equiv 0$.

$$\gamma = 10$$

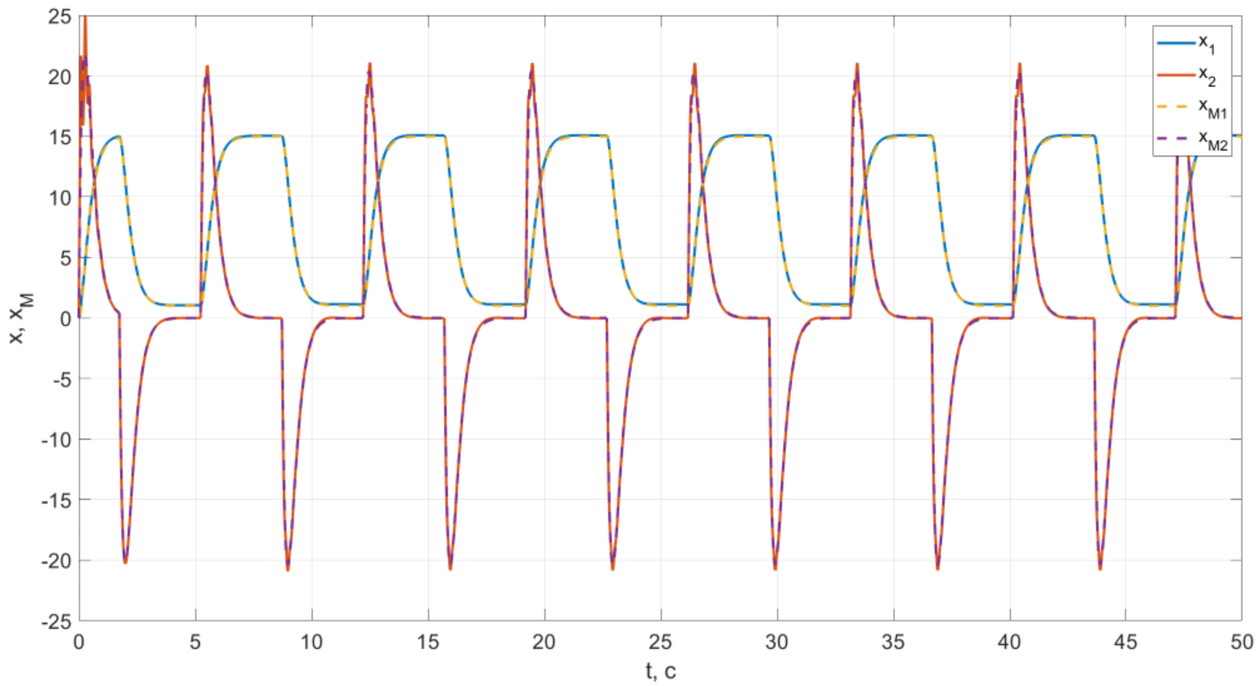

Рисунок 33. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 0.1, \gamma = 10, \delta \equiv 0$.

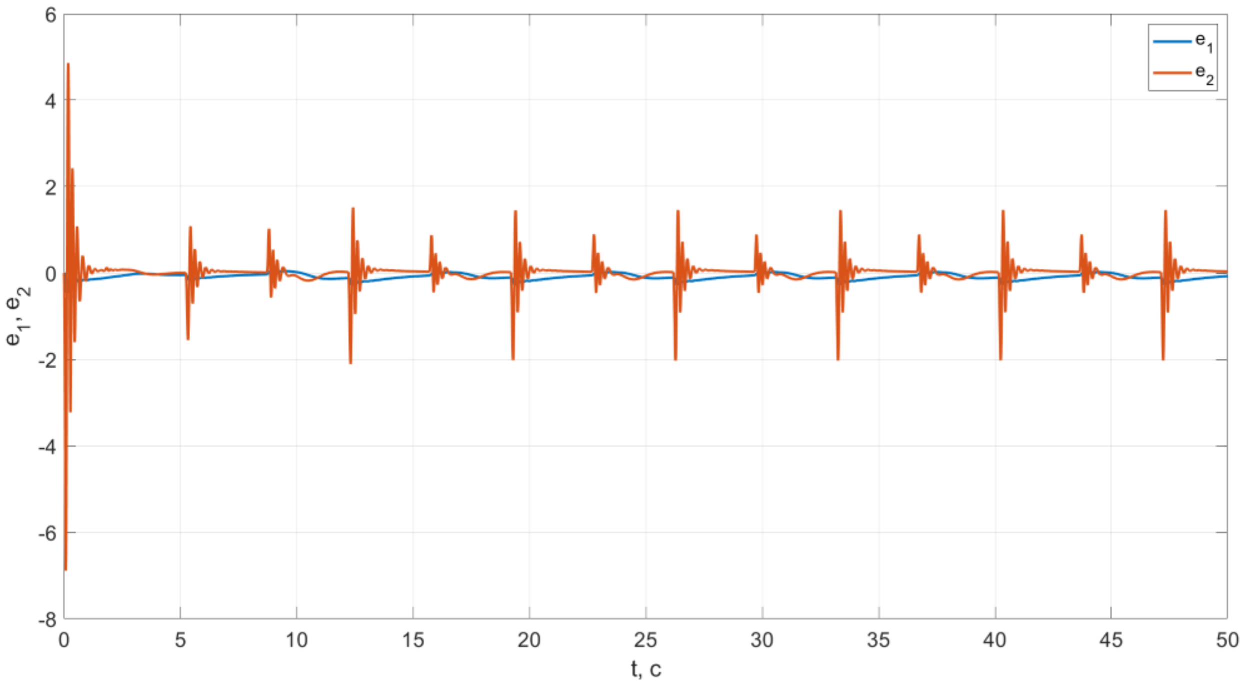

Рисунок 34. Графики компонент вектора ошибок системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 0.1, \gamma = 10, \delta \equiv 0$.

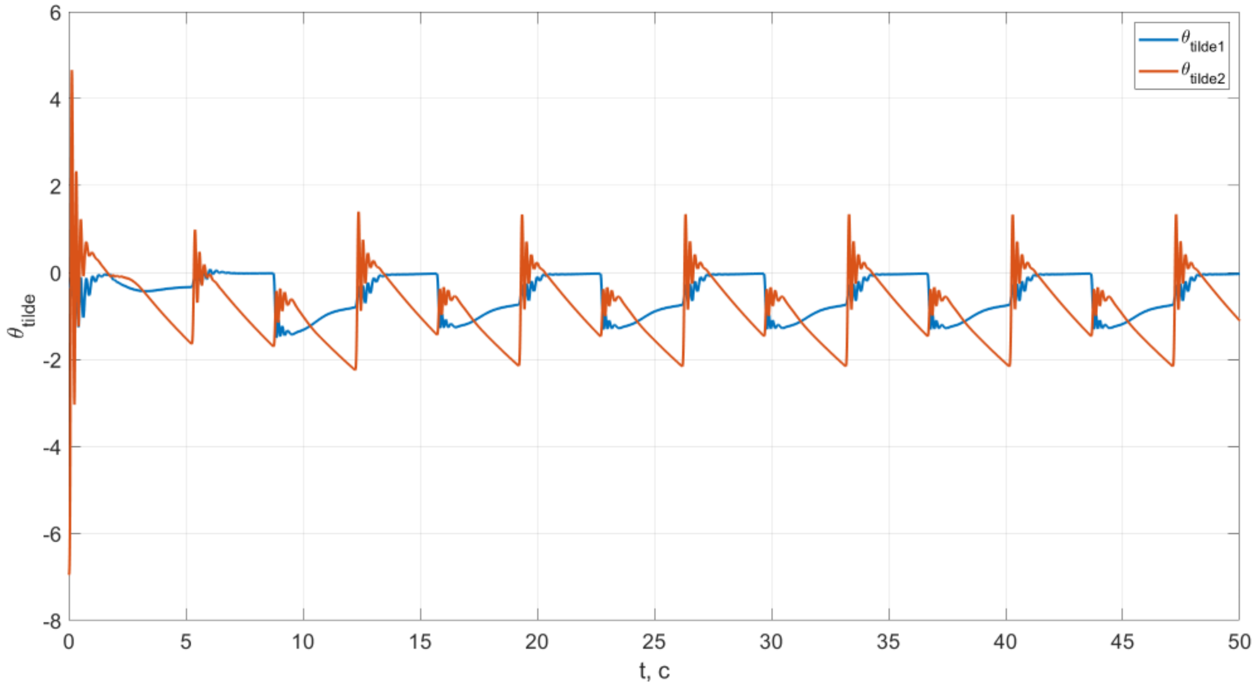

Рисунок 35.Графики компонент параметрической ошибки системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 0.1, \gamma = 10, \delta \equiv 0$.

4.5. $\boldsymbol{\sigma = 0.1, \delta \neq 0}$

$$\gamma = 0.1$$

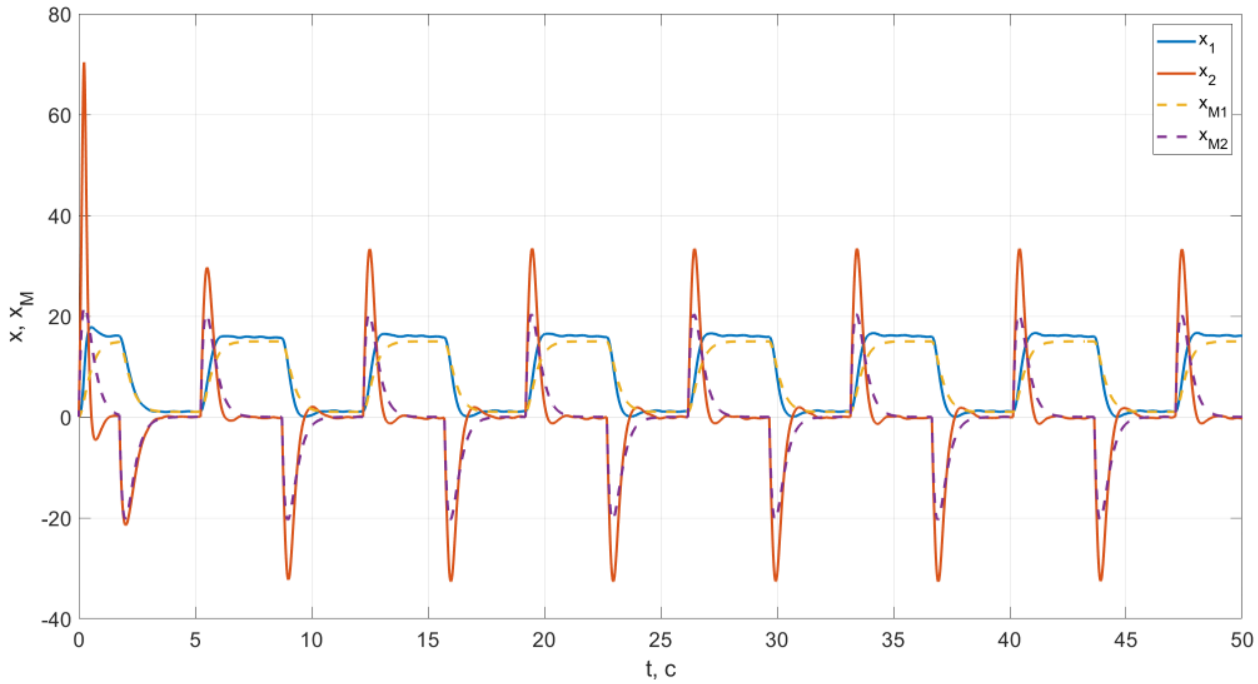

Рисунок 36. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 0.1, \gamma = 0.1, \delta \neq 0$.

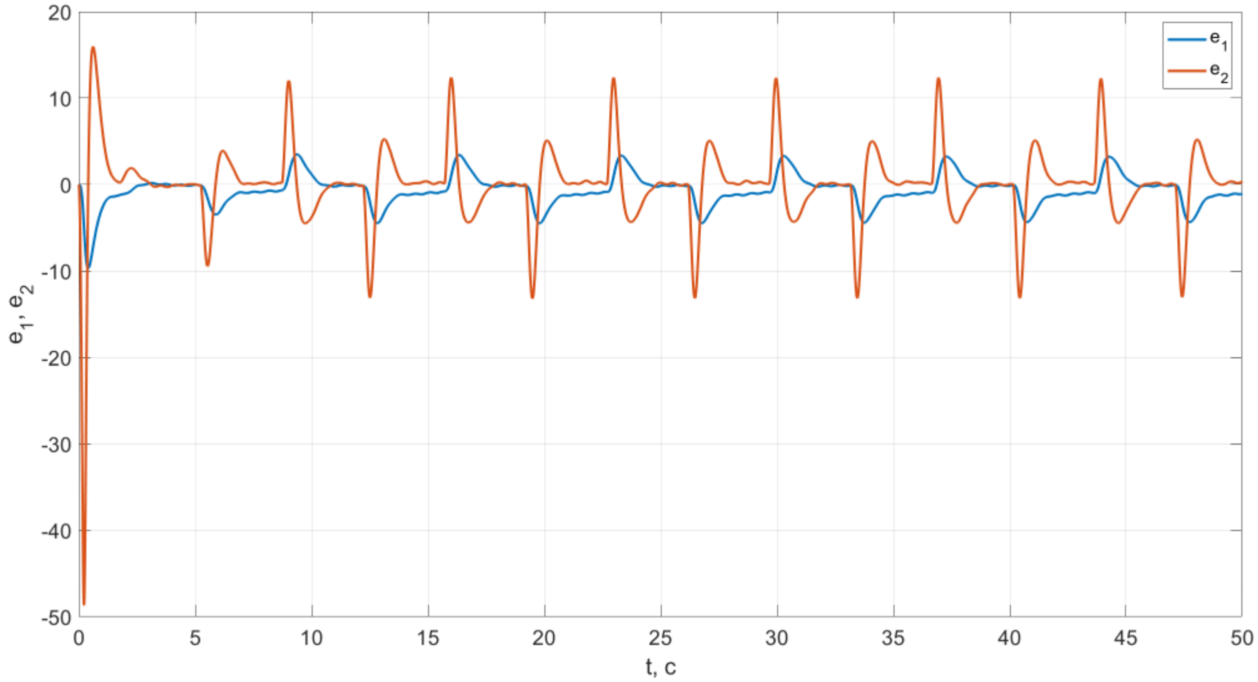

Рисунок 37. Графики компонент вектора ошибок системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 0.1, \gamma = 0.1, \delta \neq 0$.

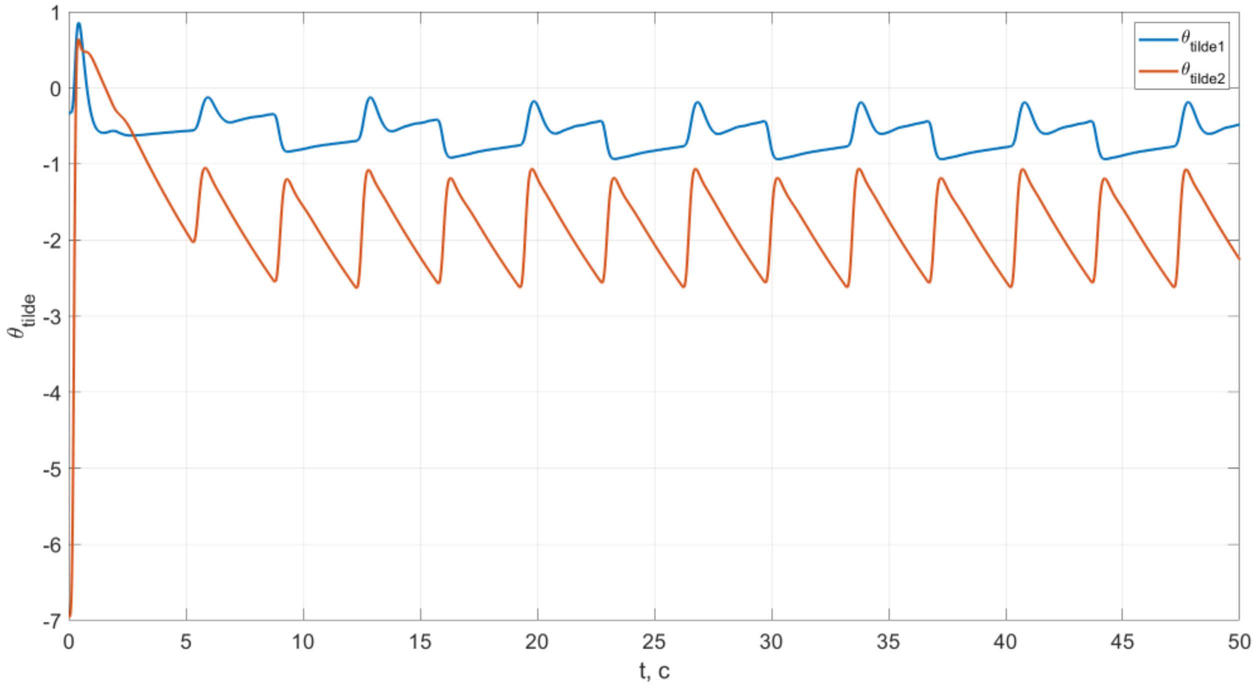

Рисунок 38. Графики компонент параметрической ошибки системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 0.1, \gamma = 0.1, \delta \neq 0$.

$$\gamma = 10$$

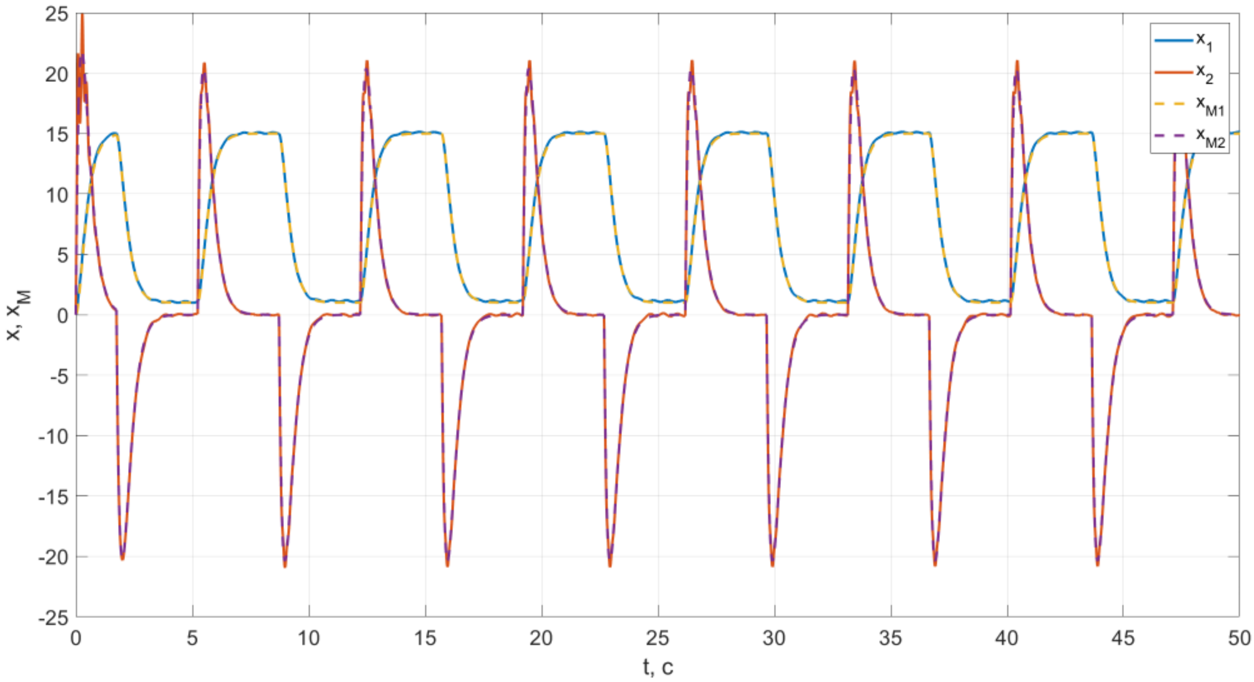

Рисунок 39. Графики векторов состояний реального объекта и эталонной модели системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 0.1, \gamma = 10, \delta \neq 0$.

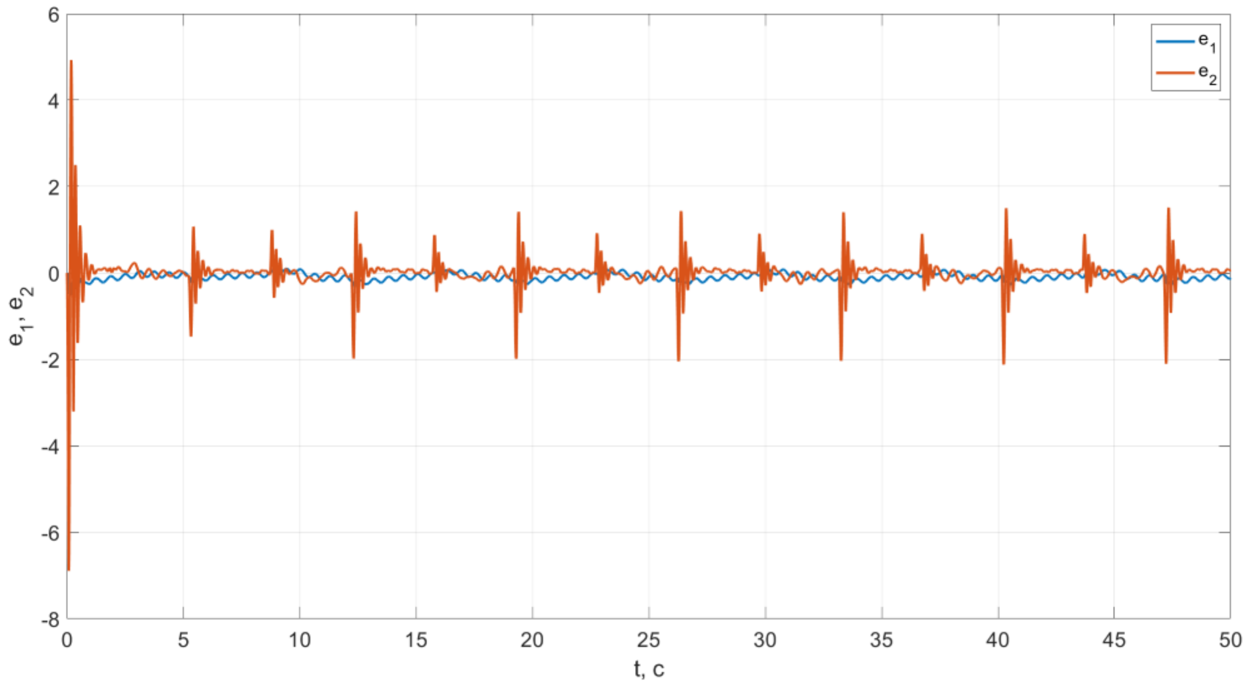

Рисунок 40. Графики компонент вектора ошибок системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 0.1, \gamma = 10, \delta \neq 0$.

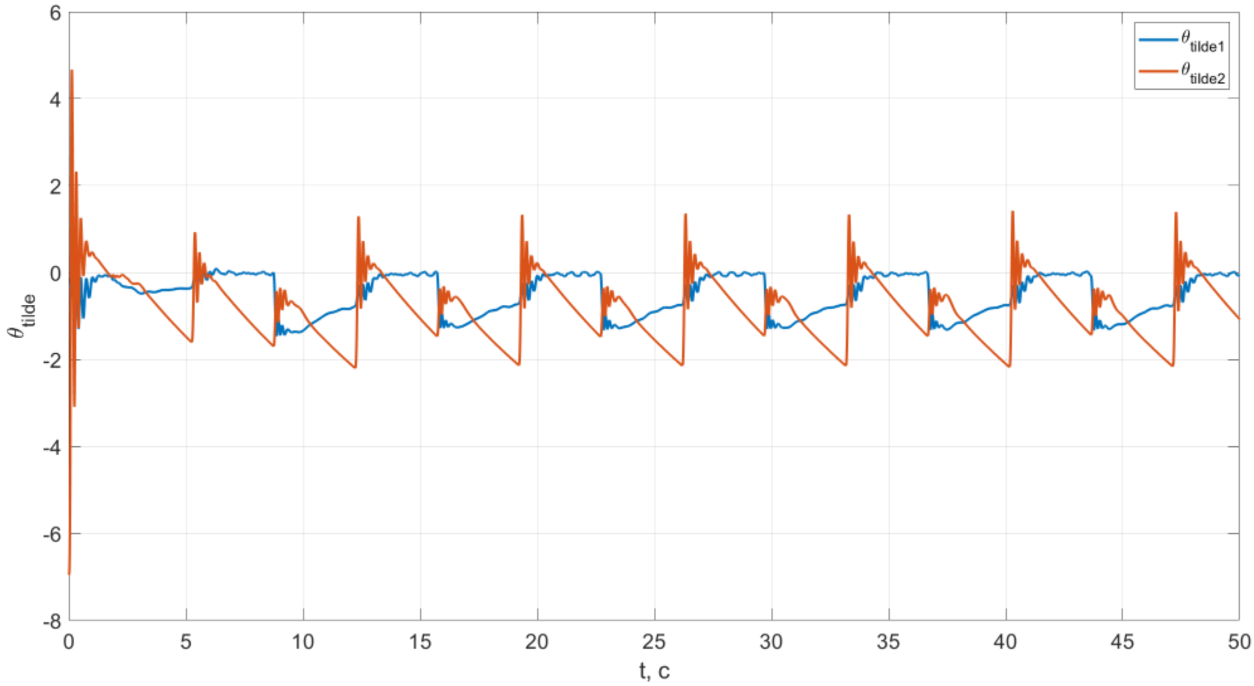

Рисунок 41. Графики компонент параметрической ошибки системы с адаптивным и робастным законом управления при $\sigma = 0.1, \gamma = 10, \delta \neq 0$.

Анализируя графики, можно сделать следующие выводы: добавление обратной параметрической связи в уравнение алгоритма адаптации позволяет ограничить параметрический дрейф и в итоге параметрическая ошибка ограничена.

При увеличении коэффициента адаптации – уменьшается ошибка слежения, а вместе с ней и параметрическая ошибка.

С помощью уменьшения параметра можно также снижать ошибку слежения, более того, если у нас отсутствуют внешние возмущения при обнулении параметра σ можно добиться асимптотической устойчивости ошибки слежения.

4. Выводы

В данной лабораторной работе были освоены принципы построения робастной системы управления многомерным объектом при наличии внешних возмущений.

В работе исследовались два алгоритма для обеспечения робастности системы по отношению к внешнему возмущению:

1. Нелинейное робастное управление: $u = \hat{\theta}^T x + \frac{1}{\kappa} g,\ \hat{\theta} = \gamma x b^T P e$

Данный подход обеспечивает:

- ограниченность всех сигналов в системе;
- экспоненциальную сходимость ошибки слежения к некоторой ограниченной области, регулируемой параметром γ;
- при нулевом внешнем возмущении ошибка слежения не будет равна нулю;
- квадратичный сигнал управления относительно вектора состояния;
- для уменьшения ошибки слежения, требуется увеличивать коэффициент γ, что влечет за собой увеличение амплитуды управляющего воздействия.

2. Адаптивное и робастное управление: $u = \hat{\theta}^T x + \frac{1}{\kappa} g,\ \dot{\hat{\theta}} = -\sigma\hat{\theta} + \gamma x b^T P e$

Данный подход обеспечивает:

- ограниченность всех сигналов в системе;
- экспоненциальную сходимость ошибки слежения и параметрической ошибки к некоторым ограниченным областям, регулируемыми параметрами γ и σ;
- при нулевом внешнем возмущении требуется занулить σ для асимптотической устойчивости ошибки слежения;
- для уменьшения ошибки слежения, не требуется увеличивать коэффициент γ, можно обеспечивать это путем уменьшения σ.