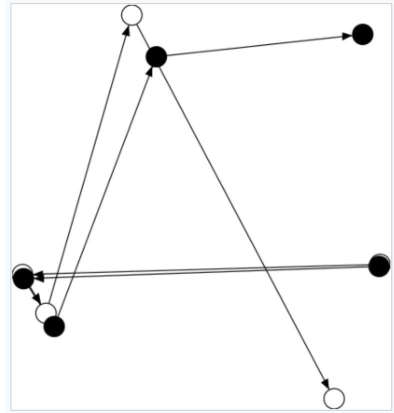
Хаос в нелинейных системах

Описание

Теория хаоса – область науки, которая изучает закономерности и законы динамических систем, которые в большой степени чувствительны к начальным условиям. Теория хаоса говорит о том, что несмотря на кажущуюся случайность хаотических систем, существуют основополагающие закономерности, взаимосвязи, самоподобие, фракталы и петли обратной связи.



The map defined by $x \rightarrow 4x(1-x)$ and $y \rightarrow (x+y) \bmod 1$ displays sensitivity to initial x positions. Here, two series of x and y values diverge markedly over time from a tiny initial difference.

Знаменитый эффект бабочки является основным принципом хаоса, он описывает как малое изменение в детерминированной (система, в которой нет случайности в развитии системы в будущем, такая модель всегда производит одинаковый результат при определенных начальных условиях) нелинейной системе может привести к большим различиям в более поздних состояниях. Это означает, что такая система чувствительна к начальным условиям (полная противоположность робастной системы).

Маленькие различия в начальных условиях, такие как погрешности в измерениях или ошибки округления (да и, вообще говоря, состояние физической системы не может быть измерено абсолютно точно), могут выдавать сильно расходящиеся выходы для таких систем, делающие невозможным долгосрочное предсказывание в целом.

Стоит отметить, что хаос может появляться даже в полностью детерминированных системах.

Хаотичное поведение существует во многих природных системах, например течение потока жидкости, нарушения сердцебиения, погода и климат.

Такое поведение может быть изучено с помощью анализа хаотичной математической модели (?), или с помощью аналитических методов, таких как рекуррентные графики (recurrence plots) и карты Пуанкаре (Poincare maps).

Теория хаоса занимается детерминированными системами, чье поведение, вообще говоря, может быть предсказано. Хаотические системы предсказуемы на какой-то промежуток времени, а затем кажутся случайными.

Отрезок времени, в котором система может быть успешно предсказуема, зависит от трех условий:

1. Какое количество неопределенности можно допустить в прогнозе.
2. Насколько точно можно измерить текущее состояние системы.
3. Время Ляпунова – временной отрезок, за который система приводится в полный хаос.

Время Ляпунова

Данное понятие отражает пределы предсказуемости системы.

Время Ляпунова позволяет нам ввести интервал времени, в течение которого выражение «две одинаковые» системы, соответствующие одним и тем же начальным условиям, сохраняет смысл (допускает в определённой мере предсказание). После достаточно продолжительного по сравнению с временем Ляпунова периода эволюции, память о начальном состоянии системы полностью утрачивается: задание начального состояния не позволяет более определить траекторию.

Оно определено как время, за которое расстояние между двумя соседними траекториями системы возрастает в e раз.

Определяется как число, обратное к наибольшей из экспонент Ляпунова системы.

Экспонента Ляпунова – значение, которое характеризует скорость разделения бесконечно близких траекторий.

Пусть у нас есть две траектории в фазовом пространстве, имеющие начальный вектор разделения $\delta(0)$. Если данные векторы расходятся со скоростью, заданной как,

$$\|\delta(t)\| \approx \|\delta(0)\| e^{\lambda t}, \quad (1)$$

где λ – экспонента Ляпунова.

Исходя из этого, можно вычислить максимальную экспоненту Ляпунова (MLE).

Стоит отметить, что положительное значение MLE является индикатором, который и говорит нам, что система является хаотической.

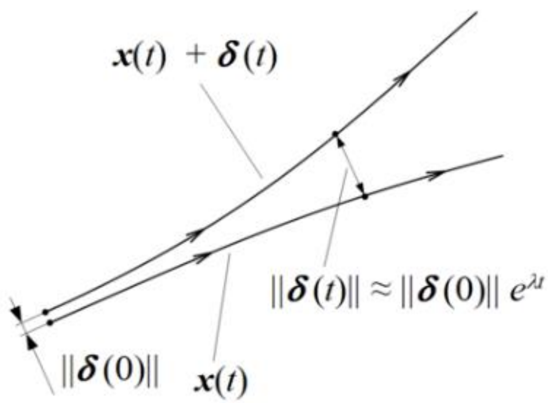
Выведем MLE из уравнения (1).

$$e^{\lambda t} \approx \frac{\|\delta(t)\|}{\|\delta(0)\|}$$

$$\ln\left(e^{\lambda t}\right) \approx \ln\left(\frac{\|\delta(t)\|}{\|\delta(0)\|}\right)$$

$$\lambda \approx \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\|\delta(t)\|}{\|\delta(0)\|}\right)$$

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \lim_{\|\delta(0)\|\to 0} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\|\delta(t)\|}{\|\delta(0)\|}\right)$$



Для дискретных систем $x_{n+1} = f(x_n)$, начальное состояние равное x_0:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln\left(\|f'(x_i)\|\right).$$

Например, время Ляпунова динамической системы Солнечной системы, находится в интервале от 4 до 5 миллионов лет.

Хаотическая динамика

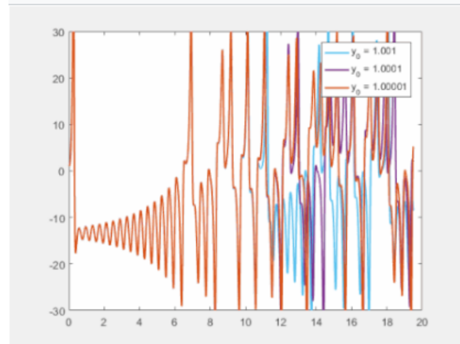
Признаки динамической системы (сформулированы Робертом Деване):

1. Система должна быть чувствительна к начальным условиям.
2. Должна быть топологически транзитивна.
3. Должна иметь плотные периодические траектории

Чувствительность к начальным условиям

Чувствительность к начальным условиям означает, что каждая точка в хаотической системе произвольно приближается к другим точкам, которые имеют значительно отличающиеся будущие пути или траектории. Таким образом, произвольно малое изменение или возмущение текущей траектории может привести к значительному изменению будущего поведения.

Следствием чувствительности к начальным условиям является то, что если мы начинаем с ограниченного количества информации о системе (как это обычно бывает на практике), то после определенного времени система перестает быть предсказуемой.



Lorenz equations used to generate plots for the y variable. The initial conditions for *x* and *z* were kept the same but those for *y* were changed between **1.001**, **1.0001** and **1.00001**. The values for ρ, σ and β were **45.92**, **16** and **4** respectively. As can be seen from the graph, even the slightest difference in initial values causes significant changes after about 12 seconds of evolution in the three cases. This is an example of sensitive dependence on initial conditions.

Топологическое смешивание

Топологическое смешивание означает, что система эволюционирует таким образом, что любая выбранная область или открытое множество фазового пространства системы в итоге пересекается с любой другой данной областью.

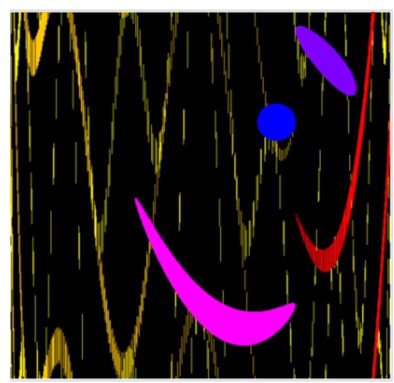
Топологическое смешивание часто не учитывается в популярных представлениях о хаосе, которые приравнивают хаос только к чувствительности к начальным условиям. Однако чувствительная зависимость от начальных условий сама по себе может не давать хаоса.

Например, рассмотрим простую динамическую систему, созданную путем многократного удвоения начального значения. Эта система везде имеет чувствительную зависимость от начальных условий, поскольку любая пара близлежащих точек в итоге становится сильно разделенной. Однако в этом примере нет топологического смешения, а значит, нет и хаоса. Действительно, он имеет чрезвычайно простое поведение: все точки, кроме 0, стремятся к положительной или отрицательной бесконечности.

Топологическая транзитивность

Отображение $f: X \to X$ называется топологически транзитивным, если для любой пары ненулевых открытых множеств $U, V \subset X$, существует $k > 0$ такой, что $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Интуитивно понятно, что если карта топологически транзитивна, то при заданной точке x и области V существует точка y вблизи x, траектория которой проходит через V. Из этого следует, что невозможно разложить систему на два открытых множества.



The map defined by *x* → 4 *x* (1 – *x*) and *y* → (*x* + *y*) mod 1 also displays topological mixing. Here, the blue region is transformed by the dynamics first to the purple region, then to the pink and red regions, and eventually to a cloud of vertical lines scattered across the space.

Плотность периодических траекторий

Для хаотической системы наличие плотных периодических траекторий означает, что каждая точка в пространстве приближается к периодическим траекториям произвольно близко.

Одномерная логистическая карта, определяемая $x \to 4x(1-x)$, является одной из простейших систем с плотностью периодических траекторий.

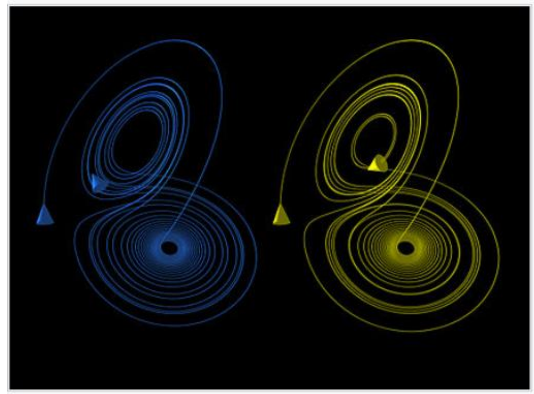
Например, $\frac{5-\sqrt{5}}{8} \to \frac{5+\sqrt{5}}{8} \to \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ (или примерно $0.3454915 \to 0.9045085 \to 0.3454915$) это (неустойчивая) траектория с периодом 2, и подобные траектории существуют для периодов 4, 8, 16 и т.д.

Странные аттракторы

Аттрактор — подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности. Аттрактором может являться притягивающая неподвижная точка (к примеру, в задаче о маятнике с трением о воздух), периодическая траектория (пример — самовозбуждающиеся колебания в контуре с положительной обратной связью), или некоторая ограниченная область с неустойчивыми траекториями внутри (как у странного аттрактора).

Некоторые динамические системы, такие как одномерная логистическая карта, определяемая $x \to 4x(1-x)$, хаотичны везде, но во многих случаях хаотическое поведение обнаруживается только в некотором подмножестве фазового пространства.

Наибольший интерес представляют случаи, когда хаотическое поведение происходит на аттракторе, поскольку тогда большой набор начальных условий приводит к траекториям, которые сходятся к этой хаотической области.



The Lorenz attractor displays chaotic behavior. These two plots demonstrate sensitive dependence on initial conditions within the region of phase space occupied by the attractor.

Бассейн притяжения аттрактора — это область фазового пространства, такая, что любая точка (любое начальное условие) в этой области будет асимптотически итерироваться в аттрактор. Например, для устойчивой линейной системы каждая точка фазового пространства находится в бассейне притяжения.

Простой способ визуализации хаотического аттрактора - начать с точки в бассейне притяжения аттрактора, а затем просто построить его последующую траекторию. В силу условия топологической транзитивности это, скорее всего, даст картину всего конечного аттрактора, и действительно, обе траектории, показанные на рисунке справа, дают представление об общей форме аттрактора Лоренца. Этот аттрактор возникает в результате простой трехмерной модели погодной системы Лоренца.

Моделирование системы Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}, \quad \sigma = 10, \rho = 28, \beta = \frac{8}{3}.$$

Построение фазовых траекторий такой системы, образует странный аттрактор. Свойства такого аттрактора:

1. Это означает, что ни одна точка в пространстве не будет посещена одной траекторией больше 1 раза. Иначе, траектория бы стала двигаться в предсказуемом цикле.
2. Никакие две траектории никогда не пересекутся. Иначе они бы соединились в одну. И тогда бы два разных начальных условия соответствовали одному исходу.

Таким образом, одна отдельно взятая траектория посетит бесконечное число точек в ограниченном пространстве. А также данное ограниченное пространство будет иметь бесконечное число траекторий.

Так как неважно, насколько мы приближаем наш график, мы будет находить все больше и больше бесконечных траекторий. Из-за этого линии траекторий имеют размерность ≈ 2.06.

Итого, множество точек аттрактора Лоренца – фрактальное пространство. Поэтому такой аттрактор и называется странным.

Моделирование двойного маятника

$$\theta_1'' = \frac{-g\,(2\,m_1 + m_2)\sin\theta_1 - m_2\,g\sin(\theta_1 - 2\,\theta_2) - 2\sin(\theta_1 - \theta_2)\,m_2\,({\theta_2'}^2\,L_2 + {\theta_1'}^2\,L_1\cos(\theta_1 - \theta_2))}{L_1\,(2\,m_1 + m_2 - m_2\cos(2\,\theta_1 - 2\,\theta_2))}$$

$$\theta_2'' = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)\,({\theta_1'}^2\,L_1\,(m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + {\theta_2'}^2\,L_2\,m_2\cos(\theta_1 - \theta_2))}{L_2\,(2\,m_1 + m_2 - m_2\cos(2\,\theta_1 - 2\,\theta_2))}$$