

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №6
«Устойчивость систем с запаздыванием»
по дисциплине «Теория автоматического управления»

Выполнил: студент гр. R3238,

Кирбаба Д.Д.

Преподаватель: Перегудин А.А.,

ассистент фак. СУиР

г. Санкт-Петербург

2022

Цель работы

Исследование управляемости и наблюдаемости на примере динамических систем

Начальные данные

7 вариант

Исходные данные для задания 1:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Исходные данные для задания 2:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_1' = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_1'' = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Исходные данные для задания 3:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = [3 \quad -2 \quad 3], \quad y(t) = -3e^{-4t} \cos(2t) + 2e^{-4t} \sin(2t)$$

Исходные данные для задания 4:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = [3 \quad 0 \quad 3], \quad y(t) = -3e^{-4t} \cos(2t) + 2e^{-4t} \sin(2t)$$

Выполнение работы

Задание 1.

1.1. Матрица управляемости

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} u$$

Матрица управляемости системы:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} -7 & 31 & -43 \\ -5 & 15 & -5 \\ 7 & -21 & 23 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(C) = 3$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы, то по критерию Калмана система полностью управляема.

1.2. Управляемость собственных чисел

Собственные числа матрицы A :

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1 + 2i, \quad \lambda_3 = -1 - 2i$$

Собственные вектора матрицы A :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3-i \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -3+i \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ЖНФ матрицы A :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3-i & -3+i \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1+2i & 0 \\ 0 & 0 & -1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{i}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{i}{4} \\ -\frac{i}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{i}{4} \end{bmatrix}$$

Перепишем в вещественном виде:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & \frac{3}{2} & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма системы:

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ -\frac{15}{2} \end{bmatrix} u$$

Управляемость собственных чисел:

$$\lambda_1 = -3$$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа не равны нулю, то собственное число управляемо.

Проверка ранговым критерием:

$$[A - \lambda_1 E \quad B] = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 8 & -7 \\ 4 & 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}([A - \lambda_1 E \quad B]) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число управляемо.

$$\lambda_2 = -1 + 2i$$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа не равны нулю, то собственное число управляемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер 2×2 .

Проверка ранговым критерием:

$$[A - \lambda_2 E \quad B] = \begin{bmatrix} 6-2i & -2 & 8 & -7 \\ 4 & -2-2i & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6-2i & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}([A - \lambda_2 E \quad B]) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число управляемо.

$$\lambda_3 = -1 - 2i$$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа не равны нулю, то собственное число управляемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер 2×2 .

Проверка ранговым критерием:

$$[A - \lambda_3 E \quad B] = \begin{bmatrix} 6+2i & -2 & 8 & -7 \\ 4 & -2+2i & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6+2i & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}([A - \lambda_3 E \quad B]) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число управляемо.

1.3. Управляемое подпространство

Управляемое подпространство:

$$\text{Range } C = \text{Range} \begin{bmatrix} -7 & 31 & -43 \\ -5 & 15 & -5 \\ 7 & -21 & 23 \end{bmatrix} = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 31 \\ 15 \\ -21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -43 \\ -5 \\ 23 \end{bmatrix} \right) = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{R}^3$$

Точка x_1 принадлежит $\text{Range } C$, если $\text{rank } C = \text{rank}[C \quad x_1]$.

Проверим это:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} -7 & 31 & -43 & -2 \\ -5 & 15 & -5 & -3 \\ 7 & -21 & 23 & 3 \end{bmatrix} = 3 = \text{rank } C$$

Значит точка x_1 принадлежит управляемому подпространству системы.

1.4. Грамиан управляемости системы

$$t_1 = 3$$

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos[2t] + 3e^{-t} \sin[2t] & -e^{-3t} + e^{-t} \cos[2t] - 2e^{-t} \sin[2t] & -e^{-3t} + e^{-t} \cos[2t] + 3e^{-t} \sin[2t] \\ 2e^{-t} \sin[2t] & e^{-t} \cos[2t] - e^{-t} \sin[2t] & 2e^{-t} \sin[2t] \\ -2e^{-t} \sin[2t] & e^{-3t} - e^{-t} \cos[2t] + e^{-t} \sin[2t] & e^{-3t} - 2e^{-t} \sin[2t] \end{bmatrix}$$

$$e^{A^T t} = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos[2t] + 3e^{-t} \sin[2t] & 2e^{-t} \sin[2t] & -2e^{-t} \sin[2t] \\ -e^{-3t} + e^{-t} \cos[2t] - 2e^{-t} \sin[2t] & e^{-t} \cos[2t] - e^{-t} \sin[2t] & e^{-3t} - e^{-t} \cos[2t] + e^{-t} \sin[2t] \\ -e^{-3t} + e^{-t} \cos[2t] + 3e^{-t} \sin[2t] & 2e^{-t} \sin[2t] & e^{-3t} - 2e^{-t} \sin[2t] \end{bmatrix}$$

$$B B^T = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 35 & -49 \\ 35 & 25 & -35 \\ -49 & -35 & 49 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} B B^T e^{A^T t} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-6t}(2 + 5e^{2t} \cos[2t] - 10e^{2t} \sin[2t])^2 & 5e^{-4t}(\cos[2t] - \sin[2t])(2 + 5e^{2t} \cos[2t] - 10e^{2t} \sin[2t]) & -e^{-6t}(2 + 5e^{2t} \cos[2t] - 10e^{2t} \sin[2t])(2 + 5e^{2t} \cos[2t] - 5e^{2t} \sin[2t]) \\ 5e^{-4t}(\cos[2t] - \sin[2t])(2 + 5e^{2t} \cos[2t] - 10e^{2t} \sin[2t]) & 25e^{-2t}(\cos[2t] - \sin[2t])^2 & -5e^{-4t}(\cos[2t] - \sin[2t])(2 + 5e^{2t} \cos[2t] - 5e^{2t} \sin[2t]) \\ -e^{-6t}(2 + 5e^{2t} \cos[2t] - 10e^{2t} \sin[2t])(2 + 5e^{2t} \cos[2t] - 5e^{2t} \sin[2t]) & -5e^{-4t}(\cos[2t] - \sin[2t])(2 + 5e^{2t} \cos[2t] - 5e^{2t} \sin[2t]) & e^{-6t}(2 + 5e^{2t} \cos[2t] - 5e^{2t} \sin[2t])^2 \end{bmatrix}$$

$$P(3) = \int_0^3 e^{At} B B^T e^{A^T t} dt = \begin{bmatrix} 18.121 & 10.97 & -11.636 \\ 10.97 & 7.4762 & -8.4761 \\ -11.636 & -8.4761 & 10.142 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 33.743, \quad \lambda_2 = 1.9479, \quad \lambda_3 = 0.049779$$

1.5. Программное управление

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} (P(t_1))^{-1} x(t_1), \quad t_1 = 3$$

$$B^T = [-7 \quad -5 \quad 7]$$

$$e^{A^T(3-t)} = \begin{bmatrix} e^{-3+t} \cos[6-2t] + 3e^{-3+t} \sin[6-2t] & 2e^{-3+t} \sin[6-2t] & -2e^{-3+t} \sin[6-2t] \\ -e^{-9+3t} + e^{-3+t} \cos[6-2t] - 2e^{-3+t} \sin[6-2t] & e^{-3+t} \cos[6-2t] - e^{-3+t} \sin[6-2t] & e^{-9+3t} - e^{-3+t} \cos[6-2t] + e^{-3+t} \sin[6-2t] \\ -e^{-9+3t} + e^{-3+t} \cos[6-2t] + 3e^{-3+t} \sin[6-2t] & 2e^{-3+t} \sin[6-2t] & e^{-9+3t} - 2e^{-3+t} \sin[6-2t] \end{bmatrix}$$

$$(P(3))^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2177 & -3.8612 & -1.8296 \\ -3.8612 & 14.788 & 7.9288 \\ -1.8296 & 7.9288 & 4.6254 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = -0.002446e^{3t} + 2.7183t(0.734 \cos(6-2t) + 0.1772 \sin(6-2t))$$

1.6. Моделирование системы

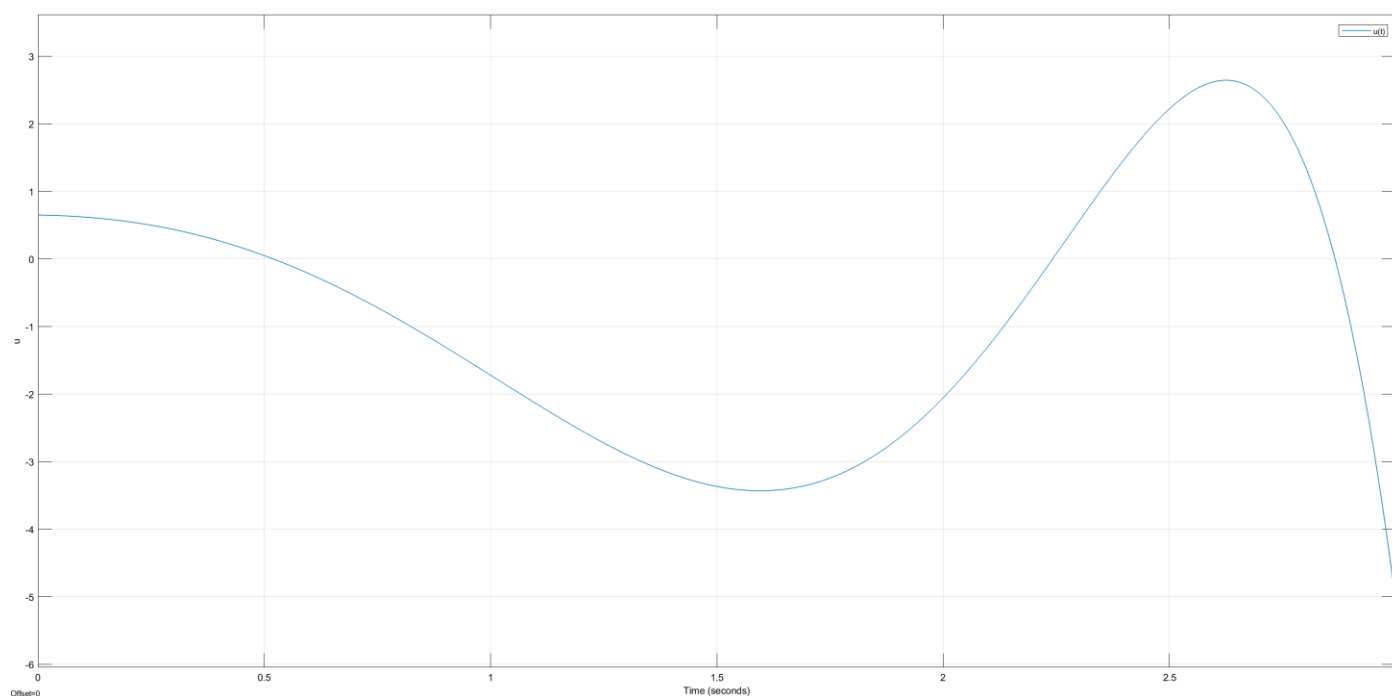


Рисунок 1: график сигнала управления $u(t)$

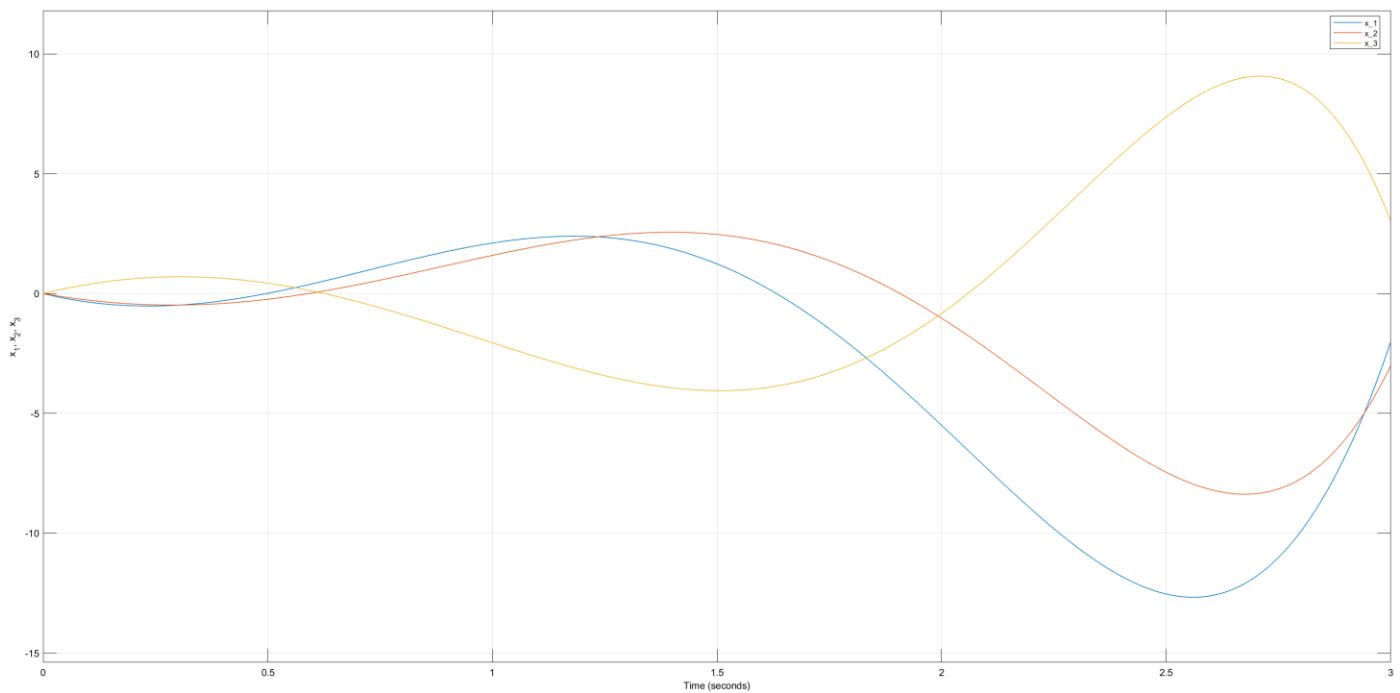


Рисунок 2: графики компонент вектора $x(t)$

Так как графики показывают, что система при вычисленном нами управлении $u(t)$ приходит в состояние $x(3) = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, то выполненные расчеты верны.

Задание 2.

2.1. Матрица управляемости

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

Матрица управляемости системы:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 \\ -3 & 17 & -19 \\ 3 & -17 & 19 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(C) = 2$$

Критерий Калмана не выполнен, а значит система не является полностью управляемой.

2.2. Управляемое подпространство системы

Управляемое подпространство:

$$\text{Range } C = \text{Range} \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 \\ -3 & 17 & -19 \\ 3 & -17 & 19 \end{bmatrix} = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 25 \\ 17 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -45 \\ -19 \\ 19 \end{bmatrix} \right) = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Проверка точек на принадлежность управляемому подпространству системы:

$$x'_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x''_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Для того чтобы точка принадлежала $\text{Range } C$, необходимо чтобы ранги матрицы управляемости и соответствующей ей присоединенной матрицы с данным вектором.

$$x'_1: \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 & -2 \\ -3 & 17 & -19 & -3 \\ 3 & -17 & 19 & 3 \end{bmatrix} = 2 = \text{rank}(C)$$

$$x''_1: \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 & -3 \\ -3 & 17 & -19 & -3 \\ 3 & -17 & 19 & 4 \end{bmatrix} = 3 \neq \text{rank}(C)$$

Точка x'_1 принадлежит $\text{Range } C$, а точка x''_1 нет.

Значит в качестве целевой точки x_1 возьмем $x'_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2.3. Управляемость собственных чисел

Собственные числа матрицы A :

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1 + 2i, \quad \lambda_3 = -1 - 2i$$

Собственные вектора матрицы A :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 - i \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -3 + i \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ЖНФ матрицы A :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 - i & -3 + i \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + 2i & 0 \\ 0 & 0 & -1 - 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i & -\frac{1}{4} - \frac{i}{4} & \frac{i}{2} \\ \frac{2}{2} & -\frac{1}{4} + \frac{i}{4} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

Перепишем в вещественном виде:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & \frac{3}{2} & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма системы:

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{21}{2} \\ 9 \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix} u$$

Управляемость собственных чисел:

$$\lambda_1 = -3$$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа равны нулю, то собственное число неуправляемо.

Проверка ранговым критерием:

$$[A - \lambda_1 E \quad B] = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}([A - \lambda_1 E \quad B]) = 2$$

Так как ранг не совпал с порядком системы, то собственное число не управляемо.

$$\lambda_2 = -1 + 2i$$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа не равны нулю, то собственное число управляемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер 2×2 .

Проверка ранговым критерием:

$$[A - \lambda_2 E \quad B] = \begin{bmatrix} 6 - 2i & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -2 - 2i & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -6 - 2i & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}([A - \lambda_2 E \quad B]) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число управляемо.

$$\lambda_3 = -1 - 2i$$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа не равны нулю, то собственное число управляемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер 2×2 .

Проверка ранговым критерием:

$$[A - \lambda_3 E \quad B] = \begin{bmatrix} 6 + 2i & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -2 + 2i & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -6 + 2i & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}([A - \lambda_3 E \quad B]) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число управляемо.

2.4. Грамиан управляемости системы

$$t_1 = 3$$

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos[2t] + 3e^{-t} \sin[2t] & -e^{-3t} + e^{-t} \cos[2t] - 2e^{-t} \sin[2t] & -e^{-3t} + e^{-t} \cos[2t] + 3e^{-t} \sin[2t] \\ 2e^{-t} \sin[2t] & e^{-t} \cos[2t] - e^{-t} \sin[2t] & 2e^{-t} \sin[2t] \\ -2e^{-t} \sin[2t] & e^{-3t} - e^{-t} \cos[2t] + e^{-t} \sin[2t] & e^{-3t} - 2e^{-t} \sin[2t] \end{bmatrix}$$

$$e^{A^T t} = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos[2t] + 3e^{-t} \sin[2t] & 2e^{-t} \sin[2t] & -2e^{-t} \sin[2t] \\ -e^{-3t} + e^{-t} \cos[2t] - 2e^{-t} \sin[2t] & e^{-t} \cos[2t] - e^{-t} \sin[2t] & e^{-3t} - e^{-t} \cos[2t] + e^{-t} \sin[2t] \\ -e^{-3t} + e^{-t} \cos[2t] + 3e^{-t} \sin[2t] & 2e^{-t} \sin[2t] & e^{-3t} - 2e^{-t} \sin[2t] \end{bmatrix}$$

$$B B^T = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 9 & -9 \\ -3 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} B B^T e^{A^T t} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} (\cos[2t] - 12\sin[2t])^2 & -\frac{1}{2} e^{-2t} (-87 + 81\cos[4t] + 43\sin[4t]) & \frac{1}{2} e^{-2t} (-87 + 81\cos[4t] + 43\sin[4t]) \\ -\frac{1}{2} e^{-2t} (-87 + 81\cos[4t] + 43\sin[4t]) & e^{-2t} (3\cos[2t] - 7\sin[2t])^2 & -e^{-2t} (3\cos[2t] - 7\sin[2t])^2 \\ \frac{1}{2} e^{-2t} (-87 + 81\cos[4t] + 43\sin[4t]) & -e^{-2t} (3\cos[2t] - 7\sin[2t])^2 & e^{-2t} (3\cos[2t] - 7\sin[2t])^2 \end{bmatrix}$$

$$P(3) = \int_0^3 e^{At} B B^T e^{A^T t} dt = \begin{bmatrix} 26.647 & 13.371 & -13.371 \\ 13.371 & 8.2796 & -8.2796 \\ -13.371 & -8.2796 & 8.2796 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 41.175, \quad \lambda_2 = 2.0320, \quad \lambda_3 = -2.2440 \cdot 10^{-16} \cong 0$$

2.5. Программное управление

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} (P(t_1))^{-1} x(t_1), \quad t_1 = 3$$

$$B^T = [-1 \quad -3 \quad 3]$$

$$e^{A^T(3-t)} = \begin{bmatrix} e^{-3+t} \cos[6-2t] + 3e^{-3+t} \sin[6-2t] & 2e^{-3+t} \sin[6-2t] & -2e^{-3+t} \sin[6-2t] \\ -e^{-9+3t} + e^{-3+t} \cos[6-2t] - 2e^{-3+t} \sin[6-2t] & e^{-3+t} \cos[6-2t] - e^{-3+t} \sin[6-2t] & e^{-9+3t} - e^{-3+t} \cos[6-2t] + e^{-3+t} \sin[6-2t] \\ -e^{-9+3t} + e^{-3+t} \cos[6-2t] + 3e^{-3+t} \sin[6-2t] & 2e^{-3+t} \sin[6-2t] & e^{-9+3t} - 2e^{-3+t} \sin[6-2t] \end{bmatrix}$$

Так как Грамиан является вырожденным, вместо обратной матрицы найдем псевдообратную:

$$(P(3))^+ = \begin{bmatrix} 0.19792 & -0.15982 & 0.15982 \\ -0.15982 & 0.15925 & -0.15925 \\ 0.15982 & -0.15925 & 0.15925 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = 2.7183^t (0.16191 \cos(6-2t) - 0.10679 \sin(6-2t))$$

2.6. Моделирование системы

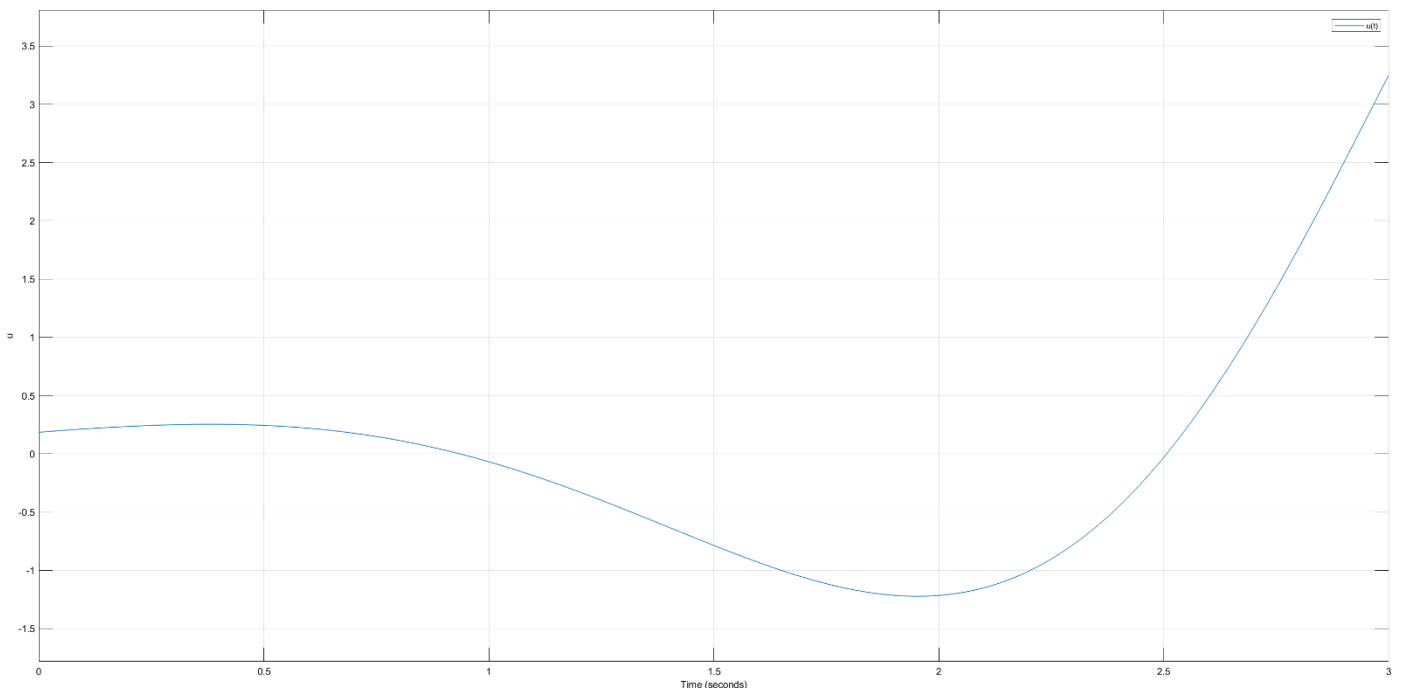


Рисунок 3: график сигнала управления $u(t)$

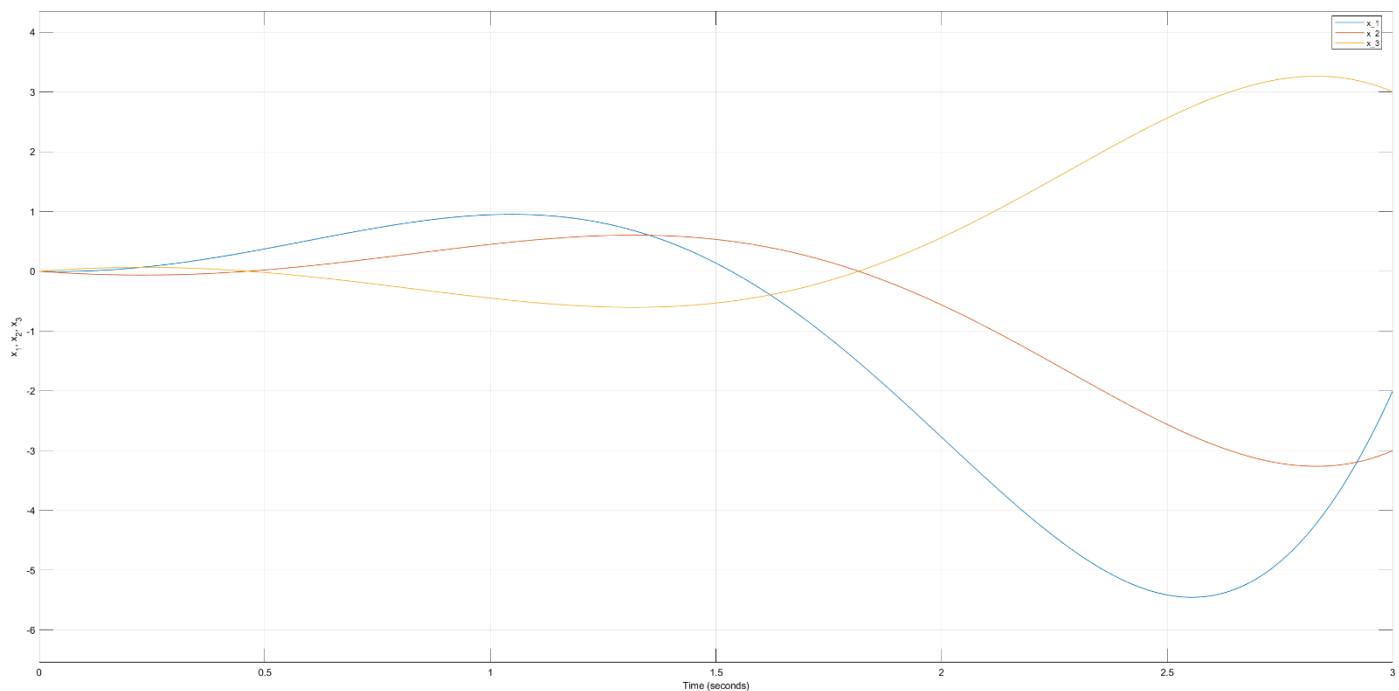


Рисунок 4: графики компонент вектора $x(t)$

Так как графики показывают, что система при вычисленном нами управлении $u(t)$ приходит в состояние $x(3) = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, то выполненные расчеты верны.

Задание 3.

3.1. Матрица наблюдаемости

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{bmatrix} x, \quad y = [3 \quad -2 \quad 3] x$$

Матрица наблюдаемости системы:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 14 & -18 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(\mathcal{O}) = 3$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы, то по критерию Калмана система полностью наблюдаема.

3.2. Наблюдаемость собственных чисел

Собственные числа матрицы A :

$$\lambda_1 = -4 + 2i, \quad \lambda_2 = -4 - 2i, \quad \lambda_3 = 1$$

Собственные вектора матрицы A :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 - i \\ -1 - i \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 + i \\ -1 + i \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ЖНФ матрицы A :

$$A = \begin{bmatrix} -3-i & -3+i & -1 \\ -1-i & -1+i & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4+2i & 0 & 0 \\ 0 & -4-2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}+\frac{i}{4} & \frac{1}{4}+\frac{i}{4} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{4}-\frac{i}{4} & \frac{1}{4}-\frac{i}{4} & -\frac{i}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Перепишем в вещественном виде:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма системы:

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x', \quad y' = [-1 \quad 0 \quad 2] x'$$

Наблюдаемость собственных чисел:

$$\lambda_1 = -4 + 2i$$

Так как элементы первого столбца матрицы выходов, соответствующего жордановой клетке собственного числа не равны нулю, то собственное число наблюдаемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер 2×2 .

Проверка ранговым критерием:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_1 E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-2i & 9 & 1 \\ -5 & 7-2i & -3 \\ 3 & -7 & 1-2i \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_1 E \\ C \end{bmatrix}\right) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число наблюдаемо.

$$\lambda_2 = -4 - 2i$$

Так как элементы первого столбца матрицы выходов, соответствующего жордановой клетке собственного числа не равны нулю, то собственное число наблюдаемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер 2×2 .

Проверка ранговым критерием:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_2 E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+2i & 9 & 1 \\ -5 & 7+2i & -3 \\ 3 & -7 & 1+2i \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_2 E \\ C \end{bmatrix}\right) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число наблюдаемо.

$$\lambda_3 = 1$$

Так как элементы первого столбца матрицы выходов, соответствующего жордановой клетке собственного числа не равны нулю, то собственное число наблюдаемо.

Проверка ранговым критерием:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_3 E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 9 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_3 E \\ C \end{bmatrix}\right) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число наблюдаемо.

3.3. Грамиан наблюдаемости системы

$$t_1 = 3$$

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt$$

$$e^{A t} = \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{-4t} \cos[2t] + e^{-4t} \sin[2t] & e^t - e^{-4t} \cos[2t] + 2e^{-4t} \sin[2t] & -e^t + e^{-4t} \cos[2t] + 3e^{-4t} \sin[2t] \\ -e^t + e^{-4t} \cos[2t] & e^t + e^{-4t} \sin[2t] & -e^t + e^{-4t} \cos[2t] + e^{-4t} \sin[2t] \\ e^t - e^{-4t} \cos[2t] - e^{-4t} \sin[2t] & -e^t + e^{-4t} \cos[2t] - e^{-4t} \sin[2t] & e^t - 2e^{-4t} \sin[2t] \end{bmatrix}$$

$$e^{A^T t} = \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{-4t} \cos[2t] + e^{-4t} \sin[2t] & -e^t + e^{-4t} \cos[2t] & e^t - e^{-4t} \cos[2t] - e^{-4t} \sin[2t] \\ e^t - e^{-4t} \cos[2t] + 2e^{-4t} \sin[2t] & e^t + e^{-4t} \sin[2t] & -e^t + e^{-4t} \cos[2t] - e^{-4t} \sin[2t] \\ -e^t + e^{-4t} \cos[2t] + 3e^{-4t} \sin[2t] & -e^t + e^{-4t} \cos[2t] + e^{-4t} \sin[2t] & e^t - 2e^{-4t} \sin[2t] \end{bmatrix}$$

$$C^T C = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 9 \\ -6 & 4 & -6 \\ 9 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$e^{A^T t} C^T C e^{A t} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-8t} (2e^{5t} + \cos[2t])^2 & e^{-8t} (2e^{5t} + \cos[2t])(-2e^{5t} + \sin[2t]) & e^{-8t} (2e^{5t} + \cos[2t])(2e^{5t} + \cos[2t] + \sin[2t]) \\ e^{-8t} (2e^{5t} + \cos[2t])(-2e^{5t} + \sin[2t]) & e^{-8t} (-2e^{5t} + \sin[2t])^2 & e^{-8t} (-2e^{5t} + \sin[2t])(2e^{5t} + \cos[2t] + \sin[2t]) \\ e^{-8t} (2e^{5t} + \cos[2t])(2e^{5t} + \cos[2t] + \sin[2t]) & e^{-8t} (-2e^{5t} + \sin[2t])(2e^{5t} + \cos[2t] + \sin[2t]) & e^{-8t} (2e^{5t} + \cos[2t] + \sin[2t])^2 \end{bmatrix}$$

$$Q(3) = \int_0^3 e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt = \begin{bmatrix} 805.893 & -804.986 & 806.226 \\ -804.986 & 804.255 & -805.282 \\ 806.226 & -805.282 & 806.571 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 2416.57, \quad \lambda_2 = 0.147320, \quad \lambda_3 = 0.00174878$$

3.4. Поиск вектора начальных условий системы

Выход системы:

$$y(t) = -3e^{-4t} \cos(2t) + 2e^{-4t} \sin(2t), \quad t \in [0, t_1], \quad t_1 = 3$$

Формула начального условия:

$$x(0) = (Q(t_1))^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt$$

$$(Q(t_1))^{-1} = \begin{bmatrix} 337.405 & 64.0614 & -273.301 \\ 64.0614 & 16.0026 & -48.0569 \\ -273.301 & -48.0569 & 225.206 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt = \begin{bmatrix} -1.05657 \\ 0.719076 \\ -1.10657 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Так как система является полностью наблюдаемой, то различным начальным условиям соответствуют различные выходы, а значит не существует других начальных условий, кроме тех, которые мы нашли выше.

3.5. Моделирование системы

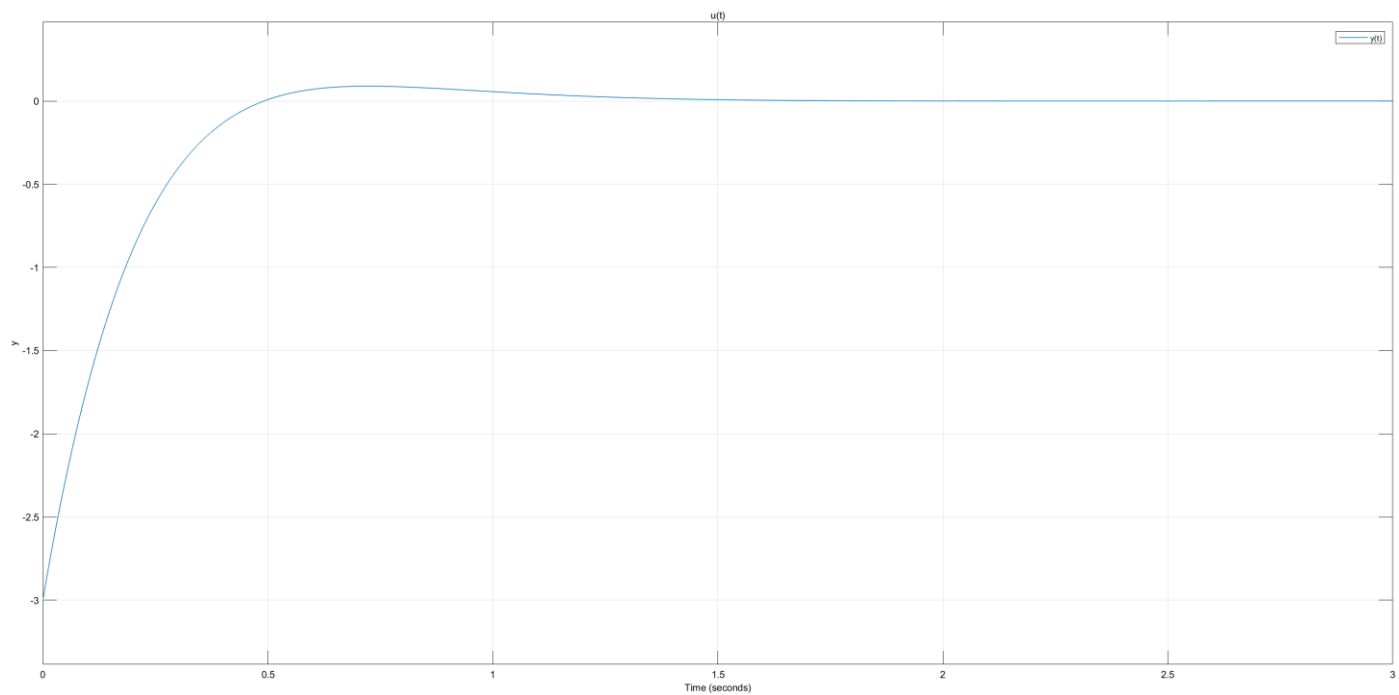


Рисунок 5: график сигнала выхода $y(t)$

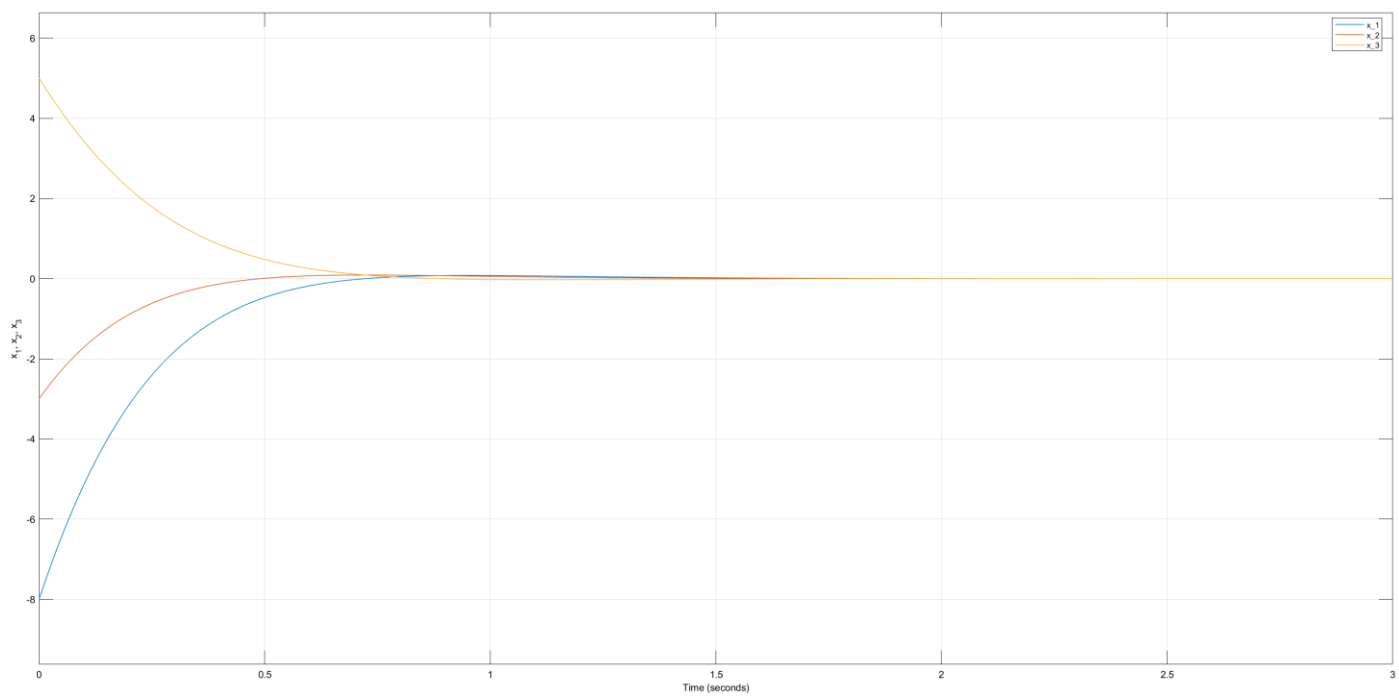


Рисунок 6: графики компонент вектора $x(t)$

Задание 4.

4.1. Матрица наблюдаемости

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{bmatrix} x, \quad y = [3 \quad 0 \quad 3]x$$

Матрица наблюдаемости системы:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -12 & 6 & -6 \\ 36 & -48 & -12 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(\mathcal{O}) = 2$$

Так как ранг матрицы управляемости не равен порядку системы, то по критерию Калмана система не полностью наблюдаема.

4.2. Наблюдаемость собственных чисел

Собственные числа матрицы A :

$$\lambda_1 = -4 + 2i, \quad \lambda_2 = -4 - 2i, \quad \lambda_3 = 1$$

Собственные вектора матрицы A :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 - i \\ -1 - i \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 + i \\ -1 + i \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ЖНФ матрицы A :

$$A = \begin{bmatrix} -3 - i & -3 + i & -1 \\ -1 - i & -1 + i & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 + 2i & 0 & 0 \\ 0 & -4 - 2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{i}{4} & \frac{1}{4} + \frac{i}{4} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{i}{4} & \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{4} - \frac{i}{4} & \frac{1}{4} - \frac{i}{4} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

Перепишем в вещественном виде:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма системы:

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x', \quad y' = [-3 \quad 0 \quad 0] x'$$

Наблюдаемость собственных чисел:

$$\lambda_1 = -4 + 2i$$

Так как элементы первого столбца матрицы выходов, соответствующего жордановой клетке собственного числа не равны нулю, то собственное число наблюдаемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер 2×2 .

Проверка ранговым критерием:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_1 E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 - 2i & 9 & 1 \\ -5 & 7 - 2i & -3 \\ 3 & -7 & 1 - 2i \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(\begin{bmatrix} A - \lambda_1 E \\ C \end{bmatrix}) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число наблюдаемо.

$$\lambda_2 = -4 - 2i$$

Так как элементы первого столбца матрицы выходов, соответствующего жордановой клетке собственного числа не равны нулю, то собственное число наблюдаемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер 2×2 .

Проверка ранговым критерием:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_2 E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 2i & 9 & 1 \\ -5 & 7 + 2i & -3 \\ 3 & -7 & 1 + 2i \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_2 E \\ C \end{bmatrix}\right) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число наблюдаемо.

$$\lambda_3 = 1$$

Так как элементы первого столбца матрицы выходов, соответствующего жордановой клетке собственного числа равны нулю, то собственное число не наблюдаемо.

Проверка ранговым критерием:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_3 E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 9 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_3 E \\ C \end{bmatrix}\right) = 2$$

Так как ранг не совпал с порядком системы, то собственное число не наблюдаемо.

4.3. Грамиан наблюдаемости системы

$$t_1 = 3$$

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt$$

$$e^{A t} = \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{-4t} \cos[2t] + e^{-4t} \sin[2t] & e^t - e^{-4t} \cos[2t] + 2e^{-4t} \sin[2t] & -e^t + e^{-4t} \cos[2t] + 3e^{-4t} \sin[2t] \\ -e^t + e^{-4t} \cos[2t] & e^t + e^{-4t} \sin[2t] & -e^t + e^{-4t} \cos[2t] + e^{-4t} \sin[2t] \\ e^t - e^{-4t} \cos[2t] - e^{-4t} \sin[2t] & -e^t + e^{-4t} \cos[2t] - e^{-4t} \sin[2t] & e^t - 2e^{-4t} \sin[2t] \end{bmatrix}$$

$$e^{A^T t} = \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{-4t} \cos[2t] + e^{-4t} \sin[2t] & -e^t + e^{-4t} \cos[2t] & e^t - e^{-4t} \cos[2t] - e^{-4t} \sin[2t] \\ e^t - e^{-4t} \cos[2t] + 2e^{-4t} \sin[2t] & e^t + e^{-4t} \sin[2t] & -e^t + e^{-4t} \cos[2t] - e^{-4t} \sin[2t] \\ -e^t + e^{-4t} \cos[2t] + 3e^{-4t} \sin[2t] & -e^t + e^{-4t} \cos[2t] + e^{-4t} \sin[2t] & e^t - 2e^{-4t} \sin[2t] \end{bmatrix}$$

$$C^T C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$e^{A^T t} C^T C e^{A t} = \begin{bmatrix} 9e^{-8t} \cos[2t]^2 & \frac{9}{2} e^{-8t} \sin[4t] & 9e^{-8t} \cos[2t] (\cos[2t] + \sin[2t]) \\ \frac{9}{2} e^{-8t} \sin[4t] & 9e^{-8t} \sin[2t]^2 & 9e^{-8t} \sin[2t] (\cos[2t] + \sin[2t]) \\ 9e^{-8t} \cos[2t] (\cos[2t] + \sin[2t]) & 9e^{-8t} \sin[2t] (\cos[2t] + \sin[2t]) & 9e^{-8t} (\cos[2t] + \sin[2t])^2 \end{bmatrix}$$

$$Q(3) = \int_0^3 e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt = \begin{bmatrix} 1.0125 & 0.225 & 1.2375 \\ 0.225 & 0.1125 & 0.3375 \\ 1.2375 & 0.3375 & 1.575 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 2.6277, \quad \lambda_2 = 0.072246, \quad \lambda_3 = 0$$

4.4. Поиск вектора начальных условий системы

Выход системы:

$$y(t) = -3e^{-4t} \cos(2t) + 2e^{-4t} \sin(2t), \quad t \in [0, t_1], \quad t_1 = 3$$

Формула начального условия:

$$x(0) = (Q(t_1))^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt$$

Так как Грамиан наблюдаемости является вырожденной матрицей, будет использовать псевдообратную матрицу, вместо обратной.

$$(Q(t_1))^+ = \begin{bmatrix} 4.1481 & -5.9259 & -1.7777 \\ -5.9259 & 8.8889 & 2.9629 \\ -1.7777 & 2.9629 & 1.1851 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt = \begin{bmatrix} -0.8625 \\ -0.15 \\ -1.0125 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} -0.889 \\ 0.778 \\ -0.111 \end{bmatrix}$$

Для полностью наблюдаемой системы уравнение $\mathcal{O}x_0 = 0$ верно только при $x_0 = \bar{0}$.

Найдем $\mathcal{O}x(0)$:

$$\mathcal{O}x(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 16.002 \\ -68.016 \end{bmatrix}$$

Так как наша система не является наблюдаемой, то будет хотя бы один ненулевой вектор x_0 , который удовлетворяет $\mathcal{O}x_0 = 0$.

Найдем этот x_0 :

$$\mathcal{O}x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \\ -\xi \end{bmatrix}$$

Для того чтобы сигнал $y(t)$ мог быть порожден векторами $\{x_n\}$ начальных условий, необходимо:

$$\forall x \in \{x_n\}: \mathcal{O}x = k$$

Вектор k можем найти:

$$\mathcal{O}x(0) = k = \begin{bmatrix} -3 \\ 16.002 \\ -68.016 \end{bmatrix}$$

Другие начальные условия можем исходя из того, что:

$$\forall x \in \{x_n\}: \mathcal{O}x = \mathcal{O}(x(0) - \mu x_0) = \mathcal{O}x' + \mathcal{O}x_0 = \mathcal{O}x' + 0 = k, \quad \text{где } \mu = \text{const}$$

Например, получим начальные условия следующим образом:

$$x_1(0) = x(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.111 \\ 1.778 \\ -1.111 \end{bmatrix}$$

$$x_2(0) = x(0) + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.111 \\ 2.778 \\ -2.111 \end{bmatrix}$$

$$x_3(0) = x(0) - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.889 \\ -0.222 \\ 0.889 \end{bmatrix}$$

4.5. Моделирование системы

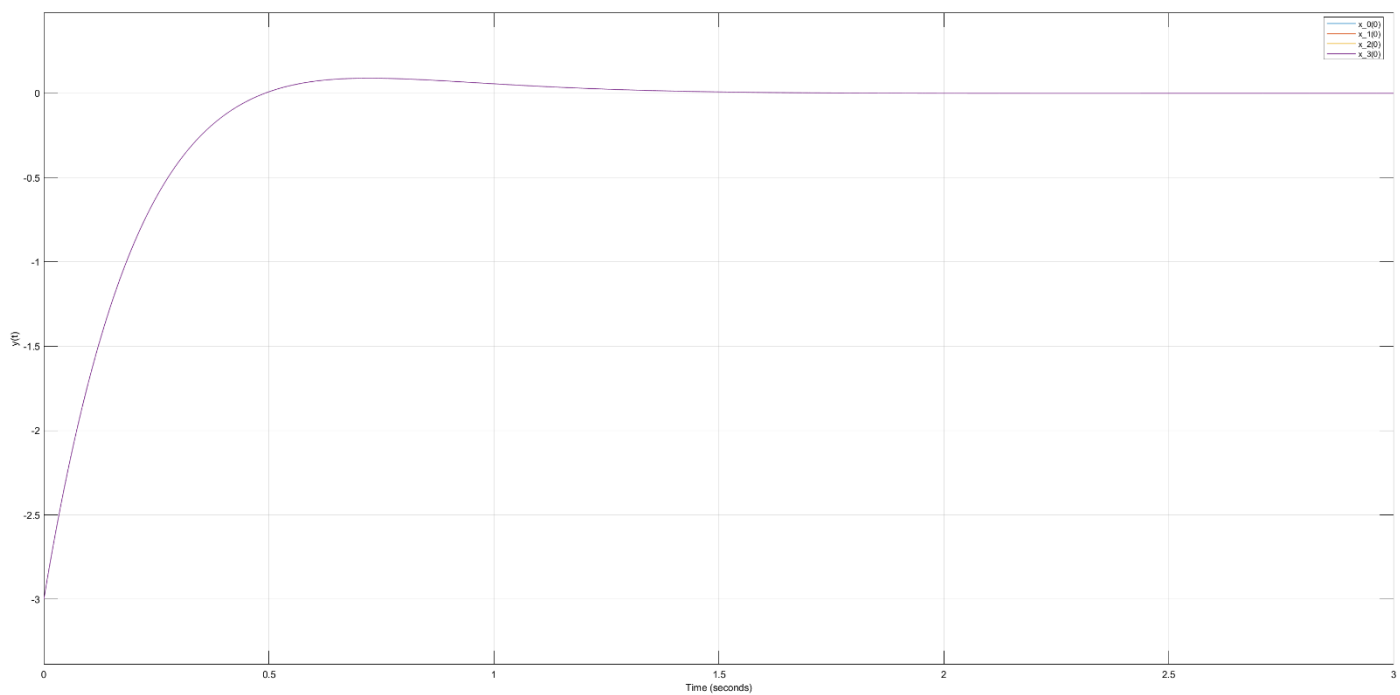


Рисунок 7: графики сигнала выхода $y(t)$ при найденных различных начальных условиях

Вычисленные начальные условия действительно порождают один и тот же выходной сигнал $y(t)$, так как на рисунке выше, все смоделированные графики совпали.

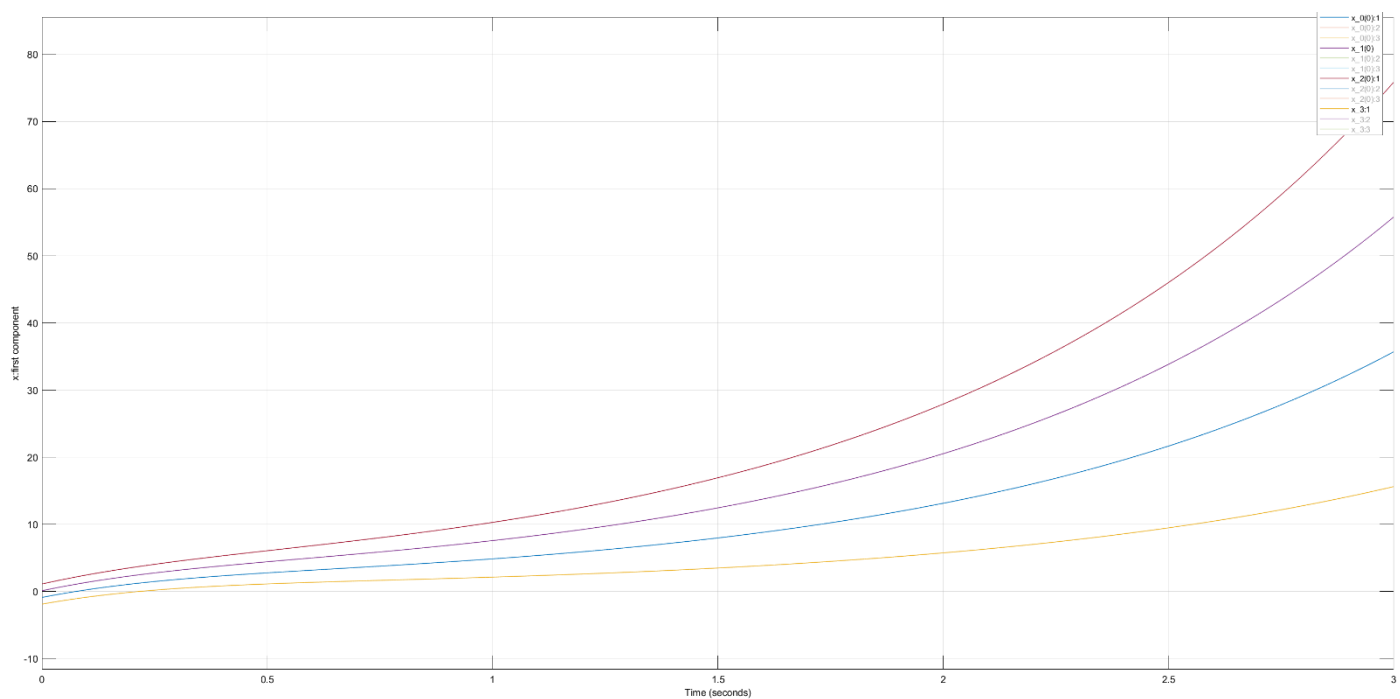


Рисунок 6: графики первых компонент векторов $x(t)$

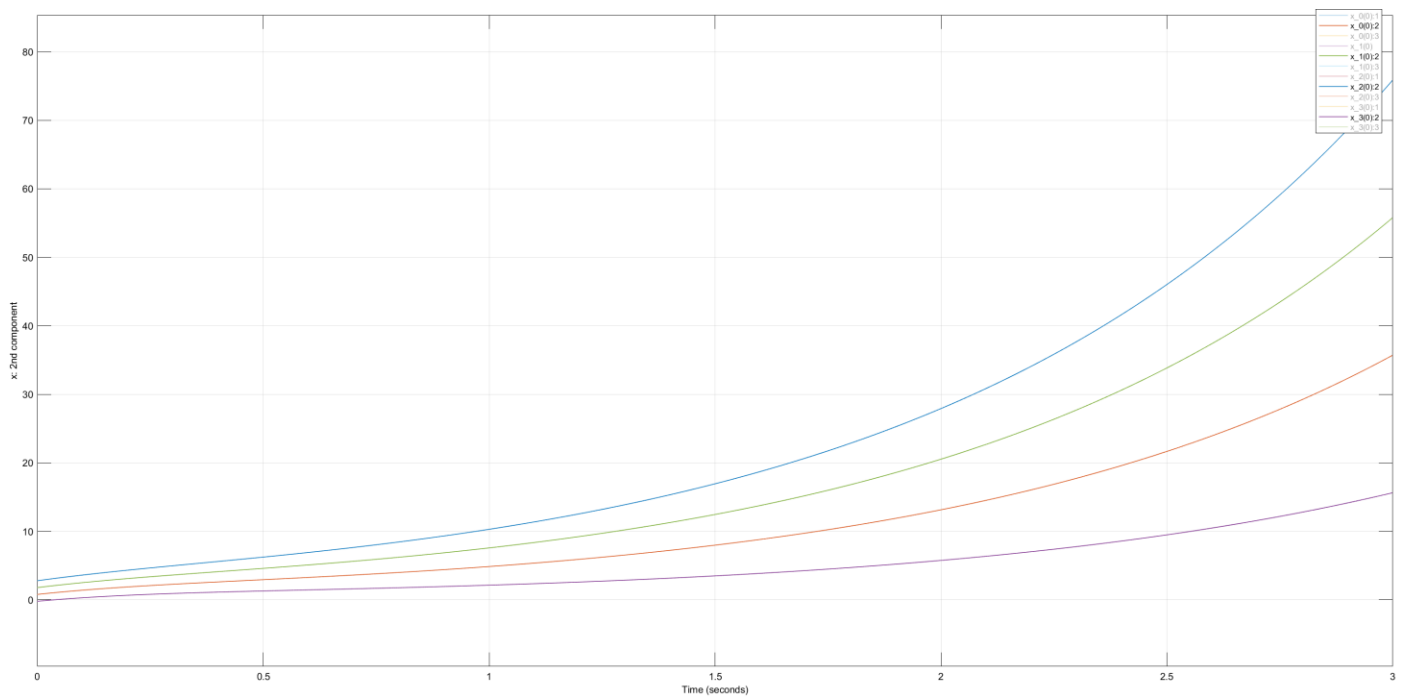


Рисунок 7: графики вторых компонент векторов $x(t)$

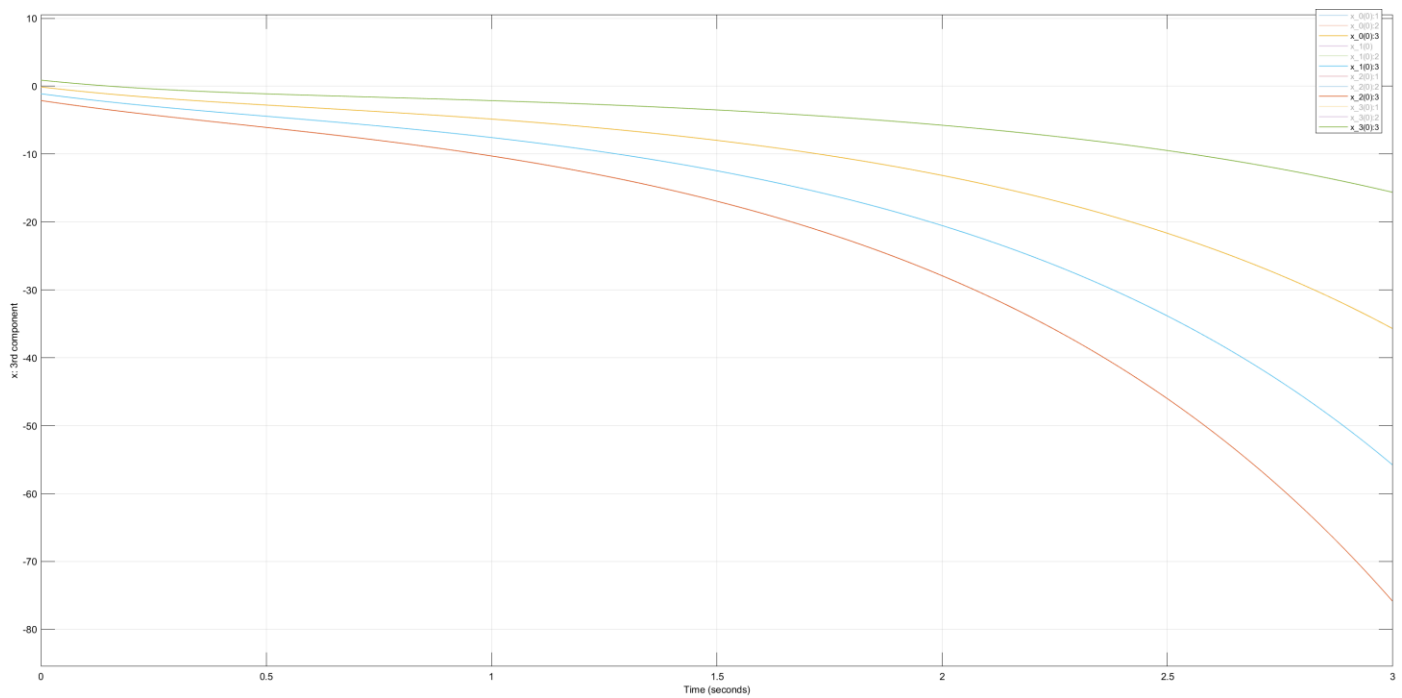


Рисунок 8: графики третьих компонент векторов $x(t)$

Выводы

В данной лабораторной работе были исследованы системы на наблюдаемость и управляемость. Определялась управляемость и наблюдаемость собственных чисел матрицы двумя способами: на основе жордановой формы и с помощью матрицы Хаутуса. Были построены подпространства управляемости и подпространство ненаблюдаемости. Вычислены Грамианы систем, с помощью них были найдены функции управления и начальные условия системы. В конце каждого задания проведено моделирование исследуемой системы.