Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №9

«Регуляторы с заданной степенью устойчивости»

по дисциплине «Теория автоматического управления»

Выполнил: студент гр. R3238,

Кирбаба Д.Д.

Преподаватель: Перегудин А.А.,

ассистент фак. СУиР

Санкт-Петербург, 2022

Цель работы

Построение регуляторов с заданной степенью устойчивости с ограничением на управление и наблюдателей с заданной степенью сходимости

Начальные данные

3 вариант

Исходные данные для задания 1:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Исходные данные для задания 3:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Исходные данные для задания 4:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & 5 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Выполнение работы

Задание 1.

1.1. Схема моделирования системы с регулятором

Рассматриваемая система с регулятором:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad u = Kx$$

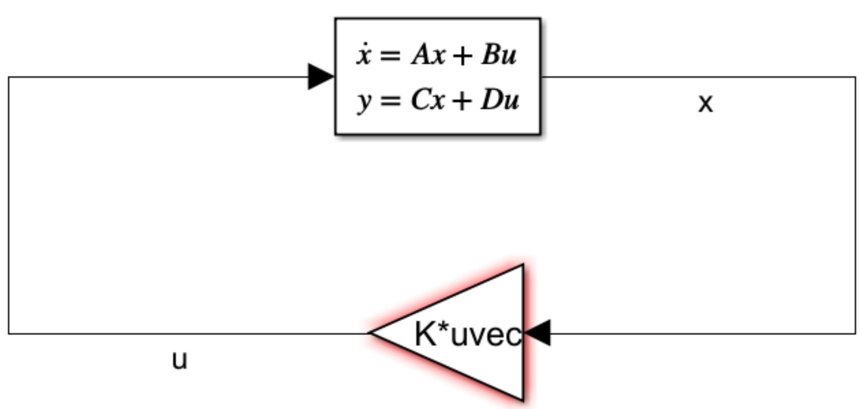

Рисунок 1: схема моделирования замкнутой системы с регулятором

1.2. Регуляторы с различными значениями степени устойчивости α

Неравенства для синтеза регулятора:

$$P \succ 0, \qquad PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \prec 0, \qquad K = YP^{-1}$$

Программный код:

```
% plant parameters
A = [-3 0 0 0; 0 3 0 0; 0 0 3 3; 0 0 -3 3];
B = [0; 7; 0; 1];

% desired decay rates
alpha = 0.5;

% solving LMI
cvx_begin sdp
variable P(4,4)
variable Y(1,4)
P > 0.00001*eye(4);
P*A' + A*P + 2*alpha*P + Y'*B' + B*Y <= 0;
cvx_end

% finding controller matrix
K = Y*inv(P)

% finding eigenvalues
eig(A + B*K)
```

$$\boldsymbol{\alpha = 0.5} \Rightarrow K = [0 \quad -12.4494 \quad -75.4453 \quad 63.1168] \Rightarrow \sigma(A+BK) = \{-5.8121 \pm 6.6934i, -3.4049, -3\}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 1.5} \Rightarrow K = [0 \quad -42.2752 \quad -204.82 \quad 244.0828] \Rightarrow \sigma(A+BK) = \{-4.4691 \pm 4.0473i, -33.9052, -3\}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 3} \Rightarrow K = [0 \quad -50.4259 \quad -216.3537 \quad 312.1883] \Rightarrow \sigma(A+BK) = \{-13.3683 \pm 11.2425i, -5.0566, -3\}$$

Во всех спектрах присутствует неуправляемое число $\lambda = -3$.

1.3. Моделирование работы найденных регуляторов

Начальные условия: $x(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 17 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$

Сравнительные графики $x(t)$:

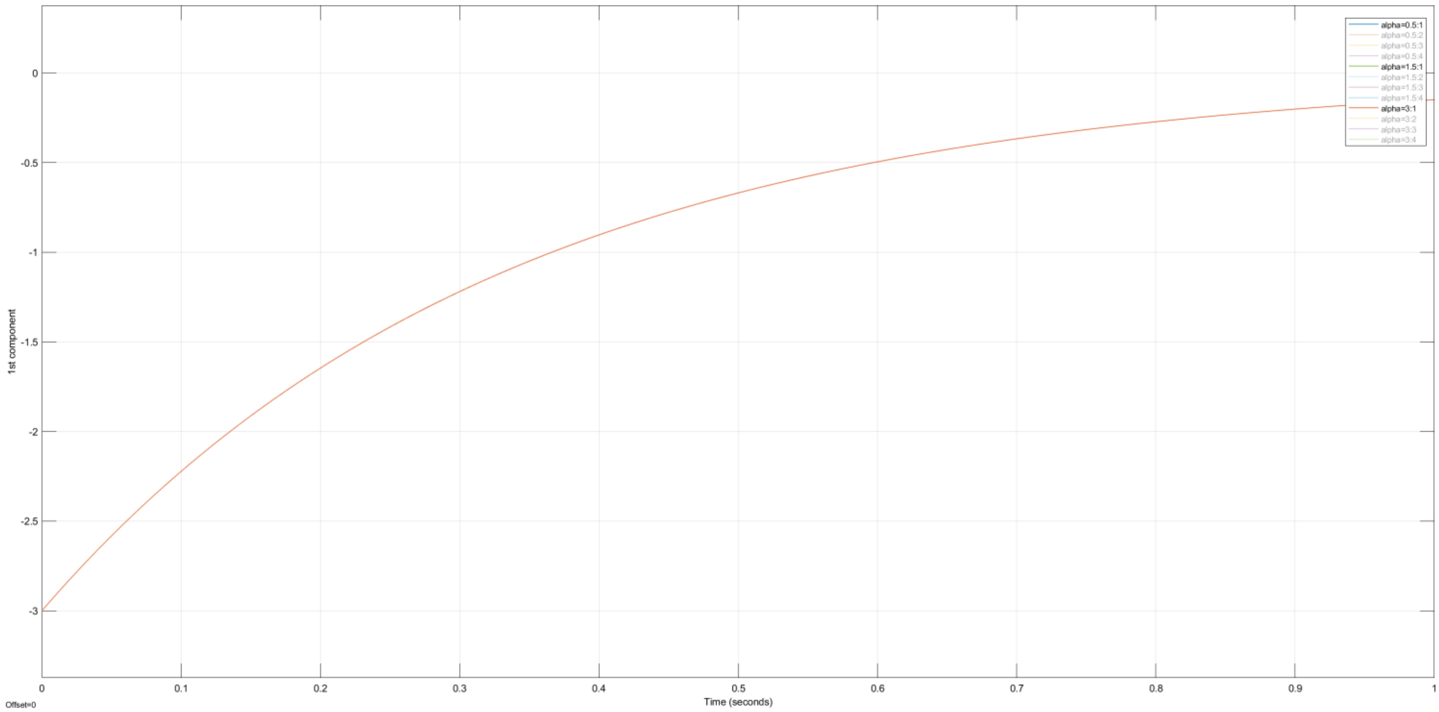

Рисунок 2: графики первых компонент

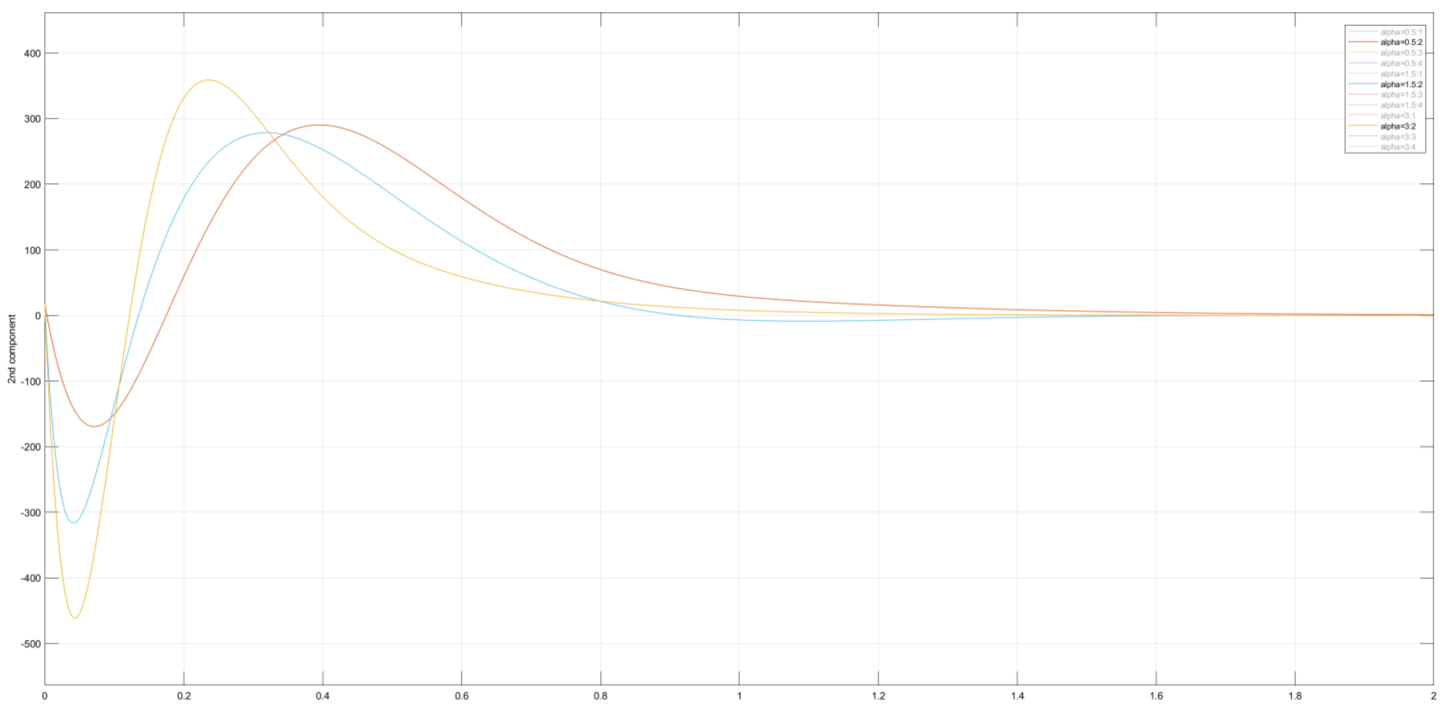

Рисунок 3: графики вторых компонент

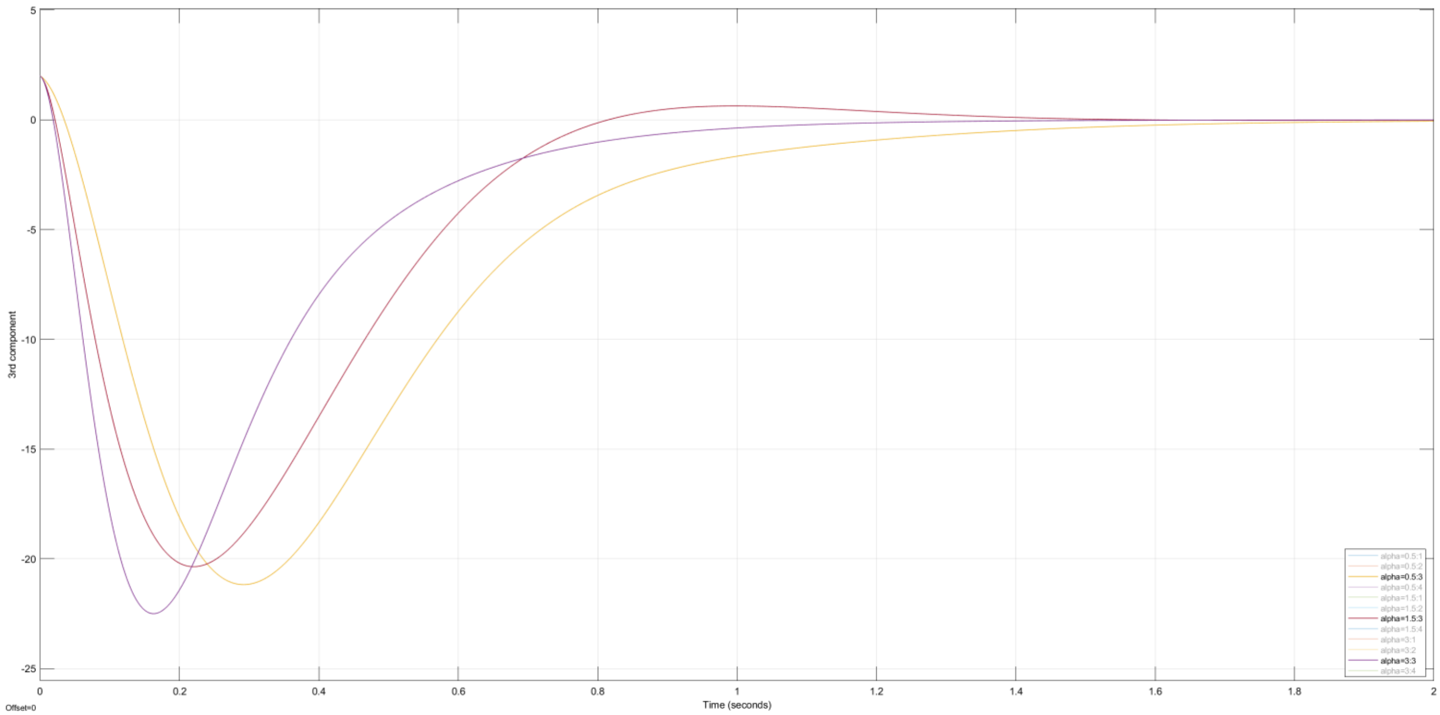

Рисунок 4: графики третьих компонент

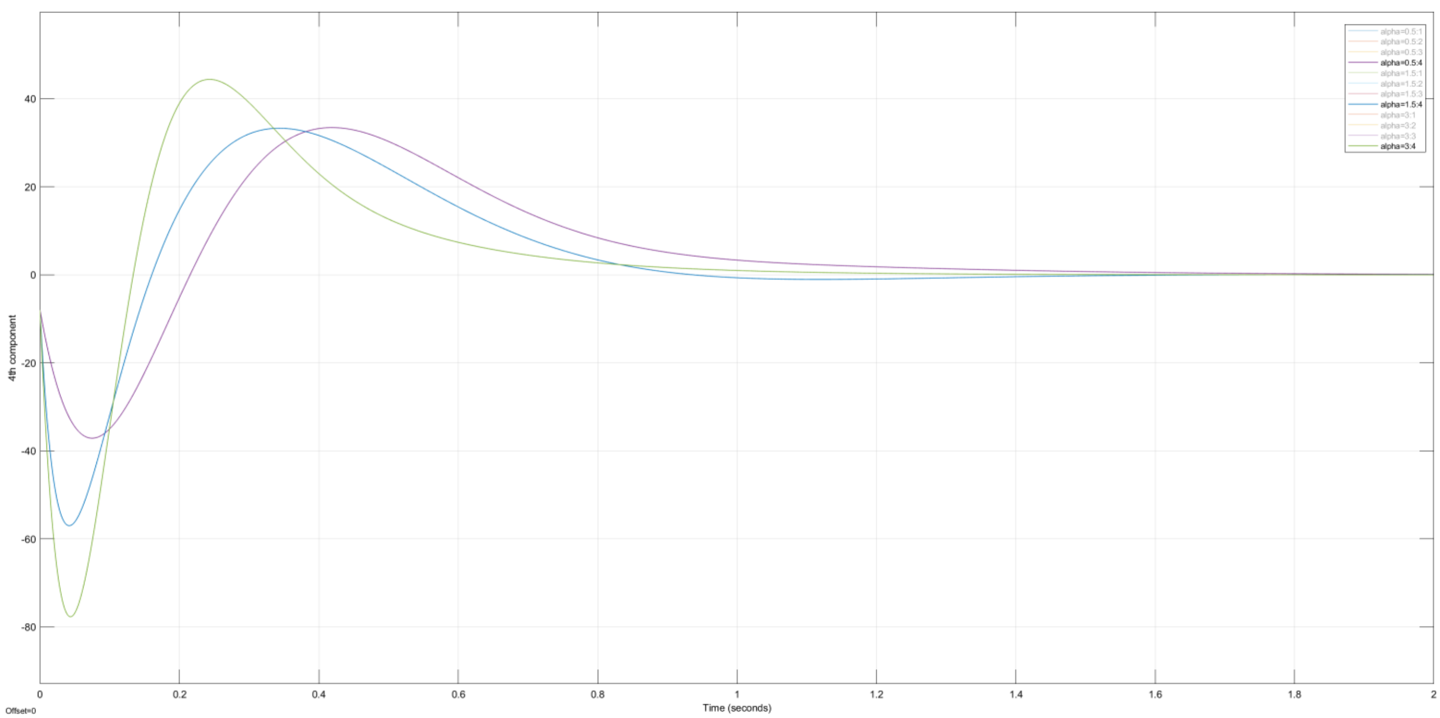

Рисунок 5: графики четвертых компонент

Сравнительные графики $u(t)$:

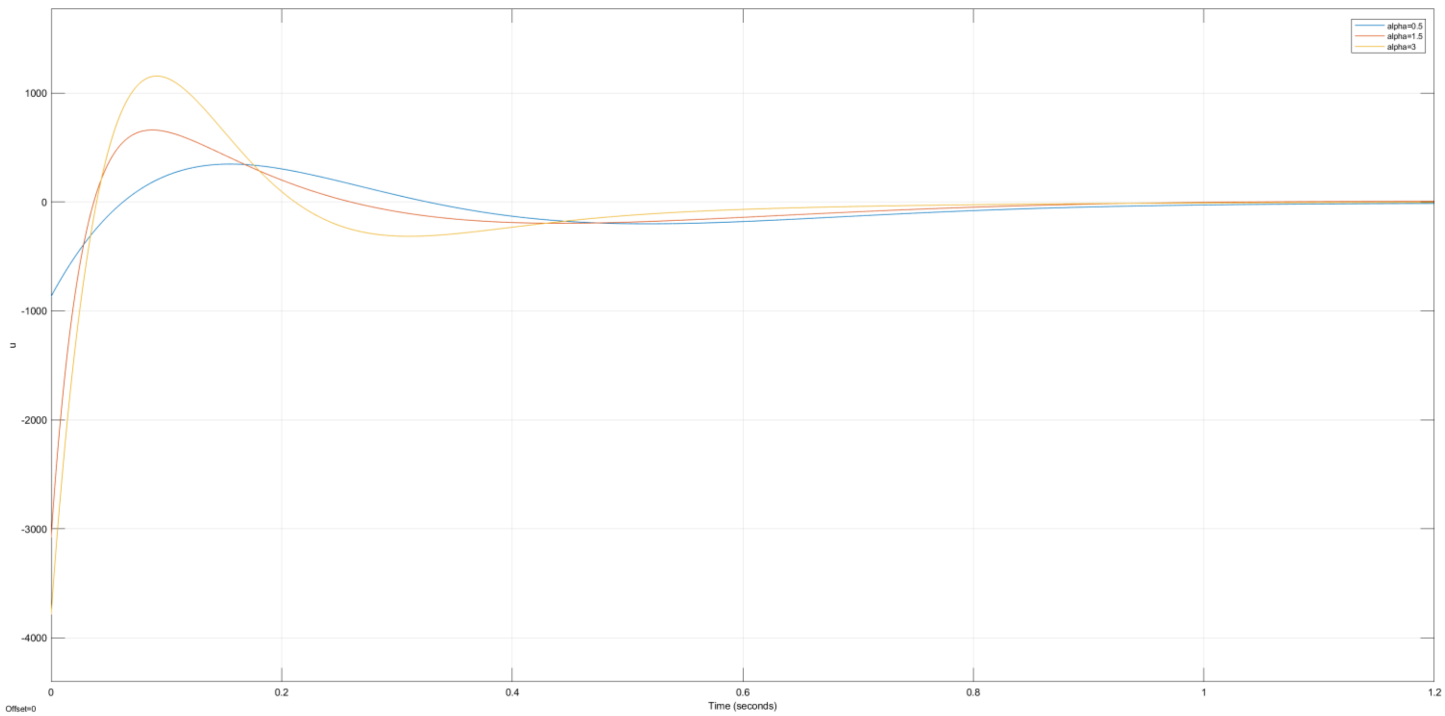

Рисунок 6: графики входного воздействия

Так как при решении матричных неравенств мы можем получить бесконечно много решений, значит и матриц K, удовлетворяющих неравенствам тоже бесконечное количество. Следовательно, элементы матрицы регулятора и собственные числа замкнутой системы могут быть как больше, так и меньше соответствующих значений при других степенях устойчивости.

Ведь выбирая степень устойчивости, мы только ограничиваем сверху $\|x(t)\|$, на самом же деле может быть более сильная сходимость.

В конкретно нашем случае, мы видим, что при бóльших коэффициентах α замкнутая система быстрее сходится (т. е. «устойчивее»), однако имеет большие коэффициенты входного воздействия, из-за чего при малых t появляется перерегулирование. Чем быстрее переходный процесс, тем больше необходимо затратить управления.

Задание 2.

2.1. Регулятор с ограничением на величину управляющего воздействия

Пусть $\alpha = 0.5$, ограничим управление $\|u(t)\| \leq \mu$, начальные условия $x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 17 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$

Неравенства для синтеза регулятора с ограничением на управление:

$$P \succ 0, \qquad PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \prec 0, \qquad K = YP^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \qquad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} \succ 0$$

Программный код:

```
% plant parameters
A = [-3 0 0 0; 0 3 0 0; 0 0 3 3; 0 0 -3 3];
B = [0; 7; 0; 1];
x0 = [-3; 17; 2; -8];

% desired decay rates
alpha = 0.5;

% control constraint
mu = 700;

% solving LMI
cvx_begin sdp
variable P(4,4)
variable Y(1,4)
P > 0.00001*eye(4);
P*A' + A*P + 2*alpha*P + Y'*B' + B*Y <= 0;
[P x0; x0' 1] > 0;
[P Y'; Y mu^2] > 0;
cvx_end

% finding controller matrix
K = Y*inv(P)
```

При вариации параметра μ были выявлены следующие зависимости:

- С уменьшением μ уменьшается KK^T

μ	400	550	700
KK^T	255.1447	259.0783	262.0425

- При уменьшении μ до конкретного значения степень устойчивости системы стремится к желаемому значению, то есть $\min\ |Re(\sigma(A+BK))| \to \alpha$.

μ	400	550	700
$\min\|Re(\sigma(A+BK))\|$	0.5080	0.5208	0.5245

- Так как μ является ограничением на величину входного воздействия, то графики $u(t)$, как и графики переходного процесса $x(t)$ при меньшем μ будут иметь меньшие максимальные по модулю значения

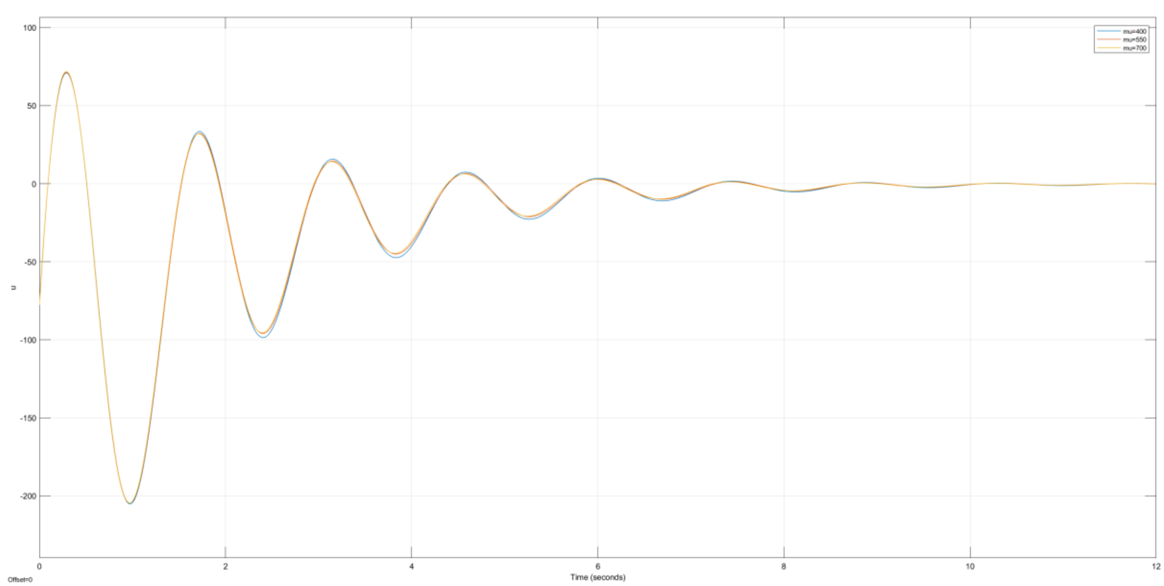

Рисунок 7: графики входного воздействия

2.2. Минимизация величины управляющего воздействия

Программный код:

```
% plant parameters
A = [-3 0 0 0; 0 3 0 0; 0 0 3 3; 0 0 -3 3];
B = [0; 7; 0; 1];
x0 = [-3; 17; 2; -8];

% desired decay rates
alpha = 0.5;

% solving LMI
cvx_begin sdp
variable P(4,4)
variable Y(1,4)
variable mumu
minimize mumu
P > 0.00001*eye(4);
P*A' + A*P + 2*alpha*P + Y'*B' + B*Y <= 0;
[P x0; x0' 1] > 0;
[P Y'; Y mumu] > 0;
cvx_end

% finding controller matrix
K = Y*inv(P)
mu = sqrt(mumu)

% finding eigenvalues
eig(A + B*K)
```

$$\boldsymbol{\alpha = 0.5} \quad \Rightarrow \quad K = [-0.0015 \quad -1.8 \quad -16.01 \quad 2.1512] \quad \Rightarrow \quad \sigma(A + BK) = \{-0.5 \pm 4.5035i, -0.5, -3\}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 1.5} \quad \Rightarrow \quad K = [-0.0022 \quad -3.74 \quad -27.9 \quad 12.66] \quad \Rightarrow \quad \sigma(A + BK) = \{-1.5 \pm 5.6637i, -1.5, -3\}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 3} \quad \Rightarrow \quad K = [0 \quad -8.66 \quad -51.32 \quad 42.645] \Rightarrow \quad \sigma(A + BK) = \{-3 \pm 7.4140i, -3, -3\}$$

Графики переходных процессов:

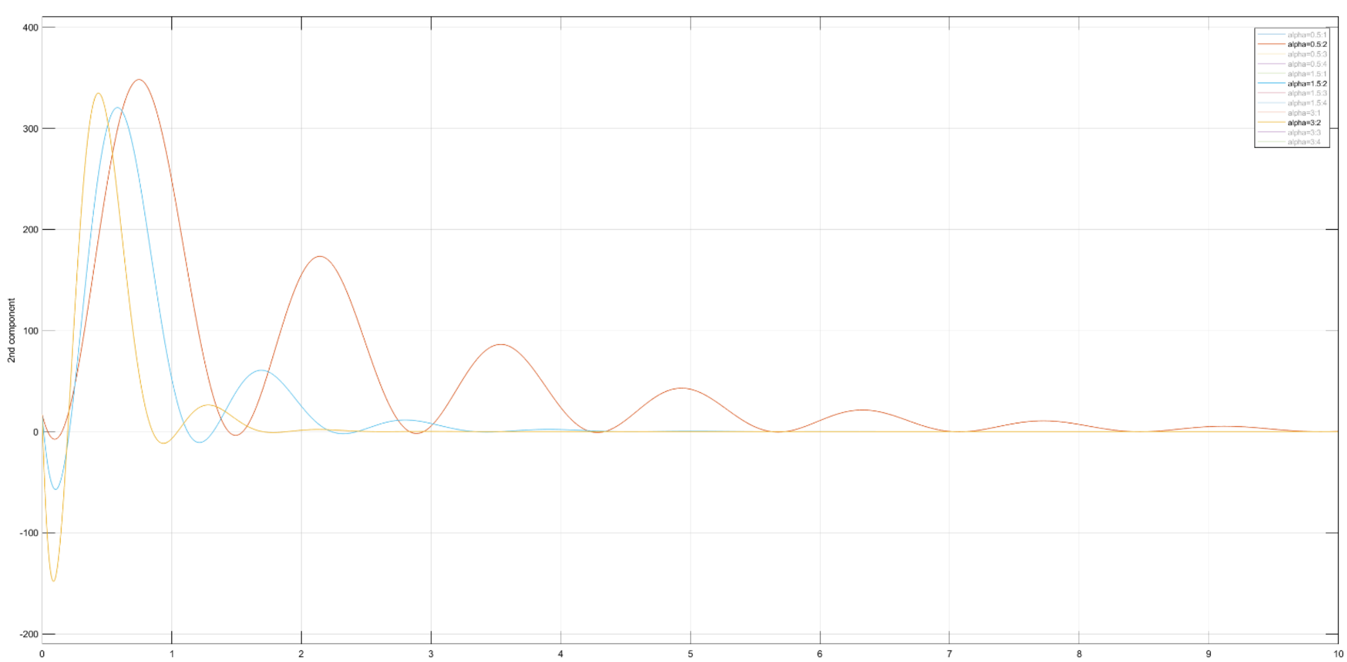

Рисунок 8: графики вторых компонент

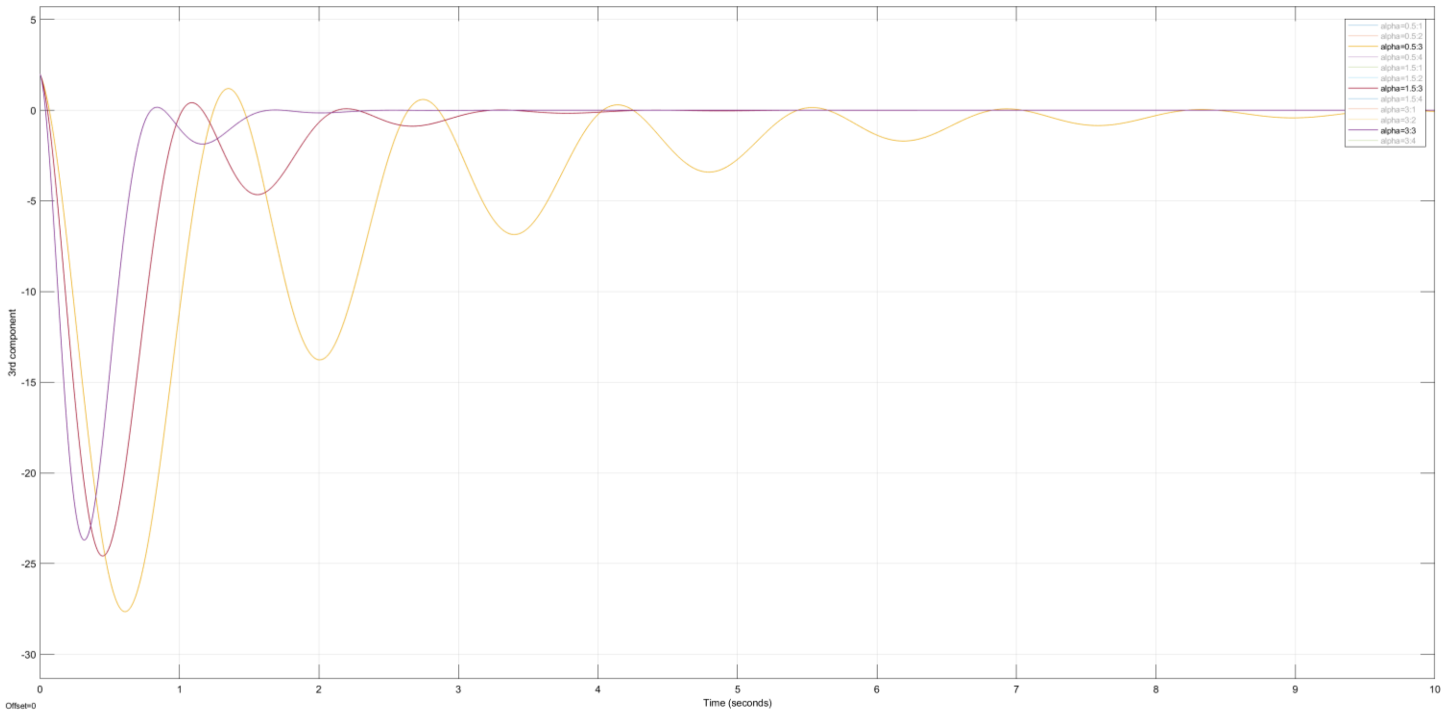

Рисунок 9: графики третьих компонент

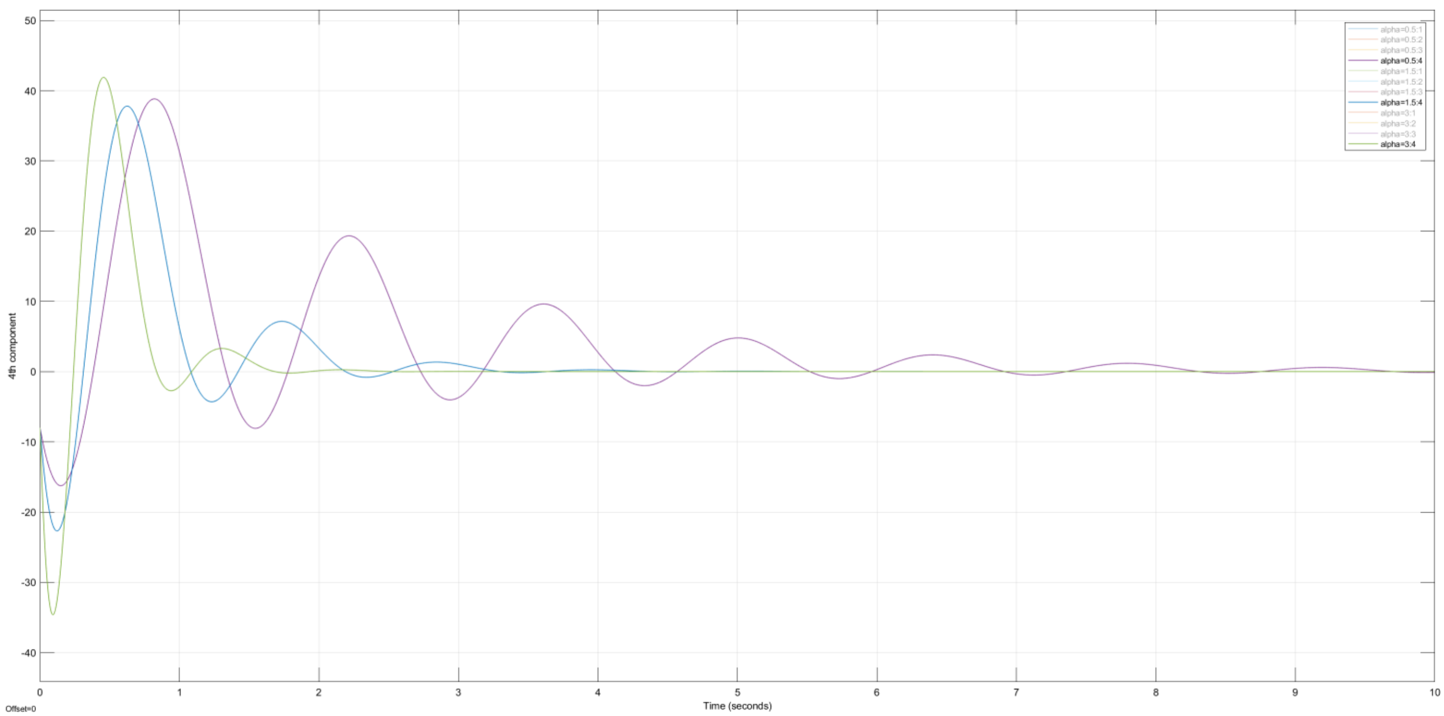

Рисунок 10: графики четвертых компонент

При минимизации входного воздействия точно достигается желаемая степень устойчивости системы. И хотя скорость переходного процесса увеличивается, количество входного воздействия уже не такое огромное, как на предыдущих графиках.

Минимизация может быть очень удобна, так как не все значения μ являются реализуемыми.

Задание 3.

3.1. Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

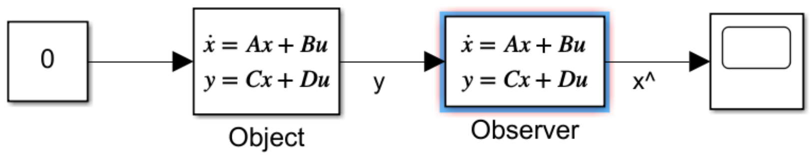

Рисунок 11: схема моделирования системы с наблюдателем

3.2. Расчет наблюдателей с желаемой степенью устойчивости α динамики ошибки наблюдателя

Неравенства для синтеза регулятора:

$$Q \succ 0, \qquad A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T Y^T + YC \prec 0, \qquad L = Q^{-1} Y$$

Программный код:

```
% plant parameters
A = [0 5 0 0; -5 0 0 0; 0 0 0 1; 0 0 -1 0];
C = [0 9 1 0];

% desired decay rate
alpha = 0.5;

% solving LMI
cvx_begin sdp
variable Q(4,4)
variable Y(4,1)
Q > 0.00001*eye(4);
A'*Q + Q*A + 2*alpha*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
cvx_end

% finding controller matrix
L = inv(Q)*Y

% finding eigenvalues
eig(A + L*C)
```

$$\boldsymbol{\alpha = 0.5} \quad \Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 1.777 \\ 0.0067 \\ -5.8410 \\ -2.4597 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma(A + LC) = \{-2.2017 \pm 9.7912i, -0.6885 \pm 1.0857i\}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 1.5} \quad \Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 4.7258 \\ 2.6037 \\ -40.3442 \\ -45.4886 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma(A + LC) = \{-6.4528 \pm 13.5921i, -2.0028 \pm 1.4360i\}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 3} \quad \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 5 \\ 9.9 \\ -115.75 \\ -225.6841 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(A + LC) = \{-9.35 \pm 14.9273i, -3.95 \pm 1.8471i\}$$

3.3. Моделирование работы найденных наблюдателей

Начальные условия: $x(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 17 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \\ 11 \end{bmatrix}$

Сравнительные графики $x(t), \hat{x}(t)$:

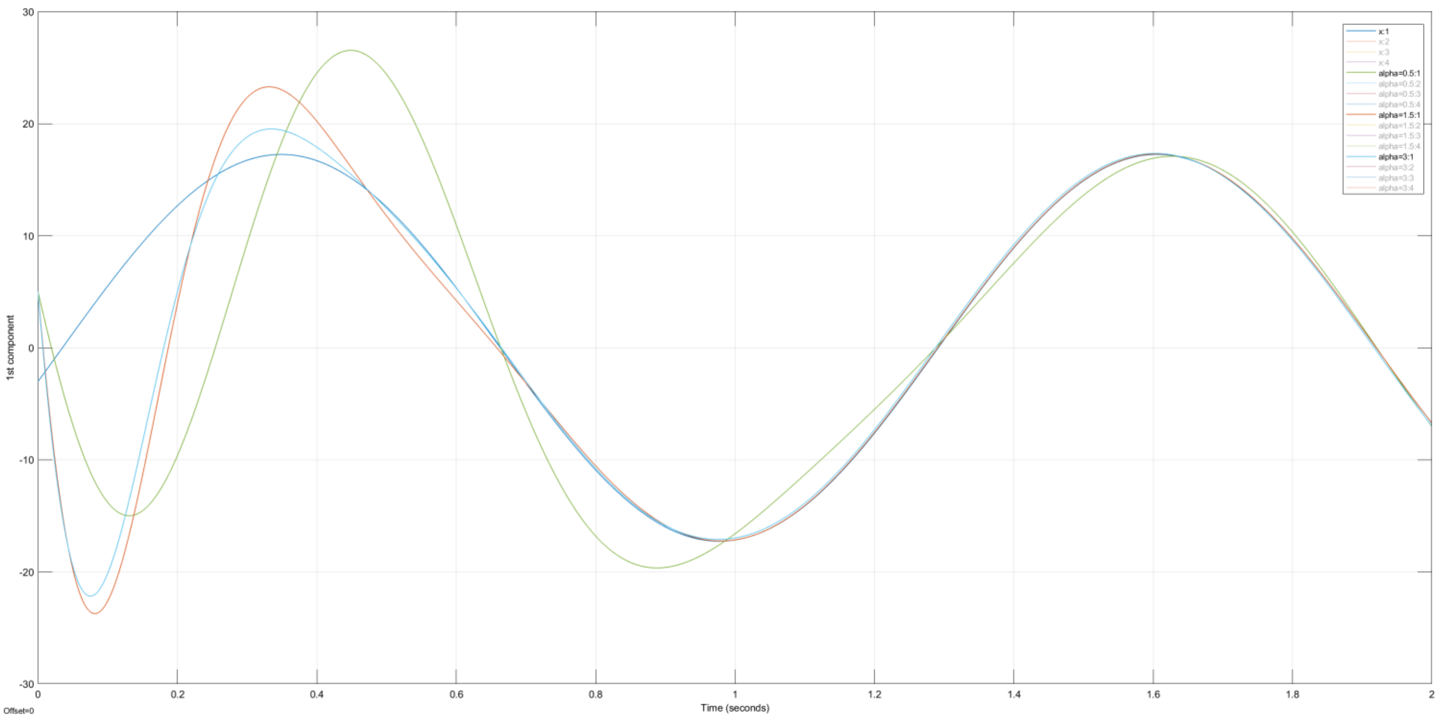

Рисунок 12: графики первых компонент

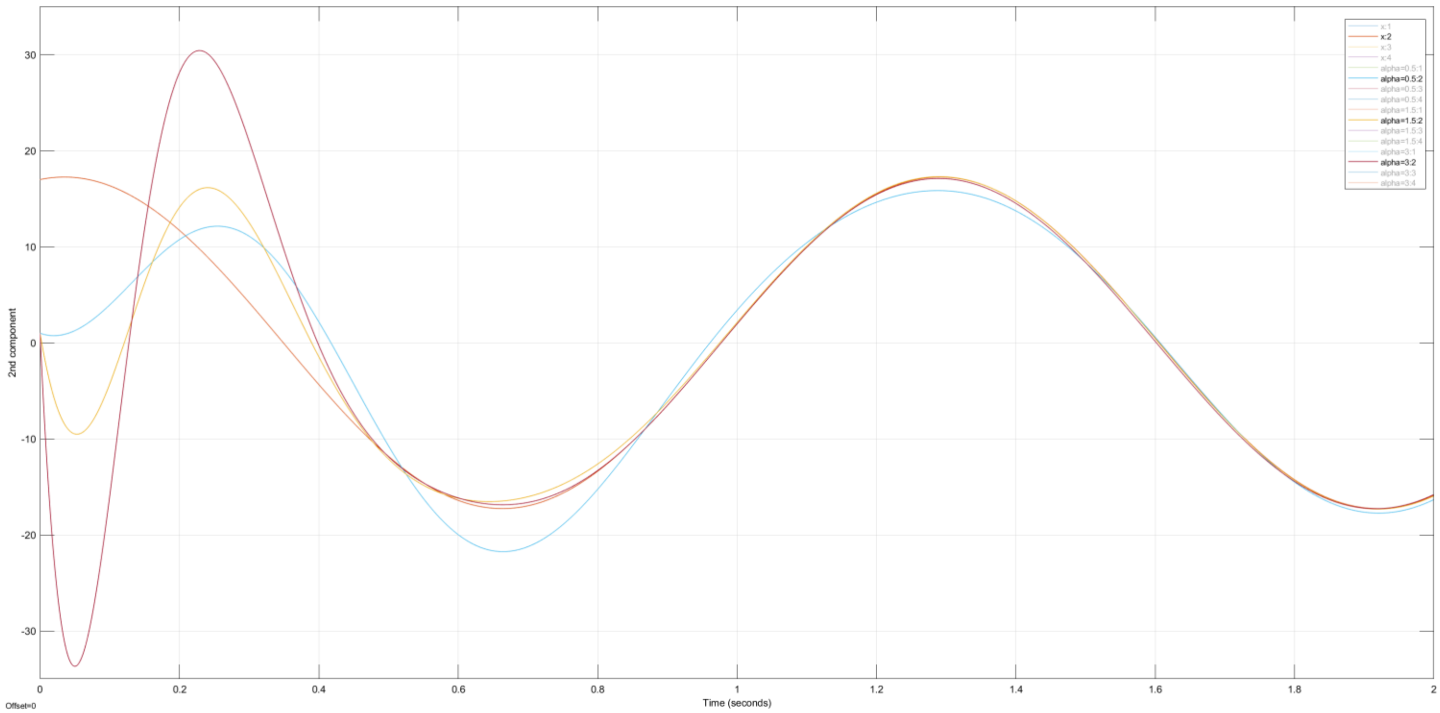

Рисунок 13: график вторых компонент

Сравнительные графики ошибки наблюдателя:

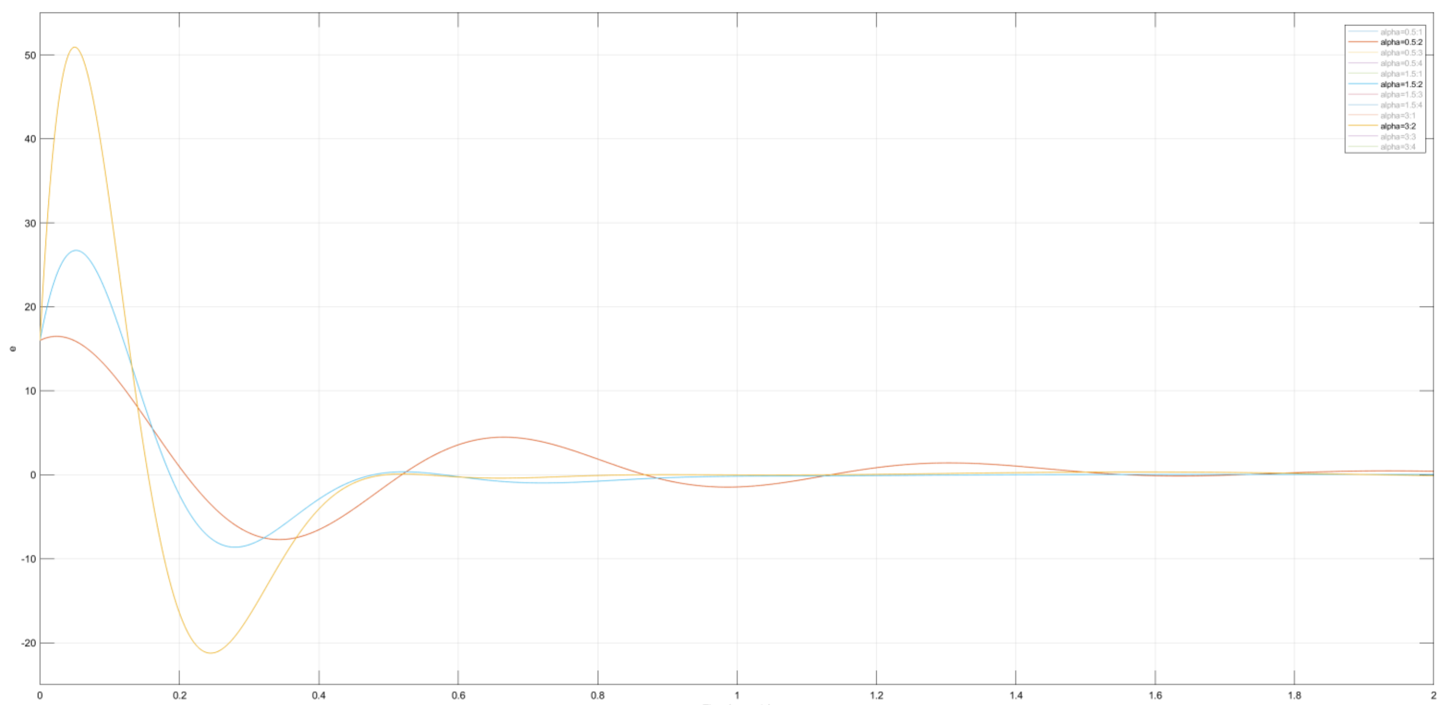

График 14: ошибки наблюдателей по 2 компоненте

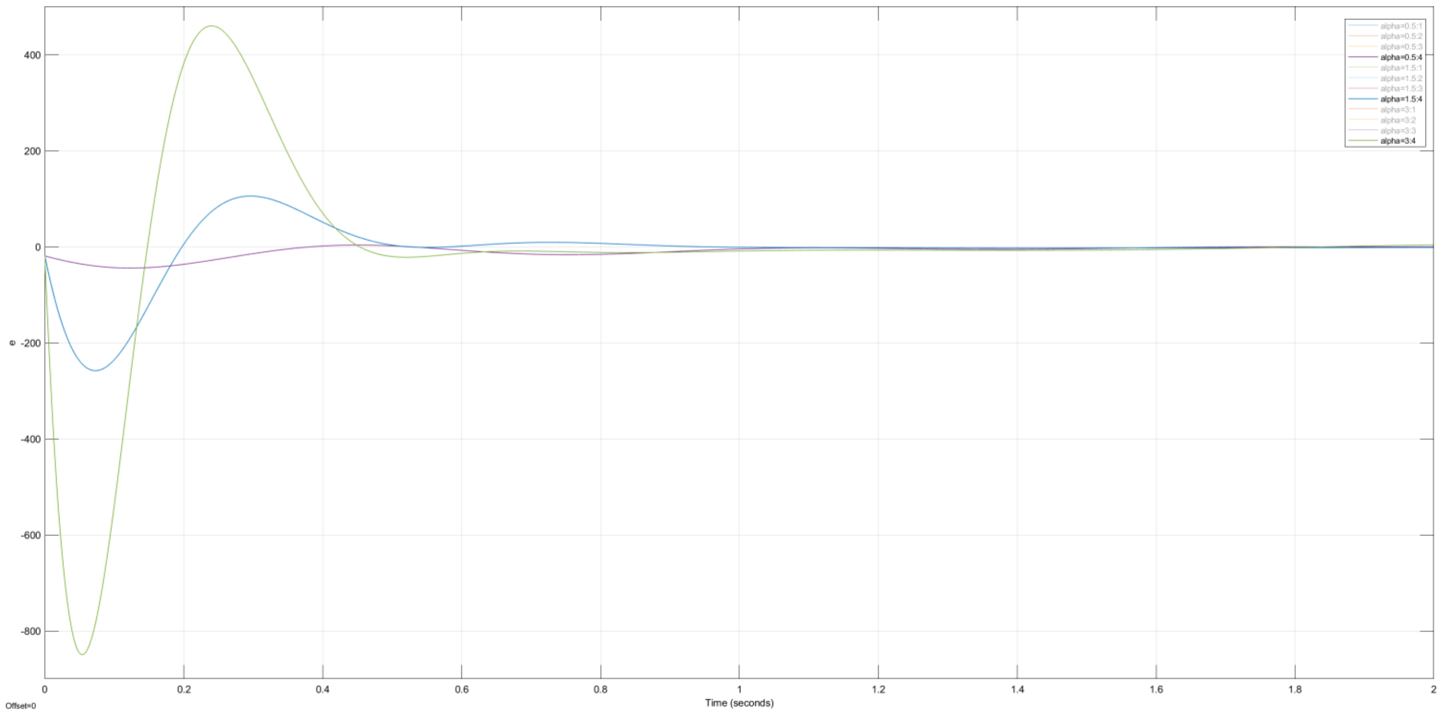

Рисунок 15: ошибки наблюдателей по 4 компоненте

Пронаблюдав графики, можно убедиться в том, что в нашем случае при бóльших коэффициентах α вектор состояния наблюдателя сходится к вектору реального состояния объекта быстрее, однако, чем больше степень сходимости, тем большее отклонение в начале.

Задание 4.

4.1. Схема моделирования системы

Рассматриваемая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & 5 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

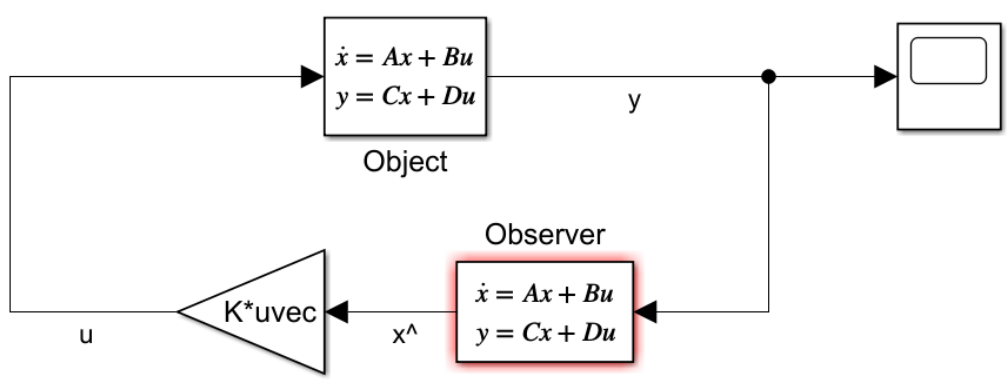

Рисунок 16: схема моделирования замкнутой системы

4.2. Синтез регулятора и наблюдателя

Пусть начальные условия: $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix}$.

Вычислим регулятор со степенью устойчивости $\alpha_{reg} = 3$ с минимизацией входного воздействия, и наблюдатель со степенью сходимости $\alpha_{obs} = 1.5$.

Найдем матрицы K и L с помощью решения соответствующих LMI.

$$K = [25.775 \quad -30.65 \quad 9.3 \quad 4.39], \qquad \mu = 22.21$$

$$L = \begin{bmatrix} 38.6673 & -1.9882 \\ -38.6673 & -1.9882 \\ -8.8267 & 1.9882 \\ -8.8267 & -1.9882 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\sigma(A + BK) = \{-3.0158, -3 \pm 17i, -2.0201, -7.9\}$$

$$\sigma(A + LC) = \{-3.9527, -5.6533 \pm 17.0598i, -8\}$$

Сравнительные графики $x(t)$, $\hat{x}(t)$:

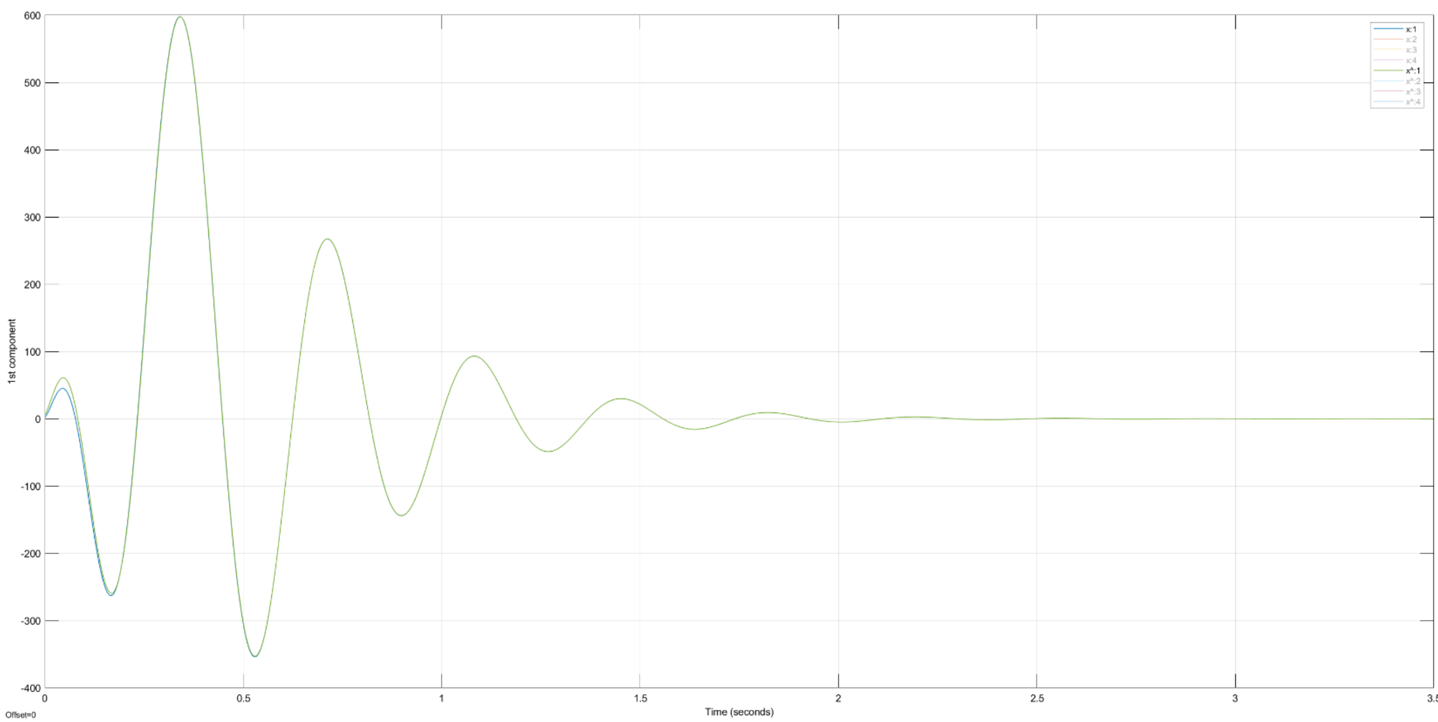

Figure 17: графики первых компонент

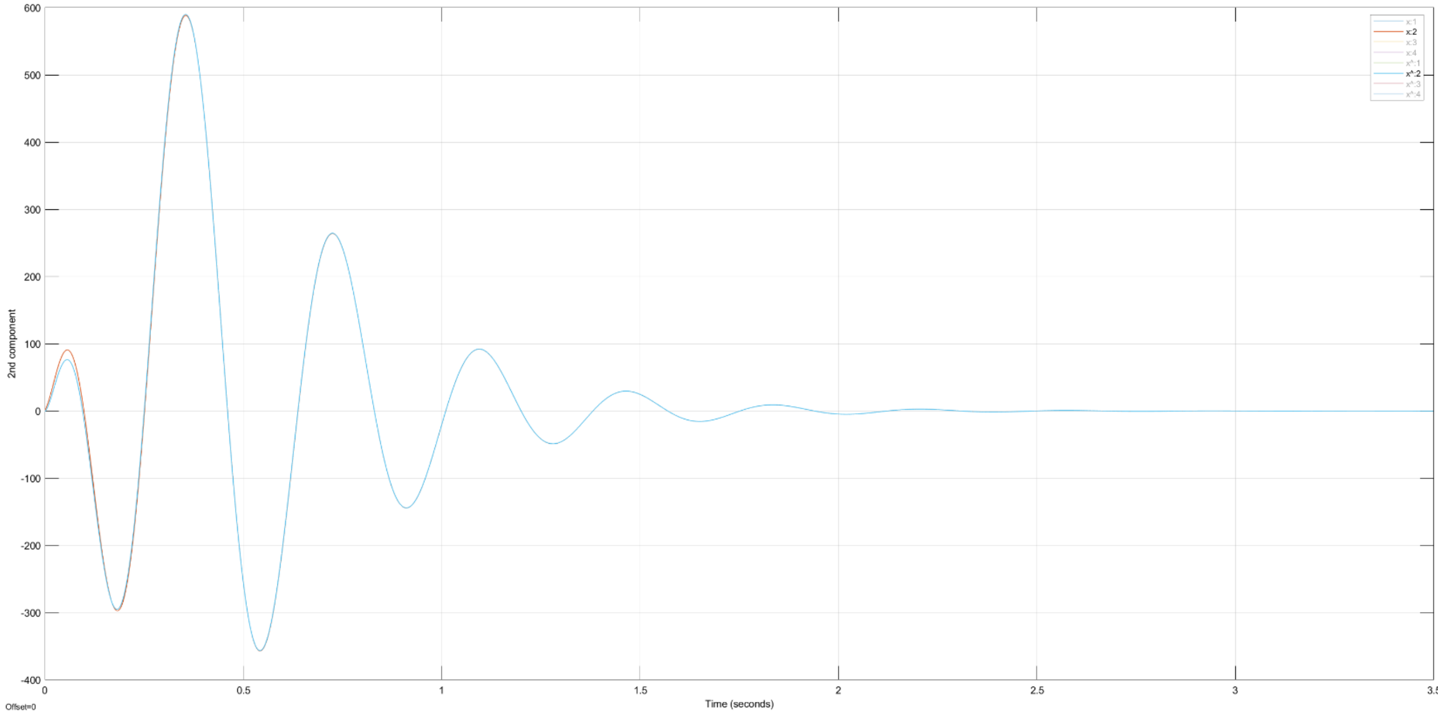

Рисунок 18: графики вторых компонент

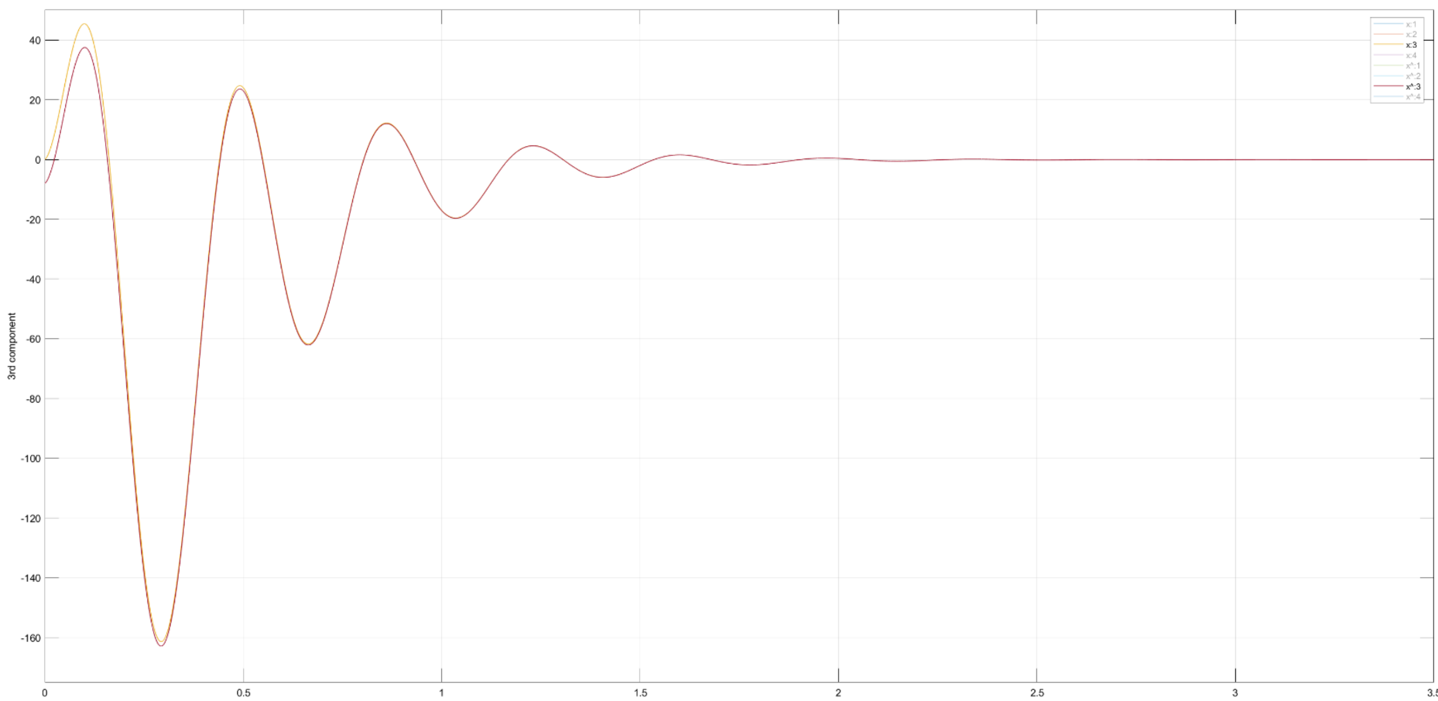

Рисунок 19: графики третьих компонент

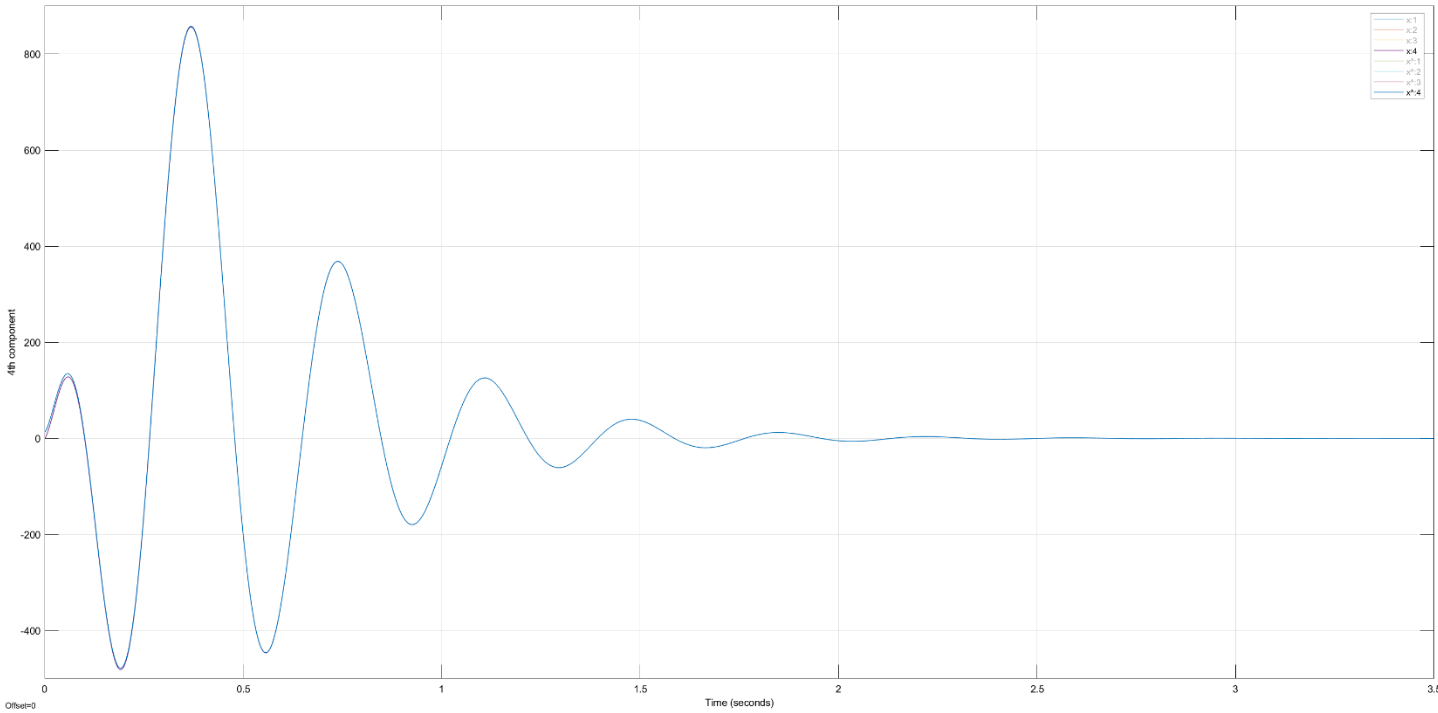

Рисунок 20: графики четвертых компонент

Исходя из графиков, время переходного процесса $\cong 2$ секунды. Время, за которое оценка вектора состояния совпадает с реальным вектором состояния $\cong 0.12$ секунд.

График входного воздействия:

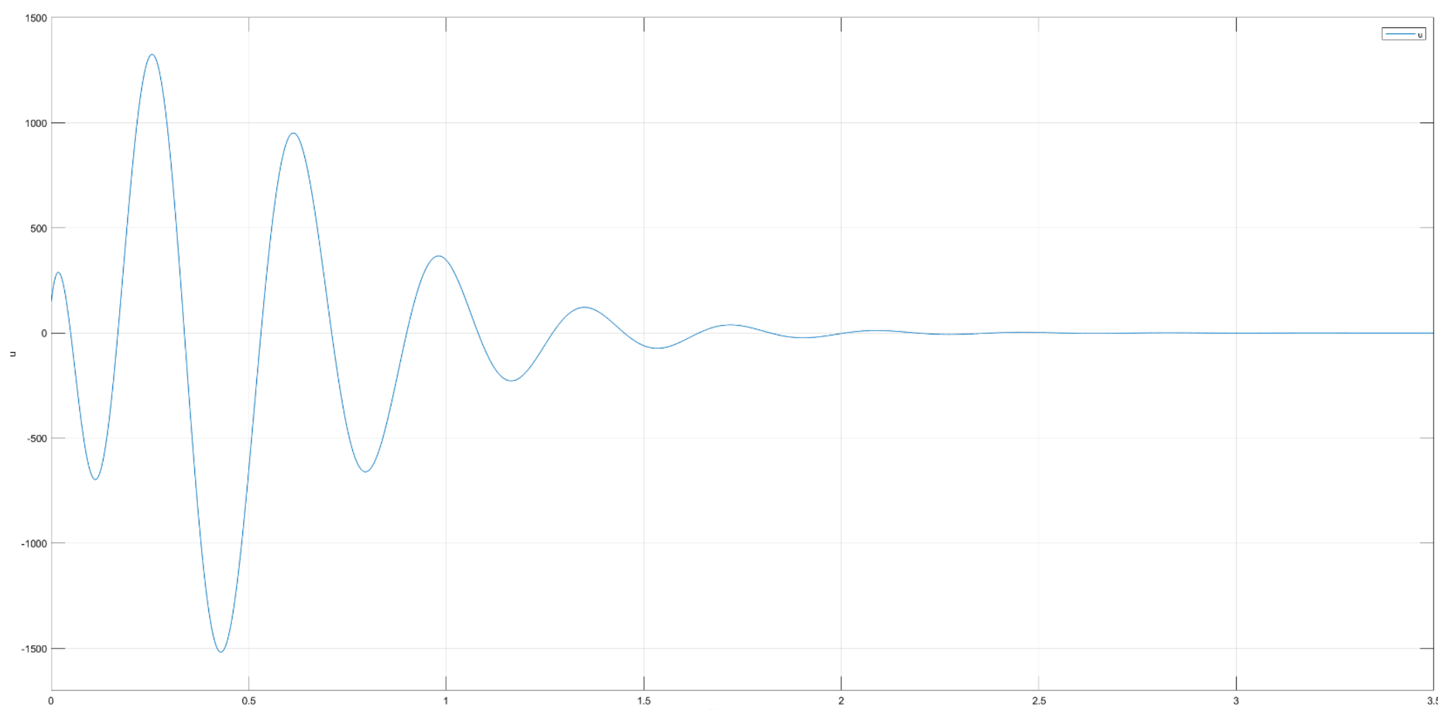

Рисунок 21: входное воздействие

Мы наблюдаем, что входное воздействие сильно превышает найденное нами μ, это происходит из-за того, что рассчитанное значение ограничения на входное воздействие соответствует реальному начальному вектору системы $x(0)$, а реальное входное воздействие рассчитывается по вектору наблюдателя $\hat{x}(t)$ и из-за того, что на начальных этапах значение $\hat{x}(t)$ не совпадает с реальным $x(t)$ реальное входное воздействие превышает наше ограничение.

Если же сделать начальный вектор наблюдателя равным $x(0)$, то найденное ограничение будет соблюдено. Покажем это.

Пусть начальные условия: $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \hat{x}(0)$.

Смоделируем систему с теми же параметрами, тогда график входного воздействия:

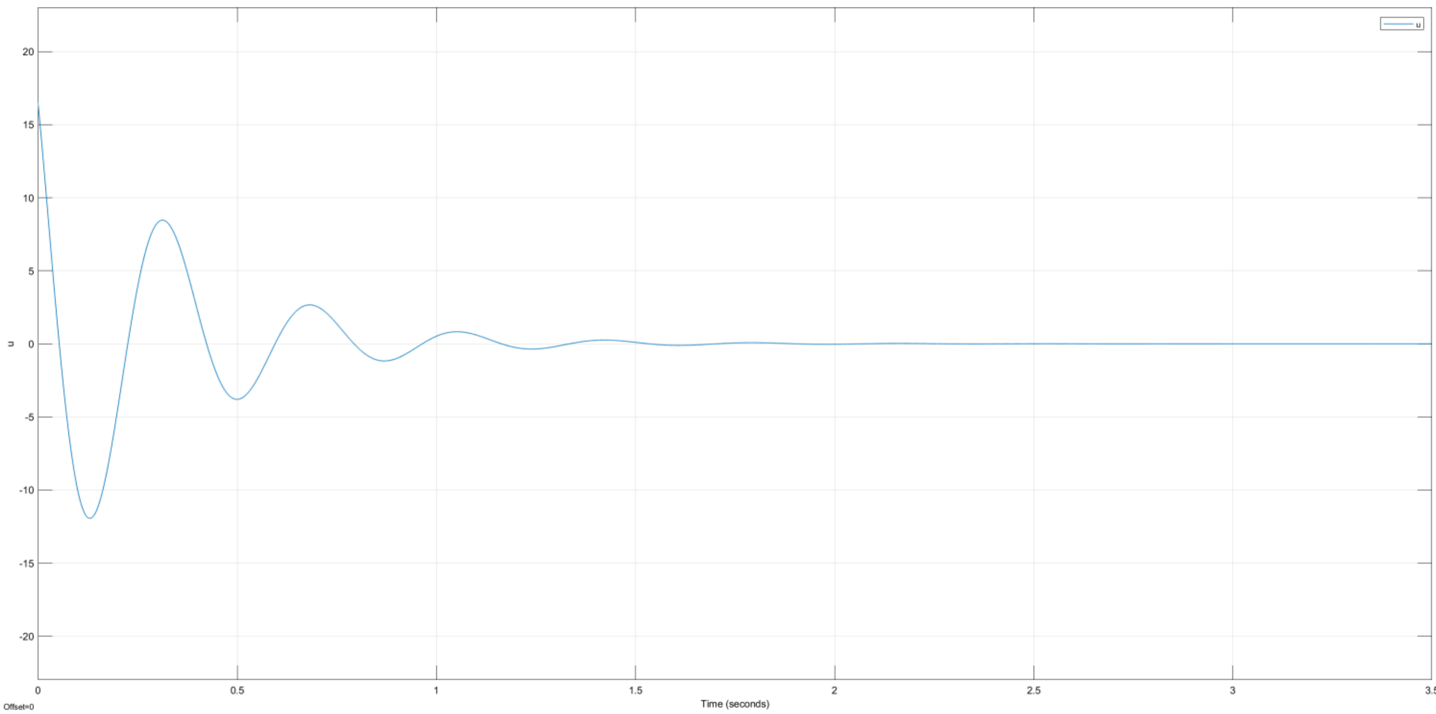

Рисунок 22: входное воздействие при равных н.у.

Задание 5.

При синтезе регулятора к системе $\dot{x} = (A + BK)x$ можно было добавить следующее ограничение на управление

$$\|u(t)\| = \|Kx(t)\| \le \mu, \qquad \text{при } x_0 = x(0)$$

По аналогии к системе $\dot{e} = (A + LC)e$ сделаем такое ограничение на жесткость

$$\|v(t)\| = \|L^T e(t)\| \le \phi, \qquad \text{при } e_0 = e(0)$$

Тогда синтезу наблюдателя будут соответствовать следующие LMI:

$$Q \succ 0, \qquad A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T Y^T + YC \prec 0, \qquad L = Q^{-1} Y$$

$$\begin{bmatrix} Q & e_0 \\ e_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \qquad \begin{bmatrix} Q & Y \\ Y^T & \phi^2 I \end{bmatrix} \succ 0$$

Добавляемые неравенства можно обосновать так: внутри эллипсоида, содержащего точку e_0 значение количества наблюдения $\|L^T e(t)\| \leq \phi$.

Проверим это на простой системе:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Построим наблюдатель с $\alpha = 5$ при начальных условиях:

$$x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{x}_0 = \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad e_0 = e(0) = x_0 - \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Наблюдатель без ограничений на жесткость

$$L = \begin{bmatrix} -22.2325 \\ -172.4174 \end{bmatrix}, \qquad \sigma(A + LC) = \{-11.1163 \pm 6.9890i\}$$

Реальная степень сходимости (11.1163) далеко от желаемой (5).

График вектора ошибки:

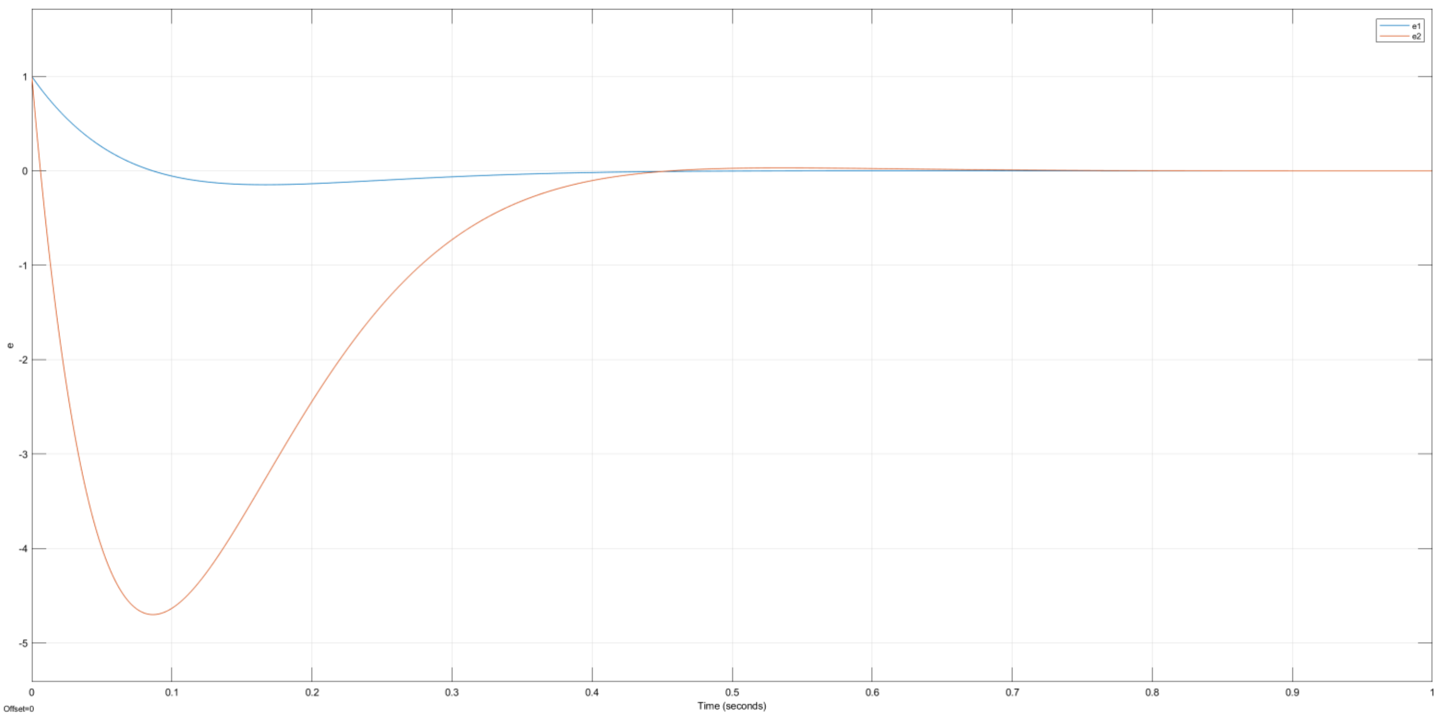

Рисунок 23: графики ошибки наблюдателя без ограничений на жесткость

$$\max(\|e_1(t)\|) \approx 1, \qquad \max(\|e_2(t)\|) \approx 4.5$$

График $L^T e(t)$:

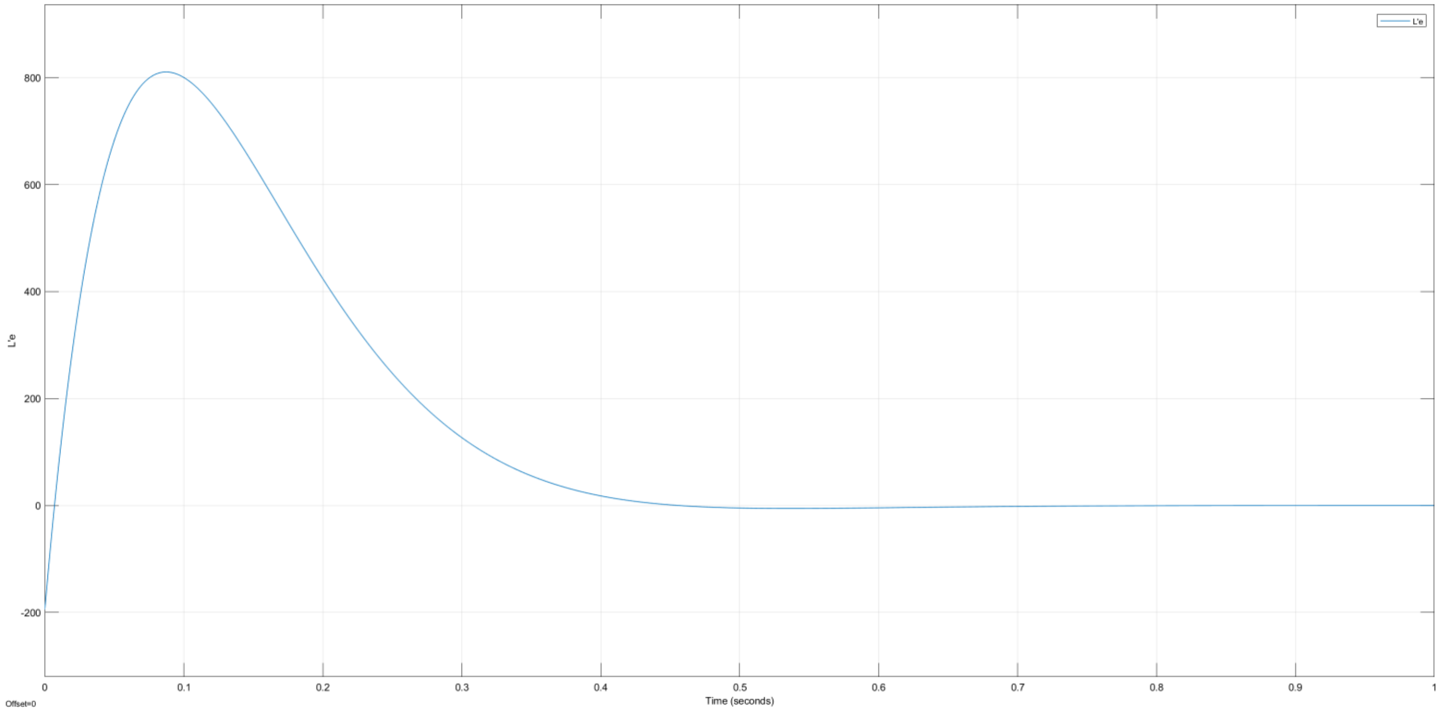

Рисунок 24: график $L^T e(t)$ без ограничений на жесткость

$$\max\left(\|L^T e(t)\|\right) \approx 800$$

Наблюдатель с ограничением на жесткость

Смоделируем ту же систему, только с ограничением $\|L^T e(t)\| \le 600$

Программный код:

```
% plant parameters
A = [0 1; 0 0];
C = [1 0];

% initial conditions
x0 = [1; 0];
x0_obs = [0; -1];
e0 = x0-x0_obs;

% observer constraint
mu = 600;

% desired decay rate
alpha = 5;

% solving LMI
cvx_begin sdp
variable Q(2,2)
variable Y(2,1)
Q > 0.00001*eye(2);
A'*Q + Q*A + 2*alpha*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
[Q e0; e0' 1] > 0;
[Q Y; Y' mu^2] > 0;
cvx_end

% finding observer matrix
L = inv(Q)*Y;
```

$$L = \begin{bmatrix} -10.5501 \\ -36.4516 \end{bmatrix}, \qquad \sigma(A + LC) = \{-5.2750 \pm 2.9369i\}$$

Реальная степень сходимости стала меньше (5.275), по сравнению с наблюдателем без ограничения (11.1163).

График вектора ошибки:

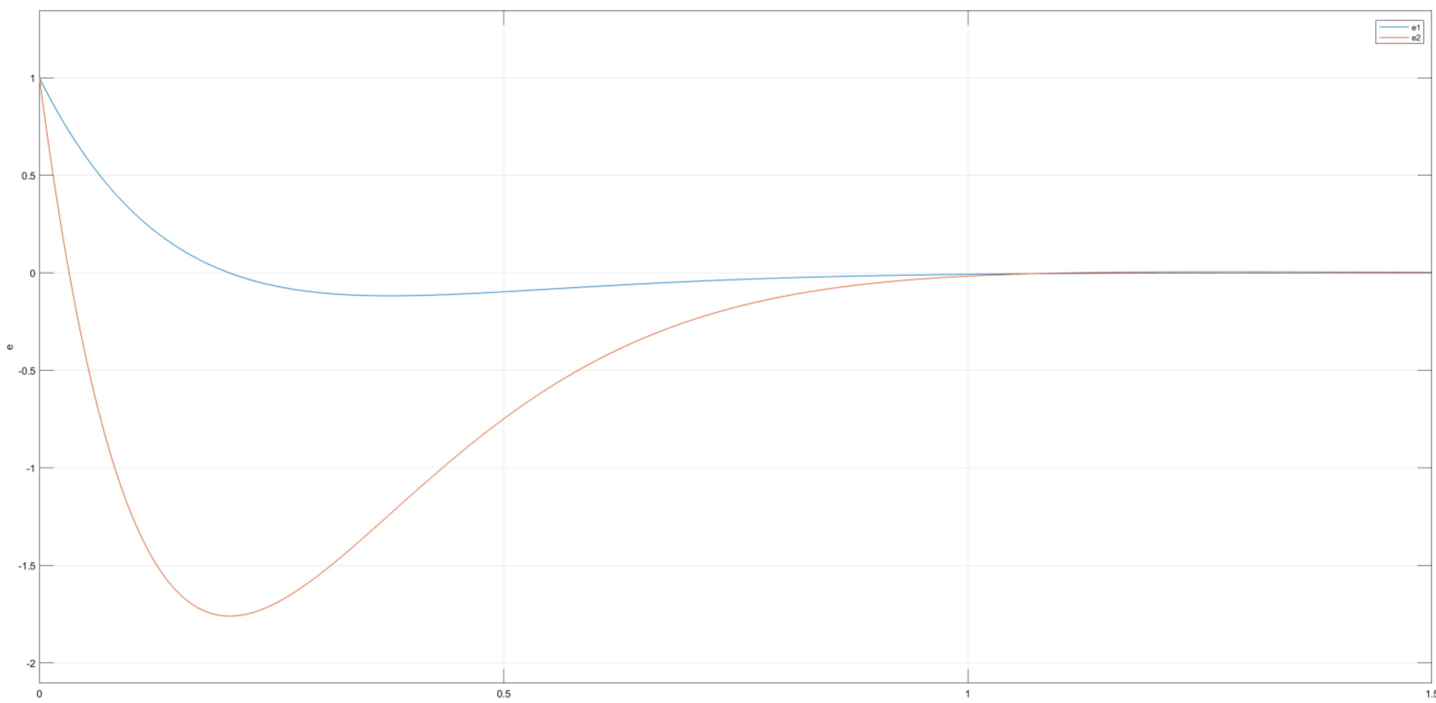

Рисунок 25: графики ошибки наблюдателя с ограничением на жесткость

Как мы видим, ошибки стали меньше по модулю, но время сходимости увеличилось

График $L^T e(t)$:

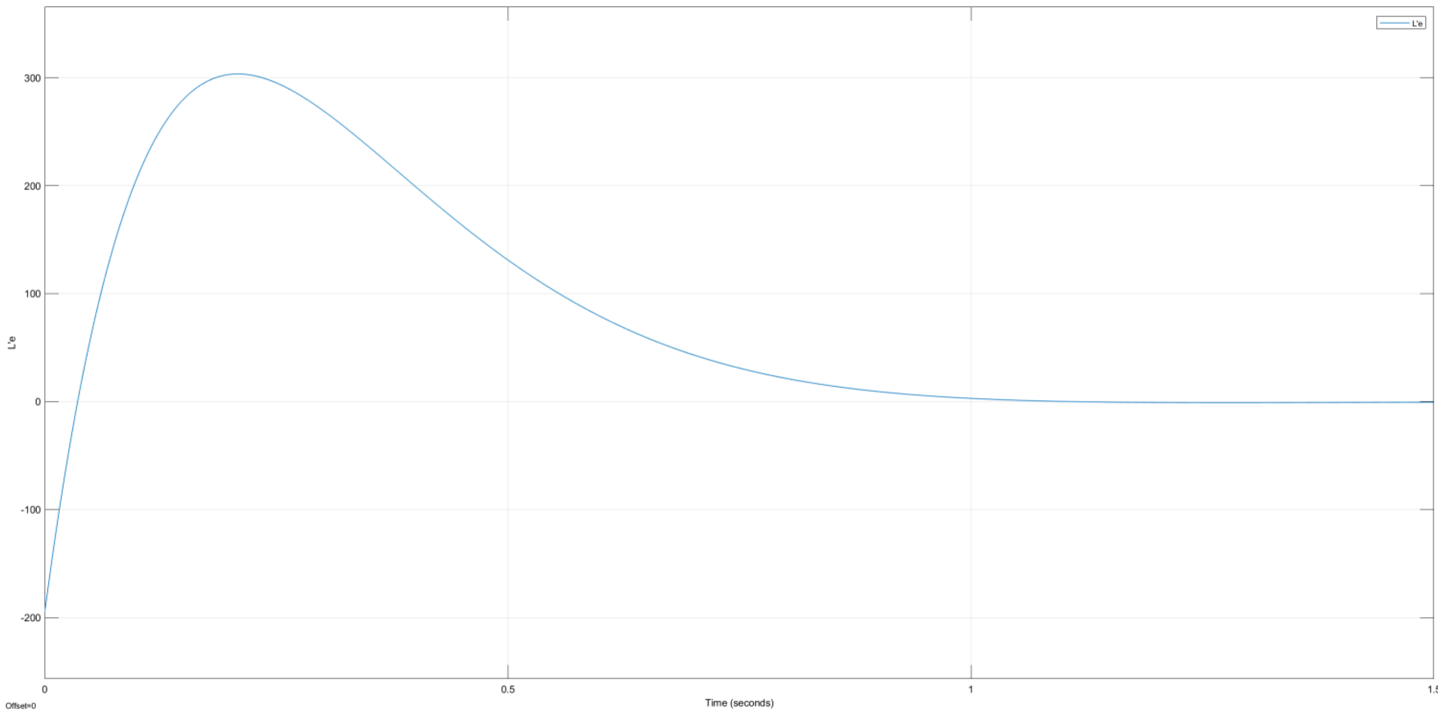

Рисунок 26: график $L^T e(t)$ с ограничением на жесткость

Введенное ограничение соблюдается. Норма значения графика в любой момент времени действительно ≤ 600.

Наблюдатель с минимизацией жесткости

Минимизируем ограничение жесткости

Программный код:

```
% plant parameters
A = [0 1; 0 0];
C = [1 0];

% initial conditions
x0 = [1; 0];
x0_obs = [0; -1];
e0 = x0-x0_obs;

% desired decay rate
alpha = 5;

% solving LMI
cvx_begin sdp
variable Q(2,2)
variable Y(2,1)
variable mumu
minimize mumu
Q > 0.00001*eye(2);
A'*Q + Q*A + 2*alpha*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
[Q e0; e0' 1] > 0;
[Q Y; Y' mumu] > 0;
cvx_end

% finding observer matrix
L = inv(Q)*Y;
mu = sqrt(mumu);
```

$$L = \begin{bmatrix} -10 \\ -34.0434 \end{bmatrix}, \qquad \sigma(A + LC) = \{-5 \pm\ 3.7475i\}, \qquad \phi = 78.3$$

Степень сходимости наблюдателя теперь достигла желаемой, а значит минимизация ограничения успешна.

График ошибки:

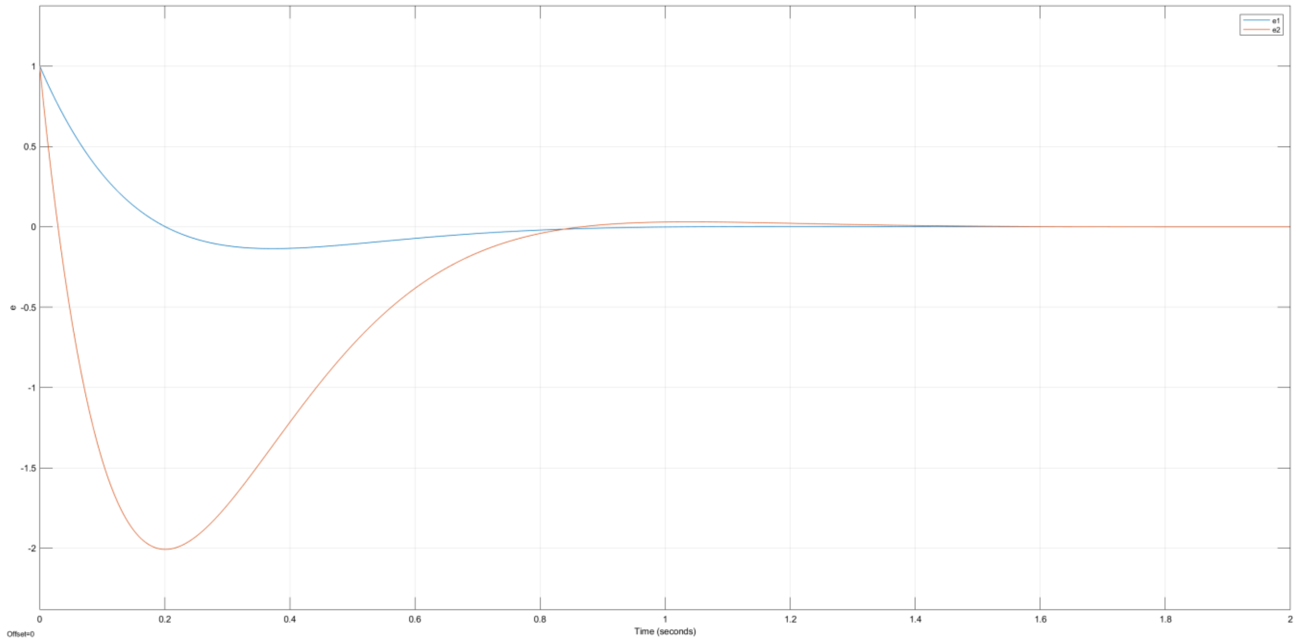

Рисунок 27: график ошибки при минимизации ограничения

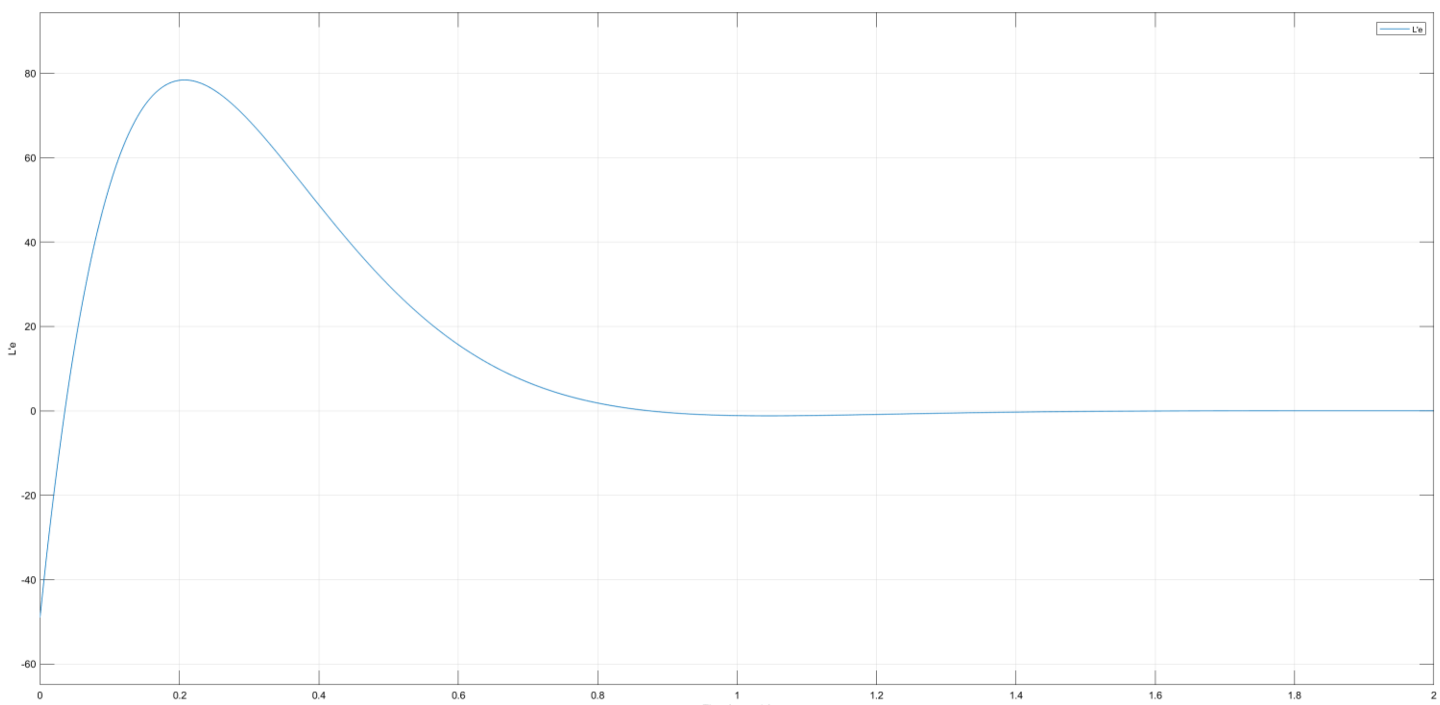

Рисунок 28: график $L^T e(t)$ при минимизации ограничения

Функция не превышает минимизированного ограничения $\phi = 78.3$.

Итого, мы ввели успешно реализовали ограничение на жесткость наблюдателя. Если ограничиваемое значение при синтезе регулятора $\|u(t)\| = \|Kx(t)\|$ означало количество управления, необходимое для привидения системы в нужное нам положение. То в случае наблюдателя значение $\|v(t)\| = \|L^T e(t)\|$ по смыслу означает количество наблюдения, необходимое для того, чтобы полностью знать все состояние системы.

Выводы

В данной лабораторной работе были построены регуляторы и наблюдатели с заданной степенью сходимости с помощью линейных матричных неравенств, была исследована зависимость степени сходимости и матриц наблюдателя и регулятора, и собственных чисел матриц $A + BK$ и $A + LC$. Также были построены регулятор с минимизированным ограничением на входное управление и наблюдатель с минимизированной жесткостью. В конце реализована система с регулятором и наблюдателем с определенными степенями сходимости.