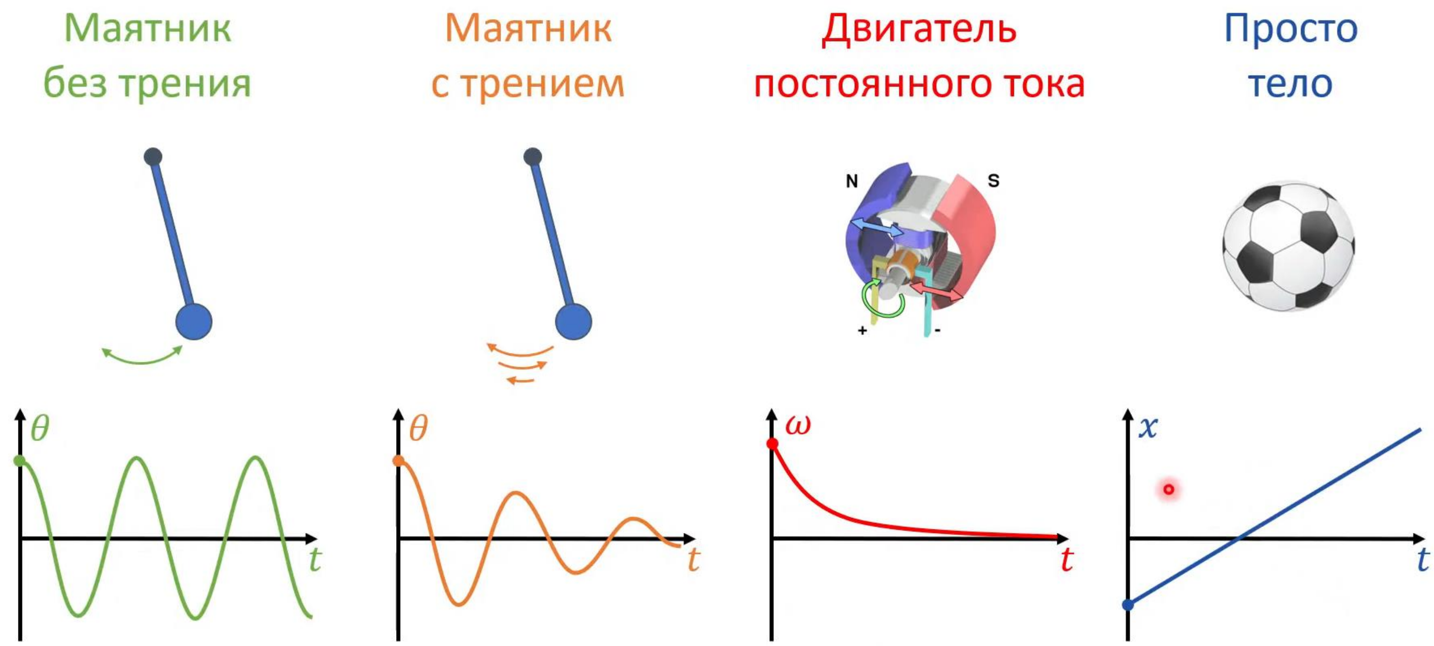
Свободное движение и устойчивость

Свободное движение – движение системы при отсутствие внешних воздействий



Свободное движение в форме В-В

Линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$$

$$\Big\downarrow \begin{array}{c}\text{Подстановка}\\ y(t) = e^{\lambda t}\end{array}$$

$$\left(e^{\lambda t}\right)''' + a_2\left(e^{\lambda t}\right)'' + a_1\left(e^{\lambda t}\right)' + a_0\left(e^{\lambda t}\right) \equiv 0$$

$$\lambda^3\left(e^{\lambda t}\right) + a_2\lambda^2\left(e^{\lambda t}\right) + a_1\lambda\left(e^{\lambda t}\right) + a_0\left(e^{\lambda t}\right) \equiv 0$$

$$(\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)\left(e^{\lambda t}\right) \equiv 0$$

$$e^{\lambda t} \not\equiv 0$$

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Корням соответствуют моды – составные части решения

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$$

(первая мода) (вторая мода) (третья мода)

Общее решение

$$y(t) = c_1 \cdot (\text{первая мода}) + c_2 \cdot (\text{вторая мода}) + c_3 \cdot (\text{третья мода})$$

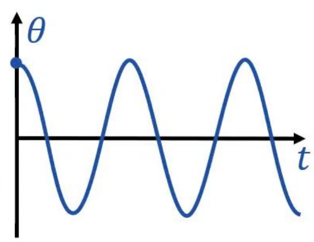
Соответствие корней и мод

- Вещественным корням соответствуют экспоненты
- Мнимым корням соответствуют синусы-косинусы
- Кратным корням соответствует умножение на *t*

Корни	Моды	Моды при кратных корнях
$\lambda = \alpha$ (вещественный)	$e^{\alpha t}$	$te^{\alpha t}, t^2e^{\alpha t}, t^3e^{\alpha t}, \ldots$
$\lambda = \pm\beta i$ (пара чисто мнимых)	$\sin\beta t, \cos\beta t$	$t\sin\beta t, t\cos\beta t,$ $t^2\sin\beta t, t^2\cos\beta t, \ldots$
$\lambda = \alpha \pm \beta i$ (пара комплексно-сопряженных)	$e^{\alpha t}\sin\beta t, e^{\alpha t}\cos\beta t$	$te^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t,$ $t^2e^{\alpha t}\sin\beta t, t^2e^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots$
$\lambda = 0$	1	$t, t^2, t^3, \ldots$

Примеры нахождения свободного движения

Маятник около нижнего положения без трения



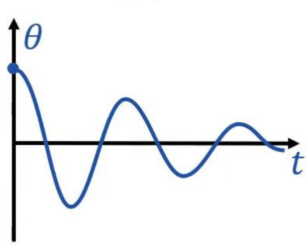
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}M$$

$$\ddot{\theta}_{\text{св}} + \frac{g}{l}\theta_{\text{св}} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\,i$$

$$\theta_{\text{св}}(t) = c_1\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + c_2\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$$

Маятник около нижнего положения с трением



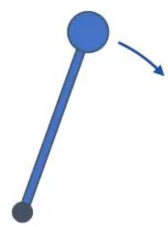
$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}M$$

$$\ddot{\theta}_{\text{св}} + k\dot{\theta}_{\text{св}} + \frac{g}{l}\theta_{\text{св}} = 0$$

$$\lambda^2 + k\lambda + \frac{g}{l} = 0 \xrightarrow[\text{малых } k]{\text{при}} \lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{\star}}{2}\,i$$

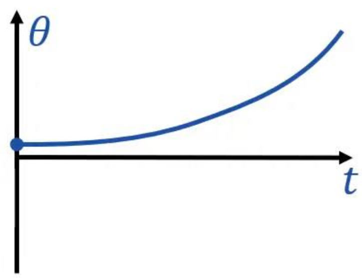
$$\theta_{\text{св}}(t) = c_1e^{-\frac{k}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{\star}}{2}t\right) + c_2e^{-\frac{k}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\star}}{2}t\right)$$

Маятник около верхнего положения



$$\ddot{\theta} - \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}M$$

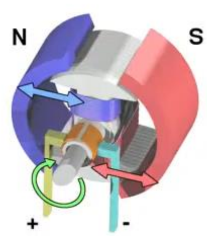
$$\ddot{\theta}_{\text{св}} - \frac{g}{l}\theta_{\text{св}} = 0$$



$$\lambda^2 - \frac{g}{l} = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$$

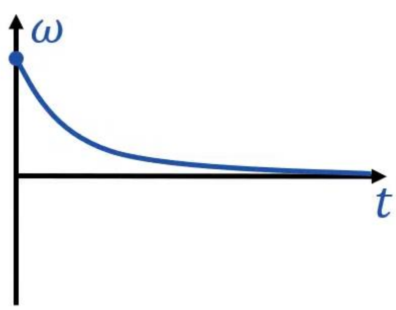
$$\theta_{\text{св}}(t) = c_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} + c_2 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

Двигатель постоянного тока (упрощённая модель)



$$\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR}\omega = \frac{k_m}{JR}U$$

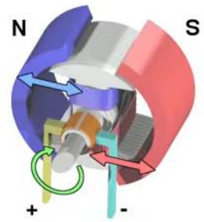
$$\dot{\omega}_{\text{св}} + \frac{k_m k_e}{JR}\omega_{\text{св}} = 0$$



$$\lambda + \frac{k_m k_e}{JR} = 0 \qquad \lambda = -\frac{k_m k_e}{JR}$$

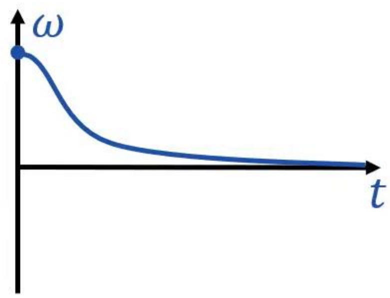
$$\omega_{\text{св}}(t) = c e^{-\frac{k_m k_e}{JR}t} = c e^{-\frac{t}{T_м}}$$

Двигатель постоянного тока («полная» модель)



$$\ddot{\omega} + \frac{R}{L}\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JL}\omega = \frac{k_m}{JL}U$$

$$\ddot{\omega}_{св} + \frac{R}{L}\dot{\omega}_{св} + \frac{k_m k_e}{JL}\omega_{св} = 0$$



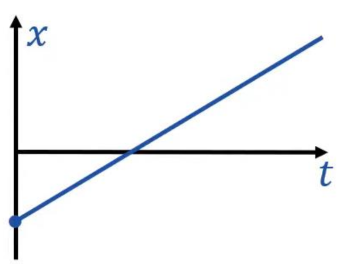
$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{k_m k_e}{JL} = 0 \xrightarrow[\text{малых } L]{\text{при}} \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\star}}{2}$$

$$\omega_{св}(t) = c_1 e^{\frac{-R/L-\sqrt{\star}}{2}t} + c_2 e^{\frac{-R/L+\sqrt{\star}}{2}t}$$

Просто тело (модель по координате)

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}F$$

$$\ddot{x}_{св} = 0$$



$$\lambda^2 = 0$$

$$x_{св}(t) = c_1 + c_2 t$$

Свободное движение в форме В-С-В

Скалярный случай

$$\dot{x} = ax$$

$$\dot{x}(t) \in \mathbb{R} \qquad a \in \mathbb{R} \qquad x(t) \in \mathbb{R}$$

Решение

$$x(t) = e^{at}x(0)$$

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \cdots$$

Векторный случай

$$\dot{x} = Ax$$

$$\dot{x}(t) \in \mathbb{R}^n \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

Решение

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Матричная экспонента

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

Если $u \equiv 0$

Линейная система

Вход $u(t)$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Выход $y(t)$

Состояние $x(t)$

Её свободное движение

$$\begin{cases} \dot{x}_{\text{св}} = Ax_{\text{св}} \\ y_{\text{св}} = Cx_{\text{св}} \end{cases}$$

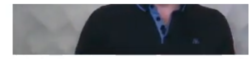
Выход $y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0)$

Состояние $x_{\text{св}}(t) = e^{At}x(0)$

Линейная система $\Rightarrow$ **Её свободное движение**

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{\text{св}}(t) &= e^{At}x(0) \\ y_{\text{св}}(t) &= Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

Вычисление матричной экспоненты через ряд Тейлора



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=e^{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}t}\cdot\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=I+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\frac{t^2}{2!}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\frac{t^2}{2!}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1-\frac{t^2}{2!}+\cdots & -t+\frac{t^3}{3!}-\cdots\\ t-\frac{t^3}{3!}+\cdots & 1-\frac{t^2}{2!}+\cdots\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{bmatrix}$$

Дифференциальное уравнение

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\Big\downarrow\quad e^{At}=\begin{bmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{bmatrix}$$

Его решение

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}$$

Вычисление матричной экспоненты через спектральные разложения

Если спектральное разложение есть

$$\dot{x} = Ax$$

$$\dot{x} = PDP^{-1}x$$

$$x(t) = e^{At}x(0) = Pe^{Dt}P^{-1}x(0)$$

Легко вычислить, т.к. D — диагональная

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^{-3t} & -e^{2t} + e^{-3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-3t} & -e^{2t} + 2e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

Вычисление матричной экспоненты через жорданово разложение

$$\dot{x} = Ax$$

$$\dot{x} = PSP^{-1}x$$

Жорданово разложение точно есть!

$$x(t) = e^{At}x(0) = Pe^{St}P^{-1}x(0)$$

Относительно легко вычислить, т.к. S — жорданова

$$S_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad e^{S_2 t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad e^{S_3 t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} & \frac{t^2}{2}e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad e^{S_4 t} = \begin{bmatrix} e^{4t} & te^{4t} & \frac{t^2}{2!}e^{4t} & \frac{t^3}{3!}e^{4t} \\ 0 & e^{4t} & te^{4t} & \frac{t^2}{2!}e^{4t} \\ 0 & 0 & e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad e^{St} = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos(3t) & e^{2t}\sin(3t) \\ -e^{2t}\sin(3t) & e^{2t}\cos(3t) \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad e^{St} = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos(3t) & e^{2t}\sin(3t) & 0 & 0 \\ -e^{2t}\sin(3t) & e^{2t}\cos(3t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t}\cos(3t) & e^{2t}\sin(3t) \\ 0 & 0 & -e^{2t}\sin(3t) & e^{2t}\cos(3t) \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad e^{St} = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos(3t) & e^{2t}\sin(3t) & te^{2t}\cos(3t) & te^{2t}\sin(3t) \\ -e^{2t}\sin(3t) & e^{2t}\cos(3t) & -te^{2t}\sin(3t) & te^{2t}\cos(3t) \\ 0 & 0 & e^{2t}\cos(3t) & e^{2t}\sin(3t) \\ 0 & 0 & -e^{2t}\sin(3t) & e^{2t}\cos(3t) \end{bmatrix}$$

Соответствие между В-В и В-С-В

Вход-Выход

$$\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u$$

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Корни характеристического уравнения системы

Вход-Состояние-Выход

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Собственные числа матрицы A

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

Моды

$$e^{3t} \quad te^{3t} \quad e^{5t}$$

Свободное движение

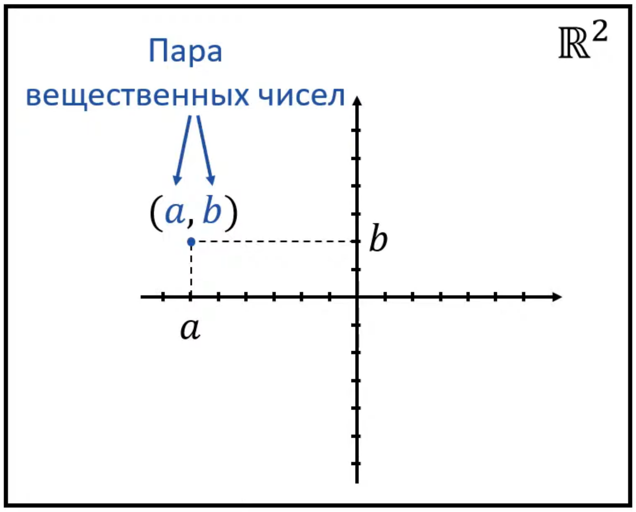
$$y_{св}(t) = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t} + c_3 e^{5t}$$

Элементы матричной экспоненты

$$e^{At} \cong \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix}$$

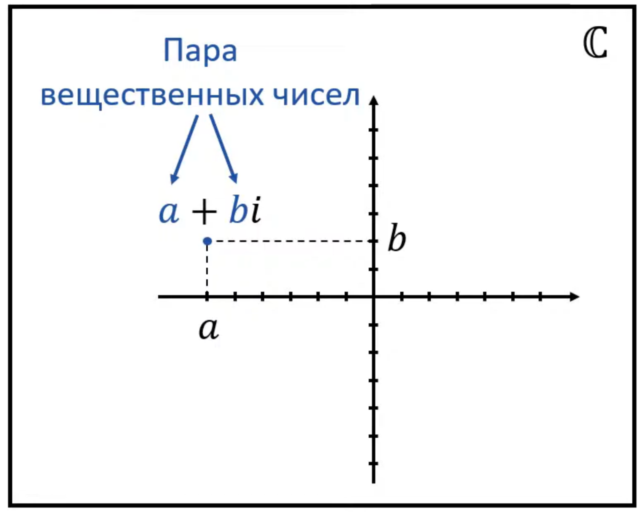
Свободное движение

$$y_{св}(t) = Cx_{св}(t) = Ce^{At}x(0)$$



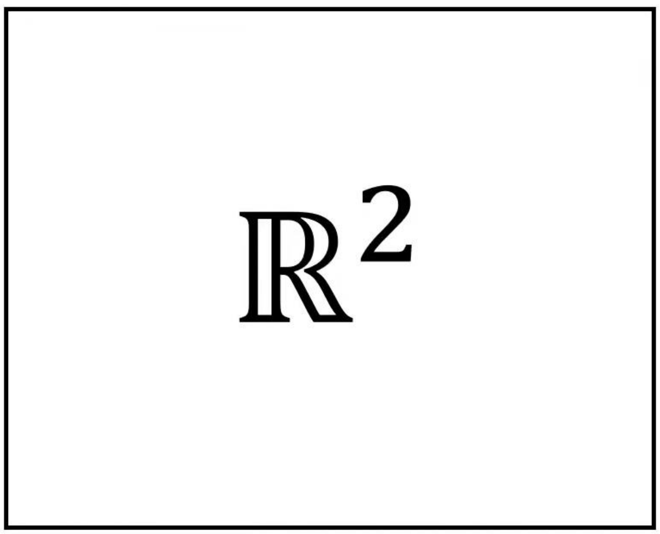
Точки можно складывать

$$(a, b) + (c, d)$$



Точки можно складывать и умножать

$$(a + bi) + (c + di) \quad (a + bi) \cdot (c + di)$$



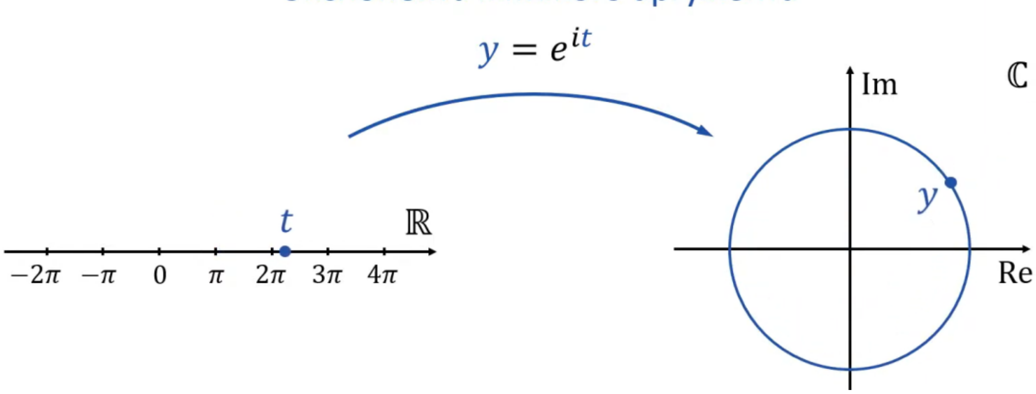
Точки можно складывать

$$(a, b) + (c, d)$$

Точки можно складывать и умножать

$$(a, b) + (c, d) \quad (a, b) \cdot (c, d)$$

Экспонента мнимого аргумента



Формула Эйлера

$$e^{it} = \cos t + i\sin t = (\cos t\,, \sin t)$$

Просто вращение

Одна проекция

Другая проекция

$$e^{i\beta t} = \text{Вращение с другой скоростью}$$

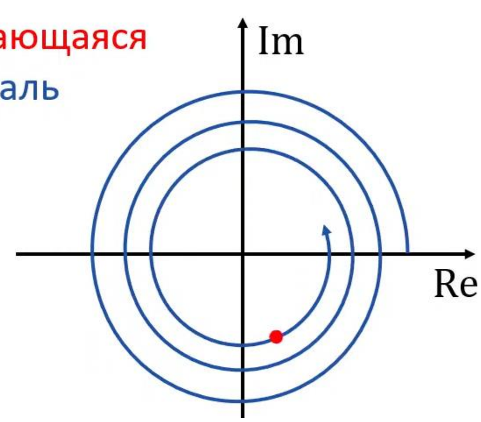
Экспонента комплексного аргумента

$$e^{(\alpha+\beta i)t} = \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{Растяжение}}\,\underbrace{e^{i\beta t}}_{\text{Вращение}}$$

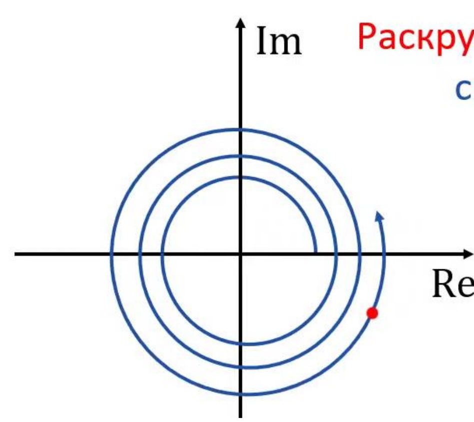
Экспонента комплексного аргумента

$$e^{(\alpha+\beta i)t}$$

$\alpha < 0$ — Закручивающаяся спираль



$\alpha > 0$ — Раскручивающаяся спираль



Комплексная точка зрения: корни и моды

Таблица соответствия корней и мод

Корни	Моды	Моды при кратных корнях
$\lambda = \alpha + \beta i$	$e^{(\alpha+\beta i)t}$	$te^{(\alpha+\beta i)t}, t^2e^{(\alpha+\beta i)t}, \ldots$

Если мы разрешаем комплексные функции, то на этом всё!

Дифференциальное уравнение

$$\boxed{\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0}$$

Характеристическое

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Его корни

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i}$$

Моды

$$e^{(\alpha+\beta i)t} \quad e^{(\alpha-\beta i)t}$$

Если коэффициенты вещественные, то комплексные корни идут сопряжёнными парами

Общее решение

$$y(t) = c_1 \cdot e^{(\alpha+\beta i)t} + c_2 \cdot e^{(\alpha-\beta i)t}$$

?

Если мы знаем, что это вещественная функция, то какие нужно взять коэффициенты, чтобы вся комплексность «сократилась»?

Комплексно-сопряжённые!

$$y(t) = \left(\frac{c}{2} - \frac{d}{2}i\right) \cdot e^{(\alpha+\beta i)t} + \left(\frac{c}{2} + \frac{d}{2}i\right) \cdot e^{(\alpha-\beta i)t}$$

$$y(t) = \left(\frac{c}{2} - \frac{d}{2}i\right) \cdot e^{\alpha t} \cdot (\cos\beta t + i\sin\beta t) + \left(\frac{c}{2} + \frac{d}{2}i\right) \cdot e^{\alpha t} \cdot (\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

$$\boxed{y(t) = ce^{\alpha t}\cos\beta t + de^{\alpha t}\sin\beta t} \in \mathbb{R}$$

Комплексная точка зрения: матричная экспонента

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t} = ?$$

Спектральное разложение

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}^{-1}$$

Экспонента от разложения

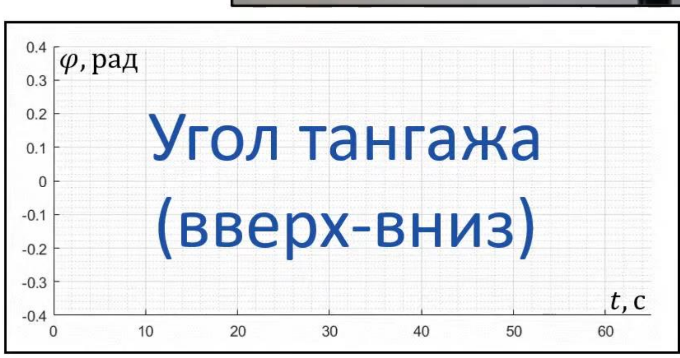
$$e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}^{-1}$$

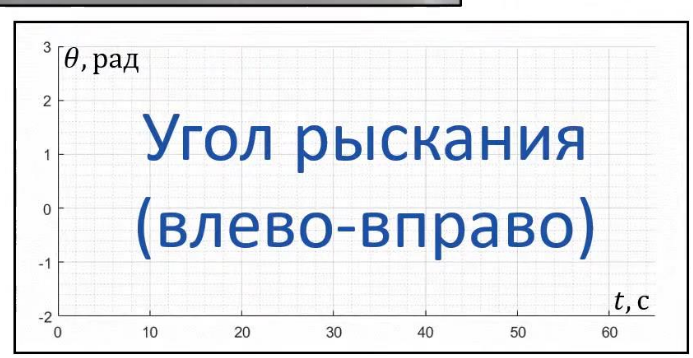
Результат

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

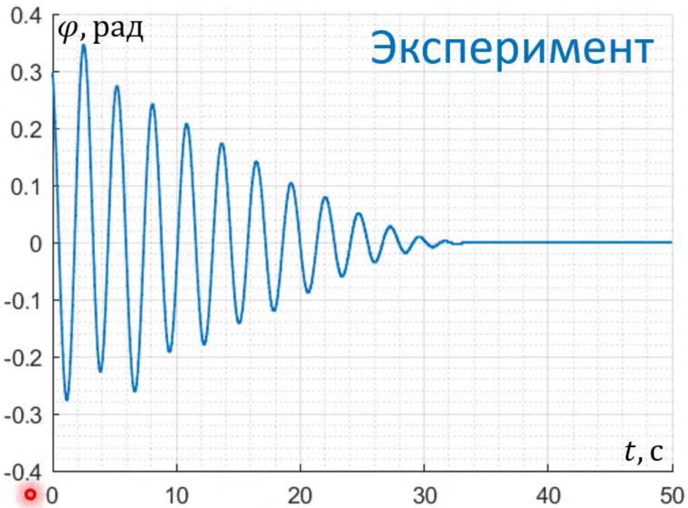
Комплексная точка зрения: применение

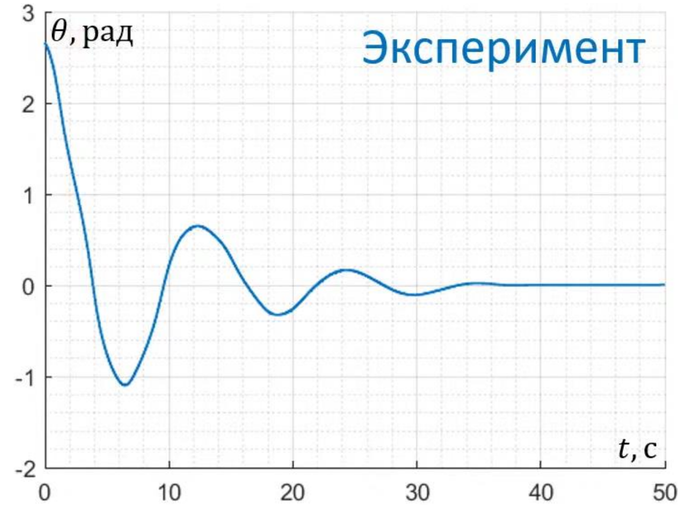
Прикосновение к реальности





Не подаём воздействующего управления, а просто выводим из положения равновесия и наблюдаем за свободным движением

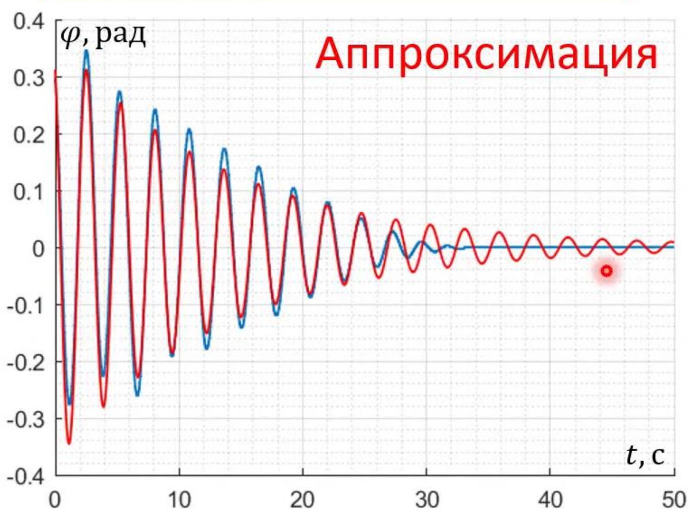




$$\varphi(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t \qquad \theta(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t$$

Применяем метод наименьших квадратов для поиска собственных чисел данной системы

$$\boxed{\begin{array}{ll} c_1 = 0.311 & \alpha = -0.074 \\ c_2 = -0.210 & \beta = 2.260 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ll} c_1 = 2.294 & \alpha = -0.113 \\ c_2 = 0.853 & \beta = 0.516 \end{array}}$$



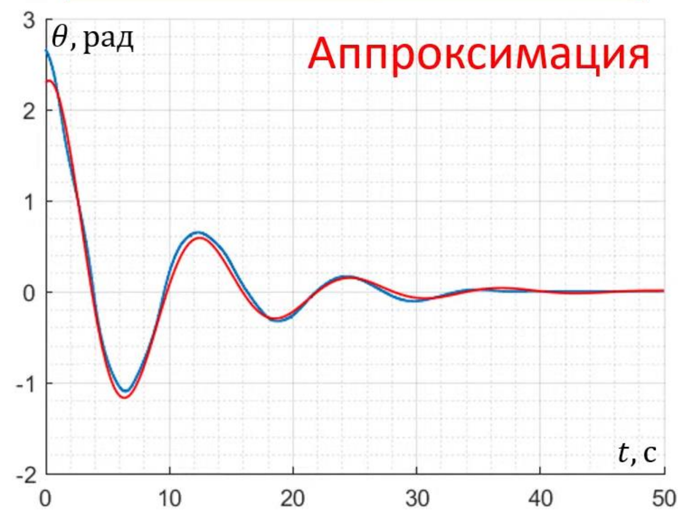


График угла тангажа меньше совпадает с аппроксимацией, чем график угла рыскания, так как у него большая нелинейная составляющая. Экспerементальный график угла тангажа быстрее затухает нежели график его аппроксимации из-за неучтённой дополнительной нелинейной составляющей силы трения.

c_1 и c_2 – это коэффициенты, зависящие от начальных условий α и β – вещественные и мнимые составляющие собственных чисел

Устойчивость и какая она бывает

Мы дадим упрощенное определение устойчивости, которое подходит только для линейных систем

Система $\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$

Начальные условия: $y(0)$ $\dot{y}(0)$ $\ddot{y}(0)$

Асимптотическая устойчивость

При любых начальных условиях выполнено $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$

Устойчивость по Ляпунову

При любых начальных условиях выход $y(t)$ ограничен

Неустойчивость

Существуют начальные условия, при которых выход $y(t)$ неограничен

Граница устойчивости

Система устойчива по Ляпунову, но не устойчива асимптотически

Система $\dot{x} = Ax$

Начальные условия: $x(0)$

Асимптотическая устойчивость

При любых начальных условиях выполнено $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$

Устойчивость по Ляпунову

При любых начальных условиях вектор $x(t)$ ограничен

Неустойчивость

Существуют начальные условия, при которых вектор $x(t)$ неограничен

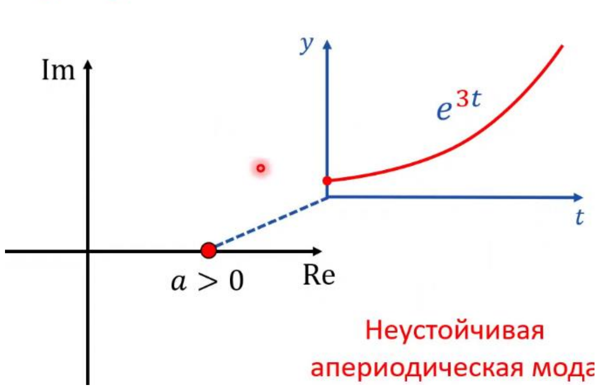
Граница устойчивости

Система устойчива по Ляпунову, но не устойчива асимптотически

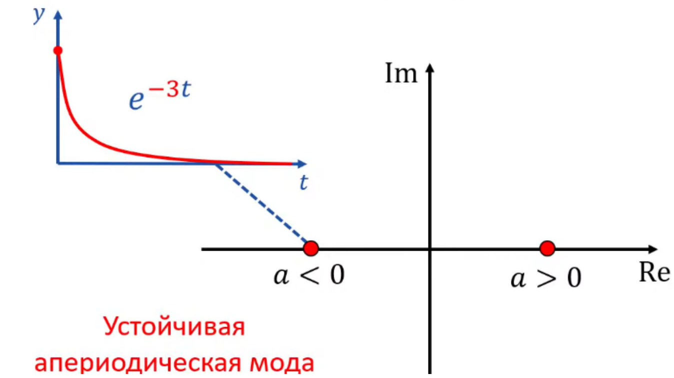
Неустойчивость

Корневой критерий устойчивости

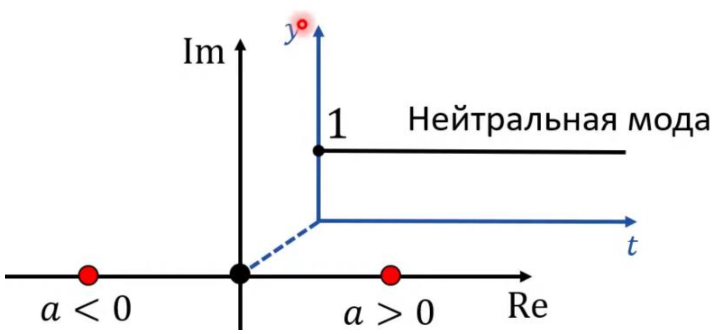
$\lambda = a$



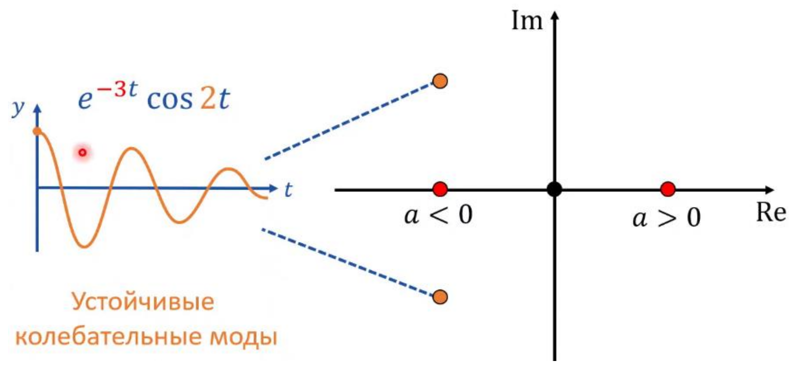
$\lambda = a$



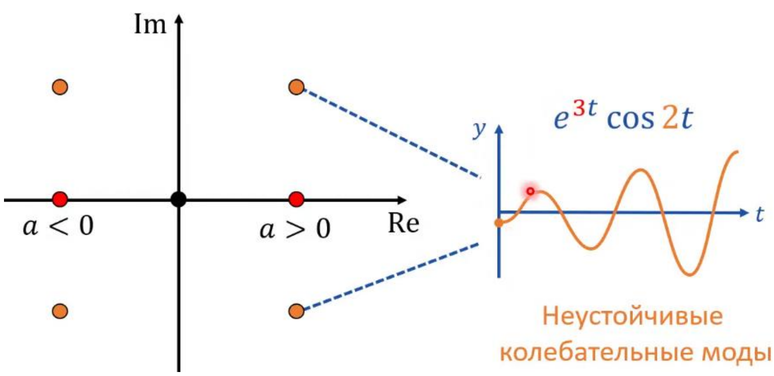
$\lambda = 0$



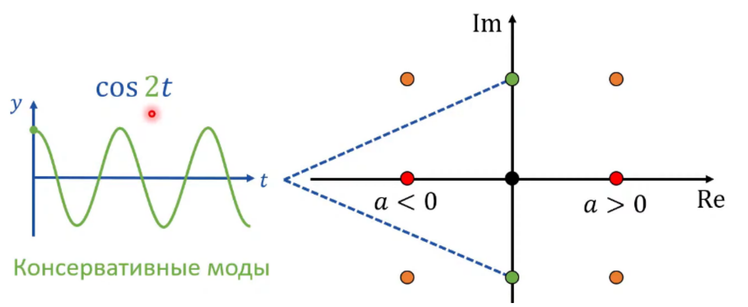
$\lambda = a \pm bi$

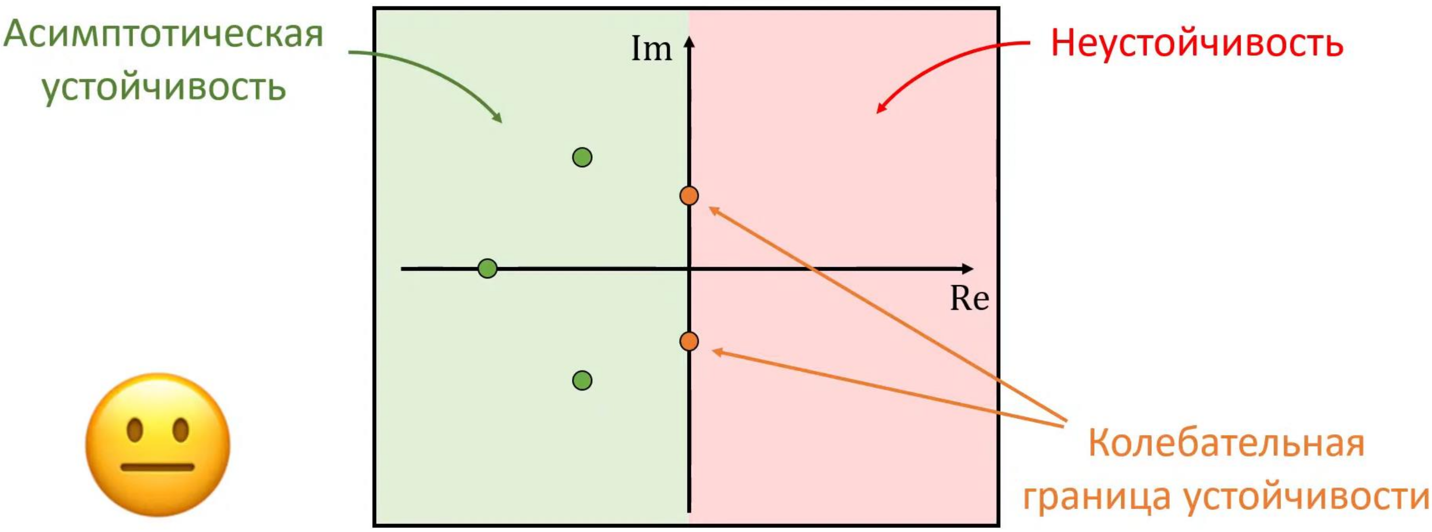


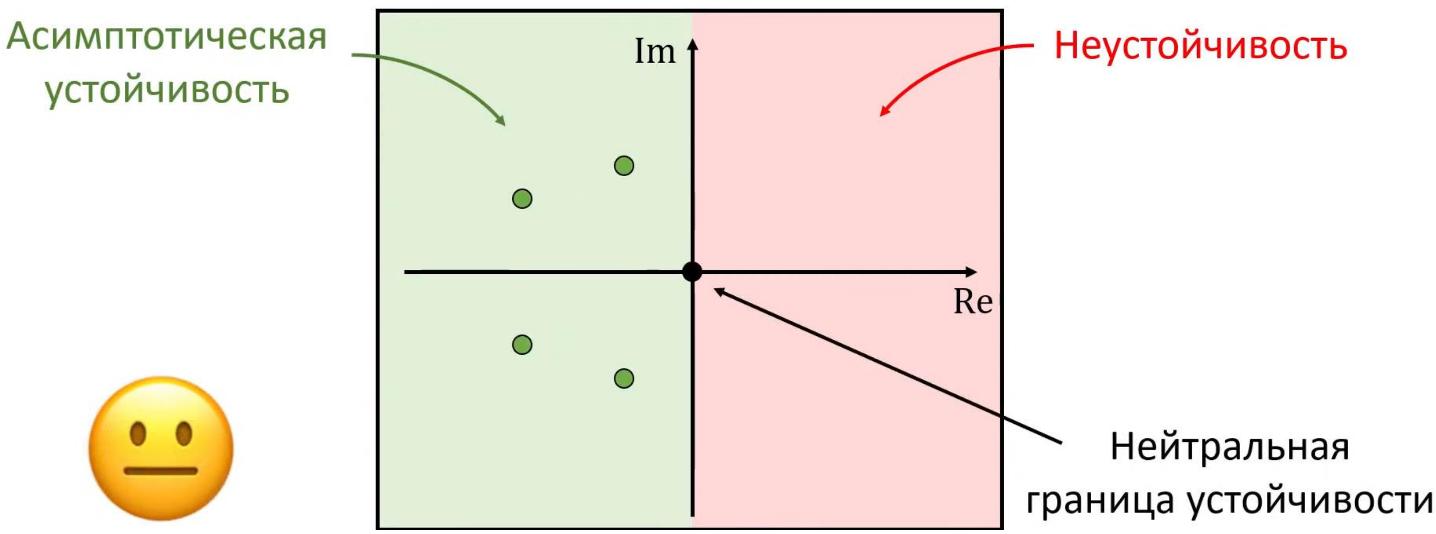
$\lambda = a \pm bi$

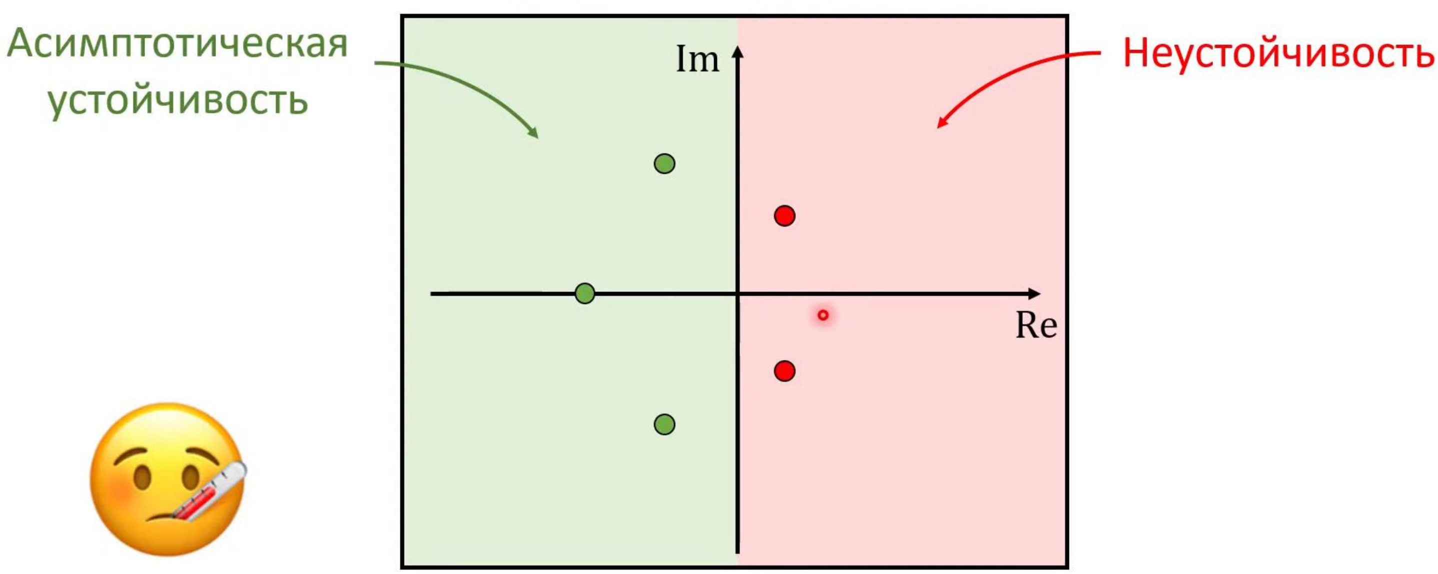


$\lambda = \pm bi$









Асимптотическая устойчивость – все корни имеют отрицательную вещественную часть

Устойчивость по Ляпунову – все корни имеют отрицательную или нулевую вещественную часть, и нет кратных корней с нулевой вещественной частью

Неустойчивость – есть хотя бы один корень с положительной вещественной частью, либо кратные корни с нулевой вещественной частью

Почему надо отдельно говорить про кратность корней с нулевой вещественной частью?

Корни	Моды	Моды при кратных корнях
$\lambda = 0 \pm bi$	$\sin bt$, $\cos bt$	$t\sin bt$, $t\cos bt$, $t^2\sin bt$, $t^2\cos bt$, …
$\lambda = 0$	1	$t, t^2, t^3, \ldots$

Колебательная граница устойчивости

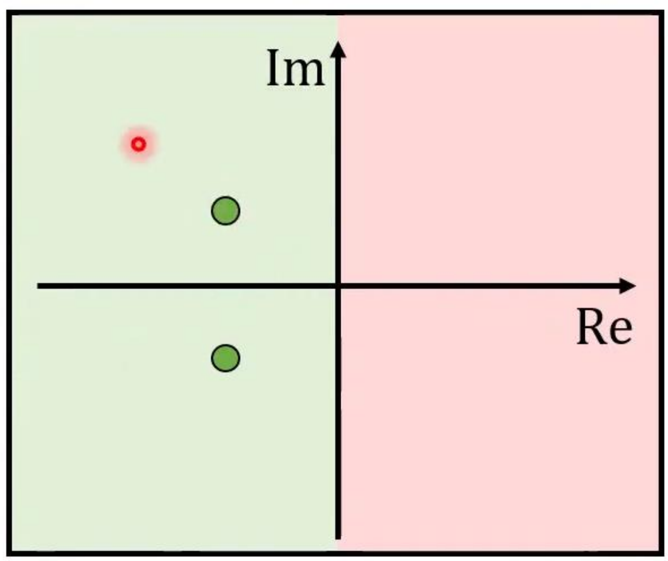
Нейтральная граница устойчивости

Неустойчивость

Маятник с трением

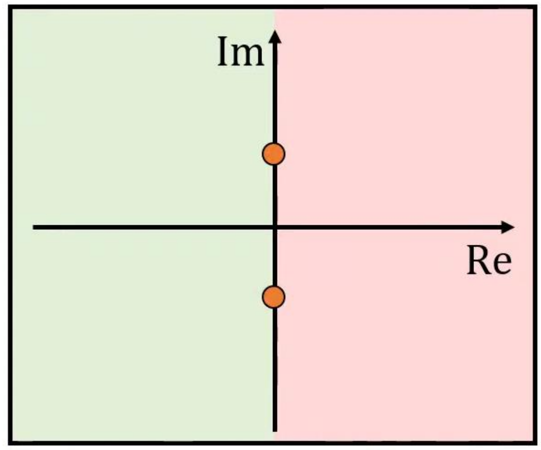
$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{\star}}{2} i$$



Асимптотическая устойчивость

Маятник без трения

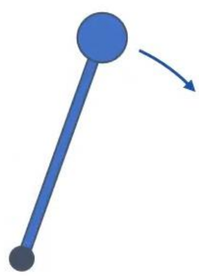


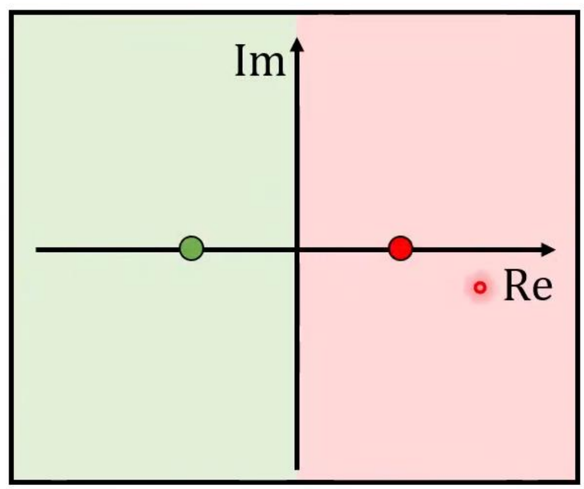
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\,i$$

Колебательная граница устойчивости

Перевёрнутый маятник



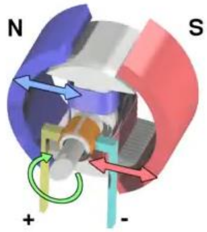


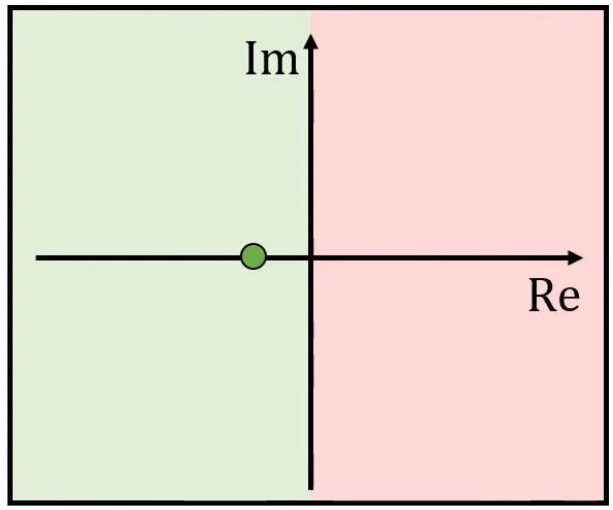
$$\ddot{\theta} - \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \lambda_2 = +\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Неустойчивость

ДПТ (упрощённая модель по скорости)



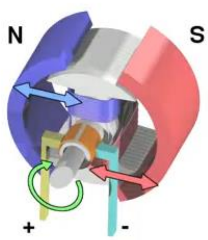


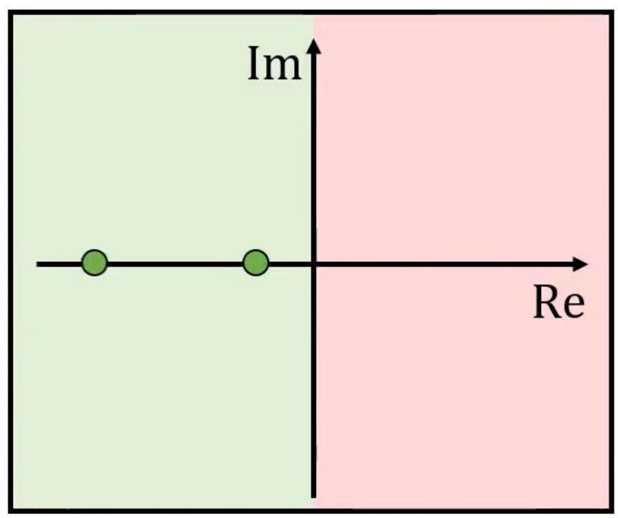
$$\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR}\omega = 0$$

$$\lambda = -\frac{k_m k_e}{JR}$$

Асимптотическая устойчивость

ДПТ («полная» модель по скорости)



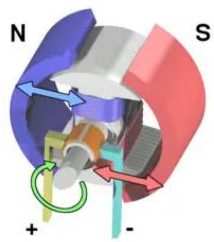


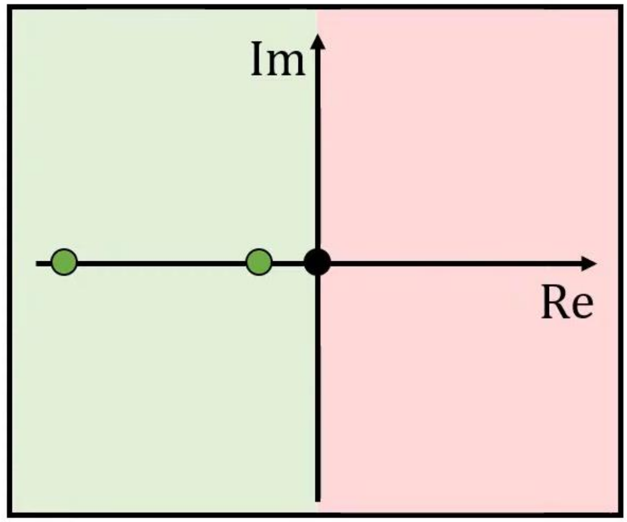
$$\ddot{\omega} + \frac{R}{L}\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JL}\omega = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\star}}{2}$$

Асимптотическая устойчивость

ДПТ («полная» модель по углу поворота)



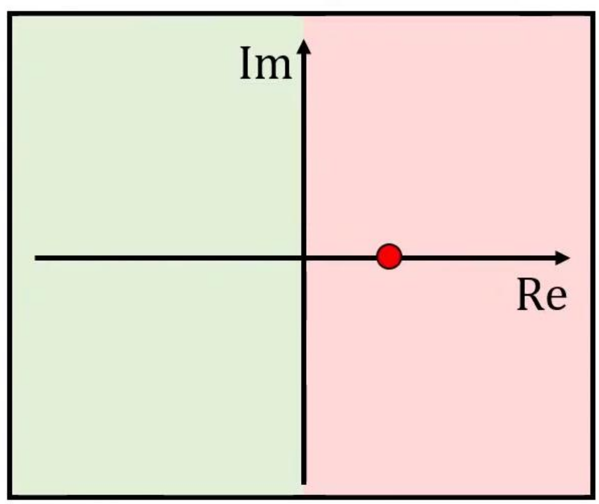


$$\dddot{\theta} + \frac{R}{L}\ddot{\theta} + \frac{k_m k_e}{JL}\dot{\theta} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\star}}{2} \qquad \lambda_3 = 0$$

Нейтральная граница устойчивости

Эпидемия (идеальная, неограниченная)

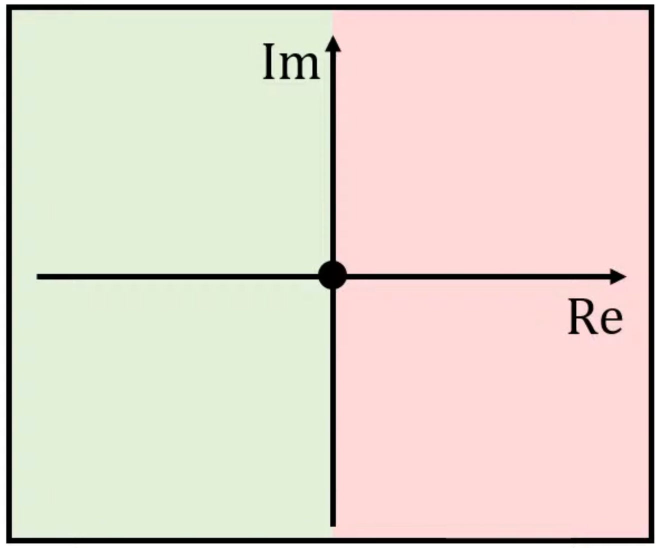


$$\dot{d} = \beta d$$

$$\lambda = \beta$$

Неустойчивость

Просто тело (модель по скорости)

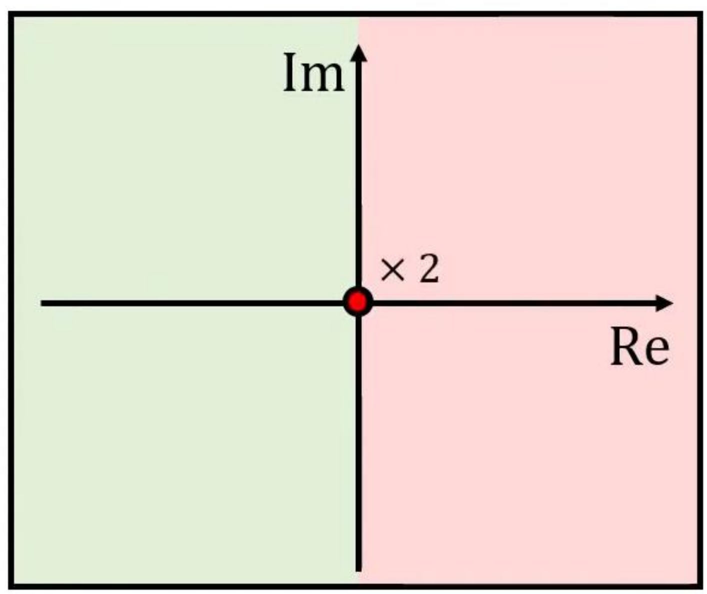


$$\dot{v} = 0$$

$$\lambda = 0$$

Нейтральная граница устойчивости

Просто тело (модель по координате)



$$\ddot{x} = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0$$

Неустойчивость

Критерий Гурвица

Можем ли мы проверить корни характеристического уравнения на отрицательность, не вычисляя их?

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0 \qquad a_n > 0$$

Хитрым образом составим матрицу из коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Система асимптотически устойчива в том и только в том случае, если все ведущие угловые миноры этой матрицы положительны

$$a_{n-1} > 0 \qquad \det\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{bmatrix} > 0 \qquad \det\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} > 0 \qquad \cdots$$

Критерий Гурвица: полезные свойства

1-й порядок: $\dot{y} + a_0 y = 0$

- Система асимптотически устойчива $\Leftrightarrow$ $a_0 > 0$

2-й порядок: $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$

- Система асимптотически устойчива $\Leftrightarrow$ $a_0, a_1 > 0$

3-й порядок: $\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$

- Система асимптотически устойчива $\Leftrightarrow$ $a_0, a_1, a_2 > 0$ и $a_2 a_1 > a_0$

---

n-й порядок: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$

- Если система асимптотически устойчива, то все коэффициенты положительны
- Если хотя бы один коэффициент отрицательный, то система неустойчива

Примеры систем третьего порядка

$4\dddot{y} + 5\ddot{y} + 7\dot{y} + 8y = 0$

$4 > 0 \quad 5 > 0$

$7 > 0 \quad 8 > 0$

$5 \cdot 7 > 4 \cdot 8$

Все моды устойчивы

$4\dddot{y} + 5\ddot{y} + 7\dot{y} + 9y = 0$

$4 > 0 \quad 5 > 0$

$7 > 0 \quad 9 > 0$

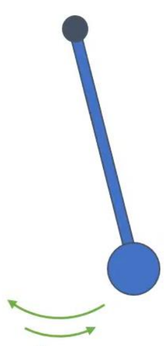
$5 \cdot 7 < 4 \cdot 9$

Есть неустойчивые моды

$4\dddot{y} - 5\ddot{y} - 7\dot{y} + 8y = 0$

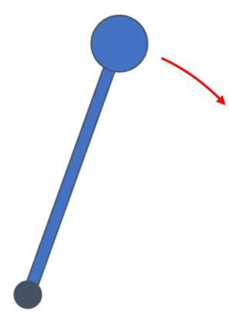
Есть отрицательные коэффициенты

Есть неустойчивые моды



$\ddot{\theta} + 16\dot{\theta} + 100\theta = 0$

Второй порядок и все коэффициенты > 0



$\ddot{\theta} - 100\theta = 0$

Один коэффициент < 0