УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Обратная кинематика.

Шайкина Алевтина Андреевна
207969@corp.ifmo.ru

Задачи прямой и обратной кинематики

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Прямая задача — это вычисление положения (X, Y, Z) энд-эффектора манипулятора по его кинематической схеме и заданной ориентации (A1, A2… An) его звеньев.

Обратная задача — это вычисление углов (A1, A2… An) по заданному положению (X, Y, Z) энд-эффектора и опять же известной схеме его кинематики.

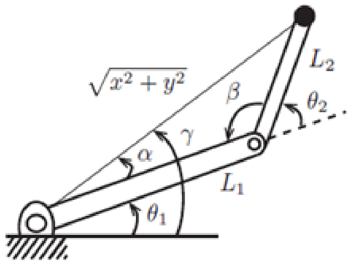
Пример

- Используется функция арктангенса с двумя аргументами $atan2(y, x)$, что то же самое, что $tan^{-1}(y/x)$, но tan^{-1} возвращает углы в диапазоне $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,а $atan2$ возвращает $(-\pi, \pi]$

$$L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\beta = x^2 + y^2$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{L_1^2 + L_2^2 - x^2 - y^2}{2L_1L_2}\right)$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$



$$\gamma = \operatorname{atan2}(y, x)$$

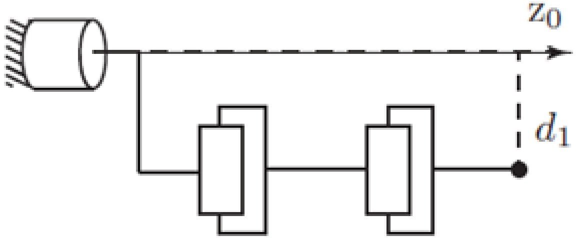
$$\theta_1 = \gamma - \alpha, \qquad \theta_2 = \pi - \beta$$

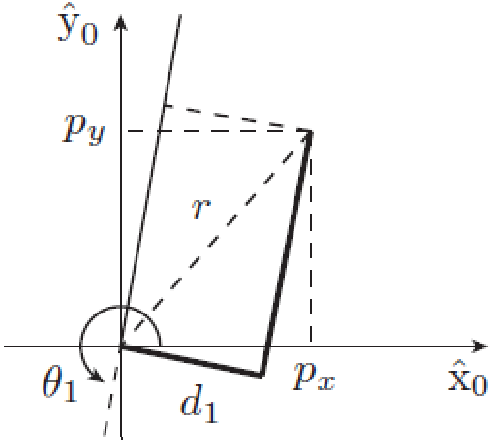
$$\theta_1 = \gamma + \alpha, \qquad \theta_2 = \beta - \pi.$$

Аналитическое решение 6R PUMA-Type Arm

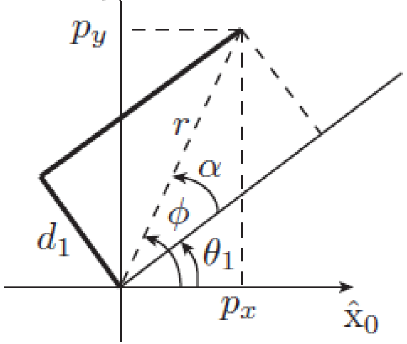
Если $d_1 \neq 0$

$$\phi = \operatorname{atan2}(p_y, p_x)$$
$$\alpha = \operatorname{atan2}(d_1, \sqrt{r^2 - d_1^2})$$





$$\theta_1 = \phi - \alpha$$
$$\theta_1 = \pi + \operatorname{atan2}(p_y, p_x) + \operatorname{atan2}\left(-\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_1^2}, d_1\right)$$
$$\theta_2 = \operatorname{atan2}\left(p_z, \sqrt{r^2 - d_1^2}\right) - \operatorname{atan2}\left(a_3 s_3, a_2 + a_3 c_3\right)$$
$$\theta_2 = \operatorname{atan2}\left(p_z, \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_1^2}\right) - \operatorname{atan2}\left(a_3 s_3, a_2 + a_3 c_3\right)$$
$$\theta_3 = \operatorname{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - D^2}, D\right)$$



$$\cos\theta_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} = D.$$

Метод Ньютона-Рапсона

$$g(\theta) = g(\theta^0) + \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^0)(\theta - \theta^0) + \text{higher-order terms (h.o.t)}$$

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\theta = \theta^0 - \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^0)\right)^{-1} g(\theta^0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1}(\theta) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_n}(\theta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial \theta_1}(\theta) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial \theta_n}(\theta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\theta^{k+1} = \theta^k - \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^k)\right)^{-1} g(\theta^k).$$

Ограничение: $|g(\theta^k) - g(\theta^{k+1})|/|g(\theta^k)| \leq \epsilon$

Заключается в итеративной подстановке решения $g(\theta) = 0$ при разложении функции в ряд Тейлора (до первого порядка)

Метод Ньютона-Рапсона

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Предполагаем, что дифференцируема

$x = f(\theta)$ - вектор координат энд-эффектора

x_d – n координат энд-эффектора

θ_d –m координат(углов) джоинтов

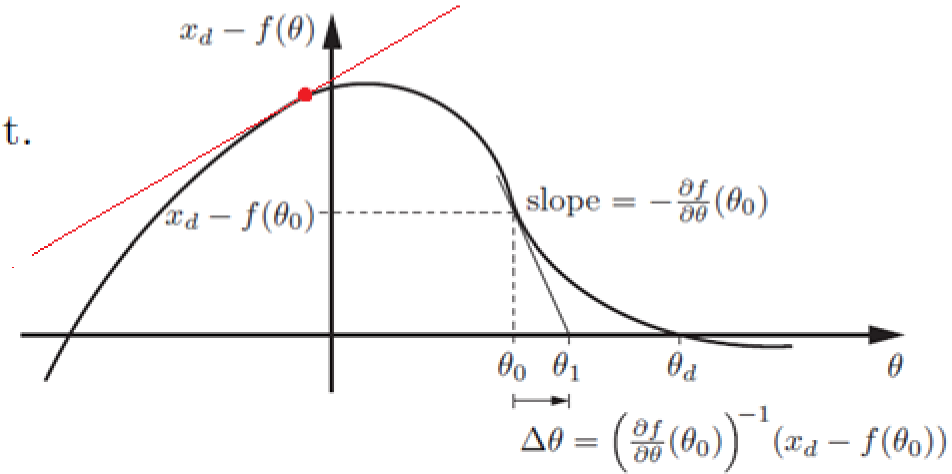
$$g(\theta_d) = x_d - f(\theta_d) = 0.$$

$$x_d = f(\theta_d) = f(\theta^0) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial \theta}\right|_{\theta^0}}_{J(\theta^0)} \underbrace{(\theta_d - \theta^0)}_{\Delta\theta} + \text{h.o.t.}$$

$$J(\theta^0)\Delta\theta = x_d - f(\theta^0)$$

Если якобиан обратим

$$\Delta\theta = J^{-1}(\theta^0)\left(x_d - f(\theta^0)\right)$$



Псевдообратная матрица Мура-Пенроуза

Если якобиан не обратим, то используется псевдообратная матрица

$$Jy = z \qquad J \in \mathbb{R}^{m\times n},\ y \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R}^m$$

$$y^* = J^\dagger z$$

- $J^\dagger = J^{\mathrm{T}}(JJ^{\mathrm{T}})^{-1} \qquad \|y^*\| \leq \|y\|$ — если m<n, то бесконечное число решений
- $J^\dagger = (J^{\mathrm{T}}J)^{-1}J^{\mathrm{T}} \qquad \|Jy^* - z\| \leq \|Jy - z\|$ — (ранг J)<m, например, когда n<m

$$\Delta\theta = J^\dagger(\theta^0)\left(x_d - f(\theta^0)\right)$$

Итеративный алгоритм для $\Delta\theta$

$$x_d \in \mathbb{R}^m \quad \theta^0 \in \mathbb{R}^n \quad i = 0$$

$$\theta^{i+1} = \theta^i + J^\dagger(\theta^i)e$$

- $i++$

На основе этого алгоритма можно построить новый, где вместо координат энд-эффектора используется конфигурация энд-эффектора в системе координат энд-эффектора.

Обратная кинематика скоростей

Один из способов управления робота для достижения желаемой траектории вычисление обратной кинематики $\theta_d(k\Delta t)$, где k - шаг времени, и контроль скорости джоинтов $\dot{\theta} = \big(\theta_d(k\Delta t) - \theta((k-1)\Delta t)\big)/\Delta t$ на интервале $[(k-1)\Delta t, k\Delta t]$

Следующий способ требует меньше вычислений и заключается в решении следующего уравнения $\dot{\theta} = J^{\dagger}(\theta)\mathcal{V}_d$. $\mathcal{V}_d$- пространственная скорость

В этом уравнении вес всех вершин одинаков. При этом, чем ближе джоинт к началу, тем боле вес он перемещает. Поэтому можно ставить дополнительные условия на минимизацию функции кинетической энергии, потенциальной энергии, или их комбинации.

Спасибо за внимание!

www.ifmo.ru

ITsMOre than a UNIVERSITY