

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №5
«Типовые динамические звенья»
по дисциплине «Теория автоматического управления»

Выполнил: студент гр. R3238,
Кирбаба Д.Д.

Преподаватель: Перегудин А.А.,
ассистент фак. СУиР

Цель работы

Исследование временных и частотных характеристик элементарных звеньев

Начальные данные

12 вариант

Типы исследуемых звеньев:

- Колебательное

$$\frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

- Дифференцирующее с замедлением

$$\frac{ks}{1 + Ts}$$

- Консервативное

$$\frac{k}{1 + T^2 s^2}$$

Параметры:

$$k = 15, T = 0.2, \xi = 0.2$$

Выполнение работы

1. Исследование колебательного звена

1.1. Передаточная функция

$$W(s) = \frac{15}{0.04s^2 + 0.08s + 1}$$

1.2. Временные характеристики

1.2.1. Переходная функция (Step response)

$$y_{s.r.}(t) = k \left[1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega t + \frac{\sigma}{\omega} \sin \omega t \right) \right] \cdot 1(t)$$

$$\sigma = \frac{\xi}{T} = 1, \quad \omega = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} = \frac{1}{0.2} \sqrt{1 - 0.2^2} = 2\sqrt{6}, \quad k = 15$$

$$y_{s.r.}(t) = 15 \left[1 - e^{-t} \left(\cos 2\sqrt{6}t + \frac{1}{2\sqrt{6}} \sin 2\sqrt{6}t \right) \right]$$

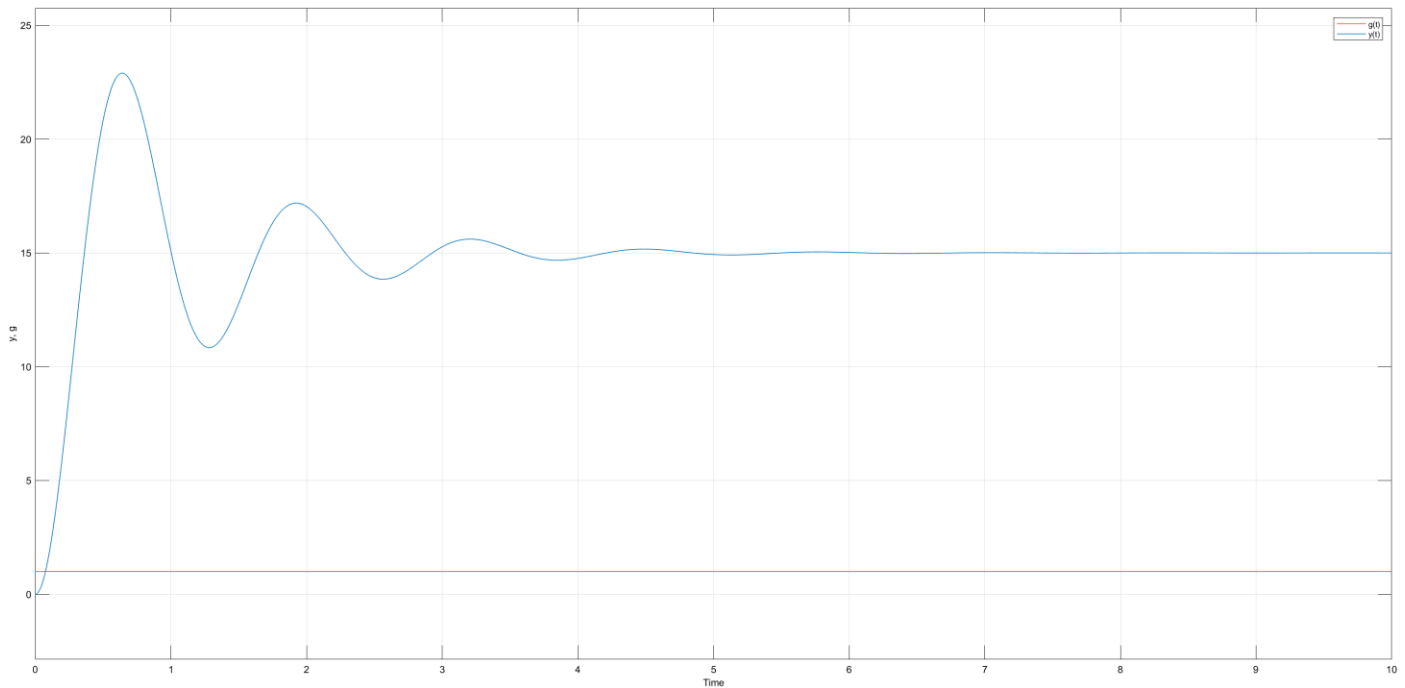


Рисунок 1: график переходной функции колебательного звена

1.2.2. Весовая функция (Impulse response)

Расчет через связь с переходной функцией:

$$\begin{aligned}
 y_{i.r.} &= \frac{d}{dt} y_{s.r.} = 15 \frac{d}{dt} \left[1 - e^{-t} \left(\cos 2\sqrt{6}t + \frac{1}{2\sqrt{6}} \sin 2\sqrt{6}t \right) \right] = \\
 &= -15 \frac{d}{dt} e^{-t} \left(\cos 2\sqrt{6}t + \frac{1}{2\sqrt{6}} \sin 2\sqrt{6}t \right) = \\
 &= -15 \left[-e^{-t} \left(\cos 2\sqrt{6}t + \frac{1}{2\sqrt{6}} \sin 2\sqrt{6}t \right) + e^{-t} (-2\sqrt{6} \sin 2\sqrt{6}t + \cos 2\sqrt{6}t) \right] = \\
 &= -15 e^{-t} \left(-\cos 2\sqrt{6}t - \frac{1}{2\sqrt{6}} \sin 2\sqrt{6}t - 2\sqrt{6} \sin 2\sqrt{6}t + \cos 2\sqrt{6}t \right) = \\
 &= -15 e^{-t} \sin 2\sqrt{6}t \left(-\frac{1}{2\sqrt{6}} - 2\sqrt{6} \right) = \frac{375}{2\sqrt{6}} e^{-t} \sin 2\sqrt{6}t
 \end{aligned}$$

Расчет с помощью преобразований Лапласа:

$$\begin{aligned}
 L\{\delta(t)\} &= 1 \Rightarrow y_{i.r.} = L^{-1}\{W(s)\} = L^{-1}\left\{ \frac{15}{0.04s^2 + 0.08s + 1} \right\} = \\
 &= L^{-1}\left\{ \frac{15}{0.04s^2 + 0.08s + 1} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{375}{(s+1)^2 + 24} \right\} = \frac{375}{2\sqrt{6}} L^{-1}\left\{ \frac{2\sqrt{6}}{(s+1)^2 + (2\sqrt{6})^2} \right\} = \\
 &= \frac{375}{2\sqrt{6}} e^{-t} \sin 2\sqrt{6}t
 \end{aligned}$$

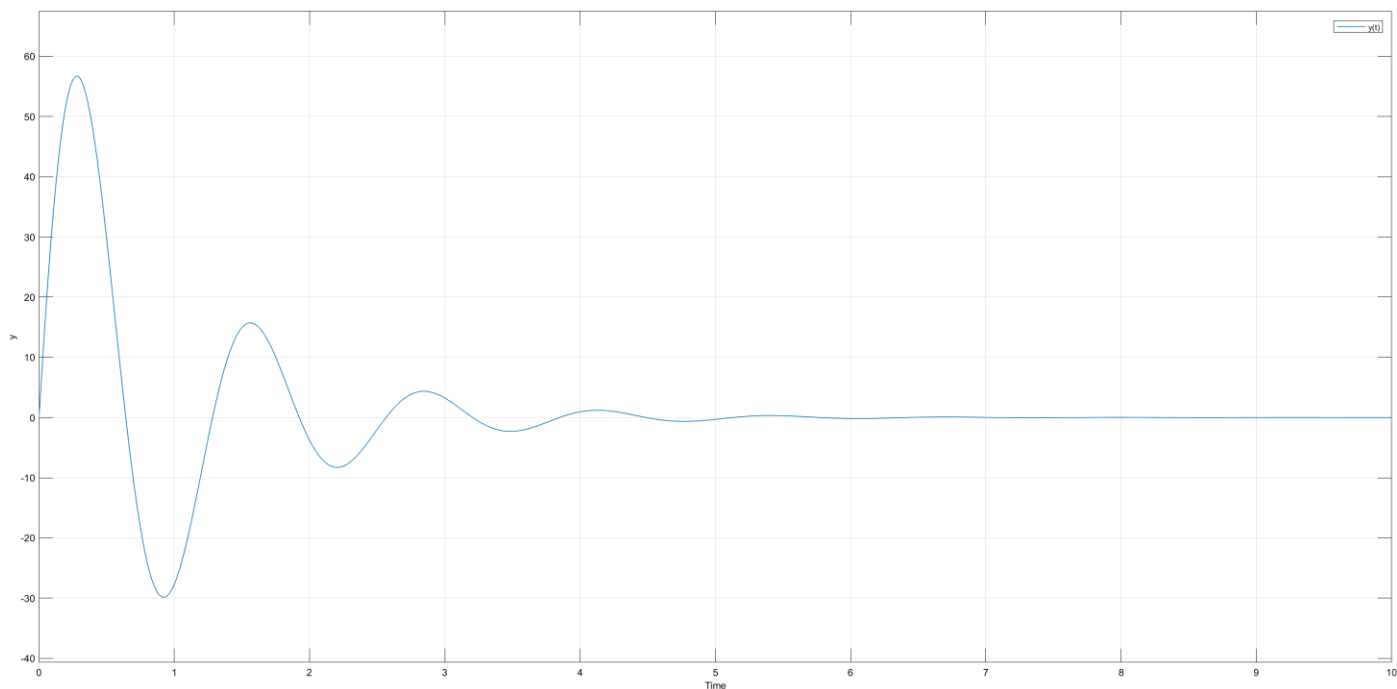


Рисунок 2: график весовой функции колебательного звена

1.3. Частотная передаточная функция

$$\begin{aligned}
 W(s) &= \frac{15}{0.04(j\omega)^2 + 0.08j\omega + 1} = \frac{15}{-0.04\omega^2 + 0.08j\omega + 1} = \\
 &= \frac{15}{-0.04\omega^2 + 1 + 0.08j\omega} \cdot \frac{-0.04\omega^2 + 1 - 0.08j\omega}{-0.04\omega^2 + 1 - 0.08j\omega} = \frac{15(-0.04\omega^2 + 1 - 0.08j\omega)}{(-0.04\omega^2 + 1)^2 + (0.08\omega)^2} = \\
 &= \frac{15 - 0.6\omega^2}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1} + \frac{1.2j\omega}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1} \\
 U(\omega) &= \frac{15 - 0.6\omega^2}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1}, \quad V(\omega) = \frac{1.2\omega}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1}
 \end{aligned}$$

1.4. Частотные характеристики

1.4.1. Амплитудно-частотная характеристика

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{\sqrt{(15 - 0.6\omega^2)^2 + (1.2\omega)^2}}{|0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1|} = \\
 &= \frac{\sqrt{0.36\omega^4 - 16.56\omega^2 + 225}}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1}
 \end{aligned}$$

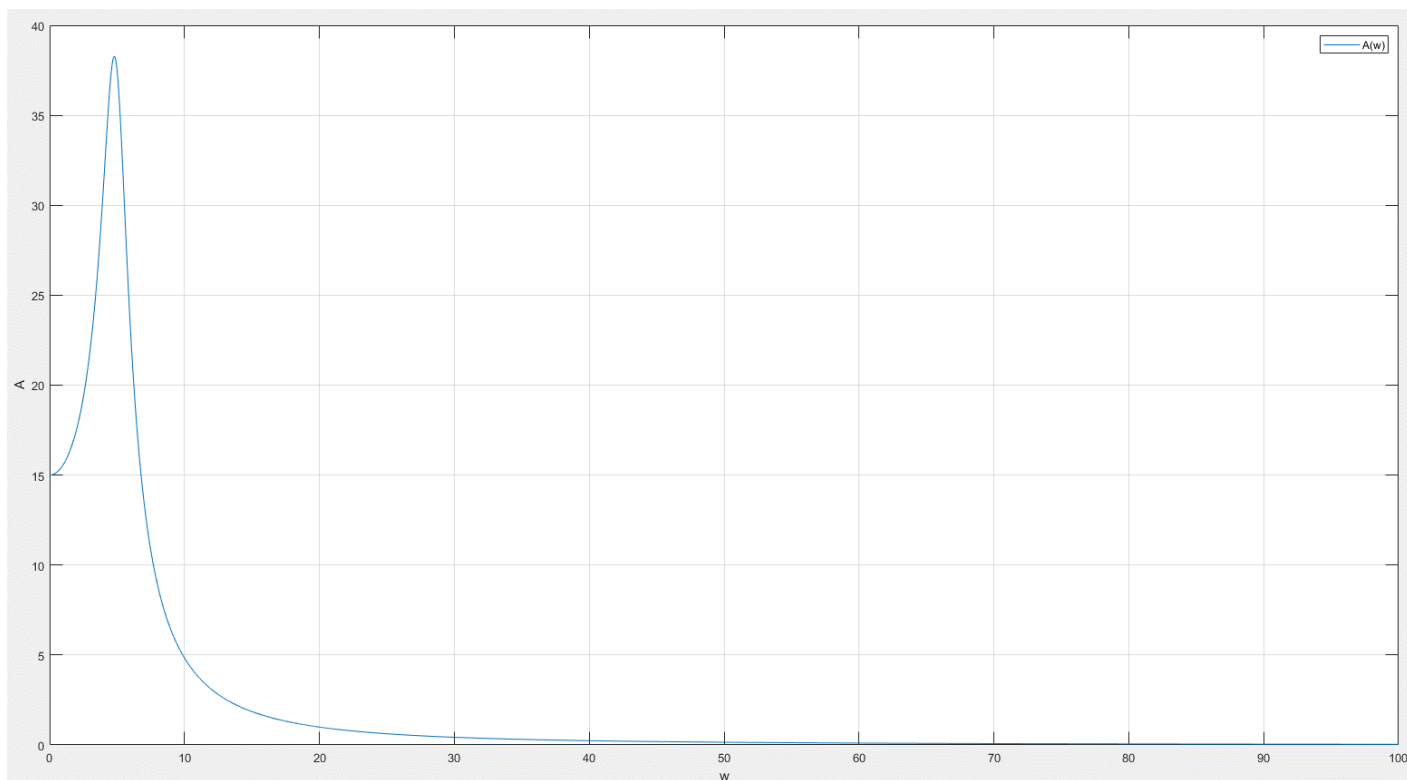


Рисунок 3: график амплитудно-частотной характеристики колебательного звена

1.4.2. Фазово-частотная характеристика

$$\Psi(\omega) = \text{atan2}(V(\omega), U(\omega)) =$$

$$= \text{atan2}\left(\frac{1.2\omega}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1}, \frac{15 - 0.6\omega^2}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1}\right)$$

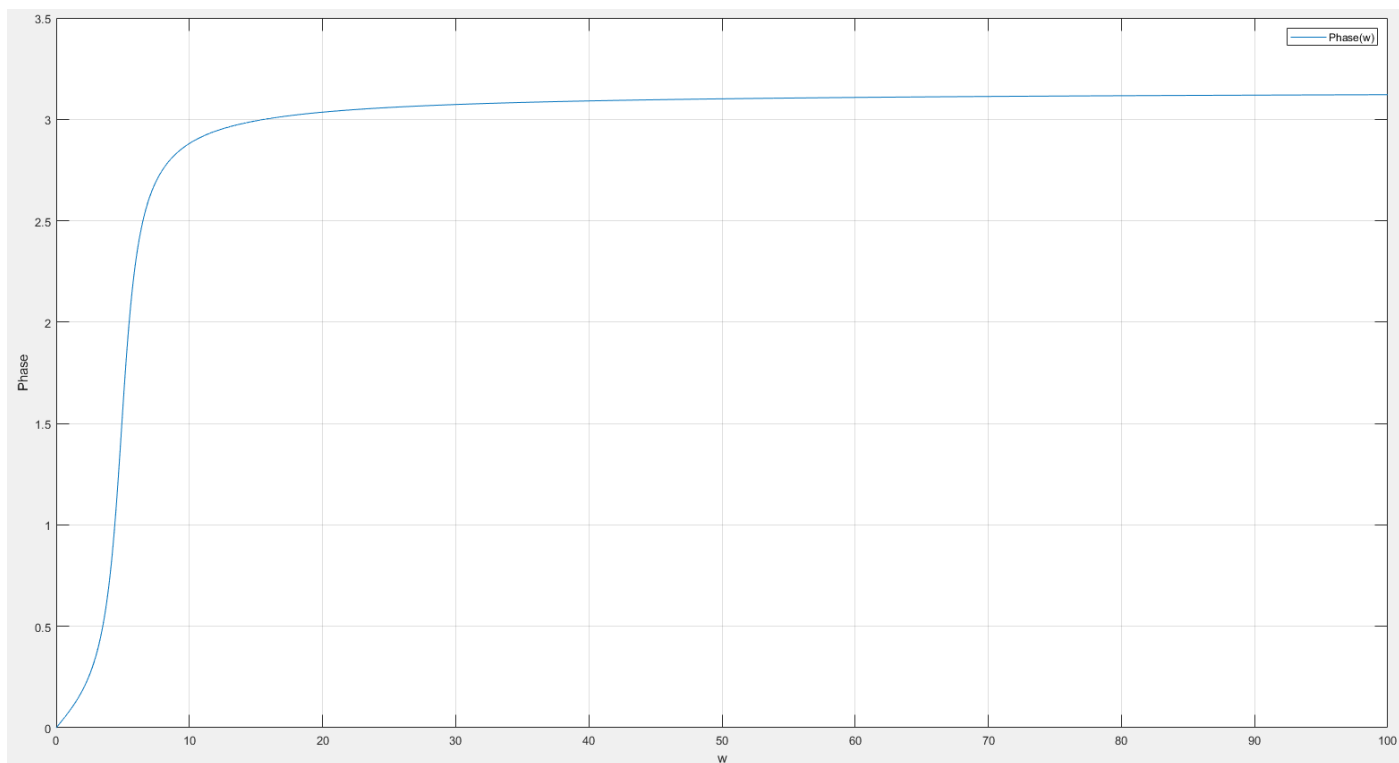


Рисунок 4: график фазово-частотной характеристики колебательного звена

1.4.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$U(\omega) = \frac{15 - 0.6\omega^2}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1}, \quad V(\omega) = \frac{1.2\omega}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1}$$

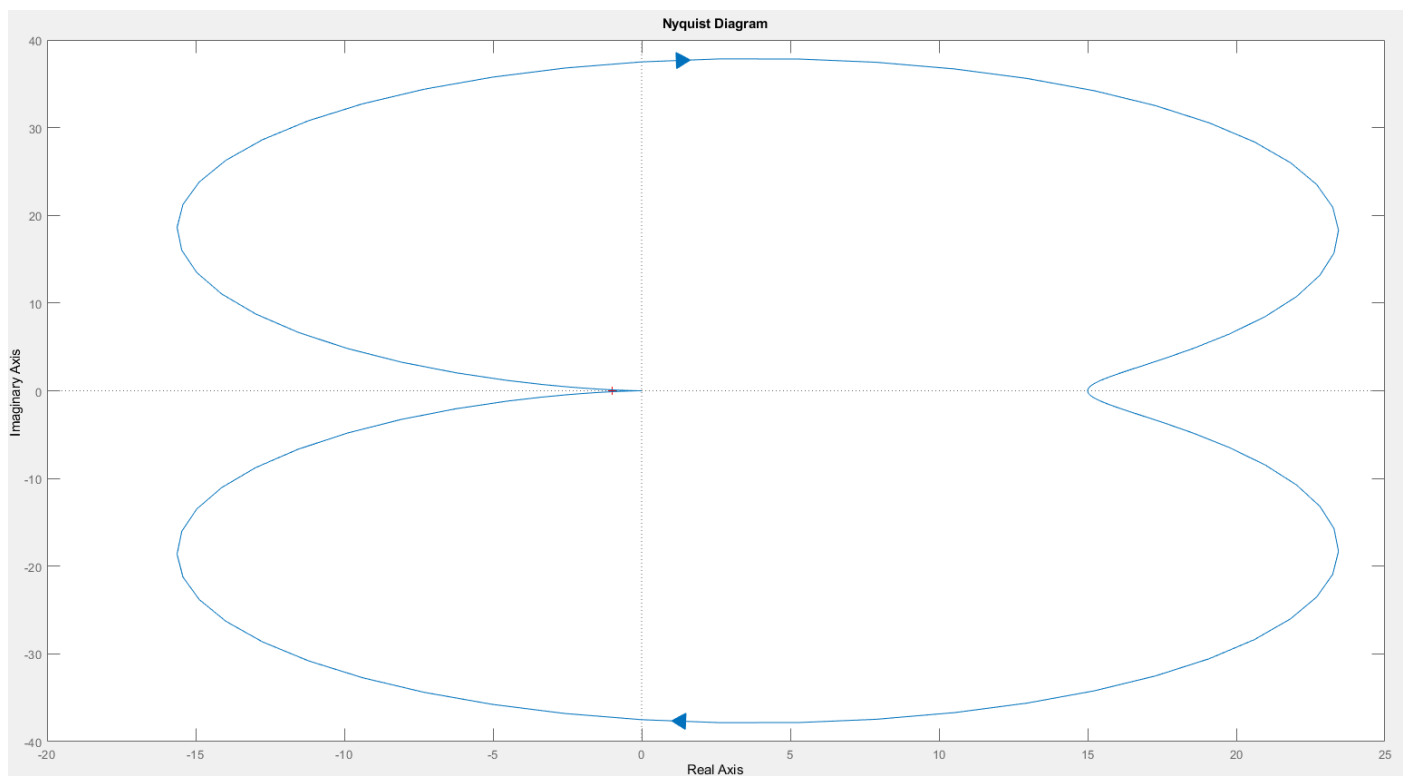


Рисунок 5: график амплитудно-фазовой частотной характеристики колебательного звена

1.4.4. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики

ЛАЧХ: $L(\omega) = 20 \lg \frac{\sqrt{0.36\omega^4 - 16.56\omega^2 + 225}}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1}$, ω в логарифмическом масштабе

ЛФЧХ: $\Psi(\omega) = \text{atan2} \left(\frac{1.2\omega}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1}, \frac{15 - 0.6\omega^2}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1} \right)$,
 ω в логарифмическом масштабе

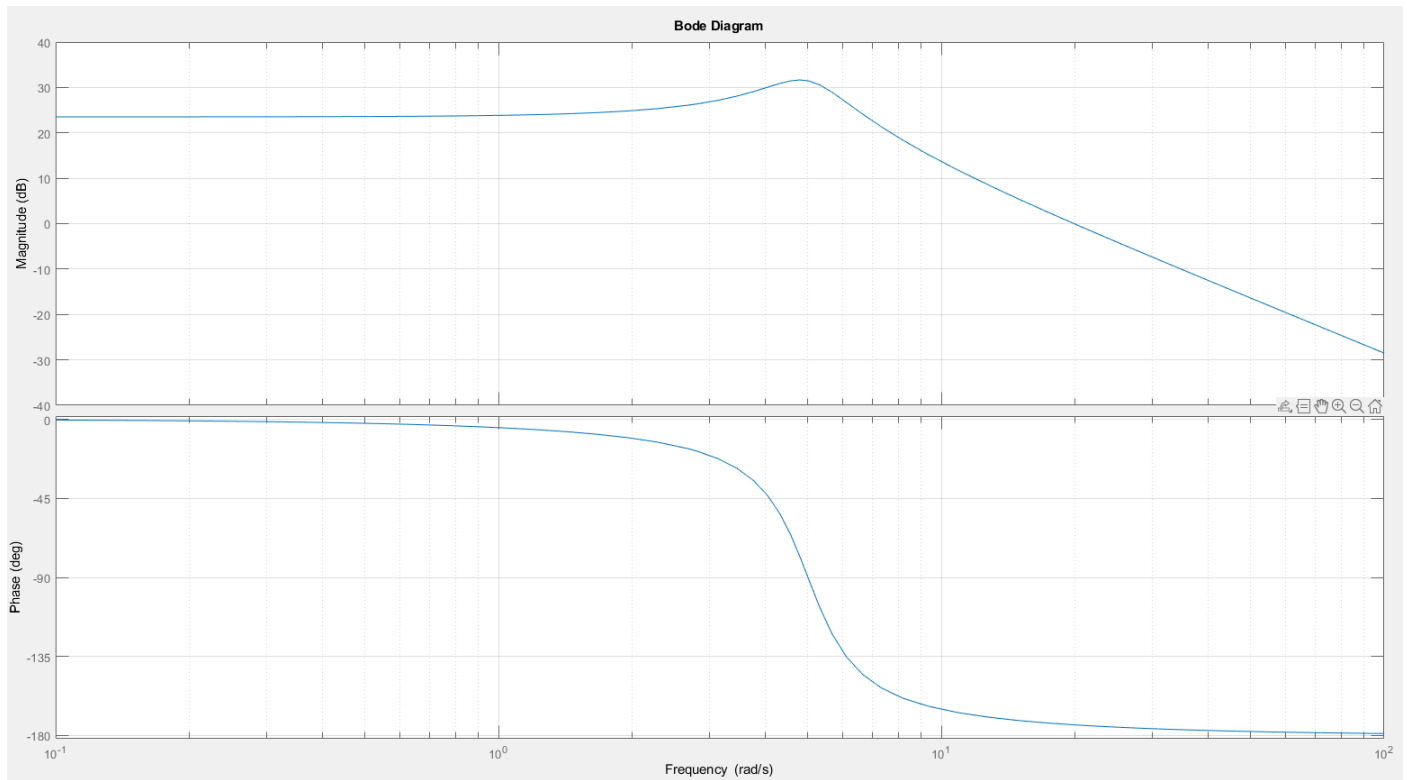


Рисунок 6: графики логарифмических амплитудной и фазовой частотных характеристик колебательного звена

2. Исследование дифференцирующего звена с замедлением

2.1. Передаточная функция

$$W(s) = \frac{15s}{0.2s + 1}$$

2.2. Временные характеристики

2.2.1. Переходная функция (Step response)

$$y_{s.r.}(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$$

$$T = 0.2, \quad k = 15$$

$$y_{s.r.}(t) = 75e^{-5t}$$

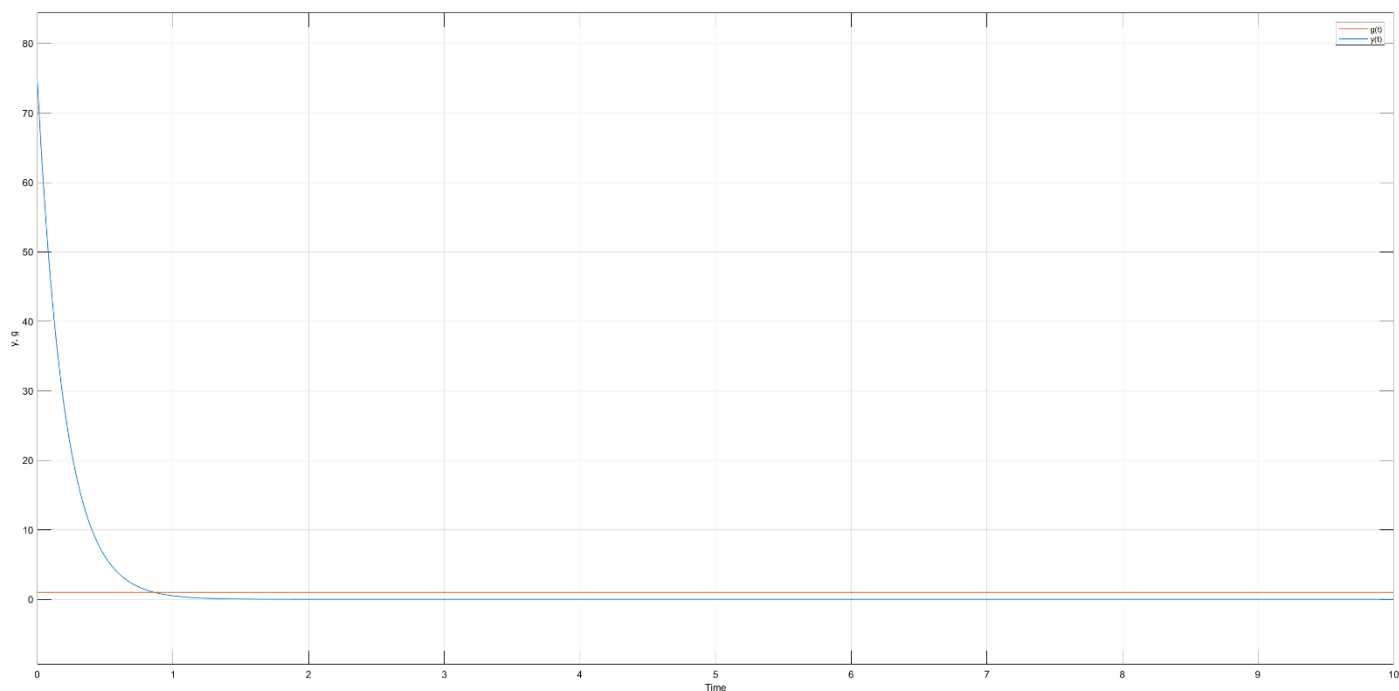


Рисунок 7: график переходной функции дифференцирующего звена с замедлением

2.2.2. Весовая функция (Impulse response)

Расчет через связь с переходной функцией:

$$y_{i.r.} = \frac{d}{dt} y_{s.r.} = 75 \frac{d}{dt} (e^{-5t}) = -375e^{-5t}$$

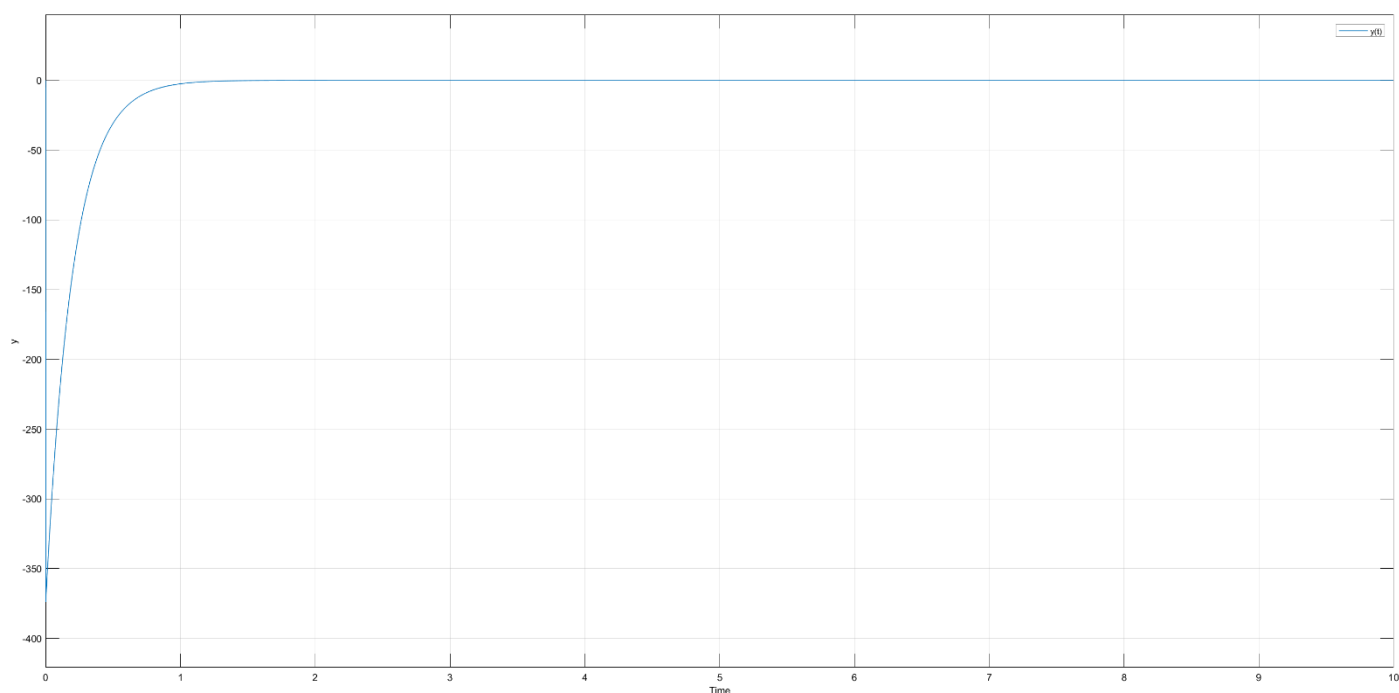


Рисунок 8: график весовой функции дифференцирующего звена с замедлением

2.3. Частотная передаточная функция

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{15}{0.2j\omega + 1} = \frac{15}{0.2j\omega + 1} \cdot \frac{0.2j\omega - 1}{0.2j\omega - 1} = \\ &= \frac{15 - 3j\omega}{0.04\omega^2 + 1} = \frac{15}{0.04\omega^2 + 1} - \frac{3j\omega}{0.04\omega^2 + 1} \end{aligned}$$

$$U(\omega) = \frac{15}{0.04\omega^2 + 1}, \quad V(\omega) = -\frac{3\omega}{0.04\omega^2 + 1}$$

2.4. Частотные характеристики

2.4.1. Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{\sqrt{225 + 9\omega^2}}{0.04\omega^2 + 1}$$

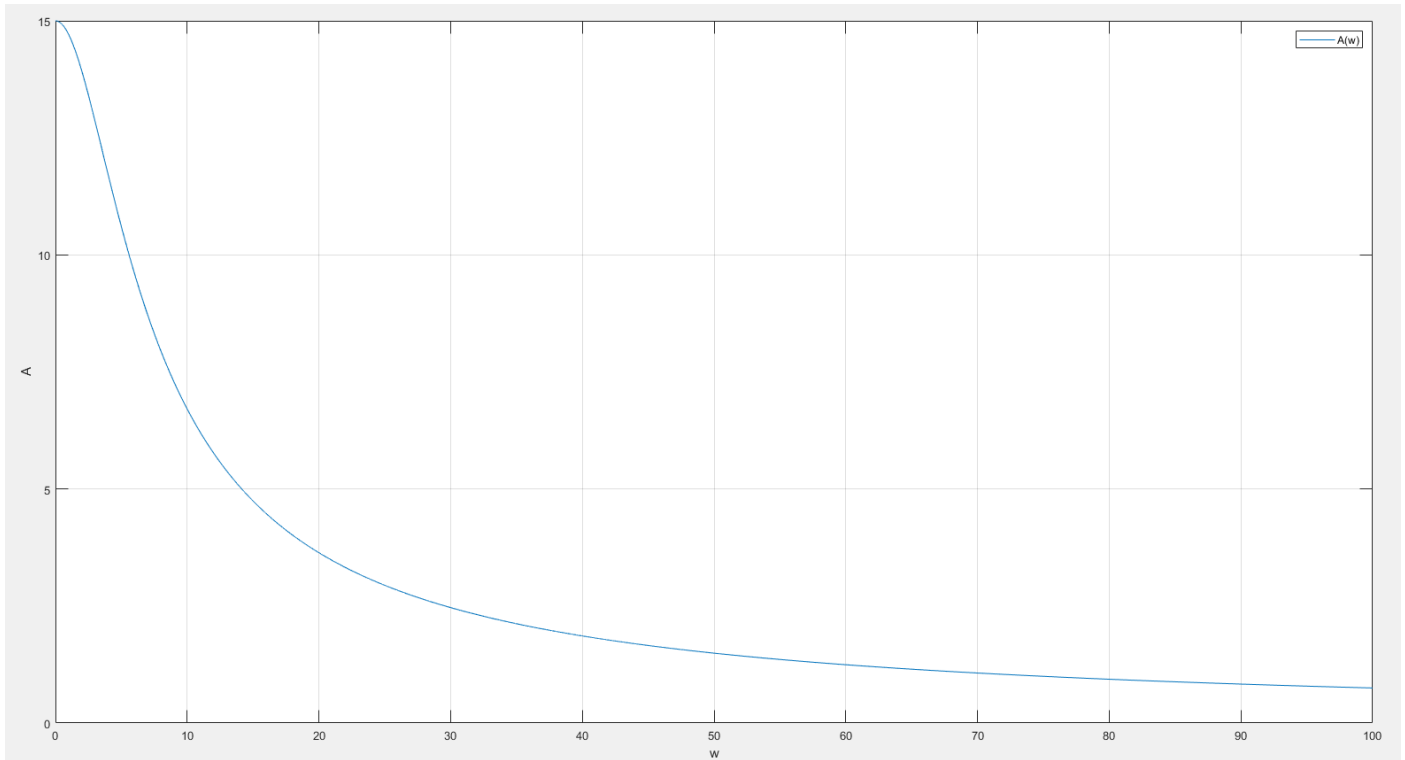


Рисунок 9: график амплитудно-частотной характеристики дифференцирующего звена с замедлением

2.4.2. Фазово-частотная характеристика

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \text{atan2}(V(\omega), U(\omega)) = \\ &= \text{atan2}\left(-\frac{3\omega}{0.04\omega^2 + 1}, \frac{15}{0.04\omega^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

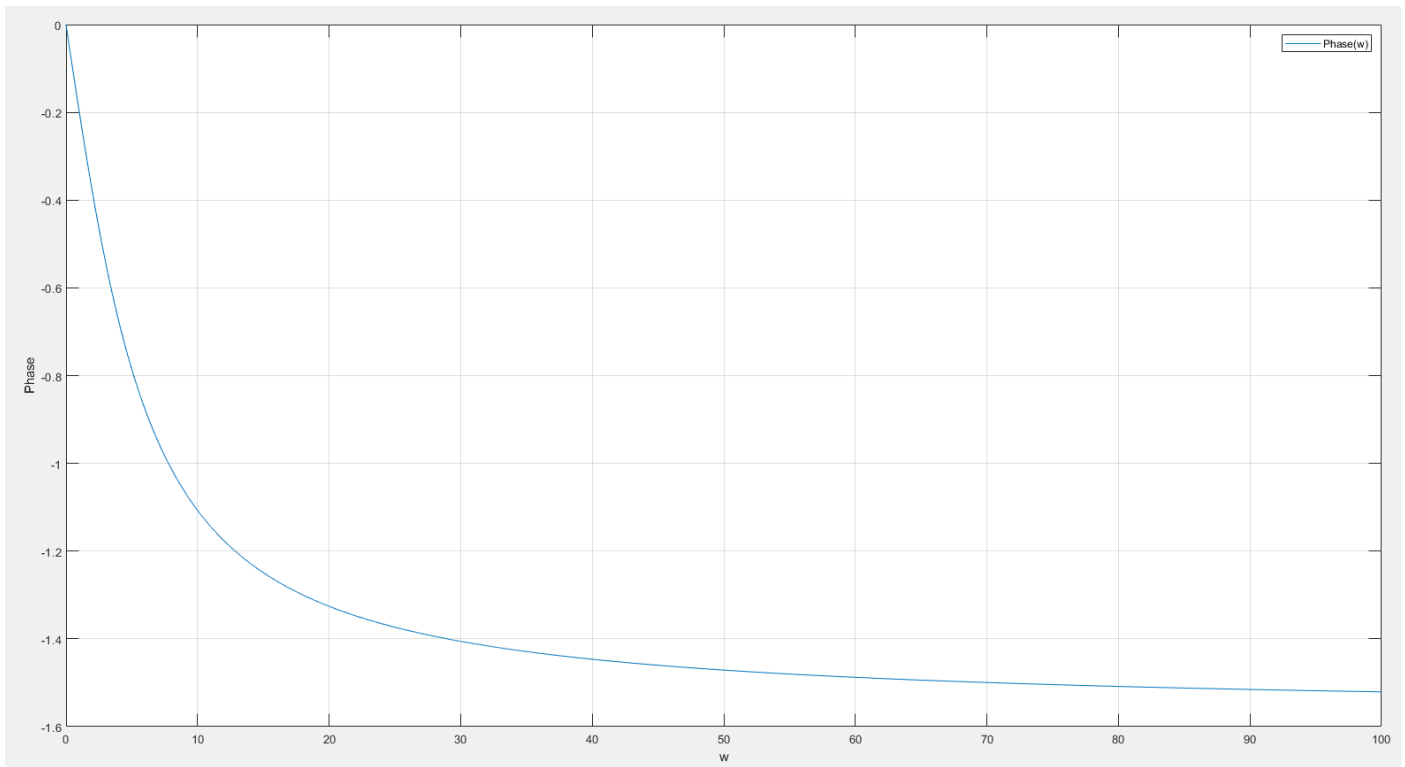


Рисунок 10: график фазово-частотной характеристики дифференцирующего звена с замедлением

2.4.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$U(\omega) = \frac{15}{0.04\omega^2 + 1}, \quad V(\omega) = -\frac{3\omega}{0.04\omega^2 + 1}$$

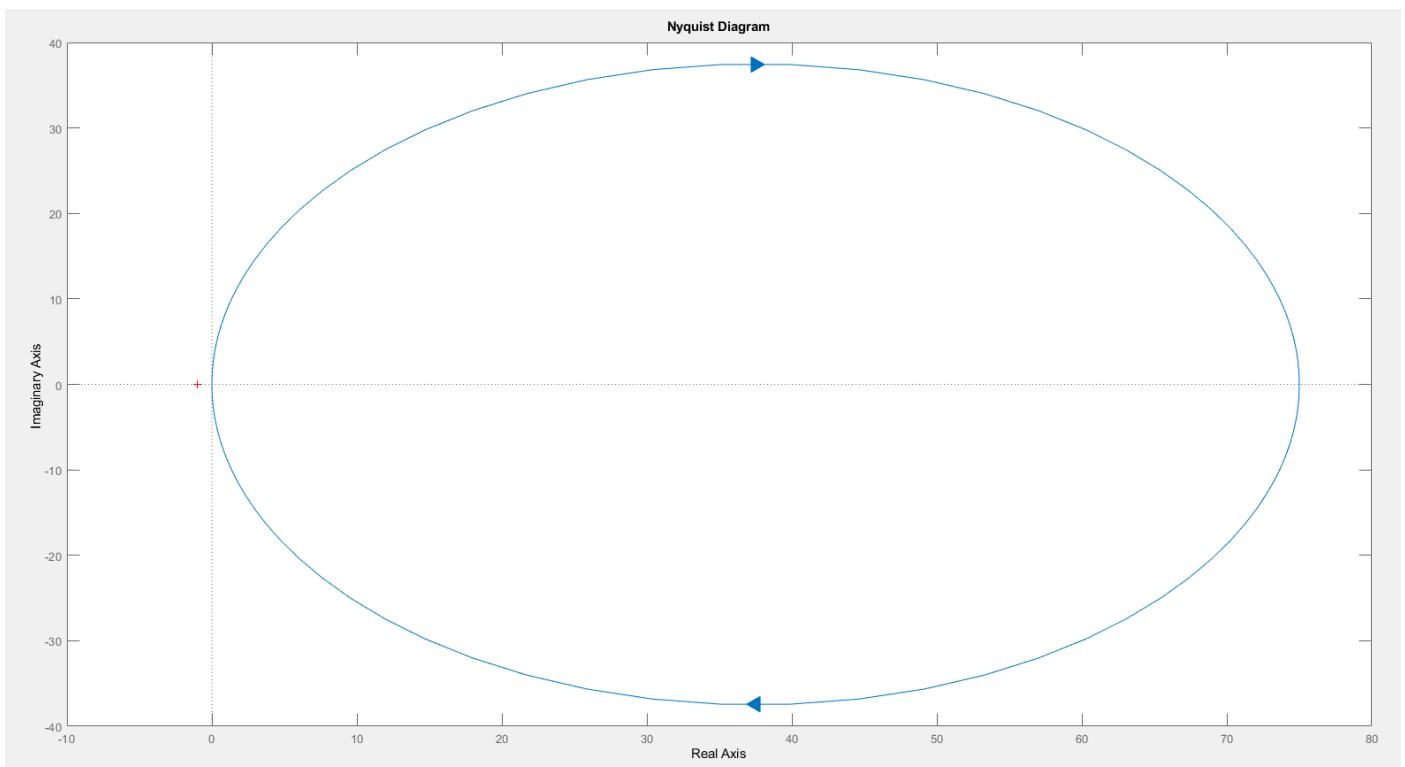


Рисунок 11: график амплитудно-фазовой частотной характеристики дифференцирующего звена с замедлением

2.4.4. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики

$$\text{ЛАЧХ: } L(\omega) = 20 \lg \frac{\sqrt{225 + 9\omega^2}}{0.04\omega^2 + 1}, \quad \omega \text{ в логарифмическом масштабе}$$

ЛФЧХ: $\Psi(\omega) = \text{atan2}\left(-\frac{3\omega}{0.04\omega^2 + 1}, \frac{15}{0.04\omega^2 + 1}\right)$, ω в логарифмическом масштабе

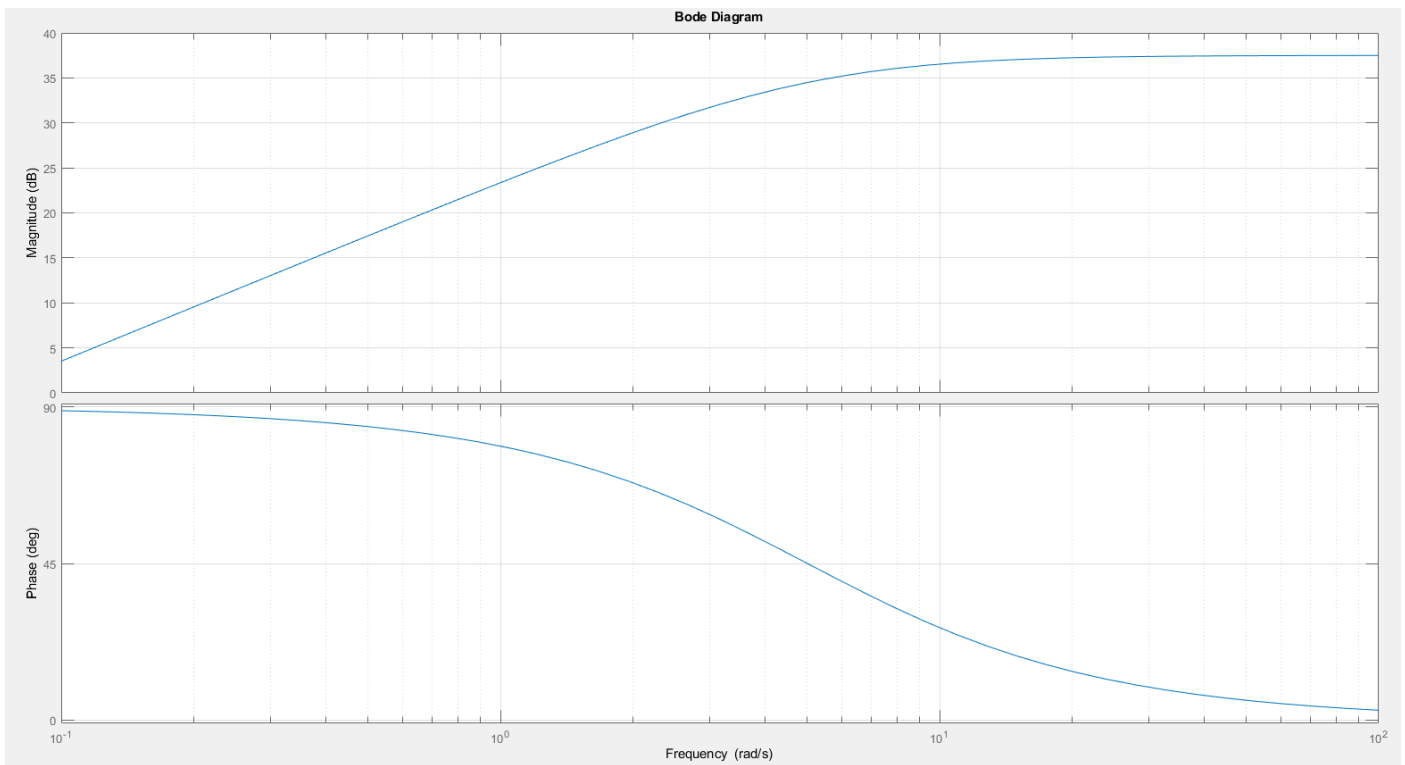


Рисунок 12: графики логарифмических амплитудной и фазовой частотных характеристик дифференцирующего звена с замедлением

3. Исследование консервативного звена

3.1. Передаточная функция

$$W(s) = \frac{15}{0.04s^2 + 1}$$

3.2. Временные характеристики

3.2.1. Переходная функция (Step response)

$$y_{s.r.}(t) = k(1 - \cos\omega t) \cdot 1(t)$$

$$\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.2} = 5, \quad k = 15$$

$$y_{s.r.}(t) = 15(1 - \cos 5t)$$

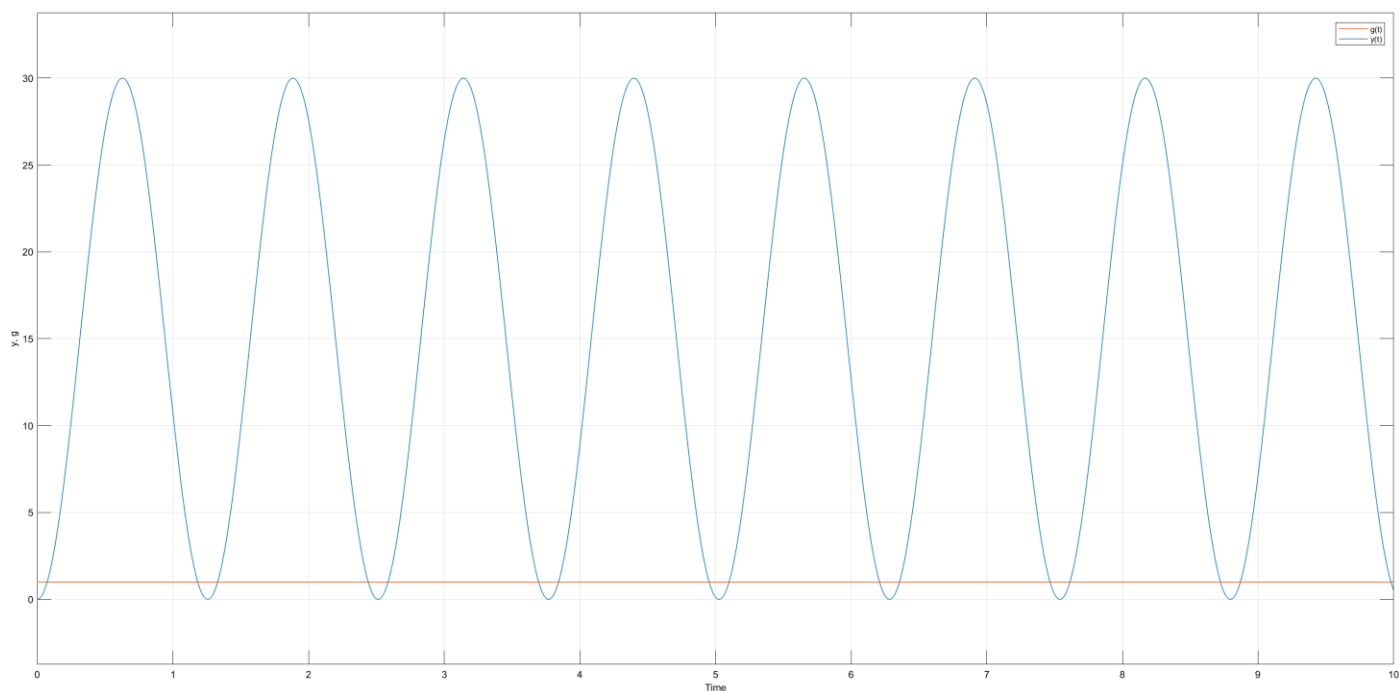


Рисунок 13: график переходной функции консервативного звена

3.2.2. Весовая функция (Impulse response)

Расчет через связь с переходной функцией:

$$y_{i.r.} = \frac{d}{dt} y_{s.r.} = 15 \frac{d}{dt} (1 - \cos 5t) = 75 \sin 5t$$

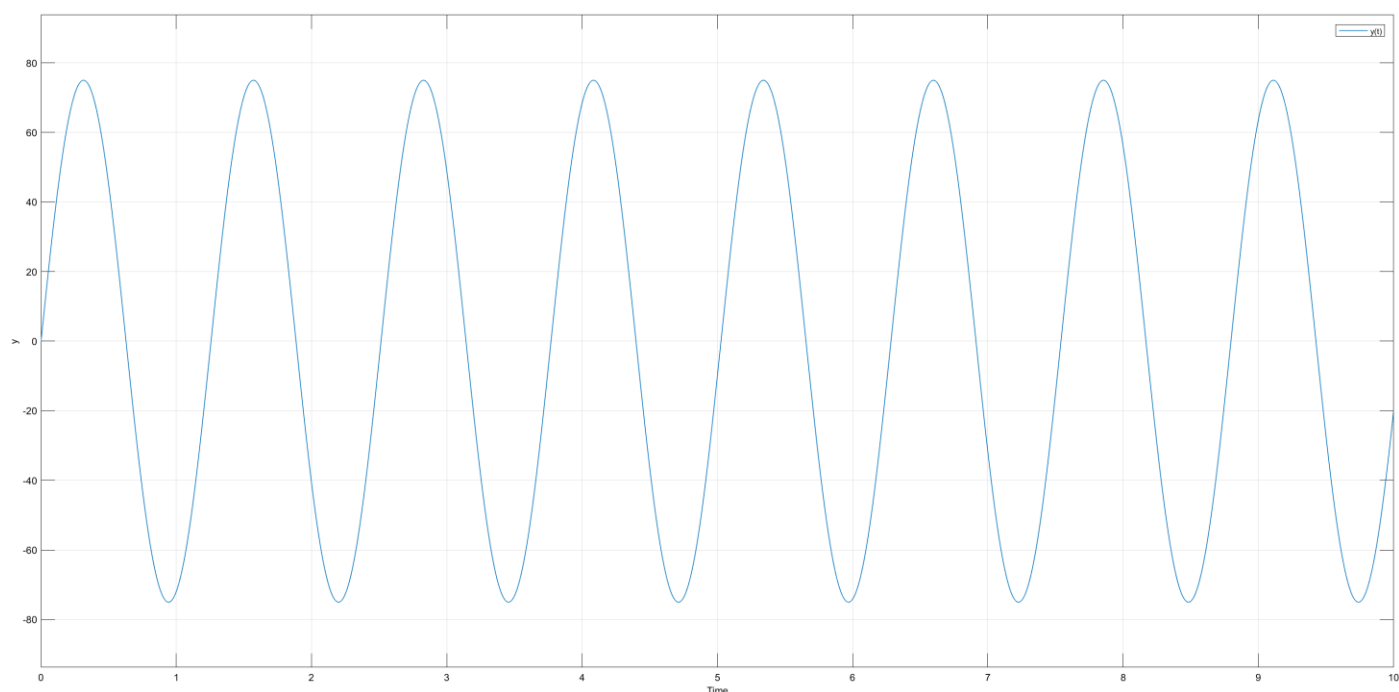


Рисунок 14: график весовой функции консервативного звена

3.3. Частотная передаточная функция

$$W(s) = \frac{15}{0.04(j\omega)^2 + 1} = \frac{15}{-0.04\omega^2 + 1}$$

$$U(\omega) = \frac{15}{-0.04\omega^2 + 1}, \quad V(\omega) = 0$$

3.4. Частотные характеристики

3.4.1. Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \left| \frac{15}{-0.04\omega^2 + 1} \right|$$

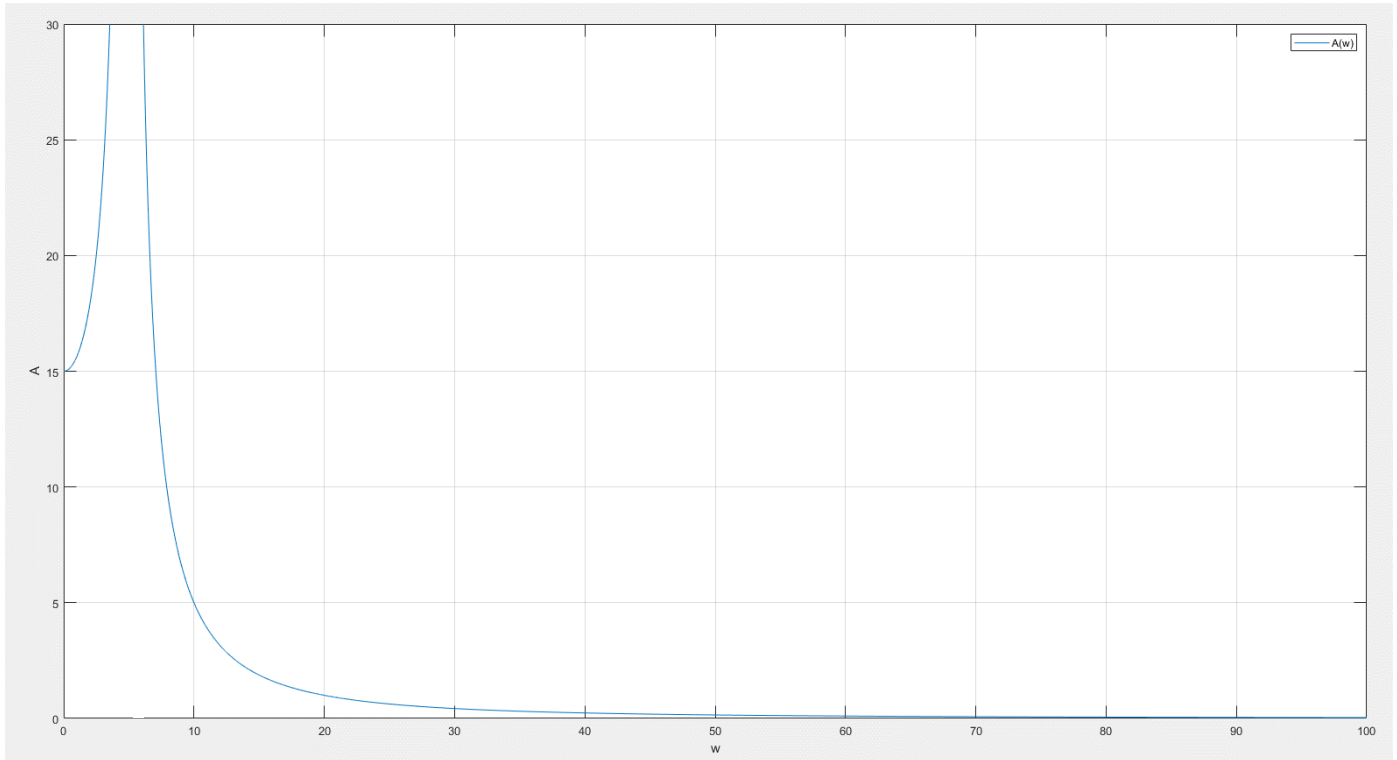


Рисунок 15: график амплитудно-частотной характеристики консервативного звена

3.4.2. Фазово-частотная характеристика

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \text{atan2}(V(\omega), U(\omega)) = \\ &= \text{atan2}\left(0, \frac{15}{-0.04\omega^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

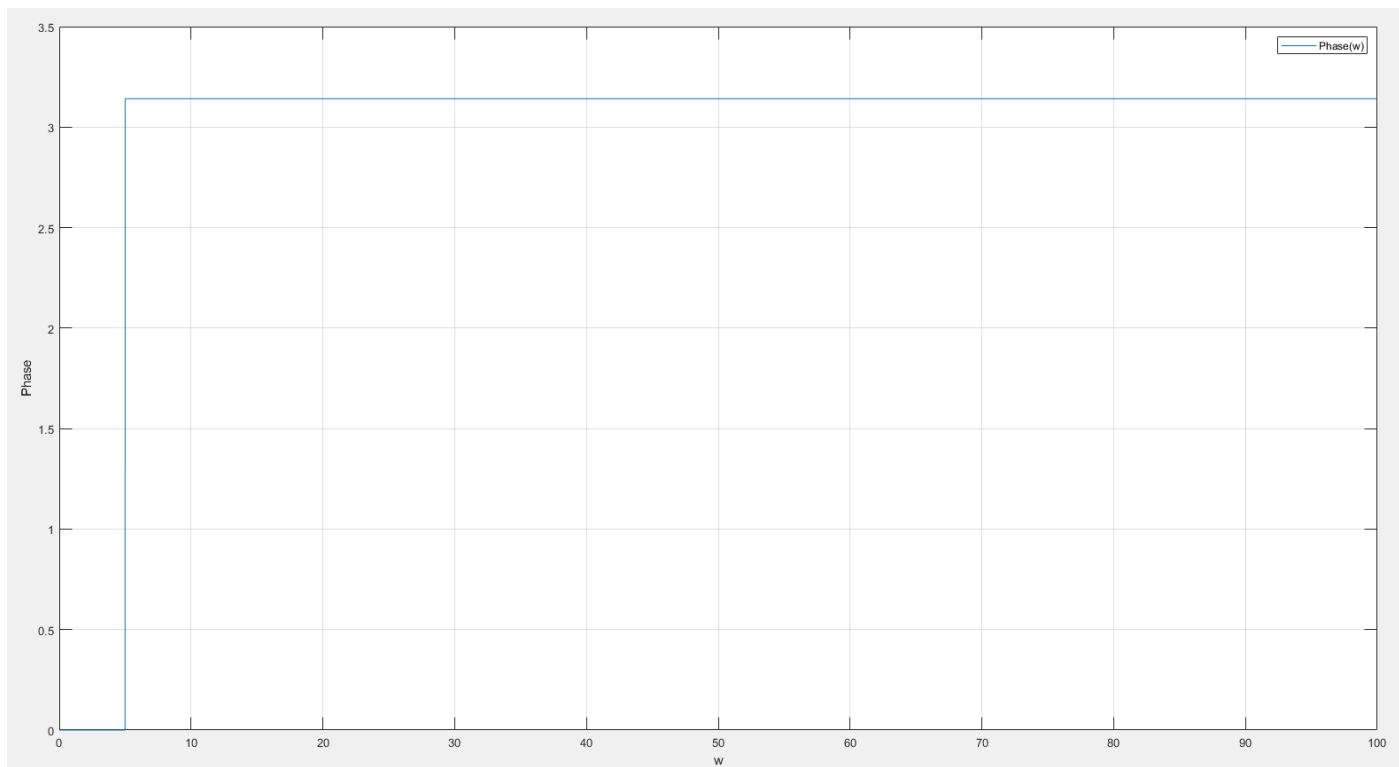


Рисунок 16: график фазово-частотной характеристики консервативного звена

3.4.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$U(\omega) = \frac{15}{-0.04\omega^2 + 1}, \quad V(\omega) = 0$$

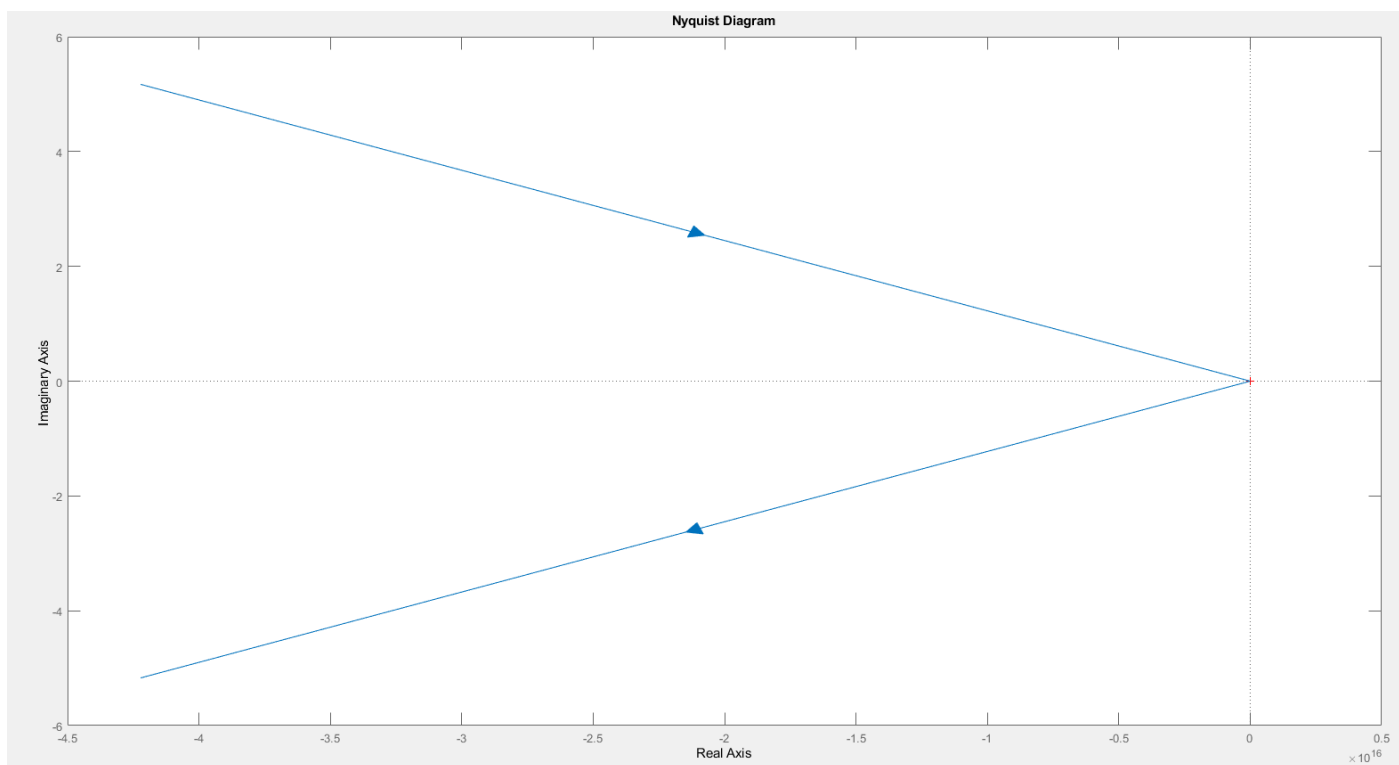


Рисунок 17: график амплитудно-фазовой частотной характеристики консервативного звена

3.4.4. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики

$$\text{ЛАЧХ: } L(\omega) = 20 \lg \frac{15}{-0.04\omega^2 + 1}, \quad \omega \text{ в логарифмическом масштабе}$$

$$\text{ЛФЧХ: } \Psi(\omega) = \operatorname{atan2}\left(0, \frac{15}{-0.04\omega^2 + 1}\right), \omega \text{ в логарифмическом масштабе}$$

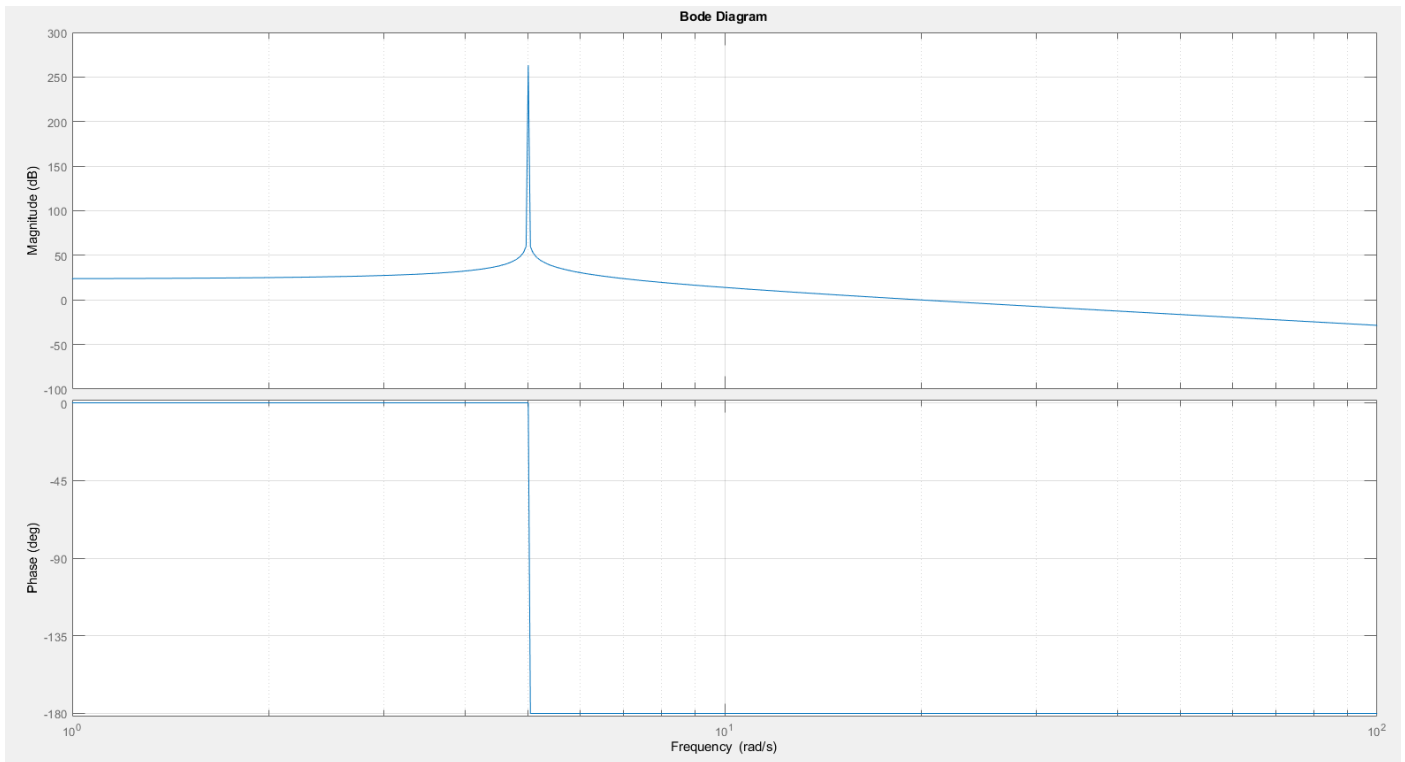


Рисунок 18: графики логарифмических амплитудной и фазовой частотных характеристик консервативного звена

Выводы

В данной лабораторной работе были исследованы три типа звеньев, построены их временные характеристики (весовая и переходная функции), частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ, АФЧХ, ЛАФЧХ).

1. Дифференцирующее звено с замедлением (апериодическое звено 1 порядка с замедлением) – имеет вещественный корень характеристического уравнения.
2. Консервативное звено – имеет чисто мнимые корни характеристического уравнения. АЧХ консервативного звена имеет разрыв $\omega = 5$ – это так называемый резонанс системы (его крайний случай), однако в реальной жизни амплитуда системы не может увеличиваться до бесконечности (часть механической энергии должна переходить в тепловую) и любые колебания затухают.
3. Колебательное звено – имеет комплексные корни характеристического уравнения. АЧХ колебательного звена также имеет резонанс при $\omega = 5$, а это означает что при данной частоте система будет колебаться с наибольшей амплитудой.