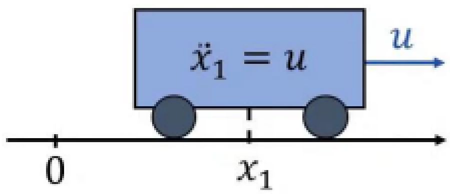
Робастная устойчивость

1. Немного про неопределенность

Ранее всегда при рассмотрении какой-либо динамической системы мы предполагали, что все её параметры будут неизменны в течение времени.

Например, рассматривая пример с тележкой:



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Мы всегда подразумевали, что элементы матрицы входных воздействий не будут меняться, однако в реалиях жизни такое допущение крайне не соответствует действительности (например ускорение, с которым мы двигаем тележку, будет меняться из-за физической усталости или же вес тележки меняется из-за изменения количества груза). Также мы просто можем неточно знать параметры исследуемой системы.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + q_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = q_3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

То есть, мы хотим рассматривать не одну, а некоторое семейство систем, где матрицы $A(q_1), B(q_2), C(q_3)$ будут зависеть от параметров $q_i \in Q$ (Q - множество неопределенности). В данном случае, рассмотрим линейную зависимость матриц от параметров.

Если же сделать переход от формы ВСВ такого семейства систем к форме ВВ, то полученная передаточная функция тоже будет состоять из полиномов, зависящих от q.

$$W(s, Q) = \frac{2q_1 q_3}{s - q_2}$$

Таких параметров q может быть довольно много, тогда имеет смысл рассматривать вектор неопределенности $\vec{q}$, принадлежащий пространству неопределенности. Такое пространство в простейших случаях имеет вид параллелепипеда или эллипсоида. Естественно, особый интерес представляют значения, составляющие границу данных множеств, так как при их рассмотрении, мы «проходим» все опасные и пиковые значения параметров.

Так же параметры могут быть как независимы, так и зависимы друг от друга.

2. Робастная устойчивость

Итак, имею систему с неопределенностью встает вопрос: как же определить устойчивость такой системы?

Перебор всех векторов неопределенности из допустимого множества может быть громоздким (а если перед нами непрерывная неопределенность, то значений q бесконечное количество). Интуиция подсказывает, что нужно что-то придумать с граничными значениями.

Введем **определение**: если у нас есть семейство полиномов с неопределенностью

$$\mathcal{P}(s,Q) = \{P(s,q) = a_0(q) + a_1(q)s + \cdots + a_n(q)s^n, q \in Q\},$$

где коэффициенты полинома $a_i(q)$ – зависят от параметров q, которые изменяются в множестве неопределенности Q. То такое семейство называет *робастно устойчивым*, если все полиномы $P(s,q)$ – устойчивы при всех параметрах $q \in Q$.

Приведем **теорему**, полезную в понимании робастной устойчивости, называемую принципом исключения нуля.

Пусть полином $P(s,q^0)$ устойчив для некоторого $q^0 \in Q$, множество Q – связно, и $a_n(q) \neq 0$ для всех $q \in Q$. Тогда условие

$$0 \notin \mathcal{S}(\omega) = \{P(j\omega,q) : q \in Q\} \textit{ для всех } 0 \leq \omega < \infty$$

необходимо и достаточно для робастной устойчивости семейства $\mathcal{P}(s,Q)$.

Простыми словами, теорема говорит о том, что если в множестве неопределенности нет такого значения q, при котором хотя бы один из корней полинома будет 0, то это значит, что корни всех полиномов будут либо с слева от мнимой оси, либо справа (связность множества Q), а так как мы требуем, чтобы было хотя бы одно значение q^0 при котором $P(s,q^0)$ устойчив, значит перехода от устойчивости к неустойчивости не было.

Наконец, рассмотрим **теорему**, которая отождествит проверку целого семейства полиномов с неопределенностью с проверкой 4-х специальных полиномов.

Пусть у нас есть семейство полиномов такого вида:

$$\mathcal{P}(s) = \left\{P(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n, \quad \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i, \quad i = \overline{1,n}\right\}$$

То есть параметрами неопределенности являются коэффициенты полинома. Тогда множество неопределенности представляет собой n-параллелепипед.

Полиномами Харитонова называются следующие полиномы:

$$P_1(s) = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \overline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s^3 + \cdots,$$

$$P_2(s) = \underline{a}_0 + \overline{a}_1 s + \overline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \cdots,$$

$$P_3(s) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \cdots,$$

$$P_4(s) = \overline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s^3 + \cdots$$

Теорема Харитонова. Для робастной устойчивости семейства полиномов вида:

$$\mathcal{P}(s) = \left\{P(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n, \quad \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i, \quad i = \overline{1,n}\right\}$$

Необходимо и достаточно, чтобы все полиномы Харитонова были устойчивы.

На основе данной теоремы можно выстроить следствие, которое позволит рассмотреть графическую форму в виде годографа. Данное следствие позволит по поведению только одного годографа определить максимальный размер неопределенности, при котором сохраняется робастная устойчивость.

Рассмотрим семейство полиномов с неопределенностью:

$$\mathcal{P}(s) = \{P(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n, \qquad |a_i - a_i^0| \le \gamma\alpha_i, \qquad i = \overline{1,n}\}, \qquad \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

Также рассмотрим следующие величины:

$$P_0(j\omega) = U_0(\omega) + j\omega V_0(\omega),$$

$$U_0(\omega) = a_0^0 - a_2^0\omega^2 + a_4^0\omega^4 - \cdots,$$

$$V_0(\omega) = a_1^0 - a_3^0\omega^2 + a_5^0\omega^4 - \cdots,$$

$$R(\omega) = \alpha_0 + \alpha_2\omega^2 + \alpha_4\omega^4 + \cdots,$$

$$T(\omega) = \alpha_1 + \alpha_3\omega^2 + \alpha_5\omega^4 + \cdots.$$

Построим годограф

$$z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega), \qquad 0 \le \omega \le \infty,$$

где

$$x(\omega) = \frac{U_0(\omega)}{R(\omega)}, \qquad y(\omega) = \frac{V_0(\omega)}{T(\omega)}$$

данный годограф называется *годографом Цыпкина-Поляка.*

Следствие *(графический критерий)*. Для робастной устойчивости семейства

$$\mathcal{P}(s) = \{P(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n, \qquad |a_i - a_i^0| \le \gamma\alpha_i, \qquad i = \overline{1,n}\}, \qquad \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

необходимо и достаточно, чтобы $a_0^0 > \gamma\alpha_0$, $a_n^0 > \gamma\alpha_n$ и годограф $z(\omega)$ при изменении ω от 0 до бесконечности проходил *последовательно через* n *квадрантов против часовой стрелки и не пересекал квадрата с вершинами* $(\pm\gamma, \pm\gamma)$.

Таким образом, построив годограф $z(\omega)$, можно не только проверить робастную устойчивость при фиксированном γ, но и найти наибольшее $\gamma = \gamma_{max}$ для которого робастная устойчивость сохраняется при всех $\gamma < \gamma_{max}$. Найденное таким образом γ_{max} называется *радиусом устойчивости* семейства полиномов и находится по формуле

$$\gamma_{max} = \min\{\gamma^*, \gamma_0, \gamma_\infty\},$$

где γ^*- размер наибольшего квадрата $\{|x| \le \gamma^*, |y| \le \gamma^*\}$, вписанного в годограф $z(\omega)$, $\gamma_0 = \frac{a_0^0}{\alpha_0}$, а $\gamma_\infty = \frac{a_n^0}{\alpha_n}$.

3. Пример исследования робастной устойчивости полинома

Рассмотрим следующее семейство полиномов с неопределенностью:

$$\mathcal{P}(s) = \{P(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3\}$$

Множество неопределенности представляет параллелепипед и имеет следующие границы:

$$1 \le a_0 \le 2, \qquad 10 \le a_1 \le 17, \qquad 3 \le a_2 \le 4, \qquad 7 \le a_3 \le 10$$

Тогда полиномы Харитонова имеют следующий вид:

$$P_1(s) = 1 + 10s + 4s^2 + 10s^3,$$

$$P_2(s) = 1 + 17s + 4s^2 + 7s^3,$$

$$P_3(s) = 2 + 17s + 3s^2 + 7s^3,$$

$$P_4(s) = 2 + 10s + 3s^2 + 10s^3.$$

Воспользуемся критерием Гурвица для полиномов 3-го порядка: полином $s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ устойчив, тогда и только тогда, когда $a_0, a_1, a_2 > 0$ и $a_2 a_1 > a_0$.

$P_1(s)$: устойчив

$P_2(s)$: устойчив

$P_3(s)$: устойчив

$P_4(s)$: устойчив

Следовательно семейство полиномов с неопределенностью робастно устойчиво на рассматриваемом Q.

4. Вывод

Таким образом, если в описании нашей системы присутствует неопределенность, то правильно описав её математически можно исследовать систему на устойчивость при всех допустимых значениях неопределенного параметра. Рассмотренный случай робастной устойчивости полиномов (неопределенные параметры, в которых находятся в линейном виде) является простейшим и решается применением теоремы Харитонова или же графическим способом с помощью годографа Цыпкина-Поляка.