

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

Факультет систем управления и робототехники

**Отчет по лабораторной работе №9**  
**«Регуляторы с заданной степенью устойчивости»**  
**по дисциплине «Теория автоматического управления»**

Выполнил: студент гр. R3238,

Кирбаба Д.Д.

Преподаватель: Перегудин А.А.,

ассистент фак. СУиР

## Цель работы

Построение регуляторов с заданной степенью устойчивости с ограничением на управление и наблюдателей с заданной степенью сходимости

## Начальные данные

3 вариант

Исходные данные для задания 1:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Исходные данные для задания 3:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Исходные данные для задания 4:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & 5 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

## Выполнение работы

### Задание 1.

#### 1.1. Схема моделирования системы с регулятором

Рассматриваемая система с регулятором:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad u = Kx$$

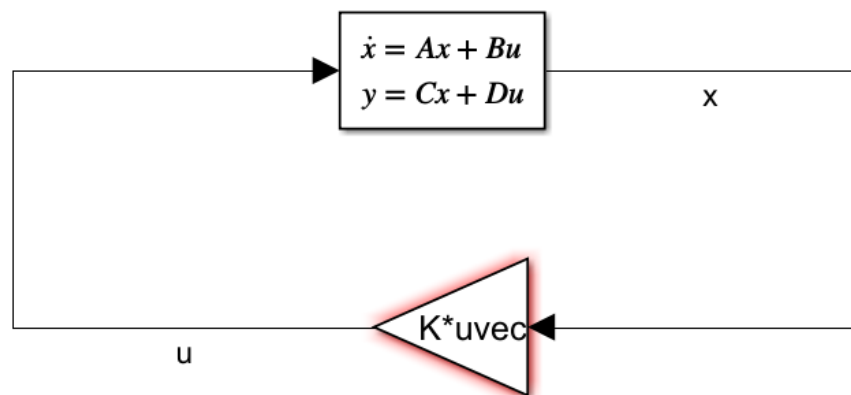


Рисунок 1: схема моделирования замкнутой системы с регулятором

## 1.2. Регуляторы с различными значениями степени устойчивости $\alpha$

Неравенства для синтеза регулятора:

$$P > 0, \quad PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY < 0, \quad K = YP^{-1}$$

Программный код:

```
% plant parameters
A = [-3 0 0 0; 0 3 0 0; 0 0 3 3; 0 0 -3 3];
B = [0; 7; 0; 1];

% desired decay rates
alpha = 0.5;

% solving LMI
cvx_begin sdp
variable P(4,4)
variable Y(1,4)
P > 0.00001*eye(4);
P*A' + A*P + 2*alpha*P + Y'*B' + B*Y <= 0;
cvx_end

% finding controller matrix
K = Y*inv(P)

% finding eigenvalues
eig(A + B*K)
```

$$\alpha = 0.5 \Rightarrow K = [0 \quad -12.4494 \quad -75.4453 \quad 63.1168] \Rightarrow \sigma(A + BK) = \{-5.8121 \pm 6.6934i, -3.4049, -3\}$$

$$\alpha = 1.5 \Rightarrow K = [0 \quad -42.2752 \quad -204.82 \quad 244.0828] \Rightarrow \sigma(A + BK) = \{-4.4691 \pm 4.0473i, -33.9052, -3\}$$

$$\alpha = 3 \Rightarrow K = [0 \quad -50.4259 \quad -216.3537 \quad 312.1883] \Rightarrow \sigma(A + BK) = \{-13.3683 \pm 11.2425i, -5.0566, -3\}$$

## 1.3. Моделирование работы найденных регуляторов

$$\text{Начальные условия: } x(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 17 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Сравнительные графики  $x(t)$ :

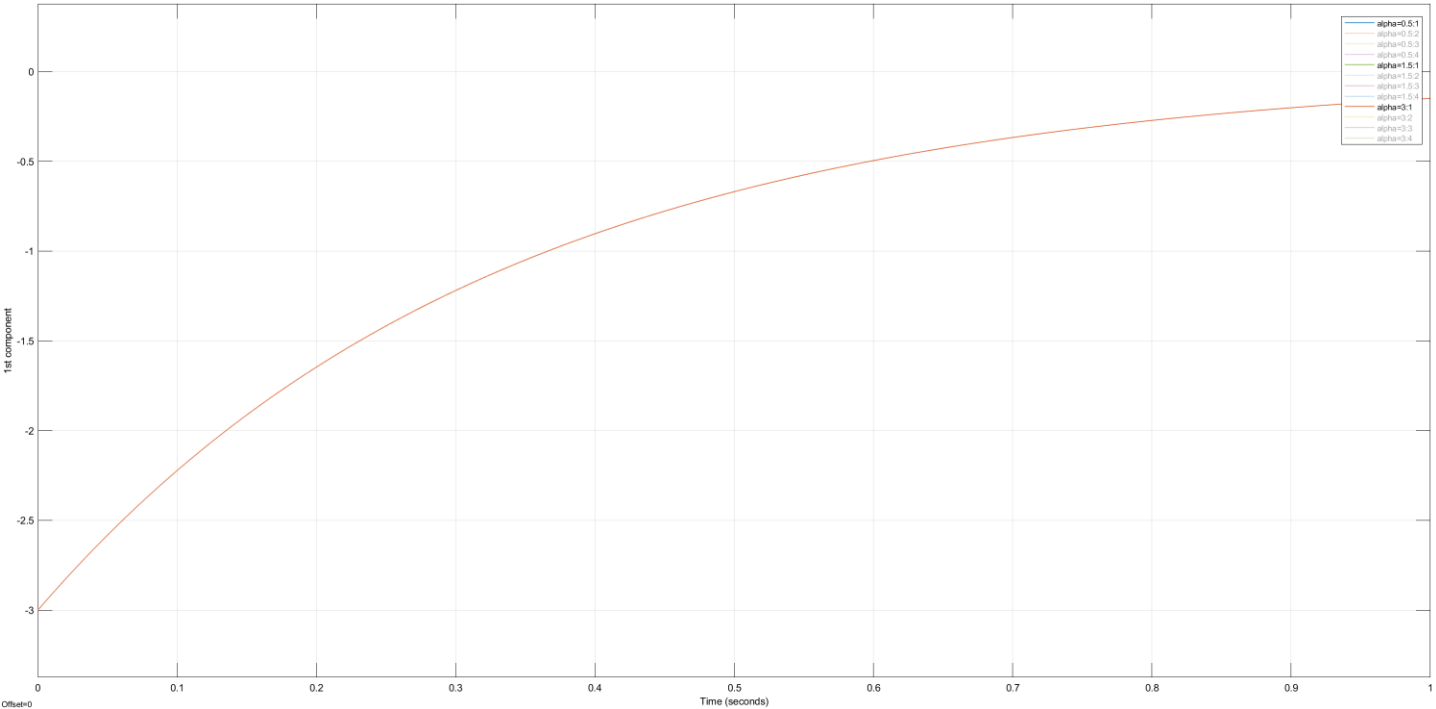


Рисунок 2: графики первых компонент

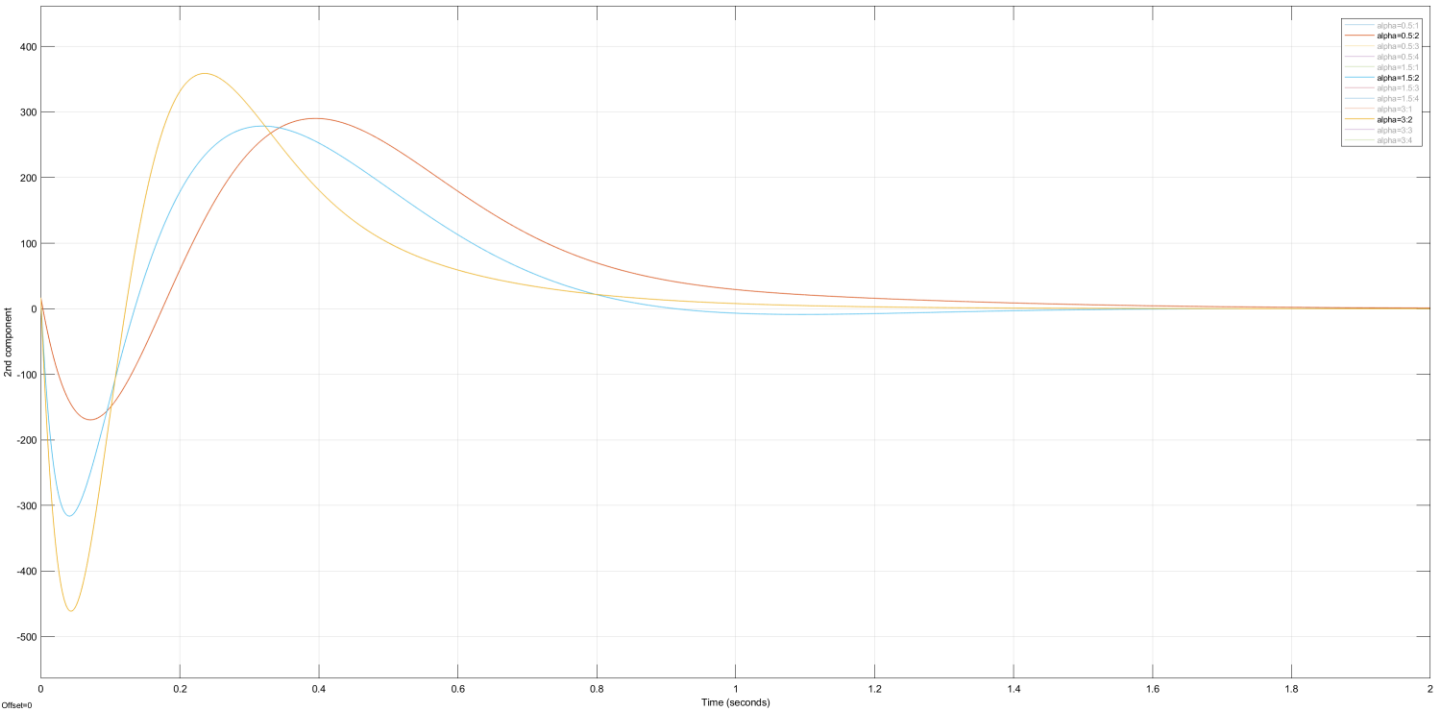


Рисунок 3: графики вторых компонент

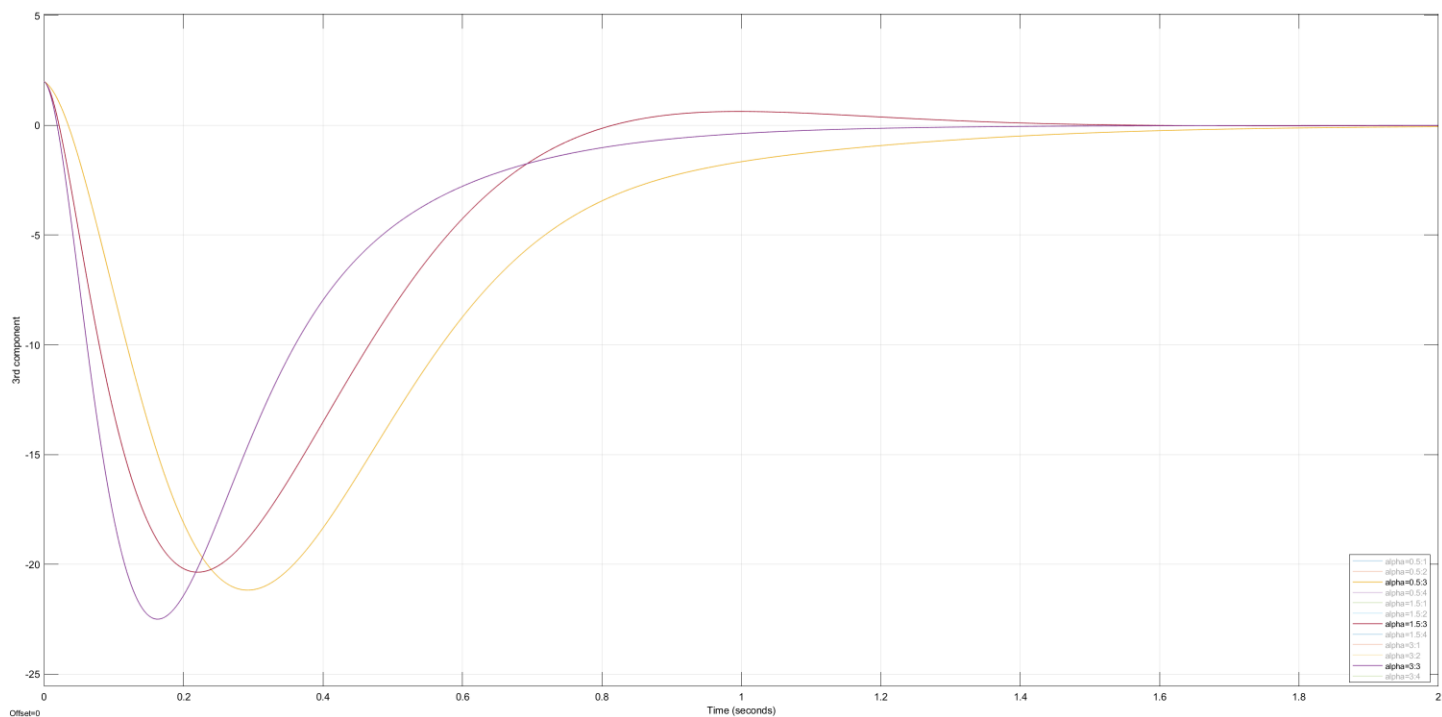


Рисунок 4: графики третьих компонент

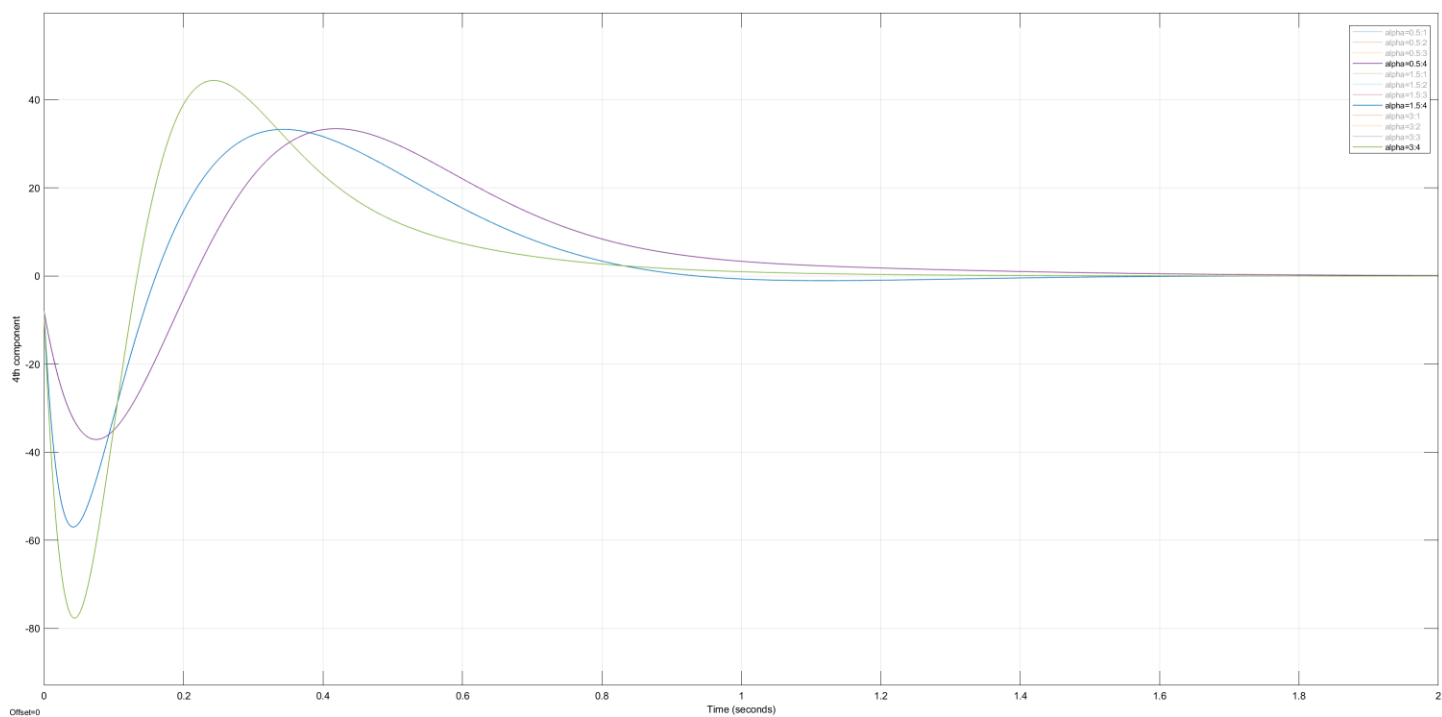


Рисунок 5: графики четвертых компонент

## Сравнительные графики $u(t)$ :

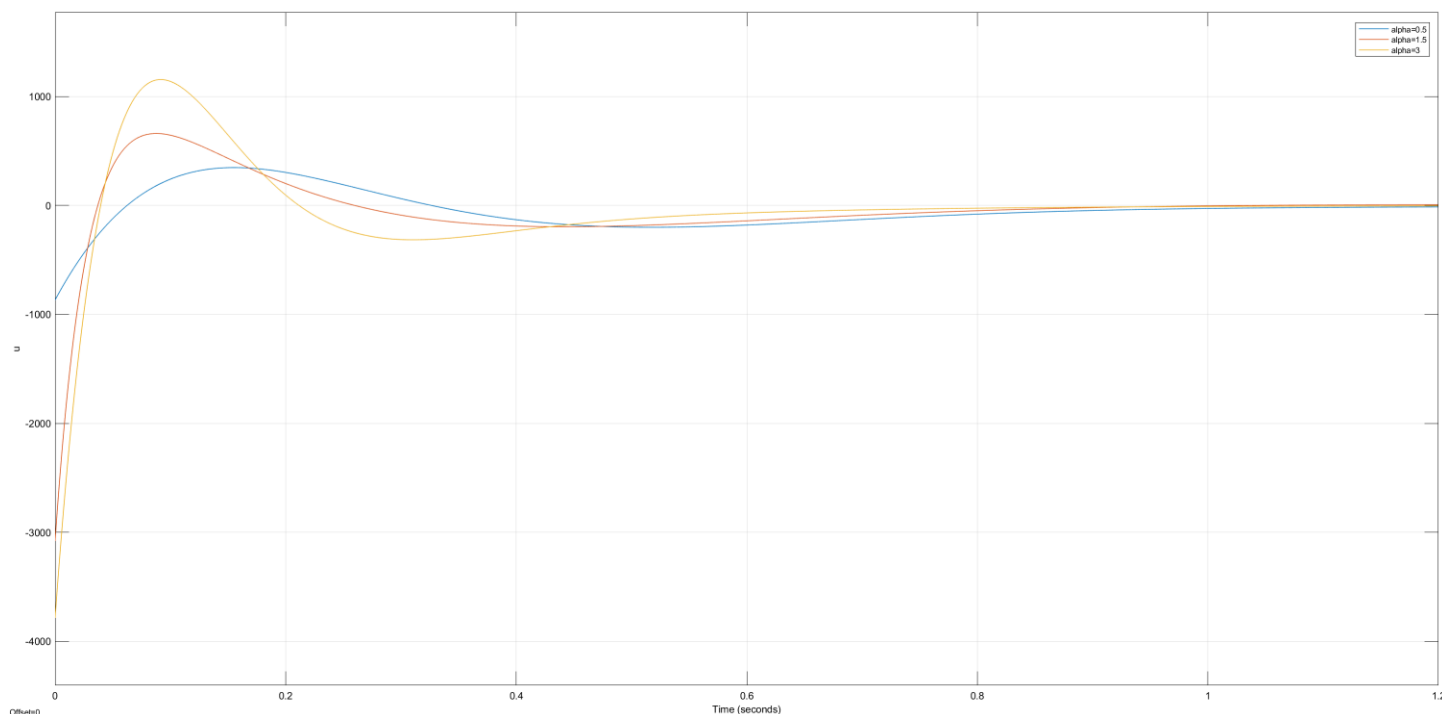


Рисунок 6: графики входного воздействия

Анализируя графики, можно убедиться в том, что при бóльших коэффициентах  $\alpha$  замкнутая система быстрее сходится (т. е. «устойчивее»), однако имеет большие коэффициенты входного воздействия, из-за чего ошибка при малых  $t$  возможно перерегулирование.

## Задание 2.

### 2.1. Регулятор с ограничением на величину управляющего воздействия

Пусть  $\alpha = 0.5$ , ограничим управление  $|u(t)| \leq \mu$ , начальные условия  $x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 17 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$

Неравенства для синтеза регулятора с ограничением на управление:

$$P > 0, \quad PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY < 0, \quad K = YP^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} > 0$$

## Программный код:

```
% plant parameters
A = [-3 0 0 0; 0 3 0 0; 0 0 3 3; 0 0 -3 3];
B = [0; 7; 0; 1];
x0 = [-3; 17; 2; -8];

% desired decay rates
alpha = 0.5;

% control constraint
mu = 700;

% solving LMI
cvx_begin sdp
variable P(4,4)
variable Y(1,4)
P > 0.00001*eye(4);
P*A' + A*P + 2*alpha*P + Y'*B' + B*Y <= 0;
[P x0; x0' 1] > 0;
[P Y'; Y mu^2] > 0;
cvx_end

% finding controller matrix
K = Y*inv(P)
```

При вариации параметра  $\mu$  были выявлены следующие зависимости:

- С ростом  $\mu$  растет  $KK^T$

$\mu$	400	550	700
$KK^T$	255.1447	259.0783	262.0425

- При уменьшении  $\mu$  до конкретного значения степень устойчивости системы стремится к желаемому значению, то есть  $\min |Re(\sigma(A+BK))| \rightarrow \alpha$ .

$\mu$	400	550	700
$\min  Re(\sigma(A+BK)) $	0.5080	0.5208	0.5245

- Так как  $\mu$  является ограничением на величину входного воздействия, то графики  $u(t)$ , как и графики переходного процесса  $x(t)$  при большем  $\mu$  будут иметь бóльшие максимальные по модулю значения

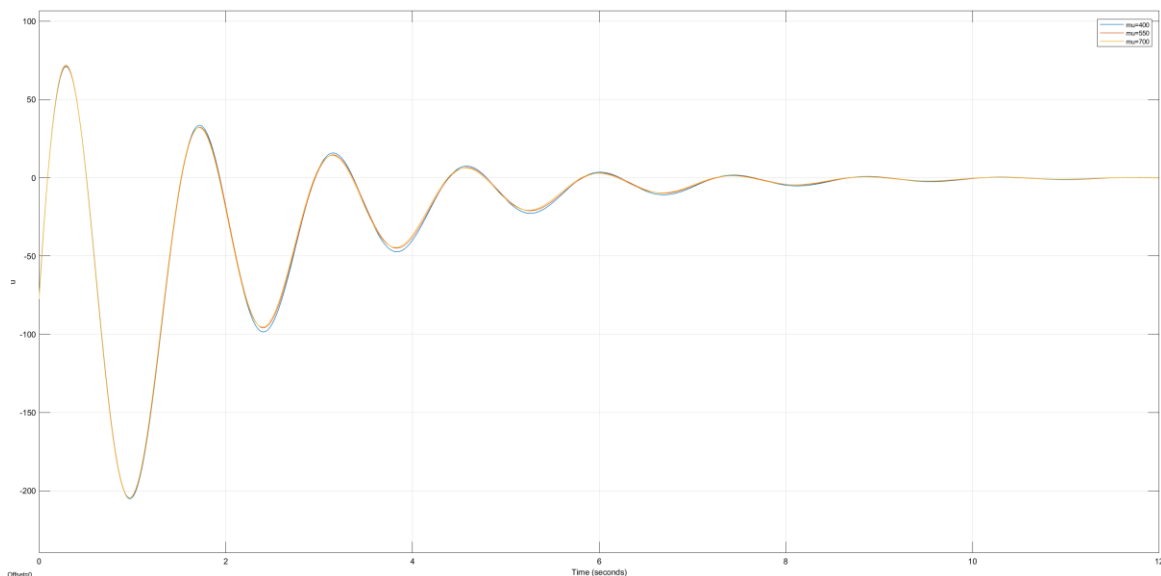


Рисунок 7: графики входного воздействия

## 2.2. Минимизация величины управляющего воздействия

Программный код:

```
% plant parameters
A = [-3 0 0 0; 0 3 0 0; 0 0 3 3; 0 0 -3 3];
B = [0; 7; 0; 1];
x0 = [-3; 17; 2; -8];

% desired decay rates
alpha = 0.5;

% solving LMI
cvx_begin sdp
variable P(4,4)
variable Y(1,4)
variable mumu
minimize mumu
P > 0.00001*eye(4);
P*A' + A*P + 2*alpha*P + Y'*B' + B*Y <= 0;
[P x0; x0' 1] > 0;
[P Y'; Y mumu] > 0;
cvx_end

% finding controller matrix
K = Y*inv(P)
mu = sqrt(mumu)

% finding eigenvalues
eig(A + B*K)
```

$\alpha = 0.5 \Rightarrow K = [-0.0015 \quad -1.8 \quad -16.01 \quad 2.1512] \Rightarrow \sigma(A + BK) = \{-0.5 \pm 4.5035i, -0.5, -3\}$

$\alpha = 1.5 \Rightarrow K = [-0.0022 \quad -3.74 \quad -27.9 \quad 12.66] \Rightarrow \sigma(A + BK) = \{-1.5 \pm 5.6637i, -1.5, -3\}$

$\alpha = 3 \Rightarrow K = [0 \quad -8.66 \quad -51.32 \quad 42.645] \Rightarrow \sigma(A + BK) = \{-3 \pm 7.4140i, -3, -3\}$

Графики переходных процессов:

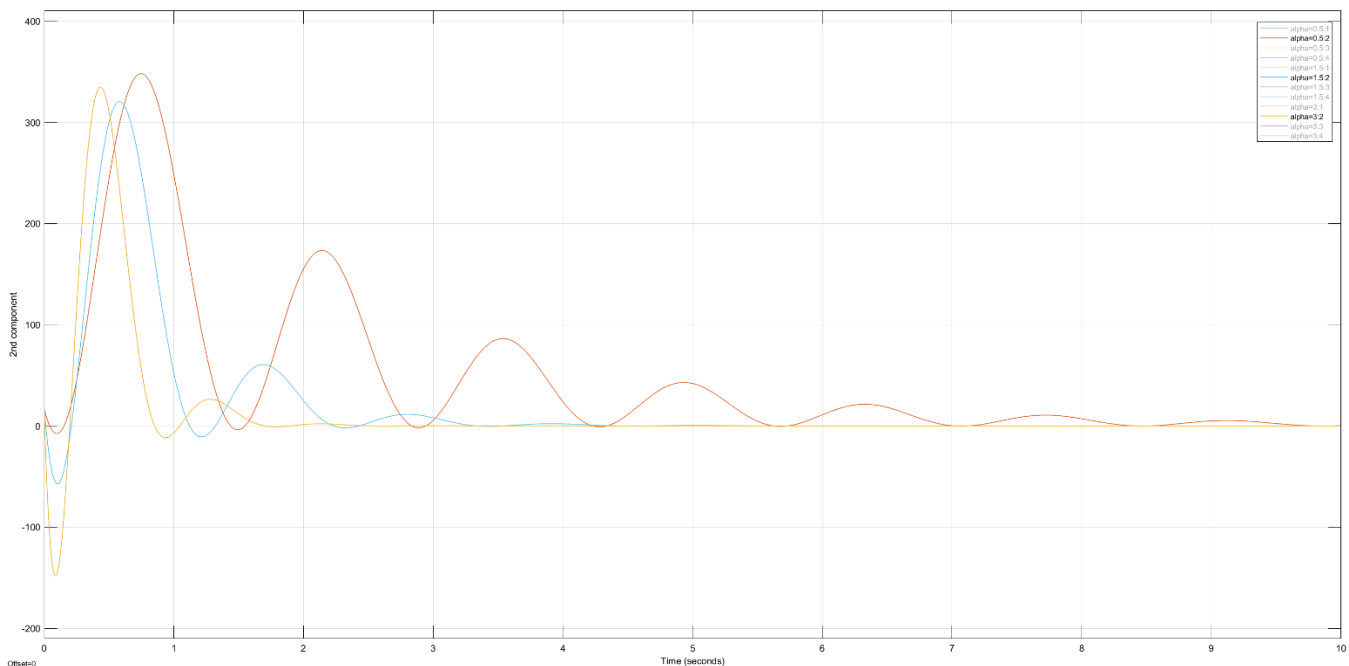


Рисунок 8: графики вторых компонент



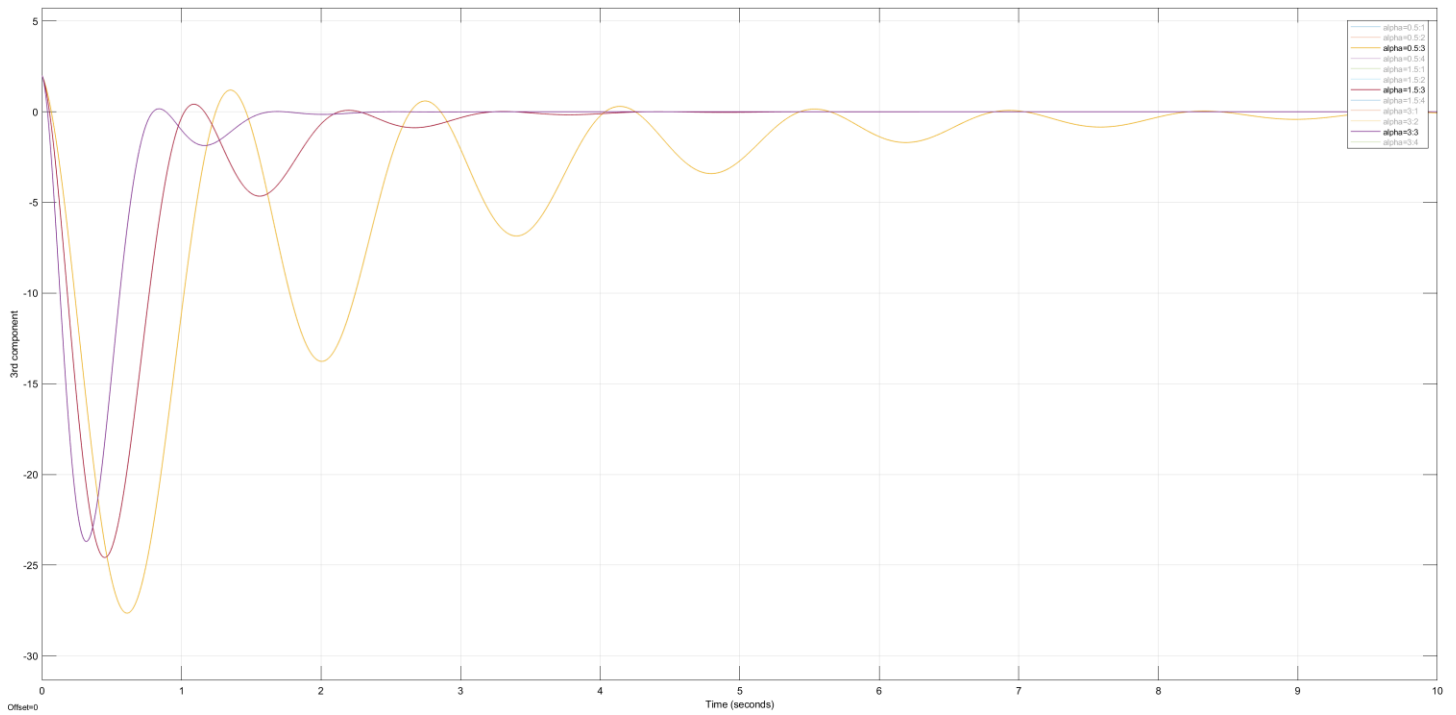


Рисунок 9: графики третьих компонент

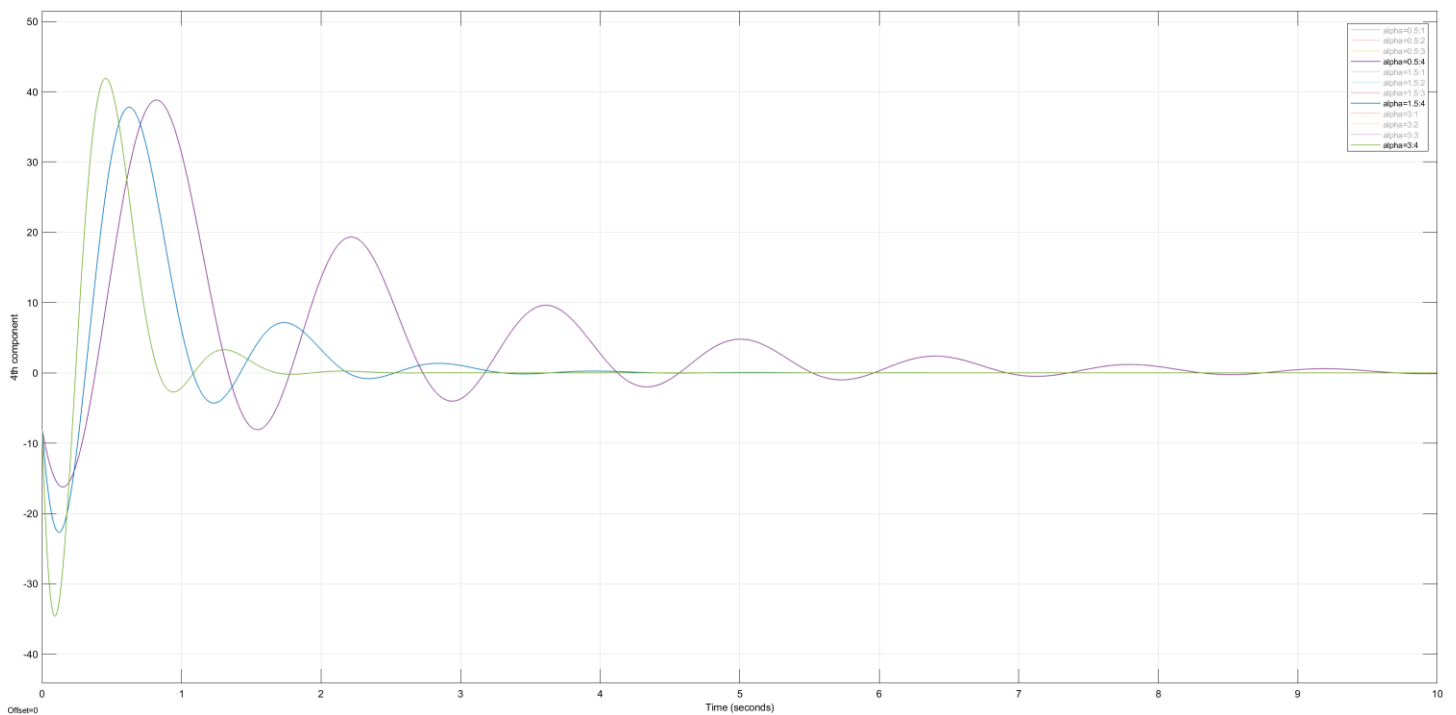


Рисунок 10: графики четвертых компонент

При минимизации входного воздействия точно достигается желаемая степень устойчивости системы. И хотя скорость переходного процесса увеличивается, количество входного воздействия уже не такое огромное, как на предыдущих графиках.

### Задание 3.

#### 3.1. Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad y = [0 \quad 9 \quad 1 \quad 0]x$$

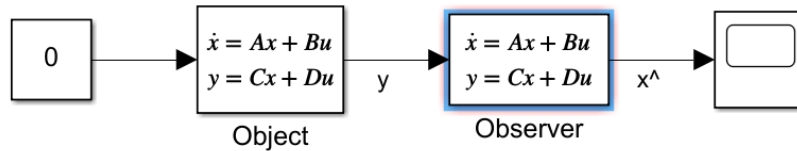


Рисунок 11: схема моделирования системы с наблюдателем

#### 3.2. Расчет наблюдателей с желаемой степенью устойчивости $\alpha$ динамики ошибки наблюдателя

Неравенства для синтеза регулятора:

$$Q > 0, \quad A^T Q + Q A + 2\alpha Q + C^T Y^T + Y C < 0, \quad L = Q^{-1} Y$$

Программный код:

```
% plant parameters
A = [0 5 0 0; -5 0 0 0; 0 0 0 1; 0 0 -1 0];
C = [0 9 1 0];

% desired decay rate
alpha = 0.5;

% solving LMI
cvx_begin sdp
variable Q(4,4)
variable Y(4,1)
Q > 0.00001*eye(4);
A'*Q + Q*A + 2*alpha*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
cvx_end

% finding controller matrix
L = inv(Q)*Y

% finding eigenvalues
eig(A + L*C)
```

$$\alpha = 0.5 \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1.777 \\ 0.0067 \\ -5.8410 \\ -2.4597 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(A + LC) = \{-2.2017 \pm 9.7912i, -0.6885 \pm 1.0857i\}$$

$$\alpha = 1.5 \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 4.7258 \\ 2.6037 \\ -40.3442 \\ -45.4886 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(A + LC) = \{-6.4528 \pm 13.5921i, -2.0028 \pm 1.4360i\}$$

$$\alpha = 3 \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 5 \\ 9.9 \\ -115.75 \\ -225.6841 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(A + LC) = \{-9.35 \pm 14.9273i, -3.95 \pm 1.8471i\}$$

### 3.3. Моделирование работы найденных наблюдателей

Начальные условия:  $x(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 17 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \\ 11 \end{bmatrix}$

Сравнительные графики  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$ :

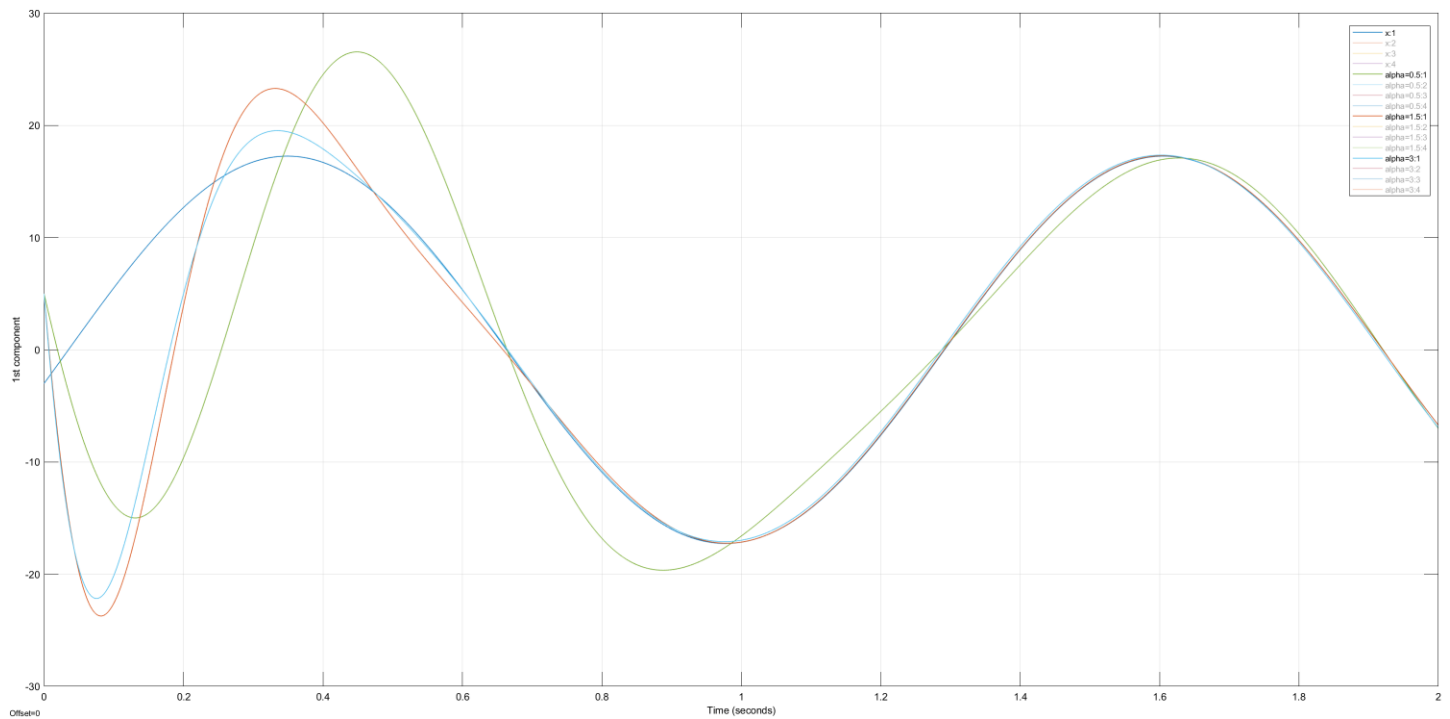


Рисунок 12: графики первых компонент

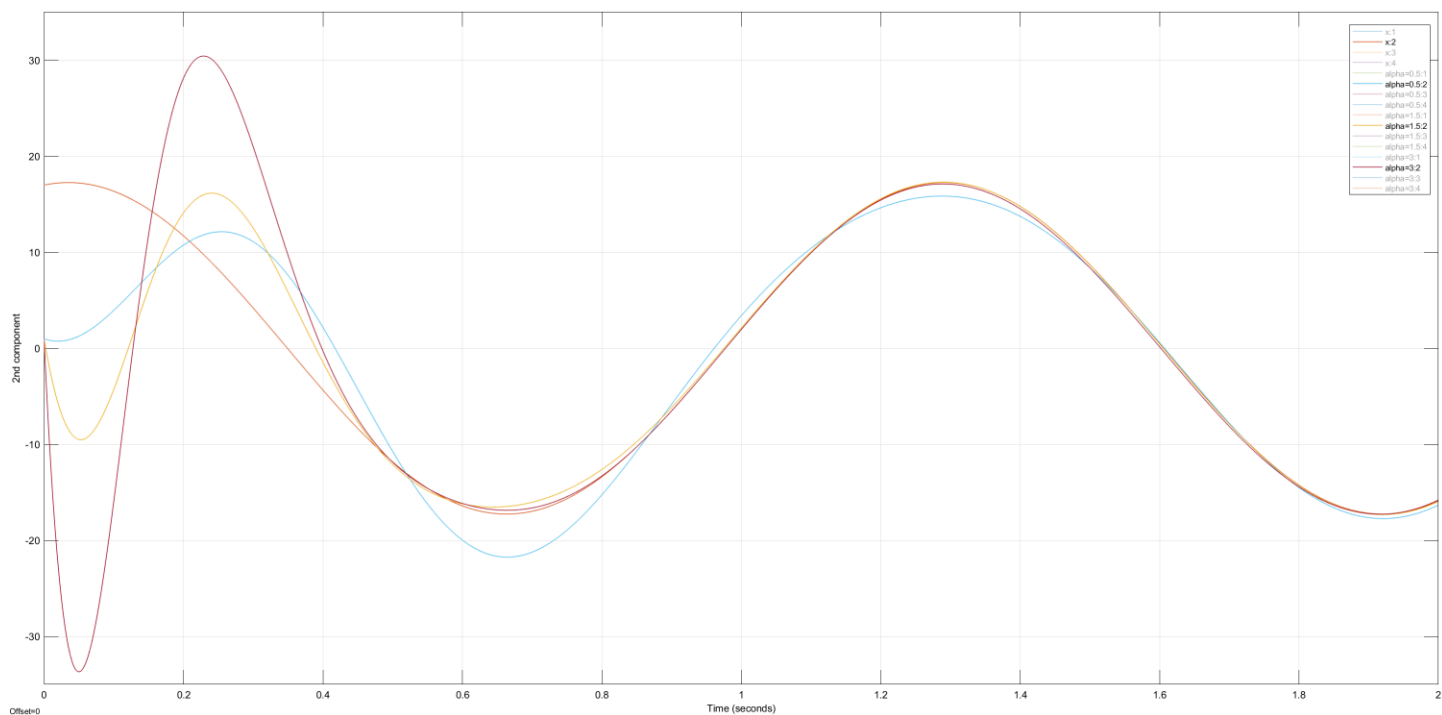


Рисунок 13: график вторых компонент

Сравнительные графики ошибки наблюдателя:

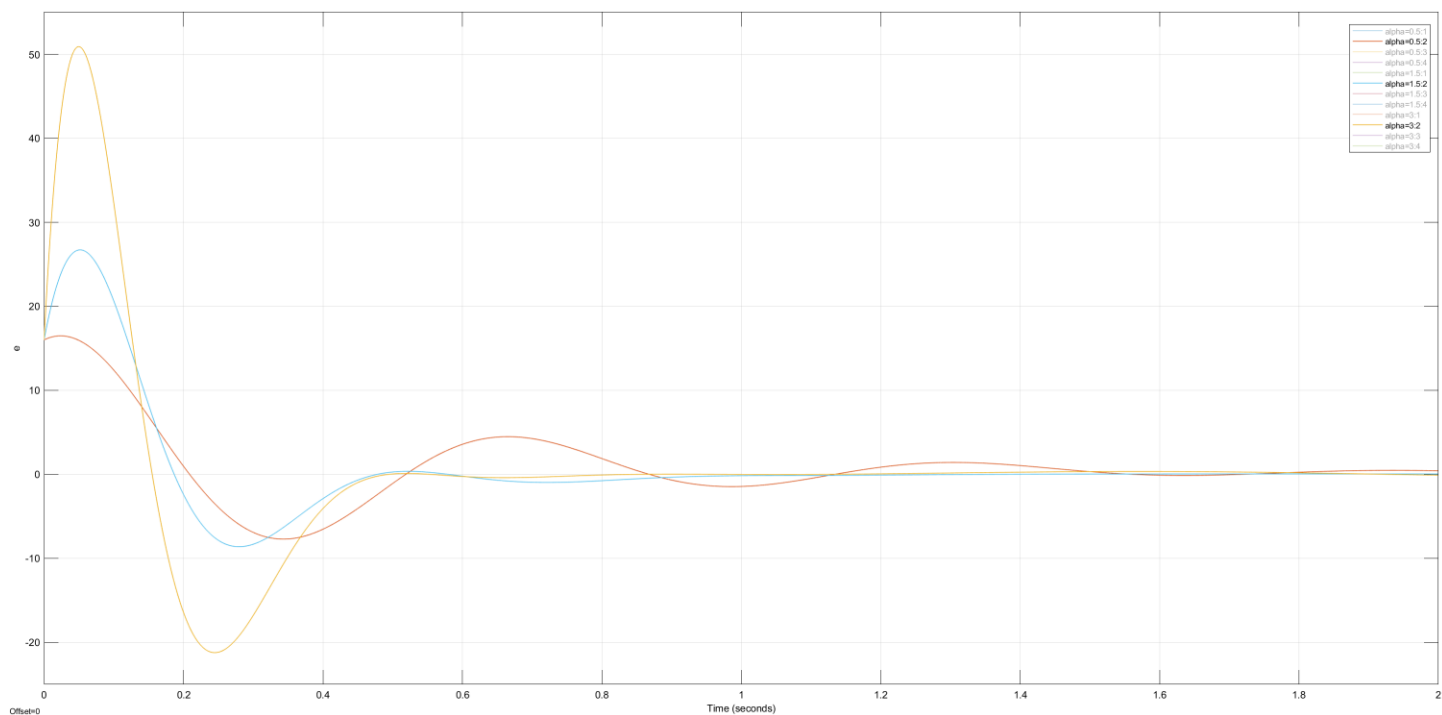


График 14: ошибки наблюдателей по 2 компоненте

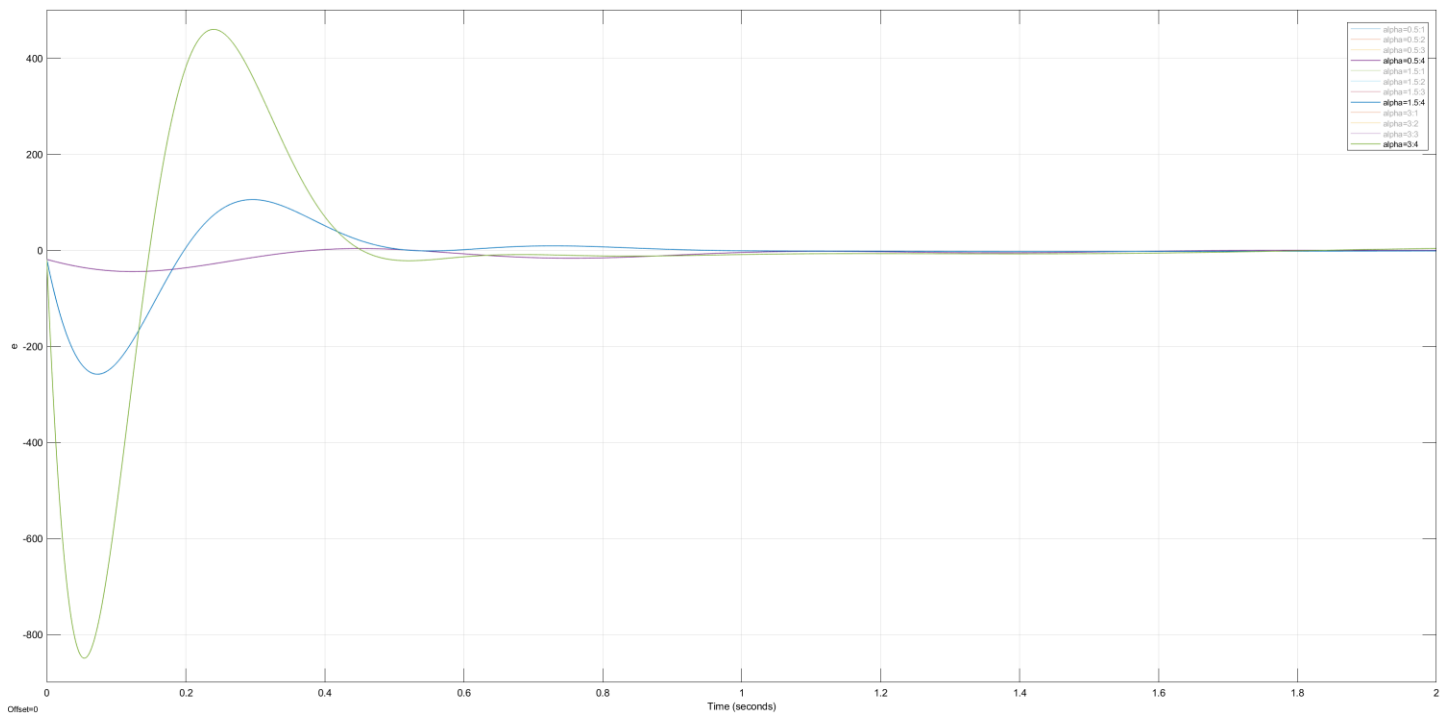


Рисунок 15: ошибки наблюдателей по 4 компоненте

Анализируя графики, можно убедиться в том, что при бóльших коэффициентах  $\alpha$  замкнутая система быстрее сходится (т. е. «устойчивее»), однако имеет большие коэффициенты входного воздействия, из-за чего ошибка при малых  $t$  возможно перерегулирование.

Пронаблюдав графики, можно убедиться в том, что при бóльших коэффициентах  $\alpha$  вектор состояния наблюдателя сходится к вектору реального состояния объекта достаточно быстро, однако при малых  $t$  возникает большое отклонение от реального состояния объекта.

## Задание 4.

### 4.1. Схема моделирования системы

Рассматриваемая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & 5 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

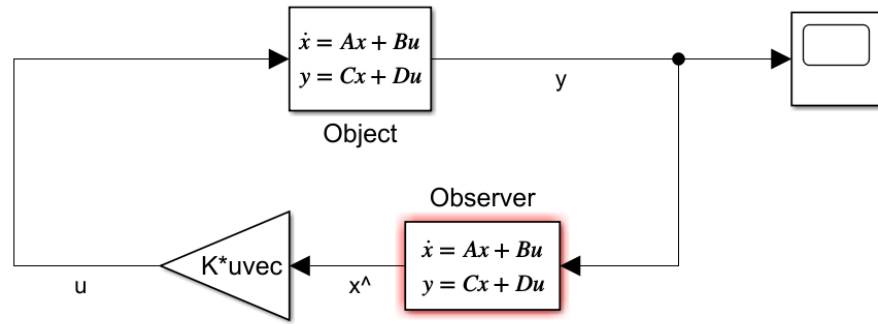


Рисунок 16: схема моделирования замкнутой системы

#### 4.2. Синтез регулятора и наблюдателя

Пусть степень устойчивости регулятора  $\alpha_{reg} = 1$ , а степень устойчивости наблюдателя  $\alpha_{obs} = 1.5$ . Найдём матрицы  $K$  и  $L$  с помощью решения соответствующих LMI.

$$K = [12.63 \quad -14.2 \quad 1.95 \quad 0.37], \quad \mu = 661$$

$$L = \begin{bmatrix} 38.6673 & -1.9882 \\ -38.6673 & -1.9882 \\ -8.8267 & 1.9882 \\ -8.8267 & -1.9882 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\sigma(A + BK) = \{-1.0128, -1.0128 \pm 11.25i, -2.0201, -7.9\}$$

$$\sigma(A + LC) = \{-3.9527, -5.6533 \pm 17.0598i, -8\}$$

Выполним моделирование при следующих начальных условиях:  $x(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 17 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix}$ .

Сравнительные графики  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$ :

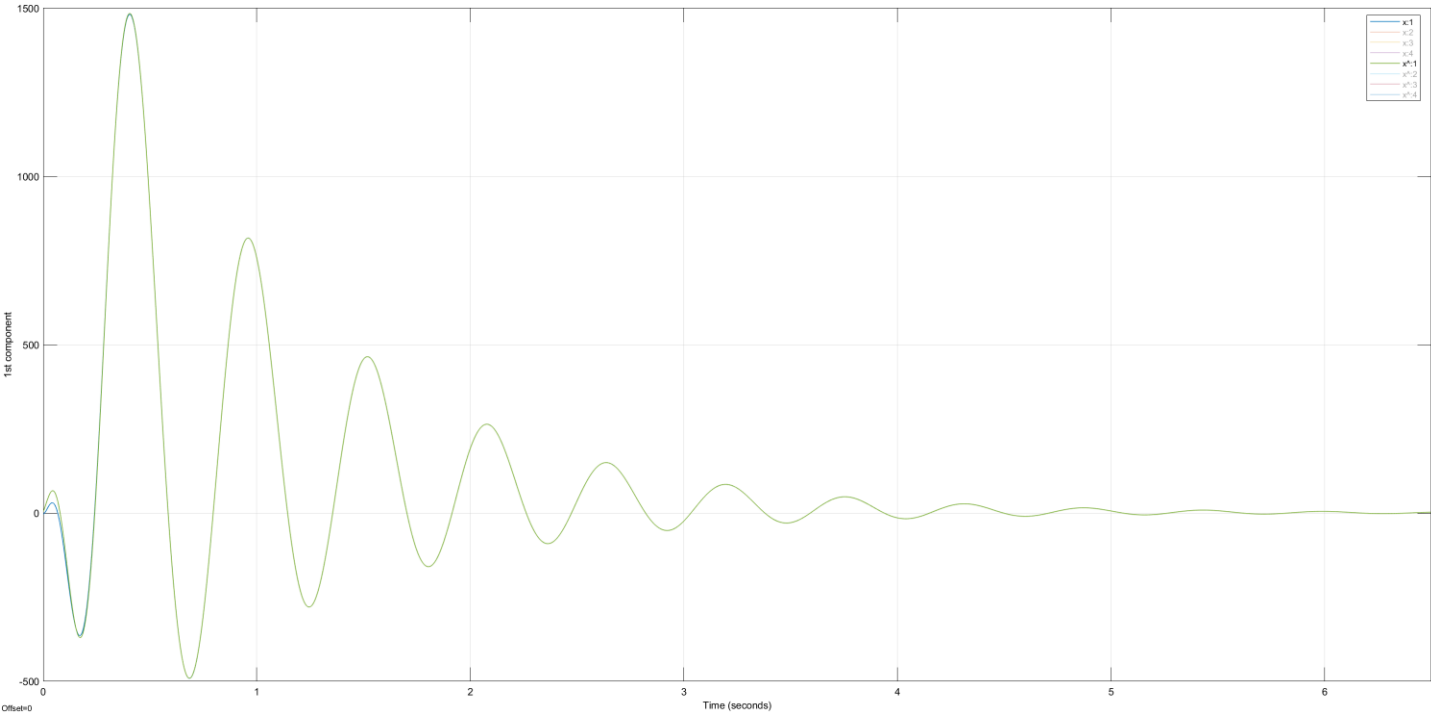


Figure 17: графики первых компонент

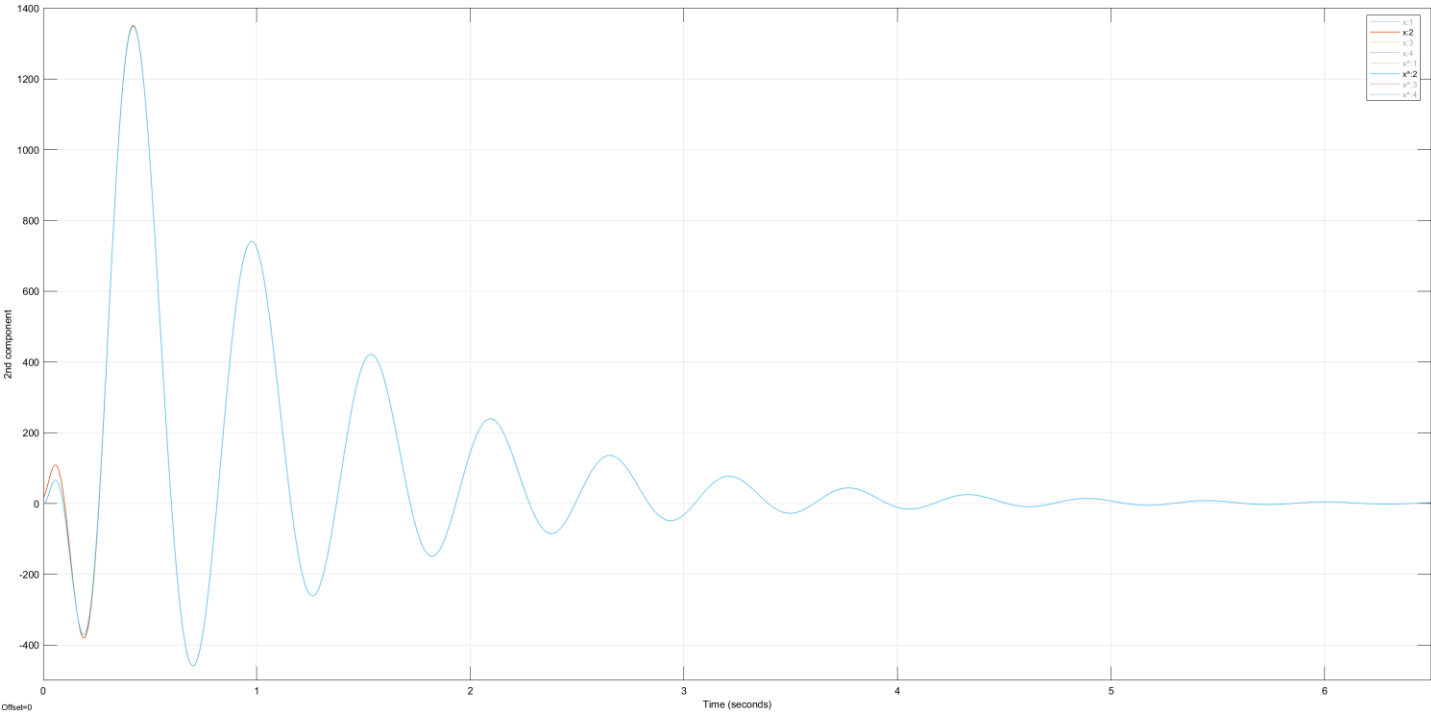


Рисунок 18: графики вторых компонент

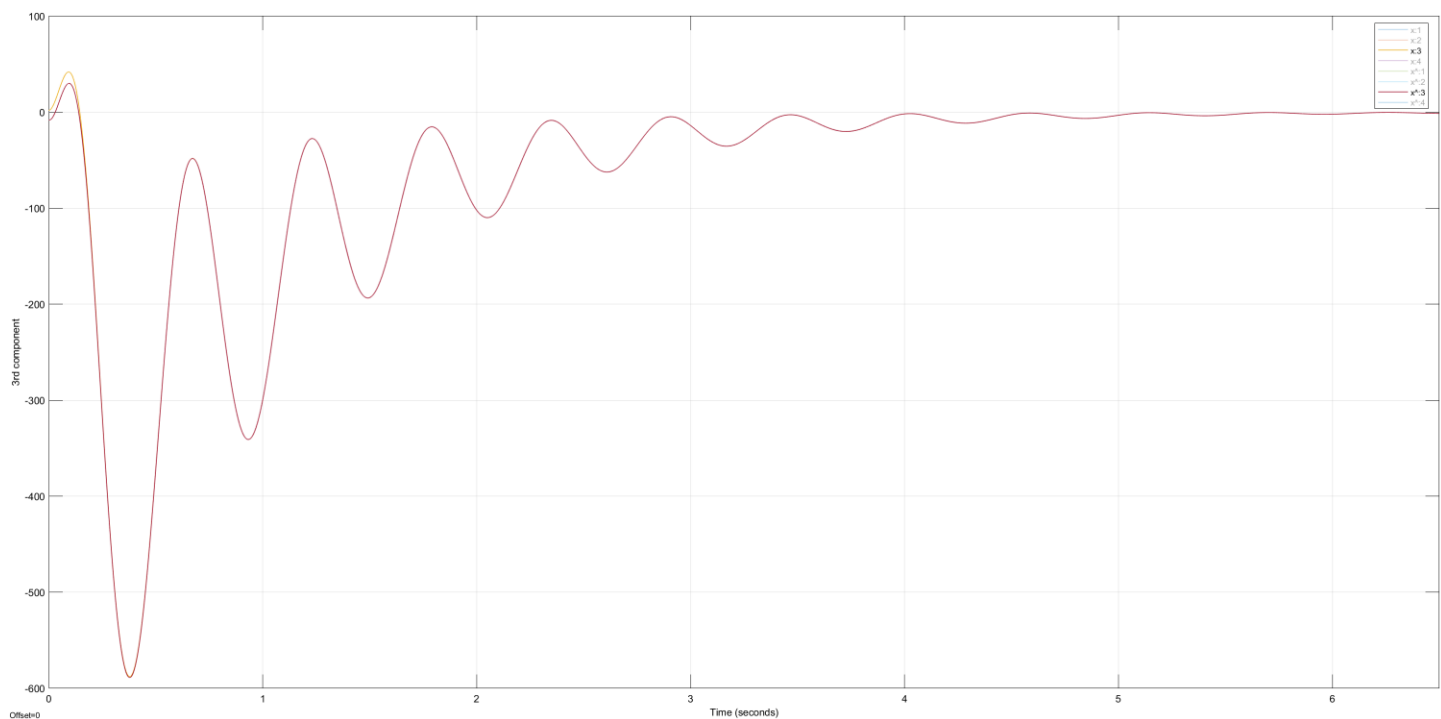


Рисунок 19: графики третьих компонент

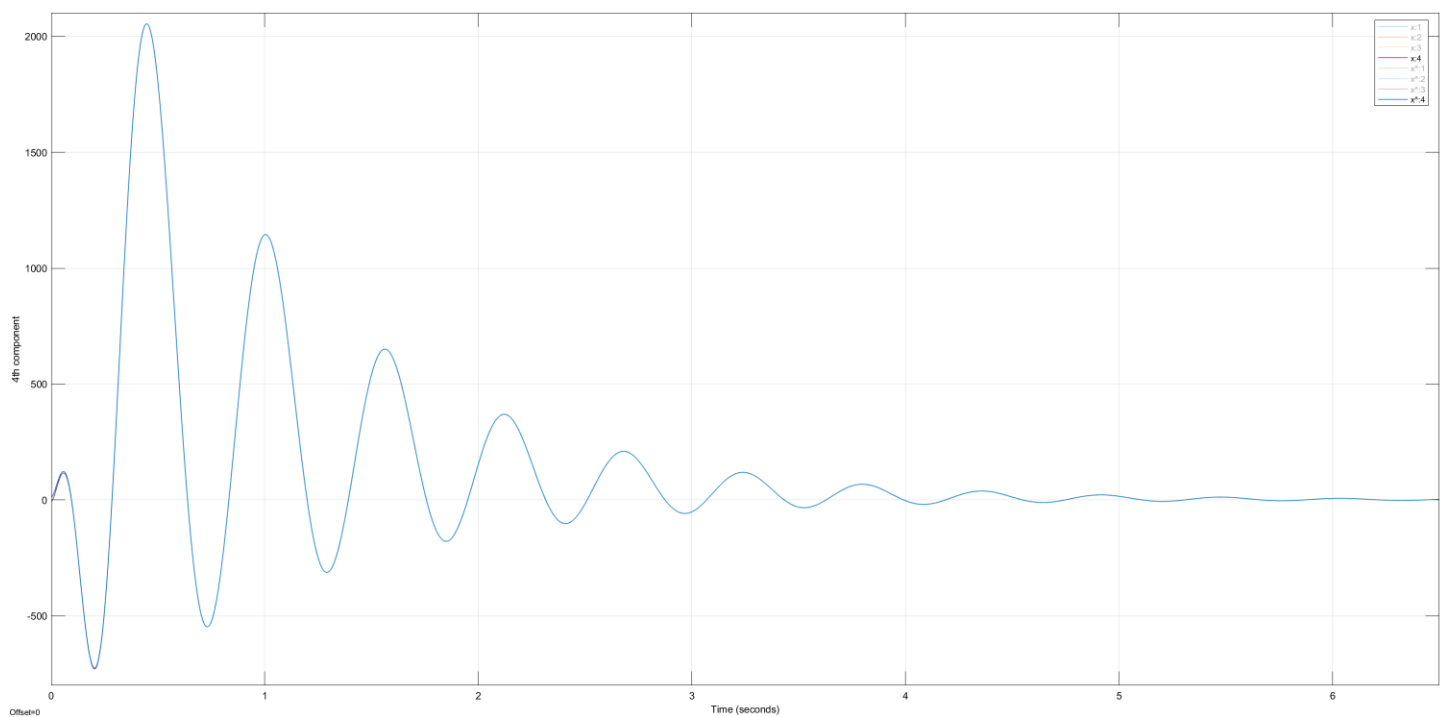


Рисунок 20: графики четвертых компонент

Исходя из графиков, время переходного процесса  $\cong 7$  секунд. Время, за которое оценка вектора состояния совпадает с реальным вектором состояния  $\cong 0.5$  секунд.



### График входного воздействия:

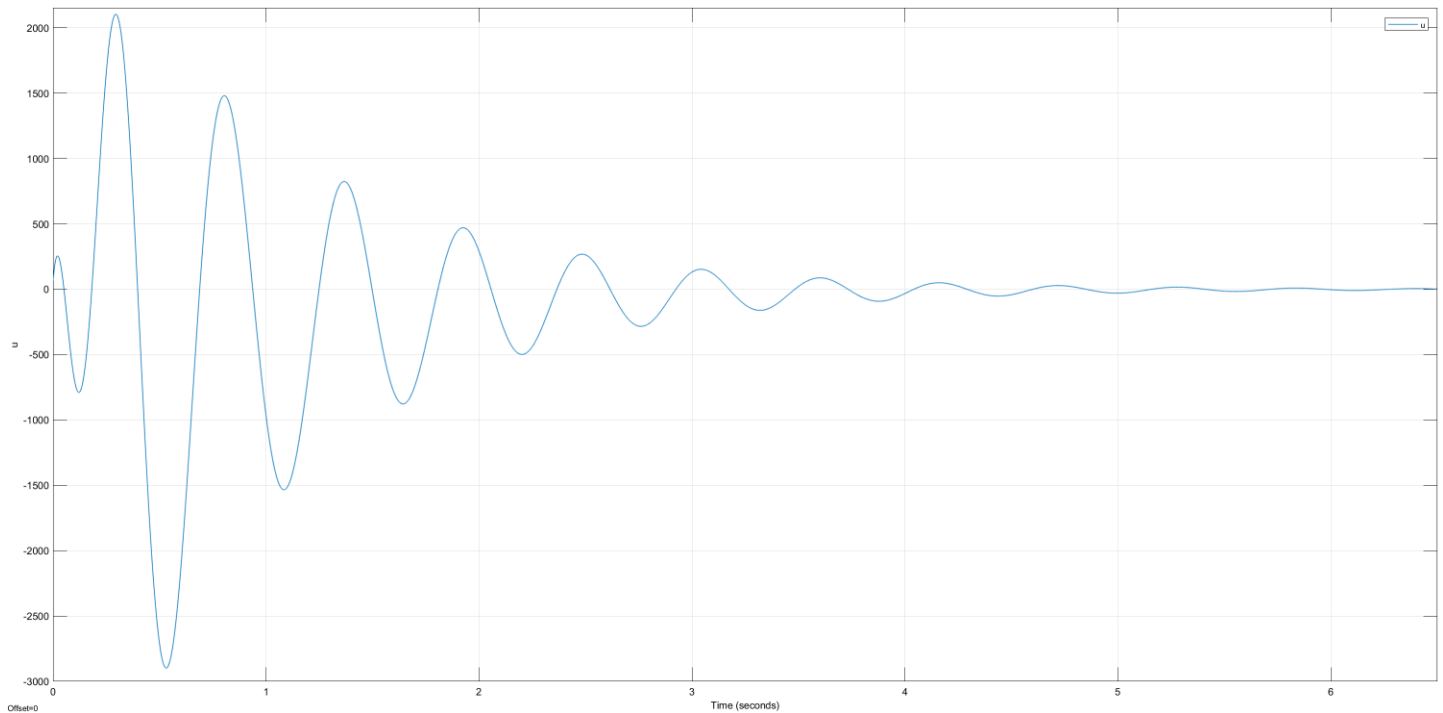


Рисунок 21: входное воздействие

Мы наблюдаем, что входное воздействие превышает найденное нами  $\mu$ , это происходит из-за того, что рассчитанное значение ограничения на входное воздействие соответствует реальному вектору системы  $x(t)$ , а реальное входное воздействие рассчитывается по вектору наблюдателя  $\hat{x}(t)$  и из-за того, что на начальных этапах значение  $\hat{x}(t)$  не совпадает с реальным  $x(t)$  реальное входное воздействие превышает наше ограничение.

### Выводы

В данной лабораторной работе были построены регуляторы и наблюдатели с заданной степенью сходимости с помощью линейных матричных неравенств, была исследована зависимость степени сходимости и матриц наблюдателя и регулятора, и собственных чисел матриц  $A + BK$  и  $A + LC$ . Также был построен регулятор с ограничением на входное управление и исследование минимизация этого ограничения. В конце реализована система с регулятором и наблюдателем с определенными степенями сходимости.