Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №5

«Типовые динамические звенья»

по дисциплине «Теория автоматического управления»

Выполнил: студент гр. R3238,
Кирбаба Д.Д.

Преподаватель: Перегудин А.А.,
ассистент фак. СУиР

Санкт-Петербург 2021

Цель работы

Исследование временных и частотных характеристик элементарных звеньев

Начальные данные

12 вариант

Типы исследуемых звеньев:

- Колебательное

$$\frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

- Дифференцирующее с замедлением

$$\frac{ks}{1 + Ts}$$

- Консервативное

$$\frac{k}{1 + T^2s^2}$$

Параметры:

$$k = 15, T = 0.2, \xi = 0.2$$

Выполнение работы

1. *Исследование колебательного звена*

1.1. Передаточная функция

$$W(s) = \frac{15}{0.04s^2 + 0.08s + 1}$$

Место для уравнения.

1.2. Временные характеристики

1.2.1. Переходная функция (Step response)

$$y_{s.r.}(t) = k\left[1 - e^{-\sigma t}\left(cos\omega t + \frac{\sigma}{\omega} sin\omega t\right)\right] \cdot 1(t)$$

Место для уравнения.

$$\sigma = \frac{\xi}{T} = 1, \qquad \omega = \frac{1}{T}\sqrt{1 - \xi^2} = \frac{1}{0.2}\sqrt{1 - 0.2^2} = 2\sqrt{6}, \qquad k = 15$$

Место для уравнения.

$$y_{s.r.}(t) = 15\left[1 - e^{-t}\left(cos2\sqrt{6}t + \frac{1}{2\sqrt{6}} sin2\sqrt{6}t\right)\right]$$

Место для уравнения.

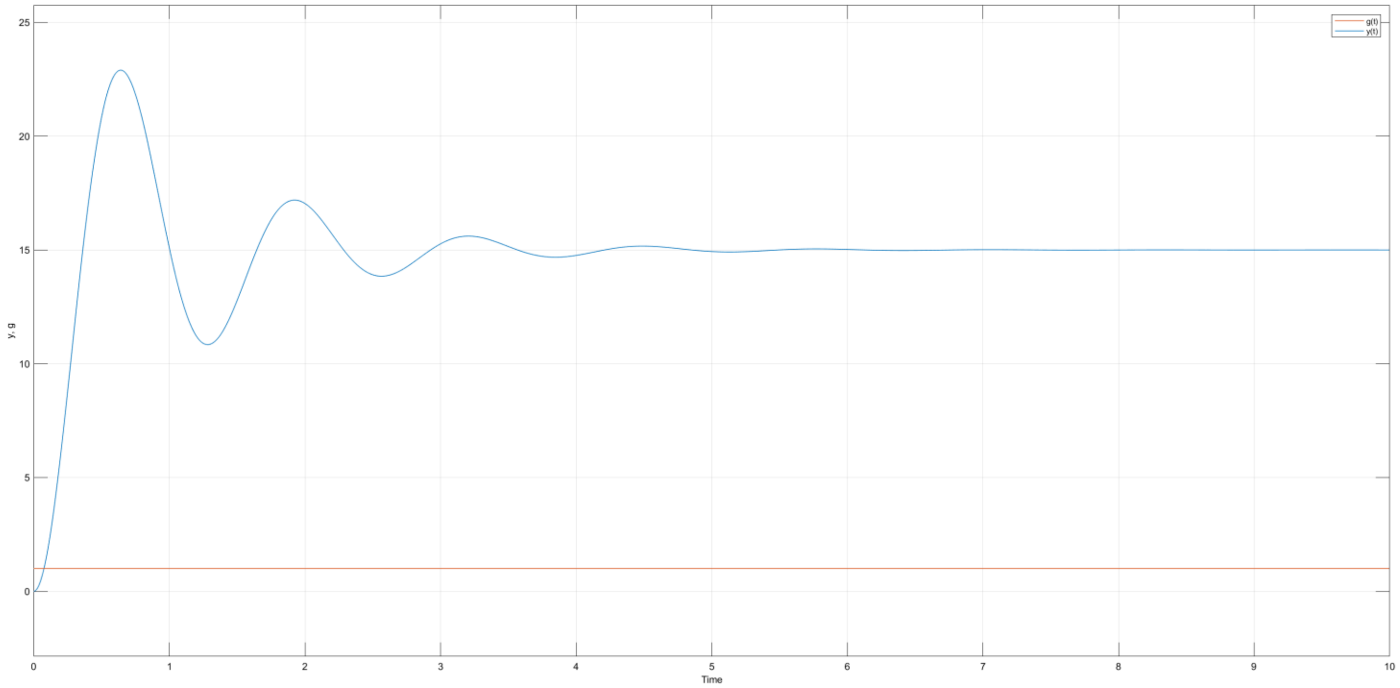

Рисунок 1: график переходной функции колебательного звена

1.2.2. Весовая функция (Impulse response)

Расчет через связь с переходной функцией:

$$y_{i.r.} = \frac{d}{dt} y_{s.r.} = 15\frac{d}{dt}\left[1 - e^{-t}\left(cos2\sqrt{6}t + \frac{1}{2\sqrt{6}}sin2\sqrt{6}t\right)\right] =$$

Место для уравнения.

$$= -15\frac{d}{dt}e^{-t}\left(cos2\sqrt{6}t + \frac{1}{2\sqrt{6}}sin2\sqrt{6}t\right) =$$

$$= -15\left[-e^{-t}\left(cos2\sqrt{6}t + \frac{1}{2\sqrt{6}}sin2\sqrt{6}t\right) + e^{-t}(-2\sqrt{6}sin2\sqrt{6}t + cos2\sqrt{6}t)\right] =$$

Место для уравнения.

$$= -15e^{-t}\left(-cos2\sqrt{6}t - \frac{1}{2\sqrt{6}}sin2\sqrt{6}t - 2\sqrt{6}sin2\sqrt{6}t + cos2\sqrt{6}t\right) =$$

Место для уравнения.

$$= -15e^{-t}sin2\sqrt{6}t\left(-\frac{1}{2\sqrt{6}} - 2\sqrt{6}\right) = \frac{375}{2\sqrt{6}}e^{-t}sin2\sqrt{6}t$$

Место для уравнения.

Расчет с помощью преобразований Лапласа:

$$L\{\delta(t)\} = 1 \Rightarrow y_{i.r.} = L^{-1}\{W(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{15}{0.04s^2 + 0.08s + 1}\right\} =$$

Место для уравнения.

$$= L^{-1}\left\{\frac{15}{0.04s^2 + 0.08s + 1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{375}{(s+1)^2 + 24}\right\} = \frac{375}{2\sqrt{6}}L^{-1}\left\{\frac{2\sqrt{6}}{(s+1)^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2}\right\} =$$

Место для уравнения.

$$= \frac{375}{2\sqrt{6}}e^{-t}\sin 2\sqrt{6}t$$

Место для уравнения.

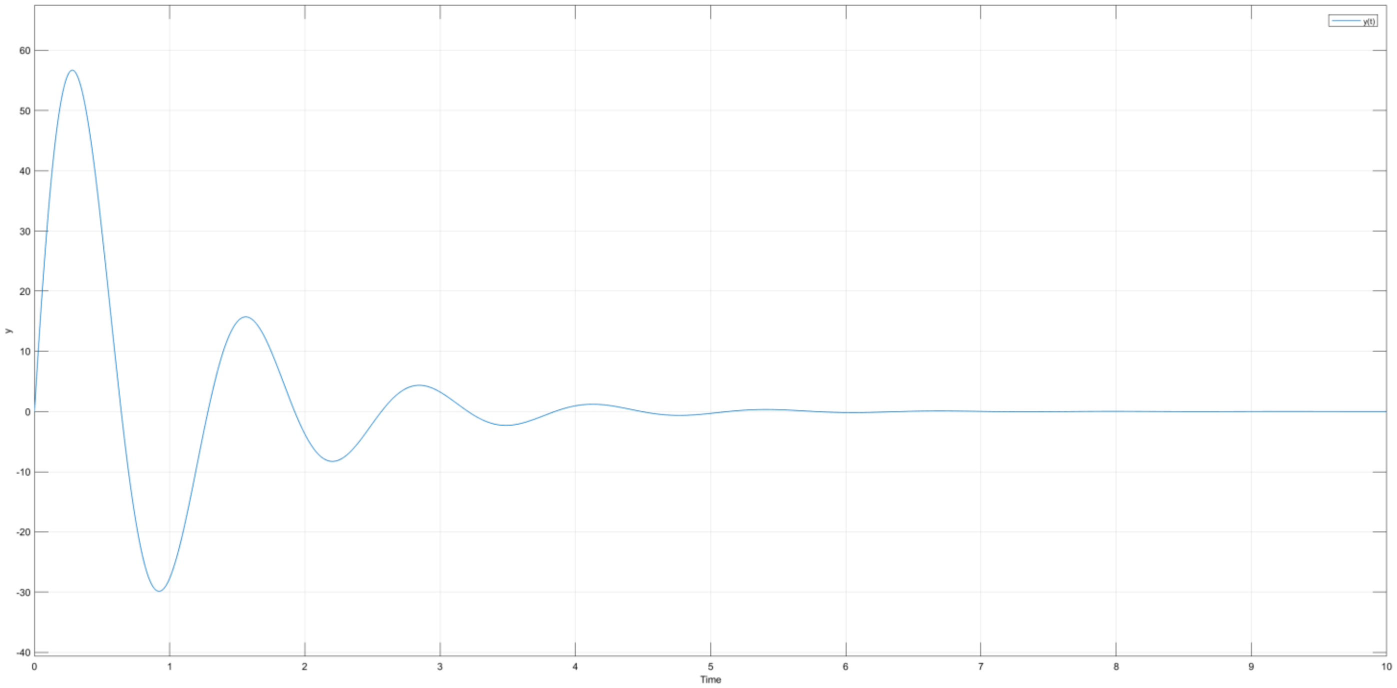

Рисунок 2: график весовой функции колебательного звена

1.3.Частотная передаточная функция

$$W(s)=\frac{15}{0.04(j\omega)^2+0.08j\omega+1}=\frac{15}{-0.04\omega^2+0.08j\omega+1}=$$

Место для уравнения.

$$=\frac{15}{-0.04\omega^2+1+0.08j\omega}\cdot\frac{-0.04\omega^2+1-0.08j\omega}{-0.04\omega^2+1-0.08j\omega}=\frac{15(-0.04\omega^2+1-0.08j\omega)}{(-0.04\omega^2+1)^2+(0.08\omega)^2}=$$

Место для уравнения.

$$=\frac{15-0.6\omega^2}{0.0016\omega^4-0.0736\omega^2+1}+\frac{1.2j\omega}{0.0016\omega^4-0.0736\omega^2+1}$$

Место для уравнения.

$$U(\omega)=\frac{15-0.6\omega^2}{0.0016\omega^4-0.0736\omega^2+1},\qquad V(\omega)=\frac{1.2\omega}{0.0016\omega^4-0.0736\omega^2+1}$$

Место для уравнения.

1.4.Частотные характеристики

1.4.1. Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}=\frac{\sqrt{(15-0.6\omega^2)^2+(1.2\omega)^2}}{0.0016\omega^4-0.0736\omega^2+1}=$$

Место для уравнения.

$$=\frac{\sqrt{0.36\omega^4-16.56\omega^2+225}}{0.0016\omega^4-0.0736\omega^2+1}$$

Место для уравнения.

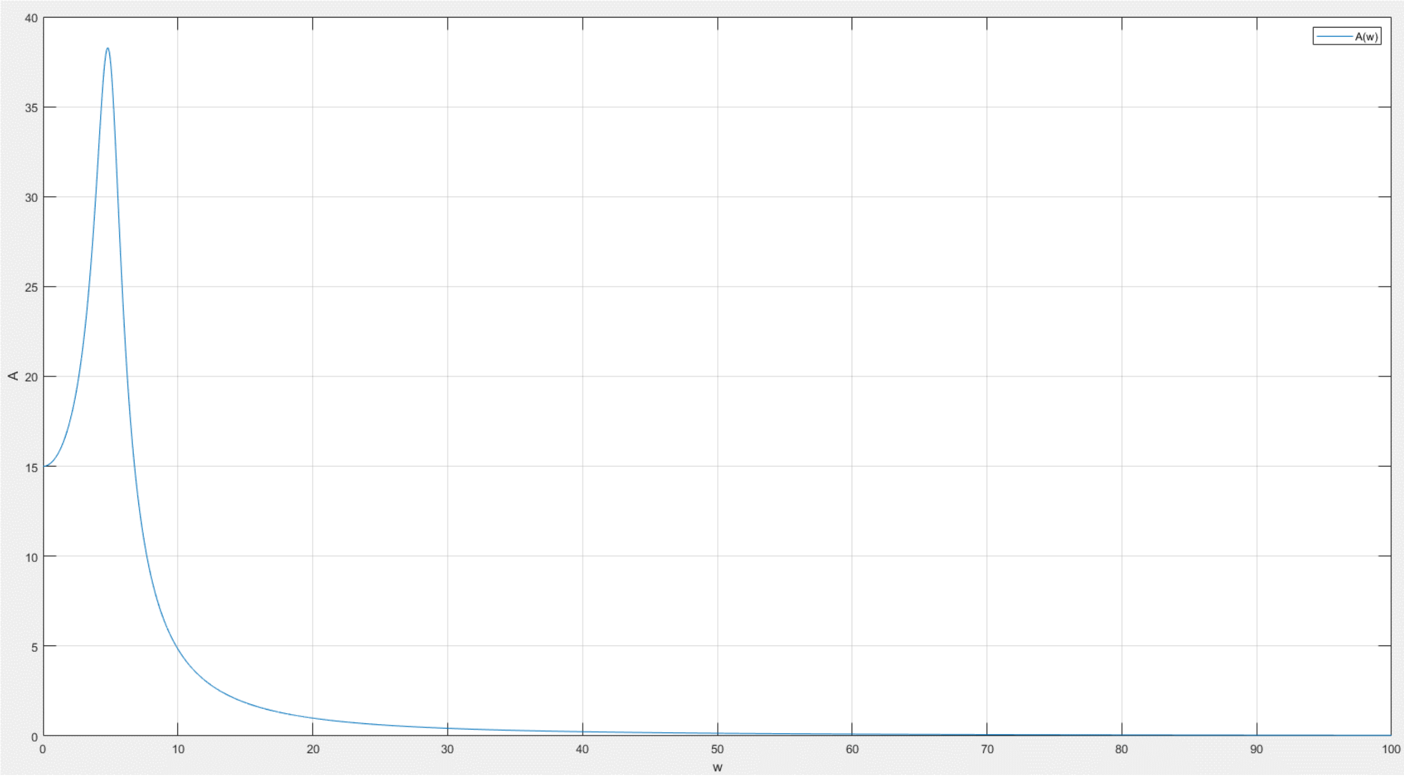

Рисунок 3: график амплитудно-частотной характеристики колебательного звена

1.4.2. Фазово-частотная характеристика

$$\Psi(\omega) = atan2\big(V(\omega), U(\omega)\big) =$$

$$= atan2\left(\frac{1.2\omega}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1}, \frac{15 - 0.6\omega^2}{0.0016\omega^4 - 0.0736\omega^2 + 1}\right)$$

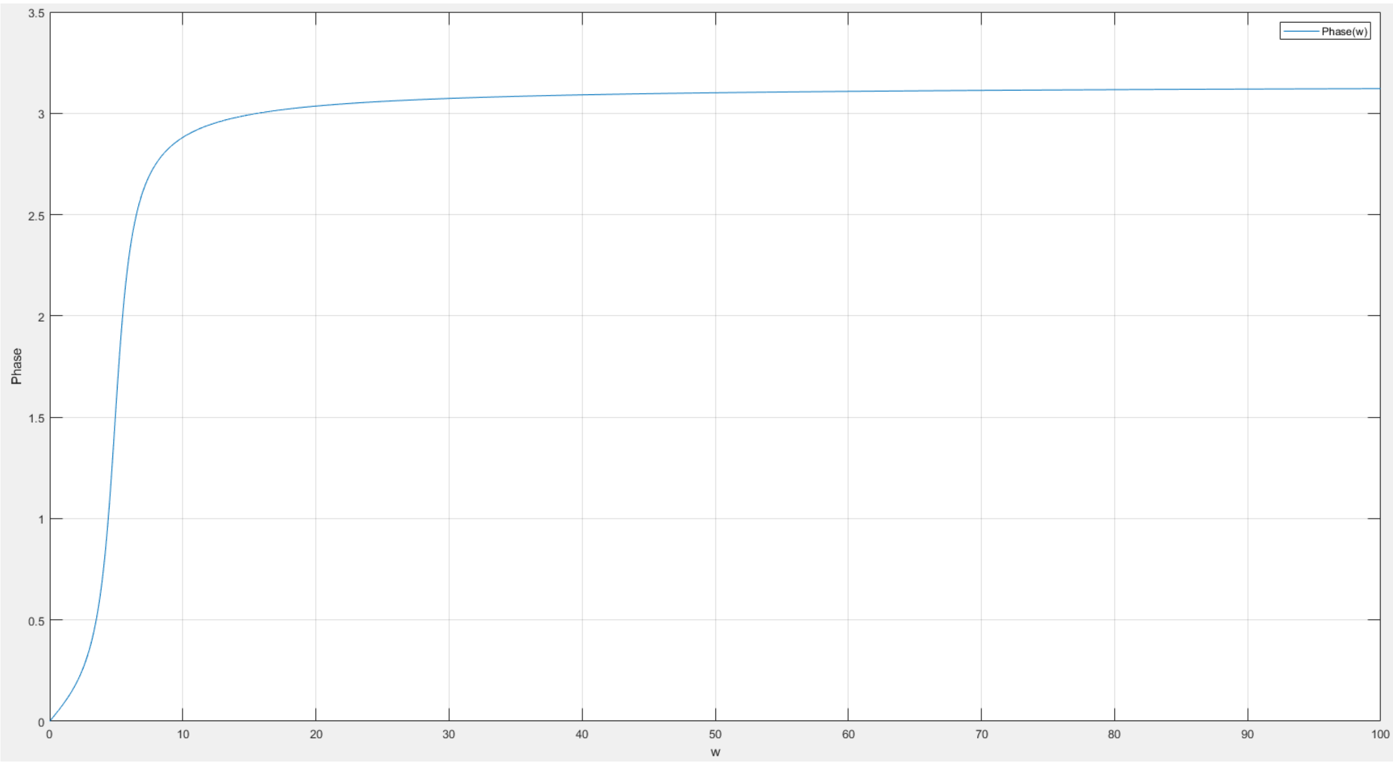

Рисунок 4: график фазово-частотной характеристики колебательного звена

1.4.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$U(\omega)=\frac{15-0.6\omega^2}{0.0016\omega^4-0.0736\omega^2+1},\qquad V(\omega)=\frac{1.2\omega}{0.0016\omega^4-0.0736\omega^2+1}$$

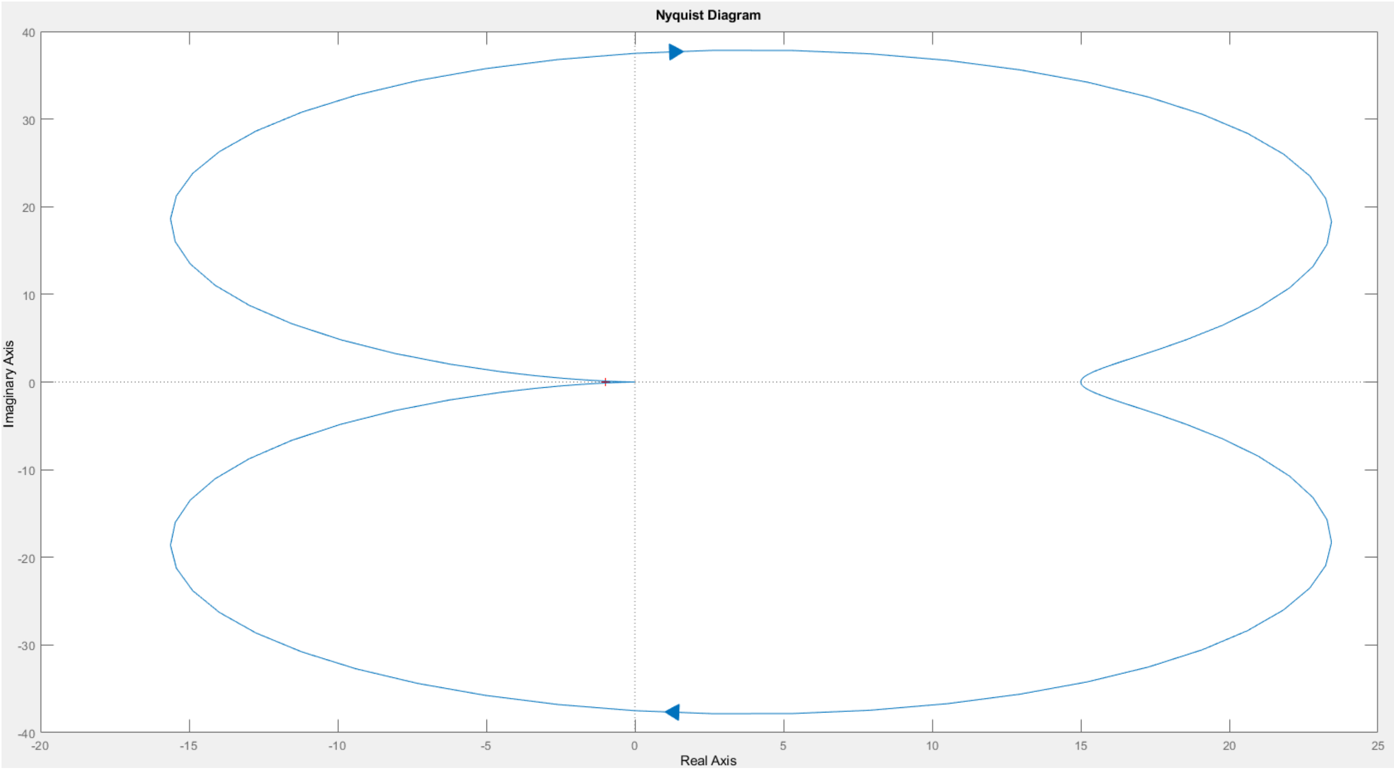

Рисунок 5: график амплитудно-фазовой частотной характеристики колебательного звена

1.4.4. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики

$$\text{ЛАЧХ: } L(\omega)=20lg\frac{\sqrt{0.36\omega^4-16.56\omega^2+225}}{0.0016\omega^4-0.0736\omega^2+1}, \omega \text{ в логарифмическом масштабе}$$

$$\text{ЛФЧХ: } \Psi(\omega)=atan2\left(\frac{1.2\omega}{0.0016\omega^4-0.0736\omega^2+1},\frac{15-0.6\omega^2}{0.0016\omega^4-0.0736\omega^2+1}\right),$$

ω в логарифмическом масштабе

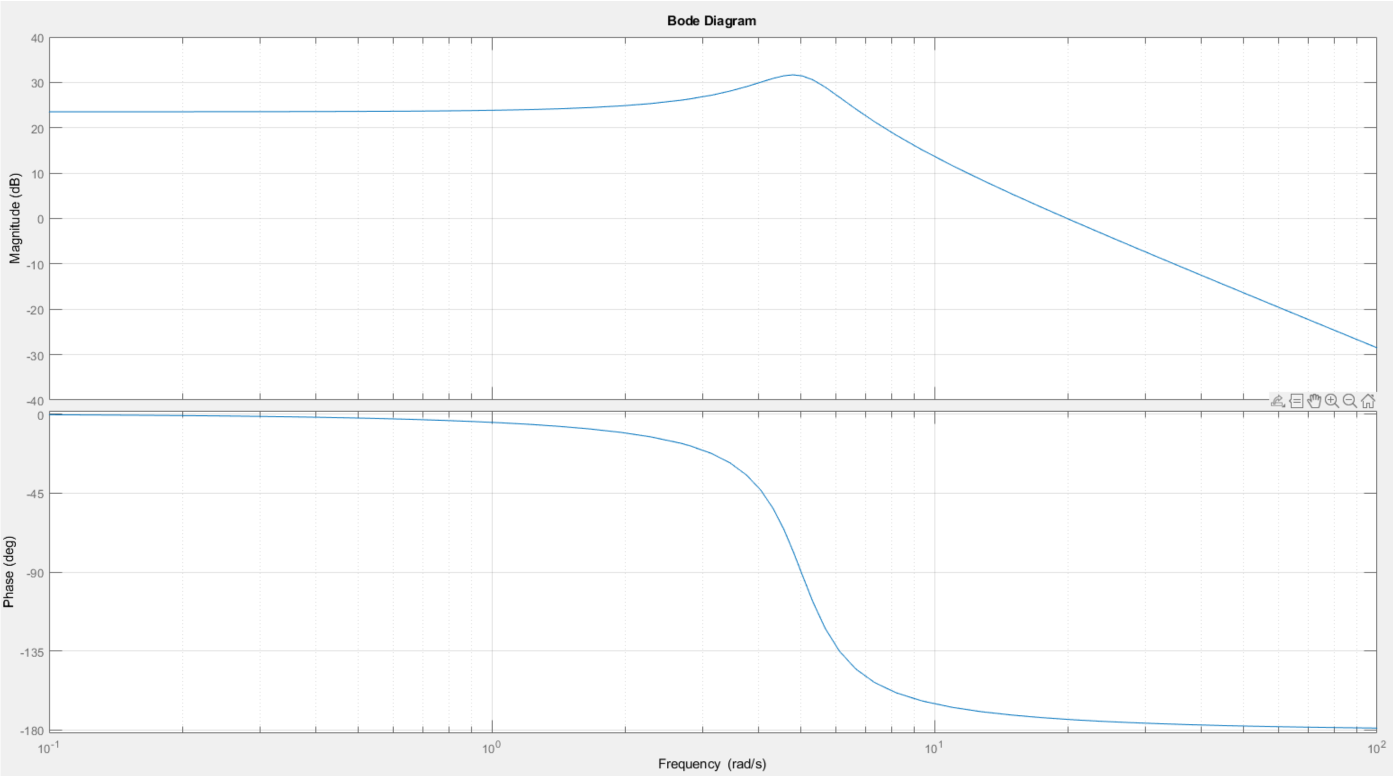

Рисунок 6: графики логарифмических амплитудной и фазовой частотных характеристик колебательного звена

2. *Исследование дифференцирующего звена с замедлением*

2.1. Передаточная функция

$$W(s) = \frac{15s}{0.2s + 1}$$

Место для уравнения.

2.2. Временные характеристики

2.2.1. Переходная функция (Step response)

$$y_{s.r.}(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$$

Место для уравнения.

$$T = 0.2, \qquad k = 15$$

Место для уравнения.

$$y_{s.r.}(t) = 75e^{-5t}$$

Место для уравнения.

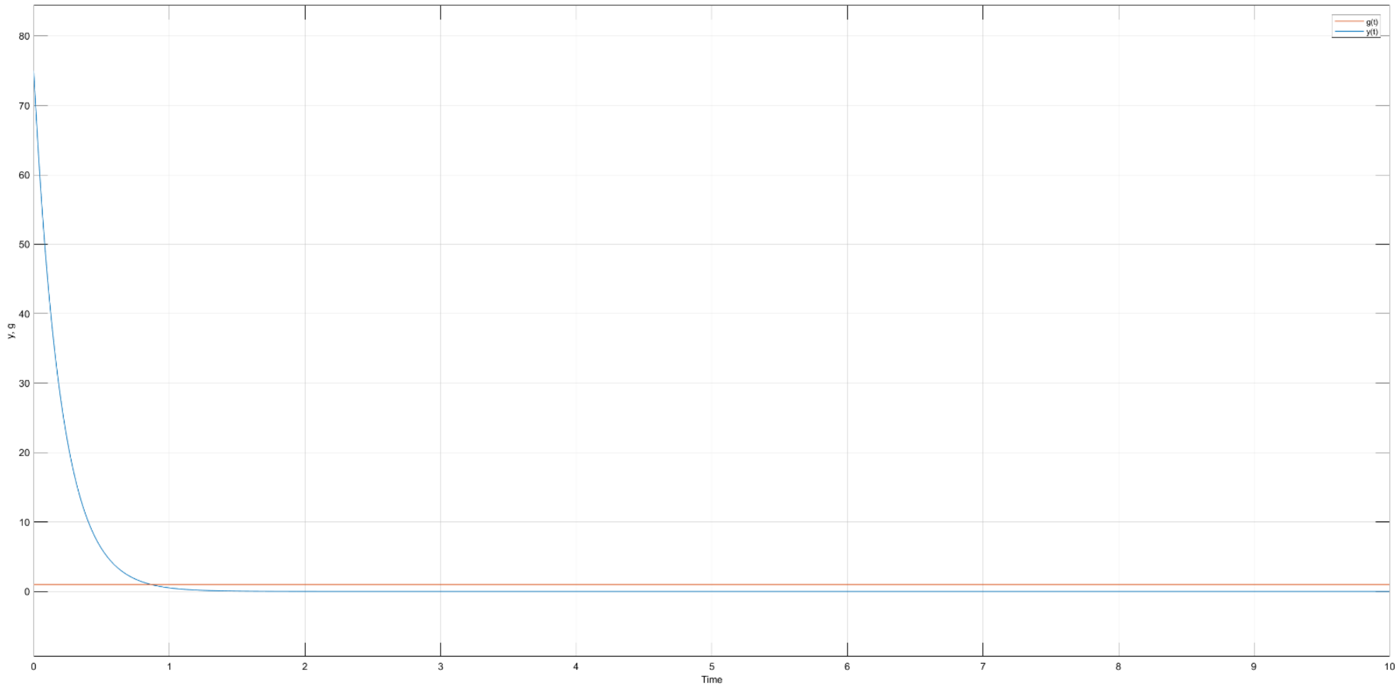

Рисунок 7: график переходной функции дифференцирующего звена с замедлением

2.2.2. Весовая функция (Impulse response)

Расчет через связь с переходной функцией:

$$y_{i.r.} = \frac{d}{dt} y_{s.r.} = 75 \frac{d}{dt}(e^{-5t}) = -375e^{-5t}$$

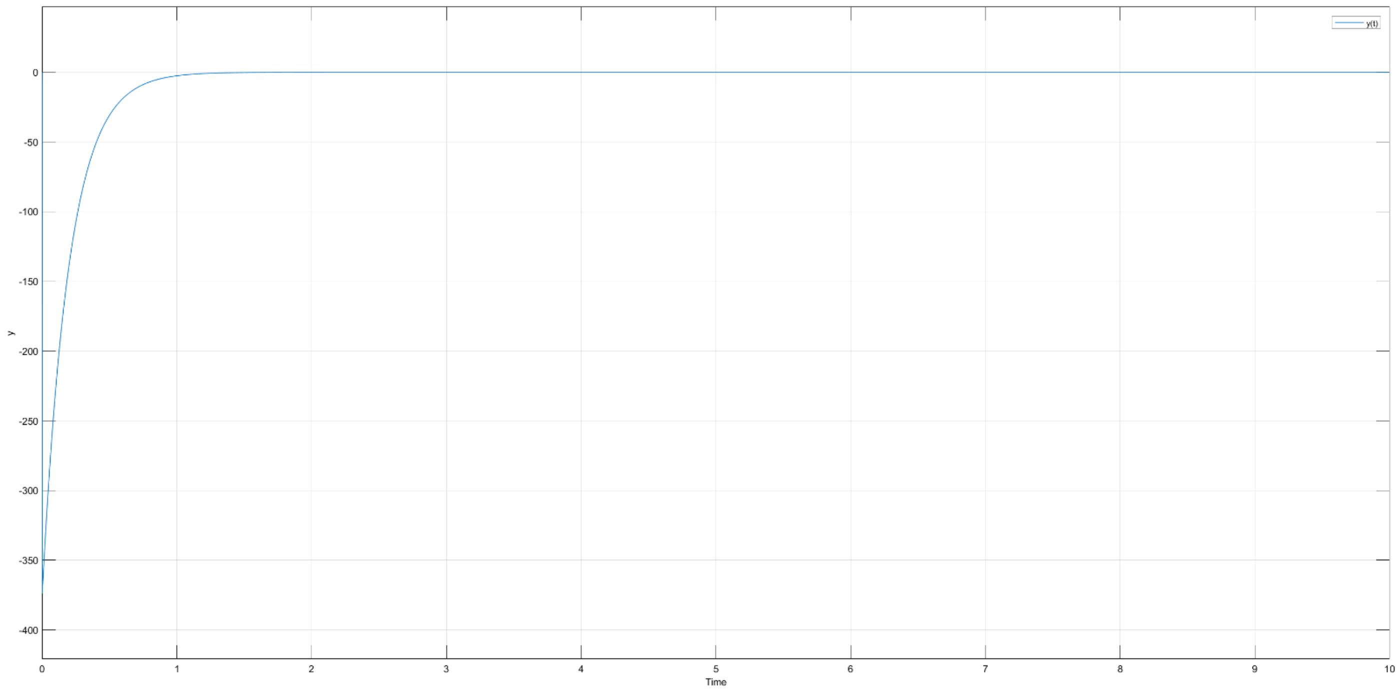

Рисунок 8: график весовой функции дифференцирующего звена с замедлением

2.3. Частотная передаточная функция

$$W(s) = \frac{15}{0.2j\omega + 1} = \frac{15}{0.2j\omega + 1} \cdot \frac{0.2j\omega - 1}{0.2j\omega - 1} =$$

Место для уравнения.

$$= \frac{15 - 3j\omega}{0.04\omega^2 + 1} = \frac{15}{0.04\omega^2 + 1} - \frac{3j\omega}{0.04\omega^2 + 1}$$

Место для уравнения.

$$U(\omega) = \frac{15}{0.04\omega^2 + 1}, \qquad V(\omega) = -\frac{3\omega}{0.04\omega^2 + 1}$$
Место для уравнения.

2.4. Частотные характеристики

2.4.1. Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{\sqrt{225 + 9\omega^2}}{0.04\omega^2 + 1}$$
Место для уравнения.

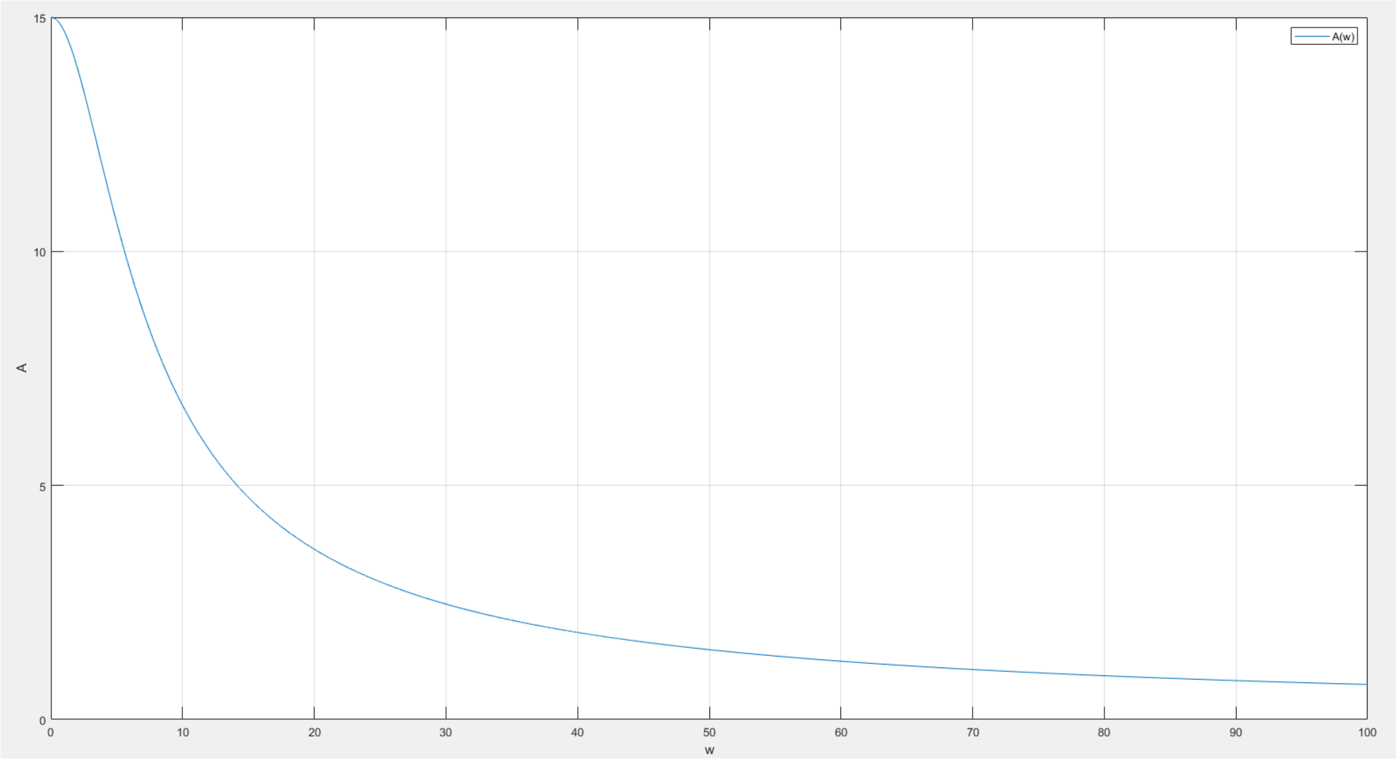

Рисунок 9: график амплитудно-частотной характеристики дифференцирующего звена с замедлением

2.4.2. Фазово-частотная характеристика

$$\Psi(\omega) = atan2\big(V(\omega), U(\omega)\big) =$$

$$= atan2(-\frac{3\omega}{0.04\omega^2 + 1}, \frac{15}{0.04\omega^2 + 1})$$

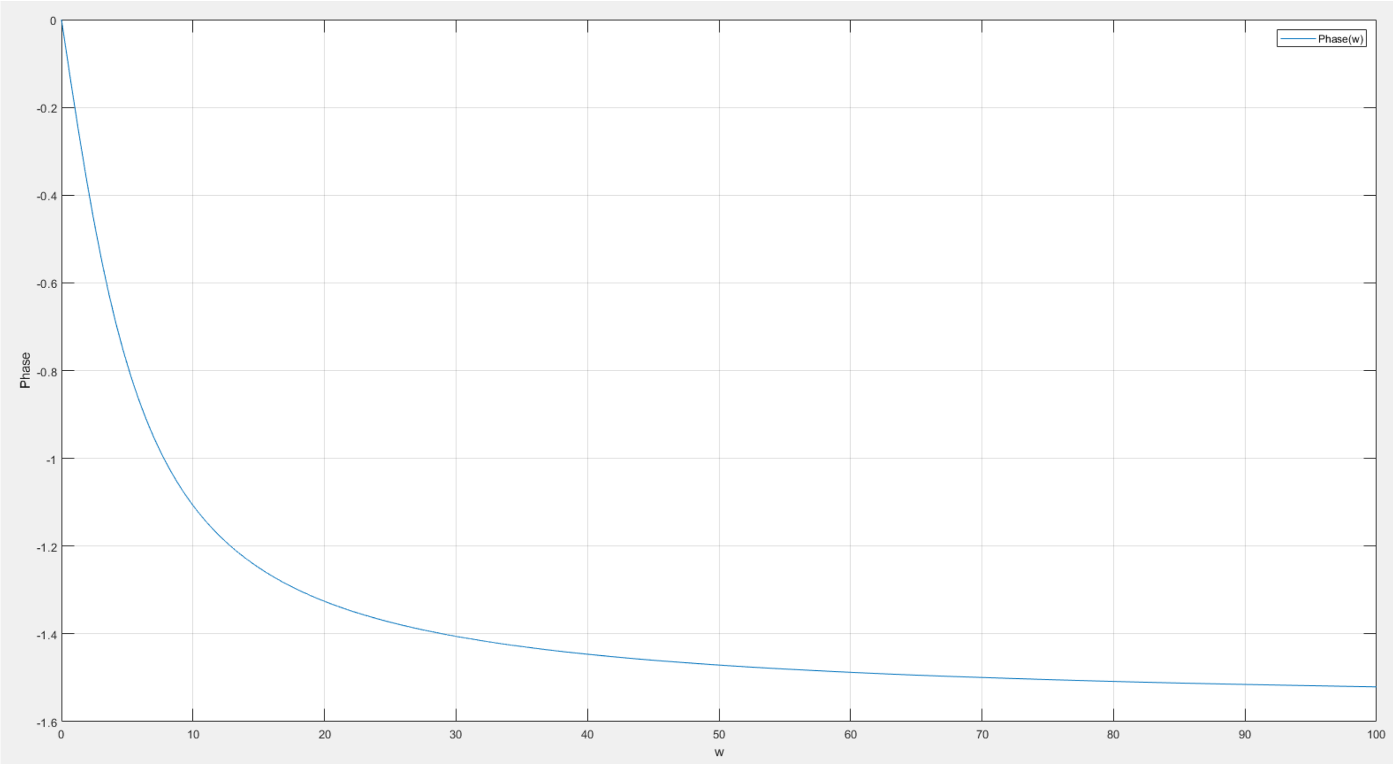

Рисунок 10: график фазово-частотной характеристики дифференцирующего звена с замедлением

2.4.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$U(\omega) = \frac{15}{0.04\omega^2 + 1}, \qquad V(\omega) = -\frac{3\omega}{0.04\omega^2 + 1}$$

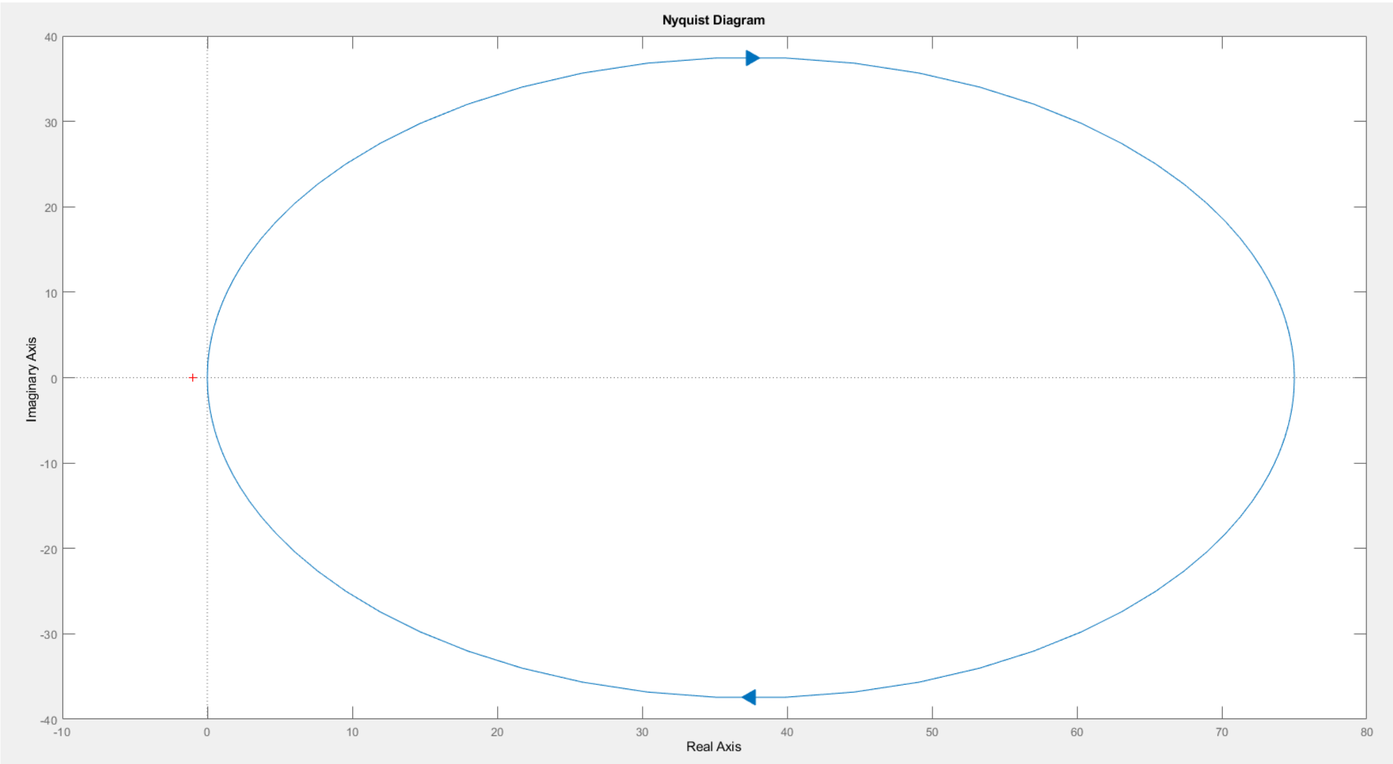

Рисунок 11: график амплитудно-фазовой частотной характеристики дифференцирующего звена с замедлением

2.4.4. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики

ЛАЧХ: $L(\omega) = 20lg\frac{\sqrt{225 + 9\omega^2}}{0.04\omega^2 + 1}$, ω в логарифмическом масштабе

$$ЛФЧХ: \Psi(\omega) = atan2(-\frac{3\omega}{0.04\omega^2+1}, \frac{15}{0.04\omega^2+1}), \omega \text{ в логарифмическом масштабе}$$

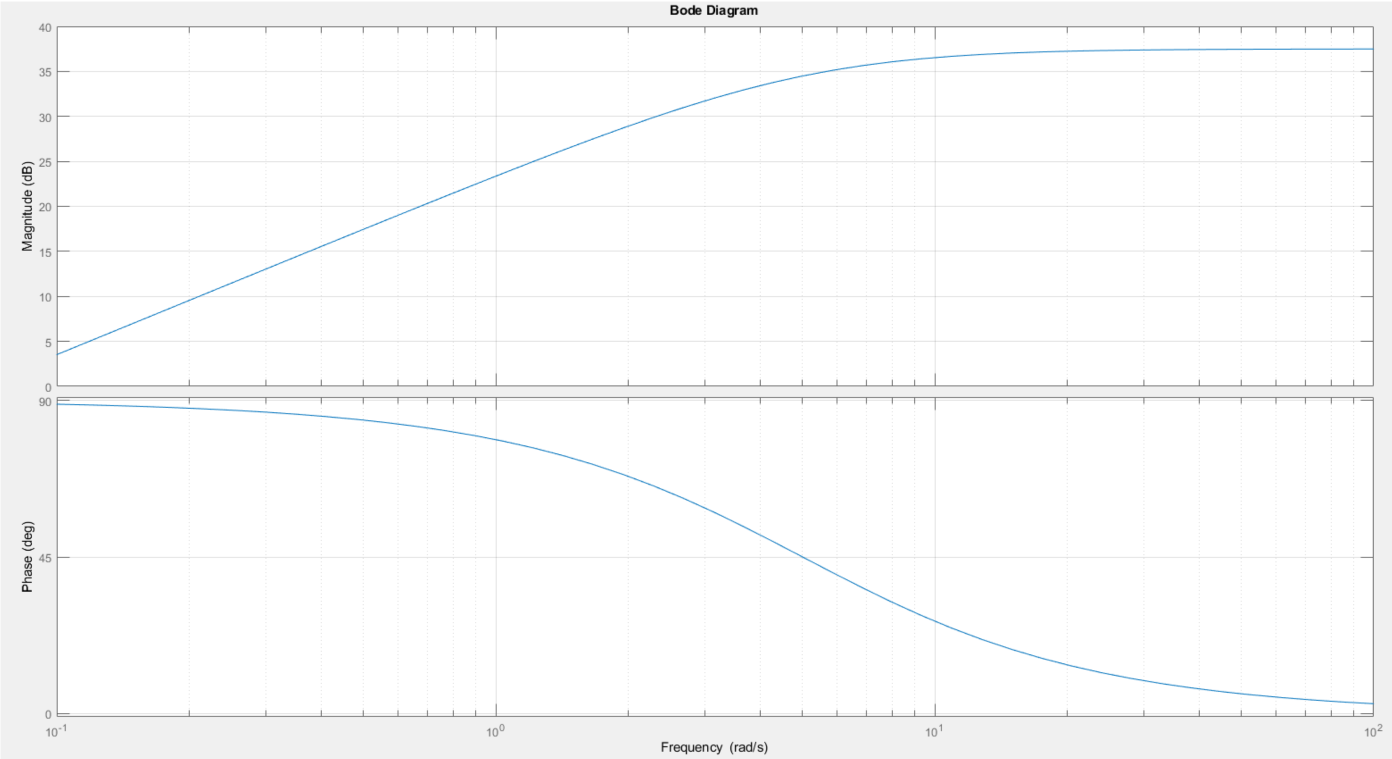

Рисунок 12: графики логарифмических амплитудной и фазовой частотных характеристик дифференцирующего звена с замедлением

3. *Исследование консервативного звена*

3.1. Передаточная функция

$$W(s) = \frac{15}{0.04s^2+1}$$

Место для уравнения.

3.2. Временные характеристики

3.2.1. Переходная функция (Step response)

$$y_{s.r.}(t) = k(1 - cos\omega t) \cdot 1(t)$$

Место для уравнения.

$$\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.2} = 5, \qquad k = 15$$

Место для уравнения.

$$y_{s.r.}(t) = 15(1 - cos5t)$$

Место для уравнения.

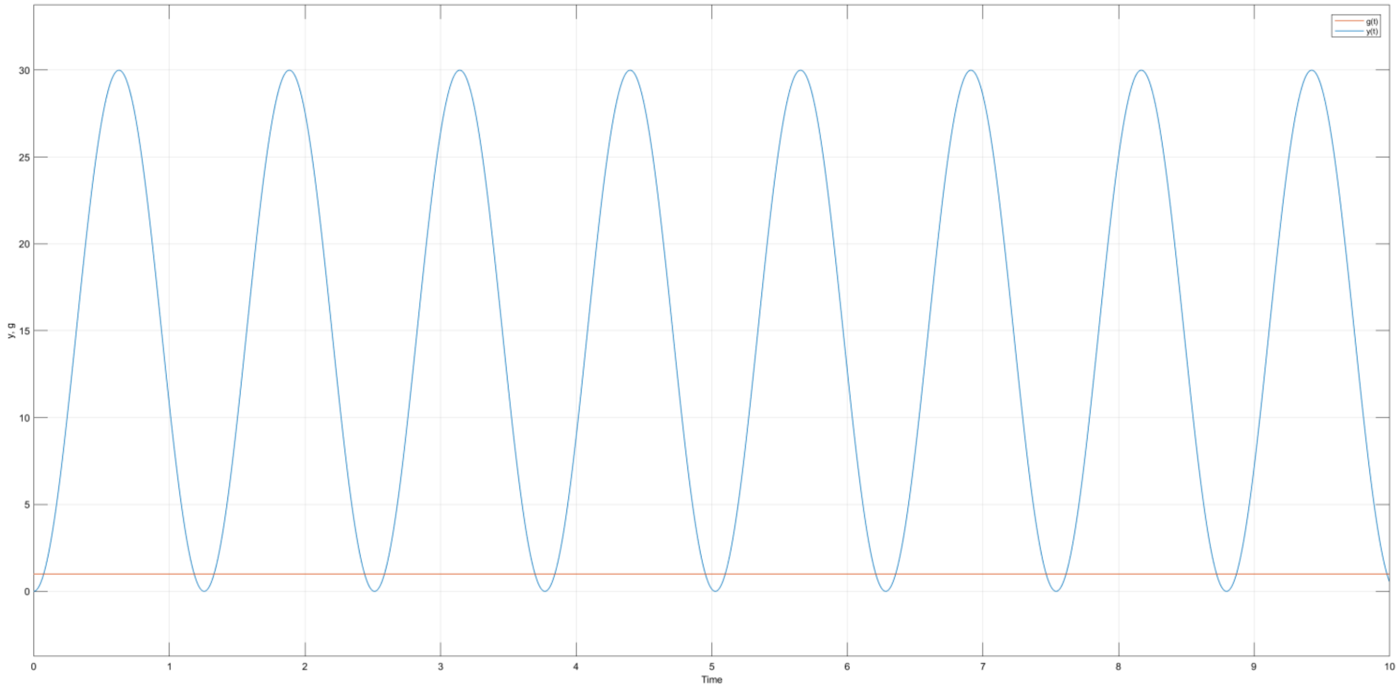

Рисунок 13: график переходной функции консервативного звена

3.2.2. Весовая функция (Impulse response)

Расчет через связь с переходной функцией:

$$y_{i.r.} = \frac{d}{dt} y_{s.r.} = 15\frac{d}{dt}(1 - cos5t) = 75\text{sin5t}$$

Место для уравнения.

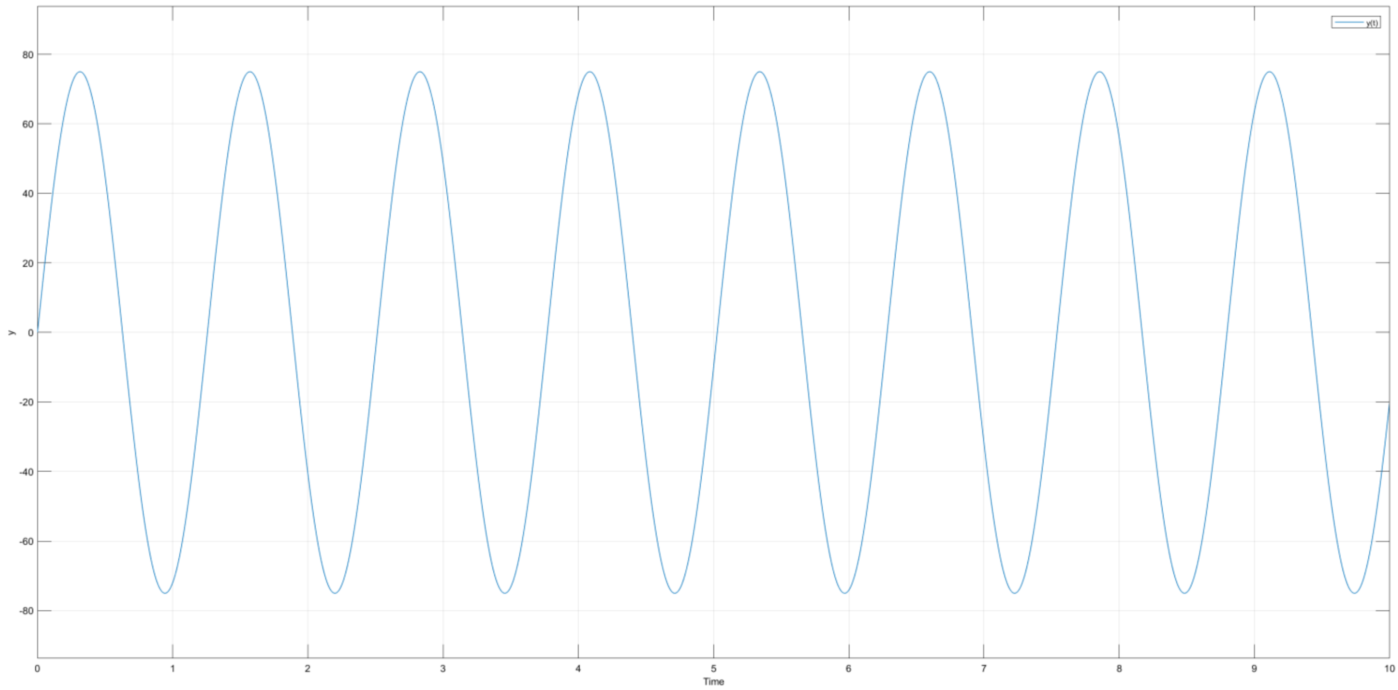

Рисунок 14: график весовой функции консервативного звена

3.3. Частотная передаточная функция

$$W(s) = \frac{15}{0.04(j\omega)^2 + 1} = \frac{15}{-0.04\omega^2 + 1}$$

Место для уравнения.

$$U(\omega) = \frac{15}{-0.04\omega^2 + 1}, \qquad V(\omega) = 0$$

Место для уравнения.

3.4. Частотные характеристики

3.4.1. Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \left|\frac{15}{-0.04\omega^2 + 1}\right|$$

Место для уравнения.

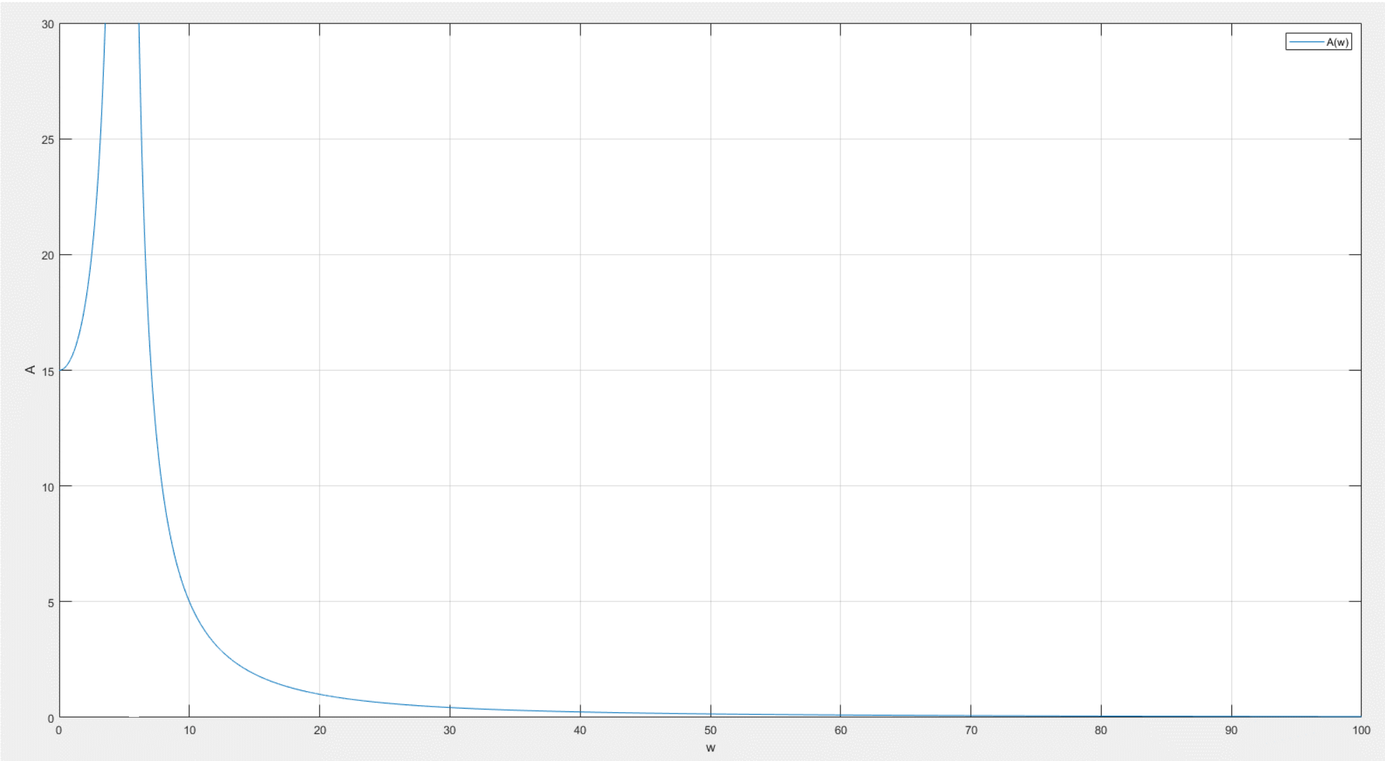

Рисунок 15: график амплитудно-частотной характеристики консервативного звена

3.4.2. Фазово-частотная характеристика

$$\Psi(\omega) = atan2\big(V(\omega), U(\omega)\big) =$$

$$= atan2(0, \frac{15}{-0.04\omega^2 + 1})$$

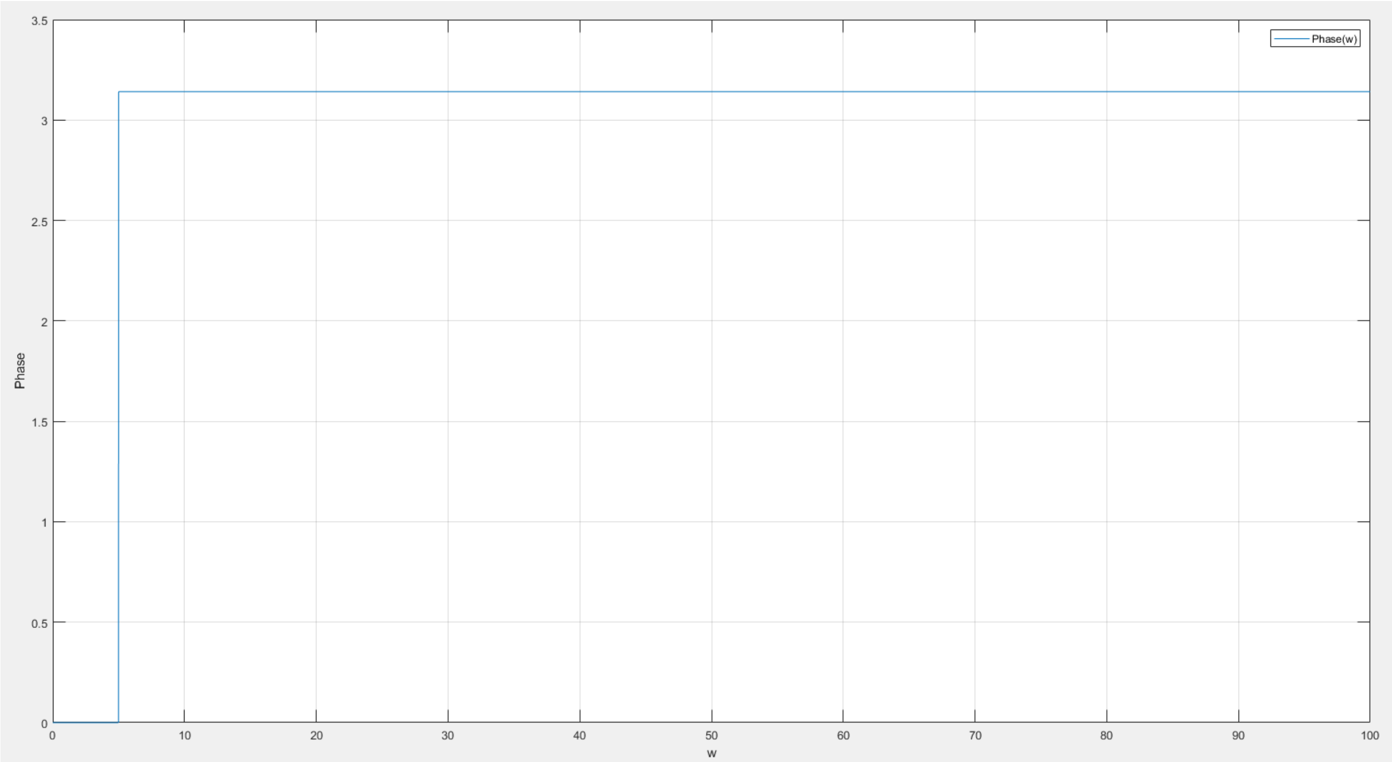

Рисунок 16: график фазово-частотной характеристики консервативного звена

3.4.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$U(\omega) = \frac{15}{-0.04\omega^2 + 1}, \qquad V(\omega) = 0$$

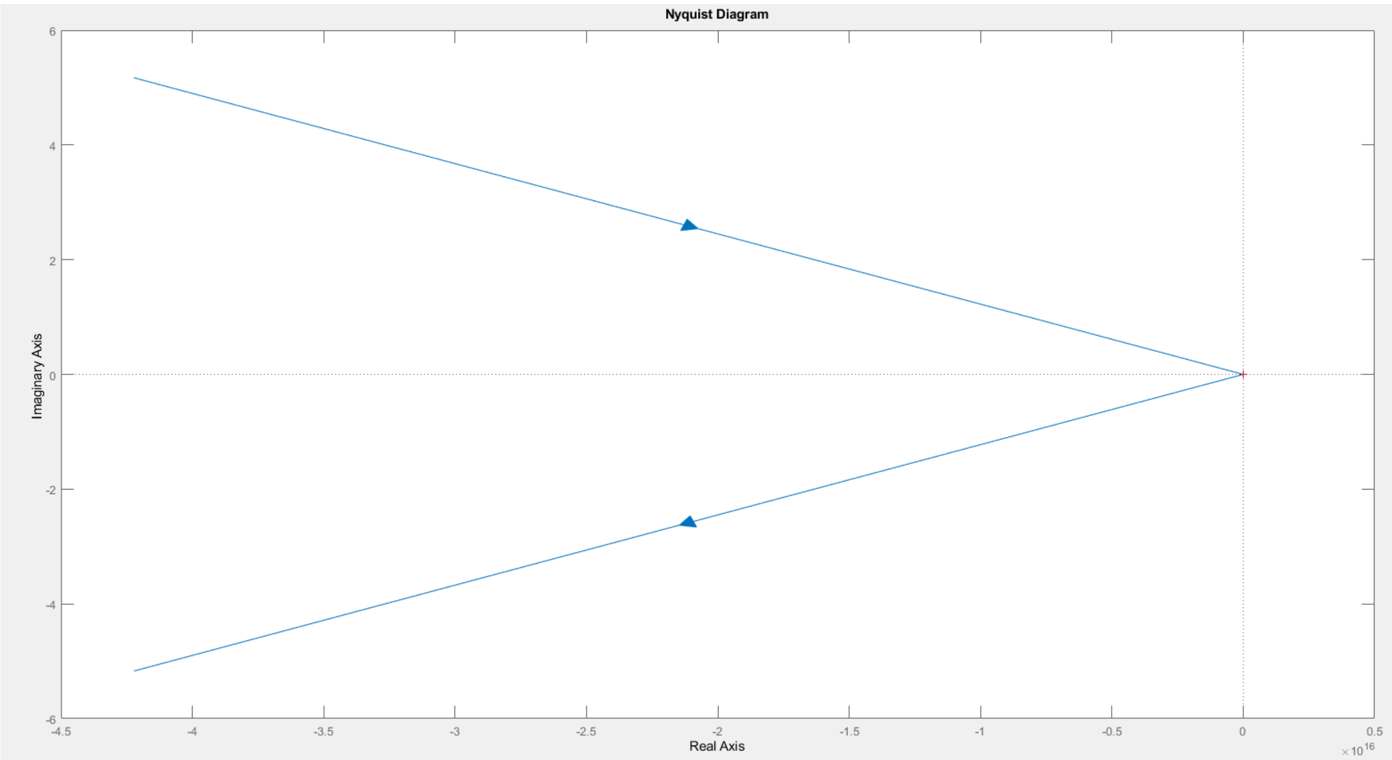

Рисунок 17: график амплитудно-фазовой частотной характеристики консервативного звена

3.4.4. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики

$$\text{ЛАЧХ: } L(\omega) = 20lg\frac{15}{-0.04\omega^2 + 1}, \omega \text{ в логарифмическом масштабе}$$

$$\text{ЛФЧХ: } \Psi(\omega) = atan2(0, \frac{15}{-0.04\omega^2 + 1}), \omega \text{ в логарифмическом масштабе}$$

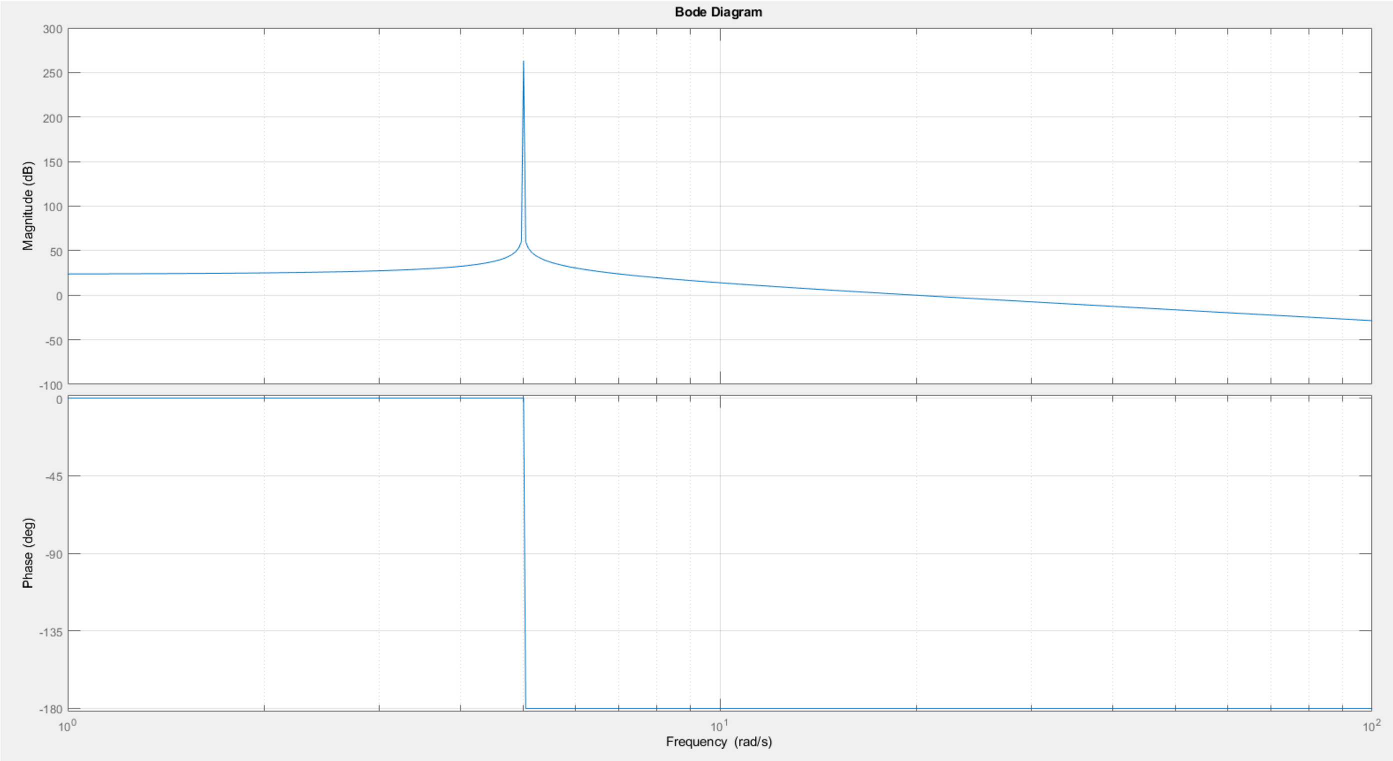

Рисунок 18: графики логарифмических амплитудной и фазовой частотных характеристик консервативного звена

Выводы

В данной лабораторной работе были исследованы три типа звеньев, построены их временные характеристики (весовая и переходная функции), частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ, АФЧХ, ЛАФЧХ).

1. Дифференцирующее звено с замедлением (апериодическое звено 1 порядка с замедлением) – имеет вещественный корень характеристического уравнения.
2. Консервативное звено – имеет чисто мнимые корни характеристического уравнения. АЧХ консервативного звена имеет разрыв $\omega = 5$ – это так называемый резонанс системы (его крайний случай), однако в реальной жизни амплитуда системы не может увеличиваться до бесконечности (часть механической энергии должна переходить в тепловую) и любые колебания затухают.
3. Колебательное звено – имеет комплексные корни характеристического уравнения. АЧХ колебательного звена также имеет резонанс при $\omega = 5$, а это означает что при данной частоте система будет колебаться с наибольшей амплитудой.