ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

Цель работы. Исследование временных и частотных характеристик элементарных звеньев.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны получить от преподавателя вариант задания и файл с математическими моделями элементарных звеньев. Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

Теоретические сведения. Типовыми динамическими звеньями называются простейшие составные части системы, поведение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями 0-2-го порядка:

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_1 \dot{g} + b_0 g, \qquad (5.1)$$

где $g = g(t)$ - входная переменная звена, $y = y(t)$ -выходная переменная; a_i, b_i- постоянные коэффициенты (параметры). С использованием оператора дифференцирования $s=d/dt$ уравнение (5.1) запишется в виде

$$a_2 s^2 y + a_1 sy + a_0 y = b_1 sg + b_0 g$$

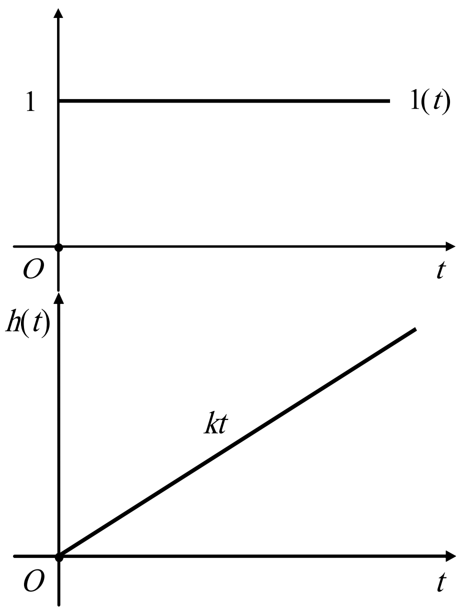
или

$$y = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \cdot g = W(s) \cdot g,$$

где $W(s)$-передаточная функция звена (5.1).

Переходным процессом называется изменение во времени переменных (сигналов) динамической системы или звена: $y = y(t)$, $\dot{y} = \dot{y}(t)$, обусловленное начальными условиями или входным воздействием.

Переходной функцией системы или звена $y=h(t)$ называется переходный процесс выходной переменной при единичном входном воздействии $g=1(t)$ и нулевых начальных условиях. По графику переходной функции может быть определена математическая модель исследуемого динамического звена и ее параметры.



Интегрирующее звено (*интегратор*) описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{y} = k \cdot g \text{ или } y = \frac{k}{s} \cdot g,$$

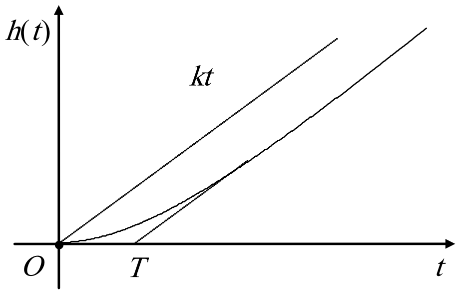
где k- коэффициент усиления, а его переходная функция $h(t) = k \cdot t \cdot 1(t)$.

Интегрирующее звено с замедлением описывается дифференциальным уравнением:

$$T\ddot{y} + \dot{y} = kg \text{ или } y = \frac{k}{s(Ts+1)} \cdot g$$

где T- постоянная времени, а его переходная функция

$$h(t) = k \cdot [t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}})] \cdot 1(t).$$

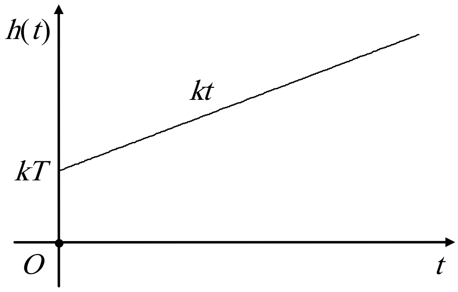


Изодромное звено описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{y} = k(Tg + g) \text{ или } y = \frac{k(Ts+1)}{s} \cdot g,$$

а его переходная функция -

$$h(t) = k \cdot (t + T) \cdot 1(t).$$

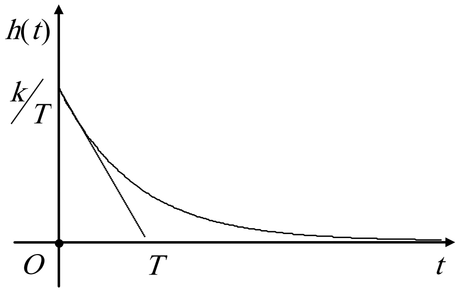


Реальное дифференцирующее звено описывается дифференциальным уравнением

$$Ty + y = k\dot{g} \text{ или } y = \frac{ks}{Ts+1} \cdot g$$

а его переходная функция -

$$h(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t).$$

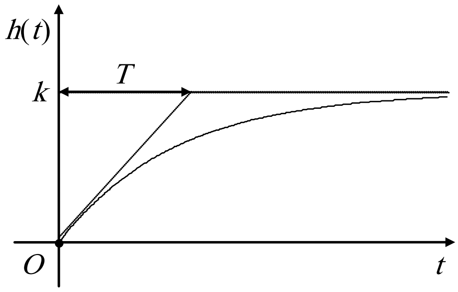


Апериодическое звено 1-*го порядка* описывается дифференциальным уравнением:

$$Ty + y = k \cdot g \text{ или } y = \frac{k}{Ts+1} \cdot g,$$

а его переходная функция -

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t).$$



Апериодическое звено 2-*го порядка* описывается дифференциальным уравнением:

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = k \cdot g \text{ или } y = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} \cdot g,$$

где T_1, T_2 - постоянные времени, причем $T_1 > 2T_2$. При этом корни характеристического уравнения $T_2^2 s^2 + T_1 s + 1 = 0$ будут вещественными и отрицательными.

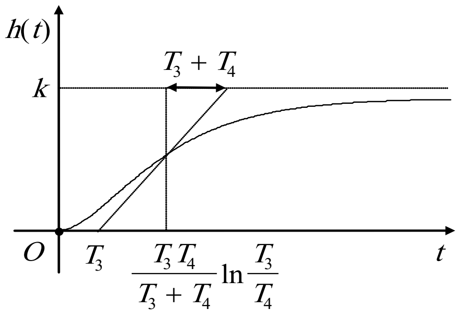
Знаменатель передаточной функции апериодического звена 2-го порядка разлагается на множители:

$$y = \frac{k}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)} \cdot g,$$

где $T_3 = \frac{T_1}{2} + \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$, $T_4 = \frac{T_1}{2} - \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$

Апериодическое звено второго порядка эквивалентно двум звеньям первого порядка, включенным последовательно друг за другом, с общим коэффициентом усиления k и постоянными времени T_3, T_4. Его переходная функция имеет вид

$$h(t) = k\left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}}\right) \cdot 1(t).$$



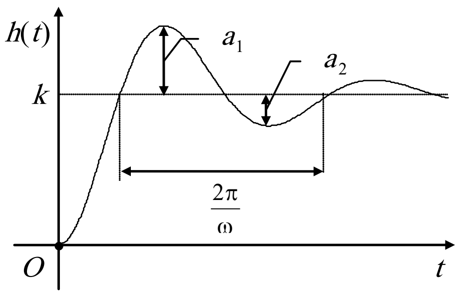
Колебательное звено описывается тем же дифференциальным уравнением, что и апериодическое звено второго порядка. Однако корни характеристического уравнения $T_2^2 s^2 + T_1 s + 1 = 0$ должны быть комплексными, что будет выполняться при $T_1 < 2T_2$.

Передаточная функция колебательного звена обычно представляется в виде

$$y = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \cdot g,$$

где $2\pi T$- период свободных колебаний при отсутствии затухания, ζ - параметр затухания, лежащий в пределах $0 < \zeta < 1$. Переходную функцию данного звена можно представить в виде

$$h(t) = k[1 - e^{-\sigma t}(\cos\omega t + \frac{\sigma}{\omega}\sin\omega t)] \cdot 1(t),$$



где $\sigma = \zeta / T$, $\omega = \frac{1}{T}\sqrt{1-\zeta^2}$. Параметр ω легко определяется по графику переходной функции, а параметр σ находится посредством выражения

$$\sigma = \frac{\omega}{\pi}\ln\frac{a_1}{a_2}.$$

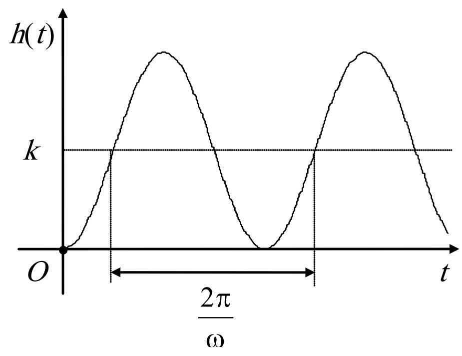
Консервативное звено является частным случаем колебательного звена при $\zeta = 0$. Тогда корни характеристического уравнения $T^2 s^2 + 1 = 0$ будут чисто мнимые. Передаточная функция колебательного звена имеет вид

$$y = \frac{k}{T^2 s^2 + 1} \cdot g,$$

а его переходная функция -

$$h(t) = k(1 - \cos\omega t) \cdot 1(t),$$

где $\omega = \frac{1}{T}$.



Импульсной переходной или *весовой функцией (функцией веса)* $y = w(t)$, называют функцию, описывающую реакцию системы (звена) на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях. Математически единичная импульсная функция описывается *дельта-функцией*:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}1(t),$$

или импульс бесконечно большой амплитуды и бесконечно малой длительности, удовлетворяющий условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Учитывая определение дельта-функции, получим связь весовой и переходной функций:

$$w(t) = \frac{d}{dt}h(t).$$

Переходную и импульсную переходную функции называют *временными функциями (временными характеристиками)*.

Если на вход устойчивого линейного звена с передаточной функцией $W(s)$ подается гармонический сигнал $g(t) = g_m \sin\omega t$, где ω — угловая частота, а g_m — амплитуда, то на его выходе в установившемся режиме будет гармонический сигнал $y(t) = y_m \sin(\omega t + \psi)$ той же частоты ω, но, в общем случае, с другой амплитудой y_m и ненулевым фазовым сдвигом ψ (см. рис.5.1, где $\varphi = \psi / \omega$ — временной интервал, соответствующий фазовому сдвигу ψ).

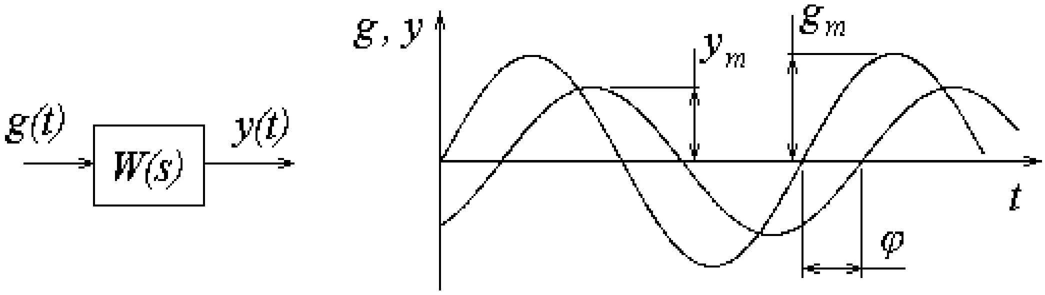


Рис. 5.1.Реакция устойчивого линейного звена на гармонический сигнал

Для аналитического описания частотных свойств динамических звеньев используется *частотная передаточная функция* $W(j\omega)$, которая для фиксированной частоты ω представляет собой комплексное число, модуль которого равен отношению амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала, а аргумент — сдвигу фаз между входным и выходным сигналами. В более общей формулировке частотная передаточная функция определяется как отношение изображений Фурье выходного и входного сигналов. Формальное правило получения аналитического выражения для частотной передаточной функции по известной передаточной функции $W(s)$ состоит в подстановке $s = j\omega$, т.е. $W(j\omega) = W(s)\big|_{s=j\omega}$, что соответствует переходу от изображения Лапласа к изображению Фурье.

Частотная передаточная функция (ЧПФ) может быть представлена в виде:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

или

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

где $U(\omega)$ — вещественная часть, $V(\omega)$ — мнимая часть, $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ — модуль, а $\psi(\omega) = arg\frac{V(\omega)}{U(\omega)}$ — аргумент (фаза) ЧПФ.

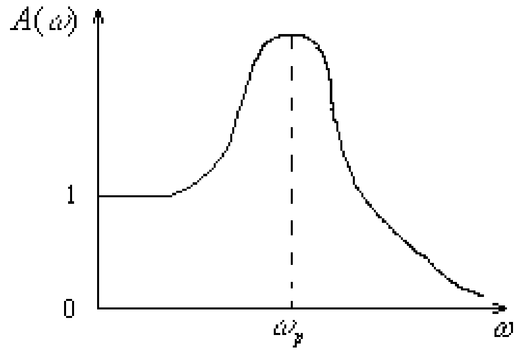


Рис. 5.2. Амплитудно-частотная характеристика

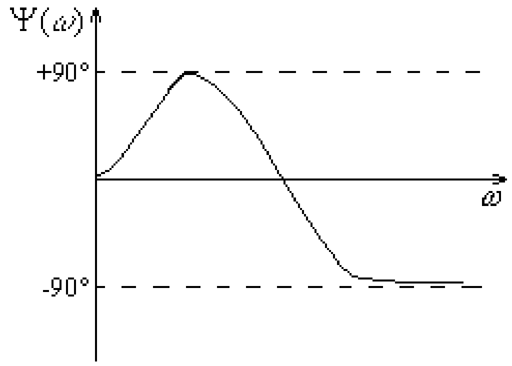


Рис. 5.3. Фазовая частотная характеристика

С помощью частотной передаточной функции могут быть легко построены следующие частотные характеристики.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) — зависимость $A(\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ (см. рис.5.2) .

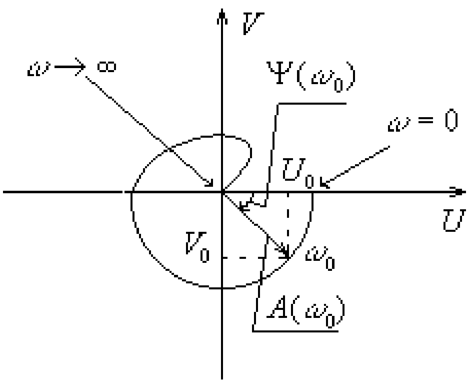


Рис. 5.4. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

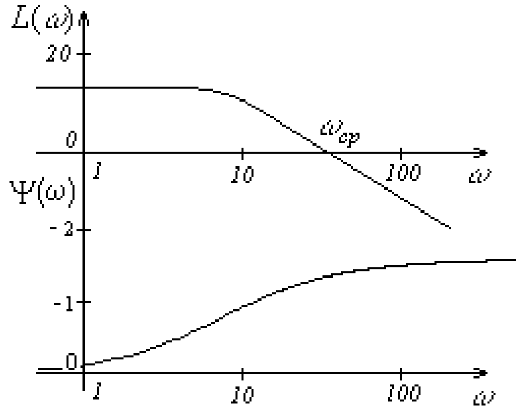


Рис. 5.5. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики

Фазовая частотная характеристика (ФЧХ) — зависимость $\psi(\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ (см. рис.5.3).

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) — годограф, соответствующий частотной передаточной функции при изменении частоты от 0 до $+\infty$, построенный на комплексной плоскости (U,V) (см. рис.5.4). При этом за положительное значение фазы понимается направление вращения от вещественной оси против часовой стрелки.

Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики (ЛАЧХ и ЛФЧХ). При построении логарифмической амплитудной частотной характеристики по оси ординат откладывается величина $L(\omega) = 20\,lg\,A(\omega)$, единицей измерения которой является децибел (дБ). По оси абсцисс откладывается частота ω в логарифмическом масштабе (см. рис. 5.5). Ось ординат может пересекать ось абсцисс в произвольном месте. Поэтому ее проводят так, чтобы справа от нее отобразить интересующий диапазон частот. Точка пересечения ЛАЧХ с осью абсцисс называется частотой среза ω_{cp}. В инженерных расчетах используют асимптотические ЛАХ, которые можно построить практически без вычислительной работы. Подобные характеристики представляют собой ломанную линию, состоящую из отрезков, расположенных к оси абсцисс под углами, кратными ± 20 дБ/дек. Логарифмическая фазовая частотная характеристика отличается от ФЧХ только тем, что ось абсцисс строится в логарифмическом масштабе.

Порядок выполнения работы

Построить передаточные функции исследуемых звеньев в соответствии с кодом варианта задания (см. табл. 5.1). Первые три цифры кода обозначают тип исследуемых звеньев (см. табл. 5.2), а последняя цифра — номер сочетания параметров исследуемых звеньев (см. табл. 5.3). Вывести аналитические выражения временных (переходной и весовой) и частотных (АЧХ, ФЧХ, АФЧХ и ЛАФЧХ) характеристик исследуемых звеньев. Привести графическое представление переходной и весовой характеристик, АЧХ, ФЧХ, АФЧХ и ЛАФЧХ исследуемых звеньев.

Содержание отчета:

1. Передаточные функции исследуемых звеньев.
2. Аналитически рассчитанные временные характеристики, АЧХ, ФЧХ, АФЧХ и ЛАФЧХ исследуемых звеньев.
3. Графическое представление временных характеристик АЧХ, ФЧХ, АФЧХ и ЛАФЧХ исследуемых звеньев.
4. Листинги аналитических расчетов и графических представлений соответствующих временных и частотных характеристик.
5. Выводы.

Вопросы к защите работы

1. Перечислите способы, с помощью которых может быть задана динамическая система.
2. Назовите типовое динамической звено, если корни знаменателя его передаточной функции чисто мнимые, а числитель передаточной функции равен постоянной.
3. Назовите типовое динамической звено и параметры, если его переходная функция - $h(t) = 1 - 2e^{-t/2} + e^{-t}$.
4. Динамической звено описывается дифференциальным уравнением $4\ddot{y} + a\dot{y} + y = 3 \cdot g$. При каких значения параметра a оно называется колебательным звеном?
5. Найдите переходную функцию динамической звена заданного дифференциальным уравнением $\dot{y} + 2y = 1.5 \cdot g$
6. Запишите аналитическое выражение для вещественной части ЧПФ апериодического звена 1-го порядка.
7. Запишите аналитическое выражение для аргумента ЧПФ изодрома.
8. Чему равно значение модуля ЧПФ на частоте среза
9. Почему в выражении для $L(\omega)$ присутствует множитель 20?

Таблица 5.1

Коды вариантов задания

№ вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
код	1241	1272	2463	2674	4215	7216	6427	7622	2413	2716	4621	6725

Таблица 5.2

	Тип звена	Передаточная функция
1	Апериодическое 1-го порядка	$\frac{k}{Ts+1}$
2	Колебательное	$\frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi\, Ts + 1}$
3	Идеальное интегрирующее	$\frac{k}{s}$
4	Интегрирующее с замедлением	$\frac{k}{s(1+Ts)}$
5	Изодромное	$\frac{k(1+Ts)}{s}$
6	Дифференцирующее с замедлением	$\frac{ks}{1+Ts}$
7	Консервативное	$\frac{k}{1+T^2 s^2}$

Таблица 5.3

	k	T	ξ
1	5	0.1	0.1
2	2	0.5	0.15
3	10	2	0.25
4	8	4	0.3
5	15	0.2	0.2
6	4	8	0.45
7	3	5	0.4