Модальные регуляторы и наблюдатели

Вспомогательные математические факты

Обозначение для спектра матрицы

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda I - A) = 0\}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \sigma(A) = \{3,\ \ 5 + 2i,\ \ 5 - 2i\}$$

Уравнение Сильвестра

$$A_1 P - P A_2 = BC$$

Известные матрицы

$A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{n \times k}$

$A_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $\quad C \in \mathbb{R}^{k \times m}$

Квадратные (разного размера) $\quad$ Прямо-угольные

Неизвестная матрица

$P \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Прямоугольная

Уравнение Сильвестра

$$A_1 P - P A_2 = BC$$

$A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad A_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ $\quad C \in \mathbb{R}^{k\times m}$ $\quad P \in \mathbb{R}^{n\times m}$

Теорема Сильвестра

Уравнение Сильвестра имеет единственное решение при любых B и C $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\sigma(A_1) \cap \sigma(A_2) = \emptyset$

Уравнение Сильвестра (с квадратной неизвестной)

$$A_1 P - P A_2 = BC$$

Известные матрицы

$A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{n\times k}$

$A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad C \in \mathbb{R}^{k\times n}$

Квадратные (одного размера) — A_1, A_2

Прямо- угольные — B, C

Неизвестная матрица

$P \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Квадратная

Уравнение Сильвестра
(с квадратной неизвестной)

$$\boxed{A_1 P - P A_2 = BC}$$

$A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$ $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Утверждение

Уравнение Сильвестра имеет единственное обратимое решение $\Leftrightarrow$ (почти всегда)
$$\begin{cases} \sigma(A_1) \cap \sigma(A_2) = \emptyset \\ (A_1, B) - \text{управляема} \\ (C, A_2) - \text{наблюдаема} \end{cases}$$

Статический регулятор по состоянию

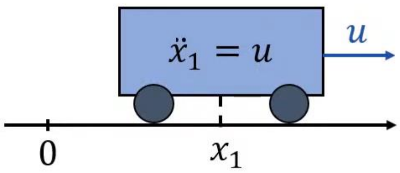
Объект	Регулятор	Замкнутая система
$\dot{x} = Ax + Bu$	$u = Kx$	$\dot{x} = Ax + BKx$

Объект	Регулятор	Замкнутая система
$\dot{x} = Ax + Bu$	$u = Kx$	$\dot{x} = (A + BK)x$

Матрица A может быть неустойчивой

Надо выбрать такую матрицу K, чтобы матрица $A + BK$ стала устойчивой

Пример



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

Объект

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Матрица A может быть неустойчивой

Регулятор

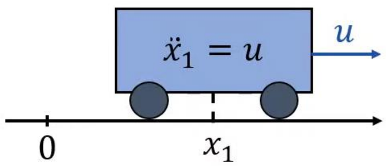
$$u = Kx$$

Замкнутая система

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Надо выбрать такую матрицу K, чтобы матрица $A + BK$ стала устойчивой

Пример



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad u = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Объект

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Матрица A может быть неустойчивой

Регулятор

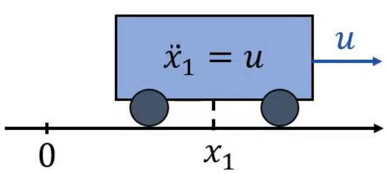
$$u = Kx$$

Замкнутая система

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Надо выбрать такую матрицу K, чтобы матрица $A + BK$ стала устойчивой

Пример



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad u = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Объект

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Матрица A может быть неустойчивой

Регулятор

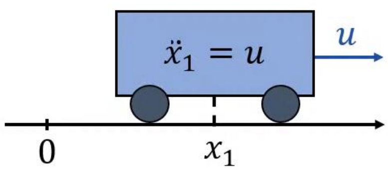
$$u = Kx$$

Замкнутая система

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Надо выбрать такую матрицу K, чтобы матрица $A + BK$ стала устойчивой

Пример



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad u = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - k_2\lambda - k_1 = 0$$

Модальное управление

Объект

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

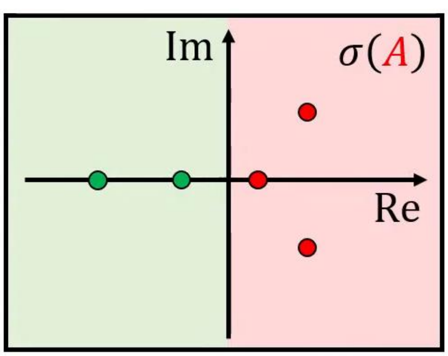
Регулятор

$$u = Kx$$

Замкнутая система

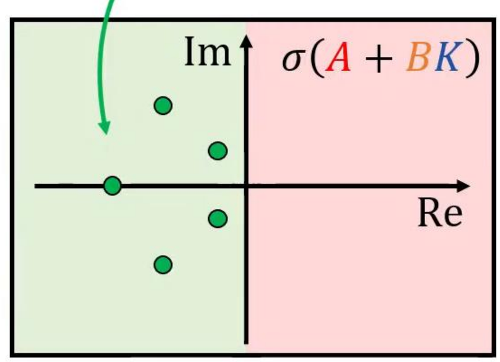
$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Хотим выбрать матрицу K таким образом, чтобы замкнутая система имела желаемый спектр $\sigma(A + BK) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$



+ регулятор

Как это сделать?



Объект

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Регулятор

$$u = Kx$$

Замкнутая система

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Пусть матрица Γ такова, что $\sigma(\Gamma) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

желаемый спектр

При каком условии $\sigma(A + BK) = \sigma(\Gamma)$?

При условии, что матрицы $A + BK$ и Γ подобны

Это так, если существует матрица P такая, что $A + BK = P\Gamma P^{-1}$

Объект

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Регулятор

$$u = Kx$$

Замкнутая система

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Домножаем на P справа

$$A + BK = P\Gamma P^{-1}$$

$$AP + BKP = P\Gamma$$

$$AP - P\Gamma = -BKP$$

Делаем замену $Y = -KP$

$$AP - P\Gamma = BY$$

Объект

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Регулятор

$$u = Kx$$

Замкнутая система

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

$$AP - P\Gamma = BY$$
$$Y = -KP$$

Объект

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Регулятор

$$u = Kx$$

Замкнутая система

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Уравнения модального регулятора

$$\boxed{\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}}$$

Если $\begin{cases} \sigma(A) \cap \sigma(\Gamma) = \emptyset, \\ (A, B) \text{ – управляема}, \\ (Y, \Gamma) \text{ – наблюдаема}, \end{cases}$ то почти всегда существует нужная P

Объект

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Регулятор

$$u = Kx$$

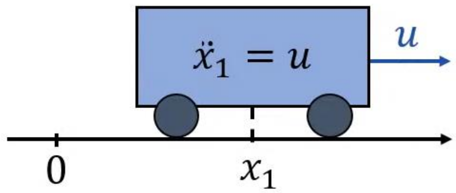
Замкнутая система

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Как синтезировать такой регулятор?

1. Выбрать матрицу $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с желаемым спектром $\sigma(\Gamma)$
2. Выбрать матрицу $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ такую, чтобы пара (Y, Γ) была наблюдаема
3. Найти $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ как решение уравнения Сильвестра $AP - P\Gamma = BY$
4. Вычислить $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ по формуле $K = -YP^{-1}$

Пример модального управления

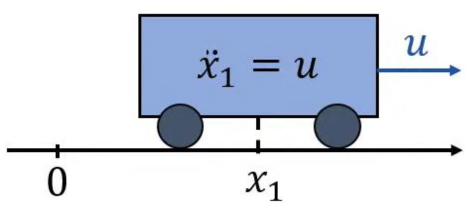


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 1. Выбираем желаемый спектр и матрицу Γ

Желаемый спектр
$\{-4, -5\}$ $\Rightarrow$ $\Gamma = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

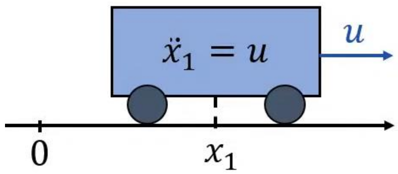


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 2. Выбираем матрицу Y

$\Gamma = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ Необходимо, что пара (Y, Γ) была наблюдаема

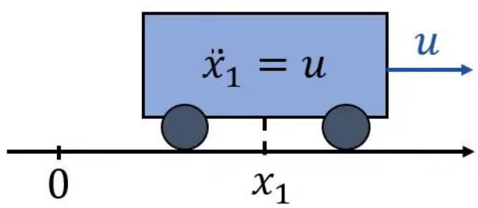


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 2. Выбираем матрицу Y

$\Gamma = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Γ в жордановой форме, поэтому можно выбрать Y из всех единиц $\Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

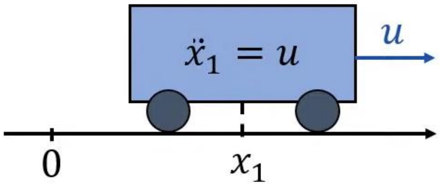


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 3. Находим матрицу подобия

$$AP - P\Gamma = BY$$

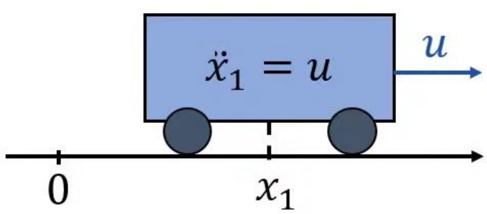


$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

Шаг 3. Находим матрицу подобия

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

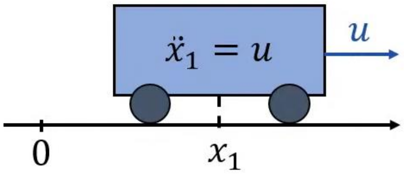


$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

Шаг 3. Находим матрицу подобия

$$\begin{bmatrix}4p_1 + p_3 & 5p_2 + p_4\\ 4p_3 & 5p_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

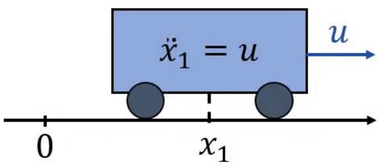


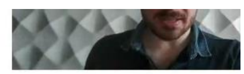
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

Шаг 3. Находим матрицу подобия

$$\begin{bmatrix}4p_1 + p_3 & 5p_2 + p_4\\ 4p_3 & 5p_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{16} & -\frac{1}{25}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$



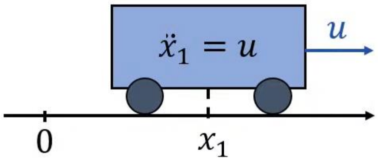


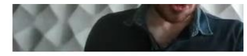
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix}-\frac{1}{16} & -\frac{1}{25}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

Шаг 4. Вычисляем матрицу регулятора

$$K = -YP^{-1}$$



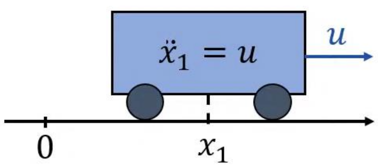


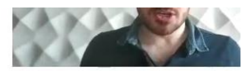
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix}-\frac{1}{16} & -\frac{1}{25}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

Шаг 4. Вычисляем матрицу регулятора

$$K = -YP^{-1} = -\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{16} & -\frac{1}{25}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}^{-1}$$



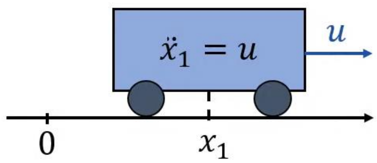


$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix}-\frac{1}{16} & -\frac{1}{25}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

Шаг 4. Вычисляем матрицу регулятора

$$K = -YP^{-1} = -\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-80 & -16\\ 100 & 25\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-20 & -9\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix}-\frac{1}{16} & -\frac{1}{25}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

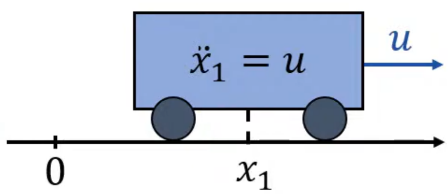
Шаг 5. Проверка

$$K = \begin{bmatrix}-20 & -9\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A + BK = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -20 & -9\end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 + 9\lambda + 20 = 0$$

$$\lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = -5$$

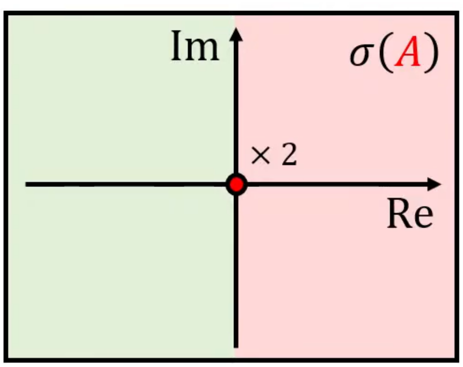
Объект с регулятором



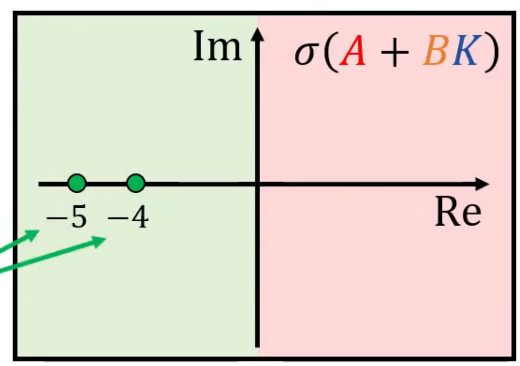
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

ПД

$$u = \begin{bmatrix}-20 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = -20x_1 - 9x_2$$

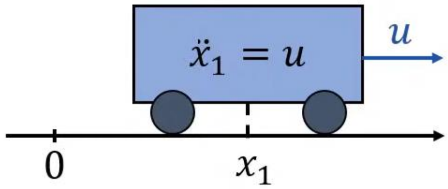


+ регулятор



Моды мы выбрали сами

Объект с регулятором



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

ПД

$$u = \begin{bmatrix}-20 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = -20x_1 - 9x_2$$

Но как можно использовать такой регулятор,
если мы измеряем только величину x_1?

$$y = x_1$$

Наблюдатель состояния

Задача наблюдателя

На основе выхода $y(t)$ восстанавливать вектор состояния $x(t)$

$y(t)$
Измеряемая часть динамики объекта → Наблюдатель → $x(t)$
Вся динамика объекта

СООБЩАЮТ ДАТЧИКИ

ВЫЧИСЛЯЕТ НАБЛЮДАТЕЛЬ

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \boxed{L(\hat{y} - y)} \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

«Стимулирующее» слагаемое

(равно нулю при $\hat{x} = x$)

Наблюдатель получает информацию y и формирует оценку $\hat{x}$

Если всё работает правильно, то оценка $\hat{x}$ с течением времени сходится к реальной величине x

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Ошибка наблюдателя

$$e = x - \hat{x}$$

Динамика ошибки

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Ошибка наблюдателя

$$e = x - \hat{x}$$

Динамика ошибки

$$\dot{e} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - L(\hat{y} - y)$$

Объект

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x}\end{cases}$$

Ошибка наблюдателя

$$e = x - \hat{x}$$

Динамика ошибки

$$\dot{e} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - L(C\hat{x} - Cx)$$

Объект

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x}\end{cases}$$

Ошибка наблюдателя

$$e = x - \hat{x}$$

Динамика ошибки

$$\dot{e} = Ax + \cancel{Bu} - A\hat{x} - \cancel{Bu} - LC\hat{x} + LCx = A(x - \hat{x}) + LC(x - \hat{x})$$

Объект

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x}\end{cases}$$

Ошибка наблюдателя

$$e = x - \hat{x}$$

Динамика ошибки

$$\dot{e} = Ax + \cancel{Bu} - A\hat{x} - \cancel{Bu} - LC\hat{x} + LCx = A(x - \hat{x}) + LC(x - \hat{x})$$

$$\dot{e} = (A + LC)e$$

Объект

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x}\end{cases}$$

Ошибка наблюдателя

$$e = x - \hat{x}$$

$$\dot{e} = (A + LC)e$$

Надо выбрать такую матрицу L, чтобы матрица $A + LC$ была устойчивой

$$\Downarrow$$

$$e \to 0$$

$$\hat{x} \to x$$

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

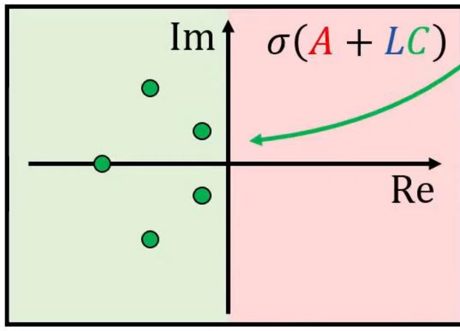
Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Динамика ошибки

$$\dot{e} = (A + LC)e$$

Хотим выбрать матрицу L таким образом, чтобы динамика ошибки имела желаемый спектр $\sigma(A + LC) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$



Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Динамика ошибки

$$\dot{e} = (A + LC)e$$

Пусть матрица Γ такова, что $\sigma(\Gamma) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

желаемый спектр

При каком условии $\sigma(A + LC) = \sigma(\Gamma)$?

При условии, что матрицы $A + LC$ и Γ подобны

Это так, если существует матрица Q такая, что $A + LC = Q^{-1}\Gamma Q$

Объект

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x}\end{cases}$$

Динамика ошибки

$$\dot{e} = (A + LC)e$$

$$A + LC = Q^{-1}\Gamma Q$$

Домножаем на Q слева

$$QA + QLC = \Gamma Q$$

$$\Gamma Q - QA = QLC$$

Делаем замену $Y = QL$

$$\Gamma Q - QA = YC$$

Объект

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x}\end{cases}$$

Динамика ошибки

$$\dot{e} = (A + LC)e$$

Уравнения модального наблюдателя

$$\boxed{\begin{cases}\Gamma Q - QA = YC \\ L = Q^{-1}Y\end{cases}}$$

Если $\begin{cases}\sigma(A) \cap \sigma(\Gamma) = \emptyset, \\ (\Gamma, Y) \text{ – управляема,} \\ (C, A) \text{ – наблюдаема,}\end{cases}$ то почти всегда существует нужная Q

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

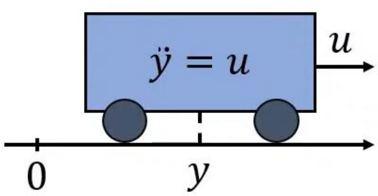
Динамика ошибки

$$\dot{e} = (A + LC)e$$

Как синтезировать такой наблюдатель?

1. Выбрать матрицу $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с желаемым спектром $\sigma(\Gamma)$
2. Выбрать матрицу $Y \in \mathbb{R}^{n \times k}$ такую, чтобы пара (Γ, Y) была управляема
3. Найти $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ как решение уравнения Сильвестра $\Gamma Q - QA = YC$
4. Вычислить $L \in \mathbb{R}^{n \times k}$ по формуле $L = Q^{-1}Y$

Пример синтеза модального наблюдателя



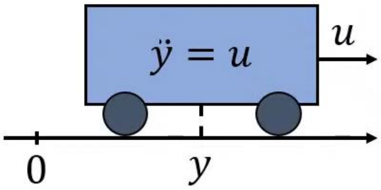
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Шаг 1. Выбираем желаемый спектр и матрицу Γ

Желаемый спектр

$$\{-3, -3\}$$

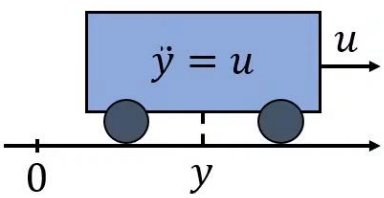


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Шаг 1. Выбираем желаемый спектр и матрицу Γ

Желаемый спектр $\{-3, -3\}$ $\Rightarrow$ $\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

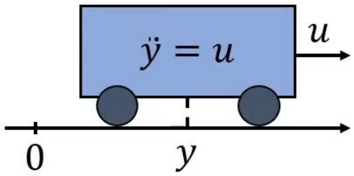


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Шаг 2. Выбираем матрицу Y

$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ Необходимо, что пара (Γ, Y) была управляема

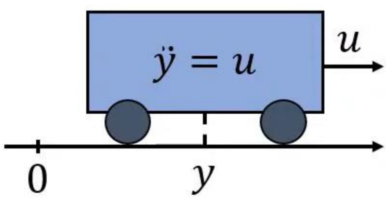


$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

Шаг 2. Выбираем матрицу Y

$\Gamma = \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix} \Rightarrow$ Γ в жордановой форме, поэтому можно выбрать Y из всех единиц $\Rightarrow Y = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

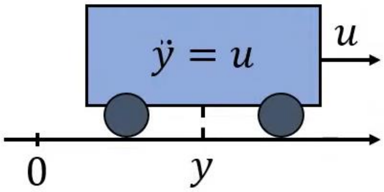


$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

Шаг 3. Находим матрицу подобия

$$\Gamma Q - QA = YC$$

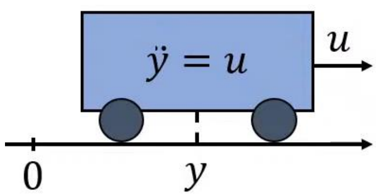


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 3. Находим матрицу подобия

$$\Gamma \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix} A = YC$$

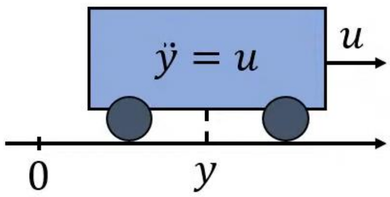


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 3. Находим матрицу подобия

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

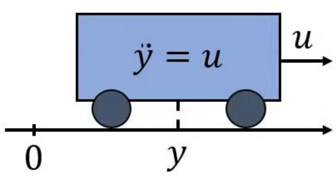


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 3. Находим матрицу подобия

$$\begin{bmatrix} -3q_1 + q_3 & -q_1 - 3q_2 + q_4 \\ -3q_3 & -q_3 - 3q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

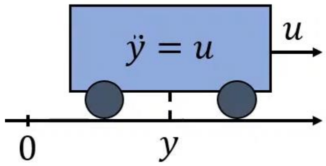


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 3. Находим матрицу подобия

$$\begin{bmatrix} -3q_1 + q_3 & -q_1 - 3q_2 + q_4 \\ -3q_3 & -q_3 - 3q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{5}{27} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

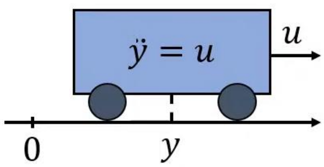


$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix}-\frac{4}{9} & \frac{5}{27}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\end{bmatrix}$$

Шаг 4. Вычисляем матрицу наблюдателя

$$L = Q^{-1}Y$$

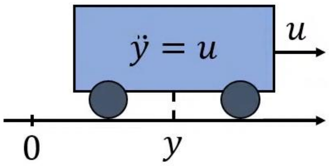


$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix}-\frac{4}{9} & \frac{5}{27}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\end{bmatrix}$$

Шаг 4. Вычисляем матрицу наблюдателя

$$L = Q^{-1}Y = \begin{bmatrix}9 & -15\\ 27 & -36\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6\\ -9\end{bmatrix}$$



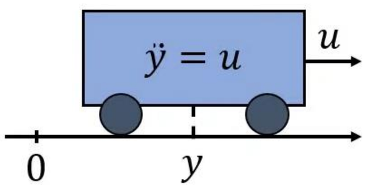
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix}-\frac{4}{9} & \frac{5}{27}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\end{bmatrix}$$

Шаг 5. Проверка

$$L = \begin{bmatrix}-6\\ -9\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A + LC = \begin{bmatrix}-6 & 1\\ -9 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{gathered}\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0\\ \lambda_{1,2} = -3\end{gathered}$$

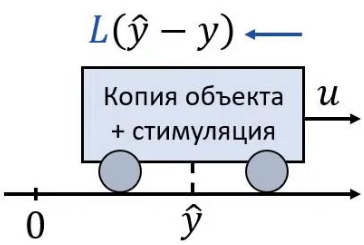
Объект



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

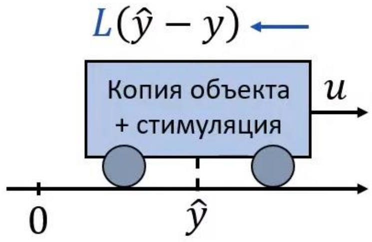
Наблюдатель



$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}-6\\ -9\end{bmatrix}(\hat{y} - y)$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

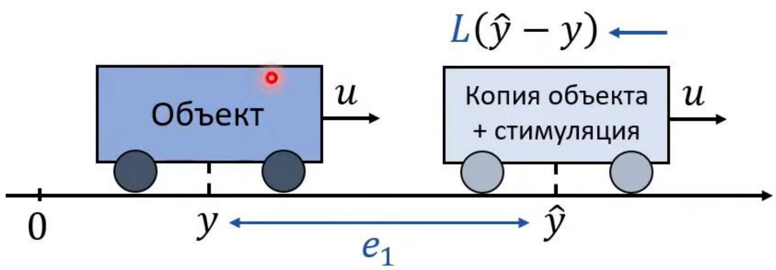
Наблюдатель



$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \end{bmatrix} (\hat{y} - y)$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

Ошибка наблюдателя



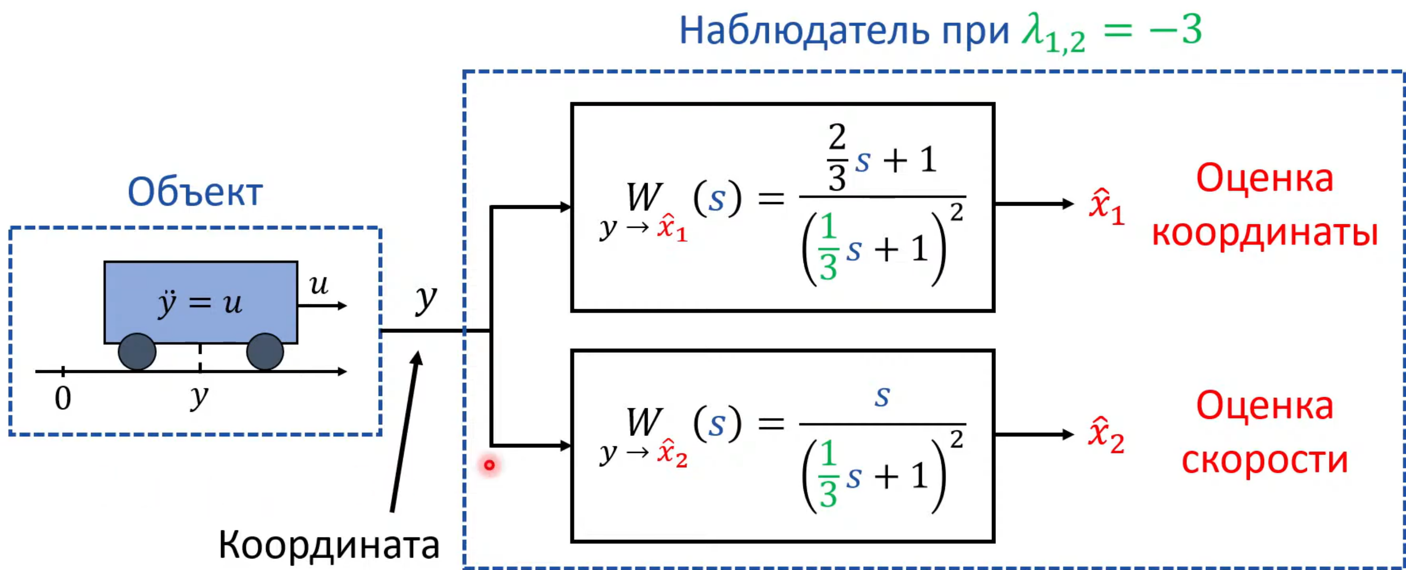
$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

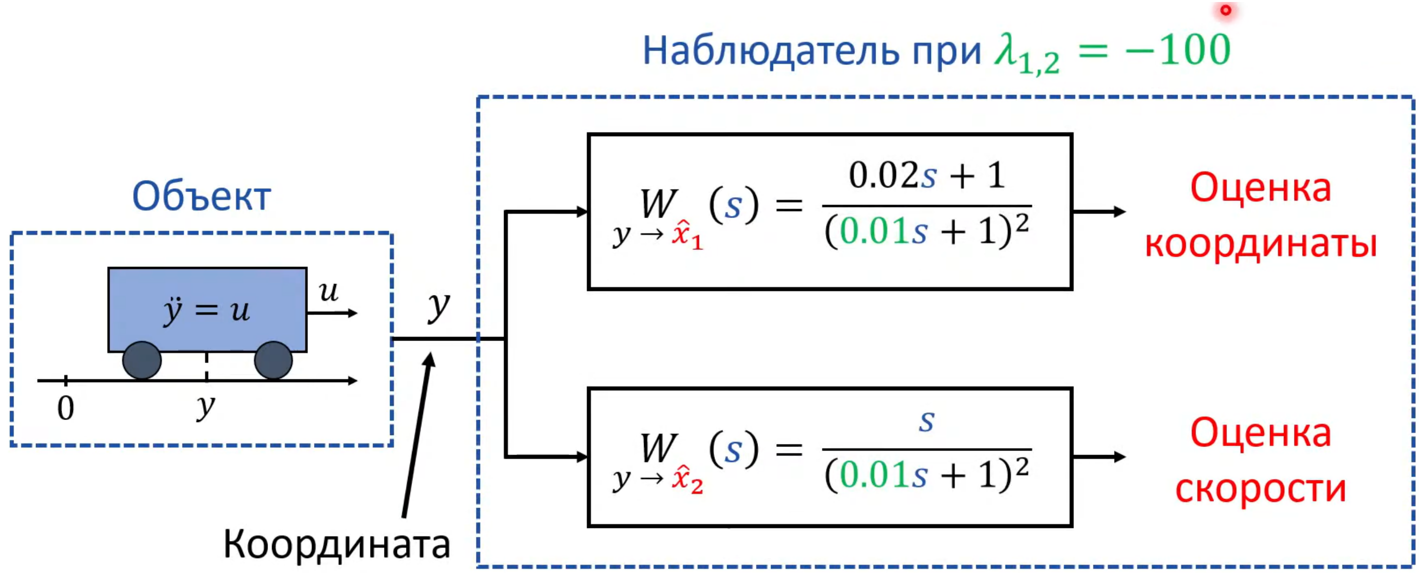
$$\lim_{t \to \infty} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

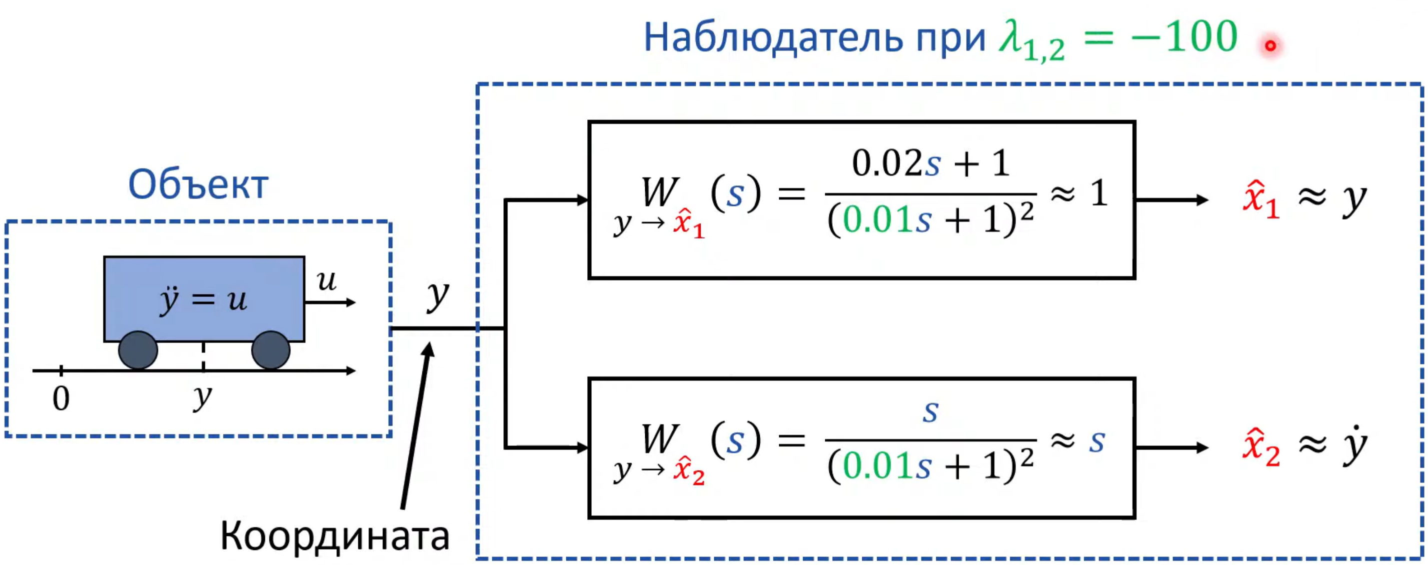
Как выглядит наблюдатель в форме вход-выход?

Наблюдатели ни в коем случае не надо делать в форме Вход-Выход – только с помощью матриц

Но если наблюдатель уже сделан, то его тоже можно описать на языке передаточных функций







Обратная связь по выходу (регулятор + наблюдатель)

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Регулятор

$$u = K\hat{x}$$

Когда вектор состояния x не видно,
мы вынуждены формировать его оценку $\hat{x}$
и использовать её в нашем регуляторе

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Регулятор

$$u = K\hat{x}$$

Замкнутая система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + LC\hat{x} - LCx \end{cases}$$

Относительно x и e

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} \\ \underbrace{\dot{x} - \dot{\hat{x}}}_{\dot{e}} = A\underbrace{(x - \hat{x})}_{e} + LC\underbrace{(x - \hat{x})}_{e} \end{cases}$$

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Регулятор

$$u = K\hat{x}$$

Замкнутая система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + LC\hat{x} - LCx \end{cases}$$

Относительно x и e

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} \\ \dot{e} = (A + LC)e \end{cases}$$

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Регулятор

$$u = K\hat{x}$$

Замкнутая система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + LC\hat{x} - LCx \end{cases}$$

Относительно x и e

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK(x - e) \\ \dot{e} = (A + LC)e \end{cases}$$

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Регулятор

$$u = K\hat{x}$$

Замкнутая система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + LC\hat{x} - LCx \end{cases}$$

Относительно x и e

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x - BKe \\ \dot{e} = (A + LC)e \end{cases}$$

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Регулятор

$$u = K\hat{x}$$

Замкнутая система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + LC\hat{x} - LCx \end{cases}$$

Относительно x и e

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x - BKe \\ \dot{e} = (A + LC)e \end{cases}$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

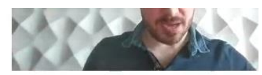
Объект	Наблюдатель	Регулятор
$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$	$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x}\end{cases}$	$u = K\hat{x}$

Замкнутая система

$$\begin{bmatrix}\dot{x} \\ \dot{e}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A + BK & -BK \\ 0 & A + LC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ e\end{bmatrix}$$

Матрица блочно-треугольная ⇒ её собственные числа состоят из собственных чисел матриц $(A + BK)$ и $(A + LC)$

Значит, можно рассчитать регулятор и наблюдатель по-отдельности – и потом объединить!



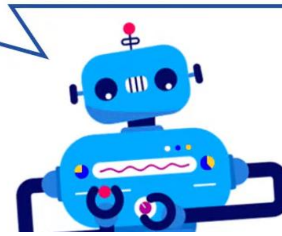
Объект

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$

Регулятор с наблюдателем

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x}\end{cases} \qquad u = K\hat{x}$$

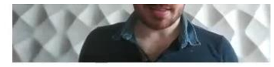
это самая стаНдартная структура линЕЙНого рЕгуляТора по ВыхОду



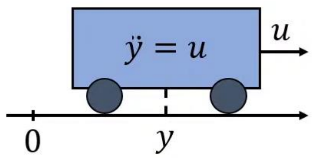
Замкнутая система

$$\begin{bmatrix}\dot{x} \\ \dot{e}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A + BK & -BK \\ 0 & A + LC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ e\end{bmatrix}$$

Пример обратной связи по выходу



Объект



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Наблюдатель

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}(\hat{y} - y) \quad \hat{y} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

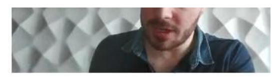
Регулятор

$$u = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

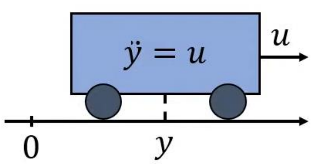
Замкнутая система

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{e}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A + BK & -BK\\ 0 & A + LC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ e\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{e}_1\\ \dot{e}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ k_1 & k_2 & -k_1 & -k_2\\ 0 & 0 & l_1 & 1\\ 0 & 0 & l_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ e_1\\ e_2\end{bmatrix} \Rightarrow$$

Выбираем k_1, k_2, l_1, l_2



Объект



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Наблюдатель

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}(\hat{y} - y) \quad \hat{y} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

Регулятор

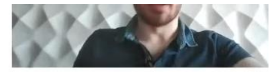
$$u = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

Замкнутая система

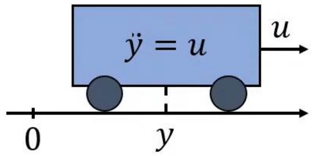
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{e}_1\\ \dot{e}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ k_1 & k_2 & -k_1 & -k_2\\ 0 & 0 & l_1 & 1\\ 0 & 0 & l_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ e_1\\ e_2\end{bmatrix}$$

Передаточная функция регулятора

$$W_{y \to u}(s) = \frac{(k_1 l_1 + k_2 l_2)s + k_1 l_2}{s^2 - (k_2 + l_1)s + (k_2 l_1 - k_1 - l_2)}$$



Объект



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Наблюдатель

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}(\hat{y} - y) \qquad \hat{y} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

Регулятор

$$u = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

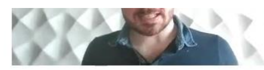
Замкнутая система

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{e}_1\\ \dot{e}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ k_1 & k_2 & -k_1 & -k_2\\ 0 & 0 & l_1 & 1\\ 0 & 0 & l_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ e_1\\ e_2\end{bmatrix}$$

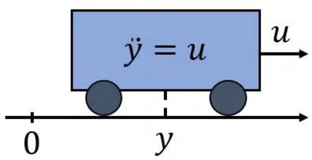
Передаточная функция регулятора

$$W_{y\to u}(s) = \frac{(k_1 l_1 + k_2 l_2)s + k_1 l_2}{s^2 - (k_2 + l_1)s + (k_2 l_1 - k_1 - l_2)}$$

Спасибо, не надо!



Объект



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Наблюдатель

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}(\hat{y} - y) \qquad \hat{y} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

Регулятор

$$u = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

Замкнутая система

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{e}_1\\ \dot{e}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ k_1 & k_2 & -k_1 & -k_2\\ 0 & 0 & l_1 & 1\\ 0 & 0 & l_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ e_1\\ e_2\end{bmatrix}$$

Передаточная функция регулятора

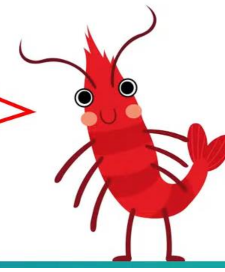
$$W_{y\to u}(s) = \frac{(k_1 l_1 + k_2 l_2)s + k_1 l_2}{s^2 - (k_2 + l_1)s + (k_2 l_1 - k_1 - l_2)}$$

Лучше матрицами

Как делать модальные регуляторы в Matlab?

ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СИЛЬВЕСТРА МОЖНО ИСПОЛЬЗОВАТЬ КОМАНДУ `sylv`

Можно воспользоваться командой `place`, но она имеет ряд недостатков (например, не даёт делать кратные собственные числа)



Скачать пакет CVX
http://cvxr.com/cvx/download
→
Запустить файл
cvx_setup.m

```
% Plant parameters

A = [0 1;
     0 0];

B = [0;
     1];

C = [1 0];
```

```
% Modal matrices

G1 = [-4 0;
       0 -5];

Y1 = [1 1];

G2 = [-3 1;
       0 -3];

Y2 = [1;
      1];
```

```
% Solving Sylvester's
% equations

cvx_begin sdp
variable P(2,2)
variable Q(2,2)
A*P-P*G1 == B*Y1;
G2*Q-Q*A == Y2*C;
cvx_end
```

Применить для решения уравнений Сильвестра

```
% Finding controller
% and observer matrices

K = -Y1*inv(P);
L = inv(Q)*Y2;
```

Какие собственные числа можно получить в замкнутой системе?

Матрицы
объекта управления

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа
объекта управления

$\lambda_1 = 3$ ✔

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = 1$

Какие собственные числа может иметь
матрица замкнутой системы?

$$A + BK = \begin{bmatrix} 3 + k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 & 1 + k_3 \\ k_1 & 1 + k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

Управляемость собственных чисел

$$\operatorname{rank}\,[A - \lambda_1 I \quad B] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Мода $\lambda_1 = 3$ управляема

Матрицы
объекта управления

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа
объекта управления

$\lambda_1 = 3$ ✔

$\lambda_2 = -1$ ✘

$\lambda_3 = 1$

Какие собственные числа может иметь
матрица замкнутой системы?

$$A + BK = \begin{bmatrix} 3 + k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 & 1 + k_3 \\ k_1 & 1 + k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

Управляемость собственных чисел

$$\operatorname{rank}\,[A - \lambda_2 I \quad B] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Мода $\lambda_2 = -1$ неуправляема

Матрицы
объекта управления

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Какие собственные числа может иметь
матрица замкнутой системы?

$$A + BK = \begin{bmatrix} 3 + k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 & 1 + k_3 \\ k_1 & 1 + k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

Собственные числа
объекта управления

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = 1$$

Управляемость собственных чисел

$$\operatorname{rank}\,[A - \lambda_3 I \quad B] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Мода $\lambda_3 = 1$ управляема

Матрицы
объекта управления

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Какие собственные числа может иметь
матрица замкнутой системы?

$$A + BK = \begin{bmatrix} 3 + k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 & 1 + k_3 \\ k_1 & 1 + k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

Собственные числа
объекта управления

Управляемость собственных чисел

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_3 = 1$$

Выбором k_1, k_2, k_3 можно сделать
любые собственные числа λ_1 и λ_3,
но с $\lambda_2 = -1$ ничего поделать нельзя

Матрицы
объекта управления

Пример матрицы
замкнутой системы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -28 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad A + BK = \begin{bmatrix} -25 & 6 & 9 \\ -28 & 6 & 10 \\ -28 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Собственные числа
объекта управления

Собственные числа
замкнутой системы

$\lambda_1 = 3$ ✔

$\lambda_2 = -1$ ✘

$\lambda_3 = 1$ ✔

+ Регулятор

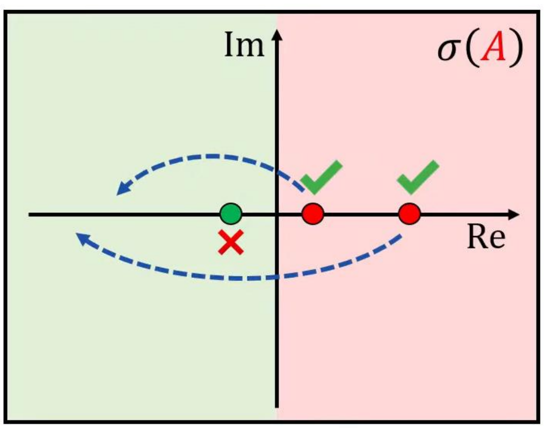
$\lambda_1 = -4$

$\lambda_2 = -1$

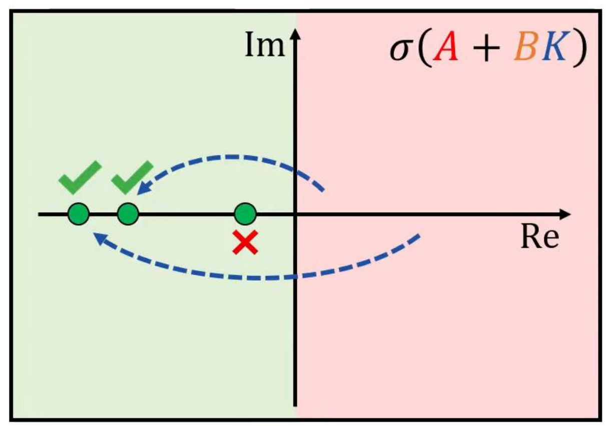
$\lambda_3 = -5$

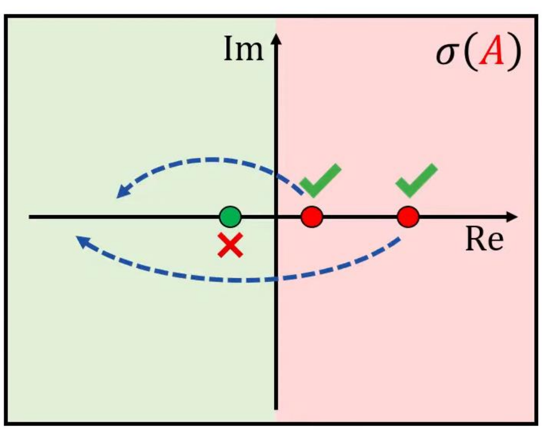
Управляемые собственные числа могут быть передвинуты куда угодно

Неуправляемые собственные числа передвинуть не получится

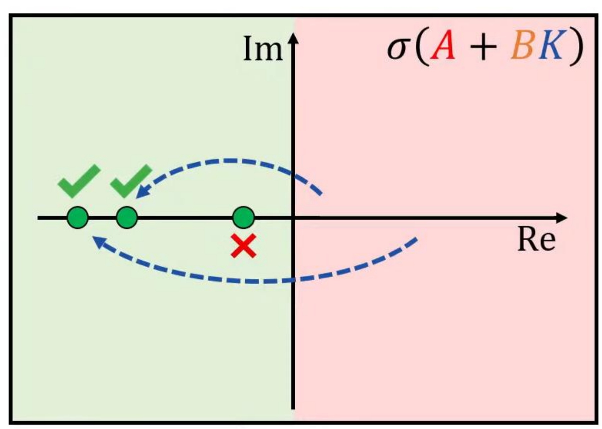


+ Регулятор

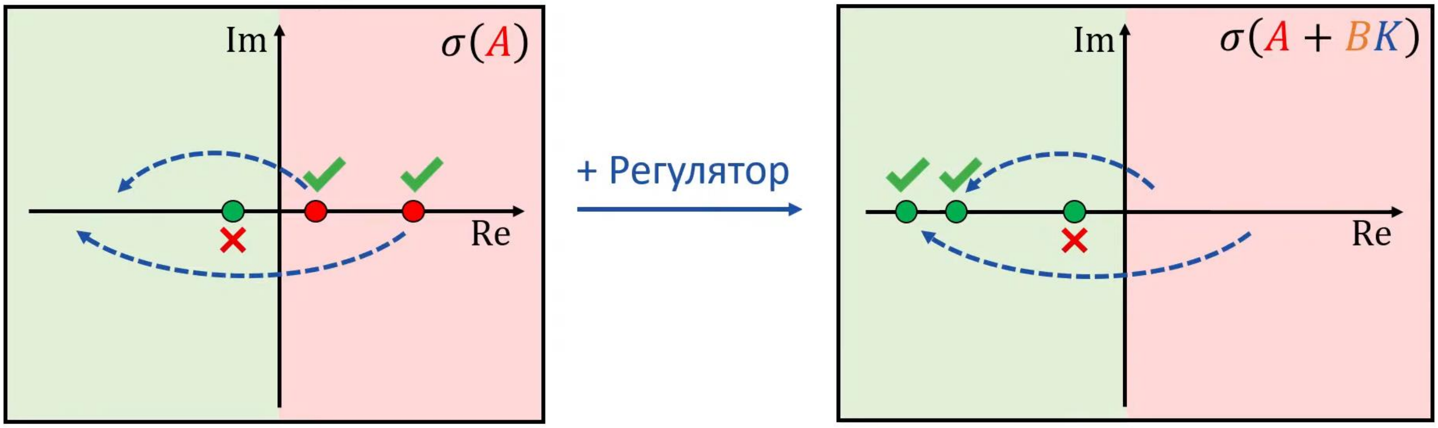




+ Регулятор



В этом примере неуправляемая мода устойчива



В этом примере неуправляемая мода устойчива

В таких случаях говорят, что система неуправляема, но стабилизируема

Стабилизируемость и обнаруживаемость

Управляемость

Система управляема	$\Leftrightarrow$	Все собственные числа матрицы A управляемы

Стабилизируемость

Система стабилизируема	$\Leftrightarrow$	Все неустойчивые собственные числа матрицы A управляемы

Управляемость

Система управляема $\Leftrightarrow$ Матрице $A + BK$ можно назначить любые собственные числа

Стабилизируемость

Система стабилизируема $\Leftrightarrow$ Матрицу $A + BK$ можно сделать гурвицевой ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ для всех λ)

Если система стабилизируема, то её можно сделать асимптотически устойчивой с помощью регулятора вида $u = Kx$

Если система управляема,
то тем более можно!

Наблюдаемость

Система наблюдаема $\Leftrightarrow$ Все собственные числа матрицы A наблюдаемы

Обнаруживаемость

Система обнаруживаема $\Leftrightarrow$ Все неустойчивые собственные числа матрицы A наблюдаемы

Наблюдаемость

Система наблюдаема	$\Leftrightarrow$	Матрице $A + LC$ можно назначить любые собственные числа

Обнаруживаемость

Система обнаруживаема	$\Leftrightarrow$	Матрицу $A + LC$ можно сделать гурвицевой ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ для всех λ)

Если система обнаруживаема, то можно сделать наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

с асимптотически устойчивой динамикой ошибки

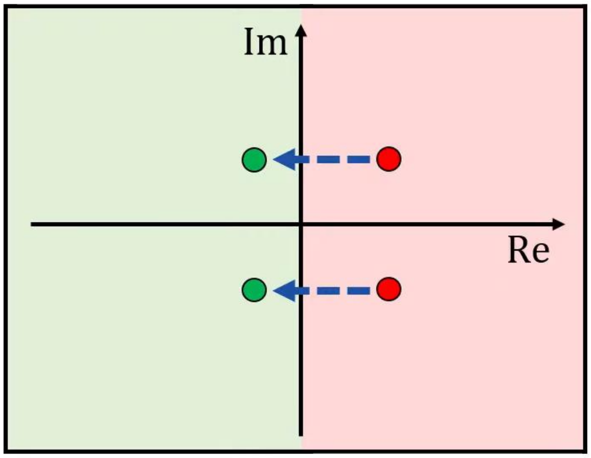
Если система наблюдаема,
то тем более можно!

Как выбирать собственные числа?

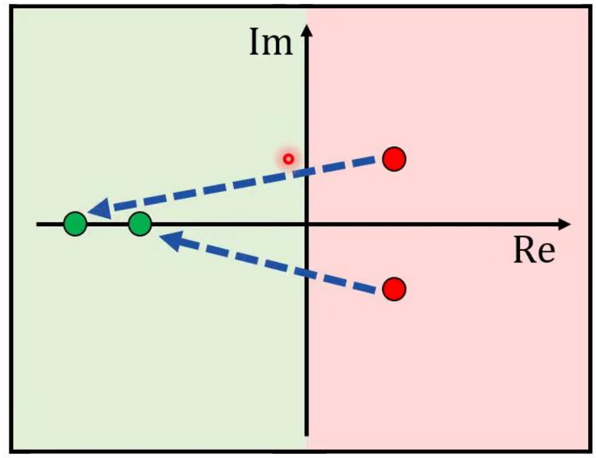
Почему нельзя выбрать собственные числа порядка $\lambda = -10^{100}$
и получить очень устойчивую систему?

"За всё в этой жизни приходится платить"
– Кот Платон

$$u \approx [-2 \quad -2]x \qquad\qquad u \approx [-200 \quad -300]x$$



Не очень большое управляющее воздействие



Просто гигантское управляющее воздействие

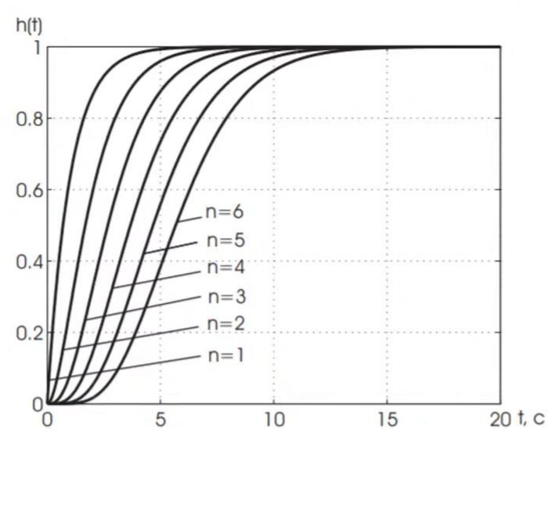
Можно ли выбрать моды на основе желаемых показателей качества (перерегулирование, время переходного процесса)?

“Scio me nescire”
– Felis Plato

Таблицы и рисунки из книги
«Синтез систем автоматического управления методом модального управления»
(В.В. Григорьев, Н.В. Журавлёва, Г.В. Лукьянова, К.А. Сергеев)

Таблица 1.1 — Полиномы Ньютона

Порядок системы	Стандартный полином Ньютона
1	$\lambda + \omega_\circ$
2	$\lambda^2 + 2\omega_\circ\lambda + \omega_\circ^2$
3	$\lambda^3 + 3\omega_\circ\lambda^2 + 3\omega_\circ^2\lambda + \omega_\circ^3$
4	$\lambda^4 + 4\omega_\circ\lambda^3 + 6\omega_\circ^2\lambda^2 + 4\omega_\circ^3\lambda + \omega_\circ^4$
5	$\lambda^5 + 5\omega_\circ\lambda^4 + 10\omega_\circ^2\lambda^3 + 10\omega_\circ^3\lambda^2 + 5\omega_\circ^4\lambda + \omega_\circ^5$
6	$\lambda^6 + 6\omega_\circ\lambda^5 + 15\omega_\circ^2\lambda^4 + 20\omega_\circ^3\lambda^3 + 15\omega_\circ^4\lambda^2 + 6\omega_\circ^5\lambda + \omega_\circ^6$



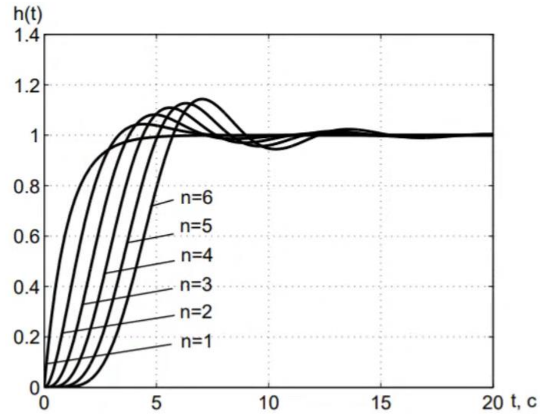
Таблицы и рисунки из книги

«Синтез систем автоматического управления методом модального управления»

(В.В. Григорьев, Н.В. Журавлёва, Г.В. Лукьянова, К.А. Сергеев)

Таблица 1.2 — Полиномы Баттерворта

Порядок системы	Стандартный полином Баттерворта
1	$\lambda + \omega_\circ$
2	$\lambda^2 + 1,4\omega_\circ\lambda + \omega_\circ^2$
3	$\lambda^3 + 2\omega_\circ\lambda^2 + 2\omega_\circ^2\lambda + \omega_\circ^3$
4	$\lambda^4 + 2,6\omega_\circ\lambda^3 + 3,4\omega_\circ^2\lambda^2 + 2,6\omega_\circ^3\lambda + \omega_\circ^4$
5	$\lambda^5 + 3,24\omega_\circ\lambda^4 + 15,24\omega_\circ^2\lambda^3 + 5,24\omega_\circ^3\lambda^2 + 3,24\omega_\circ^4\lambda + \omega_\circ^5$
6	$\lambda^6 + 3,86\omega_\circ\lambda^5 + 7,46\omega_\circ^2\lambda^4 + 9,13\omega_\circ^3\lambda^3 + 7,46\omega_\circ^4\lambda^2 + 3,86\omega_\circ^5\lambda + \omega_\circ^6$



Но методом модального управления мы фактически назначаем только знаменатель передаточной функции, а числитель не контролируем

А ведь числитель тоже влияет на вид переходного процесса!

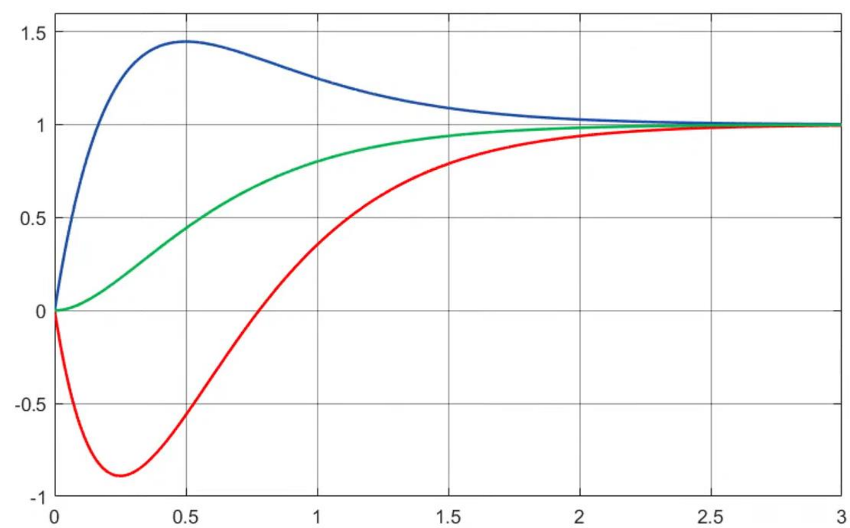
Передаточные функции

$$1 \longrightarrow \boxed{\dfrac{9s+9}{s^2+6s+9}} \longrightarrow$$

$$1 \longrightarrow \boxed{\dfrac{9}{s^2+6s+9}} \longrightarrow$$

$$1 \longrightarrow \boxed{\dfrac{-9s+9}{s^2+6s+9}} \longrightarrow$$

Переходные процессы



Вы можете пробовать использовать полиномы Ньютона и Баттерворта для выбора желаемых собственных чисел…

Но это не даёт никаких гарантий в общем случае

Если и другие методы, но все они скорее эмпирические

Короче, выбор желаемого спектра – нетривиальная задача!

Зато, когда желаемый спектр уже выбран….

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Gamma Q - QA = YC \\ L = Q^{-1}Y \end{cases}$$

Вы знаете, что делать!