



Робастное и адаптивное управление в робототехнических приложениях

к.т.н. Борисов Олег Игоревич

Факультет систем управления и робототехники, Университет ИТМО

1. Метод последовательного компенсатора
2. Метод расширенного наблюдателя
3. Метод внутренней модели
4. Робастное управление надводным судном
5. Адаптивное управление надводным судном
6. Робастное управление манипуляционным роботом
7. Адаптивное управление манипуляционными роботами

Удержание заданного положения надводного судна

Постановка задачи

Для решения задачи удержания положения надводного судна введем соответствующие допущения о малых скоростях и о малом значении угла рыскания, в силу которых рассмотрим динамическую модель надводного судна в параллельных координатах:

$$\dot{x} = u \quad (1)$$

$$\dot{y} = v \quad (2)$$

$$\dot{\psi} = r \quad (3)$$

$$m_{11}\dot{u} = X_u u + X \quad (4)$$

$$m_{22}\dot{v} + m_{23}\dot{r} = Y_v v + Y_r r + Y \quad (5)$$

$$m_{32}\dot{v} + m_{33}\dot{r} = N_v v + N_r r + N \quad (6)$$

где (x, y) — координаты смещения судна в продольном и поперечном направлениях, ψ — курсовой угол судна, u , v и r — соответственно скорости продольного, поперечного и вращательного движения, m_{11} , m_{22} , m_{23} , m_{32} и m_{33} — параметры масс, X_u , Y_v , Y_r , N_v и N_r — параметры демпфирования, X , Y и N — соответственно силы и момент тяги, создаваемые исполнительными приводами для продольного, поперечного и вращательного движения.

Физические параметры объекта принимаются неизвестными. Измерению доступны только регулируемые переменные x , y и ψ . Целью управления является обеспечение выполнения следующего целевого условия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \eta_d$$

где $\eta = [x \ y \ \psi]^T$ и $\eta_d = [x_d \ y_d \ \psi_d]^T$ — векторы, содержащие соответственно текущие и желаемые координаты надводного судна в плоскости. Для решения поставленной задачи воспользуемся методом последовательного компенсатора¹.

¹Bobtsov, A. A. (2002). Robust output-control for a linear system with uncertain coefficients. Automation and Remote Control, 63(11), 1794-1802.

Перепишем модель (1)-(6) как

$$m_{11}\ddot{x} = X_u\dot{x} + X$$

откуда, разрешая уравнение относительно x и применяя оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$, получим модель

$$x = \frac{1}{m_{11}p^2 - X_u p} X = \frac{b_x(p)}{a_x(p)} X \quad (7)$$

в которой относительная степень передаточной функции $\frac{b_x(p)}{a_x(p)}$ равна $\rho_x = 2$.

Выберем закон управления вида

$$X = -\alpha_x(p) \mu_x (x - \varepsilon_x) \quad (8)$$

где $\alpha_x(p)$ — произвольный гурвицев полином степени $\rho_x - 1 = 1$, μ_x — коэффициент, выбранный из условия гурвицевости полинома $a_x(p) + \mu_x b_x(p) \alpha_x(p)$, $\varepsilon_x = x - \hat{x}$ — невязка наблюдателя вида

$$\dot{\hat{x}} = \sigma_x (-k_x \hat{x} + k_x x) = \sigma_x k_x \varepsilon_x \quad (9)$$

где k_x — коэффициент, выбранный исходя из обеспечения асимптотической устойчивости наблюдателя (9), σ_x — коэффициент, выбранный для достижения экспоненциальной устойчивости из условия $\sigma_x > \mu_x$

и выполнения соотношений

$$-2n_x k_x \sigma + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} n_x^2 c_x^T A_x A_x^T c_x + n_x^2 c_x^T b_x b_x^T c_x + 1 \leq -R_{\hat{x}} \quad (10)$$

где n_x — константа, удовлетворяющая скалярному уравнению Ляпунова

$$2n_x (-k_x) = -Q_{\hat{x}} \quad (11)$$

$Q_{\hat{x}} > 0$ и $R_{\hat{x}} > 0$ — положительные константы, A_x , b_x и c_x — матрицы модели замкнутой системы (7)-(8) в пространстве состояний, константа δ удовлетворяет равенству

$$-Q_x + \delta P_x b_x b_x^T P_x + \delta I = -R_x \quad (12)$$

где $R_x = R_x^T > 0$ — положительно-определенная матрица и P_x — матрица, удовлетворяющая уравнению Ляпунова

$$A_x^T P_x + P_x A_x = -Q_x \quad (13)$$

где $Q_x = Q_x^T > 0$ — положительно-определенная матрица.

Запишем модель (2), (3), (5), (6) в виде:

$$m_{22}\dot{v} = Y_v v + Y_r r + Y - m_{23}\dot{r}$$

$$m_{33}\dot{r} = N_v v + N_r r + N - m_{32}\dot{v}$$

откуда, разрешая уравнения относительно y и ψ и снова применяя оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$, получим две подсистемы с перекрестными связями

$$y = \frac{Y + \left(Y_r - m_{23}\frac{1}{m_{33}}N_r\right)p\psi - m_{23}\frac{1}{m_{33}}N}{\left(m_{22} - m_{23}\frac{1}{m_{33}}m_{32}\right)p^2 - \left(Y_v - m_{23}\frac{1}{m_{33}}N_v\right)p} = \frac{b_y(p)}{a_y(p)}Y + \frac{c_y(p)}{a_y(p)}\psi + \frac{1}{a_y(p)}d_N \quad (14)$$

$$\psi = \frac{N + \left(N_v - m_{32}\frac{1}{m_{22}}Y_v\right)py - m_{32}\frac{1}{m_{22}}Y}{\left(m_{33} - m_{32}\frac{1}{m_{22}}m_{23}\right)p^2 - \left(N_r - m_{32}\frac{1}{m_{22}}Y_r\right)p} = \frac{b_\psi(p)}{a_\psi(p)}N + \frac{c_\psi(p)}{a_\psi(p)}y + \frac{1}{a_\psi(p)}d_Y \quad (15)$$

в которых $d_N = -m_{23}\frac{1}{m_{33}}N$ и $d_Y = -m_{32}\frac{1}{m_{22}}Y$ — взаимные воздействия одной подсистемы на другую при приведении их в движение. Эти перекрестные связи рассматриваются как ограниченные возмущения. Относительные степени передаточных функций $\frac{b_y(p)}{a_y(p)}$ и $\frac{b_\psi(p)}{a_\psi(p)}$ равны $\rho_y = 2$ и $\rho_\psi = 2$.

Аналогично (8) выберем законы управления

$$Y = -\alpha_y(p)(\mu_y + \kappa_y)(y - \varepsilon_y) \quad (16)$$

$$N = -\alpha_\psi(p)(\mu_\psi + \kappa_\psi)(\psi - \varepsilon_\psi) \quad (17)$$

где $\alpha_y(p)$ и $\alpha_\psi(p)$ — произвольные гурвицевы полиномы степеней $\rho_y - 1 = 1$ и $\rho_\psi - 1 = 1$, μ_y и μ_ψ — коэффициенты, выбранные из условия гурвицевости полиномов $a_y(p) + \mu_y b_y(p)\alpha_y(p)$ и $a_\psi(p) + \mu_\psi b_\psi(p)\alpha_\psi(p)$, κ_y и κ_ψ — коэффициенты, которые будут определены позднее, $\varepsilon_y = y - \hat{y}$ и $\varepsilon_\psi = \psi - \hat{\psi}$ — невязки наблюдателей вида

$$\dot{\hat{y}} = \sigma_y(-k_y \hat{y} + k_y y) = \sigma_y k_y \varepsilon_y \quad (18)$$

$$\dot{\hat{\psi}} = \sigma_\psi(-k_\psi \hat{\psi} + k_\psi \psi) = \sigma_\psi k_\psi \varepsilon_\psi \quad (19)$$

где k_y и k_ψ — коэффициенты, выбранные исходя из обеспечения асимптотической устойчивости наблюдателей (18), (19) относительно \hat{y} и $\hat{\psi}$, σ_y и σ_ψ — коэффициенты, выбранные для достижения экспоненциальной устойчивости из условий $\sigma_y > \mu_y$, $\sigma_\psi > \mu_\psi$

и выполнения соотношений

$$\begin{aligned} -2n_y\sigma_y k_y + \frac{1}{\delta}(\mu_y + \kappa_y) + \frac{1}{\delta}c_y^T c_y n_y^2 + \kappa_y c_y^T b_y b_y^T c_y n_y^2 \\ + (\mu_y + \kappa_y) c_y^T c_y n_y^2 + (\mu_y + \kappa_y) b_y^T b_y + \kappa_y c_y^T c_y n_y^2 \leq -R_{\hat{y}} \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2n_\psi\sigma_\psi k_\psi + \frac{1}{\delta}(\mu_\psi + \kappa_\psi) + \frac{1}{\delta}c_\psi^T c_\psi n_\psi^2 + \kappa_\psi c_\psi^T b_\psi b_\psi^T c_\psi n_\psi^2 \\ + (\mu_\psi + \kappa_\psi) c_\psi^T c_\psi n_\psi^2 + (\mu_\psi + \kappa_\psi) b_\psi^T b_\psi + \kappa_\psi c_\psi^T c_\psi n_\psi^2 \leq -R_{\hat{\psi}} \quad (21) \end{aligned}$$

где n_y и n_ψ — константы, удовлетворяющие скалярным уравнениям Ляпунова

$$2n_y(-k_y) = -Q_{\hat{y}} \quad (22)$$

$$2n_\psi(-k_\psi) = -Q_{\hat{\psi}} \quad (23)$$

$Q_{\hat{y}} > 0$, $Q_{\hat{\psi}} > 0$ и $R_{\hat{y}} > 0$, $R_{\hat{\psi}} > 0$ — положительные константы, A_y , b_y , c_y , q_y и A_ψ , b_ψ , c_ψ , q_ψ — матрицы моделей замкнутых систем (14), (16) и (15), (17) в пространстве состояний, константа δ ограничена $0 < \delta < 0.5$ и совместно с коэффициентами κ_y и κ_ψ удовлетворяет равенствам:

$$-Q_y + \delta ((\mu_y + \kappa_y) c_y c_y^T + A_y^T A_y) + \frac{1}{\kappa_\psi} (P_y q_y q_y^T P_y^T + c_y^T q_\psi^T q_\psi c_y) = -R_y \quad (24)$$

$$-Q_\psi + \delta ((\mu_\psi + \kappa_\psi) c_\psi c_\psi^T + A_\psi^T A_\psi) + \frac{1}{\kappa_y} (P_\psi q_\psi q_\psi^T P_\psi^T + c_\psi^T q_y^T q_y c_\psi) = -R_\psi \quad (25)$$

где $R_y = R_y^T > 0$, $R_\psi = R_\psi^T > 0$ — положительно-определенные матрицы, P_y и P_ψ — матрицы, удовлетворяющие уравнениям Ляпунова

$$A_y^T P_y + P_y A_y = -Q_y, \quad (26)$$

$$A_\psi^T P_\psi + P_\psi A_\psi = -Q_\psi, \quad (27)$$

где $Q_y = Q_y^T > 0$, $Q_\psi = Q_\psi^T > 0$ — положительно-определенные матрицы.

Без потери общности проанализируем устойчивость замкнутой системы в положении равновесия $(x, \hat{x}) = (0, 0)$. Подставляя закон управления (8) в модель (7), получим замкнутую систему

$$x = \frac{\mu_x b_x(p) \alpha_x(p)}{a_x(p) + \mu_x b_x(p) \alpha_x(p)} \varepsilon_x$$

которая эквивалентна модели в пространстве состояний

$$\dot{z}_x = A_x z_x + b_x \varepsilon_x \tag{28}$$

$$x = c_x^T z_x \tag{29}$$

где z_x — вектор состояния.

Вычислим производную невязки наблюдателя

$$\dot{\varepsilon}_x = \dot{x} - \sigma_x (-k_x \hat{x} + k_x x) = \dot{x} - \sigma_x k_x \varepsilon_x \tag{30}$$

которая будет использована позднее.

Выберем функцию Ляпунова из класса квадратичных форм в виде:

$$V_x = z_x^T P_x z_x + n_x \varepsilon_x^2 \quad (31)$$

Выбор функции удовлетворяет требованиям, предъявляемым к кандидат-функциям Ляпунова: $V_x = 0$ при $(x, \hat{x}) = (0, 0)$, поскольку при $z_x = 0$ в соответствии с (29) имеем $x = 0$, а при $\varepsilon_x^2 = 0$ имеем $x = \hat{x}$. Кроме того, $V_x \geq 0$ при $(x, \hat{x}) \neq (0, 0)$ в силу квадратичной формы V_x .

Вычислим производную по времени функции V_x и после необходимых преобразований получим

$$\dot{V}_x \leq -z_x^T R_x z_x - R_{\hat{x}} \varepsilon_x^2 \leq -\lambda_{\min} V_x \quad (32)$$

где $\lambda_{\min} > 0$ — наименьшее из собственных чисел R_x и $R_{\hat{x}}$. Из (32) следует, что система экспоненциально устойчива.

Начнем с упрощенного случая, пренебрегая в (14) и (15) взаимными воздействиями одной подсистемы на другую при приведении их в движение, т.е. при $d_N = 0$ и $d_Y = 0$. Подставляя законы управления (16), (17) соответственно в модели (14), (15), получим замкнутые системы

$$\begin{aligned} y &= \frac{b_y(p)\alpha_y(p)}{a_y(p) + \mu_y b_y(p)\alpha_y(p)}(-\kappa_y y + (\mu_y + \kappa_y)\varepsilon_y) + \frac{c_y(p)}{a_y(p) + \mu_y b_y(p)\alpha_y(p)}\psi \\ \psi &= \frac{b_\psi(p)\alpha_\psi(p)}{a_\psi(p) + \mu_\psi b_\psi(p)\alpha_\psi(p)}(-\kappa_\psi \psi + (\mu_\psi + \kappa_\psi)\varepsilon_\psi) + \frac{c_\psi(p)}{a_\psi(p) + \mu_\psi b_\psi(p)\alpha_\psi(p)}y \end{aligned}$$

которые эквивалентны моделям в пространстве состояний

$$\dot{z}_y = A_y z_y + b_y(-\kappa_y y + (\mu_y + \kappa_y)\varepsilon_y) + q_y \psi \quad (33)$$

$$y = c_y^T z_y \quad (34)$$

$$\dot{z}_\psi = A_\psi z_\psi + b_\psi(-\kappa_\psi \psi + (\mu_\psi + \kappa_\psi)\varepsilon_\psi) + q_\psi y \quad (35)$$

$$\psi = c_\psi^T z_\psi \quad (36)$$

где z_y и z_ψ — векторы состояния.

Вычислим производные невязок наблюдателей

$$\dot{\varepsilon}_y = \dot{y} - \sigma_y (-k_y \hat{y} + k_y y) = \dot{y} - \sigma_y k_y \varepsilon_y \quad (37)$$

$$\dot{\varepsilon}_\psi = \dot{\psi} - \sigma_\psi \left(-k_\psi \hat{\psi} + k_\psi \psi \right) = \dot{\psi} - \sigma_\psi k_\psi \varepsilon_\psi \quad (38)$$

которые будут использованы позднее.

Выберем функцию Ляпунова из класса квадратичных форм аналогично (31):

$$V = z_y^T P_y z_y + z_\psi^T P_\psi z_\psi + n_y \varepsilon_y^2 + n_\psi \varepsilon_\psi^2 \quad (39)$$

Следовательно, (39) удовлетворяет требованиям, предъявляемым к кандидат-функциям Ляпунова, аналогично (31).

Вычислим производную по временим функции V и после необходимых преобразований получим

$$\dot{V} \leq -z_y^T R_y z_y - z_\psi^T R_\psi z_\psi - R_{\hat{y}} \varepsilon_y^2 - R_{\hat{\psi}} \varepsilon_\psi^2 \leq -c_3 \|z\|^2 \quad (40)$$

где $c_3 = \min(\lambda_{\min}(R_y), \lambda_{\min}(R_\psi), R_{\hat{y}}, R_{\hat{\psi}})$ и $z = [z_y^T \quad z_\psi^T \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_\psi]^T$. Из (40) следует, что система без учета перекрестных связей экспоненциально устойчива.

Перейдем к полноценному случаю, учитывая в (14) и (15) взаимные воздействия одной подсистемы на другую при приведении их в движение, т.е. при $d_N \neq 0$ и $d_Y \neq 0$. Проанализируем ограничения на d_Y и d_N с учетом существования физических пределов насыщения Y_{\max} и N_{\max} на исполнительные приводы

$$\|d_Y\| \leq \sqrt{\left(m_{23} \frac{1}{m_{33}} Y_{\max}\right)^2} \quad \|d_N\| \leq \sqrt{\left(m_{32} \frac{1}{m_{22}} N_{\max}\right)^2}.$$

Тогда производная по времени функции Ляпунова (39) примет вид:

$$\dot{V} \leq -c_3 \|z\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial z} \right\| d_{\max}$$

где $d_{\max} \geq \|d_Y\| + \|d_N\|$ — верхняя граница суммы возмущений, обусловленных перекрестными связями. Вводя константу $0 < \theta < 1$ и получим

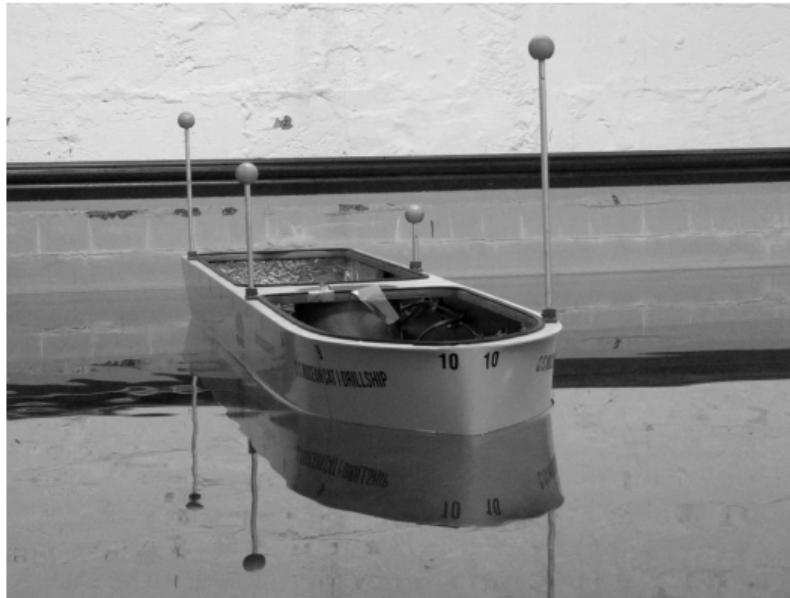
$$\dot{V} \leq -(1 - \theta) c_3 \|z\|^2 - \theta c_3 \|z\|^2 + c_4 \|z\| d_{\max}$$

откуда видно, что сумма последних двух членов отрицательна в том случае если $\|z\| > \frac{c_4 d_{\max}}{\theta c_3}$, то имеем $\dot{V} \leq -(1 - \theta) c_3 \|z\|^2$, откуда следует локальная экспоненциальная устойчивость системы.

Траектории z ограничены как

$$\|z(t)\| \leq \frac{c_4}{c_3} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \frac{d_{\max}}{\theta}$$

в пределах конечного интервала времени.



Физическая модель надводного судна «C/S Inocean Cat I Drillship» в AMOS,
NTNU

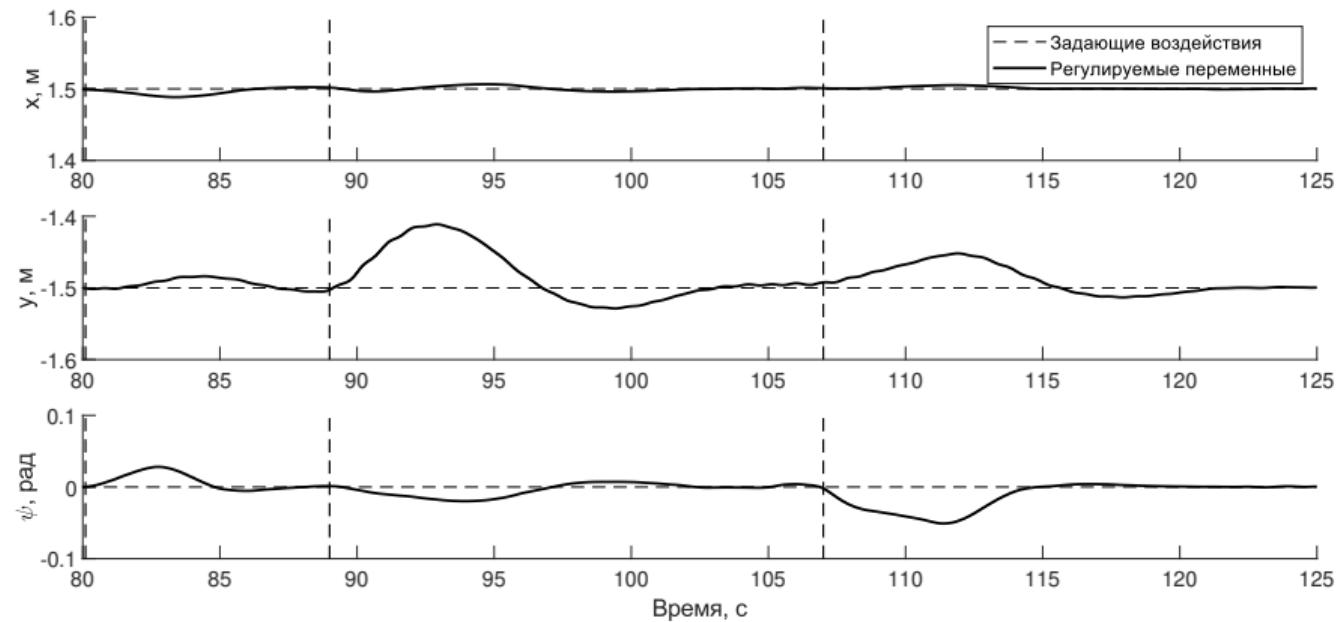
Параметры модели (1)–(6) применительно к рассматриваемому судну приведены в таблице.

Параметры физической модели надводного судна «C/S Inocean Cat I Drillship» в AMOS, NTNU

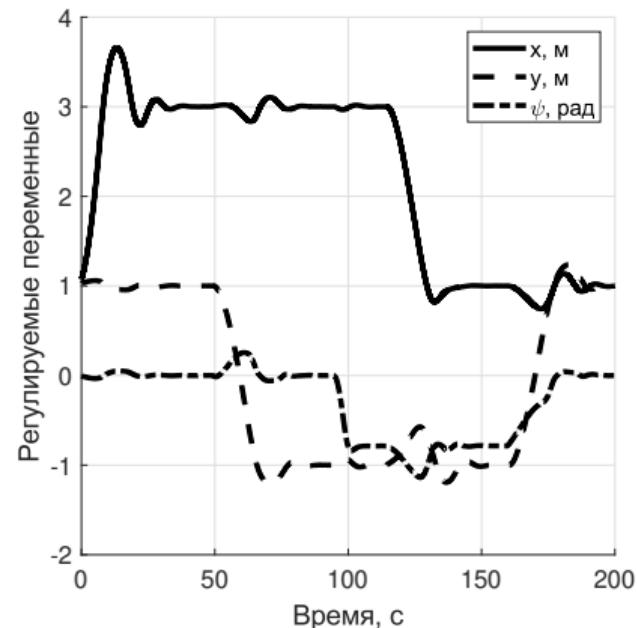
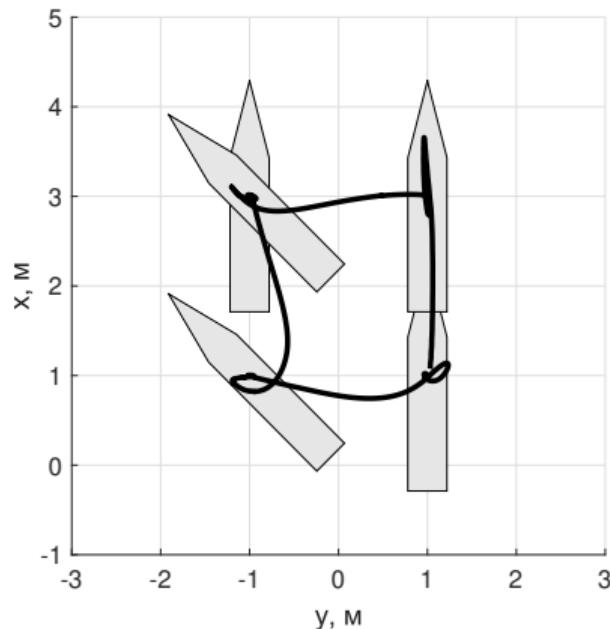
Параметр масс	Значение	Параметр демпфирования	Значение
m_{11}	124.658	X_u	-2.332
m_{22}	99.030	Y_v	-4.673
m_{23}	-0.525	Y_r	-7.250
m_{32}	-0.157	N_v	0.000
m_{33}	47.987	N_r	$-1.675 \cdot 10^{-2}$

Сформируем систему динамического позиционирования на базе регуляторов (8), (9), (16)–(19). Полиномы регуляторов выбраны как $\alpha_x(p) = \alpha_y(p) = \alpha_\psi(p) = p + 1$.

Параметры регуляторов выбраны как $k_x = k_y = k_\psi = 1$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_\psi = 10$, $\mu_x = 15$, $\mu_y = \mu_\psi = 20$, $\kappa_y = \kappa_\psi = 0$.



Удержание положения при воздействии внешних возмущений



Удержание положения в «тесте четырех углов»

Метод расширенного наблюдателя

Нормальная форма

Рассмотрим класс нелинейных систем вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{41}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — гладкие функции.

Осуществим глобальную замену переменных для преобразования системы (41) в строгую нормальную форму вида

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f_0(z, \xi), \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r, \\ \dot{\xi}_r &= q(z, \xi) + b(z, \xi)u, \\ y &= \xi_1,\end{aligned}\tag{42}$$

где r — относительная степень, $b(z, \xi)$ ограничена как $0 < b_{min} \leq b(z, \xi) \leq b_{max}$.

Нормальная форма

Система (42) может быть представлена как

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f_0(z, \xi), \\ \dot{\xi} &= A\xi + B[q(z, \xi) + b(z, \xi)u], \\ y &= C\xi,\end{aligned}\tag{43}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0). \tag{44}$$

Выражение $\dot{z} = f_0(z, \xi)$ отражает нуль-динамику системы. Если она содержит управление

$$\dot{z} = f_0(z, \xi) + g_0(z, \xi)u, \tag{45}$$

то такое представление системы носит название нестрогой нормальной формы.

Исходя из (43), выберем номинальный закон управления

$$u = b^{-1}(z, \xi)[-q(z, \xi) + K\xi], \quad (46)$$

подставив который в объект управления, получим замкнутую модель вида

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_0(z, \xi), \\ \dot{\xi} &= (A + BK)\xi, \\ y &= C\xi, \end{aligned} \quad (47)$$

где K может быть выбрана из условия гурвицевости матрицы $A + BK$. Для устойчивости всей системы в целом требуется допущение об асимптотической устойчивости нуль-динамики $\dot{z} = f_0(z, \xi)$. Системы с уточивой нуль-динамикой называются минимально-фазовыми.

!

Однако, закон управления (105) является нереализуемым, поскольку содержит неопределенные составляющие $b(z, \xi)$, $q(z, \xi)$ и ξ .

Заменим нереализуемый закон управления

$$u = b^{-1}(z, \xi)[-q(z, \xi) + K\xi] \quad (48)$$

на

$$u = \text{sat}_N[\bar{b}^{-1}(-\sigma + K\hat{\xi})], \quad (49)$$

где $\text{sat}_N(\cdot)$ — гладкая функция насыщения с пределом N , \bar{b} — ненулевой параметр, удовлетворяющий условию

$$|[b(z, \xi) - \bar{b}]\bar{b}^{-1}| \leq \delta < 1, \quad (50)$$

$\hat{\xi}$ и σ — являются состоянием расширенного наблюдателя вида

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \kappa a_r(y - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \kappa^2 a_{r-1}(y - \hat{\xi}_1), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_{r-1} &= \hat{\xi}_r + \kappa^{r-1} a_2(y - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\hat{\xi}}_r &= \sigma + \bar{b}u + \kappa^r a_1(y - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\sigma} &= \kappa^{r+1} a_0(y - \hat{\xi}_1), \end{aligned} \quad (51)$$

где κ и $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}, a_r$ — настроочные параметры.

- ▶ Параметр \bar{b} должен достаточно близко аппроксимировать функцию $b(z, \xi)$.
- ▶ Предел насыщения N должен обеспечивать охват достаточно большого множества начальных условий (значений задающего сигнала), для которых сохраняются свойства устойчивости.
- ▶ Матрица K выбирается из условия гурвицевости матрицы $A + BK$.
- ▶ Параметр κ должен иметь достаточно большое значение.
- ▶ Параметры a_0, a_1, \dots, a_{r-1} выбираются так, что собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -a_r & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{r-1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

вещественны и отрицательны.

Обратим внимание, что нереализуемый закон управления

$$u = b^{-1}(z, \xi)[-q(z, \xi) + K\xi] \quad (53)$$

обеспечивает в системе глобальную асимптотическую устойчивость.

В случае робастного закона управления

$$u = \text{sat}_N[\bar{b}^{-1}(-\sigma + K\hat{\xi})], \quad (54)$$

глобальная асимптотическая устойчивость недостижима по причине использования функции насыщения $\text{sat}_N(\cdot)$.

Однако, для фиксированного сколь угодно большого множества начальных условий может быть гарантирована ограниченность траекторий системы и их сходимость к сколь угодно малому множеству, что соответствует полуглобальной практической устойчивости .

Если, кроме того, нереализуемый закон управления обеспечивает локальную экспоненциальную устойчивость, то с помощью робастного закона управления достигается полуглобальная асимптотическая устойчивость .

Утверждение

Для заданного произвольного компактного множества начальных условий существует набор параметров регулятора такой, что для $t \geq 0$ все траектории замкнутой системы (43), (92), (94) остаются ограниченными и $y(t)$ стремится к нулю при времени, стремящемся к бесконечности, что обеспечивает выполнение цели управления.

Метод внутренней модели

Внешние воздействия могут быть представлены

- ▶ задающими сигналами (отрадают желаемое поведение системы)
- ▶ возмущающими сигналами (препятствуют достижению желаемого поведения)

Оба типа сигналов могут быть представлены как

$$\varrho = \delta + \rho, \tag{55}$$

где δ — нерегулярная компонента, представляющая собой стохастическую функцию пренебрежимо малой амплитуды, ρ — регулярная компонента, представляющая собой детерминированную функцию доминирующей амплитуды.

Регулярная компонента ρ внешнего воздействия может рассматриваться как выход генератора вида

$$\begin{aligned}\dot{w} &= Sw, \\ \rho &= Hw,\end{aligned}\tag{56}$$

где $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ — вектор состояния с начальными условиями $w(0)$, S — матрица состояния, H — матрица выхода.

Решением системы (56) является

$$\rho(t) = He^{St}w(0),\tag{57}$$

откуда видно, что параметры производимого сигнала $\rho(t)$ зависят от матриц H , S и начальных условий $w(0)$.

Построение генераторов может быть выполнено с использованием подхода последовательного дифференцирования.

Пример 1. Статический сигнал (константа)

Рассмотрим статический сигнал

$$\rho(t) = \mathcal{C} = \text{const.} \quad (58)$$

Зададим первое состояние

$$w_1 = \mathcal{C} \quad (59)$$

и его проинтегрируем

$$\dot{w}_1 = \dot{\mathcal{C}} = 0. \quad (60)$$

В результате можем сделать вывод, что сигнал (58) может быть произведен генератором (56) при

$$S = 0, \quad H = 1, \quad w(0) = \mathcal{C}. \quad (61)$$

Пример 2. Гармонический сигнал

Рассмотрим гармонический сигнал

$$\rho(t) = \mathcal{A} \sin(\omega t + \psi), \quad (62)$$

где \mathcal{A} — амплитуда, ω — частота, ψ — фазовый сдвиг.

Зададим первое состояние

$$w_1 = \mathcal{A} \sin(\omega t + \psi) \quad (63)$$

и, его проинтегрировав, зададим второе состояние

$$\dot{w}_1 = \omega \mathcal{A} \cos(\omega t + \psi) = w_2, \quad (64)$$

дифференцируя которое, получим

$$\dot{w}_2 = -\omega^2 \mathcal{A} \sin(\omega t + \psi) = -\omega^2 w_1. \quad (65)$$

В результате можем сделать вывод, что сигнал (62) может быть произведен генератором (56) при

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w(0) = \begin{pmatrix} \rho(0) \\ \dot{\rho}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} \sin \psi \\ \omega \mathcal{A} \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Пример 3. Смещенный гармонический сигнал

Рассмотрим смещенный синусоидальный сигнал

$$\rho(t) = \mathcal{C} + \mathcal{A} \sin(\omega t + \psi), \quad (67)$$

где \mathcal{A} — амплитуда, ω — частота, ψ — фазовый сдвиг, \mathcal{C} — смещение.

Зададим первое состояние

$$w_1 = \mathcal{C} \quad (68)$$

и, его продифференцируем

$$\dot{w}_1 = \dot{\mathcal{C}} = 0. \quad (69)$$

Зададим второе состояние

$$w_2 = \mathcal{A} \sin(\omega t + \psi) \quad (70)$$

и, его продифференцировав, зададим третье состояние

$$\dot{w}_2 = \omega \mathcal{A} \cos(\omega t + \psi) = w_3, \quad (71)$$

дифференцируя которое, получим

$$\ddot{w}_3 = -\omega^2 \mathcal{A} \sin(\omega t + \psi) = -\omega^2 w_2. \quad (72)$$

В результате можем сделать вывод, что сигнал (67) может быть произведен генератором (56) при

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w(0) = \begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ \rho(0) \\ \dot{\rho}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{A} \sin \psi \\ \omega \mathcal{A} \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Пример 4. Полиномиальный сигнал

Рассмотрим полиномиальный сигнал

$$\rho(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad (74)$$

где $a_i, i = \overline{0, 5}$ — некоторые коэффициенты.

Зададим первое состояние

$$w_1 = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (75)$$

и, последовательно дифференцируя и задавая остальные состояния, получим

$$\dot{w}_1 = 5a_5 t^4 + 4a_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1 = w_2$$

$$\dot{w}_2 = 20a_5 t^3 + 12a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2 = w_3,$$

$$\dot{w}_3 = 60a_5 t^2 + 24a_4 t + 6a_3 = w_4,$$

$$\dot{w}_4 = 120a_5 t + 24a_4 = w_5,$$

$$\dot{w}_5 = 120a_5.$$

В результате можем сделать вывод, что сигнал (74) может быть произведен генератором (56) при

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), \quad w(0) = \begin{pmatrix} \rho(0) \\ \rho^{(1)}(0) \\ \rho^{(2)}(0) \\ \rho^{(3)}(0) \\ \rho^{(4)}(0) \\ \rho^{(5)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ 2a_2 \\ 6a_3 \\ 24a_4 \\ 120a_5 \end{pmatrix} \quad (76)$$

Другие случаи

Мультигармонические сигналы

Аналогичным образом могут быть построены генераторы, производящие мультигармонические сигналы, состоящие из ℓ гармоник

$$\rho(t) = \mathcal{A}_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \mathcal{A}_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2) + \cdots + \mathcal{A}_\ell \sin(\omega_\ell t + \psi_\ell). \quad (77)$$

Векторные сигналы

С использованием блочно-диагонального представления системы могут быть построены генераторы, производящие векторные сигналы

$$S = \text{diag}(S_1, S_2, \dots, S_n), \quad H = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_n), \quad \rho(t) = (\rho_1(t) \quad \rho_2(t) \quad \dots \quad \rho_n(t))^T \quad (78)$$

Нелинейные генераторы

В общем виде генераторы могут рассматриваться в нелинейной виде

$$\dot{w} = s(w). \quad (79)$$

Нормальная форма

Рассмотрим систему, подверженную влиянию внешних воздействий, в нормальной форме

$$\begin{aligned}\dot{w} &= s(w), \\ \dot{z} &= f_0(w, z, \xi), \\ \dot{\xi} &= A\xi + B[q(w, z, \xi) + b(w, z, \xi)u], \\ y &= C\xi,\end{aligned}\tag{80}$$

при

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0). \tag{81}$$

Сосредоточимся на классе линейных генераторов, для которого справедливо $\dot{w} = s(w) = Sw$.

Внутренняя модель

Рассмотрим выражения

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) = f(w, \pi(w), \psi(w)), \quad h_e(w, \pi(w)) = 0. \quad (82)$$

Исходя из (80), зададим

$$\begin{aligned} \pi(w) &= 0, \\ \psi(w) &= -b^{-1}q(w, 0, 0) := \bar{\Psi}w. \end{aligned} \quad (83)$$

Для компенсации внешних воздействий добавим в систему внутреннюю модель вида

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= F\eta + G[\Gamma\eta + \bar{u}], \\ u &= \Gamma\eta + \bar{u}, \end{aligned} \quad (84)$$

где \bar{u} — закон управления, который будет определен позднее, $F \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$ — гурвицева матрица во фробениусовой форме, векторы $G = (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^{n_w}$ и $\Gamma \in \mathbb{R}^{1 \times n_w}$ такие, что пара (F, G) является управляемой и выполняется условие

$$\lambda_i\{F + G\Gamma\} = \lambda_i\{S\}. \quad (85)$$

Известно, что существует матрица Σ такая, что

$$\begin{aligned} \Sigma S &= (F + G\Gamma)\Sigma, \\ \bar{\Psi} &= \Gamma\Sigma. \end{aligned} \quad (86)$$

Поскольку матрица $\Phi = F + G\Gamma$ характеризуется чисто мнимыми собственными числами, то ее характеристический полином имеет вид

$$\begin{aligned}\phi(s) &= s(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) \dots (s^2 + \omega_l^2) \\ &= s^{2l+1} + \theta_1 s^{2l-1} + \dots + \theta_l s,\end{aligned}$$

где ω_k ($k = \overline{1, l}$) представляют собой частоты l гармоник, а θ_k являются параметрами, связанными с ω_k с помощью формулы Виета

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_l^2, \\ \theta_2 &= \omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_1^2 \omega_3^2 + \dots + \omega_{l-1}^2 \omega_l^2, \\ &\vdots \\ \theta_l &= \omega_1^2 \omega_2^2 \dots \omega_l^2.\end{aligned}\tag{87}$$

Расчет вектора Γ внутренней модели

Тогда матрицы Φ и F могут рассматриваться как

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -\theta_l & 0 & -\theta_{l-1} & \cdots & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -f_0 & -f_1 & -f_2 & \cdots & -f_{2l-1} & -f_{2l} \end{pmatrix},$$
$$\Gamma = (\gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \cdots \quad \gamma_{2l-1} \quad \gamma_{2l}).$$

откуда можем вычислить составляющие вектора Γ как

$$\gamma_0 = f_0,$$

$$\gamma_1 = f_1 - \theta_l,$$

$$\gamma_2 = f_2,$$

\vdots

$$\gamma_{2l-2} = f_{2l-2},$$

$$\gamma_{2l-1} = f_{2l-1} - \theta_1,$$

$$\gamma_{2l} = f_{2l}.$$

Агрегированная система

Добавляя внутреннюю модель, получим агрегированную систему

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f_0(w, z, \xi), \\ \dot{\eta} &= F\eta + G[\Gamma\eta + \bar{u}], \\ \dot{\xi} &= A\xi + B[q(w, z, \xi) + b(w, z, \xi)[\Gamma\eta + \bar{u}]], \\ y &= C\xi,\end{aligned}\tag{88}$$

В качестве предварительного этапа синтеза управления \bar{u} , введем новую переменную

$$\tilde{\eta} = \eta - \Sigma w,\tag{89}$$

дифференцируя которую, получим

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\eta}} &= F\eta + G[\Gamma\eta + \bar{u}] - \Sigma S w \\ &= (F + G\Gamma)\eta + G\bar{u} - (F + G\Gamma)\Sigma w \\ &= F\tilde{\eta} + G(\Gamma\tilde{\eta} + \bar{u})\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + B[q(w, z, \xi) + b(w, z, \xi)[\Gamma\tilde{\eta} + \bar{\Psi}w + \bar{u}]] \\ &= A\xi + B[\tilde{q}(w, z, \xi) + b(w, z, \xi)[\Gamma\tilde{\eta} + \bar{u}]]\end{aligned}$$

где $\tilde{q}(w, z, \xi) = q(w, z, \xi) + b(w, z, \xi)\bar{\Psi}w$ равно нулю при $(z, \xi) = (0, 0)$ по построению $\bar{\Psi}$.

В итоге система (88) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f_0(w, z, \xi), \\ \dot{\tilde{\eta}} &= F\tilde{\eta} + G[\Gamma\tilde{\eta} + \bar{u}], \\ \dot{\xi} &= A\xi + B[\tilde{q}(w, z, \xi) + b(w, z, \xi)[\Gamma\tilde{\eta} + \bar{u}]], \\ y &= C\xi,\end{aligned}\tag{90}$$

При выборе закона управления \bar{u} как

$$\bar{u} = -\Gamma\tilde{\eta} + b^{-1}(w, z, \xi)[- \tilde{q}(w, z, \xi) + K\xi],\tag{91}$$

получим замкнутую систему

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f_0(w, z, \xi), \\ \dot{\tilde{\eta}} &= F\tilde{\eta} + Gb^{-1}[-\tilde{q}(w, z, \xi) + K\xi], \\ \dot{\xi} &= (A + BK)\xi, \\ y &= C\xi,\end{aligned}$$

которая при соответствующем выборе K является глобально асимптотически устойчивой.

Выберем робастный закон управления

$$\bar{u} = \text{sat}_N[\bar{b}^{-1}(-\sigma + K\hat{\xi})], \quad (92)$$

где $\text{sat}_N(\cdot)$ — гладкая функция насыщения с пределом N , \bar{b} — ненулевой параметр, удовлетворяющий условию

$$|[b(z, \xi) - \bar{b}]\bar{b}^{-1}| \leq \delta < 1, \quad (93)$$

$\hat{\xi}$ и σ — являются состоянием расширенного наблюдателя вида

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \kappa a_r(y - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \kappa^2 a_{r-1}(y - \hat{\xi}_1), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_{r-1} &= \hat{\xi}_r + \kappa^{r-1} a_2(y - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\hat{\xi}}_r &= \sigma + \bar{b}\bar{u} + \kappa^r a_1(y - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\sigma} &= \kappa^{r+1} a_0(y - \hat{\xi}_1), \end{aligned} \quad (94)$$

где κ и a_0, a_1, \dots, a_{r-1} — настроочные параметры.

Робастное управление надводным судном

Рассмотрим динамическую модель надводного судна вида

$$M\ddot{x} + D\dot{x} = \tau + \tau_d, \quad (95)$$

где $x = [X \ Y \ \Phi]^T$ — вектор положения и ориентации в параллельной системе координат, $\dot{x} = [\dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{\Phi}]^T$ — вектор скоростей, $\ddot{x} = [\ddot{X} \ \ddot{Y} \ \ddot{\Phi}]^T$ — вектор ускорений, $M = M^T > 0$ и $D > 0$ — матрицы масс и демпфирования, $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$ — вектор сил и моментов сил, производимыми исполнительными приводами, динамика которых описывается системой

$$\begin{aligned} \mu \dot{z} &= A_o z + B_o u, \\ \tau &= C_o z, \end{aligned} \quad (96)$$

где $A_o = \text{diag}(A_{o1}, A_{o2}, A_{o3})$, $B_o = \text{diag}(B_{o1}, B_{o2}, B_{o3})$, $C_o = \text{diag}(C_{o1}, C_{o2}, C_{o3})$ и $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ — вектор управления, A_o — гурвицева матрица, $\mu > 0$ — достаточно малое число, определяющее быструю динамику, матрицы A_o , B_o и C_o удовлетворяют условию

$$-C_o A_o^{-1} B_o = I, \quad (97)$$

где I — единичная матрица размерности 3×3 .

Вектор возмущающих воздействий $\tau_d = [\tau_{d1} \quad \tau_{d2} \quad \tau_{d3}]^T$ рассматривается как выход генератора

$$\begin{aligned}\dot{w}_d &= S_d w_d, \\ \tau_d &= H_d w_d,\end{aligned}\tag{98}$$

где $S_d = \text{diag}(S_{d1}, S_{d2}, S_{d3})$, $H_d = \text{diag}(H_{d1}, H_{d2}, H_{d3})$.

Вектор задающих воздействий $x_r = [X_r \quad Y_r \quad \Phi_r]^T$ рассматривается как выход генератора

$$\begin{aligned}\dot{w}_r &= S_r w_r, \\ x_r &= H_r w_r,\end{aligned}\tag{99}$$

где $S_r = \text{diag}(S_{r1}, S_{r2}, S_{r3})$, $H_r = \text{diag}(H_{r1}, H_{r2}, H_{r3})$.

Цель

Целью является синтез регулятора по выходу без учета динамики исполнительных приводов (96), обеспечивающего

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_e(t)| = 0,\tag{100}$$

где $x_e(t) = x(t) - x_r(t)$ — сигнал ошибки.

Нормальная форма

Дифференцируя $x_e(t)$, получим динамическую модель ошибки (95)

$$M\ddot{x}_e + D\dot{x}_e = \tau + \tau_d + \tau_r \quad (101)$$

где $\tau_r = -M\ddot{x}_r - D\dot{x}_r$.

Введем новые переменные

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_e, \\ \xi_2 &= \dot{x}_e, \end{aligned} \quad (102)$$

что является глобально определенной заменой переменных.

Для исследования влияния неучтеної динамики (96) добавим и вычтем сигнал u в (101) и перепишем систему в нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= q(\xi, \tau_d, \tau_r) + M^{-1}u - M^{-1}\varepsilon, \end{aligned} \quad (103)$$

где $q(\xi, \tau_d, \tau_r) = M^{-1}(-D\xi_2 + \tau_d + \tau_r)$ и $\varepsilon = u - \tau$.

Временно исключим из рассмотрения возмущения и рассмотрим систему (103) в виде

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= q(\xi) + M^{-1}u - M^{-1}\varepsilon,\end{aligned}\tag{104}$$

откуда выберем номинальный закон управления как

$$u = M(-q(\xi) - K\xi),\tag{105}$$

где, однако, не учитывается составляющая $-M^{-1}\varepsilon$, которая обусловлена наличием динамики исполнительных приводов.

Применяя закон управления (105) к объекту (104) получим замкнутую систему

$$\dot{\xi} = A\xi + B\varepsilon,\tag{106}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1} \end{bmatrix}.$$

Для компенсации внешних воздействий добавим в систему внутреннюю модель вида

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= F\eta + G[\Gamma\eta + \bar{u}], \\ u &= \Gamma\eta + \bar{u},\end{aligned}\tag{107}$$

где $F = \text{diag}(F_1, F_2, F_3)$, $G = \text{diag}(G_1, G_2, G_3)$, $\Gamma = \text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$, F_i — гурвицева матрица во фробениусовой форме, векторы $G_i = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T$ и Γ_i такие, что пара (F_i, G_i) является управляемой и выполняется условие

$$\lambda_k\{F_i + G_i\Gamma_i\} = \lambda_k\{S_i\}.$$

Расширенный наблюдатель

Следуя подходу² выберем закон управления для \bar{u}

$$\bar{u} = \text{sat}_L \bar{M}[-\sigma - K\hat{\xi}] \quad (108)$$

где L — предел насыщения, \bar{M} — обратимая матрица, удовлетворяющая

$$\|[M^{-1} - \bar{M}^{-1}]\bar{M}\|_1 < 1,$$

$K = [K_1 \ K_2]$, $K_1 = \text{diag}(k_{11}, k_{12}, k_{13})$, $K_2 = \text{diag}(k_{21}, k_{22}, k_{23})$ и $\hat{\xi}$, σ — состояния расширенного наблюдателя

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \kappa C_2(x_e - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \sigma + \bar{M}^{-1}\bar{u} + \kappa^2 C_1(x_e - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\sigma} &= \kappa^3 C_0(x_e - \hat{\xi}_1) \end{aligned} \quad (109)$$

где κ — достаточно большое число, C_0 , C_1 и C_2 — положительно определенные матрицы размерности 3×3 такие, что собственные числа матрицы

$$C = \begin{bmatrix} -C_2 & I & 0 \\ -C_1 & 0 & I \\ -C_0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где I — единичная матрица 3×3 , являются вещественными и отрицательными.

²Freidovich, L. and Khalil, H. (2008). Performance recovery of feedback-linearization-based designs. IEEE Transactions on Automatic Control, 53(10), 2324-2334.

Рассмотрим динамическую модель надводного судна (95) с параметрами

$$M = \begin{bmatrix} 3.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

и неучтеною динамикой исполнительных приводов (96) с параметрами

$$A_{o1} = A_{o2} = A_{o3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_{o1} = B_{o2} = B_{o3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{o1} = C_{o2} = C_{o3} = [1 \ 0],$$

и параметром, отражающим скорость сходимости, $\mu = 0.008$.

Определим возмущающий сигнал

$$\tau_d = \begin{bmatrix} \tau_{d1} \\ \tau_{d2} \\ \tau_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 9 \sin(0.75t + 9) \\ 1 + 3 \sin(0.50t + 4) \\ 5 + 4 \sin(0.25t + 7) \end{bmatrix},$$

производимый генератором (98) с параметрами

$$S_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5625 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.2500 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{d3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.0625 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_{d1} = [1 \ 1 \ 0], \quad H_{d2} = [1 \ 1 \ 0], \quad H_{d3} = [1 \ 1 \ 0].$$

и начальными условиями

$$w_{d1}(0) = [2.0000 \ 3.7091 \ -6.1501]^T,$$

$$w_{d2}(0) = [1.0000 \ -2.2704 \ -0.9805]^T,$$

$$w_{d3}(0) = [5.0000 \ 2.6279 \ 0.7539]^T.$$

Определим задающий сигнал

$$x_r = \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ \Phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \sin t \\ 2 + \sin 2t \\ \sin 0.5t \end{bmatrix},$$

производимый генератором (99) с параметрами

$$S_{r1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.00 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{r2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4.00 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{r3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.25 & 0 \end{bmatrix},$$

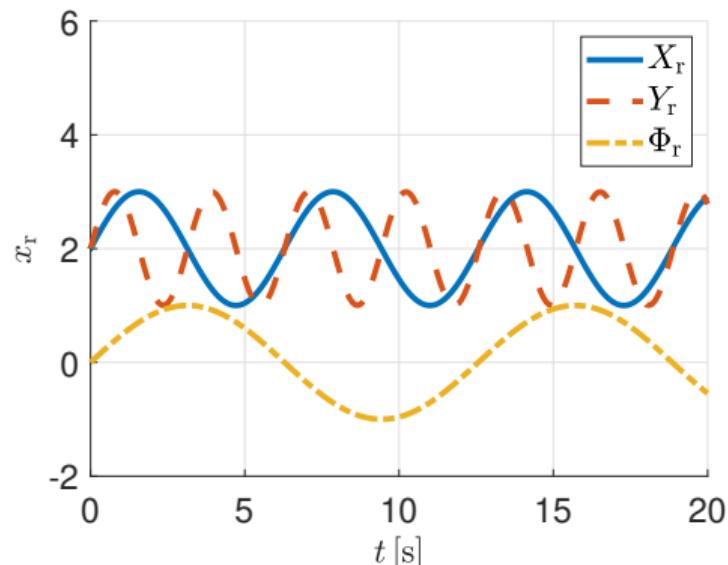
$$H_{r1} = [1 \ 1 \ 0], \quad H_{r2} = [1 \ 1 \ 0], \quad H_{r3} = [1 \ 1 \ 0].$$

и начальными условиями

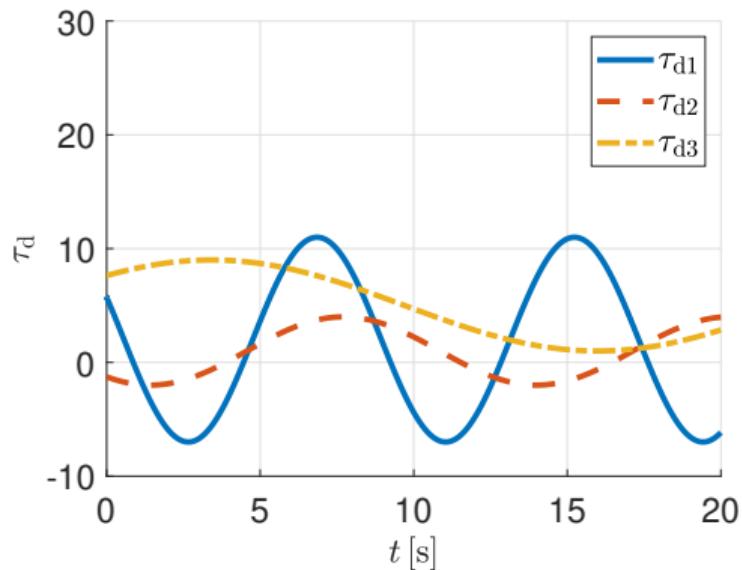
$$w_{r1}(0) = [2.0000 \ 0.0000 \ 1.0000]^T,$$

$$w_{r2}(0) = [2.0000 \ 0.0000 \ 2.0000]^T,$$

$$w_{r3}(0) = [0.0000 \ 0.0000 \ 0.5000]^T.$$



(a) Задающий сигнал



(b) Возмущающий сигнал

Рис.: Внешние воздействия

Выберем параметры закона управления (108), (109) как

$$L = 10^5, \bar{M} = I, \kappa = 50, K = [I \quad I],$$

$$C_0 = C_1 = \begin{bmatrix} 30 & 3 & 3 \\ 3 & 30 & 3 \\ 3 & 3 & 30 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix},$$

где I — единичная матрица размерности 3×3 .

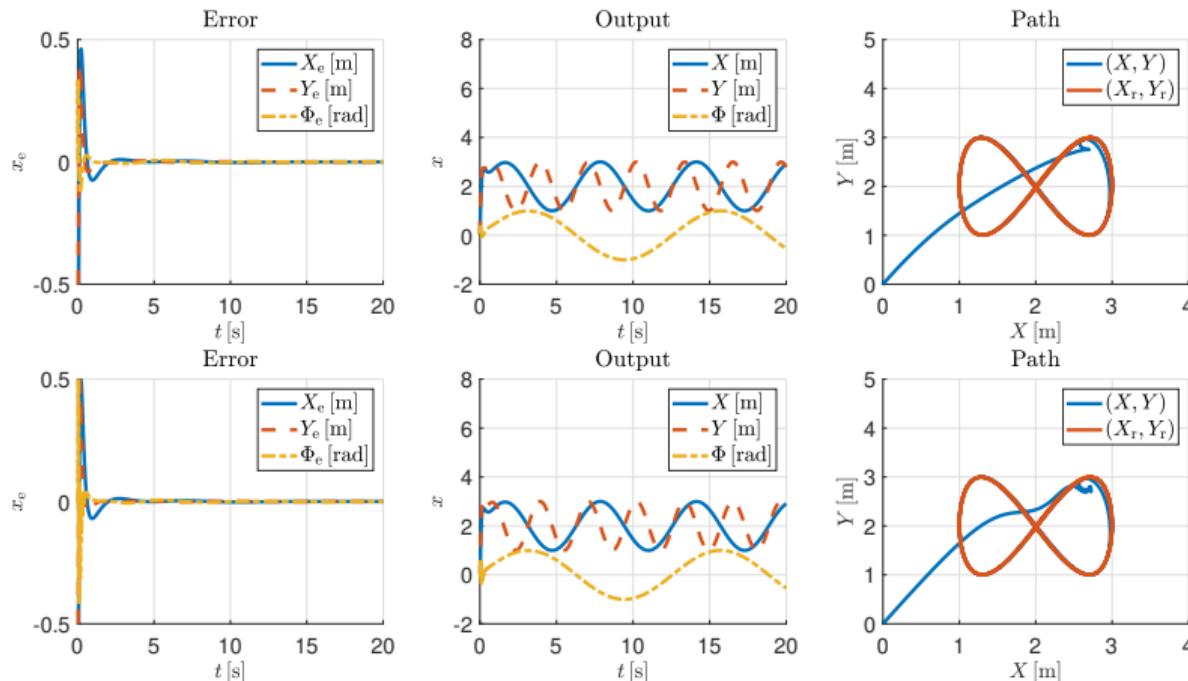
Синтезируем внутреннюю модель (166) с параметрами

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -10 & -10 & -5 \end{bmatrix}, F_2 = F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & -21 & -35 & -35 & -21 & -7 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, G_2 = G_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 9.4375 \\ 5 \end{bmatrix}^T, \Gamma_2 = \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6.75 \\ 21 \\ 32.9375 \\ 35 \\ 16.5 \\ 7 \end{bmatrix}^T.$$

для компенсации возмущающего сигнала τ_d и производных от задающего сигнала
 $\tau_r = -M\ddot{x}_r - D\dot{x}_r$.

Моделирование



Управление надводным судном в режиме слежения без неучтеннной динамики
(рисунки в верхнем ряду) и с неучтеннной динамикой(рисунки в нижнем ряду)

Адаптивное управление надводным судном

Объект управления

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Pw \\ e &= Cx + Qw\end{aligned}\quad (110)$$

Генератор внешних воздействий

$$\dot{w} = S(\rho)w \quad (111)$$

Цель управления

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| \leq \varepsilon \quad (112)$$

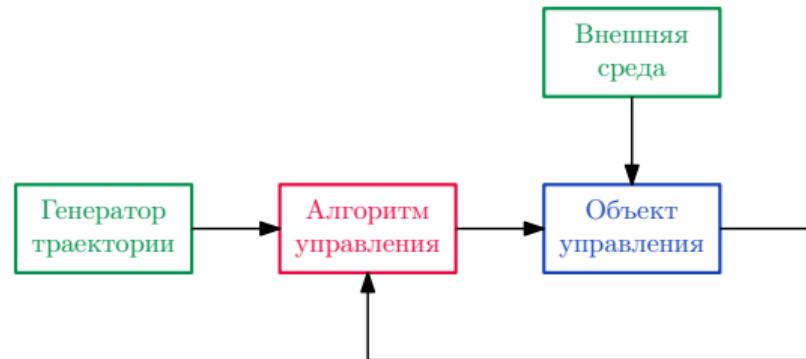


Рис.: Задача 1. Управление в условиях возмущающих воздействий

Синтез номинального управления

Добавим в систему внутреннюю модель

$$\dot{\eta} = F\eta + G(\Gamma(\rho)\eta + u_s), \quad u = \Gamma(\rho)\eta + u_s, \quad (113)$$

где F — гурвицева матрица во фробениусовой форме, (F, G) — управляемая пара, матрица $\Gamma(\rho)$ такая, что собственные числа матриц $F + G\Gamma(\rho)$ и $S(\rho)$ равны.

Объединяя (110) с (113) и выполняя замену переменных, получим

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B(\Gamma(\rho)\tilde{\eta} + u_s), \\ \dot{\tilde{\eta}} &= F\tilde{\eta} + G(\Gamma(\rho)\tilde{\eta} + u_s).\end{aligned}\quad (114)$$

Выберем номинальное стабилизирующее управление как

$$u_s = -\Gamma(\rho)\tilde{\eta} + K_s\tilde{x}, \quad (115)$$

и, подставляя в систему (114), получим модель замкнутой системы в треугольной форме

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= (A + BK_s)\tilde{x}, \\ \dot{\tilde{\eta}} &= F\tilde{\eta} + GK_s\tilde{x},\end{aligned}\quad (116)$$

где достаточно выбрать K_s так, чтобы матрица $(A + BK_s)$ была гурвицевой.

Синтез адаптивной внутренней модели

Выполним замену переменных и преобразуем систему (114) к форме

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\eta}} &= F\tilde{\eta} + G(\Gamma(\rho)\tilde{\eta} + u_s), \\ \dot{\tilde{z}} &= A_{00}\tilde{z} + A_{01}\tilde{z}_1 + A_{02}\tilde{z}_2, \\ \dot{\tilde{z}}_1 &= A_{11}\tilde{z}_1 + A_{12}\tilde{z}_2, \\ \dot{\tilde{z}}_2 &= A_{20}\tilde{z} + A_{21}\tilde{z}_1 + A_{22}\tilde{z}_2 + B_{22}(\Gamma(\rho)\tilde{\eta} + u_s), \\ e &= H_1\tilde{z}_1 + H_2\tilde{z}_2.\end{aligned}\tag{117}$$

Стабилизация системы может быть выполнена с использованием алгоритма

$$u_s = -u_s^* - k\tilde{z}_2, \quad u_s^* = \Gamma(\rho)\tilde{\eta} + B_{22}^{-1}(A_{20}\tilde{z} + A_{21}\tilde{z}_1 + A_{22}\tilde{z}_2).\tag{118}$$

Заменим $\Gamma(\rho)$ на оценку $\hat{\Gamma}(\hat{\rho})$ и получим адаптивную внутреннюю модель

$$\dot{\eta} = F\eta + G(\hat{\Gamma}(\hat{\rho})\eta + u_s), \quad u = \hat{\Gamma}(\hat{\rho})\eta + u_s.\tag{119}$$

Введем ошибку оценивания $\tilde{\Gamma}(\tilde{\rho}) = \hat{\Gamma}(\hat{\rho}) - \Gamma(\rho)$, тогда модель замкнутой системы (117), (118), (119) примет вид

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\Gamma}(\tilde{\rho})\eta, \quad \tilde{z}_2 = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}.\tag{120}$$

Утверждение

Существует матрица $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ такая, что $\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} < 0$, $\mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{C}^T$.

Продифференцировав $V(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\Gamma}_i^T(\tilde{\rho}_i)) = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^m \tilde{\Gamma}_i(\tilde{\rho}_i) K_i^{-1} \tilde{\Gamma}_i^T(\tilde{\rho}_i)$, выберем алгоритм адаптации

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_i^T(\tilde{\rho}_i) = -K_i \tilde{z}_{2i} \eta_i, \quad i = \{1, \dots, m\}, \quad \tilde{z}_2 = (\tilde{z}_{21} \quad \tilde{z}_{22} \quad \dots \quad \tilde{z}_{2m})^T.\tag{121}$$

Добавим в систему наблюдатель сигнала u_s , на базе которого получим реализуемую адаптивную внутреннюю модель вида

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= F\eta + G(\hat{\Gamma}(\hat{\rho})\eta + \hat{u}_s), \\ u &= \hat{\Gamma}(\hat{\rho})\eta + \hat{u}_s,\end{aligned}\tag{122}$$

где \hat{u}_s — оценка сигнала u_s , полученная с помощью алгоритма

$$\begin{aligned}\hat{u}_s &= \text{sat}_L(-\sigma - k(C_o \hat{\xi})), \\ \begin{pmatrix} \dot{\hat{\xi}} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix} &= A_o \hat{\xi} + B_{o1} e + B_{o2} \hat{u}_s,\end{aligned}\tag{123}$$

где

$$A_o = \begin{pmatrix} -\kappa A_{or} & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\kappa^2 A_{or-1} & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -\kappa^{r-1} A_{o2} & 0 & 0 & \dots & I & 0 \\ -\kappa^r A_{o1} & 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ -\kappa^{r+1} A_{o0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{o1} = \begin{pmatrix} \kappa A_{or} \\ \kappa^2 A_{or-1} \\ \vdots \\ \kappa^{r-1} A_{o2} \\ \kappa^r A_{o1} \\ \kappa^{r+1} A_{o0} \end{pmatrix}, B_{o2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix}, C_o = (C_{o0} \quad C_{o1} \quad \dots \quad C_{or-2} \quad I).$$

С учетом (123) заменим (121) на реализуемый закон адаптации вида

$$\dot{\hat{\Gamma}}_i^T(\hat{\rho}_i) = -K_i \hat{z}_{2i} \eta_i, \quad i = \{1, \dots, m\}, \quad C_o \hat{\xi} = (\hat{z}_{21} \quad \hat{z}_{22} \quad \dots \quad \hat{z}_{2m})^T.\tag{124}$$

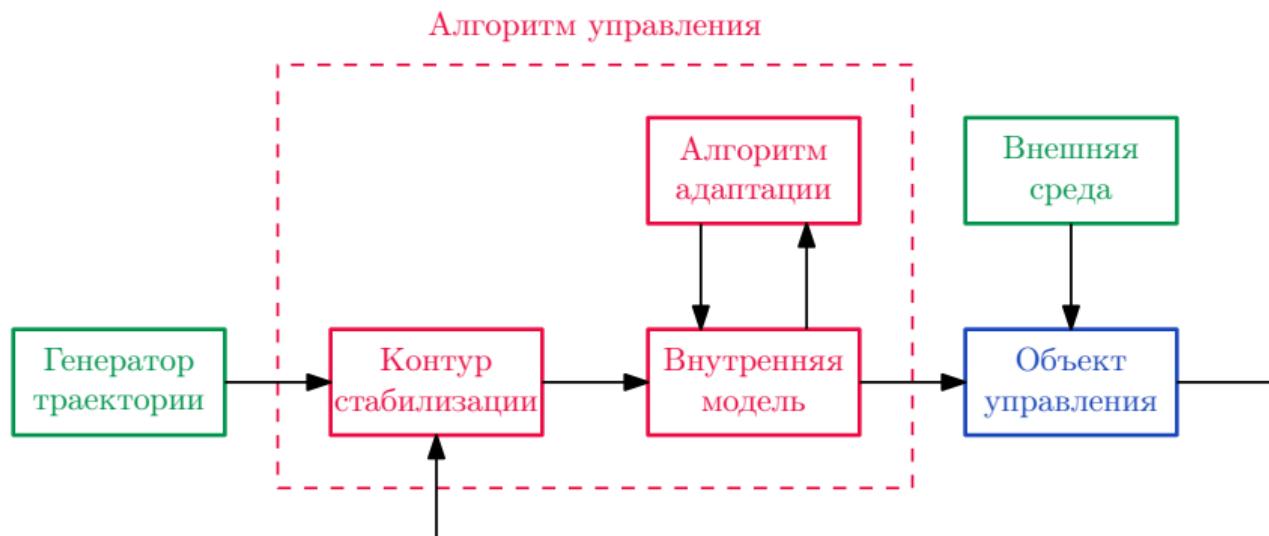


Рис.: Управление в условиях возмущающих воздействий

Объект управления

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Pw \\ e &= Cx + Qw\end{aligned}\quad (125)$$

Генератор внешних воздействий

$$\dot{w} = S(\rho)w \quad (126)$$

Цель управления

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| \leq \varepsilon \quad (127)$$

Внутренняя модель

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= F\eta + G(\hat{\Gamma}(\hat{\rho})\eta + \hat{u}_s) \\ u &= \hat{\Gamma}\eta(\hat{\rho}) + \hat{u}_s\end{aligned}\quad (128)$$

Алгоритм адаптации

$$\dot{\hat{\Gamma}}_i^T(\hat{\rho}_i) = -K_i \hat{z}_{2i} \eta_i, \quad i = \{1, \dots, m\} \quad (129)$$

Контур стабилизации

$$\begin{aligned}\hat{u}_s &= \text{sat}_L(-\sigma - k(C_o \hat{\xi})) \\ \begin{pmatrix} \dot{\hat{\xi}} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix} &= A_o(\kappa) \hat{\xi} + B_{o1}(\kappa) e + B_{o2} \hat{u}_s\end{aligned}\quad (130)$$

Утверждение

Пусть \mathcal{X} — ограниченное множество такое, что $\|x(0)\| \leq \mathcal{X}$, $\|w(0)\| \leq \mathcal{X}$, $\|\eta(0)\| \leq \mathcal{X}$, $\|\hat{\Gamma}_i^T(\hat{\rho}_i(0))\| \leq \mathcal{X}$, $\|(\hat{\xi}(0), \sigma(0))\| \leq \mathcal{X}$, тогда существуют значение предела насыщения L , матрица $A_o(\kappa)$ такие, что для $\varepsilon > 0$ существует значение κ^* такое, что, если $\kappa > \kappa^*$, то траектории замкнутой системы (125), (126), (128)–(130) ограничены и выполняется условие (127).

Модель надводного судна

Преобразуем объект (132) к модели вида (125). Выберем переменные состояния

$$\begin{aligned}x_1 &= y, \\x_2 &= \dot{y},\end{aligned}$$

дифференцируя которые получим

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -M^{-1}Dx_2 + M^{-1}\tau + M^{-1}(\tau_r + \tau_d), \\ &= -M^{-1}Dx_2 + M^{-1}\tau + M^{-1}Hw,\end{aligned}\tag{131}$$

где τ_r — внешние воздействия, обусловленные задающим сигналом $y_r = (X_r \quad Y_r \quad \Phi_r)^T$. Заметим, что система (131) может быть представлена в виде (110) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -M^{-1}D \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}H \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ 0 & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & D_{23} \\ 0 & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линеаризованную модель надводного судна

$$M\ddot{y} + D\dot{y} = \tau + \tau_d, \quad (132)$$

где $y = (X \quad Y \quad \Phi)^T$ — вектор координат надводного судна относительно параллельной системы координат, связанной с судном,

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_d = \begin{pmatrix} \tau_{d1} \\ \tau_{d2} \\ \tau_{d3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 9 \sin(0,75t + 9) \\ 1 + 3 \sin(0,50t + 4) \\ 5 + 4 \sin(0,25t + 7) \end{pmatrix}.$$

Выполним моделирование задачи удержания заданного положения в базовой системе координат

$$y_r^b = \begin{pmatrix} X_r^b \\ Y_r^b \\ \Phi_r^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{120\pi}{180} \end{pmatrix},$$

которое на каждом такте преобразуется в систему координат, связанную с судном с помощью

$$y_r = \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi & 0 \\ -\sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{120\pi}{180} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos \Phi + 2 \sin \Phi \\ -3 \sin \Phi + 2 \cos \Phi \\ \frac{120\pi}{180} \end{pmatrix}.$$

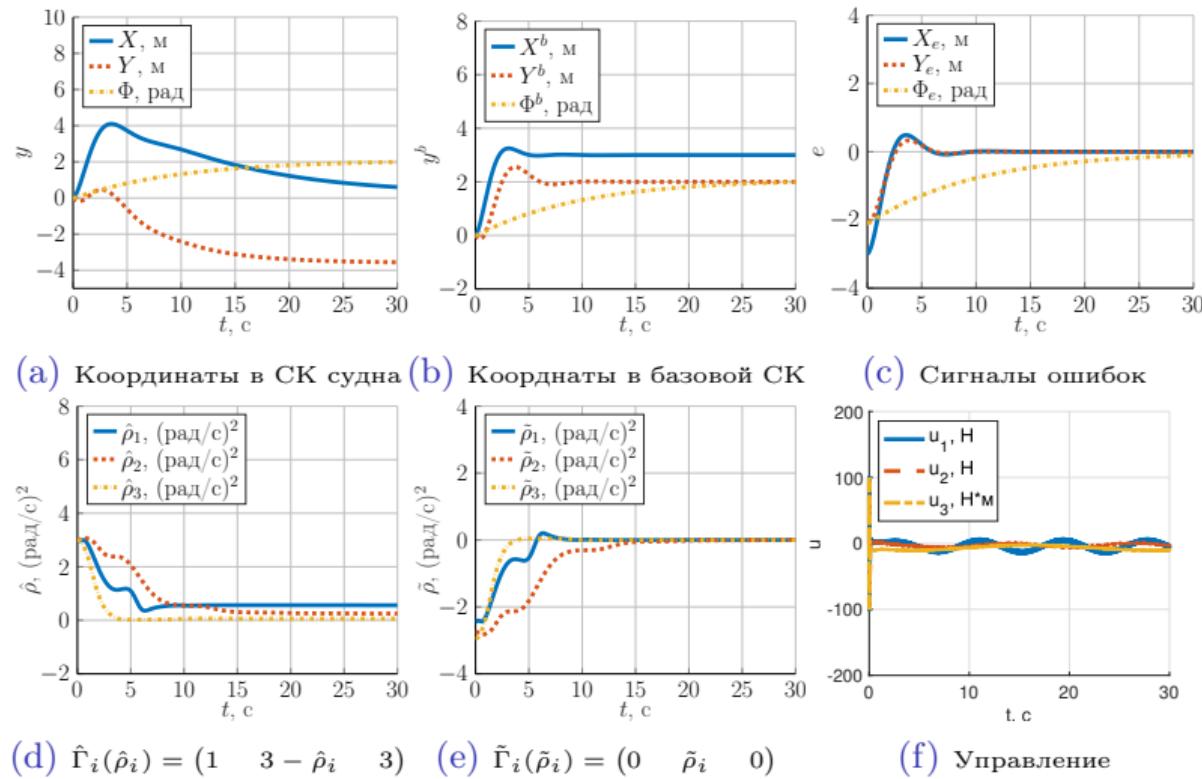


Рис.: Результаты моделирования

Робастное управление манипуляционным роботом

Рассмотрим динамическую модель n -звенного робота

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + G(q) = u + \tau_{\text{dist}}, \quad (133)$$

где $q \in \mathbb{R}^n$, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$, $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ — векторы обобщенных координат, скоростей и ускорений, соответственно, $u \in \mathbb{R}^n$ — вектор управляющих воздействий, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица инерции, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица кориолисовых сил, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица демпфирования (вязкого трения), $G(q) \in \mathbb{R}^n$ — вектор гравитационных сил, $\tau_{\text{dist}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dist}}}$ — вектор внешних моментов сил, обусловленных нагрузкой, приложенной к звеньям робота.

Цель

Целью является синтез регулятора по выходу, обеспечивающего для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$ выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q_e(t)| \leq \epsilon, \quad (134)$$

где $q_e(t) = q(t) - q_{\text{ref}}(t)$ — сигнал ошибки, $q_{\text{ref}}(t) \in \mathbb{R}^n$ — ограниченный задающий сигнал, характеризующийся ограниченными $\dot{q}_{\text{ref}}(t)$ и $\ddot{q}_{\text{ref}}(t)$.

Без потери общности рассмотрим 2-звеный плоский манипуляционный робот. Матрицы $M(q)$, $C(q, \dot{q})$, F и $G(q)$ примут вид

$$M(q) = \begin{pmatrix} \rho_1 + \rho_2 + 2\rho_3 c_2 + \rho_4 & \rho_2 + \rho_3 c_2 \\ \rho_2 + \rho_3 c_2 & \rho_2 + \rho_5 \end{pmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -\rho_3 s_2 \dot{q}_2 & -\rho_3 s_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \rho_3 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (135)$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho_9 & 0 \\ 0 & \rho_{10} \end{pmatrix}, \quad G(q) = \begin{pmatrix} \rho_6 c_1 + \rho_7 c_{12} \\ \rho_8 c_{12} \end{pmatrix}, \quad (136)$$

при

$$\rho_1 = m_1 \ell_{c1}^2 + m_2 \ell_1^2 + I_1, \quad \rho_6 = (m_1 \ell_{c1} + m_2 \ell_1) g, \quad (137)$$

$$\rho_2 = m_2 \ell_{c2}^2 + I_2, \quad \rho_7 = m_2 \ell_{c2} g, \quad (138)$$

$$\rho_3 = m_2 \ell_1 \ell_{c2}, \quad \rho_8 = m_2 \ell_{c2}, \quad (139)$$

$$\rho_4 = r_1^2 J_1, \quad \rho_9 = r_1^2 F_1, \quad (140)$$

$$\rho_5 = r_2^2 J_2, \quad \rho_{10} = r_2^2 F_2, \quad (141)$$

где m_1 , m_2 — массы звеньев, ℓ_1 , ℓ_2 длины звеньев, ℓ_{c1} , ℓ_{c2} — расстояния от точек начала отсчета систем координат, связанных со звеньями, до центров масс звеньев, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, I_1 , I_2 — моменты инерции звеньев, J_1 , J_2 — моменты инерции приводов, F_1 , F_2 — постоянные трения, r_1 , r_2 — передаточные числа.

Динамическая модель манипуляционного робота с электромеханическими приводами имеет вид

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + G(q) = u + \tau_{\text{dist}}, \quad (142)$$

где вектор управляющих воздействий u может быть выражен как

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \tau, && \text{при управлении по моменту сил } \tau \\ u &= \begin{pmatrix} r_1 K_{\tau,1} & 0 \\ 0 & r_2 K_{\tau,2} \end{pmatrix} i, && \text{при управлении по силе тока } i \\ u &= \begin{pmatrix} \frac{r_1 K_{\tau,1}}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{r_2 K_{\tau,2}}{R_2} \end{pmatrix} V, && \text{при управлении по напряжению } V \end{aligned} \quad (143)$$

Рассмотрим следующие задающие сигналы

$$q_{\text{ref}}(t) = \begin{bmatrix} q_{\text{ref},1}(t) \\ q_{\text{ref},2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{5,1}t^5 + a_{4,1}t^4 + a_{3,1}t^3 + a_{2,1}t^2 + a_{1,1}t + a_{0,1} \\ a_{5,2}t^5 + a_{4,2}t^4 + a_{3,2}t^3 + a_{2,2}t^2 + a_{1,2}t + a_{0,2} \end{bmatrix} \quad (144)$$

которые могут быть произведены генератором вида

$$\begin{array}{ll} \dot{w}_{\text{ref}} &= S_{\text{ref}} w_{\text{ref}}, \\ q_{\text{ref}} &= H_{\text{ref}}^p w_{\text{ref}} \quad w_{\text{ref}}(0) = \\ \dot{q}_{\text{ref}} &= H_{\text{ref}}^v w_{\text{ref}} \\ \ddot{q}_{\text{ref}} &= H_{\text{ref}}^a w_{\text{ref}}, \end{array} \quad \begin{bmatrix} a_{0,1} \\ a_{1,1} \\ 2a_{2,1} \\ 6a_{3,1} \\ 24a_{4,1} \\ 120a_{5,1} \\ a_{0,2} \\ a_{1,2} \\ 2a_{2,2} \\ 6a_{3,2} \\ 24a_{4,2} \\ 120a_{5,2} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} S_{\text{ref}} &= \begin{bmatrix} S_{\text{ref},1} & 0 \\ 0 & S_{\text{ref},2} \end{bmatrix}, \quad S_{\text{ref},i} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ H_{\text{ref}}^p &= \begin{bmatrix} H_{\text{ref},1}^p & 0 \\ 0 & H_{\text{ref},2}^p \end{bmatrix}, \quad H_{\text{ref},i}^p = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ H_{\text{ref}}^v &= \begin{bmatrix} H_{\text{ref},1}^v & 0 \\ 0 & H_{\text{ref},2}^v \end{bmatrix}, \quad H_{\text{ref},i}^v = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ H_{\text{ref}}^a &= \begin{bmatrix} H_{\text{ref},1}^a & 0 \\ 0 & H_{\text{ref},2}^a \end{bmatrix}, \quad H_{\text{ref},i}^a = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \end{aligned}$$

где $i = \{1, 2\}$.

Рассмотрим следующие возмущающие сигналы

$$\tau_{\text{dist}}(t) = \begin{bmatrix} \tau_{\text{dist},1}(t) \\ \tau_{\text{dist},2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\text{dist},1} + A_{\text{dist},1} \sin(\omega_{\text{dist},1} t + \psi_{\text{dist},1}) \\ C_{\text{dist},2} + A_{\text{dist},2} \sin(\omega_{\text{dist},2} t + \psi_{\text{dist},2}) \end{bmatrix}, \quad (145)$$

которые могут быть произведены генератором вида

$$\begin{aligned} \dot{w}_{\text{dist}} &= S_{\text{dist}} w_{\text{dist}}, \\ \tau_{\text{dist}} &= H_{\text{dist}} w_{\text{dist}}, \end{aligned} \quad w_{\text{dist}}(0) = \begin{bmatrix} C_{\text{dist},1} \\ A_{\text{dist},1} \sin \psi_{\text{dist},1} \\ \omega_{\text{dist},1} A_{\text{dist},1} \cos \psi_{\text{dist},1} \\ C_{\text{dist},2} \\ A_{\text{dist},2} \sin \psi_{\text{dist},2} \\ \omega_{\text{dist},2} A_{\text{dist},2} \cos \psi_{\text{dist},2} \end{bmatrix}.$$

где

$$S_{\text{dist}} = \begin{bmatrix} S_{\text{dist},1} & 0 \\ 0 & S_{\text{dist},2} \end{bmatrix}, \quad S_{\text{dist},1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_{\text{dist},1}^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{\text{dist},2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_{\text{dist},2}^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_{\text{dist}} = \begin{bmatrix} H_{\text{dist},1} & 0 \\ 0 & H_{\text{dist},2} \end{bmatrix}, \quad H_{\text{dist},1} = [1 \quad 1 \quad 0], \quad H_{\text{dist},2} = [1 \quad 1 \quad 0].$$

Допущение 1

Обобщенные скорости $\dot{q}(t)$ измеряются.

Допущение 2

Матрицы $M(q)$, $C(q, \dot{q})$, F , $G(q)$ известны.

Допущение 3

Робот не подвержен влиянию внешних возмущений, т.е. $\tau_{\text{dist}} = 0$.

Рассмотрим задачу стабилизации, т.е. $q_{\text{ref}}(t) = q_{\text{ref}} = \text{const}$ и $\dot{q}_{\text{ref}}(t) = 0$.
Выберем алгоритм управления

$$u = M(q) \begin{pmatrix} -K_p q_e \\ -K_d \dot{q}_e \end{pmatrix} + \underbrace{C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + G(q)}_{\text{компенсация нелинейностей}}, \quad (146)$$

пропорциональный контур дифференциальный контур

где $K_p = \text{diag}(k_{p1}, k_{p2})$ и $K_d = \text{diag}(k_{d1}, k_{d2})$ — матрицы коэффициентов пропорционального и дифференциального контуров.

Подставляя алгоритм управления (146) в модель (172), получим

$$\ddot{q} + K_p q_e + K_d \dot{q}_e = 0, \quad (147)$$

или при $\ddot{q} = \ddot{q}_e$ она может быть представлена как модель ошибки

$$\ddot{q}_e + K_p q_e + K_d \dot{q}_e = 0, \quad (148)$$

которая асимптотически устойчивая при соответствующем выборе K_p и K_d .

Задача слежения

Рассмотрим следующие выражения

$$q_e(t) = q(t) - q_{\text{ref}}(t), \quad (149)$$

$$\dot{q}_e(t) = \dot{q}(t) - \dot{q}_{\text{ref}}(t), \quad (150)$$

$$\ddot{q}_e(t) = \ddot{q}(t) - \ddot{q}_{\text{ref}}(t), \quad (151)$$

и выражая $q(t)$, $\dot{q}(t)$ и $\ddot{q}(t)$, получим

$$q(t) = q_e(t) + q_{\text{ref}}(t), \quad (152)$$

$$\dot{q}(t) = \dot{q}_e(t) + \dot{q}_{\text{ref}}(t), \quad (153)$$

$$\ddot{q}(t) = \ddot{q}_e(t) + \ddot{q}_{\text{ref}}(t), \quad (154)$$

тогда модель ошибки (148) принимает вид

$$\ddot{q}_e + \ddot{q}_{\text{ref}} + K_p q_e + K_d \dot{q}_e = 0. \quad (155)$$

Для компенсации составляющей \ddot{q}_{ref} модифицируем алгоритм управления (146) как

$$u = M(q) (\ddot{q}_{\text{ref}} - K_p q_e - K_d \dot{q}_e) + C(q, \dot{q}) \dot{q} + F \dot{q} + G(q), \quad (156)$$

где \ddot{q}_{ref} принимается доступным измерению.

Допущение 1

Обобщенные скорости $\dot{q}(t)$ измеряются.

Допущение 2

Матрицы $M(q)$, $C(q, \dot{q})$, F , $G(q)$ известны.

Допущение 3

Робот не подвержен влиянию внешних возмущений, т.е. $\tau_{\text{dist}} = 0$.

Следуя³, введем новые переменные

$$\xi_1 = q,$$

$$\xi_2 = \dot{q},$$

и, дифференцируя которые, преобразуем модель (172) к нормальной форме

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2,$$

$$\dot{\xi}_2 = M^{-1}(\xi_1)[-C(\xi_1, \xi_2)\xi_2 - F\xi_2 - G(\xi_1)] + M^{-1}(\xi_1)u.$$

³Jose Antonio Heredia and Wen Yu. A high-gain observer-based pd manipulator control for robot. In Proc. of the proceedings of the American control conference, pages 2218–522, 2000.

Выберем закон управления

$$u = M(q) \left(\ddot{q}_{\text{ref}} - K_p q_e - K_d (\hat{\dot{q}} - \dot{q}_{\text{ref}}) \right) + C(q, \hat{\dot{q}}) \hat{\dot{q}} + F \hat{\dot{q}} + G(q), \quad (157)$$

где $K_p = \text{diag}(k_{p1}, k_{p2})$ и $K_d = \text{diag}(k_{d1}, k_{d2})$ — положительно определенные матрицы пропорциональной и дифференциальной составляющих, соответственно, $\hat{\dot{q}} = \dot{\hat{\xi}}_1$ — оценка неизмеримых обобщенных скоростей, полученная с помощью наблюдателя

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \kappa A_2 (\xi_1 - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \kappa^2 A_1 (\xi_1 - \hat{\xi}_1), \\ \hat{\dot{q}} &= \dot{\hat{\xi}}_1, \end{aligned} \quad (158)$$

где $\kappa > 0$ — достаточно большое число, A_2 и A_1 — положительно определенные матрицы такие, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} -A_2 & I \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (159)$$

является гурвицевой, т.е. $\text{Re}\lambda_i\{A\} < 0$.

Допущение 1

Обобщенные скорости $\dot{q}(t)$ измеряются.

Допущение 2

Матрицы $M(q)$, $C(q, \dot{q})$, F , $G(q)$ известны.

Допущение 3

Робот не подвержен влиянию внешних возмущений, т.е. $\tau_{\text{dist}} = 0$.

Введем новые переменные

$$\xi_1 = q - q_{\text{ref}},$$

$$\xi_2 = \dot{q} - \dot{q}_{\text{ref}},$$

и, дифференцируя которые, преобразуем модель (172) к нормальной форме

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2,$$

$$\dot{\xi}_2 = f(\xi, q_{\text{ref}}, \dot{q}_{\text{ref}}, \ddot{q}_{\text{ref}}) + M^{-1}(\xi_1 + q_{\text{ref}})u,$$

где $f(\xi, q_{\text{ref}}, \dot{q}_{\text{ref}}, \ddot{q}_{\text{ref}}) =$
 $M^{-1}(\xi_1 + q_{\text{ref}})[-C(\xi_1 + q_{\text{ref}}, \xi_2 + \dot{q}_{\text{ref}})\xi_2 - F(\xi_2 + \dot{q}_{\text{ref}}) - G(\xi_1 + q_{\text{ref}})] - \ddot{q}_{\text{ref}}.$

Расширенный наблюдатель

Следуя⁴ выберем робастный закон управления

$$u = \bar{u} = \text{sat}_N M_0[-\sigma - K\hat{\xi}] \quad (160)$$

где $N > 0$ — предел насыщения, $K = [K_1 \ K_2]$, $K_1 = \text{diag}(k_{11}, k_{12})$, $K_2 = \text{diag}(k_{21}, k_{22})$ M_0 — обратимая матрица, удовлетворяющая условию

$$\|[M^{-1}(\xi) - M_0^{-1}]M_0\|_1 \leq \delta < 1 \quad (161)$$

$\hat{\xi}$ и σ — состояния расширенного наблюдателя вида

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \kappa A_2(q - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \sigma + M_0^{-1}\bar{u} + \kappa^2 A_1(q - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\sigma} &= \kappa^3 A_0(q - \hat{\xi}_1), \end{aligned} \quad (162)$$

где $\kappa > 0$ — достаточно большое число, A_2 , A_1 и A_0 — положительно определенные матрицы такие, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} -A_2 & I & 0 \\ -A_1 & 0 & I \\ -A_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (163)$$

является гурвицевой, т.е. $\text{Re}\lambda_i\{A\} < 0$.

⁴Freidovich, L. and Khalil, H. (2008). Performance recovery of feedback-linearization-based designs. IEEE Transactions on Automatic Control, 53(10), 2324-2334.

Допущение 1

Обобщенные скорости $\dot{q}(t)$ измеряются.

Допущение 2

Матрицы $M(q)$, $C(q, \dot{q})$, F , $G(q)$ известны.

Допущение 3

Робот не подвержен влиянию внешних возмущений, т.е. $\tau_{\text{dist}} = 0$.

Рассмотрим динамическую модель манипуляционного робота, подверженного влиянию внешних возмущений

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + G(q) = u + \tau_{\text{dist}}, \quad (164)$$

где $\tau_{\text{dist}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dist}}}$ — вектор внешних моментов сил, обусловленных нагрузкой, приложенной к звеньям робота.

Генератор возмущающего сигнала

Рассмотрим следующие возмущающие сигналы

$$\tau_{\text{dist}}(t) = \begin{bmatrix} \tau_{\text{dist},1}(t) \\ \tau_{\text{dist},2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\text{dist},1} + A_{\text{dist},1} \sin(\omega_{\text{dist},1} t + \psi_{\text{dist},1}) \\ C_{\text{dist},2} + A_{\text{dist},2} \sin(\omega_{\text{dist},2} t + \psi_{\text{dist},2}) \end{bmatrix}, \quad (165)$$

которые могут быть произведены генератором вида

$$\begin{aligned} \dot{w}_{\text{dist}} &= S_{\text{dist}} w_{\text{dist}}, \\ \tau_{\text{dist}} &= H_{\text{dist}} w_{\text{dist}}, \end{aligned} \quad w_{\text{dist}}(0) = \begin{bmatrix} C_{\text{dist},1} \\ A_{\text{dist},1} \sin \psi_{\text{dist},1} \\ \omega_{\text{dist},1} A_{\text{dist},1} \cos \psi_{\text{dist},1} \\ C_{\text{dist},2} \\ A_{\text{dist},2} \sin \psi_{\text{dist},2} \\ \omega_{\text{dist},2} A_{\text{dist},2} \cos \psi_{\text{dist},2} \end{bmatrix}.$$

где

$$S_{\text{dist}} = \begin{bmatrix} S_{\text{dist},1} & 0 \\ 0 & S_{\text{dist},2} \end{bmatrix}, \quad S_{\text{dist},1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_{\text{dist},1}^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{\text{dist},2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_{\text{dist},2}^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_{\text{dist}} = \begin{bmatrix} H_{\text{dist},1} & 0 \\ 0 & H_{\text{dist},2} \end{bmatrix}, \quad H_{\text{dist},1} = [1 \quad 1 \quad 0], \quad H_{\text{dist},2} = [1 \quad 1 \quad 0].$$

Для компенсации внешних воздействий добавим в систему внутреннюю модель вида

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= F\eta + G[\Gamma\eta + \bar{u}], \\ u &= \Gamma\eta + \bar{u},\end{aligned}\tag{166}$$

где $F = \text{diag}\{F_1, F_2\}$, $G = \text{diag}\{G_1, G_2\}$, $\Gamma = \text{diag}\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$, $F_i \in \mathbb{R}^{n_{\text{dist}} \times n_{\text{dist}}}$ — гурвицева матрица во фробениусовой форме, векторы $G_i = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^{n_{\text{dist}}}$ и $\Gamma \in \mathbb{R}^{1 \times n_{\text{dist}}}$ такие, что пара (F_i, G_i) является управляемой и выполняется условие

$$\lambda_k\{F_i + G_i\Gamma_i\} = \lambda_k\{S_{\text{dist},i}\}.\tag{167}$$

Адаптивное управление манипуляционными роботами

Воспользуемся свойством динамической модели манипуляционного робота

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + G(q) = \phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = u, \quad (168)$$

где $\phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})$ — регрессор, θ — вектор неизвестных параметров.

Регулятор на основе обратной динамики имеет вид

$$u = M(q)(\ddot{q}_{\text{ref}} - K_p\tilde{q} - K_d\dot{\tilde{q}}) + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + G(q), \quad (169)$$

где требуется знание параметров робота.

Заменим (169) на

$$u = \hat{M}(q)(\ddot{q}_{\text{ref}} - K_p\tilde{q} - K_d\dot{\tilde{q}}) + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{F}\dot{q} + \hat{G}(q), \quad (170)$$

где $\hat{M}(q)$, $\hat{C}(q, \dot{q})$, \hat{F} , $\hat{G}(q)$ — матрицы, содержащие оценки параметров.

В силу (170) и (168) получим

$$\hat{M}(q)\ddot{q} + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{F}\dot{q} + \hat{G}(q) = \phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})\hat{\theta} = u,$$

Подставляя (170) в (168), получим

$$\hat{M}(q)(\ddot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} + K_d \dot{\tilde{q}}) = \phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\theta}, \quad (171)$$

где $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$.

Перепишем (171) как

$$\dot{\xi} = A\xi + B\hat{M}^{-1}(q)\phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{\theta},$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -K_p & -K_d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0_n \\ I_n \end{pmatrix}$$

Выберем закон адаптации как

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma^{-1}\phi(q, \dot{q}, \ddot{q})\hat{M}^{-1}(q)B^\top P\xi,$$

где $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — положительно определенная постоянная матрица, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ — положительно определенная симметричная матрица, удовлетворяющая

$$PA + A^\top P = -Q, \quad Q = Q^\top > 0.$$

Сходимость может быть показана с помощью анализа на основе метода функций Ляпунова⁵

$$\dot{V} = -\xi^\top Q\xi.$$

⁵J.J. Craig: Adaptive Control of Mechanical Manipulators. Ph.D. Thesis (UMI Dissertation Information Service, Ann Arbor 1986)

Рассмотрим динамическую модель двухзвенного плоского манипуляционного робота

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + G(q) = u, \quad (172)$$

где $q = (q_1 \ q_2)^\top$, $\dot{q} = (\dot{q}_1 \ \dot{q}_2)^\top$, $\ddot{q} = (\ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2)^\top$ — вектора обобщенных координат, скоростей и ускорений, соответственно, $u = (u_1 \ u_2)^\top$ — вектор управляющих воздействий, $M(q)$ — матрица инерции, $C(q, \dot{q})$ — матрица кориолисовых сил, F — матрица демпфирования, $G(q)$ — вектор гравитационных сил.

Постановка задачи

Матрицы $M(q)$, $C(q, \dot{q})$, F и вектор $G(q)$ имеют вид

$$M(q) = \begin{pmatrix} \theta_1 + 2\theta_2 c_2 & \theta_3 + \theta_2 c_2 \\ \theta_3 + \theta_2 c_2 & \theta_4 \end{pmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -\theta_2 s_2 \dot{q}_2 & -\theta_2 s_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \theta_2 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} \theta_5 & 0 \\ 0 & \theta_6 \end{pmatrix}, \quad G(q) = \begin{pmatrix} (\theta_7 c_1 + \theta_8 c_{12})g \\ \theta_8 c_{12} \end{pmatrix},$$

где $c_1 = \cos q_1$, $c_2 = \cos q_2$, $s_2 = \sin q_2$ и $c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$ и параметры θ_i , $i = \overline{1, 8}$ определены как

$$\begin{aligned} \theta_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + I_1 + I_2 + r_1^2 J_1, & \theta_5 &= r_1^2 F_1, \\ \theta_2 &= m_2 l_1 l_{c2}, & \theta_6 &= r_2^2 F_2, \\ \theta_3 &= m_2 l_{c2}^2 + I_2, & \theta_7 &= m_1 l_{c1} + m_2 l_1, \\ \theta_4 &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 + r_2^2 J_2, & \theta_8 &= m_2 l_{c2}, \end{aligned}$$

где m_1 , m_2 — массы звеньев, l_1 , l_2 — длины звеньев, l_{c1} , l_{c2} — расстояния от точек начал отсчета систем координат, связанных со звеньями, до центров масс, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ — ускорение свободного падения, I_1 , I_2 — моменты инерции звеньев, J_1 , J_2 — моменты инерции приводов, F_1 , F_2 — коэффициенты демпфирования, r_1 , r_2 — передаточные числа.

Постановка задачи

Известно, что динамическая модель манипуляционного робота (172) может быть представлена в форме линейной регрессионной модели

$$\phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = u, \quad (173)$$

где $\phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})$ — регрессор вида

$$\phi(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 & 0 \\ (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)c_2 - (2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)s_2 & \ddot{q}_1c_2 + \dot{q}_1^2s_2 \\ \ddot{q}_2 & \ddot{q}_1 \\ 0 & \ddot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 \\ 0 & \dot{q}_2 \\ gc_1 & 0 \\ gc_{12} & c_{12} \end{pmatrix}$$

и θ — вектор неизвестных параметров вида

$$\theta = (\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6 \quad \theta_7 \quad \theta_8)^\top.$$

Постановка задачи

Целью является исследование трех методов параметрической идентификации, а именно:

- ▶ Метод градиентного спуска,
- ▶ Расширенный фильтр Калмана,
- ▶ Метод динамического расширения и смешивания регрессора,

в приложении к двухзвеному плоскому манипуляционному роботу, а также анализ эффективности указанных методов в задаче непрямого адаптивного управления.

Для достижения этой цели в работе выполнено построение трех алгоритмов оценивания на основе упомянутых методов, обеспечивающих выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\theta}(t)\| = 0, \quad (174)$$

где $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$ — ошибка оценивания между оценкой $\hat{\theta}(t)$ и истинными значениями параметров θ , после чего синтезирован адаптивный регулятор на основе непрямой адаптации, обеспечивающий выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{q}(t)\| = 0, \quad (175)$$

где $\tilde{q}(t) = q(t) - q_{\text{ref}}(t)$ — ошибка слежения между выходом $q(t)$ и задающим сигналом $q_{\text{ref}}(t)$.

Построим алгоритмы оценивания на основе метода градиентного спуска, расширенного фильтра Калмана и метода динамического расширения и смещивания регрессора для выполнения первого целевого условия (174). Для всех алгоритмов оценивания зададим функцию минимизации в квадратичной форме

$$J(\hat{\theta}) = \frac{1}{2}(u - \phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})\hat{\theta})^2,$$

с учетом которой перейдем к построению алгоритмов оценивания.

Первый алгоритм оценивания, основанный на методе градиентного спуска, имеет вид

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \phi(q, \dot{q}, \ddot{q})(u - \phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})\hat{\theta}), \quad (176)$$

где $\gamma > 0$ — настроечный параметр, влияющий на скорость сходимости.

Второй алгоритм оценивания, основанный на расширенном фильтре Калмана, имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}} &= \hat{\Gamma} \phi(q, \dot{q}, \ddot{q})(u - \phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})\hat{\theta}), \\ \dot{\hat{\Gamma}} &= -\hat{\Gamma} \phi(q, \dot{q}, \ddot{q}) \phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q}) \hat{\Gamma} + \beta \hat{\Gamma}, \\ k_0 I &\geq \hat{\Gamma}(0) = \hat{\Gamma}(0)^\top > 0,\end{aligned}\tag{177}$$

где $\hat{\Gamma}$ — матрица коэффициентов усиления, $\beta > 0$ — коэффициент регуляризации, $k_0 > 0$ — начальное значение матрицы коэффициентов усиления.

Для построения алгоритма оценивания на основе метода динамического расширения и смешивания регрессора выполним декомпозицию регрессионной модели (173) как

$$\varphi_1^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})\vartheta_1 = u_1,$$

$$\varphi_2^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})\vartheta_2 = u_2,$$

где $\varphi_1^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})$ and $\varphi_2^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})$ — регрессоры, представленные верхним и нижним вектор-строками матрицы $\phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})$ без нулевых значений

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)c_2 - (2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)s_2 \\ \ddot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \\ gc_1 \\ gc_{12} \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1c_2 + \dot{q}_1^2s_2 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \dot{q}_2 \\ c_{12} \end{pmatrix},$$

ϑ_1 и ϑ_2 — вектора неизвестных параметров, преобразованных соответствующим образом

$$\vartheta_1 = (\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_5 \quad \theta_7 \quad \theta_8)^\top, \quad (178)$$

$$\vartheta_2 = (\theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_6 \quad \theta_8)^\top. \quad (179)$$

Для динамического расширения регрессоров $\varphi_1^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})$ и $\varphi_2^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})$ введем 5 дополнительных линейных L_∞ -устойчивых операторов запаздывания $d_i, i = \overline{1, 5}$. Применяя операторы запаздывания, получим

$$\begin{aligned}\varphi_{1i}^\top(t) &= \varphi_1^\top(t - d_i), & u_{1i}(t) &= u_1(t - d_i), & i &= \overline{1, 5}, \\ \varphi_{2j}^\top(t) &= \varphi_2^\top(t - d_j), & u_{2j}(t) &= u_2(t - d_j), & j &= \overline{1, 4},\end{aligned}$$

после чего получим расширенные регрессионные модели

$$\begin{aligned}\Phi_1(t)\vartheta_1 &= U_1(t), \\ \Phi_2(t)\vartheta_2 &= U_2(t),\end{aligned}$$

где

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^\top(t) \\ \varphi_{11}^\top(t) \\ \varphi_{12}^\top(t) \\ \varphi_{13}^\top(t) \\ \varphi_{14}^\top(t) \\ \varphi_{15}^\top(t) \end{pmatrix}, \quad U_1(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_{11}(t) \\ u_{12}(t) \\ u_{13}(t) \\ u_{14}(t) \\ u_{15}(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(t) = \begin{pmatrix} \varphi_2^\top(t) \\ \varphi_{21}^\top(t) \\ \varphi_{22}^\top(t) \\ \varphi_{23}^\top(t) \\ \varphi_{24}^\top(t) \end{pmatrix}, \quad U_2(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ u_{21}(t) \\ u_{22}(t) \\ u_{23}(t) \\ u_{24}(t) \end{pmatrix}.$$

Зададим

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_1(t) &= \det \{\Phi_1\}(t), & \bar{U}_1(t) &= \text{adj}\{\Phi_1(t)\}U_1(t), \\ \bar{\varphi}_2(t) &= \det \{\Phi_2\}(t), & \bar{U}_2(t) &= \text{adj}\{\Phi_2(t)\}U_2(t).\end{aligned}$$

Далее мы построим алгоритмы для полуеничения оценок $\hat{\vartheta}_1$ и $\hat{\vartheta}_2$ векторов ϑ_1 и ϑ_2 .

Третий алгоритм оценивания, основанный на методе динамического расширения и смешивания регрессора, имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\vartheta}}_1 &= \gamma_1 \bar{\varphi}_1(t)(\bar{U}_1(t) - \bar{\varphi}_1(t)\hat{\vartheta}_1), \\ \dot{\hat{\vartheta}}_2 &= \gamma_2 \bar{\varphi}_2(t)(\bar{U}_2(t) - \bar{\varphi}_2(t)\hat{\vartheta}_2),\end{aligned}\tag{180}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ — настроечные параметры, влияющие на скорость сходимости. Наконец, оценка $\hat{\theta}$ может быть получена из $\hat{\vartheta}_1$ и $\hat{\vartheta}_2$ с использованием (178) и (179).

Далее покажем, как полученные алгоритмы оценивания могут быть использованы при синтезе адаптивного регулятора на основе обратной динамики для модели манипуляционного робота (172) для выполнения второго целевого условия (175). Следуя известному подходу к синтезу управления на основе обратной динамики, выберем номинальный регулятор для системы (172)

$$u = M(q)(\ddot{q}_{\text{ref}} - K_p \tilde{q} - K_d \dot{\tilde{q}}) + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + G(q), \quad (181)$$

где K_p и K_d — положительно определенные диагональные матрицы, содержащие настроочные параметры.

Подставляя номинальное управление (181) в систему (172), получим замкнутую систему

$$\ddot{\tilde{q}} + K_d \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = 0,$$

которая при соответствующем выборе K_p и K_d является экспоненциально устойчива.

Далее заменим (181) на адаптивное управления на основе оценок $\hat{\theta}$

$$u = \hat{M}(q)(\ddot{q}_{\text{ref}} - K_p \tilde{q} - K_d \dot{\tilde{q}}) + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{F}\dot{q} + \hat{G}(q), \quad (182)$$

где матрицы $\hat{M}(q), \hat{C}(q, \dot{q}), \hat{F}$ и вектор $\hat{G}(q)$ имеют вид

$$\hat{M}(q) = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 + 2\hat{\theta}_2 c_2 & \hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_2 c_2 \\ \hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_2 c_2 & \hat{\theta}_4 \end{pmatrix}, \quad \hat{C}(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -\hat{\theta}_2 s_2 \dot{q}_2 & -\hat{\theta}_2 s_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \hat{\theta}_2 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_5 & 0 \\ 0 & \hat{\theta}_6 \end{pmatrix}, \quad \hat{G}(q) = \begin{pmatrix} (\hat{\theta}_7 c_1 + \hat{\theta}_8 c_{12})g \\ \hat{\theta}_8 c_{12} \end{pmatrix},$$

где оценки $\hat{\theta}_i, i = \overline{1, 8}$ получены с использованием алгоритмов (176), (177) или (180).

Подставляя адаптивное управление (182) в систему (172), получим замкнутую систему

$$\hat{M}(q)(\ddot{\tilde{q}} + K_d \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}) = \phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\theta}$$

которая может быть представлена как

$$\dot{\xi} = A\xi + B\hat{M}^{-1}(q)\phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{\theta}, \quad (183)$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ -K_p & -K_d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{pmatrix},$$

где 0_2 — матрица нулей размерностью (2×2) и I_2 — единичная матрица размерностью (2×2) .

Поскольку матрица A является гурвицевой в силу соответствующего выбора K_p и K_d , существует положительно-определенная матрица размерностью P (2×2) , удовлетворяющая

$$A^\top P + PA = -Q, \quad Q = Q^\top > 0.$$

Выберем кандидата на функцию Ляпунова

$$V = \xi^\top P \xi,$$

производная от которой вдоль траекторий системы (183) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\xi^\top (A^\top P + PA)\xi + 2\xi^\top PB\hat{M}^{-1}(q)\phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{\theta} \\ &= -\xi^\top Q\xi + 2\xi^\top PB\hat{M}^{-1}(q)\phi^\top(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{\theta},\end{aligned}$$

где, если первое целевое условие (174) выполнено и $\tilde{\theta} \rightarrow 0$, то при $t \rightarrow \infty$ получим $\dot{V} \rightarrow -\xi^\top Q\xi$, откуда следует выполнение второго целевого условия (175).

Рассмотрим моделирование управления на основе непрямой адаптации (182) совместно с каждым из трех алгоритмов оценивания (176), (177) и (180) в приложении к двухзвеному плоскому манипуляционному роботу (172).

Параметры модели робота (172), содержащиеся в матрица $M(q)$, $C(q)$, F и $G(q)$, приведены в таблице.

Параметры модели робота			
Параметр	Значение	Параметр	Значение
θ_1	5	θ_5	0.1
θ_2	0.5	θ_6	0.1
θ_3	0.25	θ_7	1.5
θ_4	1.25	θ_8	0.5

Задающий сигнал задан как

$$q_{\text{ref}} = \begin{pmatrix} 1 + \sin(t+1) & 2 + \sin(2t+2) \end{pmatrix}^{\top}$$

Настроочные параметры алгоритмов оценивания выбраны следующим образом. Алгоритм на основе метода градиентного спуска (176):

$$\gamma = 17.$$

Алгоритм на основе расширенного фильтра Калмана (177):

$$\beta = 1, \quad k_0 = 100$$

Алгоритм на основе метода расширения и смешивания регрессора (180):

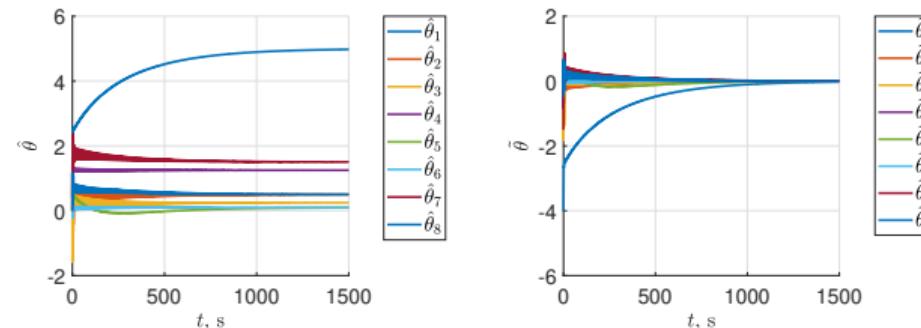
$$d_1 = 0.2, \quad d_2 = 0.4, \quad d_3 = 0.6, \quad d_4 = 0.8, \quad d_5 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 185.$$

Для поддержания замкнутого контура во время переходных процессов оценивания выберем ненулевые начальные условия для оценок параметров:

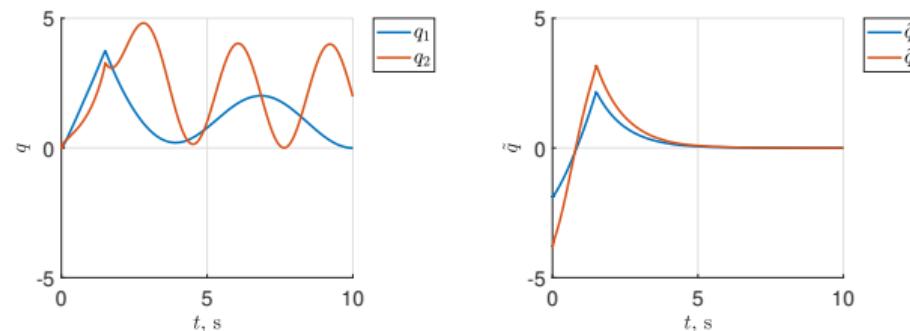
$$\vartheta_1(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^{\top}, \quad \vartheta_2(0) = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^{\top}$$

. Настроочные коэффициенты контура управления (182) выберем как

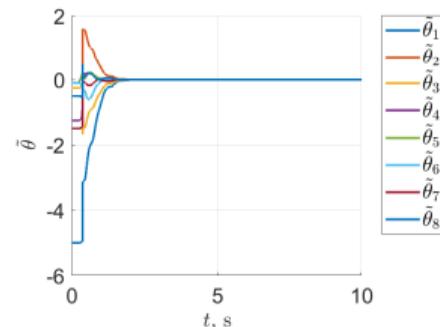
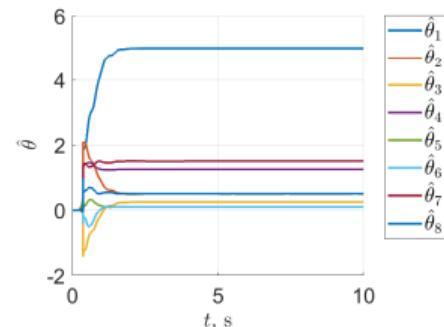
$$K_p = K_d = \text{diag}(100, 100).$$



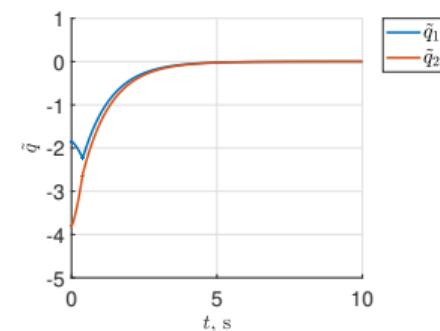
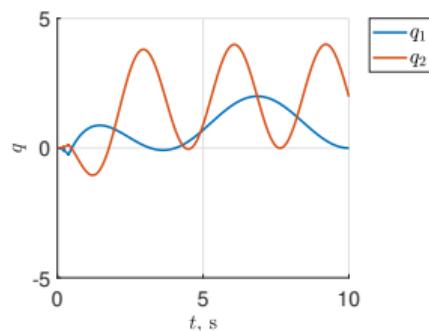
Результаты моделирования оценивания параметров с помощью метода градиентного спуска



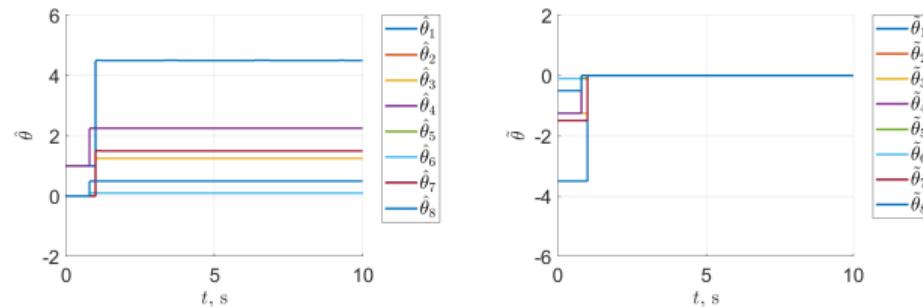
Результаты моделирования адаптивного управления с помощью метода градиентного спуска



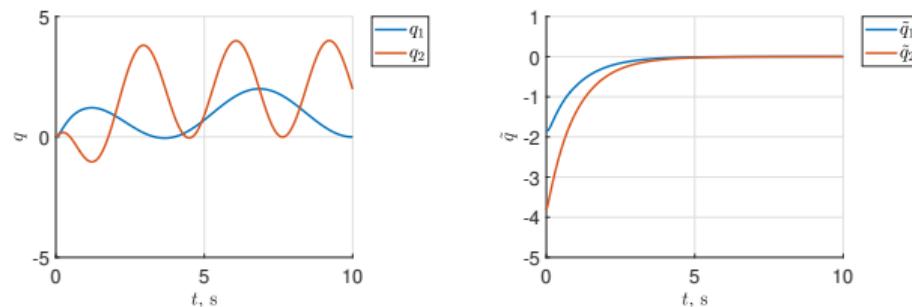
Результаты моделирования оценивания параметров с помощью расширенного фильтра Калмана



Результаты моделирования адаптивного управления с помощью расширенного фильтра Калмана



Результаты моделирования оценивания параметров с помощью метода динамического расширения и смешивания регрессора



Результаты моделирования адаптивного управления с помощью метода динамического расширения и смешивания регрессора

Спасибо за внимание!