Управляемость и наблюдаемость

Вспомогательные математические факты

Следствие из теоремы Гамильтона-Кэли

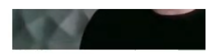
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad N \geq n \quad \Rightarrow \quad \exists\, c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}: \quad A^N = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_{n-1}A^{n-1}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = 2I + 5A \qquad A^4 = 54I + 145A$$

$$A^3 = 10I + 27A \qquad A^5 = 290I + 779A$$



Следствие из следствия

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \Rightarrow \quad \exists\, c_0(t), c_1(t), c_2(t), \dots, c_{n-1}(t): \quad e^{At} = c_0(t) I + c_1(t) A + c_2(t) A^2 + \cdots + c_{n-1}(t) A^{n-1}$$

Примеры

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} = \cos(t)\, I + \sin(t)\, A$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad e^{Bt} = \begin{bmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + tB + \frac{t^2}{2} B^2$$

Связь знакоопределённости и собственных чисел

$v \in \mathbb{R}^n$

$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\Rightarrow$ Если $v^T M v > 0$ при всех $v \neq 0$, то все собственные числа матрицы M положительны

Доказательство

Допустим у матрицы M есть собственное число $\lambda \leq 0$,
v – соответствующий собственный вектор

$$v^T M v = v^T \lambda v = \lambda v^T v = \underbrace{\lambda}_{\leq 0} \underbrace{\|v\|^2}_{> 0} \leq 0$$

Связь знакоопределённости и собственных чисел

$v \in \mathbb{R}^n$

$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\Rightarrow$ Если $v^T M v > 0$ при всех $v \neq 0$, то все собственные числа матрицы M положительны

Противоречие!

Доказательство

Допустим у матрицы M есть собственное число $\lambda \leq 0$,
v – соответствующий собственный вектор

$$v^T M v = v^T \lambda v = \lambda v^T v = \underbrace{\lambda}_{\leq 0} \underbrace{\|v\|^2}_{> 0} \leq 0$$

Связь знакоопределённости и собственных чисел

$v \in \mathbb{R}^n$

$M \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\Rightarrow$ Если $v^T M v > 0$ при всех $v \neq 0$, то все собственные числа матрицы M положительны

Доказательство

Допущение неверно

Допустим у матрицы M есть собственное число $\lambda \leq 0$,

v – соответствующий собственный вектор

$$v^T M v = v^T \lambda v = \lambda v^T v = \underbrace{\lambda}_{\leq 0}\underbrace{\|v\|}_{> 0}^2 \leq 0$$

Управляемость линейной системы

Система

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \quad u(t) \in \mathbb{R}^m \quad \Rightarrow \quad x(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} B u(t)\, dt$$

Определение

Система называется (полностью) управляемой, если для любых $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ и любого $t_1 > 0$ найдётся $u(t)$, переводящее систему из $x(0) = x_0$ в $x(t_1) = x_1$

Равносильная формулировка для линейных систем

Систему можно перевести из $x(0) = 0$ в любое $x(t_1)$ за любое время t_1

Критерий управляемости

[redacted]

Система

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Критерий Калмана

Система управляема $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$

Матрица управляемости

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times nm}$$

Система

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Критерий Калмана

Система управляема $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$

Полный

строчный ранг

Матрица управляемости

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times nm}$$

Система

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Критерий Калмана

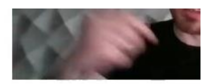
$$\boxed{\text{Система управляема} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rank}\,[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n}$$

Матрица управляемости

А что если $m = 1$?

$$\boxed{U = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n\times nm}}$$

Если $m = 1$, то матрица U должна быть невырожденной для управляемости системы.



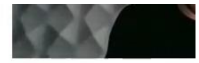
Доказательство «туда»

$$\boxed{\text{Система управляема} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank}\,[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n}$$

Предположим, что $\operatorname{rank} U < n$,
и покажем, что система неуправляема

Если $\operatorname{rank} U < n$, то строки матрицы U линейно зависимы,
а значит, найдётся ненулевой вектор v такой, что $v^T U = 0$

Доказательство «туда»



$$\text{Система управляема} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

$$\operatorname{rank} U < n \quad \Rightarrow \quad \exists v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0:\ \ v^T U = 0$$

Потому что строки U линейно зависимы

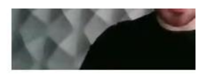
$$v^T U = \begin{bmatrix} v^T B & v^T AB & v^T A^2 B & \cdots & v^T A^{n-1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v^T B = 0 \\ v^T AB = 0 \\ v^T A^2 B = 0 \\ \quad\vdots \\ v^T A^{n-1} B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v^T A^N B = 0$$

при всех N

По следствию из теоремы Гамильтона-Кэли!

Доказательство «туда»



$$\text{Система управляема} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

$$\operatorname{rank} U < n \quad \Rightarrow \quad \exists v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0:\ \ v^T U = 0$$

Потому что строки U линейно зависимы

$$v^T U = \begin{bmatrix} v^T B & v^T AB & v^T A^2 B & \cdots & v^T A^{n-1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$v^T A^N B = 0 \quad \Rightarrow \quad v^T e^{-At} B = v^T \left(I - At + \tfrac{1}{2!} A^2 t^2 - \cdots \right) B \equiv 0$$

при всех N

При раскрытии скобок все слагаемые будут равны нулю

Доказательство «туда»

$$\text{Система управляема} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank}\,[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n$$

$$\operatorname{rank} U < n \quad \Rightarrow \quad \exists v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0: \quad v^T e^{-At} B \equiv 0$$

Выберем желаемую конечную точку $x(t_1) = e^{At_1} v$ и покажем, что систему невозможно перевести в неё:

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1 - t)} B u(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad e^{At_1} v = e^{At_1} \int_0^{t_1} e^{-At} B u(t)\, dt$$

$$e^{At_1} v = e^{At_1} \int_0^{t_1} e^{-At} B u(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad v = \int_0^{t_1} e^{-At} B u(t)\, dt$$

$$v = \int_0^{t_1} e^{-At} B u(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\boxed{v^T v}}_{> 0} = \int_0^{t_1} \underbrace{\boxed{v^T e^{-At} B}}_{\equiv 0} u(t) dt$$

Найти соответствующее $u(t)$ не получится, система неуправляема

Доказательство «обратно»

Система управляема $\Leftarrow$ $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$

$\operatorname{rank} U = n \quad \Rightarrow \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0\colon\ \ v^T U \neq 0$ Потому что строки U линейно независимы

$$\begin{bmatrix} v^TB & v^TAB & v^TA^2B & \cdots & v^TA^{n-1}B \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Хотя бы кто-то из $v^TB, v^TAB, \dots, v^TA^{n-1}B$ не равен нулю $\Rightarrow$ $v^Te^{At}B \not\equiv 0$

$v^Te^{At}B$ – что это?

Доказательство «обратно»

Система управляема $\Leftarrow$ $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$

$\operatorname{rank} U = n \quad \Rightarrow \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0\colon\ \ v^T U \neq 0$ Потому что строки U линейно независимы

$$\begin{bmatrix} v^TB & v^TAB & v^TA^2B & \cdots & v^TA^{n-1}B \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Хотя бы кто-то из $v^TB, v^TAB, \dots, v^TA^{n-1}B$ не равен нулю $\Rightarrow$ $v^Te^{At}B \not\equiv 0$

$\underbrace{v^T}_{1\times n}\underbrace{e^{At}}_{n\times n}\underbrace{B}_{n\times m}$ – вектор строка

$\|v^Te^{At}B\| > 0$ – при почти любых t

Доказательство «обратно»

$$\text{Система управляема} \quad \Leftarrow \quad \operatorname{rank}\,[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n$$

$$\operatorname{rank} U = n \quad \Rightarrow \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0: \quad v^T e^{At} B \not\equiv 0$$

Значит, для любого $t_1 > 0$ выполнено

$$\int_0^{t_1} \|v^T e^{At} B\|^2 \, dt > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{t_1} \underbrace{v^T e^{At} B}_{\substack{1 \times m \\ \text{строка}}} \underbrace{B^T e^{A^T t} v}_{\substack{m \times 1 \\ \text{столбец}}} \, dt > 0$$

Доказательство «обратно»

$$\text{Система управляема} \quad \Leftarrow \quad \operatorname{rank}\,[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n$$

$$\operatorname{rank} U = n \quad \Rightarrow \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0: \quad v^T e^{At} B \not\equiv 0$$

Значит, для любого $t_1 > 0$ выполнено

$$\int_0^{t_1} v^T e^{At} B B^T e^{A^T t} v \, dt > 0 \quad \Leftrightarrow \quad v^T \left(\int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} \, dt \right) v > 0$$

$$P(t_1) = \left(\int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} \, dt \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Грамиан управляемости относительно времени t_1

С помощью замены переменной легко показать, что…

$$\boxed{P(t_1) = \left(\int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt\right) = \left(\int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} B B^T e^{A(t_1-t)}\, dt\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}}$$

Доказательство «обратно»

$$\boxed{\text{Система управляема} \quad \Leftarrow \quad \operatorname{rank}\left[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B\right] = n}$$

$$\operatorname{rank} U = n \quad \Rightarrow \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0: \quad v^T e^{At} B \not\equiv 0$$

Значит, для любого $t_1 > 0$ выполнено

$$v^T \left(\int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt\right) v > 0 \quad \Rightarrow$$

Все собственные числа матрицы $P(t_1)$ строго положительны

$$\Downarrow$$

$$\det P(t_1) > 0$$

Доказательство «обратно»

$$\boxed{\text{Система управляема} \quad \Leftarrow \quad \operatorname{rank}\left[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B\right] = n}$$

$$\operatorname{rank} U = n \quad \Rightarrow \quad \forall t_1 > 0: \quad \det P(t_1) > 0$$

Чтобы перевести систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$, достаточно взять

$$\boxed{u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} \left(P(t_1)\right)^{-1} x_1}$$

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} B u(t)\, dt = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} B B^T e^{A^T(t_1-t)} \left(P(t_1)\right)^{-1} x_1\, dt$$

Доказательство «обратно»

$$\text{Система управляема} \quad \Leftarrow \quad \operatorname{rank}\left[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B\right] = n$$

$$\operatorname{rank} U = n \quad \Rightarrow \quad \forall t_1 > 0: \quad \det P(t_1) > 0$$

Чтобы перевести систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$, достаточно взять

$$\boxed{u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} \left(P(t_1)\right)^{-1} x_1}$$

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1 - t)} B u(t)\, dt = \left(\int_0^{t_1} e^{A(t_1 - t)} B B^T e^{A^T(t_1 - t)}\, dt \right) \cdot \left(P(t_1)\right)^{-1} x_1$$

Доказательство «обратно»

$$\text{Система управляема} \quad \Leftarrow \quad \operatorname{rank}\left[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B\right] = n$$

$$\operatorname{rank} U = n \quad \Rightarrow \quad \forall t_1 > 0: \quad \det P(t_1) > 0$$

Чтобы перевести систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$, достаточно взять

$$\boxed{u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} \left(P(t_1)\right)^{-1} x_1}$$

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1 - t)} B u(t)\, dt = \left(P(t_1)\right) \cdot \left(P(t_1)\right)^{-1} x_1$$

Критерий управляемости

Критерий Калмана

Система управляема $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\left[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B\right] = n$

Грамиан управляемости

$$P(t_1) = \left(\int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt\right)$$

Программное управление

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} \left(P(t_1)\right)^{-1} x_1$$

Управляемое подпространство

Управляемое подпространство

Множество состояний $x_1 \in \mathbb{R}^n$ таких, что найдётся управление $u(t)$, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за конечное время t_1

Линейно-алгебраическое описание

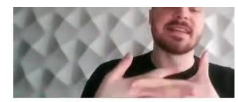
Управляемое подпространство $= \operatorname{Range}\left[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B\right]$

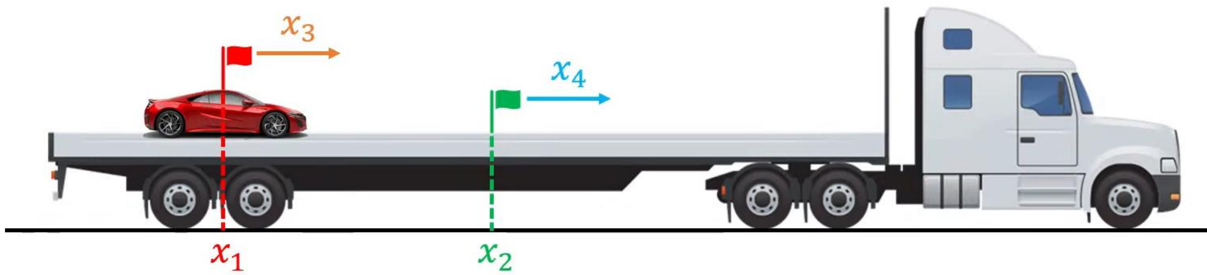
Как проверить, что x_1 принадлежит управляемому пространству?

$$\operatorname{rank}\left[B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B\right] = \operatorname{rank}\left[B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B \quad x_1\right]$$

Примеры анализа управляемости

Подвижная машинка
на подвижной платформе





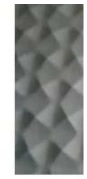
x_1 – координата машинки относительно земли

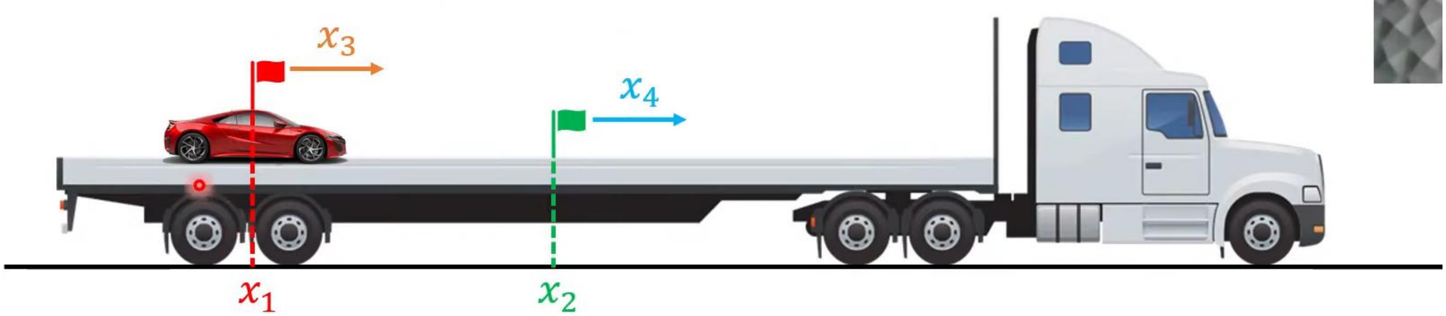
x_2 – координата платформы относительно земли

x_3 – скорость машинки относительно платформы

x_4 – скорость платформы относительно земли

Пример 1: Управляем только машинкой





x_1 – координата машинки относительно земли

x_2 – координата платформы относительно земли

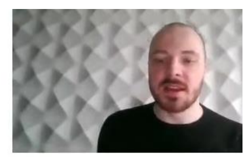
x_3 – скорость машинки относительно платформы

x_4 – скорость платформы относительно земли

u – ускорение, подаваемое на машинку

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_3 + x_4 \\
\dot{x}_2 = x_4 \\
\dot{x}_3 = u \\
\dot{x}_4 = 0
\end{cases}
$$

Пример 1: Управляем только машинкой



x_1 – координата машинки относительно земли

x_2 – координата платформы относительно земли

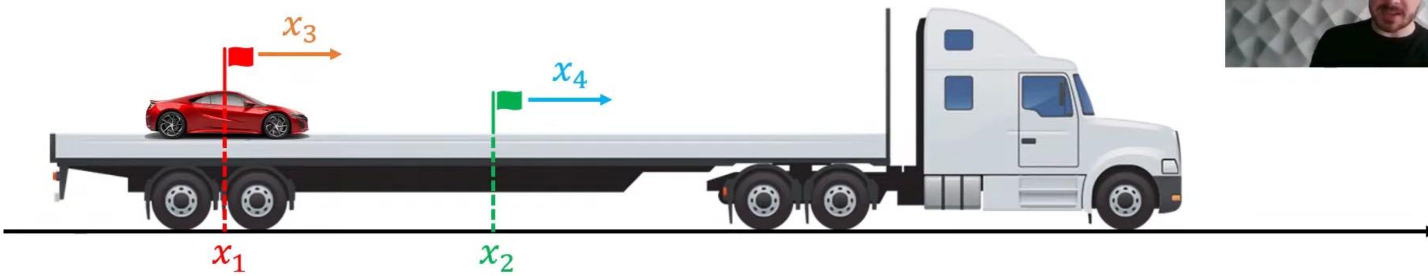
x_3 – скорость машинки относительно платформы

x_4 – скорость платформы относительно земли

u – ускорение, подаваемое на машинку

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u
$$

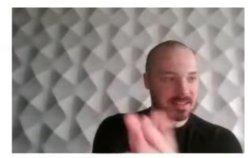
Пример 1: Управляем только машинкой



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}u \qquad U = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} U = 2$$

Пример 1: Управляем только машинкой

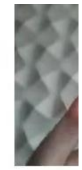


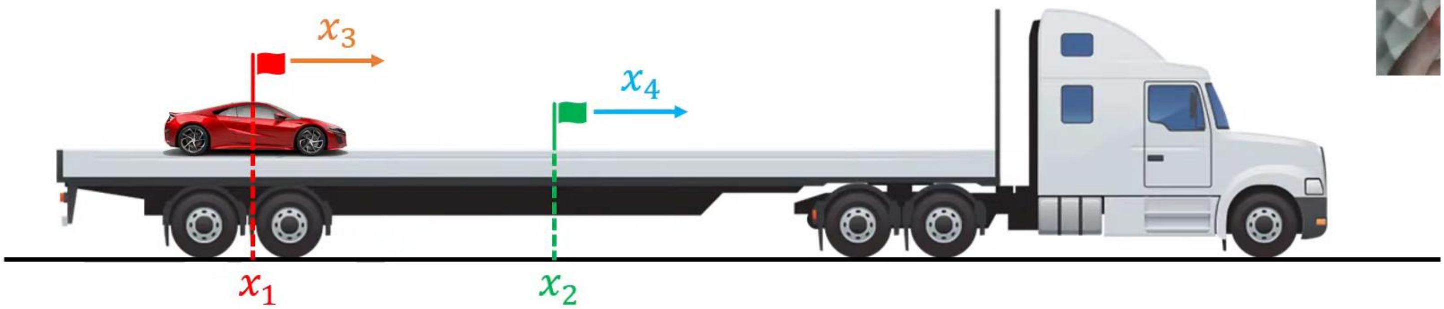
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}u \qquad U = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Range} U = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right) \Rightarrow$$

Можно добиться любой координаты машинки и любой скорости машинки, на платформу повлиять не получится

Пример 2: Управляем машинкой и платформой зеркально





x_1 – координата машинки относительно земли

x_2 – координата платформы относительно земли

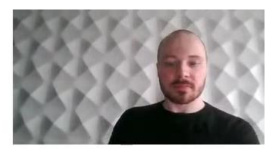
x_3 – скорость машинки относительно платформы

x_4 – скорость платформы относительно земли

u – ускорение, подаваемое на машинку и (с противоположным знаком) на платформу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + x_4 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = u \\ \dot{x}_4 = -u \end{cases}$$

Пример 2: Управляем машинкой и платформой зеркально



x_1 – координата машинки относительно земли

x_2 – координата платформы относительно земли

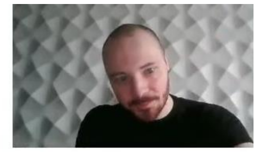
x_3 – скорость машинки относительно платформы

x_4 – скорость платформы относительно земли

u – ускорение, подаваемое на машинку и (с противоположным знаком) на платформу

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

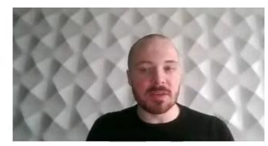
Пример 2: Управляем машинкой и платформой зеркально

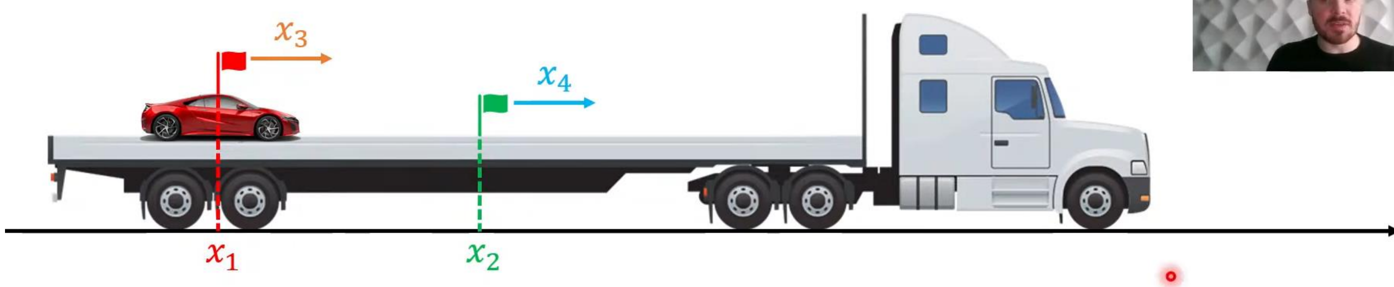


$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}u \qquad U = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} U = 2$$

Пример 2: Управляем машинкой и платформой зеркально



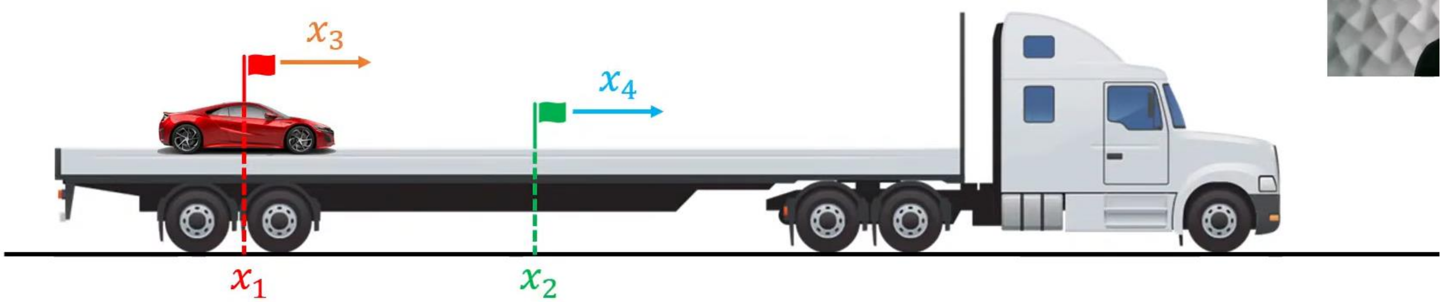


$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}u \qquad U = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Range} U = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0\end{bmatrix}\right) \Rightarrow$$

Координату машинки изменить не получится,
Координату платформы можно сделать любой,
Скорость машинки и скорость платформы
можно сделать любыми противоположными

Пример 3: Управляем машинкой и платформой независимо



x_1 – координата машинки относительно земли

x_2 – координата платформы относительно земли

x_3 – скорость машинки относительно платформы

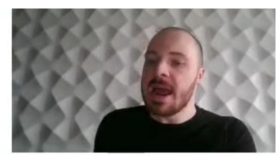
x_4 – скорость платформы относительно земли

u_1 – ускорение, подаваемое на машинку

u_2 – ускорение, подаваемое на платформу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + x_4 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = u_1 \\ \dot{x}_4 = u_2 \end{cases}$$

Пример 3: Управляем машинкой и платформой независимо



x_1 – координата машинки относительно земли

x_2 – координата платформы относительно земли

x_3 – скорость машинки относительно платформы

x_4 – скорость платформы относительно земли

u_1 – ускорение, подаваемое на машинку

u_2 – ускорение, подаваемое на платформу

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

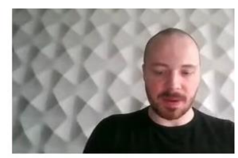
Пример 3: Управляем машинкой и платформой независимо

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$U = \left[\underbrace{\begin{matrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{matrix}}_{B}\ \ \underbrace{\begin{matrix}1&1\\0&1\\0&0\\0&0\end{matrix}}_{AB}\ \ \underbrace{\begin{matrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{matrix}}_{A^2B}\ \ \underbrace{\begin{matrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{matrix}}_{A^3B}\right]$$

$$\operatorname{rank} U = 4$$

Пример 3: Управляем машинкой и платформой независимо

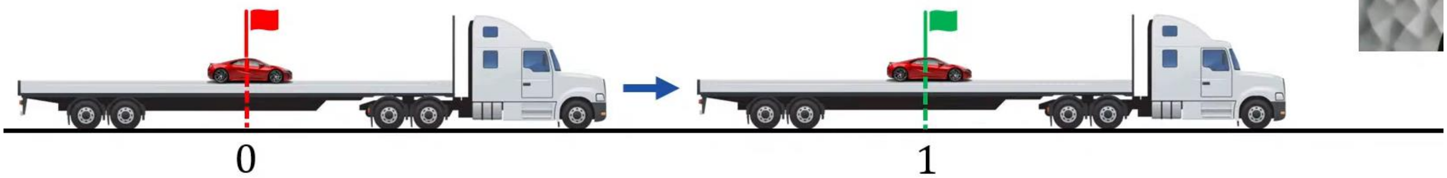


$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$U = \left[\underbrace{\begin{matrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{matrix}}_{B}\ \ \underbrace{\begin{matrix}1&1\\0&1\\0&0\\0&0\end{matrix}}_{AB}\ \ \underbrace{\begin{matrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{matrix}}_{A^2B}\ \ \underbrace{\begin{matrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{matrix}}_{A^3B}\right]$$

$$\operatorname{Range} U = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^4 \quad \Rightarrow$$ Любое состояние достижимо

Находим программное управление

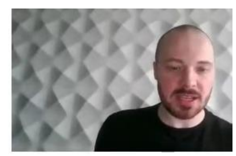


Как найти управление, которое переведёт систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

из состояния $\begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{bmatrix}$ в состояние $\begin{bmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{bmatrix}$ за 1 секунду?

Находим программное управление

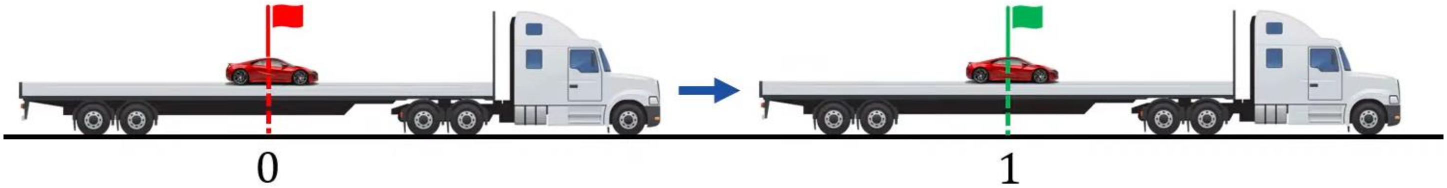


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x(t_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t_1 = 1$$

Грамиан управляемости относительно $t_1 = 1$

$$P(t_1) = \int_0^1 e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & t \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 1 & 0 \\ t & t & 0 & 1 \end{bmatrix} dt$$

Находим программное управление

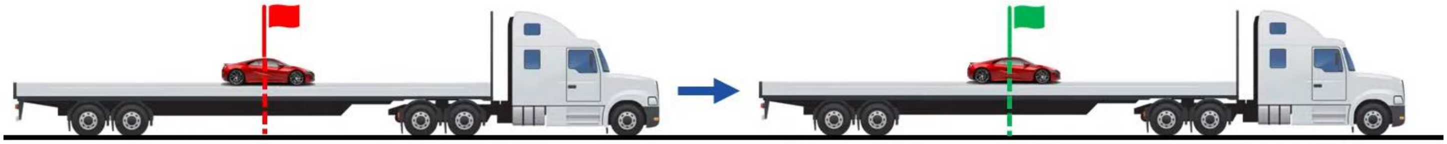


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x(t_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t_1 = 1$$

Грамиан управляемости относительно $t_1 = 1$

$$P(t_1) = \int_0^1 e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} 2t^2 & t^2 & t & t \\ t^2 & t^2 & 0 & t \\ t & 0 & 1 & 0 \\ t & t & 0 & 1 \end{bmatrix} dt$$

Находим программное управление



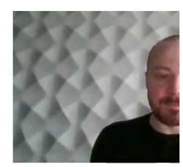
0 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x(t_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t_1 = 1$$

Грамиан управляемости относительно $t_1 = 1$

$$P(t_1) = \int_0^1 e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Находим программное управление



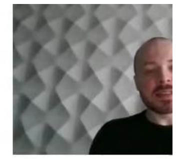
0 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P(1) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Программное управление

$$u(t) = B^T e^{A^T (t_1 - t)} \left(P(t_1)\right)^{-1} x(t_1)$$

Находим программное управление



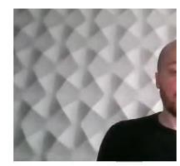
0 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P(1) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Программное управление

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-t & 0 & 1 & 0 \\ 1-t & 1-t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Находим программное управление



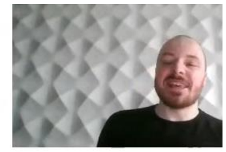
0 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P(1) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Программное управление

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 - 12t \end{bmatrix}$$

Находим программное управление



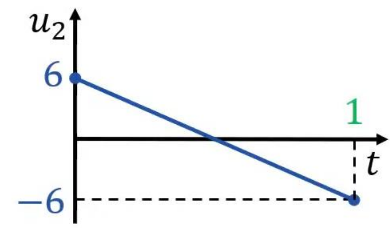
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P(1) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Программное управление

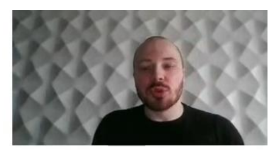
$$u_1(t) = 0 \qquad u_2(t) = 6 - 12t$$

На машинку не воздействуем

Платформу разгоняем, потом тормозим



Находим программное управление

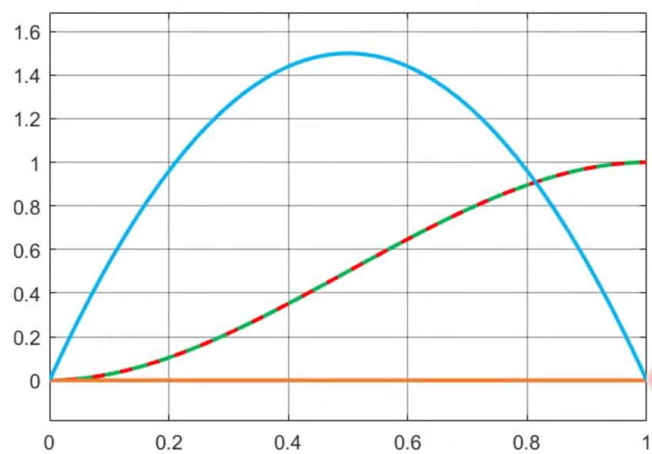


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$u_1(t) = 0 \qquad u_2(t) = 6 - 12t$$

Графики величин

$x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$



Наблюдаемость линейной системы

Система

$$\dot{x} = Ax \quad y = Cx \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \quad y(t) \in \mathbb{R}^k \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ce^{At}x(0)$$

Определение

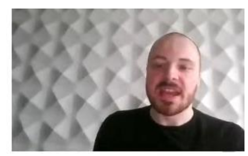
Система называется (полностью) наблюдаемой, если любым двум траекториям $x(t)$ и $x'(t)$, порождённым различными начальными условиями $x(0) \neq x'(0)$, соответствуют различные выходы $y(t) \not\equiv y'(t)$

Равносильная формулировка для линейных систем

Если $y(t) \equiv 0$, то обязательно $x(0) = 0$

Критерий наблюдаемости

Критерий наблюдаемости



Система

$$\dot{x} = Ax \quad y = Cx \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad C \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

Критерий Калмана

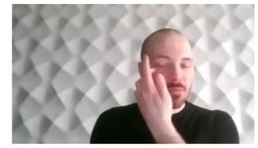
Система наблюдаема $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$

Матрица наблюдаемости

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nk \times n}$$

Полный столбцовый ранг

Критерий наблюдаемости



Система

$$\dot{x} = Ax \qquad y = Cx \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad C \in \mathbb{R}^{k\times n}$$

Критерий Калмана

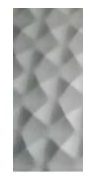
$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \iff \operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n}$$

Матрица наблюдаемости

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nk\times n}$$

А если $k = 1$?

Критерий наблюдаемости



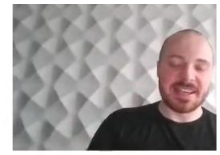
Доказательство «туда»

$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \;\Rightarrow\; \operatorname{rank} V = n}$$

Предположим, что $\operatorname{rank} V < n$
и покажем, что система ненаблюдаема

Если $\operatorname{rank} V < n$, то столбцы матрицы V линейно зависимы,
а значит, найдётся ненулевой вектор v такой, что $Vv = 0$

Критерий наблюдаемости



Доказательство «туда»

$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \;\Rightarrow\; \operatorname{rank} V = n}$$

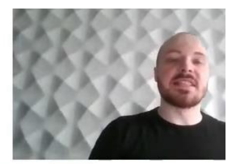
$$\operatorname{rank} V < n \quad \Rightarrow \quad \exists v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0\text{:} \;\; Vv = 0$$

Потому что столбцы V линейно зависимы

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Cv = 0 \\ CAv = 0 \\ CA^2v = 0 \\ \quad\vdots \\ CA^{n-1}v = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Ce^{At}v \equiv 0$$

По следствию из теоремы Гамильтона-Кэли!

Критерий наблюдаемости



Доказательство «туда»

$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \;\Rightarrow\; \operatorname{rank} V = n}$$

$$\operatorname{rank} V < n \quad \Rightarrow \quad \exists v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0\text{:} \quad Ce^{At}v \equiv 0$$

При начальном состоянии $x(0) = v$ выход будет равен $y(t) = Ce^{At}x(0) \equiv 0$

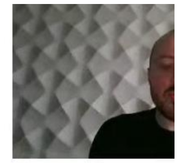
$$\Downarrow$$

Один и тот же выход $y(t) \equiv 0$ может быть вызван различными начальными условиями: $x(0) = 0$, $x(0) = v$, $x(0) = cv$ при $c \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

Система ненаблюдаема

Критерий наблюдаемости



Доказательство «обратно»

$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \;\Leftarrow\; \operatorname{rank} V = n}$$

$$\operatorname{rank} V = n \quad \Rightarrow \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,\, v \neq 0\!: \;\; Vv \neq 0$$

Потому что столбцы V линейно независимы

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} v \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

Хотя бы кто-то из $Cv, CAv, \dots, CA^{n-1}v$ не равен нулю $\quad \Rightarrow \quad Ce^{At}v \not\equiv 0$

$\underbrace{C}_{k \times n}\underbrace{e^{At}}_{n \times n}\underbrace{v}_{n \times 1}$ – вектор столбец

$\|Ce^{At}v\| > 0$ – при почти любых t

Критерий наблюдаемости

Доказательство «обратно»

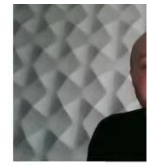
$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \;\Leftarrow\; \operatorname{rank} V = n}$$

$$\operatorname{rank} V = n \quad \Rightarrow \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,\, v \neq 0\!: \;\; Ce^{At}v \not\equiv 0$$

Значит, для любого $t_1 > 0$ выполнено

$$\int_0^{t_1} \|Ce^{At}v\|^2\, dt > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{t_1} \underbrace{v^T e^{A^T t} C^T}_{\substack{1 \times k \\ \text{строка}}} \underbrace{Ce^{At}v}_{\substack{k \times 1 \\ \text{столбец}}}\, dt > 0$$

Критерий наблюдаемости



Доказательство «обратно»

$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \;\Leftarrow\; \operatorname{rank} V = n}$$

$$\operatorname{rank} V = n \quad \Rightarrow \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,\, v \neq 0: \;\; C e^{At} v \not\equiv 0$$

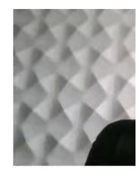
Значит, для любого $t_1 > 0$ выполнено

$$\int_0^{t_1} v^T e^{A^T t} C^T C e^{At} v \, dt > 0 \;\Leftrightarrow\; v^T \left(\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} \, dt \right) v > 0$$

$$Q(t_1) = \left(\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} \, dt \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Грамиан наблюдаемости относительно времени t_1

Критерий наблюдаемости



Доказательство «обратно»

$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \;\Leftarrow\; \operatorname{rank} V = n}$$

$$\operatorname{rank} V = n \quad \Rightarrow \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,\, v \neq 0: \;\; C e^{At} v \not\equiv 0$$

Значит, для любого $t_1 > 0$ выполнено

$$v^T \left(\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} \, dt \right) v > 0 \;\Rightarrow$$

Все собственные числа матрицы $Q(t_1)$ строго положительны

$$\Downarrow$$

$$\det Q(t_1) > 0$$

Критерий наблюдаемости

Доказательство «обратно»

$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \;\; \Leftarrow \;\; \operatorname{rank} V = n}$$

$$\operatorname{rank} V = n \quad \Rightarrow \quad \forall t_1 > 0: \quad \det Q(t_1) > 0$$

Траектория выхода $y(t)$ при начальных условиях $x(0)$:

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{A^T t}C^T y(t) = e^{A^T t}C^T C e^{At}x(0)$$

Критерий наблюдаемости

Доказательство «обратно»

$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \;\; \Leftarrow \;\; \operatorname{rank} V = n}$$

$$\operatorname{rank} V = n \quad \Rightarrow \quad \forall t_1 > 0: \quad \det Q(t_1) > 0$$

Траектория выхода $y(t)$ при начальных условиях $x(0)$:

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{t_1} e^{A^T t}C^T y(t)\,dt = \left(\int_0^{t_1} e^{A^T t}C^T C e^{At}\,dt\right)x(0)$$

Критерий наблюдаемости

Доказательство «обратно»

$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \quad \Leftarrow \quad \operatorname{rank} V = n}$$

$$\operatorname{rank} V = n \quad \Rightarrow \quad \forall t_1 > 0: \quad \det Q(t_1) > 0$$

Траектория выхода $y(t)$ при начальных условиях $x(0)$:

$$y(t) = C e^{At} x(0)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t)\, dt = Q(t_1) x(0)$$

Критерий наблюдаемости

Доказательство «обратно»

$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \quad \Leftarrow \quad \operatorname{rank} V = n}$$

$$\operatorname{rank} V = n \quad \Rightarrow \quad \forall t_1 > 0: \quad \det Q(t_1) > 0$$

Траектория выхода $y(t)$ при начальных условиях $x(0)$:

$$y(t) = C e^{At} x(0)$$

$$\Downarrow$$

$$x(0) = \left(Q(t_1)\right)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t)\, dt$$

Критерий наблюдаемости

Доказательство «обратно»

$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \ \Leftarrow\ \operatorname{rank} V = n}$$

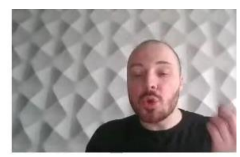
$$\operatorname{rank} V = n \quad \Rightarrow \quad \forall t_1 > 0: \quad \det Q(t_1) > 0$$

Вычисление начального условия

$$x(0) = \big(Q(t_1)\big)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t)\, dt$$

Если Грамиан $Q(t_1)$ невырожден, то $x(0)$ однозначно определяется выходом $y(t)$, а значит различным начальным условиям соответствуют различные выходы

Критерий наблюдаемости



Критерий Калмана

$$\boxed{\text{Система наблюдаема} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n}$$

Грамиан наблюдаемости

$$Q(t_1) = \left(\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At}\, dt\right)$$

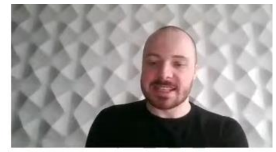
Начальное условие

$$x(0) = \big(Q(t_1)\big)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t)\, dt$$

Зная начальное условие, можно восстановить всю траекторию $x(t) = e^{At} x(0)$

Ненаблюдаемое подпространство

Ненаблюдаемое подпространство



Ненаблюдаемое подпространство

Множество состояний $x_0 \in \mathbb{R}^n$ таких, что если $x(0) = x_0$, то $y(t) \equiv 0$

Линейно-алгебраическое описание

$$\text{Ненаблюдаемое подпространство} = \text{Nullspace}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

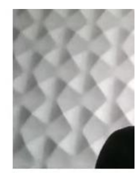
Проверка

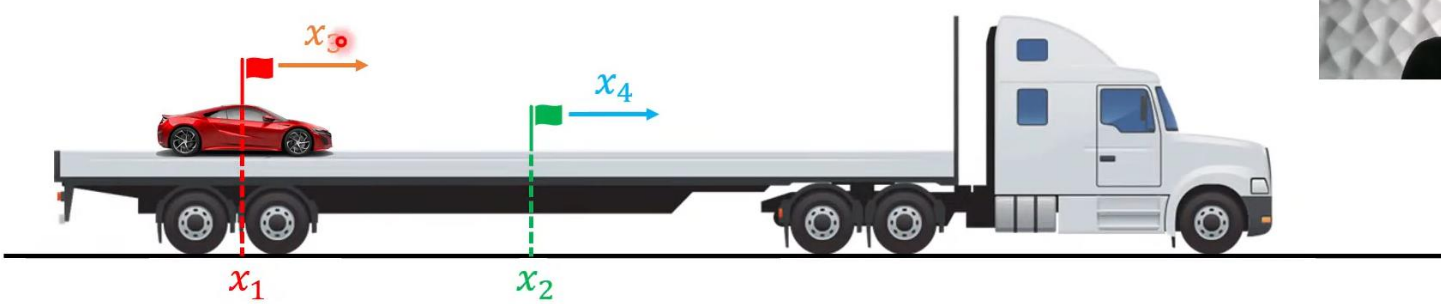
$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Если так, то x_0 принадлежит ненаблюдаемому подпространству

Примеры на наблюдаемость

Пример 1: Измеряем только координату машинки





x_1 – координата машинки относительно земли

x_2 – координата платформы относительно земли

x_3 – скорость машинки относительно платформы

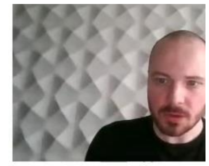
x_4 – скорость платформы относительно земли

y – измеряемая величина

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + x_4 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases}$$

$$y = x_1$$

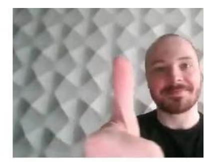
Пример 1: Измеряем только координату машинки



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\\ CA^3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank} V = 2$

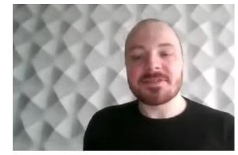
Пример 1: Измеряем только координату машинки



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\\ CA^3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\operatorname{nullity} V = 2$

Пример 1: Измеряем только координату машинки

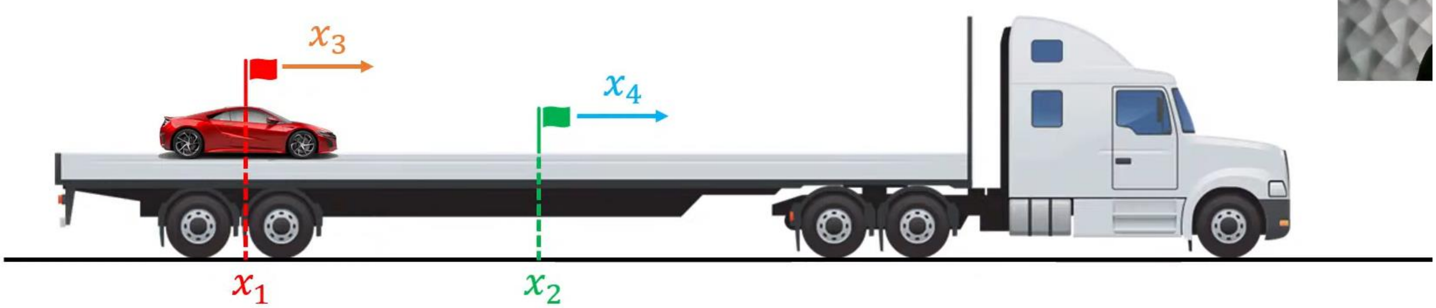


$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\qquad y=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\qquad V=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\\CA^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\text{Nullspace}\,V=\text{Span}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)\Rightarrow$$

Если в начальный момент есть ненулевая координата платформы, или ненулевые и противоположные скорость машинки и скорость платформы, то мы об этом не узнаем

Пример 2: Измеряем координаты машинки и дороги



x_1 – координата машинки относительно земли

x_2 – координата платформы относительно земли

x_3 – скорость машинки относительно платформы

x_4 – скорость платформы относительно земли

y_1 – первая измеряемая величина

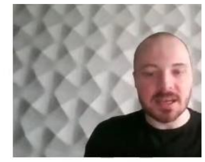
y_2 – вторая измеряемая величина

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_3+x_4\\ \dot{x}_2=x_4\\ \dot{x}_3=0\\ \dot{x}_4=0\end{cases}$$

$$y_1=x_1$$

$$y_2=x_2$$

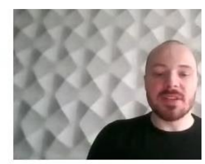
Пример 2: Измеряем координаты машинки и дороги



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\\CA^3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} V = 4 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{nullity} V = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Nullspace} V = \left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Пример 2: Измеряем координаты машинки и дороги

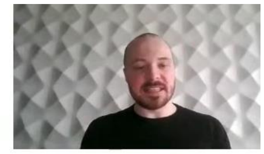


$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\\CA^3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Nullspace} V = \left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\} \quad \Rightarrow$$

На основе измеряемых величин можно полностью восстановить вектор состояния

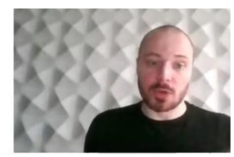
Восстанавливаем состояние на основе выхода

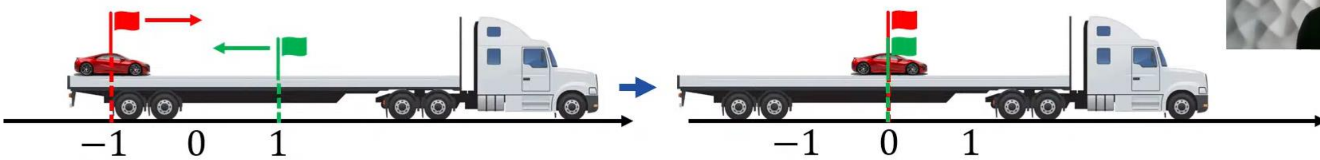


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Как восстановить $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$ на основе измерения $\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ в течение 1 секунды?

Восстанавливаем состояние на основе выхода





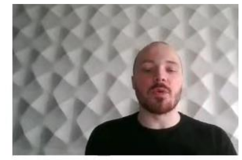
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1(t) = t - 1 \\ y_2(t) = 1 - t \end{bmatrix} \leftarrow$$

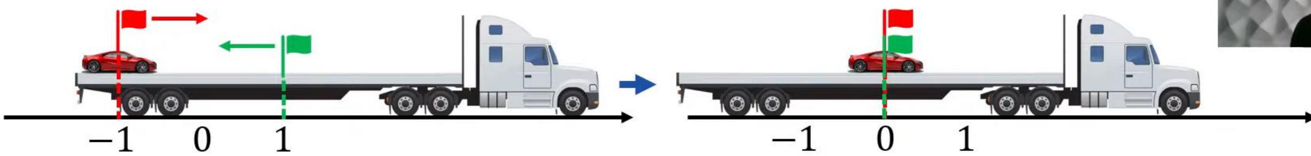
Допустим, измеряемые величины менялись так

Грамиан наблюдаемости относительно $t_1 = 1$

$$Q(t_1) = \int_0^1 e^{A^T t} C^T C e^{At} \, dt$$

Восстанавливаем состояние на основе выхода





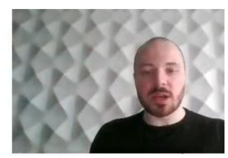
$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}y_1(t)=t-1\\y_2(t)=1-t\end{bmatrix}$$

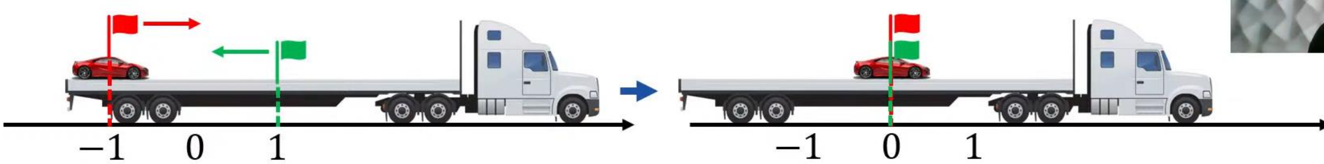
← Допустим, измеряемые величины менялись так

Грамиан наблюдаемости относительно $t_1=1$

$$Q(t_1)=\int_0^1 e^{A^T t}C^T C e^{At}\,dt=\int_0^1\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\t&0&1&0\\t&t&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&t&t\\0&1&0&t\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}dt$$

Восстанавливаем состояние на основе выхода





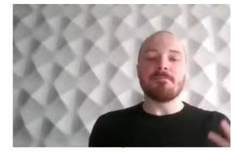
$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}y_1(t)=t-1\\y_2(t)=1-t\end{bmatrix}$$

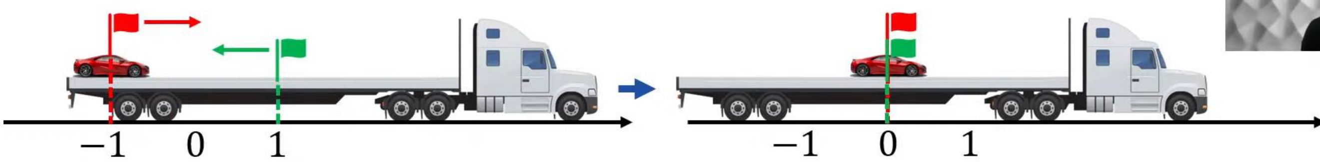
← Допустим, измеряемые величины менялись так

Грамиан наблюдаемости относительно $t_1=1$

$$Q(t_1)=\int_0^1 e^{A^T t}C^T C e^{At}\,dt=\int_0^1\begin{bmatrix}1&0&t&t\\0&1&0&t\\t&0&t^2&t^2\\t&t&t^2&2t^2\end{bmatrix}dt$$

Восстанавливаем состояние на основе выхода





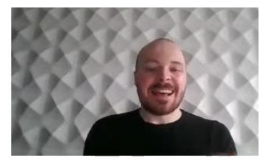
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1(t) = t - 1 \\ y_2(t) = 1 - t \end{bmatrix} \leftarrow$$

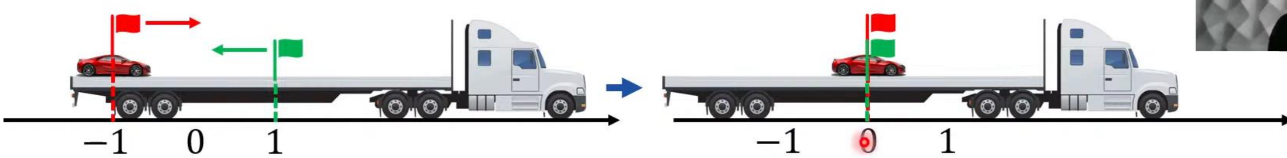
Допустим, измеряемые величины менялись так

Грамиан наблюдаемости относительно $t_1 = 1$

$$Q(t_1) = \int_0^1 e^{A^T t} C^T C e^{At}\, dt = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Восстанавливаем состояние на основе выхода



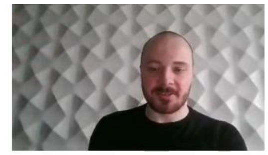


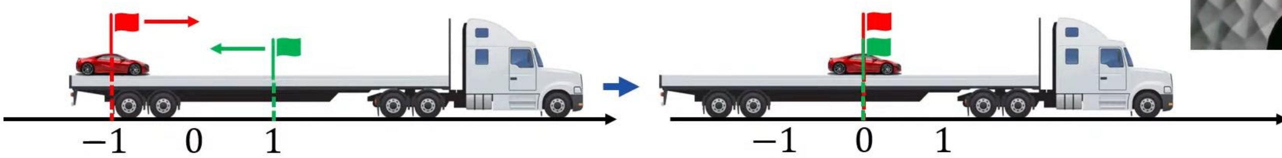
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1(t) = t - 1 \\ y_2(t) = 1 - t \end{bmatrix} \quad Q(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Восстановление начальных условий

$$x(0) = \left(Q(t_1)\right)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t)\, dt$$

Восстанавливаем состояние на основе выхода



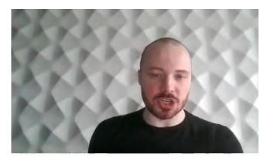


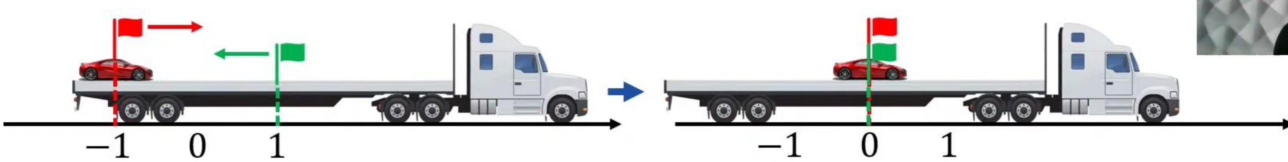
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1(t) = t - 1 \\ y_2(t) = 1 - t \end{bmatrix} \quad Q(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Восстановление начальных условий

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}^{-1} \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 1 & 0 \\ t & t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t - 1 \\ 1 - t \end{bmatrix} dt$$

Восстанавливаем состояние на основе выхода



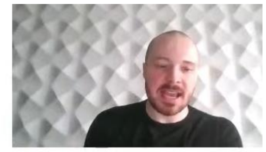


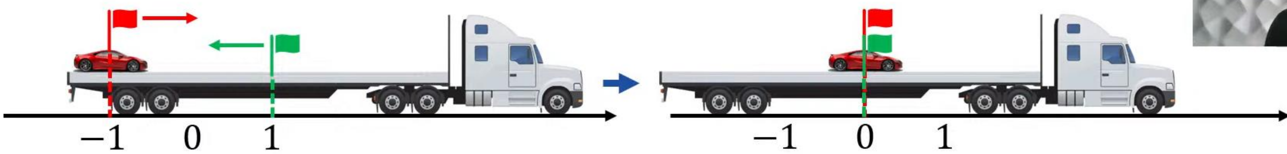
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1(t) = t - 1 \\ y_2(t) = 1 - t \end{bmatrix} \quad Q(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Восстановление начальных условий

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Восстанавливаем состояние на основе выхода





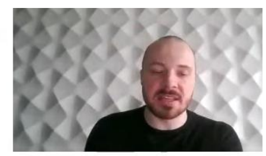
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1(t) = t - 1 \\ y_2(t) = 1 - t \end{bmatrix} \quad Q(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

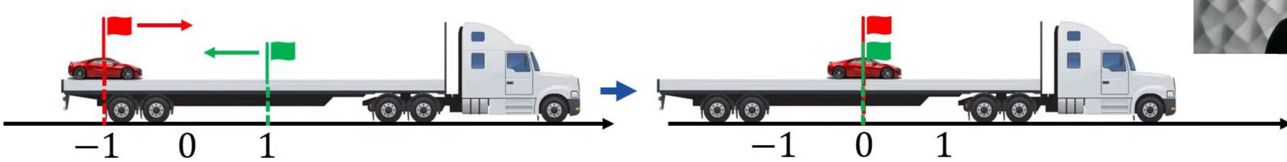
Начальные условия

Восстановление вектора состояния

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{At}x(0)$$

Восстанавливаем состояние на основе выхода





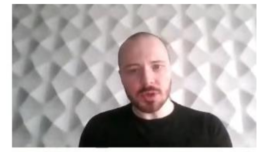
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1(t) = t - 1 \\ y_2(t) = 1 - t \end{bmatrix} \quad Q(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

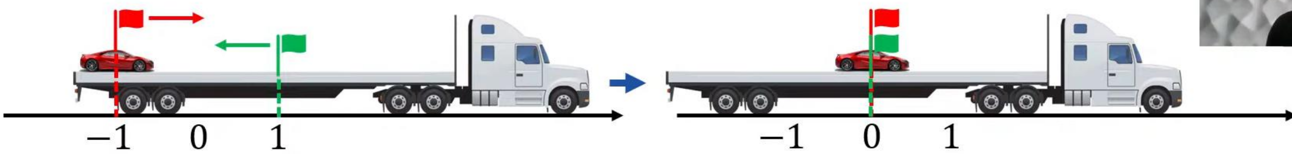
Начальные условия

Восстановление вектора состояния

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & t \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Восстанавливаем состояние на основе выхода





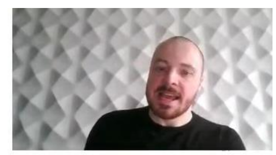
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1(t) = t - 1 \\ y_2(t) = 1 - t \end{bmatrix} \quad Q(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

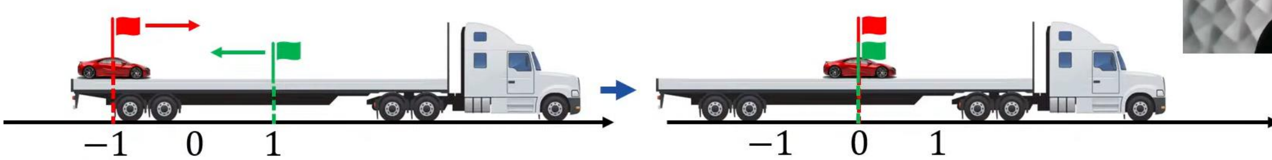
Начальные условия

Восстановление вектора состояния

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \begin{bmatrix} t - 1 \\ 1 - t \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Восстанавливаем состояние на основе выхода



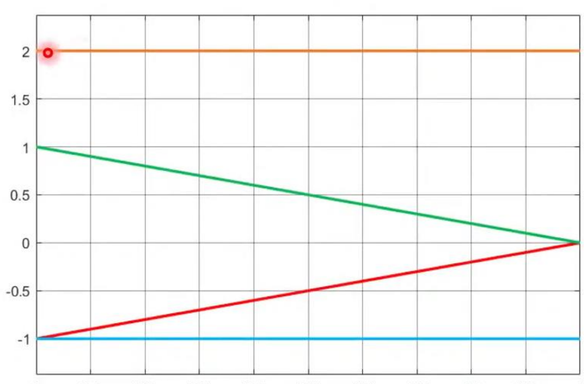


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Измеренные выходы

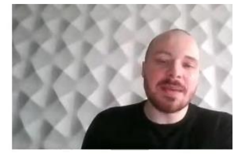
Восстановленные состояния

$$\begin{bmatrix} y_1(t) = t - 1 \\ y_2(t) = 1 - t \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1(t) = t - 1 \\ x_2(t) = 1 - t \\ x_3(t) = 2 \\ x_4(t) = -1 \end{bmatrix}$$



Управляемость и наблюдаемость полной системы

Управляемость и наблюдаемость полной системы



Полная система

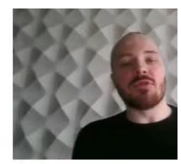
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m} \quad C \in \mathbb{R}^{k\times n} \quad D \in \mathbb{R}^{k\times m}$$

Система управляема $\Leftrightarrow$ Пара (A, B) управляема $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} U = n$

Система наблюдаема $\Leftrightarrow$ Пара (C, A) наблюдаема $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} V = n$

Управляемость и наблюдаемость собственных чисел

Управляемость и наблюдаемость собственных чисел



Собственное число λ матрицы A называется управляемым, если

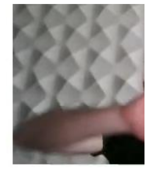
$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} = n$$

Собственное число λ матрицы A называется наблюдаемым, если

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n$$

Управляемость и наблюдаемость собственных чисел можно также проверить с помощью Жордановой формы системы

Управляемость и наблюдаемость собственных чисел



Пример

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 4\\ 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

Собственные числа

$$\lambda_{1,2} = \pm 4$$

Определяем управляемость с помощью рангового критерия

$$\lambda = 4 \qquad \operatorname{rank}\,[A - 4I \quad B] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}-4 & 4 & 1\\ 4 & -4 & 1\end{bmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Да}$$

$$\lambda = -4 \qquad \operatorname{rank}\,[A - (-4)I \quad B] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}4 & 4 & 1\\ 4 & 4 & 1\end{bmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Нет}$$

Управляемость и наблюдаемость собственных чисел

Пример

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 4\\ 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

Собственные числа

$$\lambda_{1,2} = \pm 4$$

Определяем управляемость с помощью жордановой формы

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u \quad \Rightarrow$$

$\lambda = 4$ Управляемо

$\lambda = -4$ Неуправляемо

Альтернативный критерий управляемости

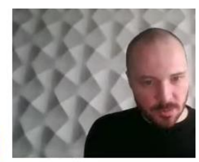
Все собственные числа матрицы A управляемы	$\Leftrightarrow$	Система (полностью) управляема

Альтернативный критерий наблюдаемости

Все собственные числа матрицы A наблюдаемы	$\Leftrightarrow$	Система (полностью) наблюдаема

Три критерия управляемости

Три критерия управляемости



Матрица управляемости имеет полный ранг

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

Грамиан управляемости невырожден во все моменты времени

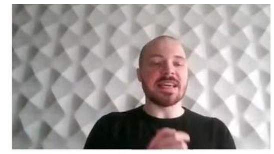
$$\forall t_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \det\left(\int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt\right) > 0$$

Матрица Хаутуса имеет полный ранг при всех собственных числах матрицы A

$$\forall \lambda \in \sigma(A) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} = n$$

Три критерия наблюдаемости

Три критерия наблюдаемости



Матрица наблюдаемости имеет полный ранг

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Грамиан наблюдаемости невырожден во все моменты времени

$$\forall t_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \det\left(\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At}\, dt\right) > 0$$

Матрица Хаутуса имеет полный ранг при всех собственных числах матрицы A

$$\forall \lambda \in \sigma(A) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n$$