

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

**Отчет по лабораторной работе №4**  
**«Анализ точности систем управления»**  
**по дисциплине «Теория автоматического управления»**

Выполнил: студент гр. R3238,  
Кирбаба Д.Д.

Преподаватель: Перегудин А.А.,  
ассистент фак. СУиР

## Цель работы

Исследование точностных свойств систем управления.

## Начальные данные

11 вариант

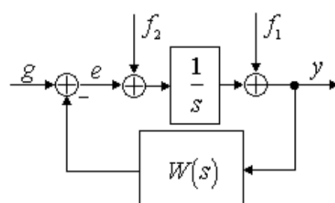
Параметры системы с нулевым порядком астатизма:

$$W(s) = \frac{1}{0.5s^2 + s + 1}, g = 2, g = 2t$$

Параметры системы с первым порядком астатизма:

$$W(s) = \frac{s + 1}{0.5s^2 + s + 1}, g = 0.45t^2$$

Возмущенные системы:



Структура системы:

$$, f_1 = -0.5, f_2 = 0.25$$

Сигнал задания:

$$0.3t + 2\sin(0.8t)$$

## Выполнение работы

### 1. Исследование системы с астатизмом нулевого порядка

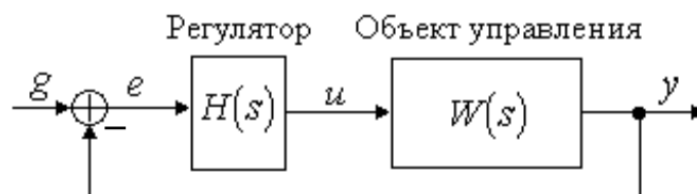


Рисунок 1: Структурная схема моделируемой системы,  $H(s) = k$

1.1.

Передаточная функция от G к E:

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{1}{1 + W(s)H(s)} = \frac{0.5s^2 + s + 1}{0.5s^2 + s + k + 1}$$

Передаточная функция от G к Y:

$$W_{g \rightarrow y}(s) = \frac{W(s)H(s)}{1 + W(s)H(s)} = \frac{k}{0.5s^2 + s + k + 1}$$

Образ Лапласа входного воздействия:

$$G(s) = L\{g(t)\} = L\{2\} = \frac{2}{s}$$

Образ Лапласа выходной функции:

$$\begin{aligned} Y(s) &= W_{g \rightarrow y}(s)G(s) = \frac{2k}{s(0.5s^2 + s + k + 1)} = \\ &= \frac{2k}{k+1} \left( \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + (\sqrt{2k+1})^2} - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \frac{\sqrt{2k+1}}{(s+1)^2 + (\sqrt{2k+1})^2} \right) \end{aligned}$$

Выходная функция:

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{2k}{k+1} (1 - e^{-t} \cos(\sqrt{2k+1}t) - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} e^{-t} \sin(\sqrt{2k+1}t)) = \\ &= \frac{2k}{k+1} (1 - e^{-t} \left( \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \sin(\sqrt{2k+1}t) + \cos(\sqrt{2k+1}t) \right)) \end{aligned}$$

Предельное значение установившейся ошибки:

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s W_{g \rightarrow e}(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2s + 2}{0.5s^2 + 1s + k + 1} = \frac{2}{k+1}$$

$k = 1$ :

$$y(t) = 1 - e^{-t} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) + \cos(\sqrt{3}t) \right), \varepsilon = 1$$

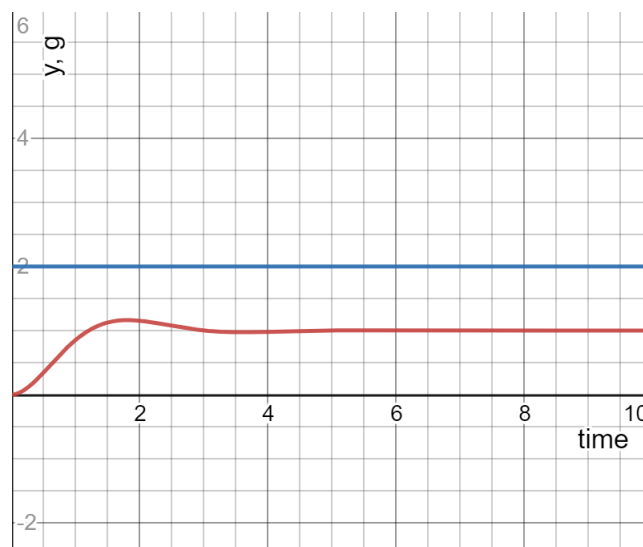


Рисунок 2: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t)=2$  и  $k=1$

$k = 5$ :

$$y(t) = \frac{5}{3} \left( 1 - e^{-t} \left( \frac{1}{\sqrt{11}} \sin(\sqrt{11}t) + \cos(\sqrt{11}t) \right) \right), \varepsilon = \frac{1}{3}$$

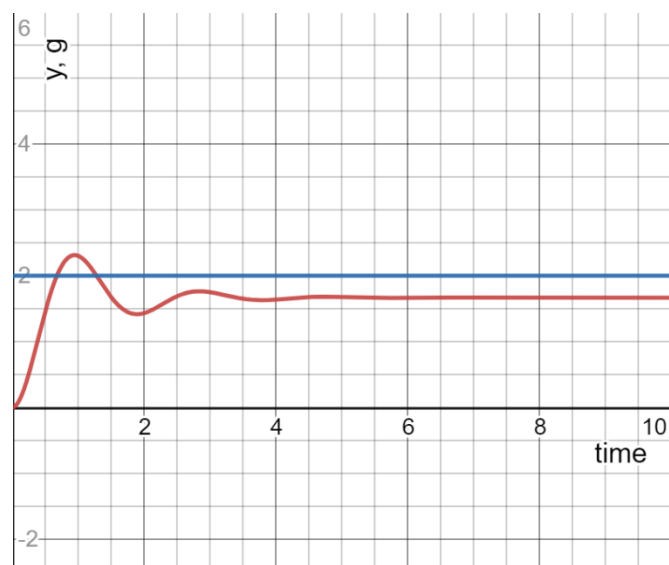


Рисунок 3: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t)=2$  и  $k=5$

$k = 10$ :

$$y(t) = \frac{20}{11} \left( 1 - e^{-t} \left( \frac{1}{\sqrt{21}} \sin(\sqrt{21}t) + \cos(\sqrt{21}t) \right) \right), \varepsilon = \frac{2}{11}$$

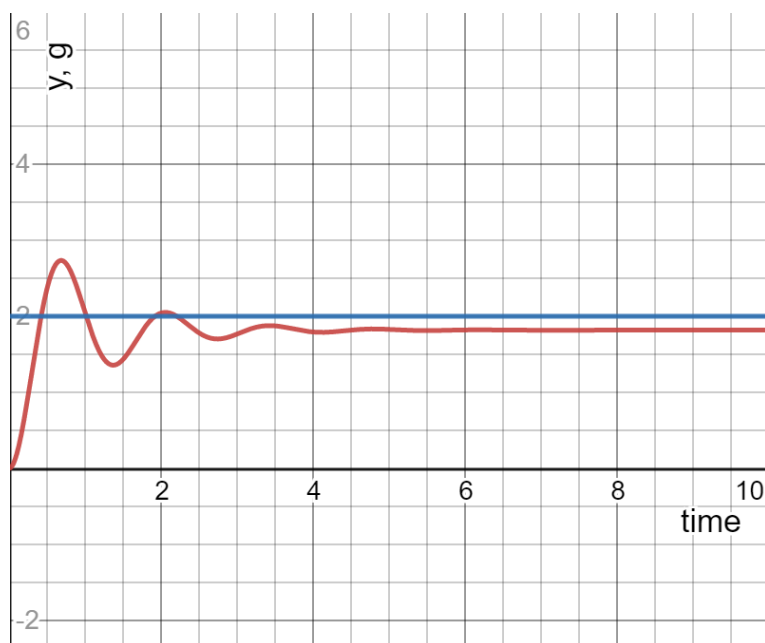


Рисунок 4: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t)=2$  и  $k=10$

1.2.

Передаточная функция от G к Y:

$$W_{g \rightarrow y}(s) = \frac{W(s)H(s)}{1 + W(s)H(s)} = \frac{k}{0.5s^2 + s + k + 1}$$

Образ Лапласа входного воздействия:

$$G(s) = L\{g(t)\} = L\{2t\} = \frac{2}{s^2}$$

Образ Лапласа выходной функции:

$$Y(s) = W_{g \rightarrow y}(s)G(s) = \frac{2k}{s^2(0.5s^2 + s + k + 1)} =$$

$$= \frac{2k}{k+1} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{k+1} \frac{1}{s} + \frac{1}{k+1} \left( \frac{s+1}{(s+1)^2 + (\sqrt{2k+1})^2} - \frac{k}{\sqrt{2k+1}} \frac{\sqrt{2k+1}}{(s+1)^2 + (\sqrt{2k+1})^2} \right) \right)$$

Выходная функция:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{2k}{k+1} \left( t - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} \left( e^{-t} \left( \cos(\sqrt{2k+1}t) - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \sin(\sqrt{2k+1}t) \right) \right) \right) =$$

$$= \frac{2k}{k+1} \left( t - \frac{1}{k+1} \left( 1 - e^{-t} \left( \cos(\sqrt{2k+1}t) - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \sin(\sqrt{2k+1}t) \right) \right) \right)$$

$k = 1$ :

$$y(t) = t - \frac{1}{2} (1 - e^{-t} \left( \cos(\sqrt{3}t) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) \right))$$

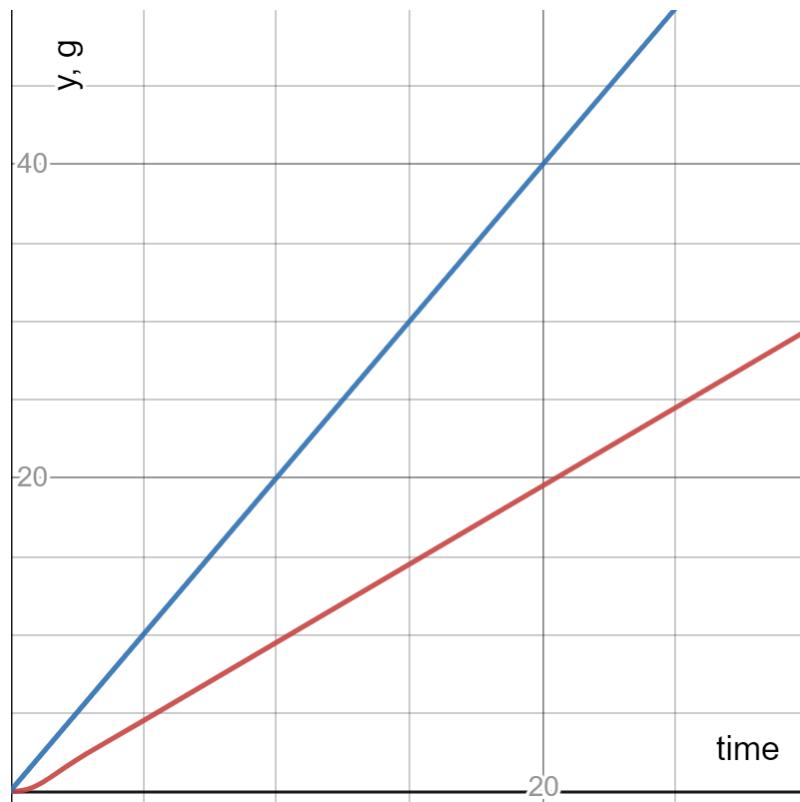


Рисунок 5: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t)=2t$  и  $k=1$

$k = 5$ :

$$y(t) = \frac{5}{3} \left( t - \frac{1}{6} \left( 1 - e^{-t} \left( \cos(\sqrt{11}t) - \frac{1}{\sqrt{11}} \sin(\sqrt{11}t) \right) \right) \right)$$

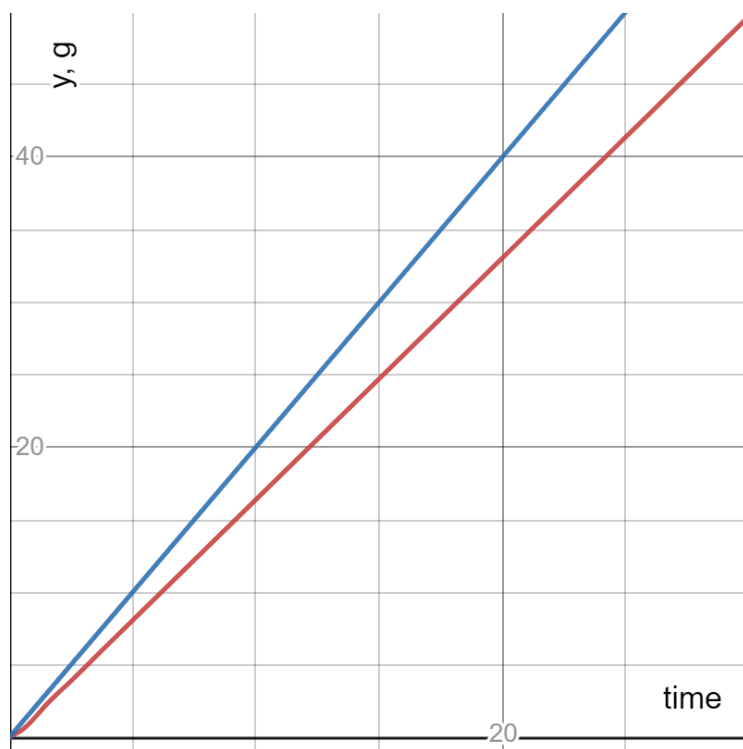


Рисунок 6: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t)=2t$  и  $k=5$

$k = 10$ :

$$y(t) = \frac{20}{11} \left( t - \frac{1}{11} \left( 1 - e^{-t} \left( \cos(\sqrt{21}t) - \frac{1}{\sqrt{21}} \sin(\sqrt{21}t) \right) \right) \right)$$

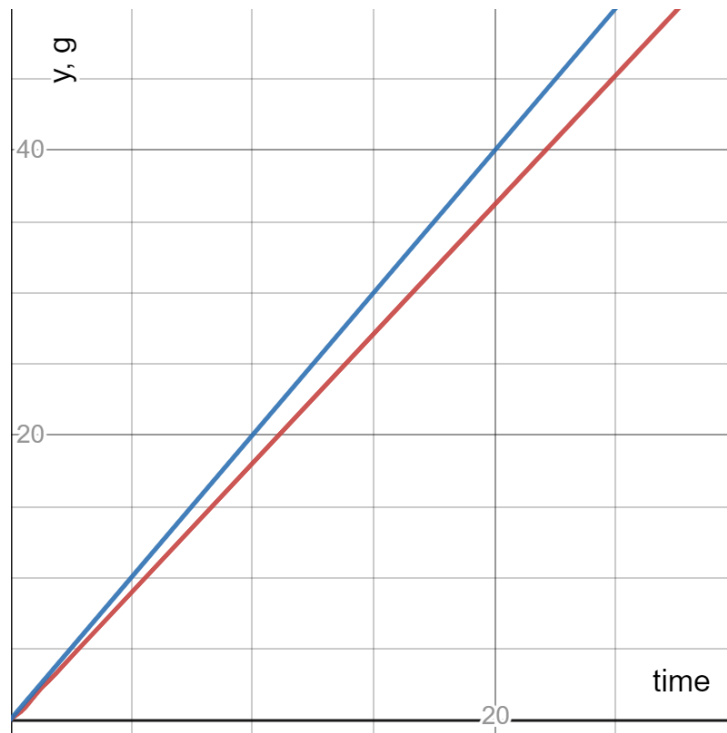


Рисунок 7: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t)=2t$  и  $k=10$

## 2. Исследование системы с астатизмом первого порядка

Структура системы представлена на Рисунке 1, где  $H(s) = \frac{k}{s}$

### 2.1.

Передаточная функция от G к E:

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{1}{1 + W(s)H(s)} = \frac{s(0.5s^2 + s + 1)}{0.5s^3 + s^2 + (k+1)s + k}$$

Передаточная функция от G к Y:

$$W_{g \rightarrow y}(s) = \frac{W(s)H(s)}{1 + W(s)H(s)} = \frac{k(s+1)}{0.5s^3 + s^2 + (k+1)s + k}$$

Образ Лапласа входного воздействия:

$$G(s) = L\{g(t)\} = L\{2\} = \frac{2}{s}$$

Образ Лапласа установившейся ошибки:

$$E(s) = W_{g \rightarrow e}(s)G(s) = \frac{2(0.5s^2 + s + 1)}{0.5s^3 + s^2 + (k+1)s + k}$$

Так как полюса  $sE(s)$  имеют строго отрицательную вещественную часть при  $k > 0$ , то можем использовать теорема о конечном значении установившейся ошибки

Образ Лапласа выходной функции:

$$Y(s) = W_{g \rightarrow y}(s)G(s) = \frac{2k(s+1)}{s(0.5s^3 + s^2 + (k+1)s + k)}$$

Так как разложение на простые дроби является громоздким, график выходной функции будет получен моделированием системы в Simulink

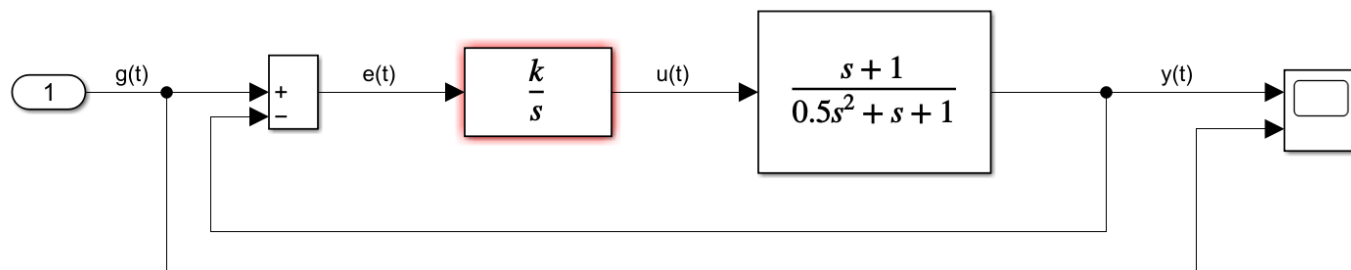


Рисунок 8: схема моделирования системы с  $H(s) = \frac{1}{k}$

Предельное значение установившейся ошибки:

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s W_{g \rightarrow e}(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 + 2s^2 + 2s}{0.5s^3 + s^2 + (k+1)s + k} = 0, \quad k > 0$$

$k = 1$ :

$$\varepsilon = 0$$

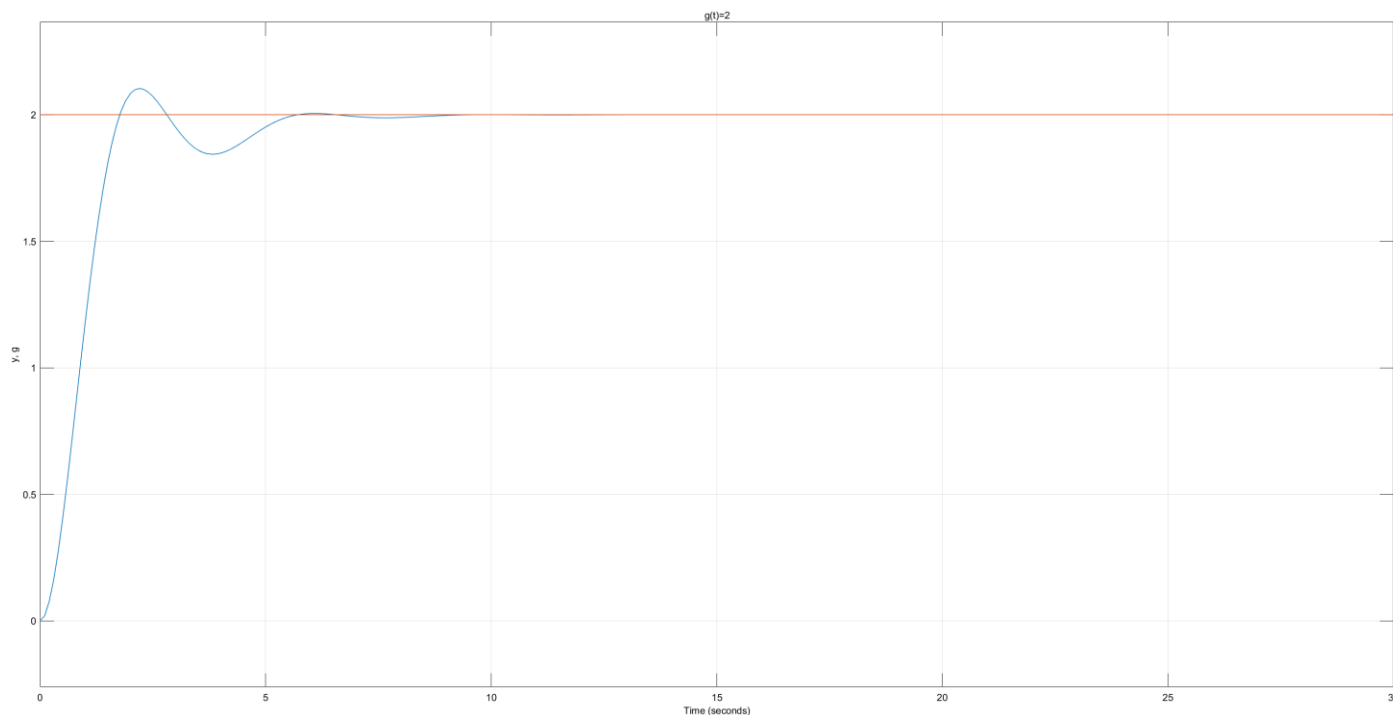


Рисунок 9: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t)=2$  и  $k=1$

$k = 5$ :

$$\varepsilon = 0$$



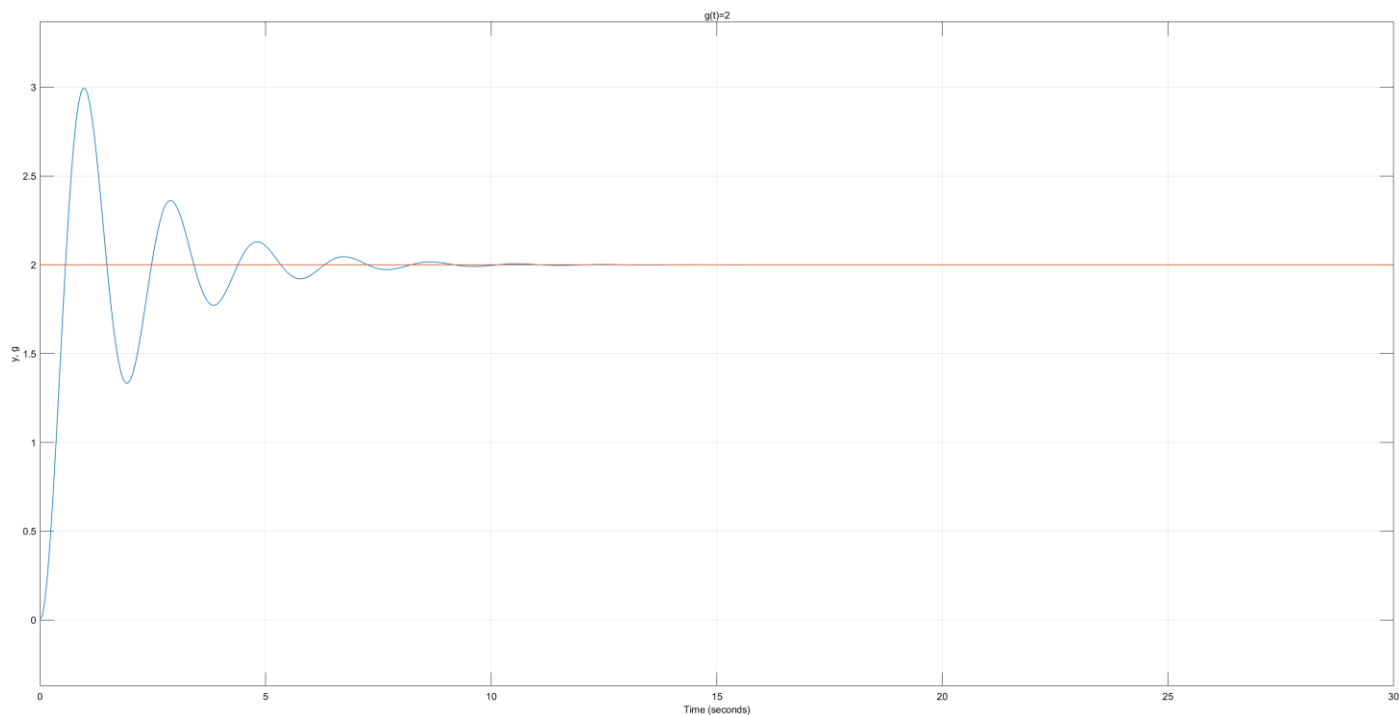


Рисунок 10: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t)=2$  и  $k=5$

$k = 10$ :

$\varepsilon = 0$

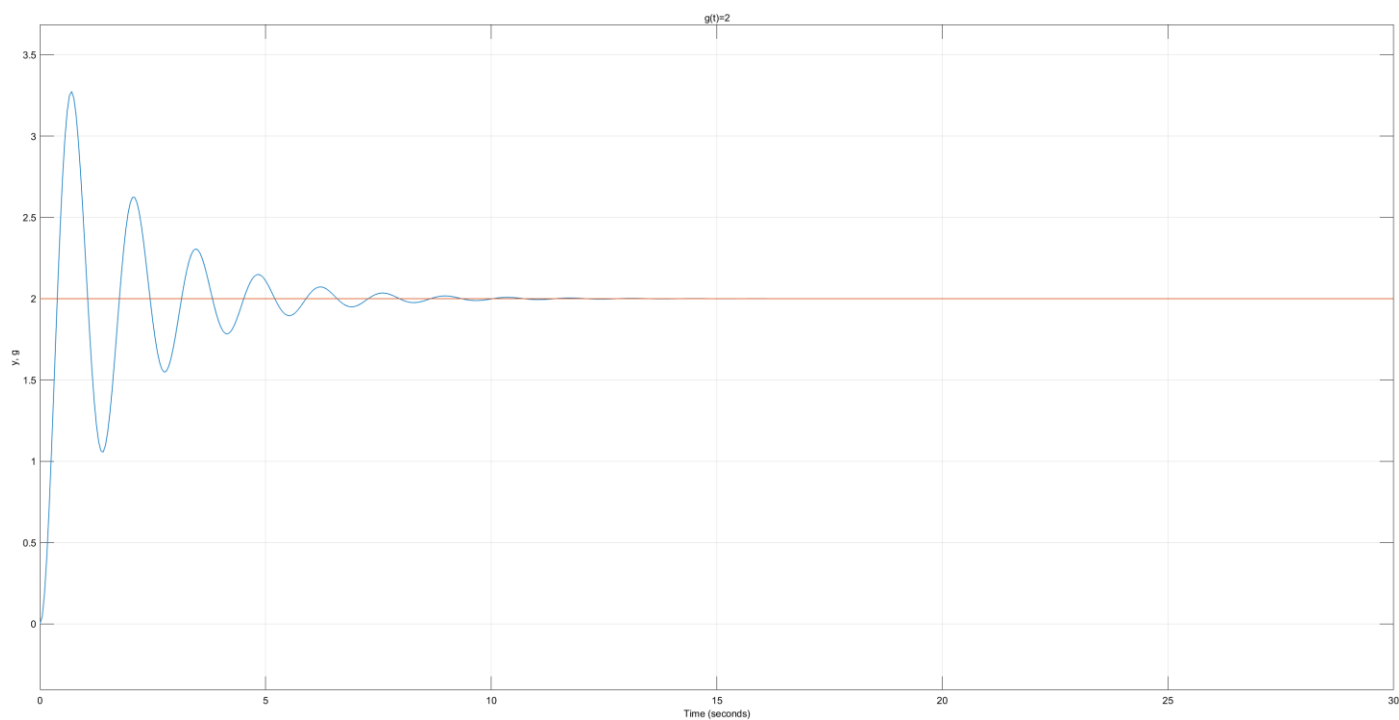


Рисунок 11: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t)=2$  и  $k=10$

2.2.

Передаточная функция от G к E:

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{1}{1 + W(s)H(s)} = \frac{s(0.5s^2 + s + 1)}{0.5s^3 + s^2 + (k+1)s + k}$$

Образ Лапласа входного воздействия:

$$G(s) = L\{g(t)\} = L\{2t\} = \frac{2}{s^2}$$

Образ Лапласа установившейся ошибки:

$$E(s) = W_{g \rightarrow e}(s)G(s) = \frac{2(0.5s^2 + s + 1)}{s(0.5s^3 + s^2 + (k+1)s + k)}$$

Так как полюса  $sE(s)$  имеют строго отрицательную вещественную часть при  $k > 0$ , то можем использовать теорема о конечном значении установившейся ошибки

Образ Лапласа выходной функции:

$$Y(s) = W_{g \rightarrow y}(s)G(s) = \frac{2k(s+1)}{s(0.5s^3 + s^2 + (k+1)s + k)}$$

Предельное значение установившейся ошибки:

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} sW_{g \rightarrow e}(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2s + 2}{0.5s^3 + s^2 + (k+1)s + k} = \frac{2}{k}, \quad k > 0$$

$k = 1$ :

$$\varepsilon = 2$$

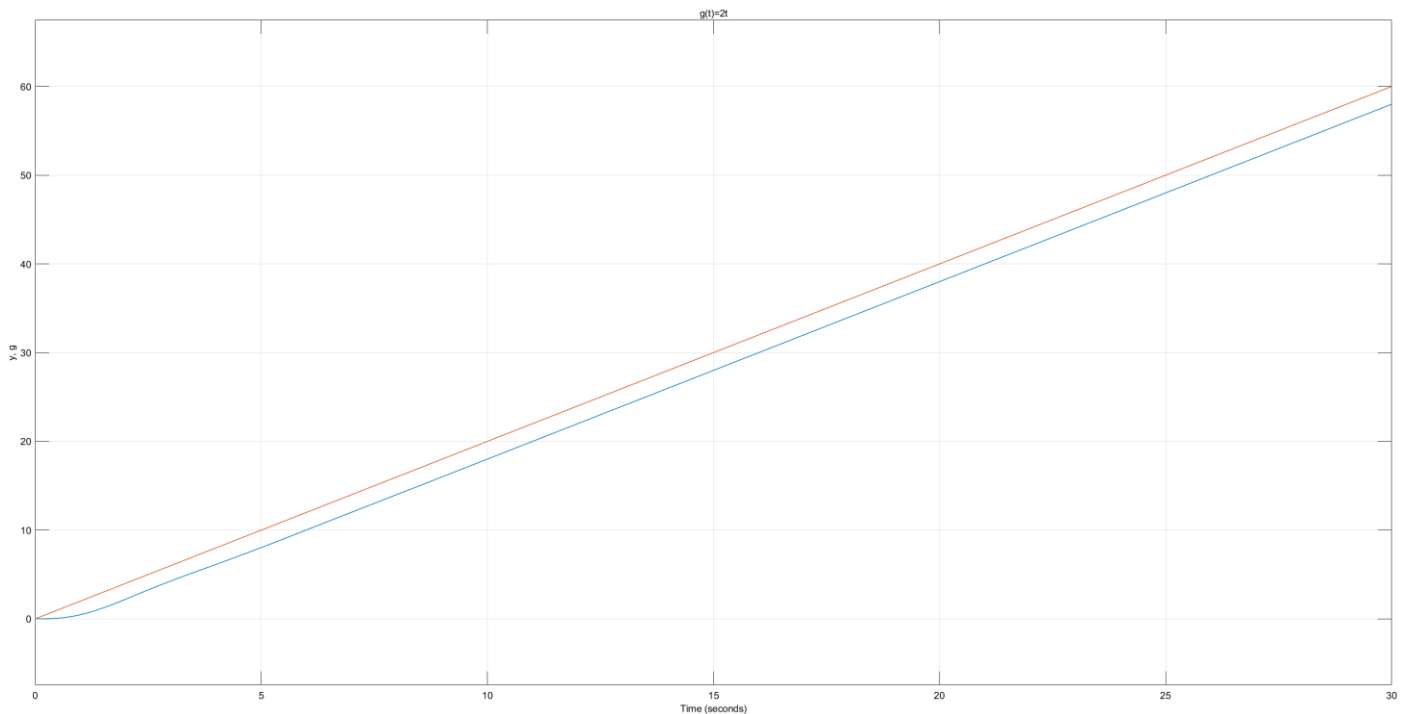


Рисунок 12: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t)=2t$  и  $k=1$

$k = 5$ :

$$\varepsilon = \frac{2}{5} = 0.4$$

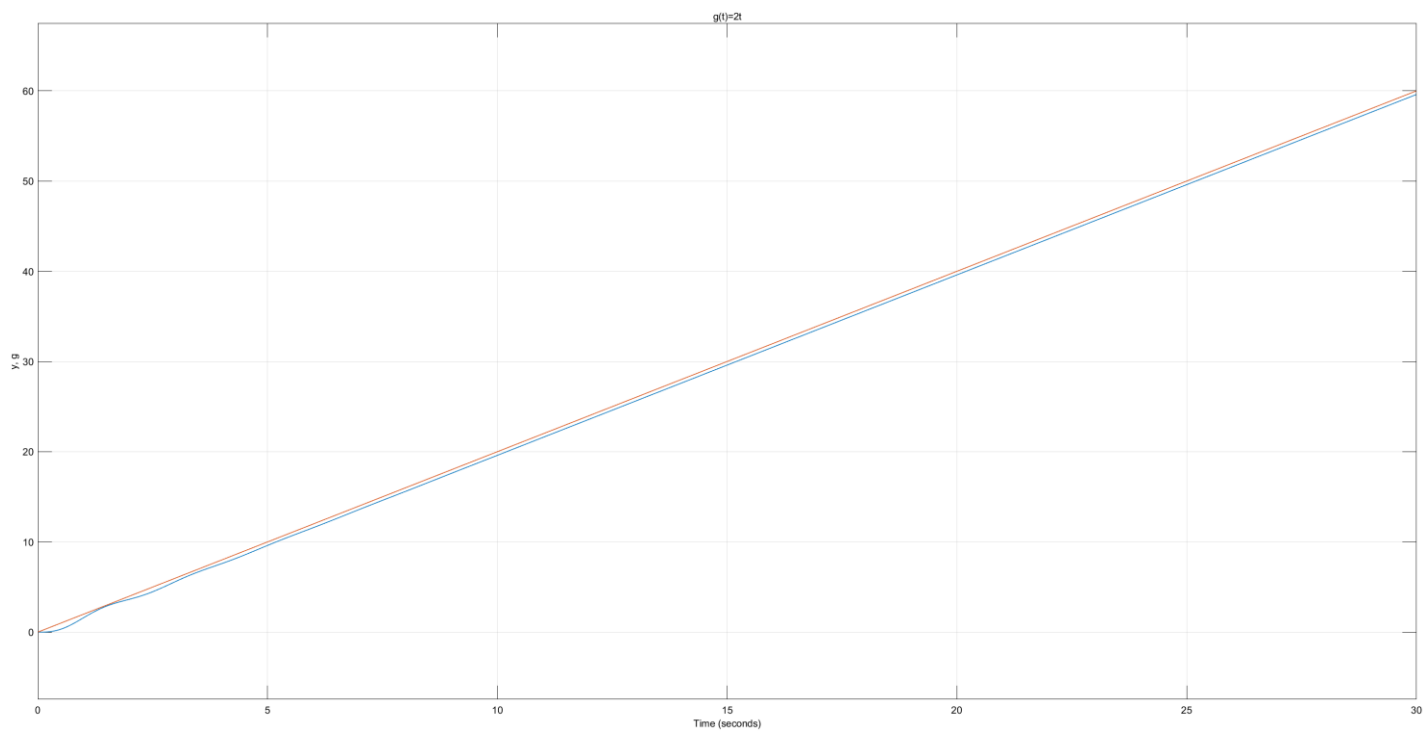


Рисунок 13: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t)=2t$  и  $k=5$

$k = 10$ :

$$\varepsilon = \frac{2}{10} = 0.2$$

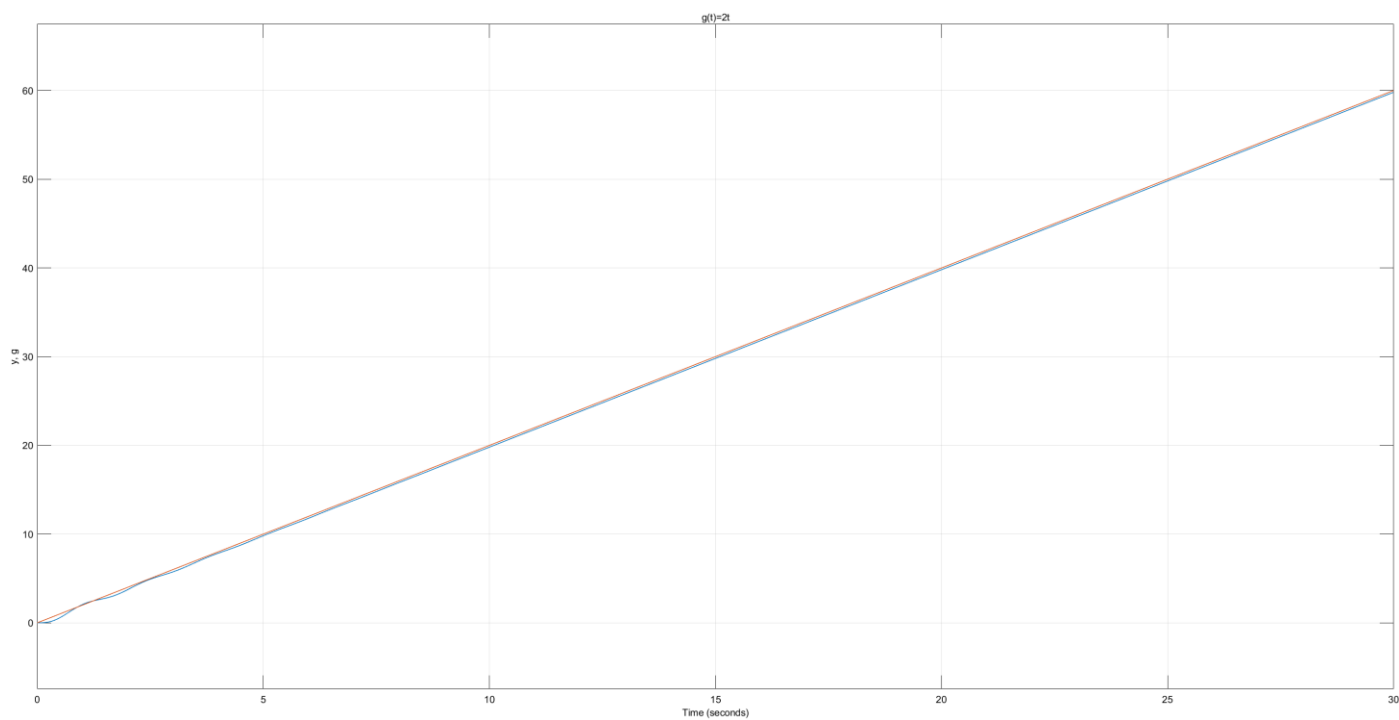


Рисунок 14: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t)=2t$  и  $k=10$

2.3.

$k = 1$ :

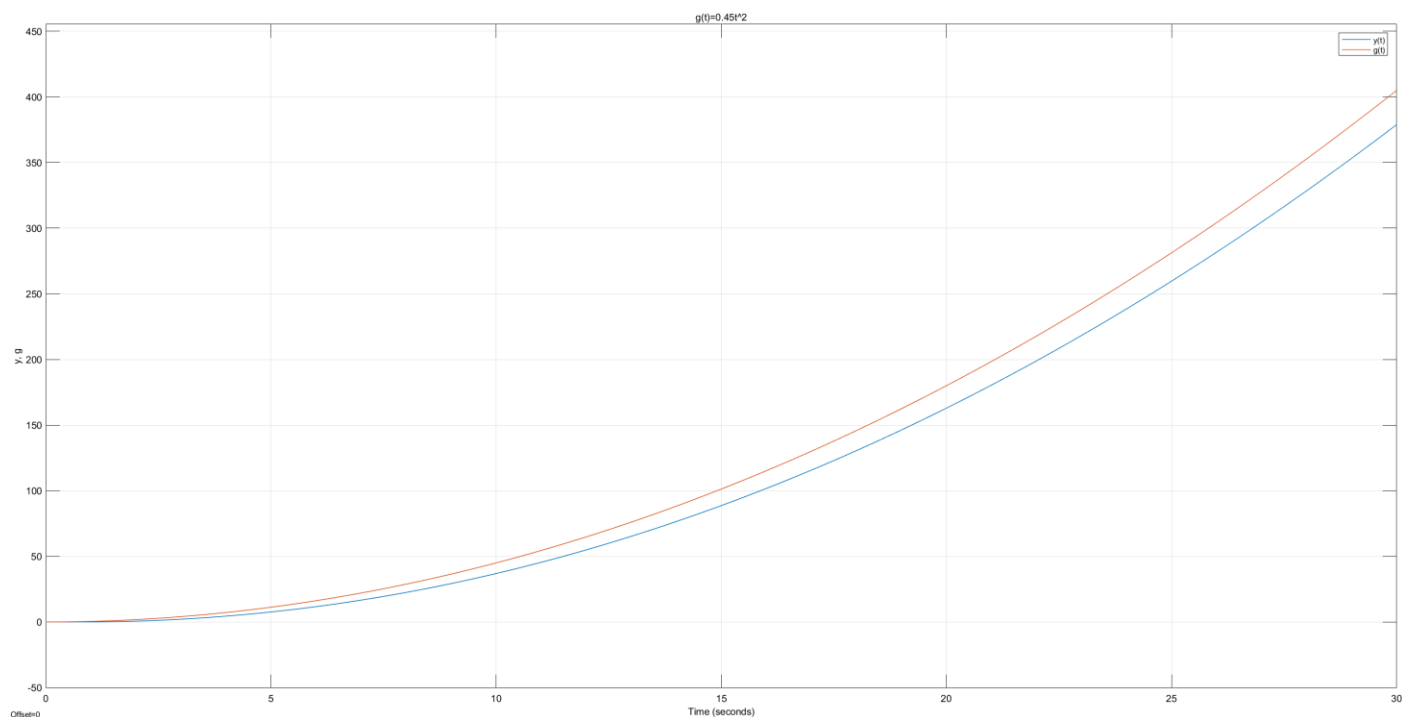


Рисунок 15: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t) = 0.45t^2$  и  $k=1$

$k = 5$ :

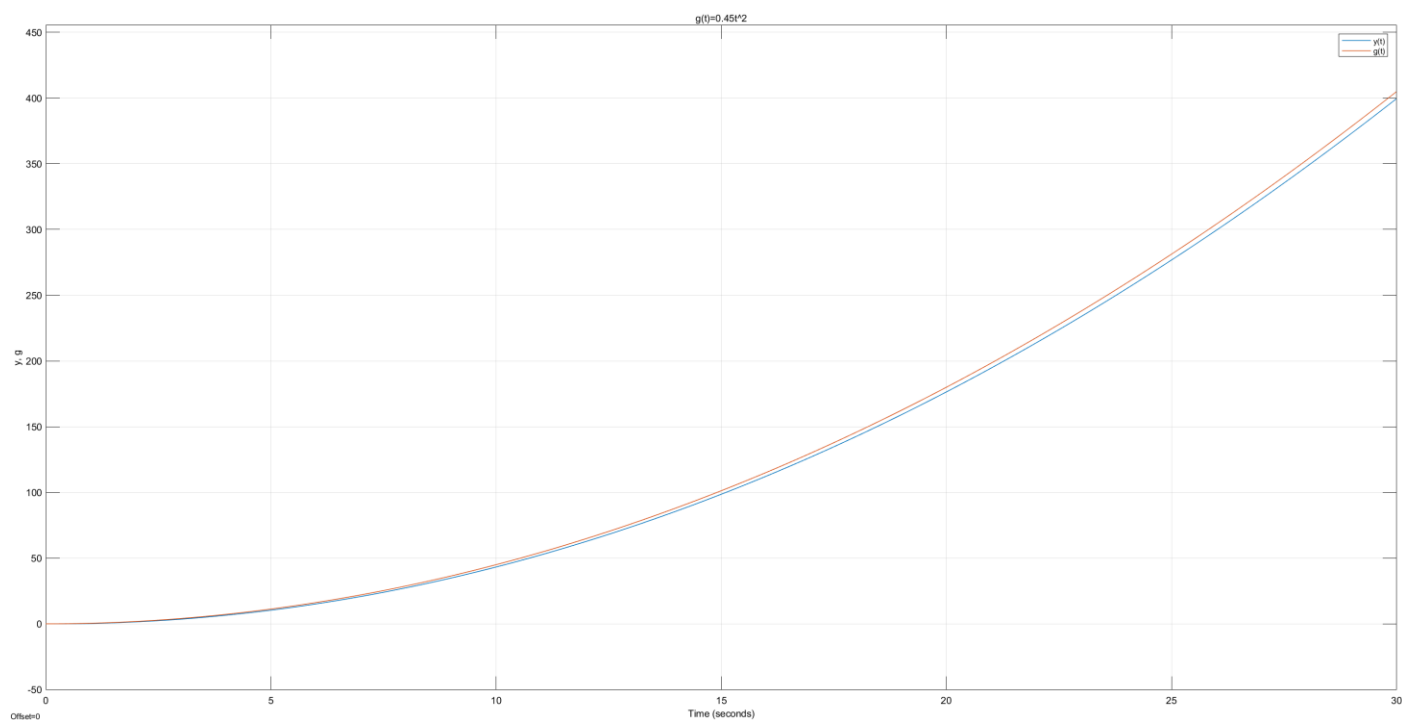


Рисунок 16: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t) = 0.45t^2$  и  $k=5$

$k = 10$ :

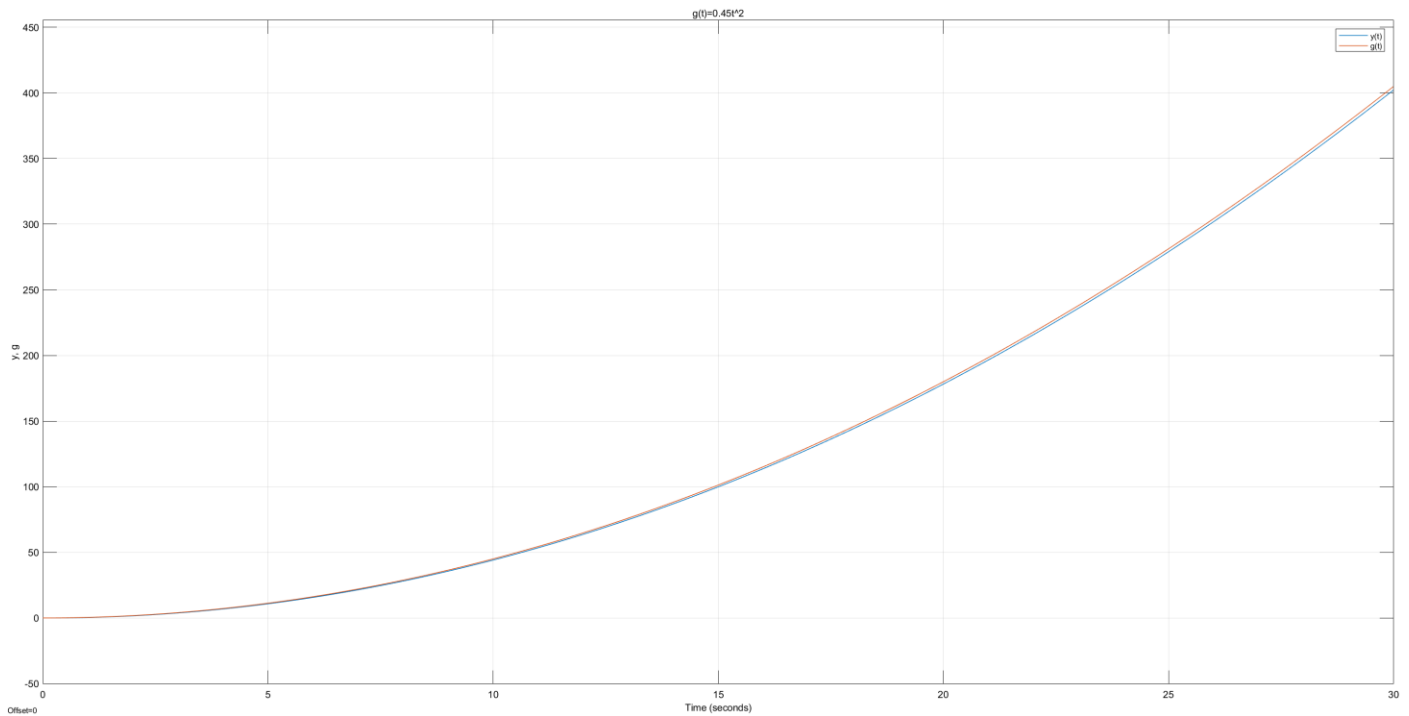


Рисунок 17: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t) = 0.45t^2$  и  $k=10$

### 3. Исследование влияния внешних возмущений

#### 3.1.

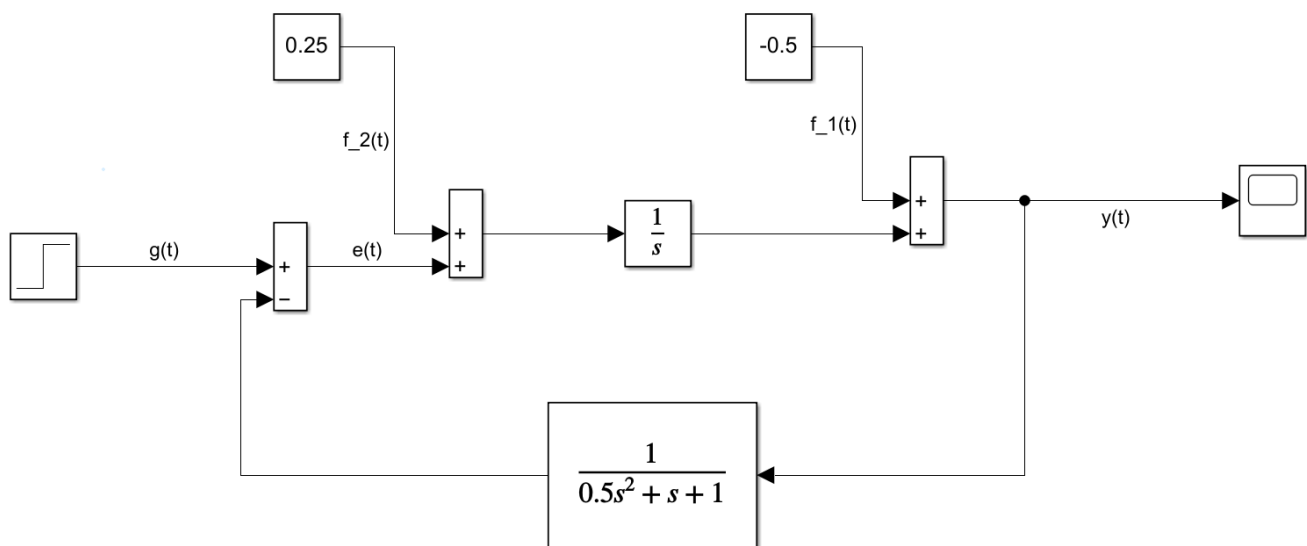


Рисунок 18: схема моделирования возмущенной системы

Расчет установившейся ошибки

$$E(s) = G(s) - W(s)Y(s) \Leftrightarrow E(s) = G(s) - W(s) \left( F_1(s) + \frac{1}{s} (E(s) + F_2(s)) \right)$$

$$E(s) = G(s) - W(s)F_1(s) - W(s)\frac{1}{s}E(s) - W\frac{1}{s}F_2(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + W(s)\frac{1}{s}} G(s) - \frac{W(s)}{1 + W(s)\frac{1}{s}} F_1(s) - \frac{W(s)\frac{1}{s}}{1 + W(s)\frac{1}{s}} F_2(s)$$

Если у  $sE(s)$  полюса будут со строго отрицательной вещественной частью, то

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + W(s) \frac{1}{s}} G(s) - \frac{W(s)}{1 + W(s) \frac{1}{s}} F_1(s) - \frac{W(s) \frac{1}{s}}{1 + W(s) \frac{1}{s}} F_2(s) \right)$$

3.2.

$$G(s) = \frac{1}{s}, F_1(s) = -\frac{0.5}{s}, F_2(s) = 0, W(s) = \frac{1}{0.5s^2 + s + 1}$$

Все полюса  $\lambda_{1,2,3}$  имеют  $Re(\lambda_{1,2,3}) < 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{0.5s^2 + s + 1}{0.5s^3 + s^2 + s + 1} + \frac{0.5}{0.5s^3 + s^2 + s + 1} \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0.5s^3 + s^2 + 1.5s}{0.5s^3 + s^2 + s + 1} = 0 \end{aligned}$$

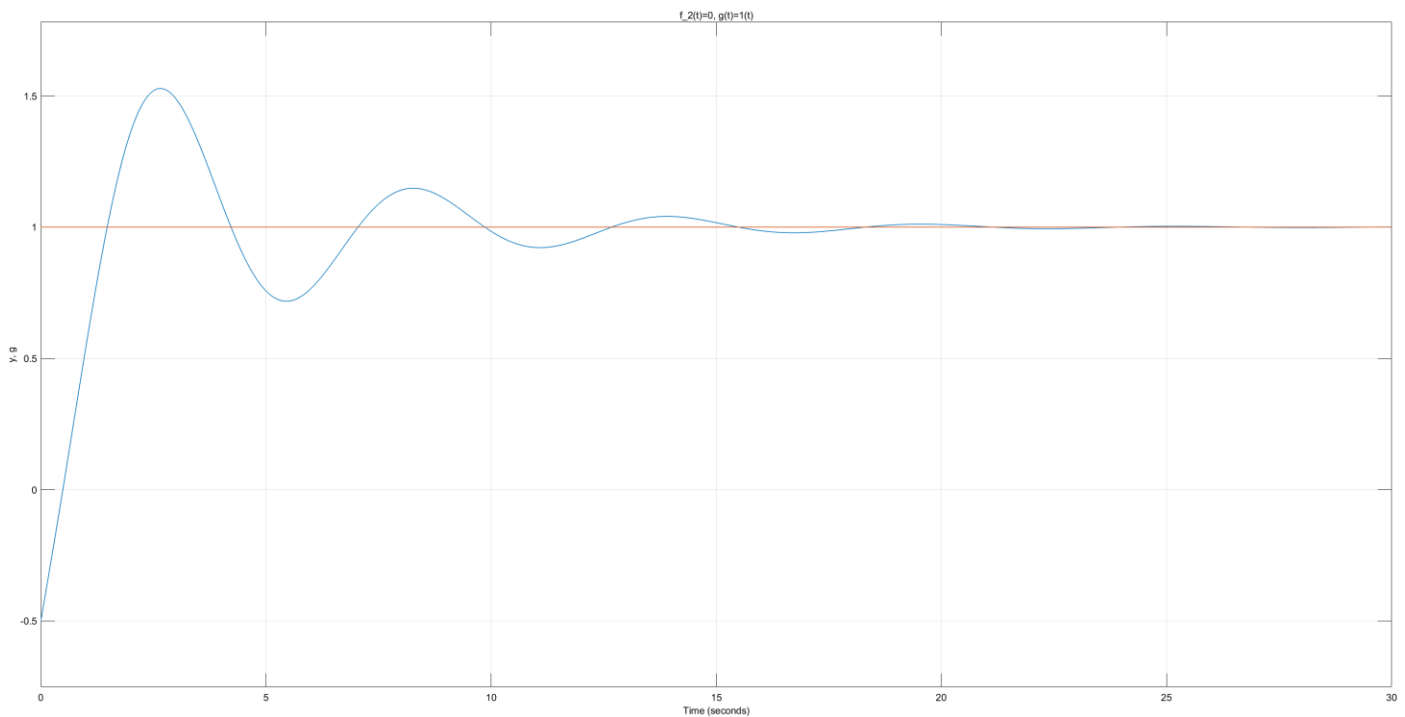


Рисунок 19: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t) = 1(t), f_1(t) = -0.5, f_2(t) = 0$

3.3.

$$G(s) = \frac{1}{s}, F_1(s) = 0, F_2(s) = \frac{0.25}{s}, W(s) = \frac{1}{0.5s^2 + s + 1}$$

Все полюса  $\lambda_{1,2,3}$  имеют  $Re(\lambda_{1,2,3}) < 0$

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{0.5s^2 + s + 1}{0.5s^3 + s^2 + s + 1} - \frac{1}{s} \frac{0.25}{0.5s^3 + s^2 + s + 1} \right) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0.5s^3 + s^2 + s - 0.25}{0.5s^3 + s^2 + s + 1} = -0.25$$

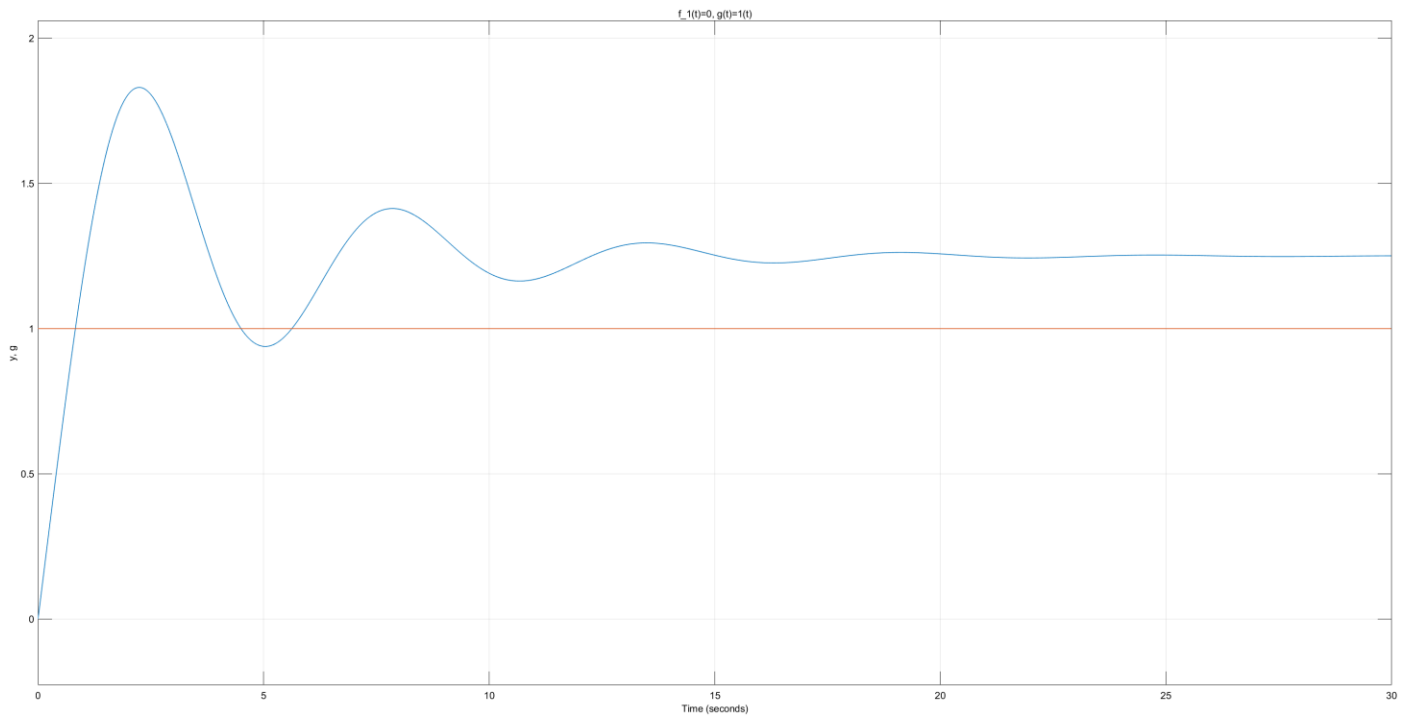


Рисунок 20: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t) = 1(t)$ ,  $f_1(t) = 0$ ,  $f_2(t) = 0.25$

#### 4. Исследование установившейся ошибки при произвольном входном воздействии

##### 4.1.

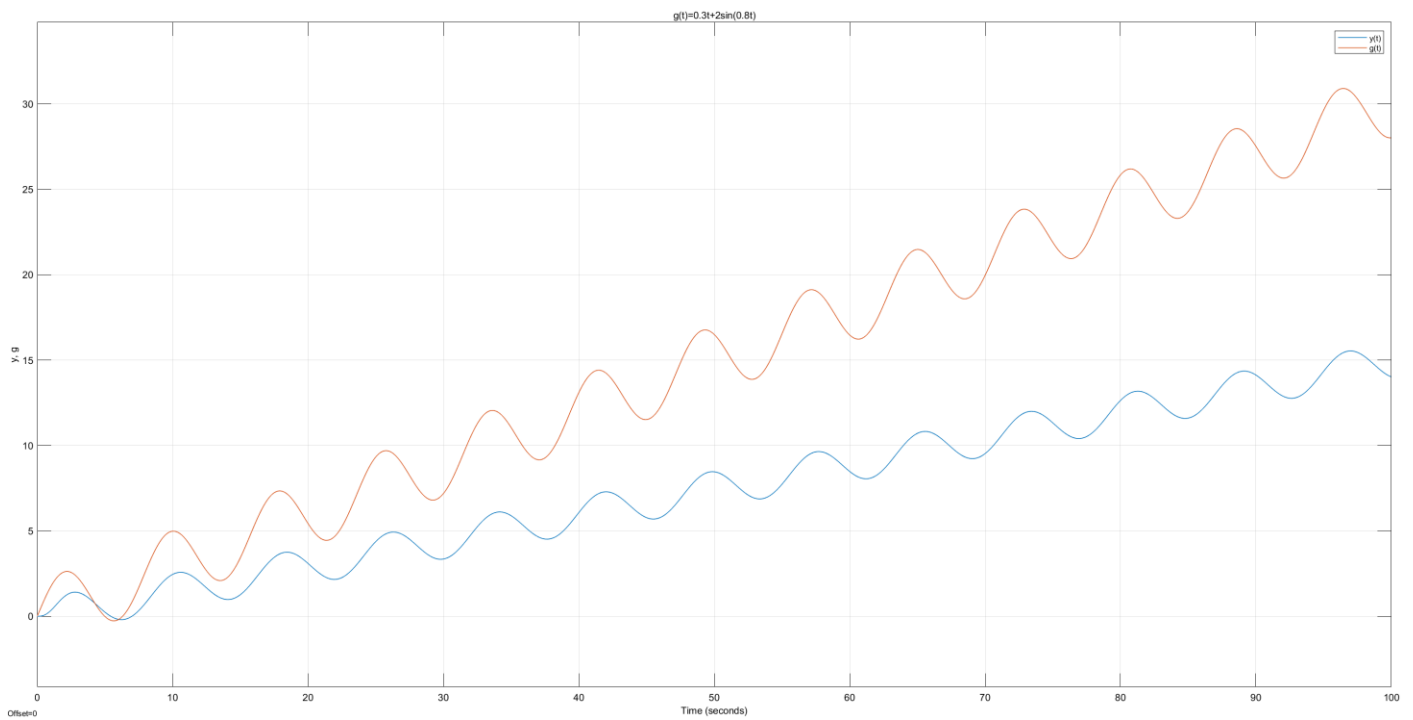


Рисунок 21: график переходного процесса  $y(t)$  при  $g(t) = 0.3t + 2\sin(0.8t)$

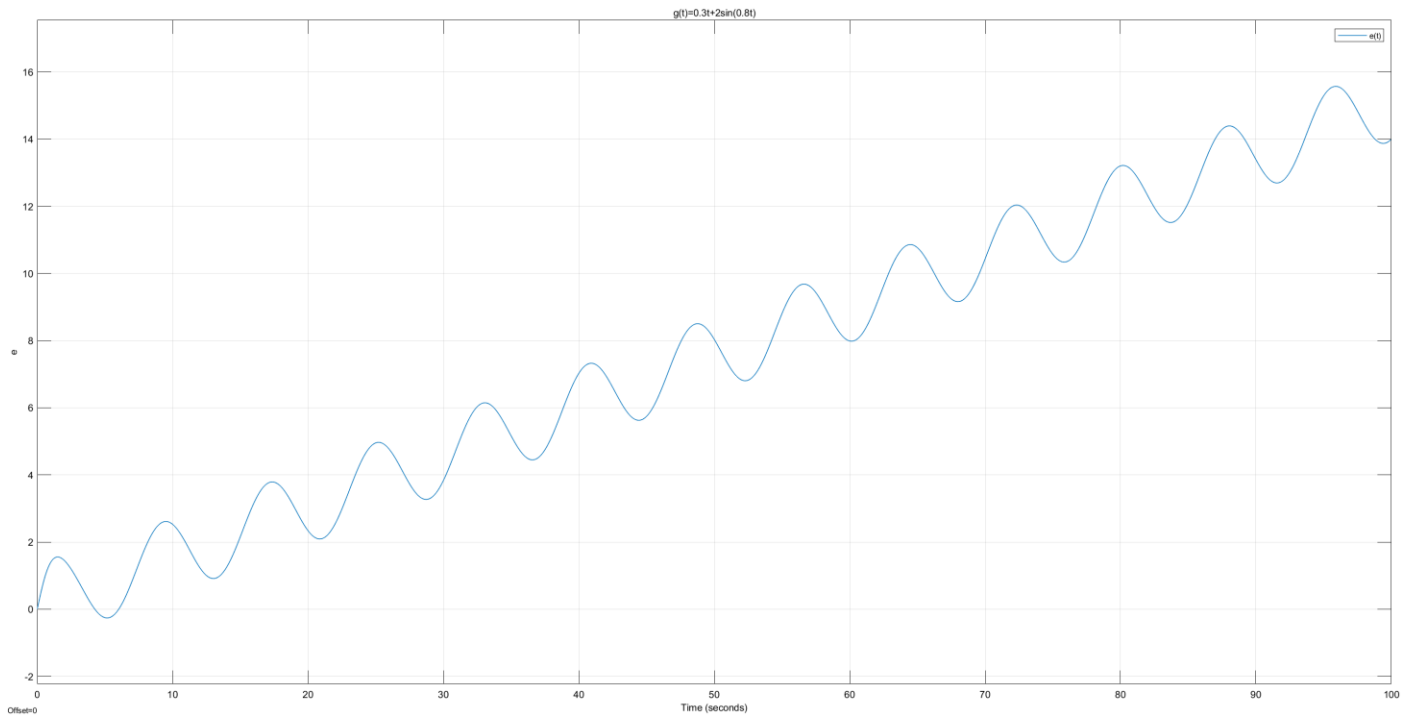


Рисунок 22: график ошибки слежения системы построенный по смоделированной системе

Судя по графику, ошибка слежения будет  $\rightarrow \infty$ . Также это можно установить исходя из вида передаточной функции разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{1}{0.5s^2 + s + 1} = \frac{1}{s^0(0.5s^2 + s + 1)} \Rightarrow 0 - \text{порядок астатизма системы}$$

Для систем с нулевым порядком астатизма характерно:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \text{const} \quad \text{при постоянном входном воздействии}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \infty \quad \text{при линейном входном воздействии}$$

А так как входное воздействие содержит линейно растущую функцию  $g(t) = 0.3t + 2\sin(0.8t)$ , то и ошибка слежения будет стремиться к бесконечности.

4.2.

$$G(s) = L\{0.3t + 2 \sin(0.8t)\} = \frac{0.3}{s^2} + \frac{1.6}{s^2 + 0.64}$$

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{0.5s^2 + s + 1}{0.5s^2 + s + 2}$$

Разложим в ряд Тейлора в окрестности точки  $s = 0$

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}s - \frac{1}{16}s^3 + o(s^4)$$

$$E(s) = W_{g \rightarrow e}(s)G(s) = \frac{1}{2}G(s) + \frac{1}{4}sG(s) - \frac{1}{16}s^3G(s)$$



$$e_y(t) = L^{-1}\{E(s)\} = \frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{4}\dot{g}(t) - \frac{1}{16}\ddot{g}(t)$$

$$e_y(t) = 0.15t + \sin(0.8t) + 0.464\cos(0.8t) + 0.075$$

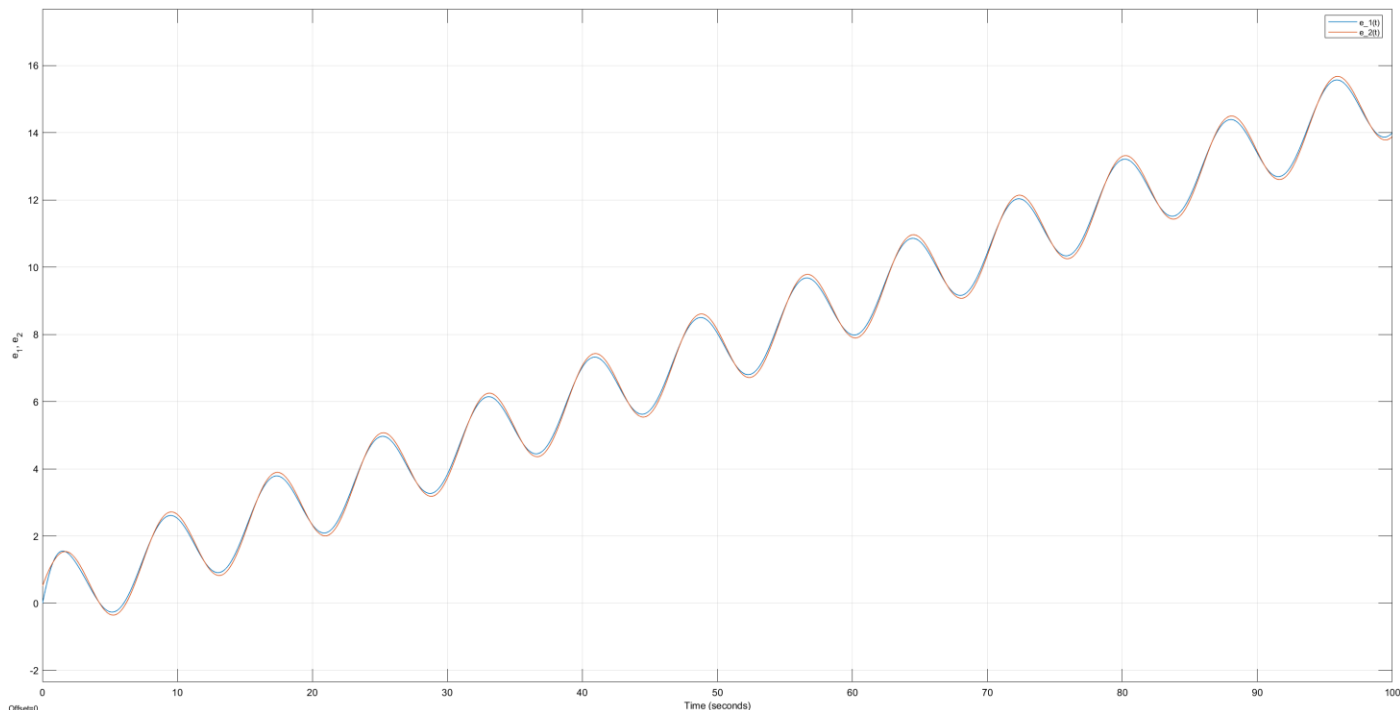


Рисунок 23: графики ошибки слежения  $e_1(t)$  – построенный по результатам моделирования системы (желтый) и  $e_2(t)$  – построенный аналитически (синий)

График  $e_2(t)$  является аппроксимацией графика  $e_1(t)$  и при увеличении числа слагаемых ряда Тейлора данная аппроксимация будет точнее.

## Выводы

В данной лабораторной работе были исследованы динамические системы с нулевым и первым порядками астатизма, были получены переходные процессы и исследованы значения установившейся ошибки при различных входных воздействиях. Также были исследованы переходные процессы и исследованы значения установившейся ошибки систем с внешними возмущениями и систем с произвольным входным воздействием.