Критерий Найквиста и системы с запаздыванием

Мотивирующий пример

Ведущий задаёт эталонную скорость

Ведомый управляет собой с помощью ускорения

$$\dot{v} = u$$

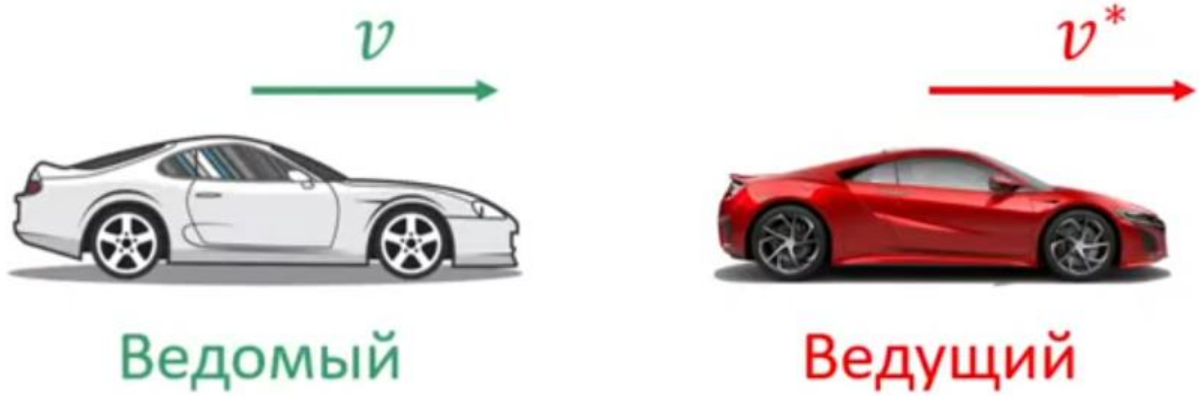
Цель ведомого: ехать с той же скоростью, что и ведущий

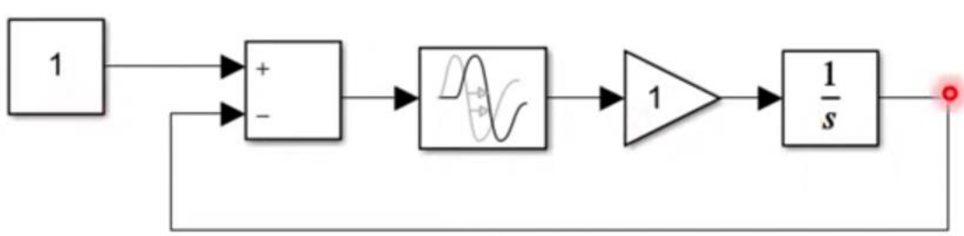
$$v \to v^*$$

Ведомый использует пропорциональный закон управления

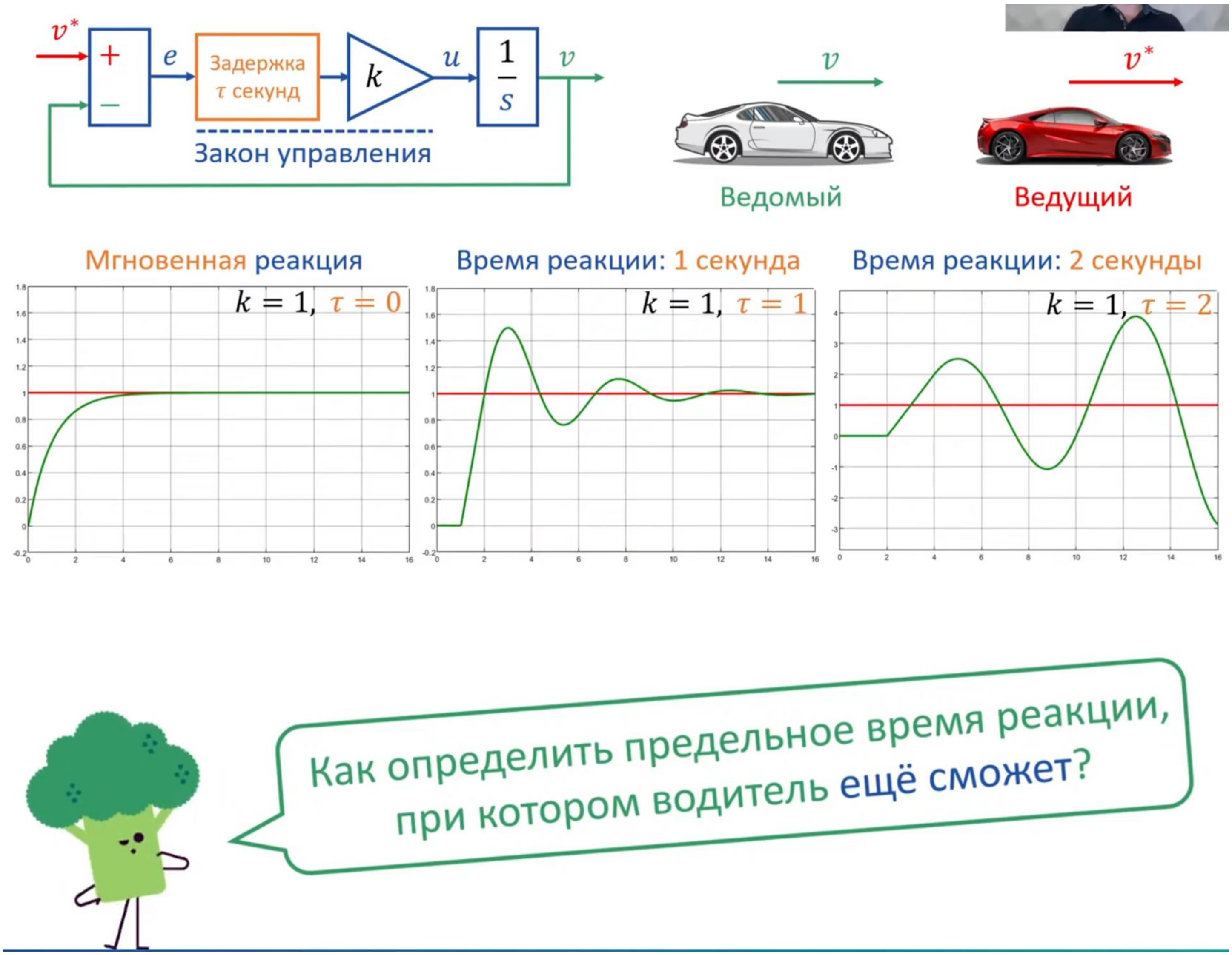
$$u = k(v^* - v)$$

Ведомый не может реагировать мгновенно, время реакции: τ





Вы легко можете замоделировать
это самостоятельно!

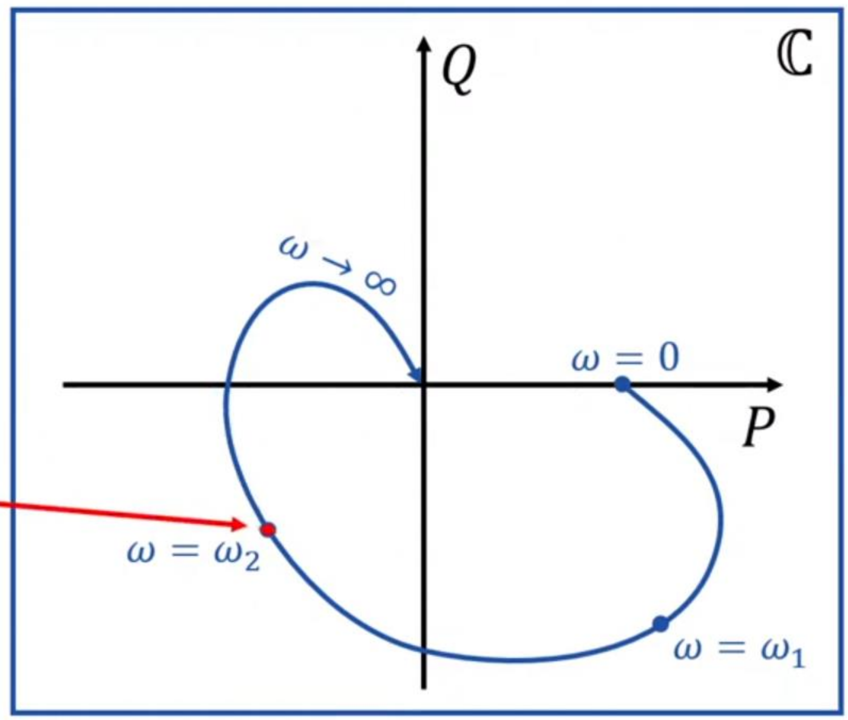


Годограф Найквиста

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Параметрический график



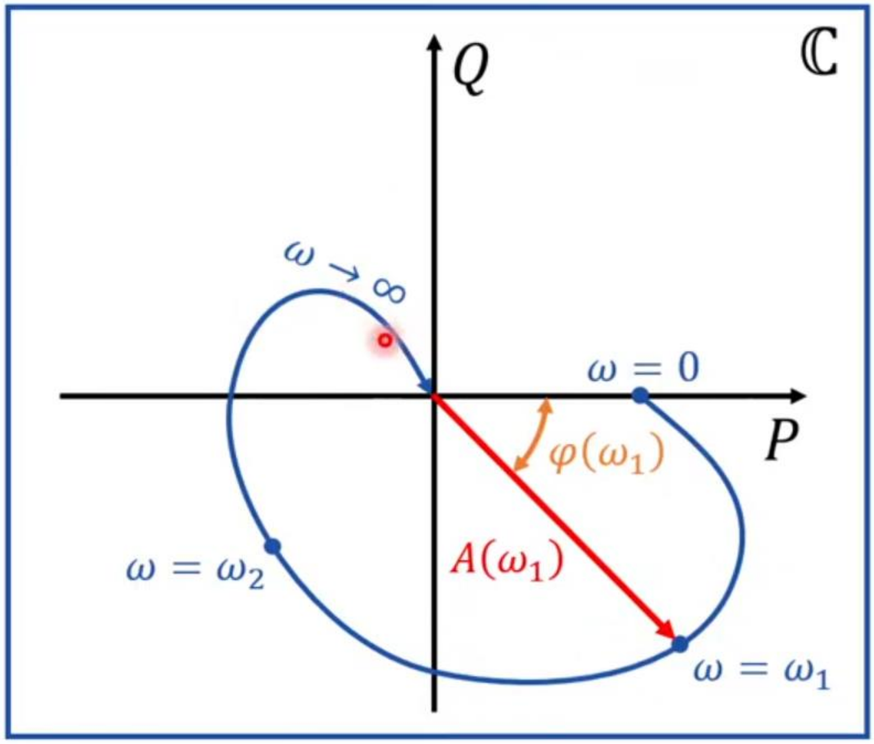
Точка с координатами

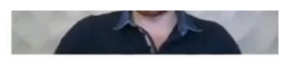
$P(\omega_2)$ и $Q(\omega_2)$

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

Параметрический график

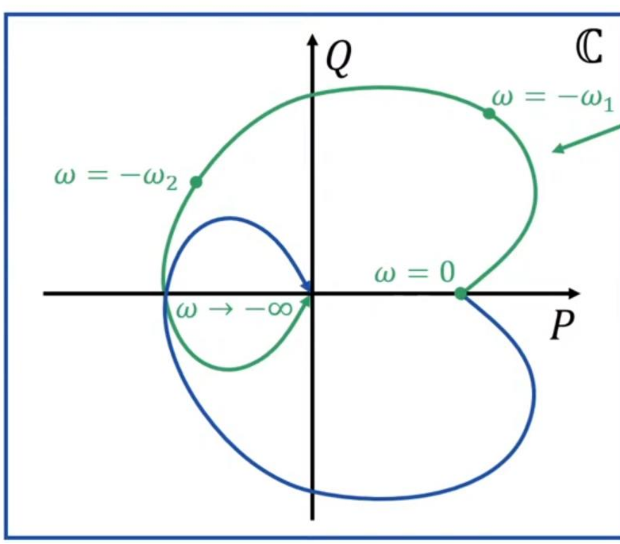




Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

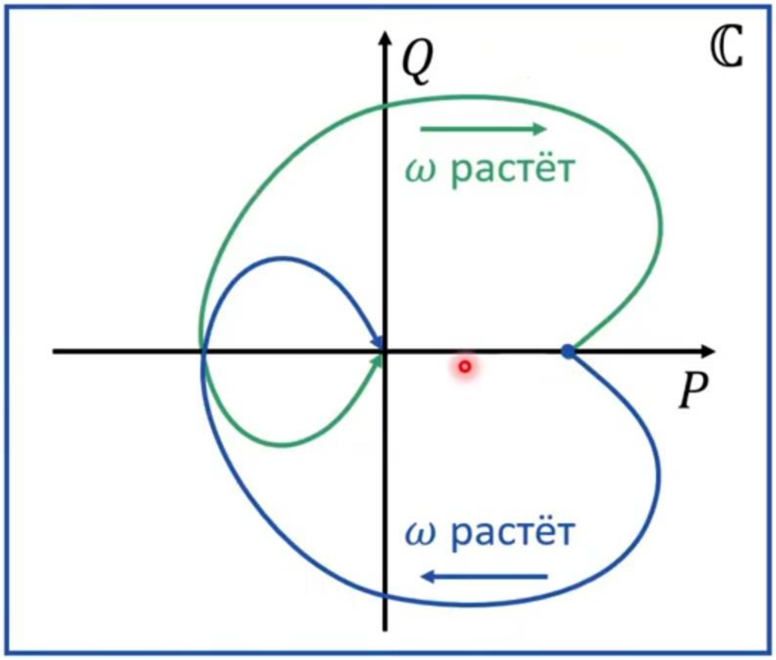
Параметрический график



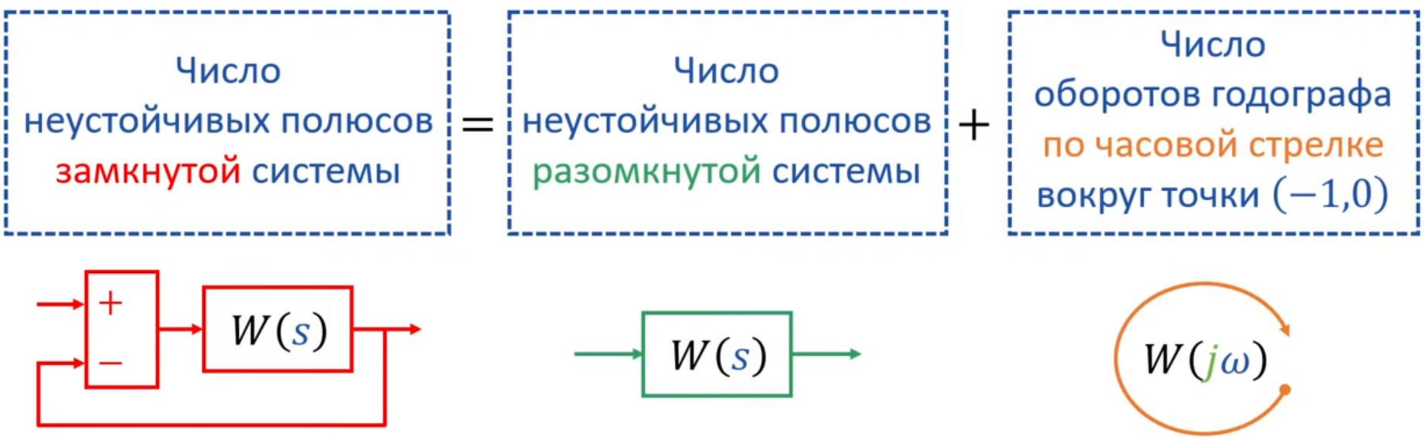
$$A(-\omega) = A(\omega)$$

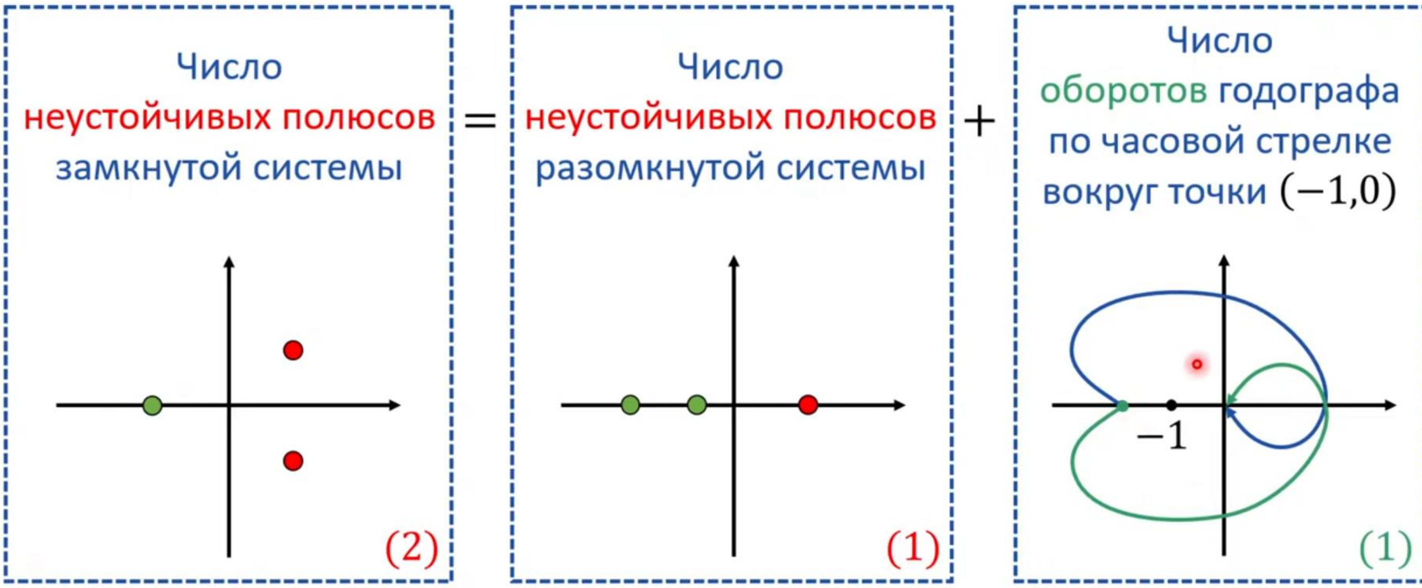
$$\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

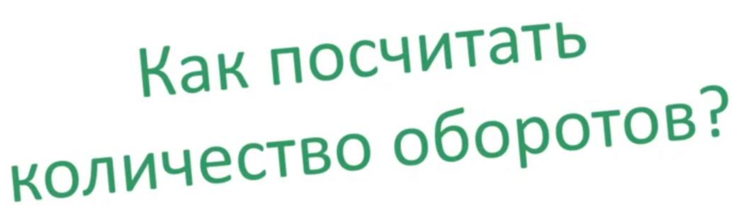
Поэтому симметрично!



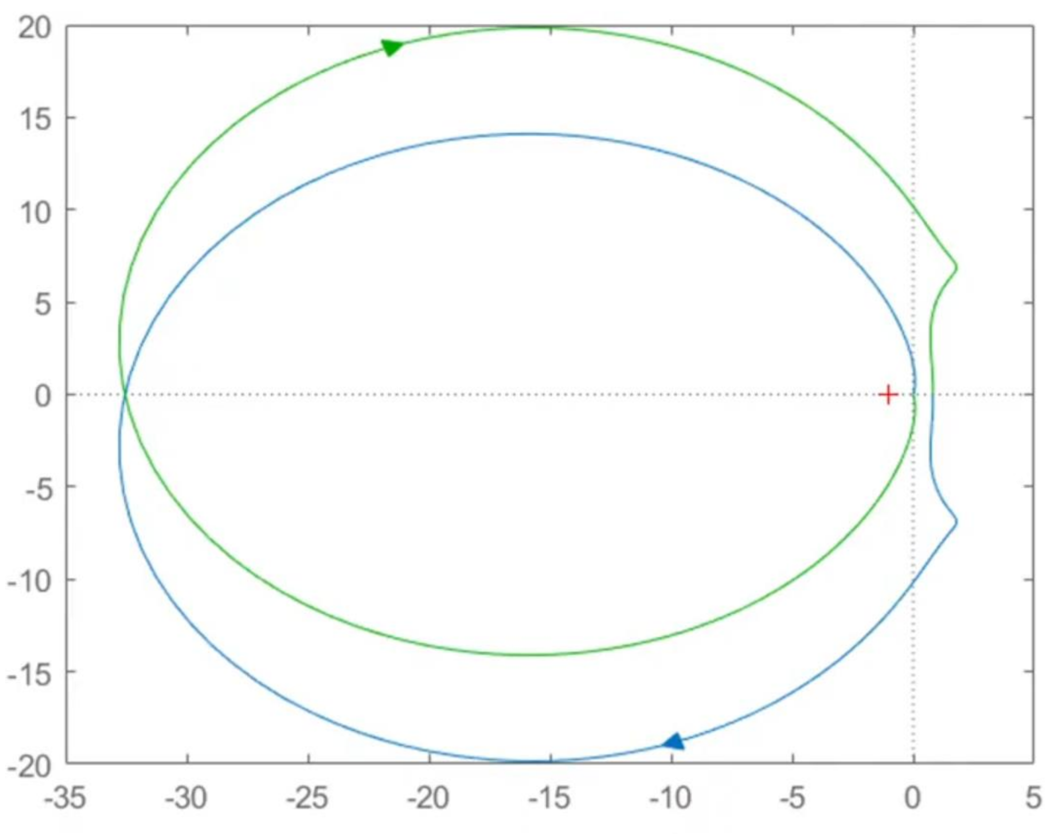
Критерий Найквиста: полная формулировка

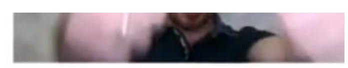




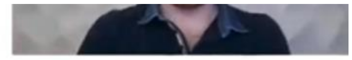


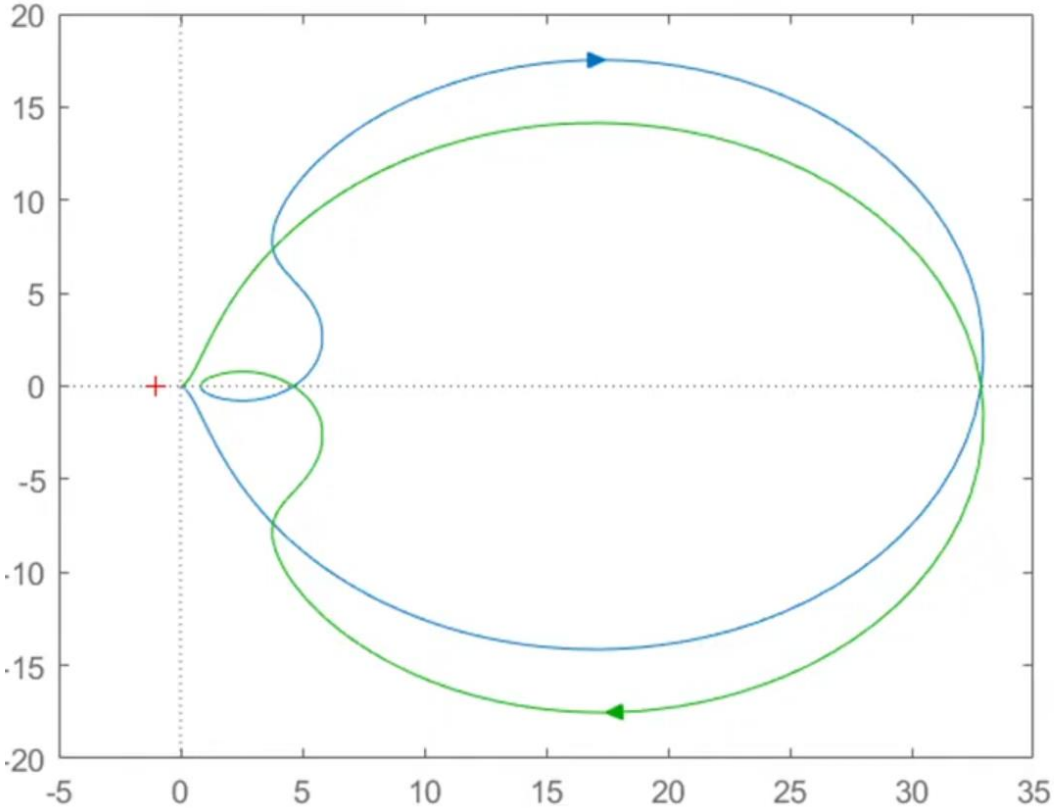
Сколько здесь оборотов по часовой стрелке?



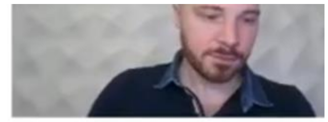


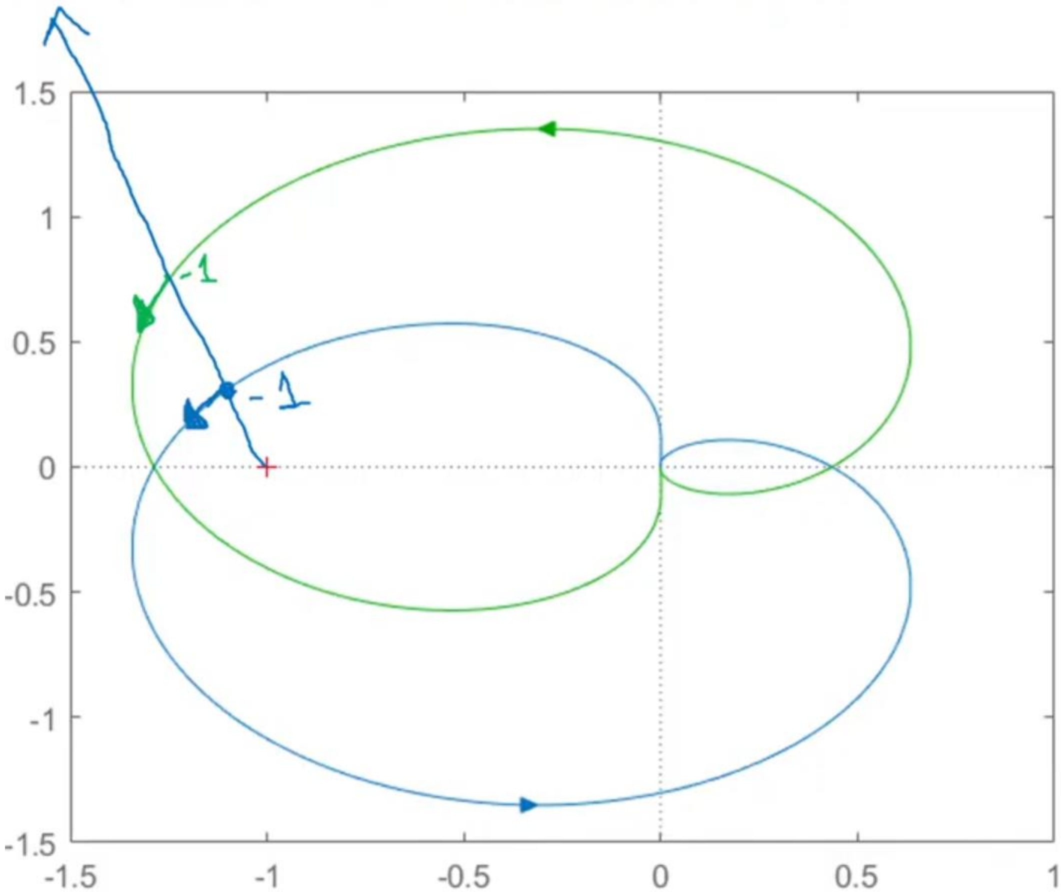
2



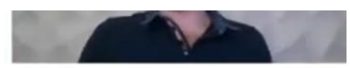


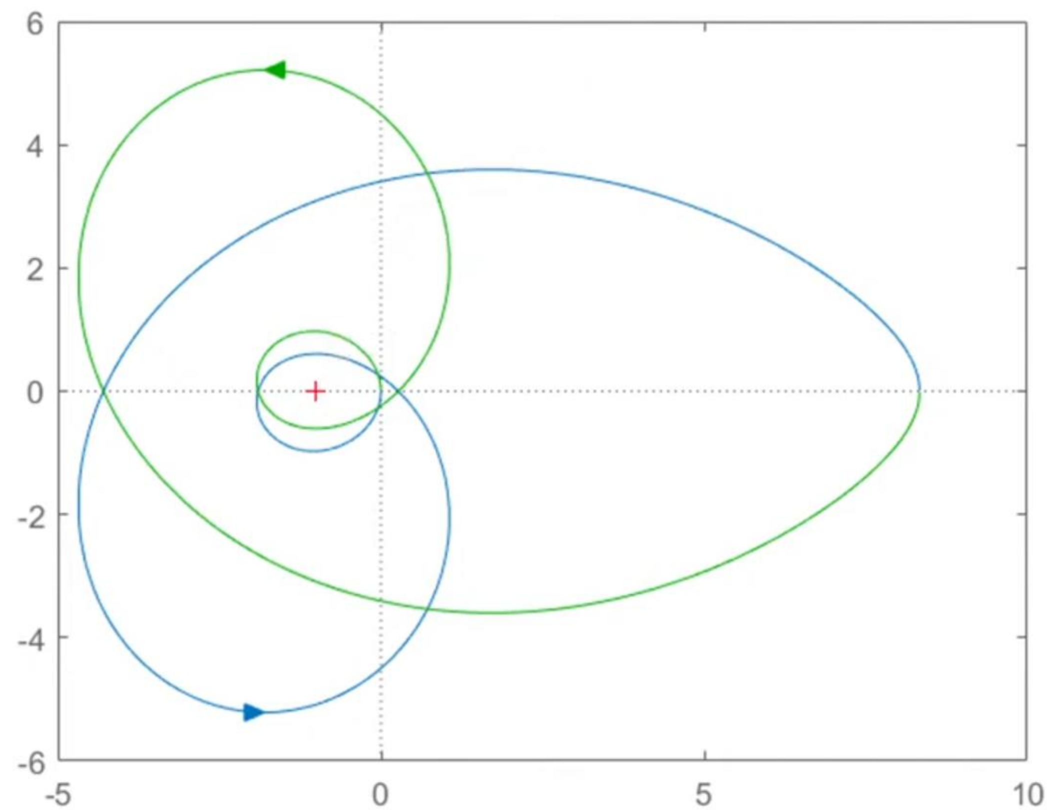
0



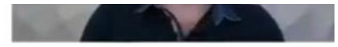


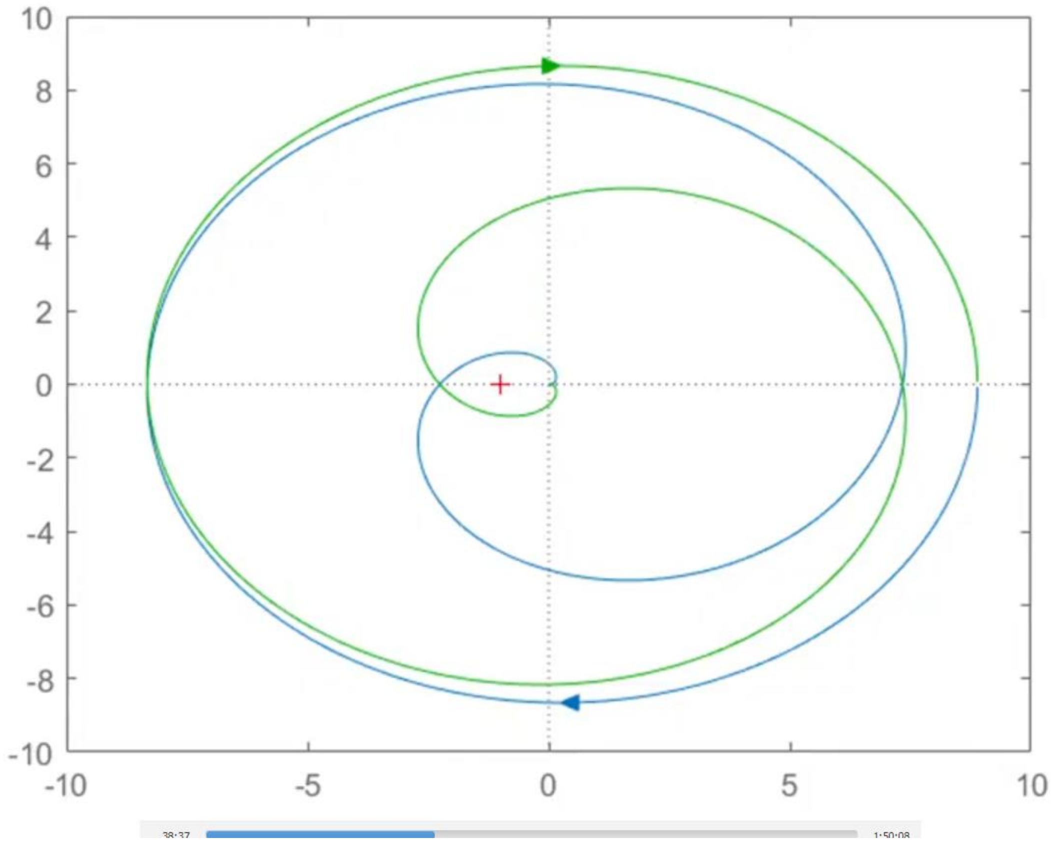
-2



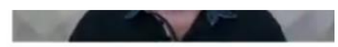


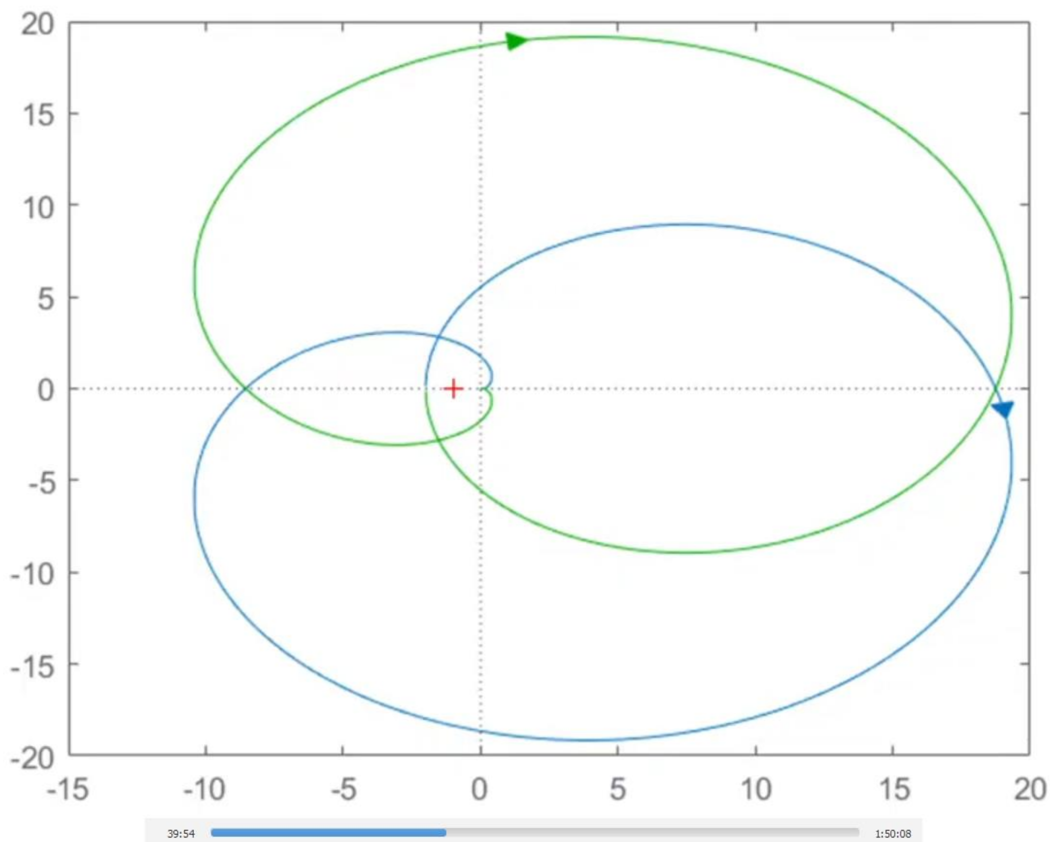
-4



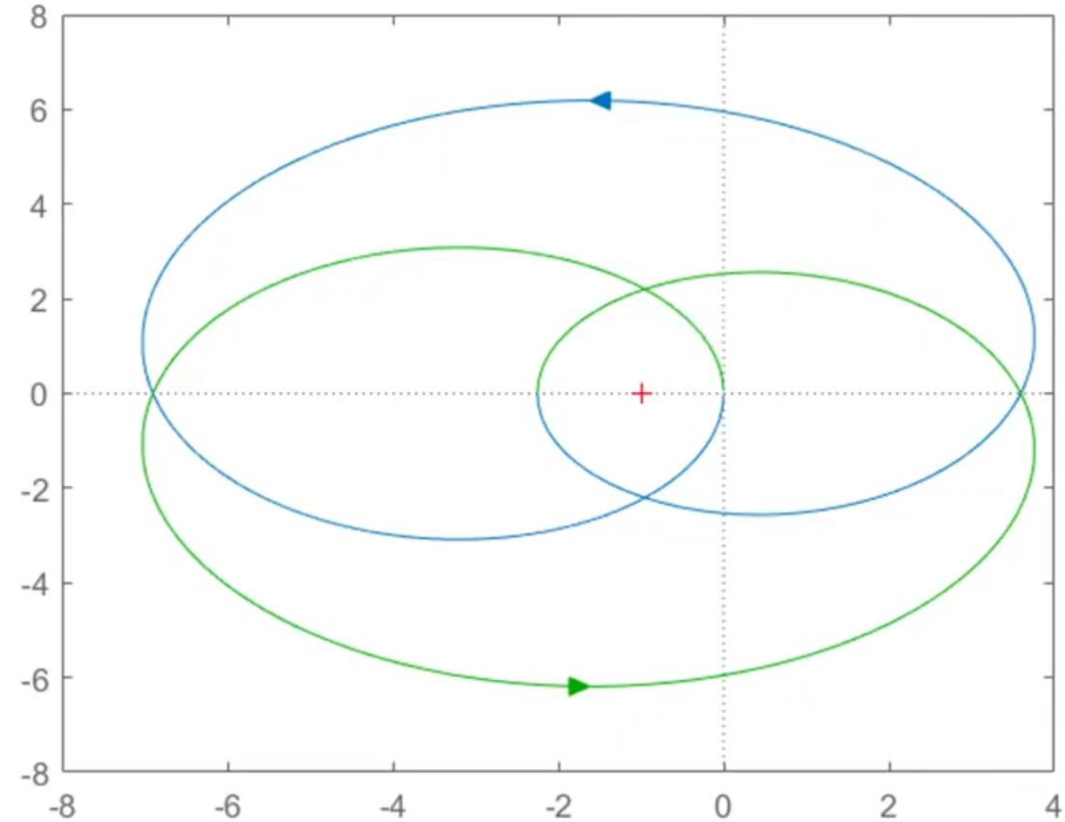


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10
-5
0
5
10
38:37
1:50:08

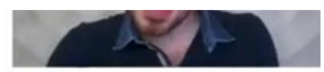
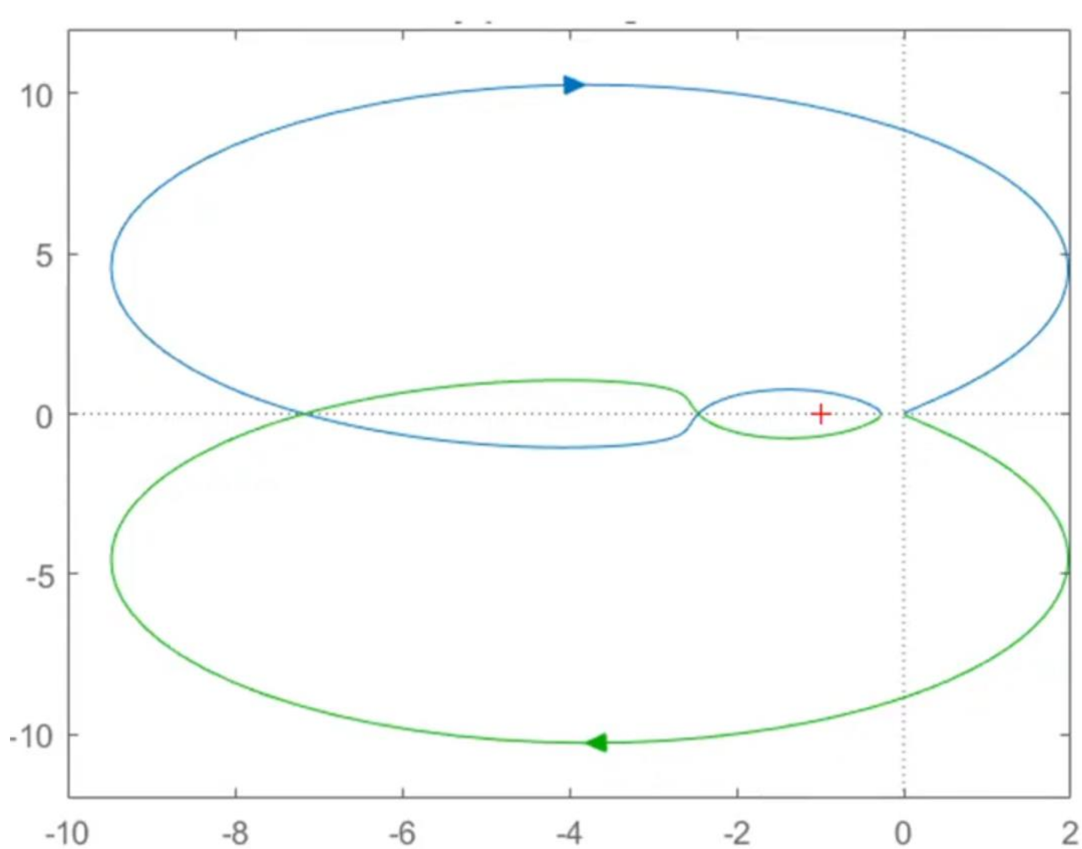




20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
39:54
1:50:08

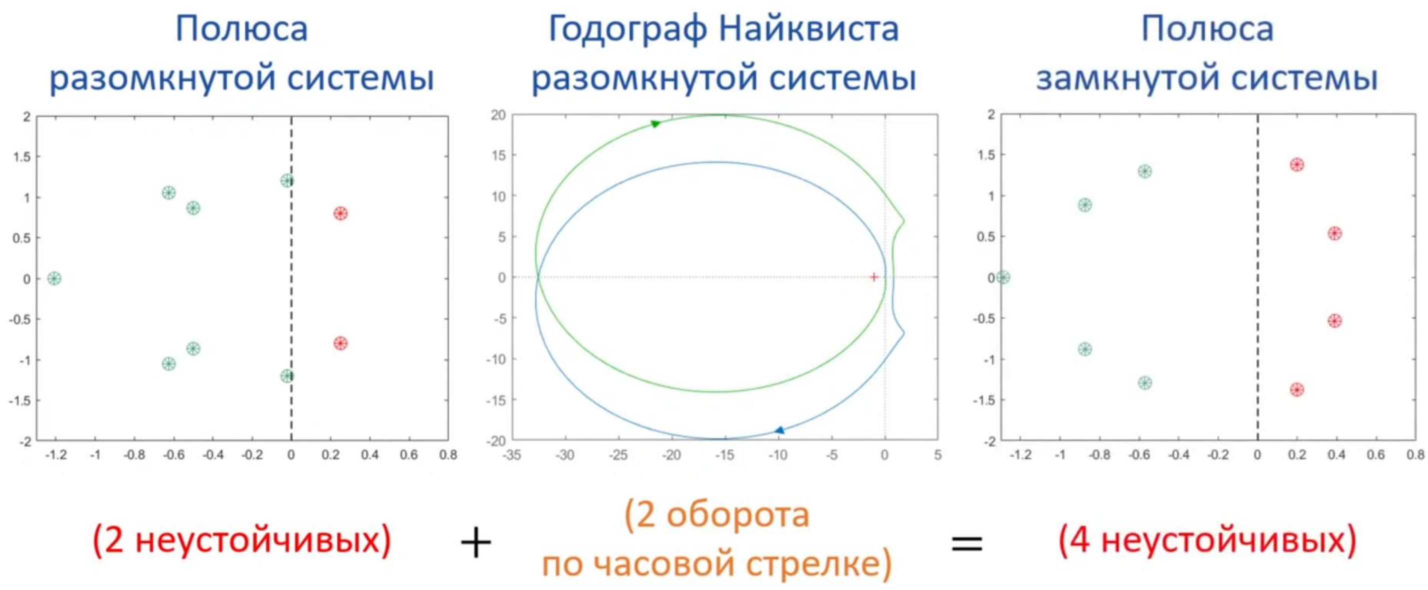



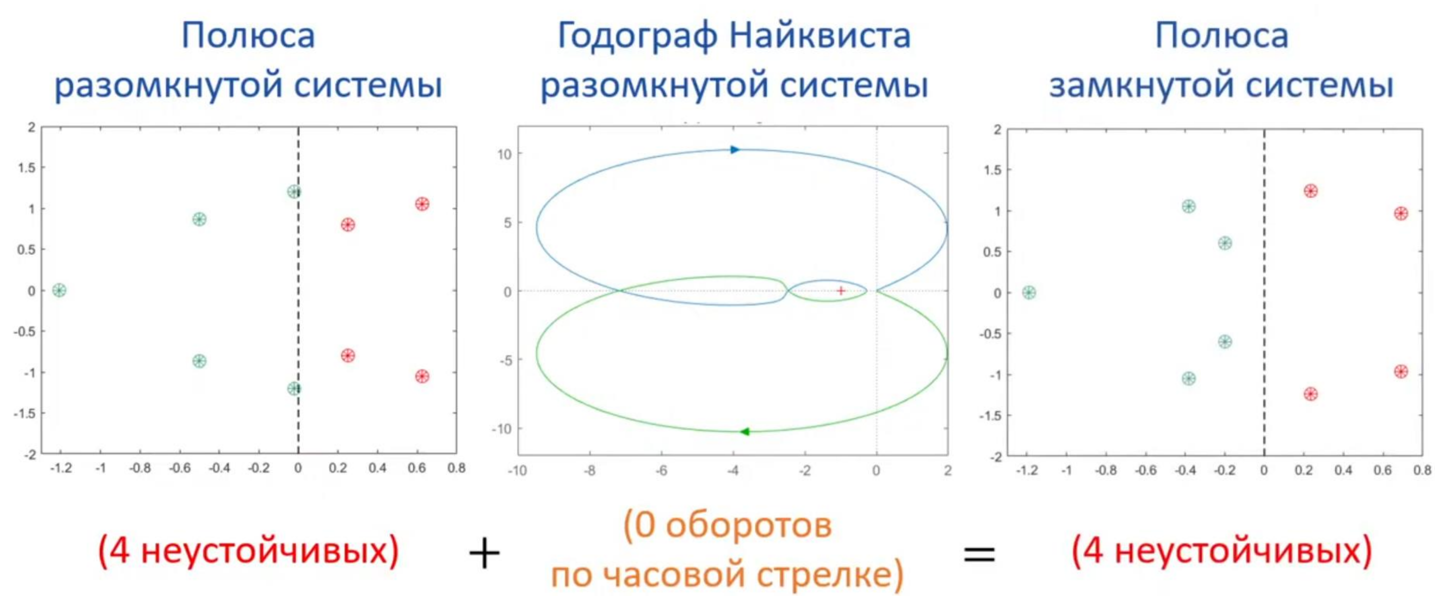
-3

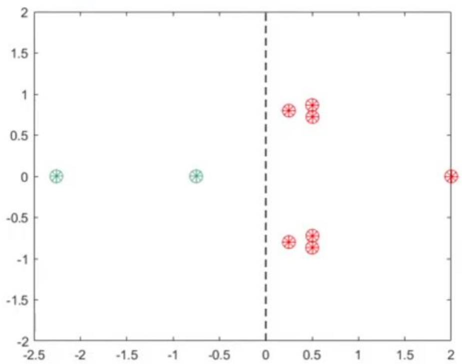
0

Критерий Найквиста: графические примеры

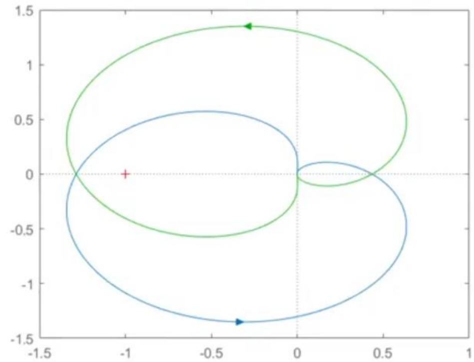




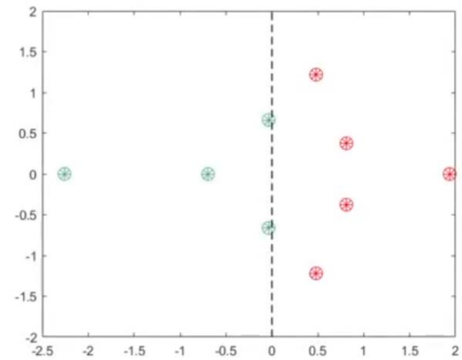
Полюса разомкнутой системы



Годограф Найквиста разомкнутой системы

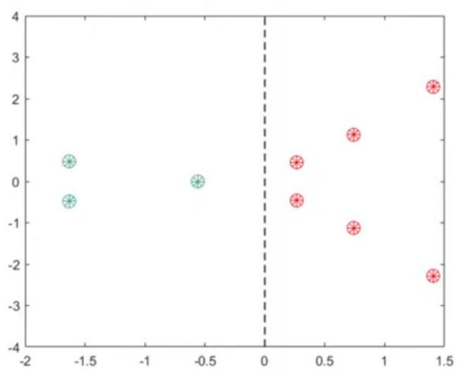


Полюса замкнутой системы

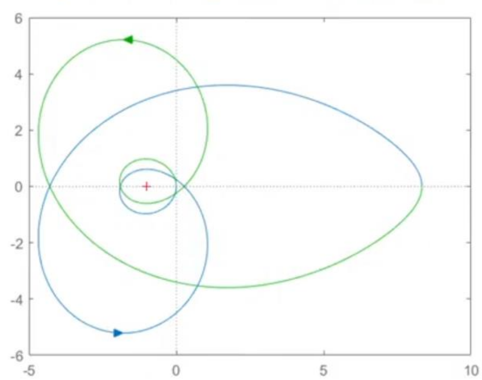


(7 неустойчивых) + (-2 оборота по часовой стрелке) = (5 неустойчивых)

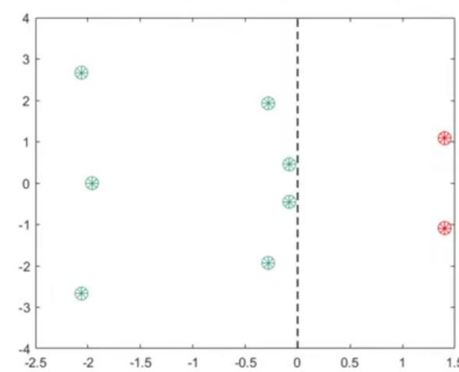
Полюса разомкнутой системы



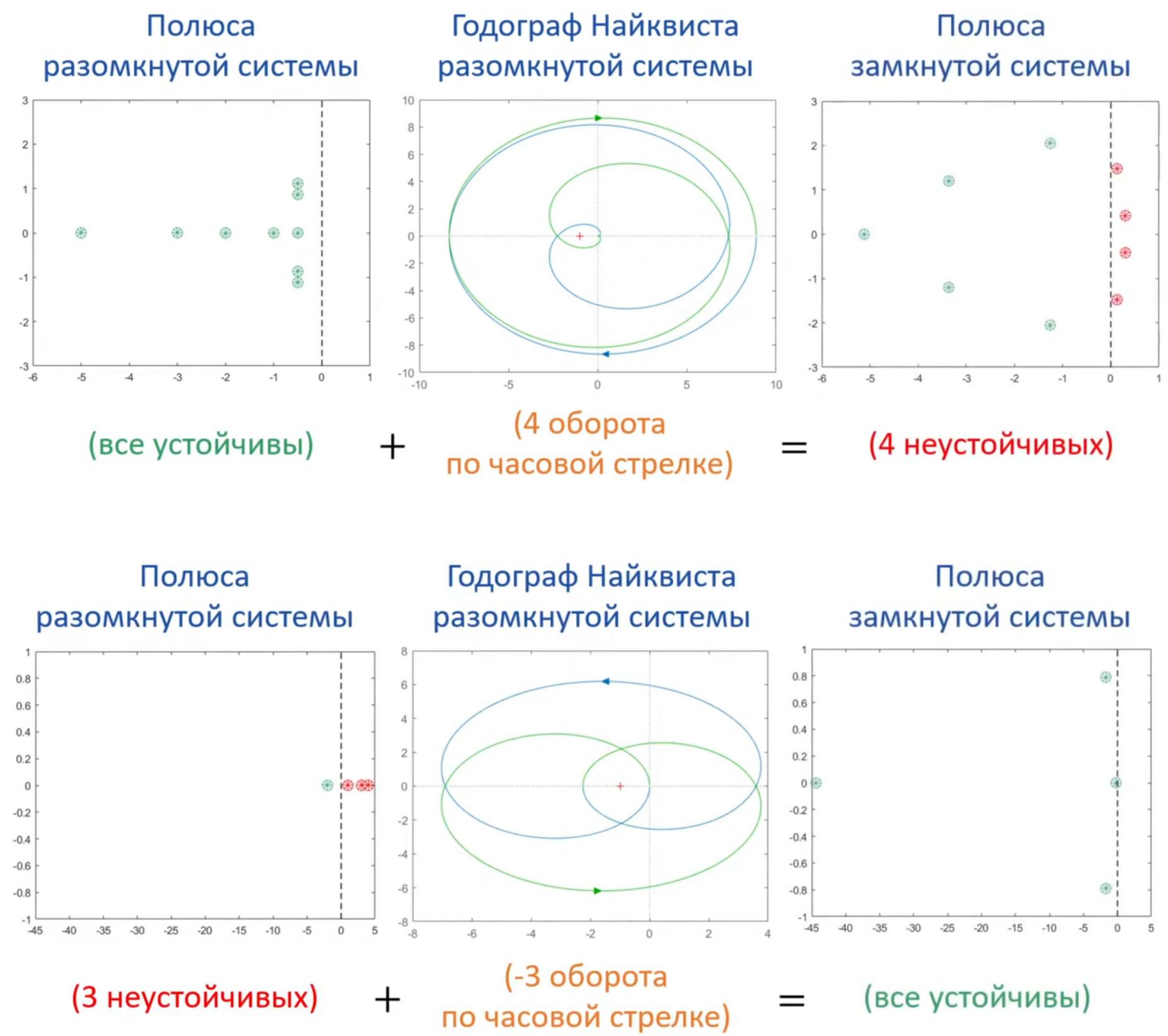
Годограф Найквиста разомкнутой системы



Полюса замкнутой системы

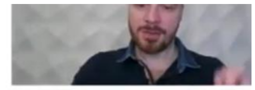


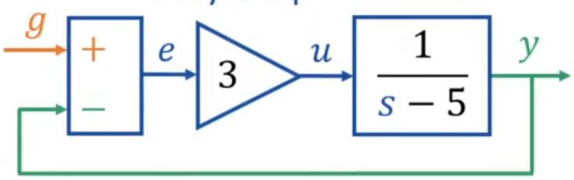
(6 неустойчивых) + (-4 оборота по часовой стрелке) = (2 неустойчивых)



Четыре простых примера

1. Разомкнутая неустойчива, замкнутая неустойчива





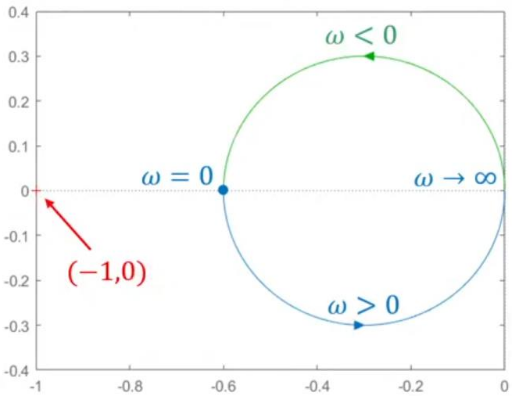
Разомкнутая

$$W(s) = \frac{3}{s-5}$$

Замкнутая

$$W_{g\to y}(s) = \frac{3}{s-2}$$

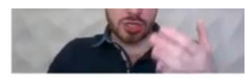
$W(j\omega)$

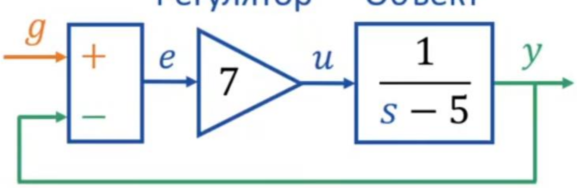


$$1 + 0 = 1$$

Годограф не охватывает критическую точку, следовательно число неустойчивых полюсов у разомкнутой и замкнутой систем одинаково

2. Разомкнутая неустойчива, замкнутая устойчива





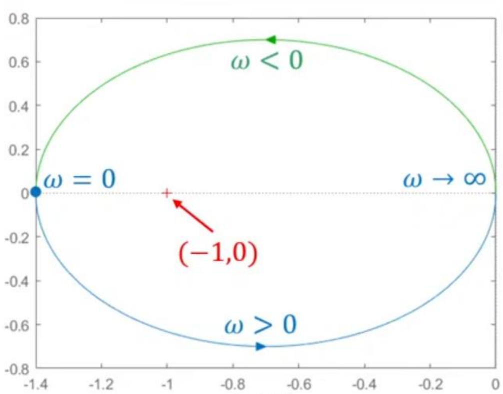
Разомкнутая

$$W(s) = \frac{7}{s-5}$$

Замкнутая

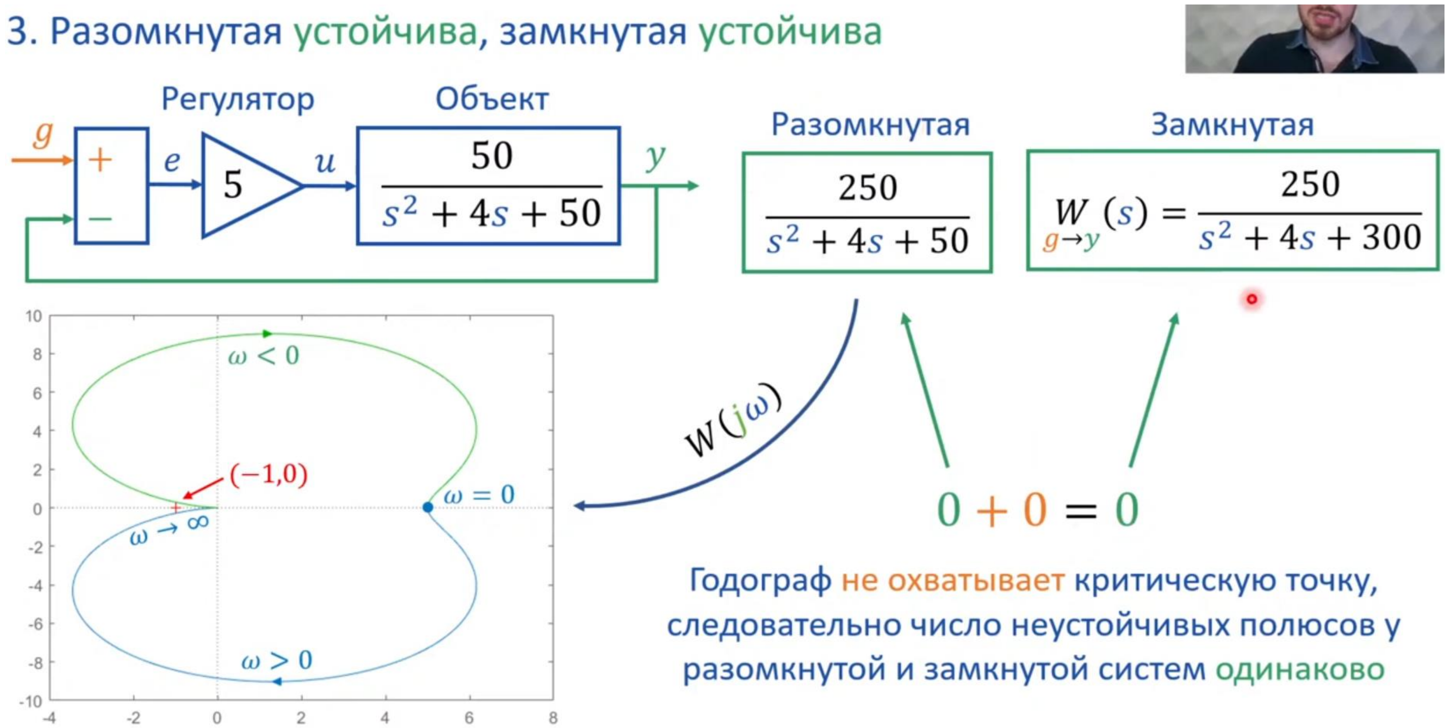
$$W_{g\to y}(s) = \frac{7}{s+2}$$

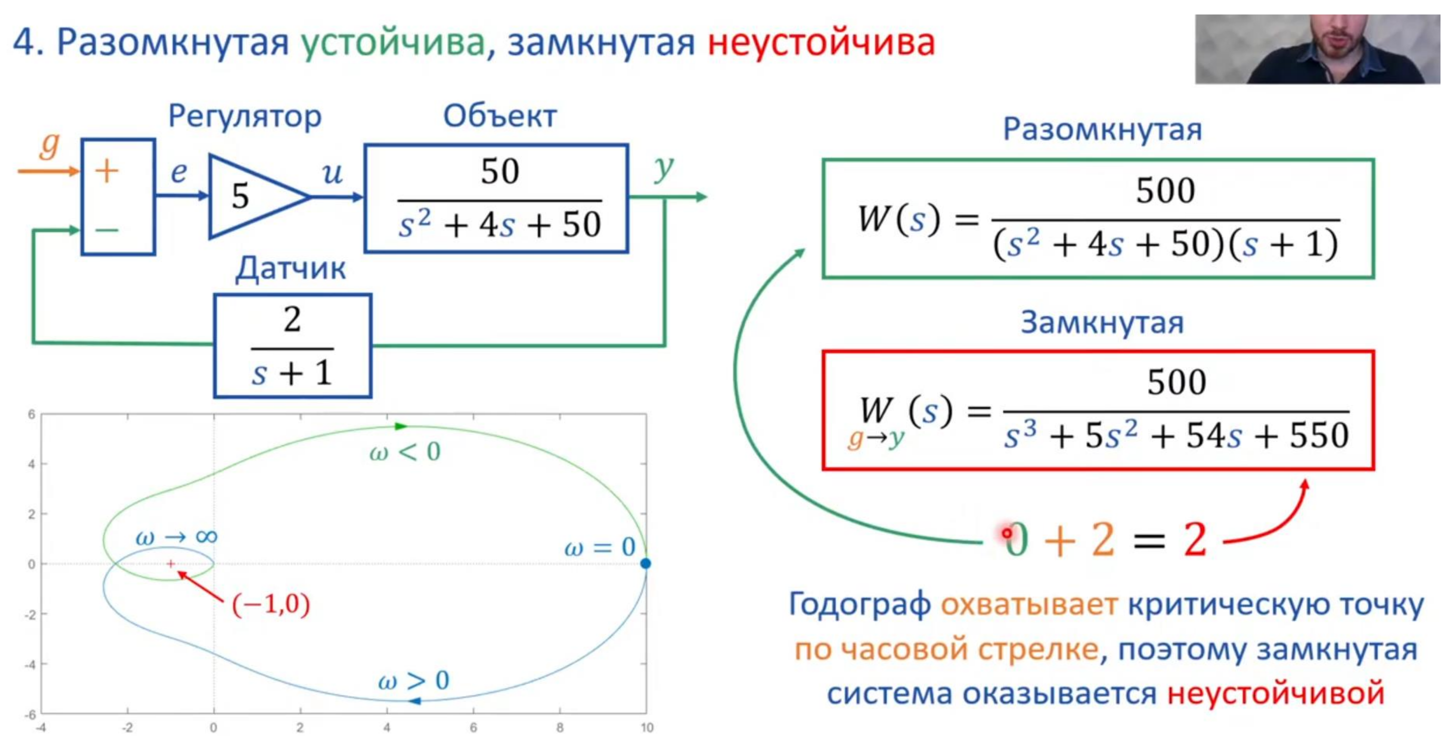
$W(j\omega)$



$$1 - 1 = 0$$

Годограф охватывает критическую точку против часовой стрелки, поэтому замкнутая система первого порядка оказывается устойчивой





Критерий Найквиста: упрощенная формулировка

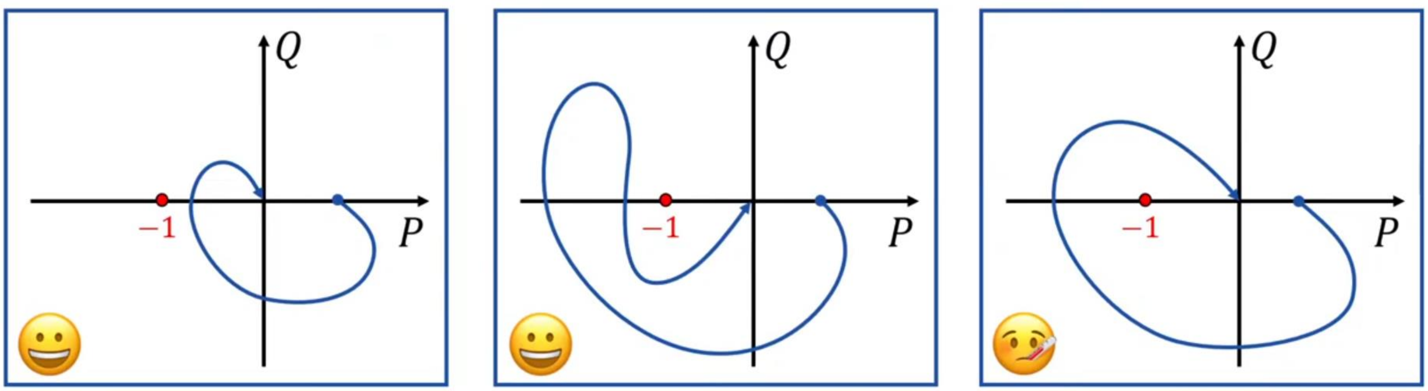
Если разомкнутая система асимптотически устойчива, то охватывание годографом критической точки (-1, 0) происходит только по часовой стрелке.

Простой вариант критерия Найквиста для случая, когда разомкнутая система асимптотически устойчива

Годограф не охватывает точку $(-1{,}0)$	$\Rightarrow$	Замкнутая система асимптотически устойчива

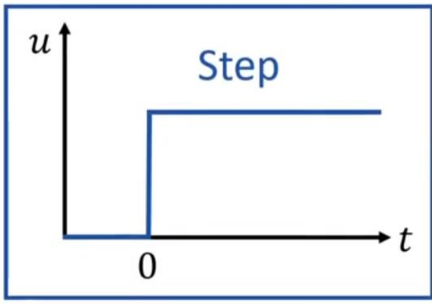
Годограф охватывает точку $(-1{,}0)$	$\Rightarrow$	Замкнутая система неустойчива

Простой вариант критерия Найквиста для случая, когда разомкнутая система асимптотически устойчива



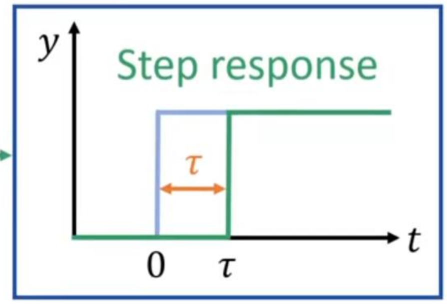
Замкнутая система будет устойчивой	Замкнутая система будет устойчивой	Замкнутая система будет неустойчивой

Звено чистого запаздывания



$$u \rightarrow \boxed{y(t) = u(t-\tau)} \rightarrow y$$

Выход повторяет вход,
но спустя время τ



Передаточная функция звена чистого запаздывания: $W(s) = e^{-\tau s}$

Передаточная функция

$$W(s) = e^{-\tau s}$$

$$\Big\downarrow \; s = j\omega$$

Частотная передаточная функция

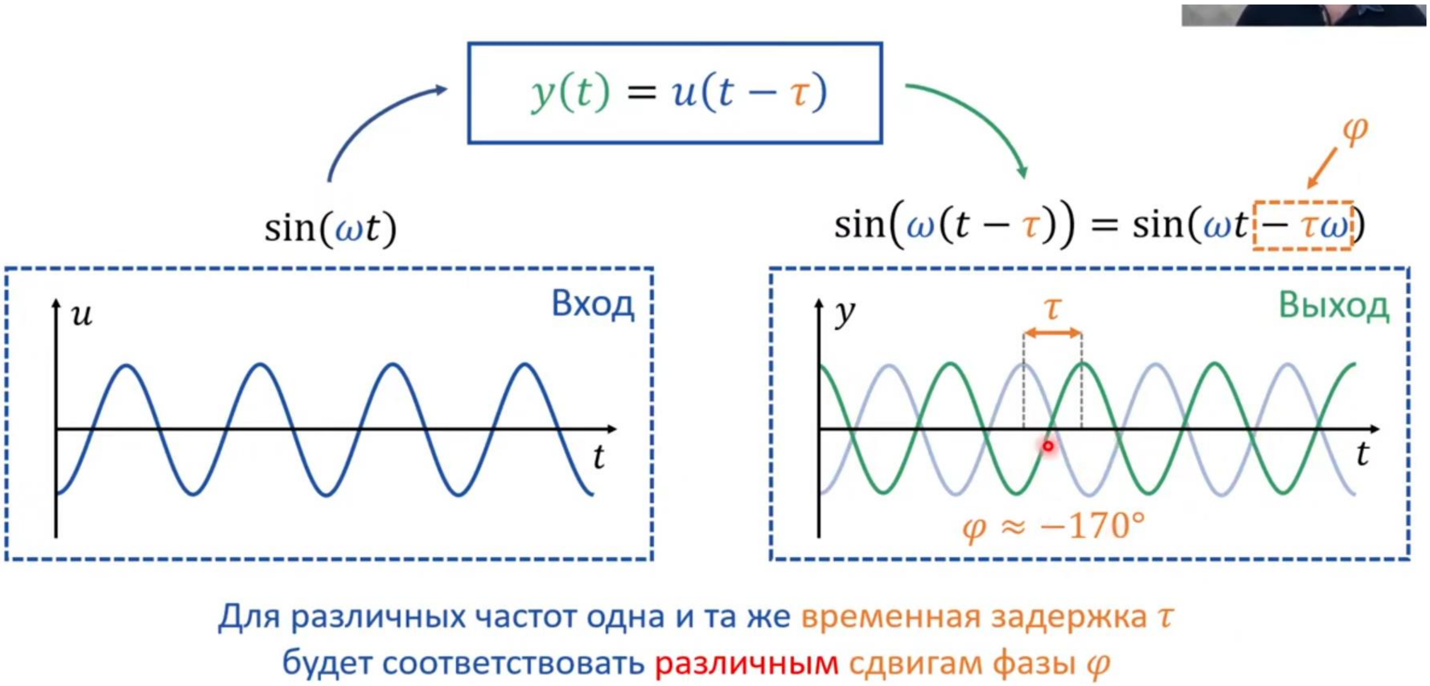
$$W(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$

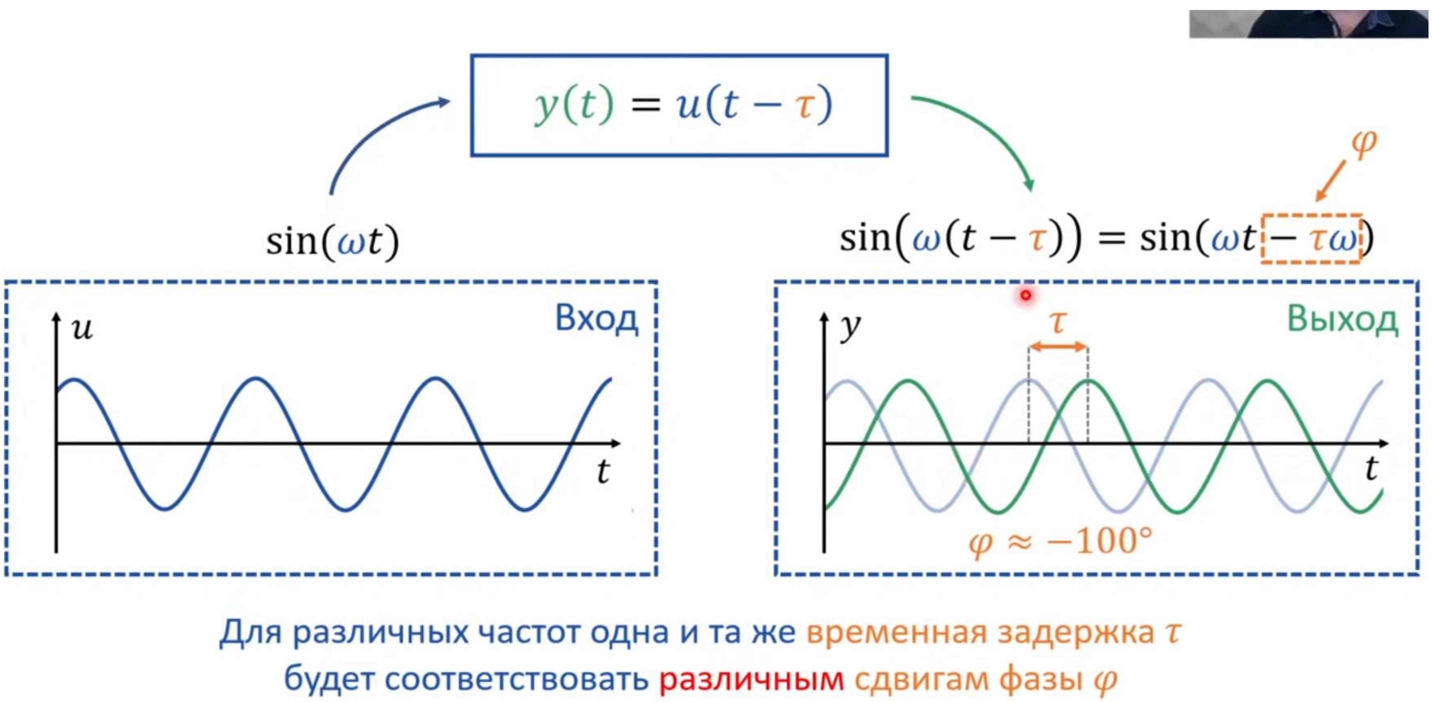
Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = 1$$

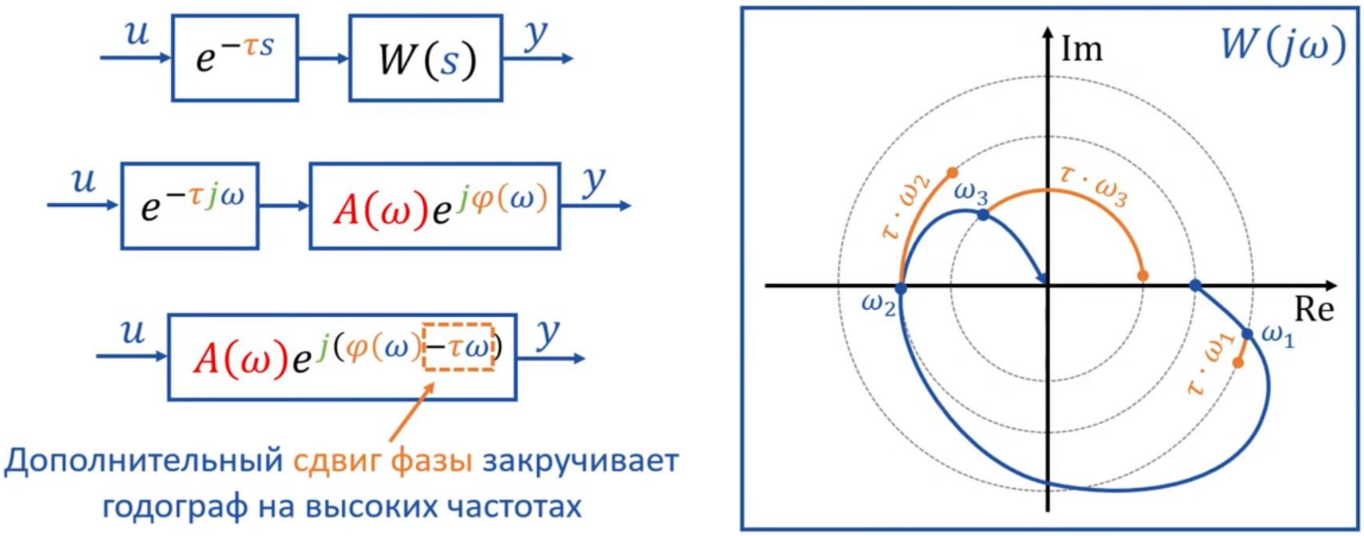
Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = -\tau\omega$$

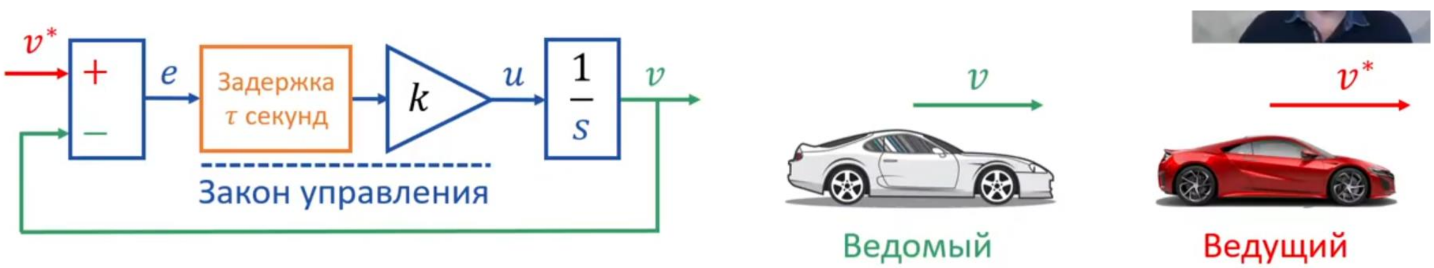




Запаздывание закручивает годограф



Решаем пример с машинками



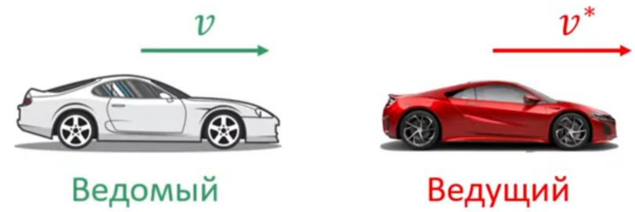
Сначала рассмотрим случай $\tau = 0$

$$W(s) = \frac{k}{s} \qquad W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = \underbrace{0}_{Re} - j\frac{k}{\omega} \; Im$$

$$\operatorname{atan}\frac{Im}{Re}$$

$$W(j\omega) = \boxed{\frac{k}{\omega}}\, e^{j\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \longleftarrow \text{При } \omega > 0$$

$$\operatorname{atan}\left(\frac{-\frac{k}{\omega}}{0}\right) = \operatorname{atan}(-\infty)$$



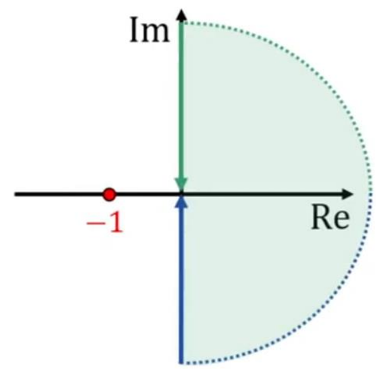
Сначала рассмотрим случай $\tau = 0$

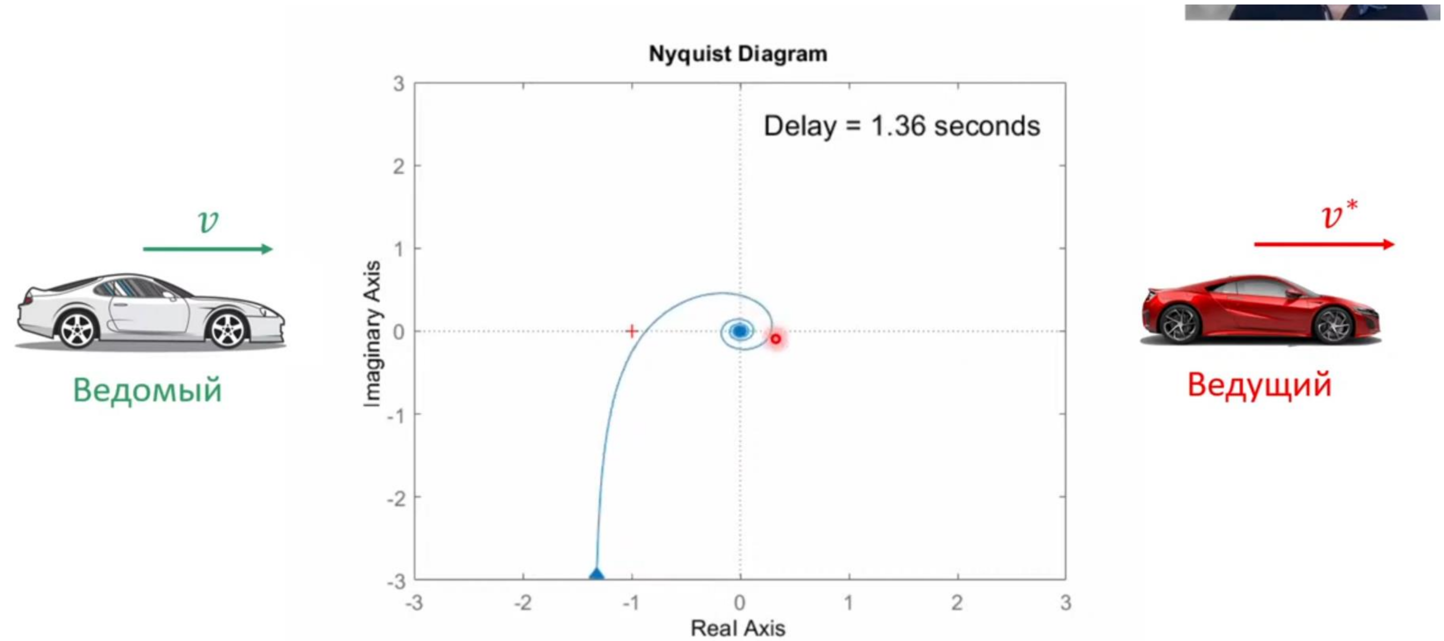
$$W(s) = \frac{k}{s} \qquad W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = 0 - j\frac{k}{\omega}$$

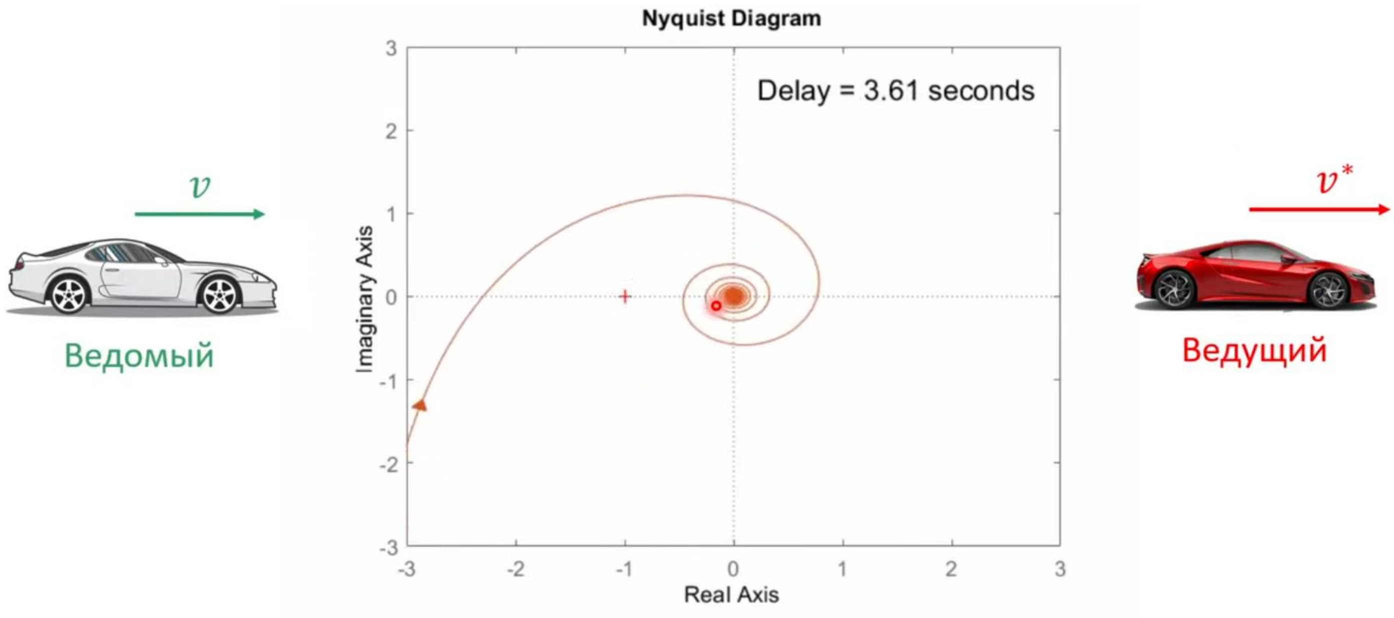
$$W(j\omega) = \frac{k}{\omega} e^{j\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \quad \longleftarrow \quad \text{При } \omega > 0$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{\omega} e^{j\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad \longleftarrow \quad \text{При } \omega < 0$$

При отсутствии запаздывания система устойчива







Возле центра график сильно закручивается, так как возле центра обозначены значения при высоких частотах, при которых график сильнее всего закручивается при наличии запаздывания. В начале (при малых значениях запаздывания) система устойчива, но в какой-то момент годограф захватывает критическую точку, и система становится неустойчивой.

Найдём критическое запаздывание:

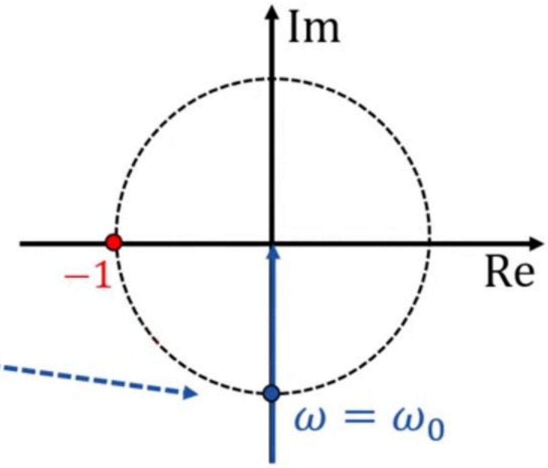
$$W(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{s} \qquad W(j\omega) = \frac{ke^{-j\tau\omega}}{j\omega}$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{\omega} e^{j\cdot\left(-\frac{\pi}{2}-\tau\omega\right)}$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \qquad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega$$

Найдём критическое запаздывание:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \qquad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega$$

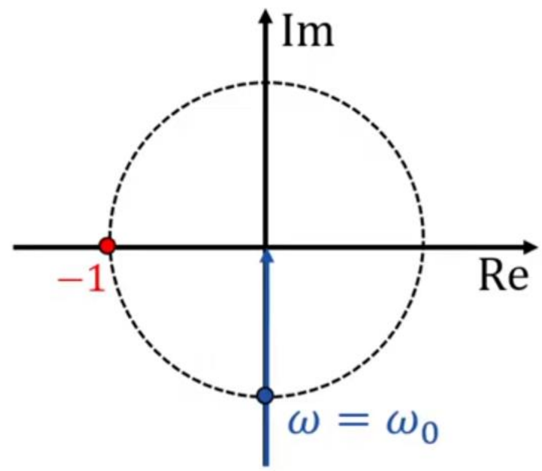


Найдём такую частоту, которая соответствует точке на единичной окружности

Найдём критическое запаздывание:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \qquad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega$$

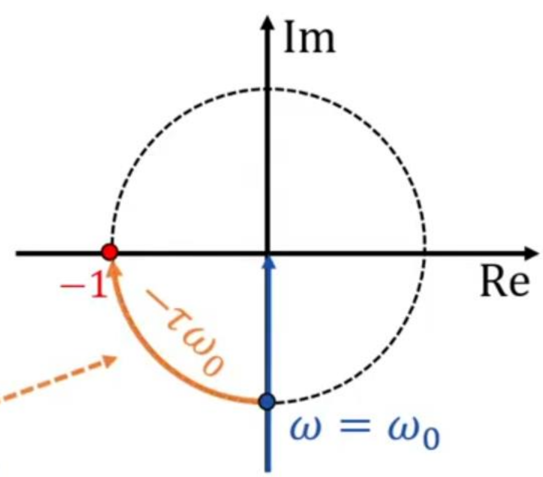
$$A(\omega_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = ?$$



Найдём критическое запаздывание:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \qquad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega$$

$$A(\omega_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = k$$



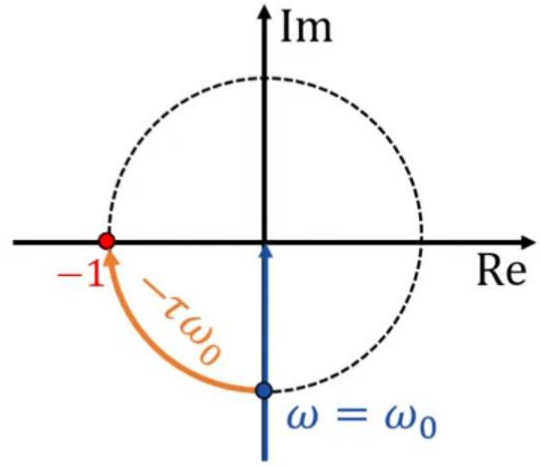
Точке осталось повернуться ещё на $-\frac{\pi}{2}$, какому запаздыванию это соответствует?

Найдём критическое запаздывание:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \qquad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \boxed{- \tau\omega}$$

$$A(\omega_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = k$$

$$\varphi(\omega_0) = -\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{-\tau\omega_0 = -\frac{\pi}{2}}$$

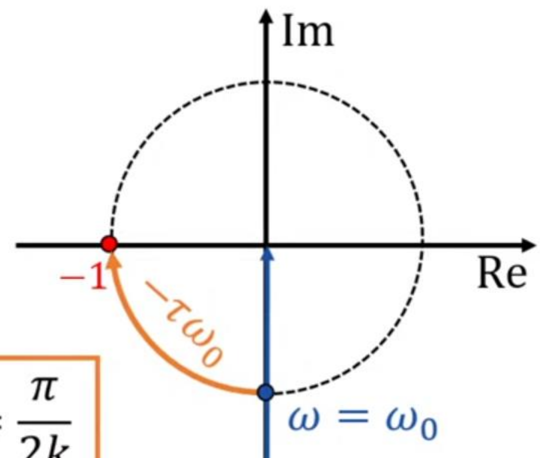


Найдём критическое запаздывание:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \qquad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \boxed{- \tau\omega}$$

$$A(\omega_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = k$$

$$\varphi(\omega_0) = -\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{-\tau\omega_0 = -\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{кр} = \frac{\pi}{2k}}$$

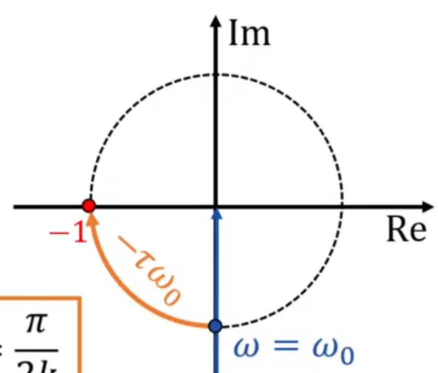


Найдём критическое запаздывание:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \qquad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \boxed{- \tau\omega}$$

$$A(\omega_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = k$$

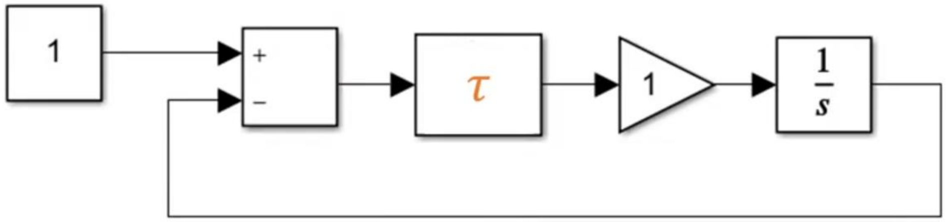
$$\varphi(\omega_0) = -\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{-\tau\omega_0 = -\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{кр} = \frac{\pi}{2k}}$$



При $k = 1$

$$\tau_{кр} = \frac{\pi}{2}$$

Время удивляться!



При $\tau < \frac{\pi}{2}$ система устойчива

При $\tau > \frac{\pi}{2}$ система неустойчива

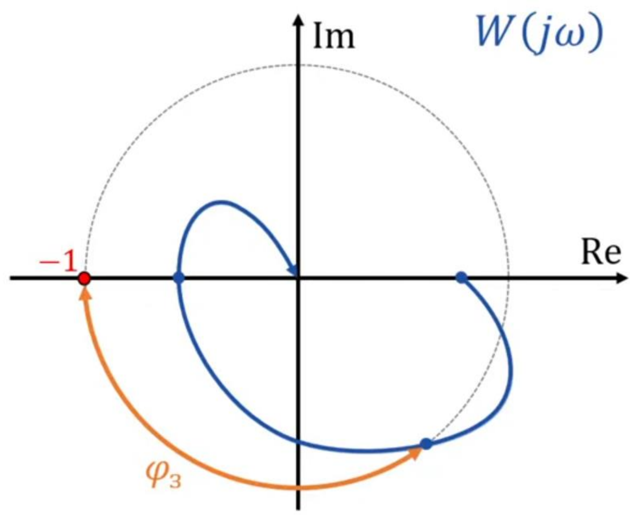
Запасы устойчивости

$\varphi_з$

Запас устойчивости по фазе: на какой угол надо повернуть годограф, чтобы он коснулся критической точки?

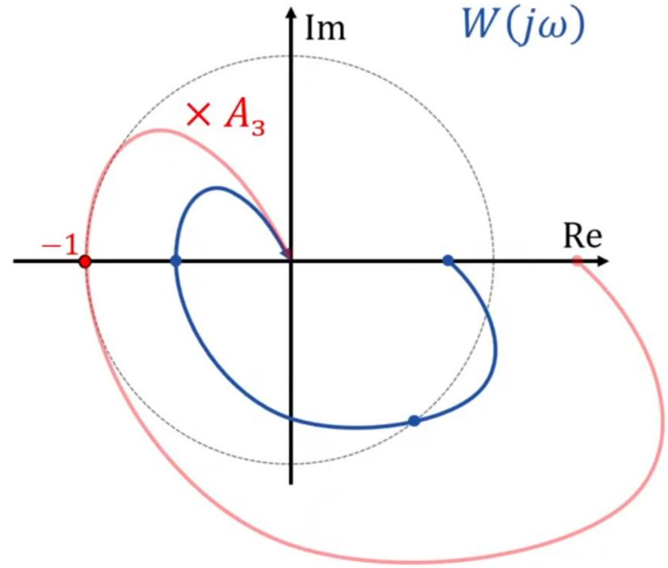
$A_з$

Запас устойчивости по амплитуде: во сколько раз нужно растянуть годограф, чтобы он коснулся критической точки?



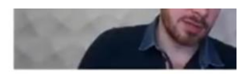
$\varphi_з$

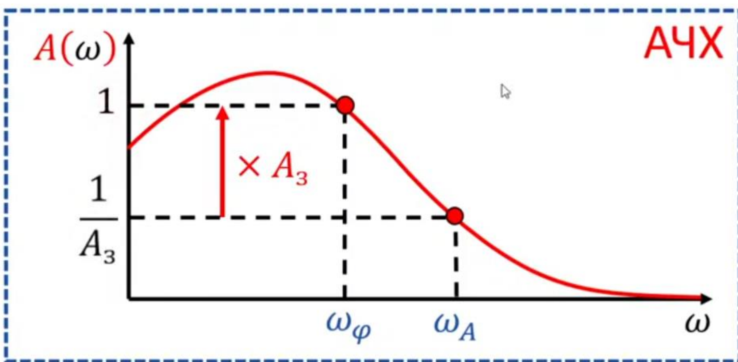
Запас устойчивости по фазе:
на какой угол надо повернуть годограф,
чтобы он коснулся критической точки?

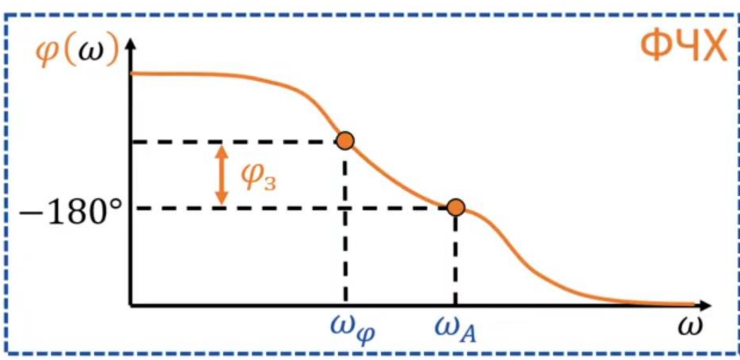


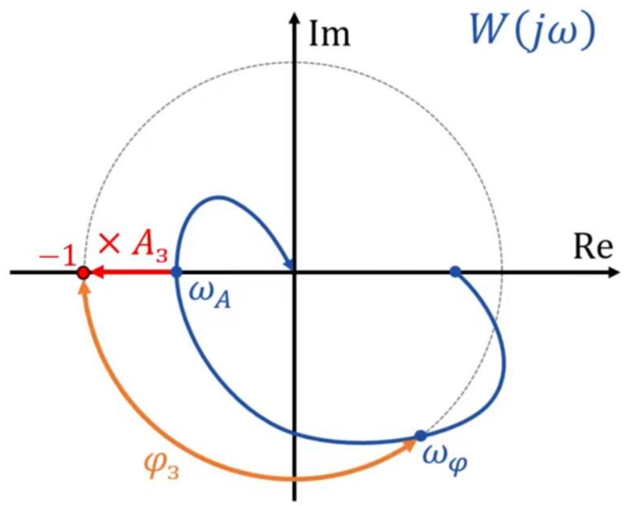
$A_з$

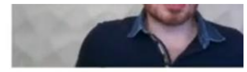
Запас устойчивости по амплитуде:
во сколько раз нужно растянуть годограф,
чтобы он коснулся критической точки?







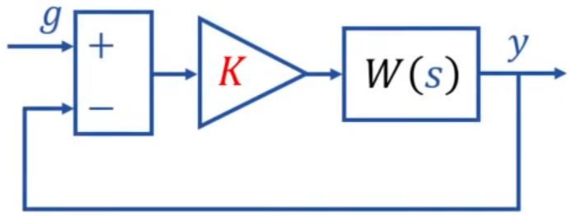




$W(s)$

Запас по амплитуде

$\varphi(\omega_A) = -180°$ $\quad A_з = \dfrac{1}{A(\omega_A)}$

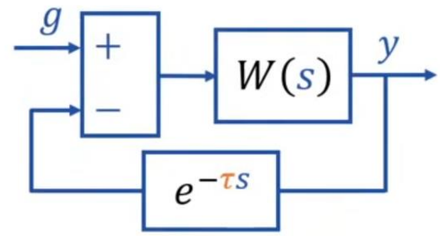


Критический допустимый коэффициент П-регулятора

$K_{\max} = ?$

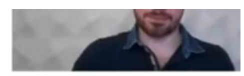
Запас по фазе

$A(\omega_\varphi) = 1$ $\quad \varphi_з = 180° + \varphi(\omega_\varphi)$



Критическое допустимое время запаздывания

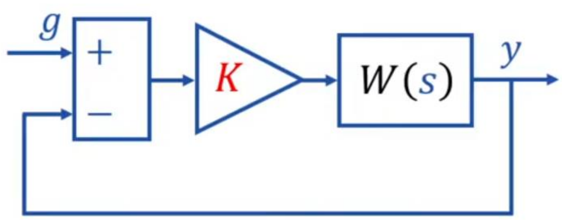
$\tau_{\max} = ?$



$W(s)$

Запас по амплитуде

$\varphi(\omega_A) = -180°$ $\quad A_з = \dfrac{1}{A(\omega_A)}$

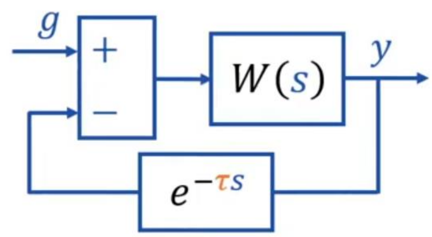


Критический допустимый коэффициент П-регулятора

$K_{\max} = A_з$

Запас по фазе

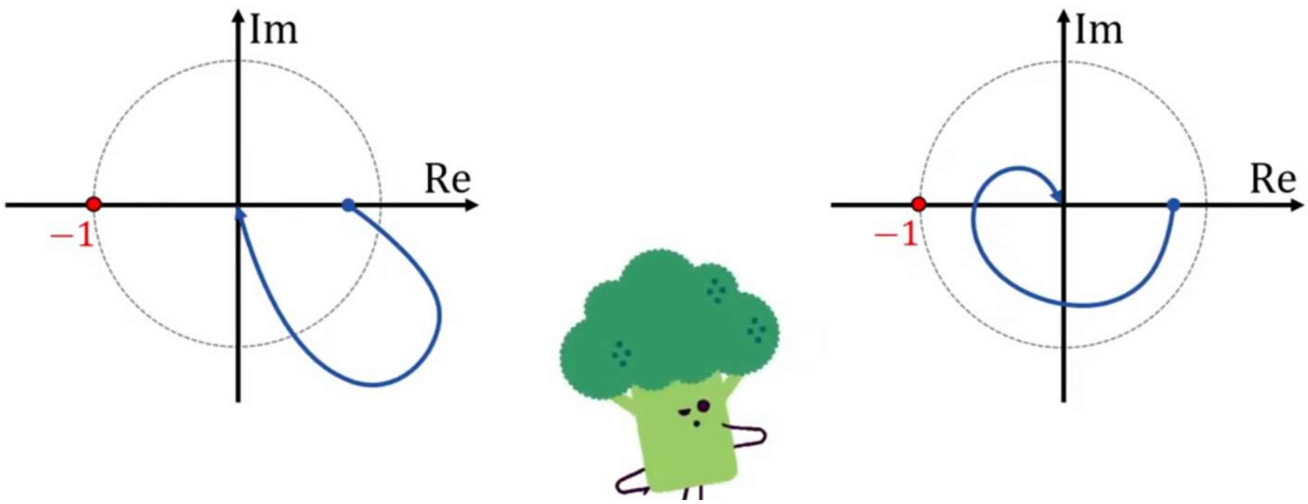
$A(\omega_\varphi) = 1$ $\quad \varphi_з = 180° + \varphi(\omega_\varphi)$



Критическое допустимое время запаздывания

$\tau_{\max} = \dfrac{\varphi_з}{\omega_\varphi}$

Могут ли запасы устойчивости быть бесконечными?



В каких случаях неустойчивая система – это хорошо?

Сложные проценты

$$x(k+1) = x(k) + p \cdot x(k)$$

$$x(k+1) = x(k) + p \cdot x(k)$$

Сумма вклада «завтра»

Сумма вклада «сейчас»

Начисляемый процент

$$x(k+1) \mathrel{+}= \underline{p \cdot x(k)}$$

Прибавка к вкладу за единицу времени

Непрерывная модель

$$\dot{x} = \underline{p \cdot x}$$

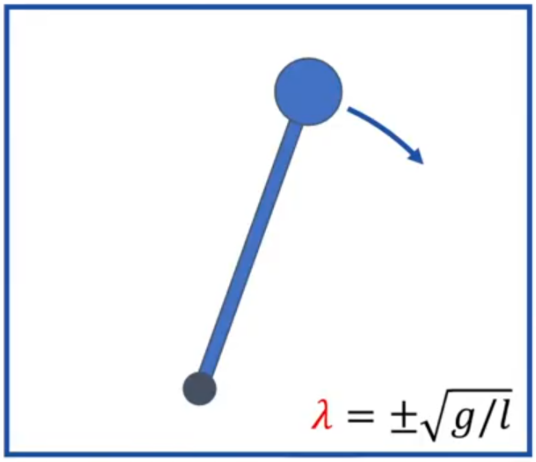
Скорость роста общей суммы

Собственное число

$$p > 0$$

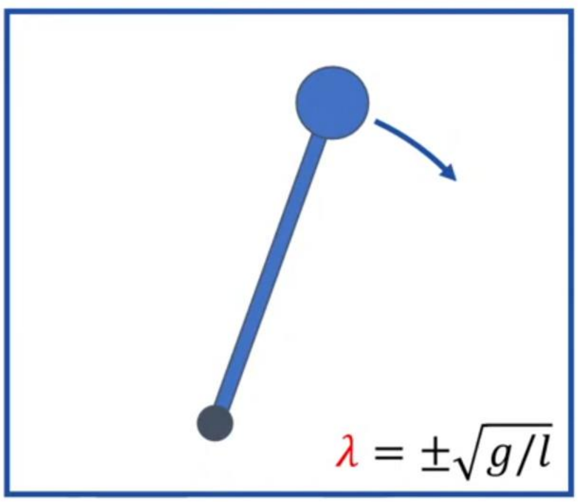
Будем экспоненциальный рост

Перевёрнутый маятник

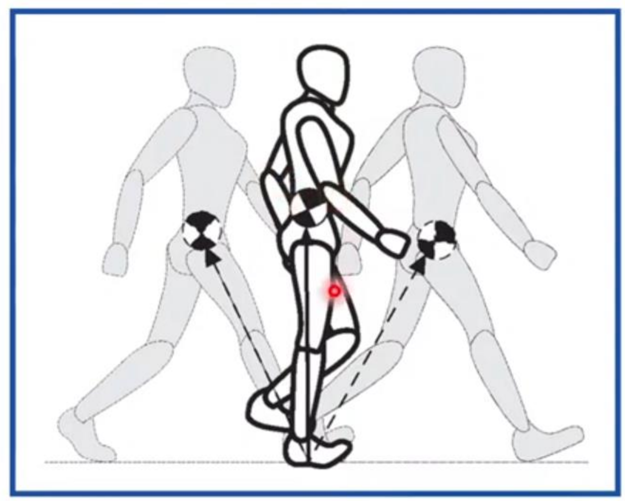


С каким примером перевёрнутого маятника вы сталкиваетесь каждый день?

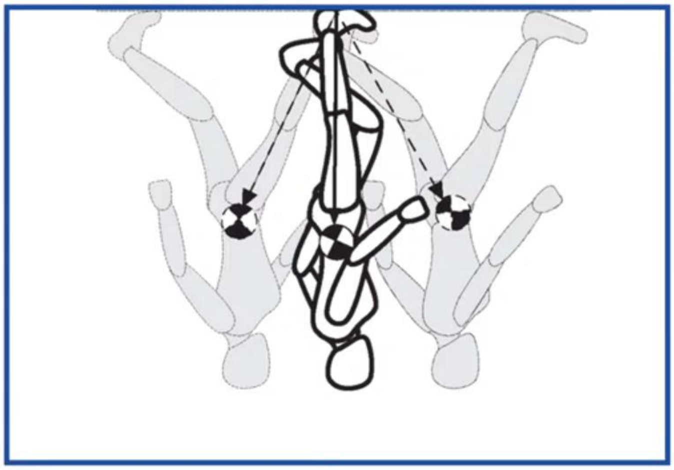
Перевёрнутый маятник



Человек при ходьбе



Ходить по потолку было бы сложно
даже в специальных ботинках



“Никто не должен относиться плохо к чему бы то ни было, пока не убедится, что предполагаемый недостаток действительно являются недостатком, а не скрытым благом!”

– Кот Платон