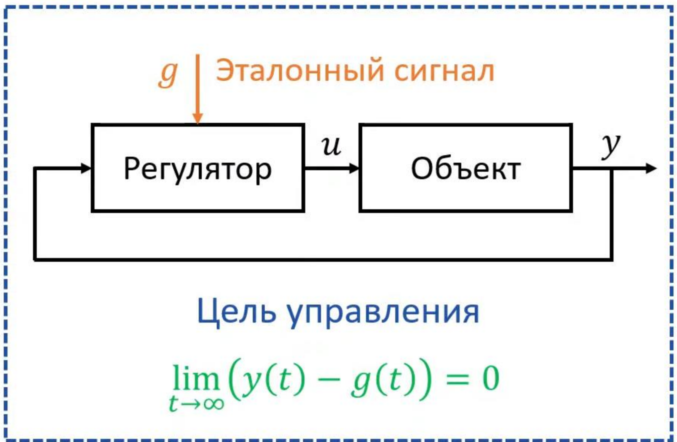
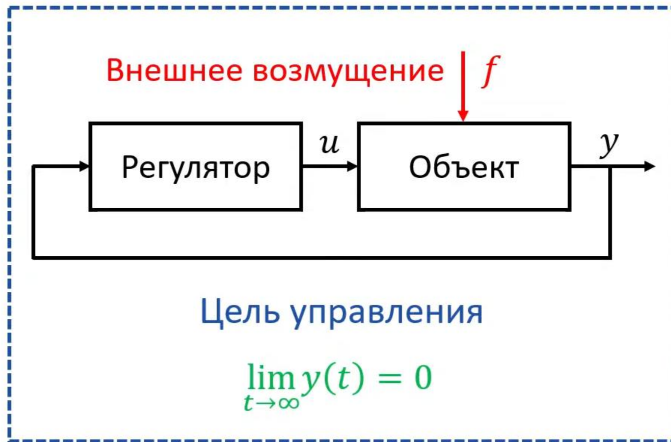
Слежение и компенсация

Что такое слежение и компенсация?

Простейшая задача слежения



Простейшая задача компенсации



В каком случае предельных равенств можно добиться линейным регулятором?

Математические обозначения

Множество собственных чисел матрицы

$$\sigma(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \det(\lambda I-A)=0\}$$

Левая полуплоскость (без мнимой оси)

$$\mathbb{C}_-=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)<0\}$$

Правая полуплоскость (с мнимой осью)

$$\overline{\mathbb{C}_+}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)\geq 0\}$$

Свойства разбиения

$$\mathbb{C}_-\cap\overline{\mathbb{C}_+}=\emptyset \qquad \mathbb{C}_-\cup\overline{\mathbb{C}_+}=\mathbb{C}$$

В каких случаях выход стремится к нулю?

(Замкнутая) система

$$\dot{x} = Ax + Bw$$
$$\sigma(A) \in \mathbb{C}_-$$

Асимптотически устойчива

Внешнее воздействие

$$\dot{w} = \Gamma w$$
$$\sigma(\Gamma) \in \overline{\mathbb{C}_+}$$

$w(t)$ состоит из синусов, экспонент, полиномов

Выход системы

$$z = Cx + Dw$$
$$z \to 0?$$

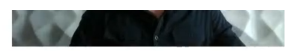
Хотим, чтобы выход стремился к нулю

При каком соотношении матриц A, B, Γ, C, D верно, что $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$?

Основная теорема

Существует P такая, что

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = B \\ CP + D = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$



Система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ \dot{w} = \Gamma w \\ z = Cx + Dw \end{cases}$$

Основная теорема

Существует P такая, что

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = B \\ CP + D = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$

Доказательство туда ($\Rightarrow$): рассмотрим $v = x - Pw$

$$\dot{v} = \dot{x} - P\dot{w}$$

$$\dot{v} = Ax + Bw - P\dot{w}$$

$$\begin{aligned}\dot{v} &= Ax + Bw - P\Gamma w \\ &= A(v + Pw) + Bw - P\Gamma w \\ &= Av + (AP - P\Gamma + B)w \\ &= Av\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z &= Cx + Dw \\ &= C(v + Pw) + Dw \\ &= Cv + (CP + D)w \\ &= Cv\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\dot{v} = Av \\ z = Cv\end{cases} \xrightarrow{\sigma(A) \in \mathbb{C}_-} \lim_{t\to\infty} v(t) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$

Доказательство обратно ($\Leftarrow$): рассмотрим $v = x - Pw$

$$\begin{cases}\dot{v} = Av + (AP - P\Gamma + B)w \\ z = Cv + (CP + D)w\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{v} = Av \\ z = Cv + (CP + D)w\end{cases} \quad CP + D = 0$$

$$\sigma(A) \cap \sigma(\Gamma) = \emptyset$$

$$AP - P\Gamma + B = 0$$

Теорема Сильвестра

$$v \to 0 \quad z \to 0 \quad w \nrightarrow 0$$

Значит, w не попадает в z

Постановка задачи (управление по состоянию)

Объект управления	Внешний сигнал	Цель управления
$\dot{x} = A_1x + B_1u + B_2w$	$\dot{w} = A_2w$	$z = C_2x + D_2w$
(A_1, B_1) – стабилизируема	$\sigma(A_2) \in \overline{\mathbb{C}_+}$	$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$

Два смысла такой постановки задачи…

Задача слежения

$B_2 = 0 \quad D_2 \neq 0$

w – задающее воздействие

Задача компенсации

$B_2 \neq 0 \quad D_2 = 0$

w – внешнее возмущение

Простейшая задача слежения

$B_2 = 0 \qquad C_2 = I \qquad D_2 = -I$

x должен повторять за w

$$\dot{w} = A_2 w \qquad \dot{x} = A_1 x + B_1 u \qquad \lim_{t\to\infty}\big(x(t) - w(t)\big) = 0$$

Простейшая задача компенсации

$C_2 = I \qquad D_2 = 0$

Несмотря на w,

x должен стремиться к 0

$$\dot{w} = A_2 w \qquad \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

Как решить такую задачу?

Регулятор по состоянию

Feedback составляющая

$$u = K_1 x + K_2 w$$

Feedforward составляющая

Если x и w измеряемы

Расширенный объект

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ \dot{w} = A_2 w \end{cases}$$

Регулируемый выход

$$z = C_2 x + D_2 w$$

Регулятор

$$u = K_1 x + K_2 w$$

Замкнутая система

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_1 + B_1 K_1) x + (B_2 + B_1 K_2) w \\ \dot{w} = A_2 w \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases}$$

Замкнутая система

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_1 + B_1 K_1) x + (B_2 + B_1 K_2) w \\ \dot{w} = A_2 w \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases}$$

$$z \to 0$$

$$\begin{cases} P A_2 - (A_1 + B_1 K_1) P = (B_2 + B_1 K_2) \\ C_2 P + D_2 = 0 \end{cases}$$

Основная теорема

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = A x + B w \\ \dot{w} = \Gamma w \\ z = C x + D w \end{cases} \quad z \to 0 \quad \begin{cases} P\Gamma - A P = B \\ C P + D = 0 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} P A_2 - A_1 P = B_1 (K_1 P + K_2) + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow[Y = K_1 P + K_2]{\text{Замена}} \begin{cases} P A_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \end{cases}$$

Расширенный объект

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ \dot{w} = A_2 w \end{cases}$$

Регулируемый выход

$$z = C_2 x + D_2 w$$

Регулятор

$$u = K_1 x + K_2 w$$

Уравнения следящего регулятора

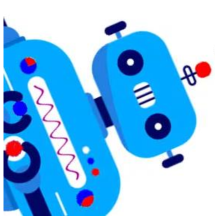
$$\boxed{\begin{cases} P A_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \\ K_1 P + K_2 = Y \end{cases}}$$

Если $\sigma(A_2) \in \overline{\mathbb{C}_+}$, K_1 выбрана так, что $\sigma(A_1 + B_1 K_1) \in \mathbb{C}_-$, и первые два уравнения имеют решение P, Y, то регулятор с матрицами K_1, K_2 обеспечивает

$$\lim_{t \to \infty} z(t) = 0$$

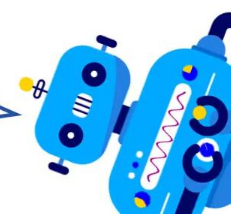
Как синтезировать такой регулятор?

1. Выбрать матрицу K_1 так, чтобы $\sigma(A_1 + B_1 K_1) \in \mathbb{C}_-$
2. Найти P и Y как решение системы уравнений $\begin{cases} P A_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \end{cases}$
3. Вычислить K_2 по формуле $K_2 = Y - K_1 P$

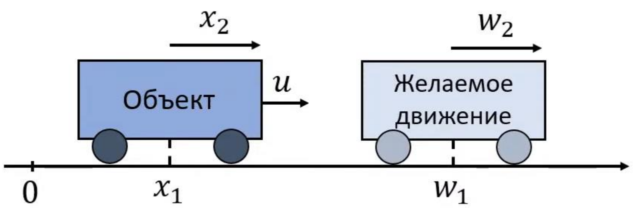


Для нахождения K_1 вы можете применить любой известный вам способ!

Новые уравнения нужны вам только для того, чтобы найти K_2



Пример решения задачи слежения



Объект

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

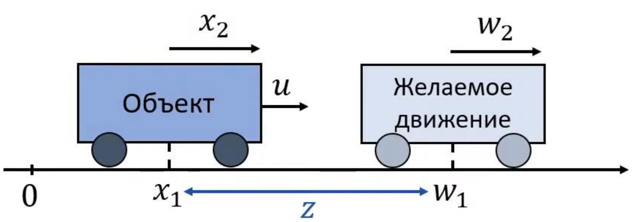
Желаемое движение

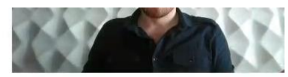
$$w_1(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$$

$$\Downarrow$$

Эталонная модель

$$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}$$





Объект

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

Эталонная модель

$$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}$$

Регулируемый выход

$$z = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}$$

Цель управления

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$

Шаг 1. Выбираем K_1

Допустим, хотим

$$\sigma(A_1 + B_1K_1) = \{-1, -1\} \longrightarrow \boxed{\text{Модальное управление}} \longrightarrow K_1 = \begin{bmatrix}-1 & -2\end{bmatrix}$$

Шаг 2. Решаем уравнения регулятора

$$\begin{cases} PA_2 - A_1P = B_1Y + B_2 \\ C_2P + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1 & y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [y_1 \quad y_2] = [-1 \quad 0]$$

Шаг 3. Находим K_2

$$K_2 = Y - K_1 P$$

$$K_2 = [-1 \quad 0] - [-1 \quad -2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = [0 \quad 2]$$

Следящий регулятор

$$u = [-1 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \quad 2] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

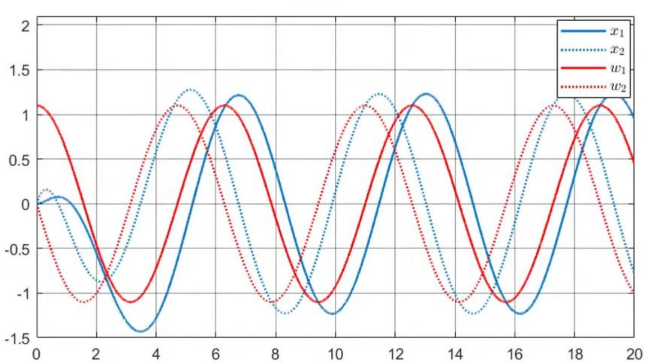
$$u = [-1 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \quad 2] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \underbrace{[-1 \quad -2]}_{\text{Устраняет разницу}} \begin{bmatrix} x_1 - w_1 \\ x_2 - w_2 \end{bmatrix} + \underbrace{[-1 \quad 0]}_{\text{Двигает, когда разница устранена}} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Эталонная траектория

$$w_1(t) = 1.1 \cos(t)$$

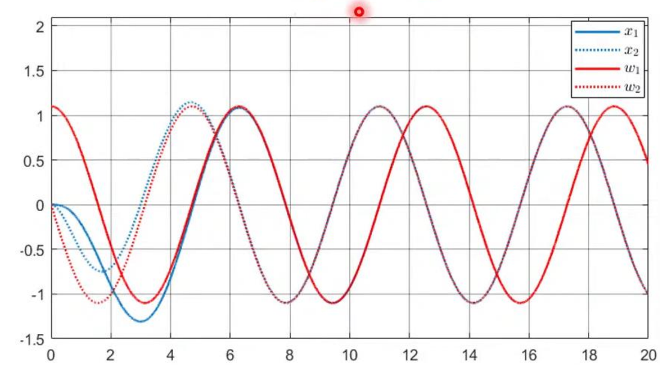
Feedback

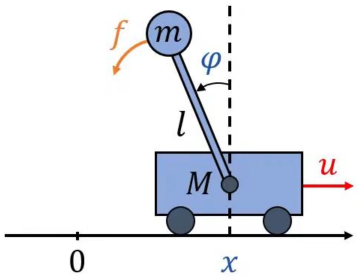
$$u = K_1(x - w)$$

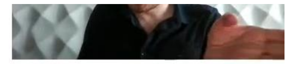


Feedback + Feedforward

$$u = K_1 x + K_2 w$$







Объект

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\\ \dot{\varphi}\\ \dot{\omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\\ \varphi\\ \omega\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\\ 0\\ \frac{1}{Ml}\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{Ml}\\ 0\\ \frac{M+m}{Mml^2}\end{bmatrix}f$$

Внешнее возмущение

$$f(t)=a_1\sin(2t+b_1)+a_2\cos(3t+b_2)\quad\Rightarrow$$

Модель возмущения

$$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\\ \dot{w}_3\\ \dot{w}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}$$

$$f=w_1+w_3$$

Модель возмущения

$$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\\ \dot{w}_3\\ \dot{w}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}$$

$$f=w_1+w_3$$

Цель управления

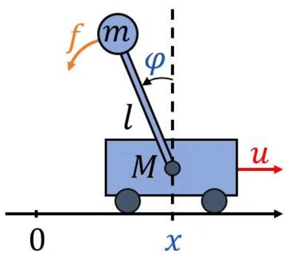
$$z=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\\ \varphi\\ \omega\end{bmatrix}$$

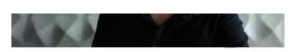
$$\lim_{t\to\infty}z(t)=0$$

Регулятор

$$u=K_1 s+K_2 w$$

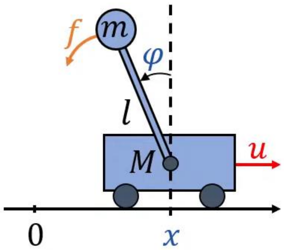
$$s=\begin{bmatrix}x\\ v\\ \varphi\\ \omega\end{bmatrix}\quad w=\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}$$





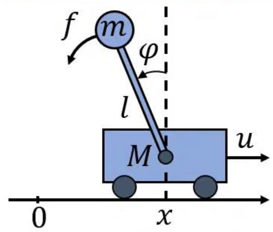
Объект

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\\ \dot{\varphi}\\ \dot{\omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\\ \varphi\\ \omega\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\\ 0\\ \frac{1}{Ml}\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{Ml}\\ 0\\ \frac{M+m}{Mml^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\\ \dot{\varphi}\\ \dot{\omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&\frac{mg}{M}&0\\0&0&0&1\\0&0&\frac{(M+m)g}{Ml}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\\ \varphi\\ \omega\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\\ 0\\ \frac{1}{Ml}\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ \frac{1}{Ml}&0&\frac{1}{Ml}&0\\0&0&0&0\\ \frac{M+m}{Mml^2}&0&\frac{M+m}{Mml^2}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}$$

Пусть $M = m = g = l = 1$



$$\begin{cases}\dot{s} = A_1 s + B_1 u + B_2 w\\ \dot{w} = A_2 w\\ z = C_2 s + D_2 w\end{cases}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&\frac{mg}{M}&0\\0&0&0&1\\0&0&\frac{(M+m)g}{Ml}&0\end{bmatrix}\quad B_1 = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\\ 0\\ \frac{1}{Ml}\end{bmatrix}\quad B_2 = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\ \frac{1}{Ml}&0&\frac{1}{Ml}&0\\0&0&0&0\\ \frac{M+m}{Mml^2}&0&\frac{M+m}{Mml^2}&0\end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix}0&2&0&0\\-2&0&0&0\\0&0&0&3\\0&0&-3&0\end{bmatrix}\quad C_2 = \begin{bmatrix}0&0&1&0\end{bmatrix}\quad D_2 = \begin{bmatrix}0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$u = K_1 s + K_2 w$

$K_1 = ?\quad K_2 = ?$

Шаг 1. Выбираем K_1

Допустим, $Q = I \quad R = 1 \longrightarrow \boxed{\text{LQR}} \longrightarrow K_1 = [1 \quad 3.96 \quad -9.34 \quad -8.28]$

Шаг 2. Решаем уравнения регулятора

$$\begin{cases}PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2\\ C_2 P + D_2 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2\\ C_2 P + D_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix}1/4&0&1/9&0\\0&1/2&0&1/3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad Y = [-2 \quad 0 \quad -2 \quad 0]$$

Шаг 3. Находим K_2

$$K_2 = Y - K_1 P$$

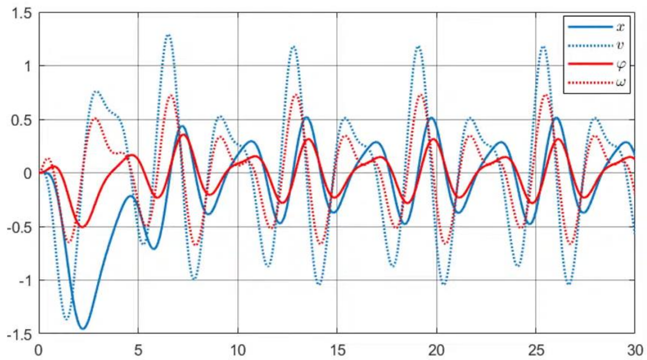
$$K_2 = Y - K_1 P \quad \Rightarrow \quad K_2 = [-2.25 \quad -1.98 \quad -2.11 \quad -1.32]$$

Внешнее возмущение

$$f(t) = 0.5\sin(2t) + 0.5\sin(3t)$$

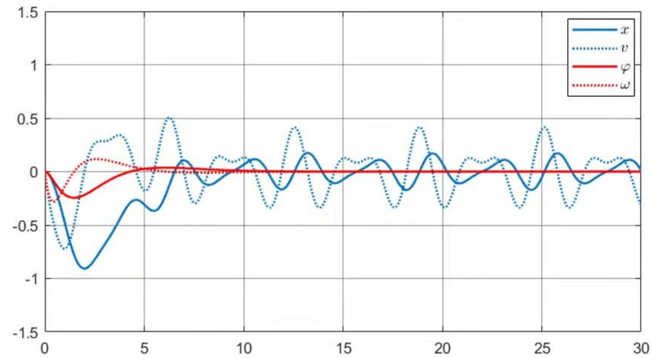
Feedback

$$u = K_1 s$$



Feedback + Feedforward

$$u = K_1 s + K_2 w$$



Постановка задачи (управление по выходу)

Объект управления

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w$$

(A_1, B_1) – стабилизируема

Внешний сигнал

$$\dot{w} = A_2 w$$

$$\sigma(A_2) \in \overline{\mathbb{C}_+}$$

Цель управления

$$z = C_2 x + D_2 w$$

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$

Измеряемый выход

$$y = C_1 x + D_1 w$$

Пара $\left([C_1 \quad D_1], \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right)$ обнаруживаема

Обнаруживаемость системы с выходом y и вектором состояния $\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$

Измеряемый выход

$$y = C_1 x + D_1 w$$

Пара $\left([C_1 \quad D_1], \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right)$ обнаруживаема

Нужна, чтобы сделать наблюдатель, который по y сформирует оценку $\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix}$

Расширенный объект

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ \dot{w} = A_2 w \end{cases}$$

Измеряемый выход

$$y = C_1 x + D_1 w$$

Регулируемый выход

$$z = C_2 x + D_2 w$$

Расширенный наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_1 \hat{x} + B_1 u + B_2 \hat{w} + L_1(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{w}} = A_2 \hat{w} + L_2(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} + D_1 \hat{w} \end{cases}$$

Следящий регулятор

$$u = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{w}$$

В совокупности – следящий регулятор по выходу

Расширенный объект

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ \dot{w} = A_2 w \\ y = C_1 x + D_1 w \end{cases}$$

Расширенный наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_1 \hat{x} + B_1 u + B_2 \hat{w} + L_1(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{w}} = A_2 \hat{w} + L_2(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} + D_1 \hat{w} \end{cases}$$

Ошибка наблюдателя

$$\begin{cases} e_x = x - \hat{x} \\ e_w = w - \hat{w} \end{cases}$$

Динамика ошибки наблюдателя

$$\begin{cases} \dot{e}_x = (A_1 + L_1 C_1) e_x + (B_2 + L_1 D_1) e_w \\ \dot{e}_w = L_2 C_1 e_x + (A_2 + L_2 D_1) e_w \end{cases}$$

Расширенный объект

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ \dot{w} = A_2 w \end{cases}$$

Динамика ошибки наблюдателя

$$\begin{cases} \dot{e}_x = (A_1 + L_1 C_1) e_x + (B_2 + L_1 D_1) e_w \\ \dot{e}_w = L_2 C_1 e_x + (A_2 + L_2 D_1) e_w \end{cases}$$

Регулятор

$$u = K_1 \hat{x} + K_2 \widehat{w} = K_1 (x - e_x) + K_2 (w - e_w)$$

Подставляем u в уравнение объекта и объединяем все четыре динамических уравнения в одну систему

Расширенный объект

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ \dot{w} = A_2 w \end{cases}$$

Динамика ошибки наблюдателя

$$\begin{cases} \dot{e}_x = (A_1 + L_1 C_1) e_x + (B_2 + L_1 D_1) e_w \\ \dot{e}_w = L_2 C_1 e_x + (A_2 + L_2 D_1) e_w \end{cases}$$

Замкнутая система

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_1 + B_1 K_1) x - B_1 K_1 e_x - B_1 K_2 e_w + (B_2 + B_1 K_2) w \\ \dot{e}_x = (A_1 + L_1 C_1) e_x + (B_2 + L_1 D_1) e_w \\ \dot{e}_w = L_2 C_1 e_x + (A_2 + L_2 D_1) e_w \\ \dot{w} = A_2 w \end{cases}$$

Замкнутая система

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_1 + B_1K_1)x - B_1K_1e_x - B_1K_2e_w + (B_2 + B_1K_2)w \\ \dot{e}_x = (A_1 + L_1C_1)e_x + (B_2 + L_1D_1)e_w \\ \dot{e}_w = L_2C_1e_x + (A_2 + L_2D_1)e_w \\ \dot{w} = A_2w \end{cases}$$

Матричная форма (всё вместе)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_x \\ \dot{e}_w \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 & -B_1K_1 & -B_1K_2 & B_2 + B_1K_2 \\ 0 & A_1 + L_1C_1 & B_2 + L_1D_1 & 0 \\ 0 & L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_x \\ e_w \\ w \end{bmatrix}$$

Матричная форма (внешнее воздействие – отдельно)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_x \\ \dot{e}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 & -B_1K_1 & -B_1K_2 \\ 0 & A_1 + L_1C_1 & B_2 + L_1D_1 \\ 0 & L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_x \\ e_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 + B_1K_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w$$

$$\dot{w} = A_2w \qquad z = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_x \\ e_w \end{bmatrix} + D_2w$$

Матричная форма (внешнее воздействие – отдельно)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_x \\ \dot{e}_w \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 & -B_1K_1 & -B_1K_2 \\ 0 & A_1 + L_1C_1 & B_2 + L_1D_1 \\ 0 & L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ e_x \\ e_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 + B_1K_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w$$

$$\dot{w} = A_2w \qquad z = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_x \\ e_w \end{bmatrix} + D_2w$$

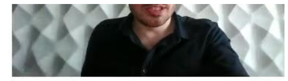
Общий вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \boxed{A}x + Bw \\ \dot{w} = \Gamma w \\ z = Cx + Dw \end{cases}$$

Для решения задачи слежения необходима устойчивость системы + выполнение уравнений следящего регулятора

$$\begin{bmatrix} \boxed{A_1 + B_1K_1} & -B_1K_1 & -B_1K_2 \\ 0 & A_1 + L_1C_1 & B_2 + L_1D_1 \\ 0 & L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A_1 + B_1K_1} \quad \boxed{\begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & D_1 \end{bmatrix}}$$

Выбором регулятора и наблюдателя добиваемся устойчивости



Матричная форма (внешнее воздействие – отдельно)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{e}_x\\ \dot{e}_w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 & -B_1K_1 & -B_1K_2 \\ 0 & A_1 + L_1C_1 & B_2 + L_1D_1 \\ 0 & L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ e_x\\ e_w\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 + B_1K_2 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} w$$

$$\dot{w} = A_2 w \qquad z = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ e_x\\ e_w\end{bmatrix} + D_2 w$$

Общий вид

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bw\\ \dot{w} = \Gamma w\\ z = Cx + Dw\end{cases}$$

Основная теорема

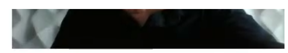
$z \to 0$

$$\begin{cases}P\Gamma - AP = B\\ CP + D = 0\end{cases}$$

Уравнения следящего регулятора

$$\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix} A_2 - \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 & -B_1K_1 & -B_1K_2 \\ 0 & A_1 + L_1C_1 & B_2 + L_1D_1 \\ 0 & L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 + B_1K_2 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix} + D_2 = 0$$



Уравнения следящего регулятора

$$\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix} A_2 - \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 & -B_1K_1 & -B_1K_2 \\ 0 & A_1 + L_1C_1 & B_2 + L_1D_1 \\ 0 & L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 + B_1K_2 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix} + D_2 = 0$$

Они же, переписанные построчно

$$\begin{cases}P_1A_2 - A_1P_1 = B_1(K_1P_1 - K_1P_2 - K_2P_3 + K_2) + B_2\\ P_2A_2 - A_1P_2 = L_1(C_1P_2 + D_1P_3)\\ P_3A_2 - A_1P_3 = L_2(C_1P_2 + D_1P_3)\\ C_2P_1 + D_2 = 0\end{cases}$$

Подходят

$P_2 = P_3 = 0$

Они же, переписанные построчно

$$\begin{cases} P_1A_2 - A_1P_1 = B_1(K_1P_1 - K_1P_2 - K_2P_3 + K_2) + B_2 \\ P_2A_2 - A_1P_2 = L_1(C_1P_2 + D_1P_3) \\ P_3A_2 - A_1P_3 = L_2(C_1P_2 + D_1P_3) \\ C_2P_1 + D_2 = 0 \end{cases}$$

Подходят

$P_2 = P_3 = 0$

Такие же уравнения, как у регулятора по состоянию!

$$\begin{cases} PA_2 - A_1P = B_1(K_1P + K_2) + B_2 \\ C_2P + D_2 = 0 \end{cases}$$

Они же, переписанные построчно

$$\begin{cases} P_1A_2 - A_1P_1 = B_1(K_1P_1 - K_1P_2 - K_2P_3 + K_2) + B_2 \\ P_2A_2 - A_1P_2 = L_1(C_1P_2 + D_1P_3) \\ P_3A_2 - A_1P_3 = L_2(C_1P_2 + D_1P_3) \\ C_2P_1 + D_2 = 0 \end{cases}$$

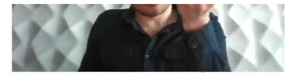
Подходят

$P_2 = P_3 = 0$

Такие же уравнения, как у регулятора по состоянию!

$$\begin{cases} PA_2 - A_1P = B_1(K_1P + K_2) + B_2 \\ C_2P + D_2 = 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} PA_2 - A_1P = B_1Y + B_2 \\ C_2P + D_2 = 0 \end{cases}$$

$Y = K_1P + K_2$



Расширенный объект

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ \dot{w} = A_2 w \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases}$$

Регулятор по выходу

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_1 \hat{x} + B_1 u + B_2 \hat{w} + L_1(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{w}} = A_2 \hat{w} + L_2(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} + D_1 \hat{w} \\ u = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{w} \end{cases}$$

Уравнения следящего регулятора

$$\boxed{\begin{cases} P A_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \\ K_1 P + K_2 = Y \end{cases}} \Rightarrow$$

Если $\sigma(A_2) \in \overline{\mathbb{C}_+}$, K_1, L_1, L_2 таковы, что матрицы

$$A_1 + B_1 K_1 \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & D_1 \end{bmatrix}$$

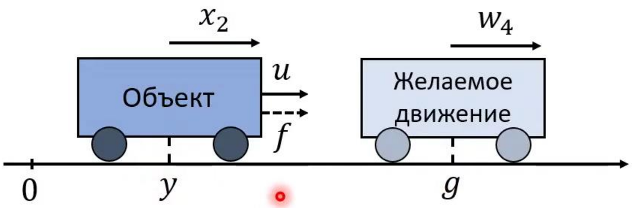
гурвицевы и при этом уравнения регулятора имеют решение P, Y, K_2, то такой регулятор обеспечивает

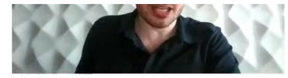
$$\lim_{t \to \infty} z(t) = 0$$

Как синтезировать такой регулятор?

1. Выбрать K_1, L_1, L_2 так, чтобы $\begin{cases} \sigma(A_1 + B_1 K_1) \in \mathbb{C}_- \\ \sigma\left(\begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & D_1 \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{C}_- \end{cases}$
2. Найти P и Y как решение системы уравнений $\begin{cases} P A_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \end{cases}$
3. Вычислить K_2 по формуле $K_2 = Y - K_1 P$

Пример слежения + компенсации по выходу





Объект

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}f$$

Модель внешних сигналов

$$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\\ \dot{w}_3\\ \dot{w}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}$$

Внешнее возмущение

$$f = w_1$$

Эталонное движение

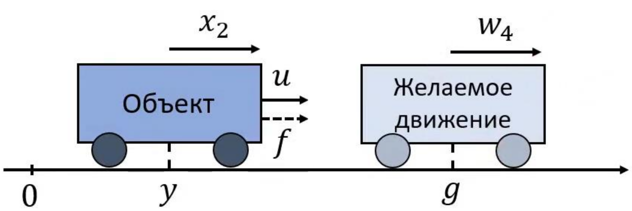
$$g = w_3$$

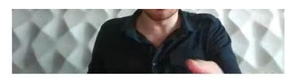
Измеряемый выход

$$y = x_1$$

Цель управления

$$\lim_{t\to\infty}\big(y(t) - g(t)\big) = 0$$





Объект

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}f$$

Модель внешних сигналов

$$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\\ \dot{w}_3\\ \dot{w}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}$$

Внешнее возмущение

$$f = w_1$$

Эталонное движение

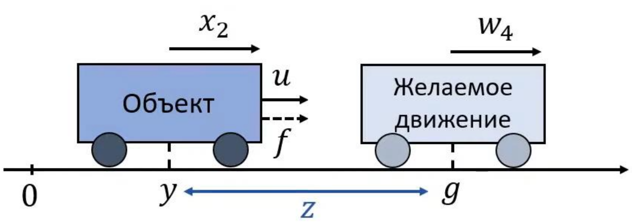
$$g = w_3$$

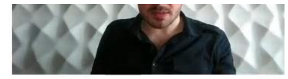
Измеряемый выход

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}$$

Цель управления

$$\lim_{t\to\infty}\big(y(t) - g(t)\big) = 0$$





Объект

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}f$$

Модель внешних сигналов

$$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\\ \dot{w}_3\\ \dot{w}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}$$

Внешнее возмущение

$$f = w_1$$

Эталонное движение

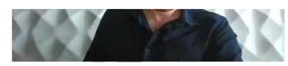
$$g = w_3$$

Измеряемый выход

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}$$

Регулируемый выход

$$z = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}$$



Объект

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}$$

Объект

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}$$

Исходные данные

Расширенный объект

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ \dot{w} = A_2 w \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Фильтр Калмана с $Q = I$ и $R = 1$

$$L \approx \begin{bmatrix} -3.6 & -6.1 & -4.4 & 3.2 & -1.1 & 0.8 \end{bmatrix}^T$$

Параметры наблюдателя

$$L_1 \approx \begin{bmatrix} -3.6 \\ -6.1 \end{bmatrix} \quad L_2 \approx \begin{bmatrix} -4.4 \\ 3.2 \\ -1.1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Синтез регулятора

$$\begin{cases} PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Параметры наблюдателя

$$L_1 \approx \begin{bmatrix} -3.6 \\ -6.1 \end{bmatrix} \quad L_2 \approx \begin{bmatrix} -4.4 \\ 3.2 \\ -1.1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Синтез регулятора

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Выбираем $K_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad K_2 = Y - K_1 P$$

Параметры наблюдателя

$$L_1 \approx \begin{bmatrix} -3.6 \\ -6.1 \end{bmatrix} \quad L_2 \approx \begin{bmatrix} -4.4 \\ 3.2 \\ -1.1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Синтез регулятора

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Выбираем $K_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Расширенный объект

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ \dot{w} = A_2 w \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

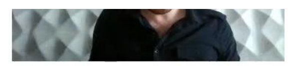
$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Регулятор по выходу

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_1 \hat{x} + B_1 u + B_2 \hat{w} + L_1(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{w}} = A_2 \hat{w} + L_2(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} + D_1 \hat{w} \\ u = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{w} \end{cases}$$

$$L_1 \approx \begin{bmatrix} -3.6 \\ -6.1 \end{bmatrix} \quad K_1 \approx \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}^T$$

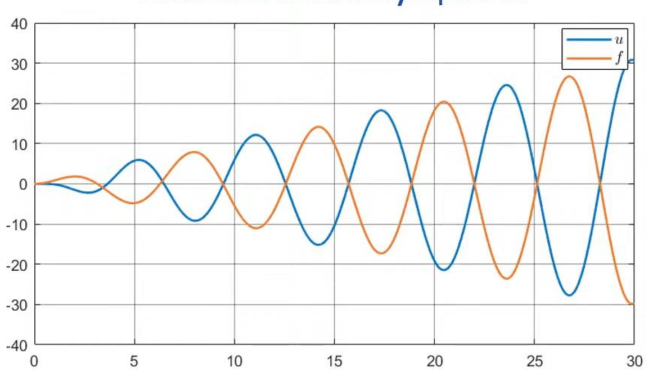
$$L_2 \approx \begin{bmatrix} -4.4 \\ 3.2 \\ -1.1 \\ 0.8 \end{bmatrix} \quad K_2 \approx \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}^T$$



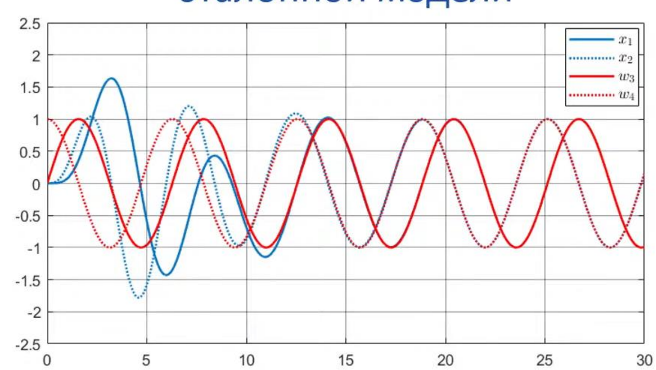
Внешнее возмущение $f(t) = t\sin(t)$

Эталонная траектория $g(t) = \sin(t)$

Управление и внешнее возмущение

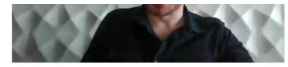
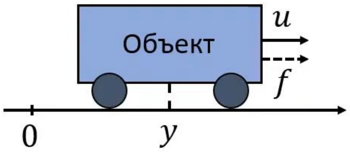


Траектория объекта и эталонной модели



Пример, который даст нам последний классный факт

Объект

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}f$$

Предполагаемые внешние возмущения: $f(t)=a\cos(3t+b)+ce^{5t}$

Модель внешних возмущений

$$\begin{bmatrix}\dot w_1\\ \dot w_2\\ \dot w_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&0\\-3&0&0\\0&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix}$$

$$f=w_1+w_3$$

Измеряемый выход

$$y=x_1$$

Регулируемый выход

$$z=y$$

$$C_1=C_2=[1\quad 0]$$

$$D_1=D_2=[0\quad 0\quad 0]$$

Цель управления

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0$$

Измеряем то, что хотим свести в ноль!

Исходные данные

Расширенный объект

$$\begin{cases}\dot x=A_1x+B_1u+B_2w\\ \dot w=A_2w\\ y=Cx+Dw\\ z=Cx+Dw\end{cases}$$

$$A_1=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\quad B_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\quad B_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0&3&0\\-3&0&0\\0&0&5\end{bmatrix}\quad C=[1\quad 0]\quad D=[0\quad 0\quad 0]$$

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}A_1&B_2\\0&A_2\end{bmatrix}\quad \xrightarrow{\text{LQE }(Q=I\text{ и }R=1)}\quad L\approx\begin{bmatrix}L_1\\L_2\end{bmatrix}\quad L_1\approx\begin{bmatrix}-11.9\\-70.6\end{bmatrix}\quad L_2\approx\begin{bmatrix}-1.3\\0.6\\-358\end{bmatrix}$$

$$\overline{C}=[C\quad D]$$

$$\sigma(A_1+B_1K_1)=\{-1,-1\}$$

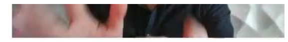
$$K_1=[-1\quad -2]$$

$$\begin{cases}PA_2-A_1P=B_1Y+B_2\\ C_2P+D_2=0\\ K_1P+K_2=Y\end{cases}\quad\longrightarrow\quad K_2=[-1\quad 0\quad -1]$$

Регулятор по выходу

$$y(t)\ \longrightarrow\ \begin{cases}\dot{\hat x}=A_1\hat x+B_1u+B_2\hat w+L_1(\hat y-y)\\ \dot{\hat w}=A_2\hat w+L_2(\hat y-y)\\ \hat y=C\hat x+D\hat w\\ u=K_1\hat x+K_2\hat w\end{cases}\ \longrightarrow\ u(t)$$

Регулятор по выходу



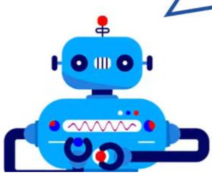
$$y(t) \dashrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_1\hat{x} + B_1(K_1\hat{x} + K_2\widehat{w}) + B_2\widehat{w} + L_1(\hat{y} - y) \\ \dot{\widehat{w}} = A_2\widehat{w} + L_2(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{y}} = C\hat{x} + D\widehat{w} \\ u = K_1\hat{x} + K_2\widehat{w} \end{cases} \dashrightarrow u(t)$$

Регулятор по выходу

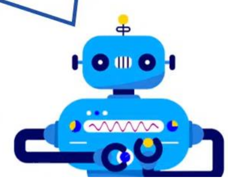
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\widehat{w}}_1 \\ \dot{\widehat{w}}_2 \\ \dot{\widehat{w}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -71.6 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0.6 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -358 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \widehat{w}_1 \\ \widehat{w}_2 \\ \widehat{w}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11.9 \\ -70.6 \\ -1.3 \\ 0.6 \\ -358 \end{bmatrix} y \qquad u = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \widehat{w}_1 \\ \widehat{w}_2 \\ \widehat{w}_3 \end{bmatrix}$$

Это форма Вход-Состояние-Выход уравнений регулятора!

Какие у её матрицы собственные числа?



$$\lambda_{1,2} = -6.96 \pm 6.85i \qquad \lambda_{3,4} = \pm 3i \qquad \lambda_5 = 5$$



Принцип внутренней модели

Объект управления

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + B_1u + B_2w \\ y = Cx + Dw \end{cases}$$

Внешний сигнал

$$\dot{w} = A_2w$$

$$\sigma(A_2) \in \overline{\mathbb{C}_+}$$

Регулятор (общий вид)

$$\begin{cases} \dot{s} = Ms + Ny \\ u = Ks + Ly \end{cases}$$

Принцип внутренней модели

Если измеряемый выход y равен регулируемому выходу z, и если регулятор обеспечивает устойчивость объекта в случае $w \equiv 0$, то для решения задачи слежения/компенсации $(z \to 0)$ необходимо, чтобы

$$\sigma(A_2) \in \sigma(M)$$

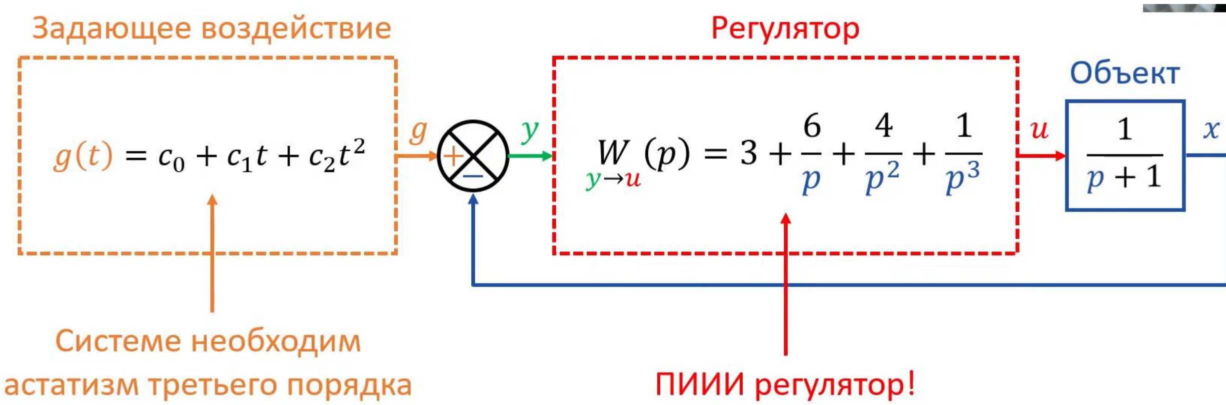
(см. конец лекции 4)

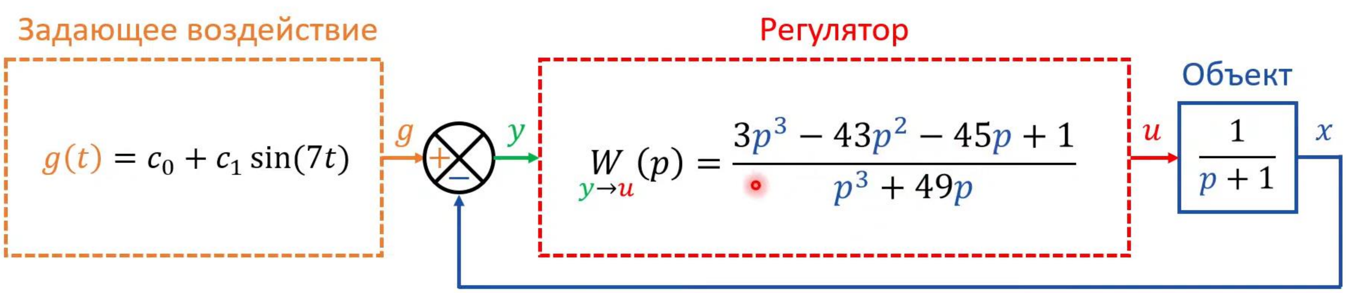
Принцип внутренней модели

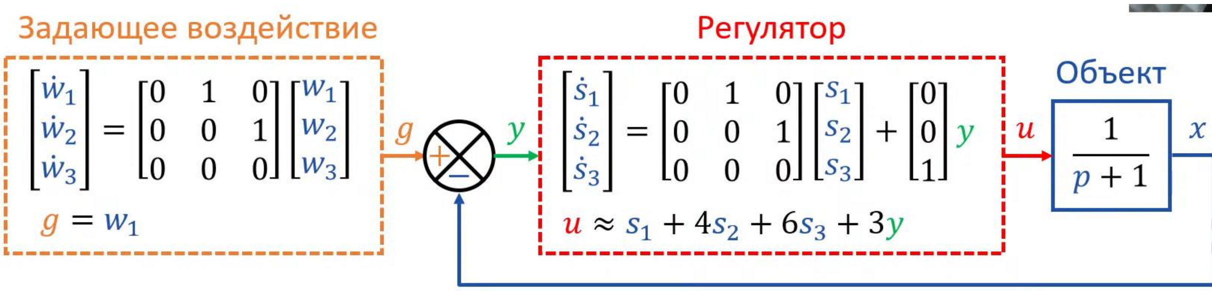
$$\sigma(A_2) \in \sigma(M)$$

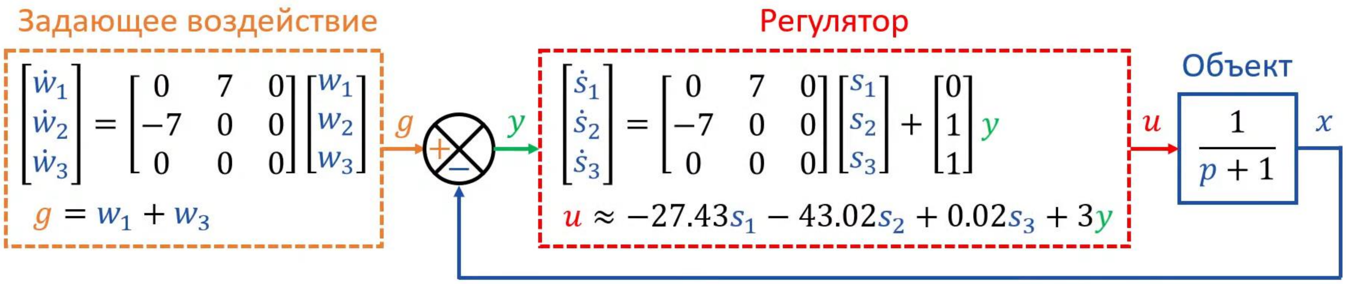
Регулятор должен уметь воспроизводить сигналы,
за которыми надо проследить
или которые надо компенсировать!

Принцип внутренней модели: два примера






Задающее воздействие
$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\\ \dot{w}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix}$
$g = w_1$
g
+
−
y
Регулятор
$\begin{bmatrix}\dot{s}_1\\ \dot{s}_2\\ \dot{s}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}y$
$u \approx s_1 + 4s_2 + 6s_3 + 3y$
u
Объект
$\frac{1}{p+1}$
x


Задающее воздействие
$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\\ \dot{w}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&7&0\\-7&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix}$
$g = w_1 + w_3$
g
+
−
y
Регулятор
$\begin{bmatrix}\dot{s}_1\\ \dot{s}_2\\ \dot{s}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&7&0\\-7&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}y$
$u \approx -27.43s_1 - 43.02s_2 + 0.02s_3 + 3y$
u
Объект
$\frac{1}{p+1}$
x