НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №7

«Устойчивость систем с запаздыванием»

по дисциплине «Теория автоматического управления»

Выполнил: студент гр. R3238,

Кирбаба Д.Д.

Преподаватель: Перегудин А.А.,

ассистент фак. СУиР

г. Санкт-Петербург

2022

Цель работы

Исследование управляемости и наблюдаемости на примере динамических систем

Начальные данные

7 вариант

Исходные данные для задания 1:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Исходные данные для задания 2:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad x_1' = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad x_1'' = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Исходные данные для задания 3:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad y(t) = -3e^{-4t}\cos(2t) + 2e^{-4t}\sin(2t)$$

Исходные данные для задания 4:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad y(t) = -3e^{-4t}\cos(2t) + 2e^{-4t}\sin(2t)$$

Выполнение работы

Задание 1.

1.1. Матрица управляемости

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} u$$

Матрица управляемости системы:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B\,] = \begin{bmatrix} -7 & 31 & -43 \\ -5 & 15 & -5 \\ 7 & -21 & 23 \end{bmatrix}, \qquad rank(\mathcal{C}) = 3$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы, то по критерию Калмана система полностью управляема.

1.2. Управляемость собственных чисел

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = -3, \qquad \lambda_2 = -1 + 2i, \qquad \lambda_3 = -1 - 2i$$

Собственные вектора матрицы A:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -3-i \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -3+i \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ЖНФ матрицы A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3-i & -3+i \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1+2i & 0 \\ 0 & 0 & -1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{i}{2} & -\frac{1}{4}-\frac{i}{4} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & -\frac{1}{4}+\frac{i}{4} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

Перепишем в вещественном виде:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & \frac{3}{2} & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма системы:

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{15}{2} \\ -\frac{15}{2} \end{bmatrix} u$$

Управляемость собственных чисел:

$\boldsymbol{\lambda_1 = -3}$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа не равны нулю, то собственное число управляемо.

Проверка ранговым критерием:

$$[A - \lambda_1 E \quad B] = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 8 & -7 \\ 4 & 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad rank([A - \lambda_1 E \quad B]) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число управляемо.

$\boldsymbol{\lambda_2 = -1 + 2i}$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа не равны нулю, то собственное число управляемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер $2x2$.

Проверка ранговым критерием:

$$[A - \lambda_2 E \quad B] = \begin{bmatrix} 6-2i & -2 & 8 & -7 \\ 4 & -2-2i & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6-2i & 7 \end{bmatrix}, \qquad rank([A - \lambda_2 E \quad B]) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число управляемо.

$\boldsymbol{\lambda_3 = -1 - 2i}$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа не равны нулю, то собственное число управляемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер $2x2$.

Проверка ранговым критерием:

$$[A-\lambda_3 E \quad B] = \begin{bmatrix} 6+2i & -2 & 8 & -7 \\ 4 & -2+2i & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6+2i & 7 \end{bmatrix}, \qquad rank([A-\lambda_3 E \quad B]) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число управляемо.

1.3. Управляемое подпространство

Управляемое подпространство:

$$Range\, \mathcal{C} = Range \begin{bmatrix} -7 & 31 & -43 \\ -5 & 15 & -5 \\ 7 & -21 & 23 \end{bmatrix} = Span\left(\begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 31 \\ 15 \\ -21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -43 \\ -5 \\ 23 \end{bmatrix} \right) = Span\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{R}^3$$

Точка x_1 принадлежит $Range\, \mathcal{C}$, если $rank\ \mathcal{C} = rank[\mathcal{C} \quad x_1]$.

Проверим это:

$$rank \begin{bmatrix} -7 & 31 & -43 & -2 \\ -5 & 15 & -5 & -3 \\ 7 & -21 & 23 & 3 \end{bmatrix} = 3 = rank\ \mathcal{C}$$

Значит точка x_1 принадлежит управляемому подпространству системы.

1.4. Грамиан управляемости системы

Программный код:

```
(* plant parameters *)
a = {{5, -2, 8}, {4, -3, 4}, {-4, 0, -7}};
b = {{-7}, {-5}, {7}};
x1 = {{-2}, {-3}, {3}};

(* rank controllability matrix *)
c = Join[b, a.b, a.a.b, 2];
MatrixRank[c];

(* eigen values and Jordan form *)
eVal = Eigenvalues[a];
eVec = Transpose[Eigenvectors[a]];
aj = {{-3, 0, 0}, {0, -1, 2}, {0, -2, -1}};
m = {{m11, m12, m13}, {m21, m22, m23}, {m31, m32, m33}};
Solve[m.aj == a.m, {m11, m12, m13, m21, m22, m23, m31, m32, m33}];
m = {{-1, -1/3, 1}, {0, 0, 2/3}, {1, 0, -2/3}};
bj = Inverse[m].b;

(* controllability of eigen values *)
MatrixRank[Join[a - eVal[[1]] * IdentityMatrix[3], b, 2]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[2]] * IdentityMatrix[3], b, 2]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[3]] * IdentityMatrix[3], b, 2]];

(* if dot in controlled subspace *)
MatrixRank[Join[controllabilityMatrix, x1, 2]];

(* gramian and its eigen values *)
t1 = 3;
g = Integrate[MatrixExp[a t].b.Transpose[b].MatrixExp[Transpose[a t]], {t, 0, t1}];
Eigenvalues[g];

(* control *)
FullSimplify[Transpose[b].MatrixExp[Transpose[a] (t1 - t)].Inverse[g].x1];
```

$$t_1 = 3$$

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t}\mathrm{Cos}[2t] + 3e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^{-3t} + e^{-t}\mathrm{Cos}[2t] - 2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^{-3t} + e^{-t}\mathrm{Cos}[2t] + 3e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] \\ 2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & e^{-t}\mathrm{Cos}[2t] - e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & 2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] \\ -2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & e^{-3t} - e^{-t}\mathrm{Cos}[2t] + e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & e^{-3t} - 2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] \end{bmatrix}$$

$$e^{A^T t} = \begin{bmatrix} e^{-t}\mathrm{Cos}[2t] + 3e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & 2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & -2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] \\ -e^{-3t} + e^{-t}\mathrm{Cos}[2t] - 2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & e^{-t}\mathrm{Cos}[2t] - e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & e^{-3t} - e^{-t}\mathrm{Cos}[2t] + e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] \\ -e^{-3t} + e^{-t}\mathrm{Cos}[2t] + 3e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & 2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & e^{-3t} - 2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] \end{bmatrix}$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 35 & -49 \\ 35 & 25 & -35 \\ -49 & -35 & 49 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} B B^T e^{A^T t} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-6t}(2 + 5e^{2t}\mathrm{Cos}[2t] - 10e^{2t}\mathrm{Sin}[2t])^2 & 5e^{-4t}(\mathrm{Cos}[2t] - \mathrm{Sin}[2t])(2 + 5e^{2t}\mathrm{Cos}[2t] - 10e^{2t}\mathrm{Sin}[2t]) & -e^{-6t}(2 + 5e^{2t}\mathrm{Cos}[2t] - 10e^{2t}\mathrm{Sin}[2t])(2 + 5e^{2t}\mathrm{Cos}[2t] - 5e^{2t}\mathrm{Sin}[2t]) \\ 5e^{-4t}(\mathrm{Cos}[2t] - \mathrm{Sin}[2t])(2 + 5e^{2t}\mathrm{Cos}[2t] - 10e^{2t}\mathrm{Sin}[2t]) & 25e^{-2t}(\mathrm{Cos}[2t] - \mathrm{Sin}[2t])^2 & -5e^{-4t}(\mathrm{Cos}[2t] - \mathrm{Sin}[2t])(2 + 5e^{2t}\mathrm{Cos}[2t] - 5e^{2t}\mathrm{Sin}[2t]) \\ -e^{-6t}(2 + 5e^{2t}\mathrm{Cos}[2t] - 10e^{2t}\mathrm{Sin}[2t])(2 + 5e^{2t}\mathrm{Cos}[2t] - 5e^{2t}\mathrm{Sin}[2t]) & -5e^{-4t}(\mathrm{Cos}[2t] - \mathrm{Sin}[2t])(2 + 5e^{2t}\mathrm{Cos}[2t] - 5e^{2t}\mathrm{Sin}[2t]) & e^{-6t}(2 + 5e^{2t}\mathrm{Cos}[2t] - 5e^{2t}\mathrm{Sin}[2t])^2 \end{bmatrix}$$

$$P(3) = \int_0^{3} e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt = \begin{bmatrix} 18.121 & 10.97 & -11.636 \\ 10.97 & 7.4762 & -8.4761 \\ -11.636 & -8.4761 & 10.142 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 33.743, \qquad \lambda_2 = 1.9479, \qquad \lambda_3 = 0.049779$$

1.5. Программное управление

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} \left(P(t_1)\right)^{-1} x(t_1), \qquad t_1 = 3$$

$$B^T = \begin{bmatrix} -7 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$e^{A^T(3-t)} = \begin{bmatrix} e^{-3+t}\mathrm{Cos}[6-2t] + 3e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] & 2e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] & -2e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] \\ -e^{-9+3t} + e^{-3+t}\mathrm{Cos}[6-2t] - 2e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] & e^{-3+t}\mathrm{Cos}[6-2t] - e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] & e^{-9+3t} - e^{-3+t}\mathrm{Cos}[6-2t] + e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] \\ -e^{-9+3t} + e^{-3+t}\mathrm{Cos}[6-2t] + 3e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] & 2e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] & e^{-9+3t} - 2e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] \end{bmatrix}$$

$$\left(P(3)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2177 & -3.8612 & -1.8296 \\ -3.8612 & 14.788 & 7.9288 \\ -1.8296 & 7.9288 & 4.6254 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = -0.002446e^{3t} + 2.7183^t(0.734\cos(6-2t) + 0.1772\sin(6-2t))$$

1.6. Моделирование системы

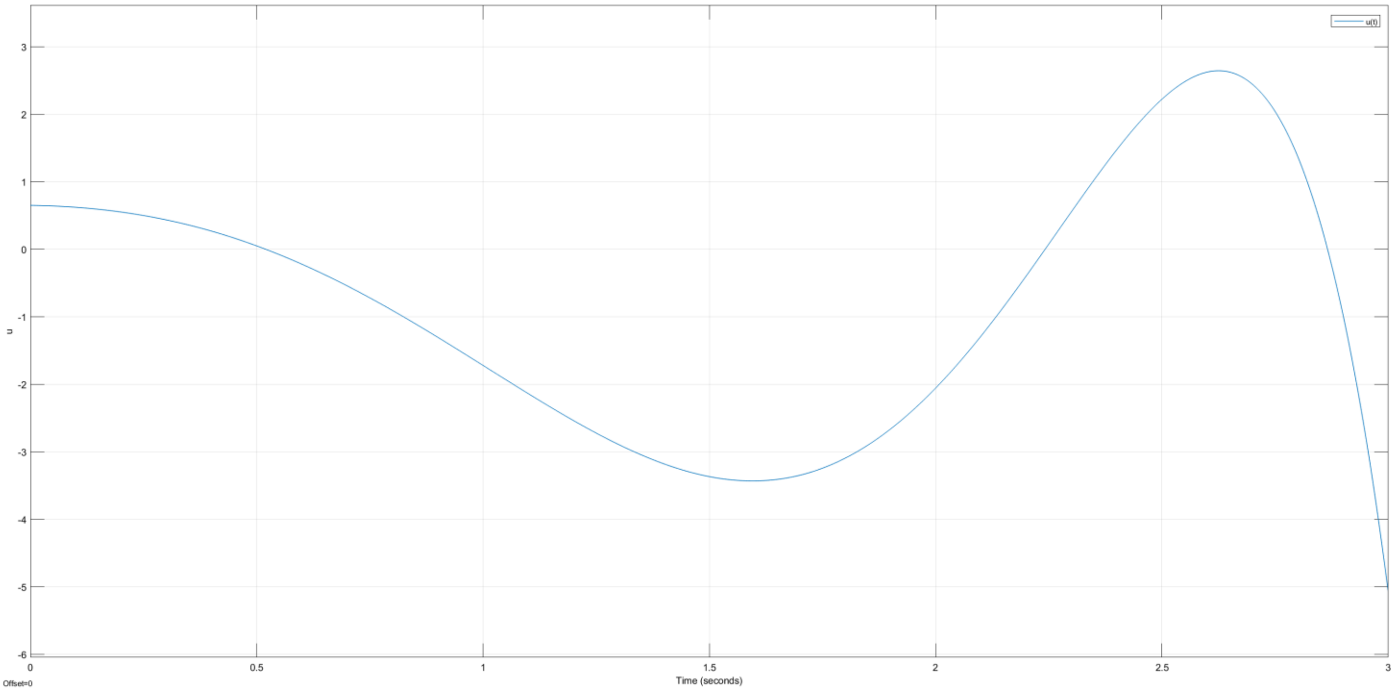

Рисунок 1: график сигнала управления u(t)

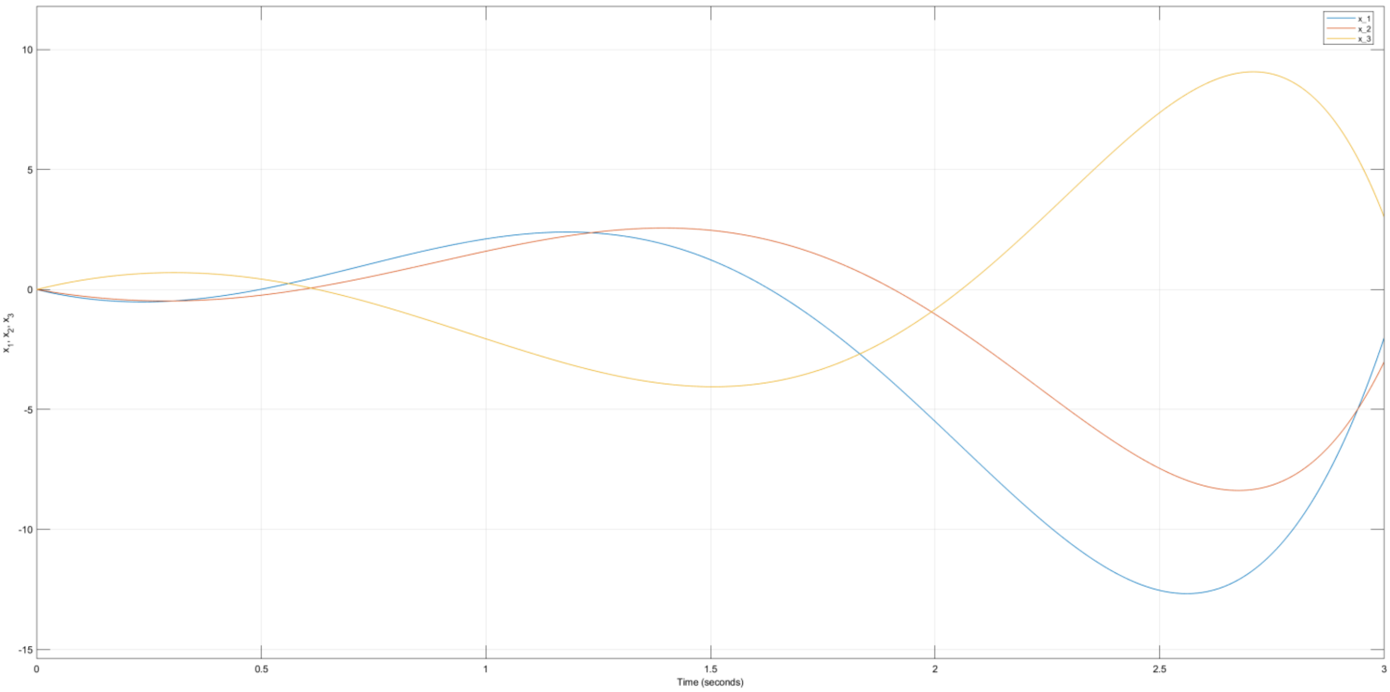

Рисунок 2: графики компонент вектора $x(t)$

Так как графики показывают, что система при вычисленном нами управлении $u(t)$ приходит в состояние $x(3) = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, то выполненные расчеты верны.

Задание 2.

2.1. Матрица управляемости

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

Матрица управляемости системы:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B\,] = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 \\ -3 & 17 & -19 \\ 3 & -17 & 19 \end{bmatrix}, \qquad rank(\mathcal{C}) = 2$$

Критерий Калмана не выполнен, а значит система не является полностью управляемой.

2.2. Управляемое подпространство системы

Управляемое подпространство:

$$Range\,\mathcal{C} = Range \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 \\ -3 & 17 & -19 \\ 3 & -17 & 19 \end{bmatrix} = Span\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 25 \\ 17 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -45 \\ -19 \\ 19 \end{bmatrix} \right) = Span\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Проверка точек на принадлежность управляемому подпространству системы:

$$x_1' = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad x_1'' = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Для того чтобы точка принадлежала $Range\ \mathcal{C}$, необходимо чтобы ранги матрицы управляемости и соответствующей ей присоединенной матрицы с данным вектором.

$$x_1'\!: \; rank \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 & -2 \\ -3 & 17 & -19 & -3 \\ 3 & -17 & 19 & 3 \end{bmatrix} = 2 = rank(\mathcal{C})$$

$$x_1''\!: \; rank \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 & -3 \\ -3 & 17 & -19 & -3 \\ 3 & -17 & 19 & 4 \end{bmatrix} = 3 \neq rank(\mathcal{C})$$

Точка x_1' принадлежит $Range\ \mathcal{C}$, а точка x_1'' нет.

Значит в качестве целевой точки x_1 возьмем $x_1' = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2.3. Управляемость собственных чисел

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = -3, \qquad \lambda_2 = -1 + 2i, \qquad \lambda_3 = -1 - 2i$$

Собственные вектора матрицы A:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -3 - i \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -3 + i \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ЖНФ матрицы A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3-i & -3+i \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1+2i & 0 \\ 0 & 0 & -1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{i}{2} & -\frac{1}{4}-\frac{i}{4} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & -\frac{1}{4}+\frac{i}{4} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

Перепишем в вещественном виде:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & \frac{3}{2} & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма системы:

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{21}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix} u$$

Управляемость собственных чисел:

$\boldsymbol{\lambda_1 = -3}$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа равны нулю, то собственное число неуправляемо.

Проверка ранговым критерием:

$$[A - \lambda_1 E \quad B] = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad rank([A - \lambda_1 E \quad B]) = 2$$

Так как ранг не совпал с порядком системы, то собственное число не управляемо.

$\boldsymbol{\lambda_2 = -1 + 2i}$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа не равны нулю, то собственное число управляемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер $2x2$.

Проверка ранговым критерием:

$$[A - \lambda_2 E \quad B] = \begin{bmatrix} 6-2i & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -2-2i & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -6-2i & 3 \end{bmatrix}, \qquad rank([A - \lambda_2 E \quad B]) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число управляемо.

$\boldsymbol{\lambda_3 = -1 - 2i}$

Так как элементы последней строки матрицы входных воздействий, соответствующей жордановой клетке данного собственного числа не равны нулю, то собственное число управляемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер $2x2$.

Проверка ранговым критерием:

$$[A-\lambda_3 E \quad B]=\begin{bmatrix}6+2i & -2 & 8 & -1\\ 4 & -2+2i & 4 & -3\\ -4 & 0 & -6+2i & 3\end{bmatrix}, \qquad rank([A-\lambda_3 E \quad B])=3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число управляемо.

2.4. Грамиан управляемости системы

Программный код:

```
(* plant parameters *)
a = {{5, -2, 8}, {4, -3, 4}, {-4, 0, -7}};
b = {{-1}, {-3}, {3}};
x1 = {{-2}, {-3}, {3}};
x2 = {{-3}, {-3}, {4}};

(* rank controllability matrix *)
controllabilityMatrix = Join[b, a.b, a.a.b, 2];
MatrixRank[controllabilityMatrix];

(* if dot in controlled subspace *)
MatrixRank[Join[controllabilityMatrix, x1, 2]];
MatrixRank[Join[controllabilityMatrix, x2, 2]];

(* eigen values and Jordan form *)
eVal = Eigenvalues[a];
eVec = Transpose[Eigenvectors[a]];
aj = {{-3, 0, 0}, {0, -1, 2}, {0, -2, -1}};
m = {{m11, m12, m13}, {m21, m22, m23}, {m31, m32, m33}};
Solve[m.aj == a.m, {m11, m12, m13, m21, m22, m23, m31, m32, m33}];
m = {{-1, -1/3, 1}, {0, 0, 2/3}, {1, 0, -2/3}};
bj = Inverse[m].b;

(* controllability of eigen values *)
MatrixRank[Join[a - eVal[[1]] * IdentityMatrix[3], b, 2]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[2]] * IdentityMatrix[3], b, 2]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[3]] * IdentityMatrix[3], b, 2]];

(* gramian and its eigen values *)
t1 = 3;
g = Integrate[MatrixExp[a t].b.Transpose[b].MatrixExp[Transpose[a t]], {t, 0, t1}];
Eigenvalues[g];

(* control *)
FullSimplify[Transpose[b].MatrixExp[Transpose[a] (3 - t)].PseudoInverse[g].x1;
```

$$t_1 = 3$$

$$P(t_1)=\int_0^{t_1} e^{At}BB^T e^{A^T t}\,dt$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-t}\mathrm{Cos}[2t]+3e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^{-3t}+e^{-t}\mathrm{Cos}[2t]-2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^{-3t}+e^{-t}\mathrm{Cos}[2t]+3e^{-t}\mathrm{Sin}[2t]\\ 2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & e^{-t}\mathrm{Cos}[2t]-e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & 2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t]\\ -2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & e^{-3t}-e^{-t}\mathrm{Cos}[2t]+e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & e^{-3t}-2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t]\end{bmatrix}$$

$$e^{A^T t}=\begin{bmatrix} e^{-t}\mathrm{Cos}[2t]+3e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & 2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & -2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t]\\ -e^{-3t}+e^{-t}\mathrm{Cos}[2t]-2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & e^{-t}\mathrm{Cos}[2t]-e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & e^{-3t}-e^{-t}\mathrm{Cos}[2t]+e^{-t}\mathrm{Sin}[2t]\\ -e^{-3t}+e^{-t}\mathrm{Cos}[2t]+3e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & 2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t] & e^{-3t}-2e^{-t}\mathrm{Sin}[2t]\end{bmatrix}$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 9 & -9 \\ -3 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} BB^T e^{A^T t} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2t}(\mathrm{Cos}[2t] - 12\mathrm{Sin}[2t])^2 & -\frac{1}{2} e^{-2t}(-87 + 81\mathrm{Cos}[4t] + 43\mathrm{Sin}[4t]) & \frac{1}{2} e^{-2t}(-87 + 81\mathrm{Cos}[4t] + 43\mathrm{Sin}[4t]) \\ -\frac{1}{2} e^{-2t}(-87 + 81\mathrm{Cos}[4t] + 43\mathrm{Sin}[4t]) & e^{-2t}(3\mathrm{Cos}[2t] - 7\mathrm{Sin}[2t])^2 & -e^{-2t}(3\mathrm{Cos}[2t] - 7\mathrm{Sin}[2t])^2 \\ \frac{1}{2} e^{-2t}(-87 + 81\mathrm{Cos}[4t] + 43\mathrm{Sin}[4t]) & -e^{-2t}(3\mathrm{Cos}[2t] - 7\mathrm{Sin}[2t])^2 & e^{-2t}(3\mathrm{Cos}[2t] - 7\mathrm{Sin}[2t])^2 \end{bmatrix}$$

$$P(3) = \int_0^3 e^{At} BB^T e^{A^T t}\, dt = \begin{bmatrix} 26.647 & 13.371 & -13.371 \\ 13.371 & 8.2796 & -8.2796 \\ -13.371 & -8.2796 & 8.2796 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 41.175, \qquad \lambda_2 = 2.0320, \qquad \lambda_3 = -2.2440 \cdot 10^{-16} \cong 0$$

2.5. Программное управление

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} \left(P(t_1)\right)^{-1} x(t_1), \qquad t_1 = 3$$

$$B^T = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e^{A^T(3-t)} = \begin{bmatrix} e^{-3+t}\mathrm{Cos}[6-2t] + 3e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] & 2e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] & -2e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] \\ -e^{-9+3t} + e^{-3+t}\mathrm{Cos}[6-2t] - 2e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] & e^{-3+t}\mathrm{Cos}[6-2t] - e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] & e^{-9+3t} - e^{-3+t}\mathrm{Cos}[6-2t] + e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] \\ -e^{-9+3t} + e^{-3+t}\mathrm{Cos}[6-2t] + 3e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] & 2e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] & e^{-9+3t} - 2e^{-3+t}\mathrm{Sin}[6-2t] \end{bmatrix}$$

Так как Грамиан является вырожденным, вместо обратной матрицы найдем псевдообратную:

$$\left(P(3)\right)^+ = \begin{bmatrix} 0.19792 & -0.15982 & 0.15982 \\ -0.15982 & 0.15925 & -0.15925 \\ 0.15982 & -0.15925 & 0.15925 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = 2.7183^t (0.16191 \cos(6 - 2t) - 0.10679 \sin(6 - 2t))$$

2.6. Моделирование системы

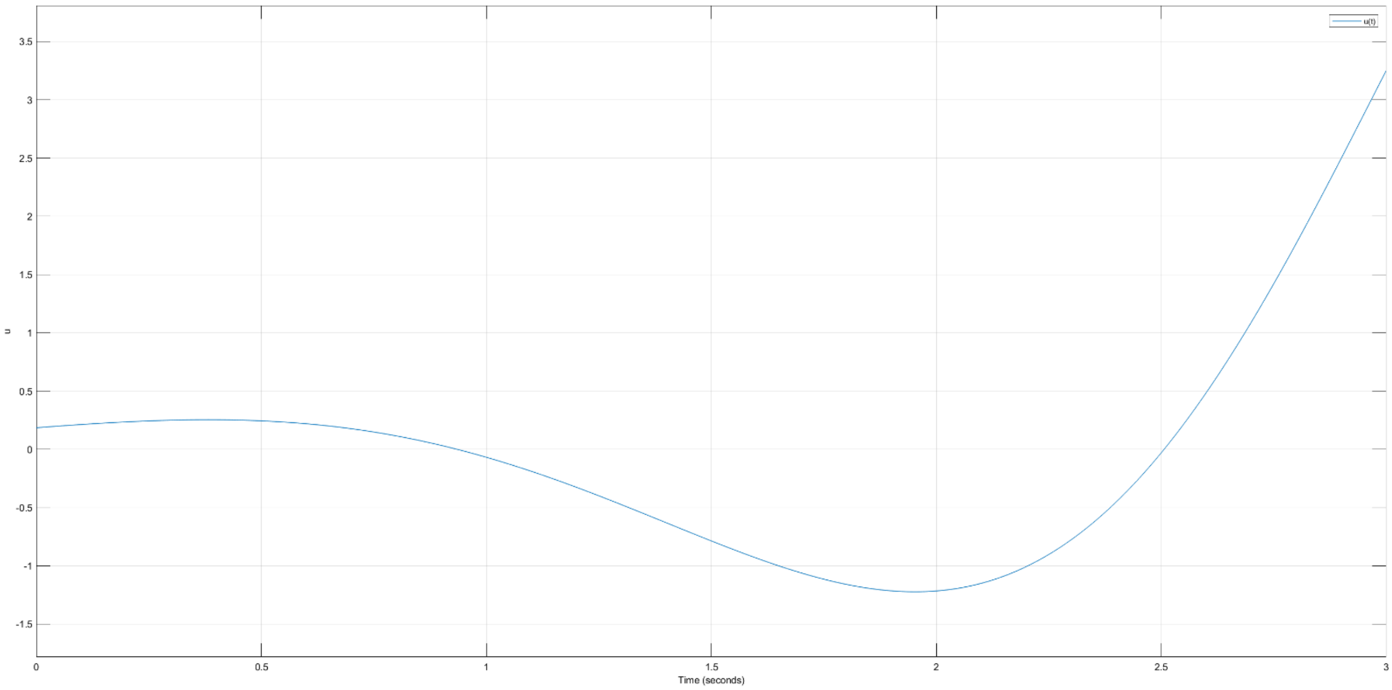

Рисунок 3: график сигнала управления u(t)

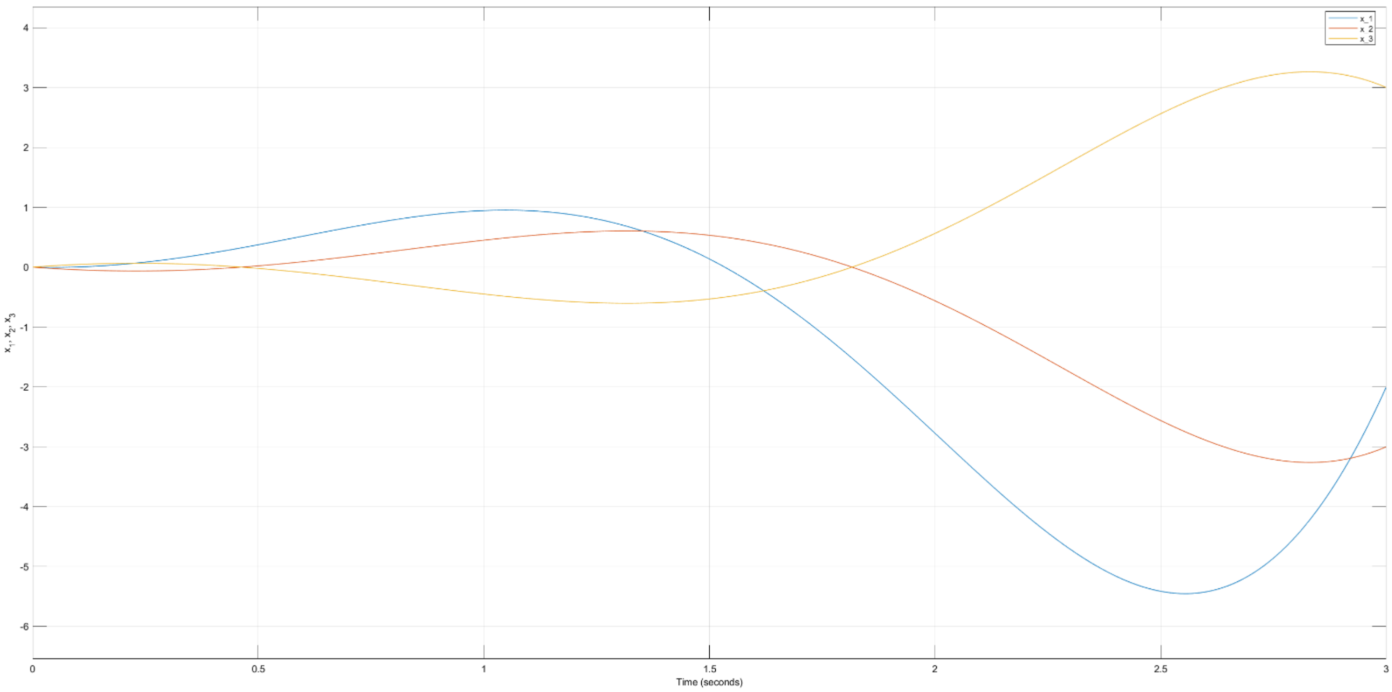

Рисунок 4: графики компонент вектора $x(t)$

Так как графики показывают, что система при вычисленном нами управлении $u(t)$ приходит в состояние $x(3) = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, то выполненные расчеты верны.

Задание 3.

3.1. Матрица наблюдаемости

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{bmatrix} x, \qquad y = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} x$$

Матрица наблюдаемости системы:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 14 & -18 & -2 \end{bmatrix}, \qquad rank(\mathcal{O}) = 3$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы, то по критерию Калмана система полностью наблюдаема.

3.2. Наблюдаемость собственных чисел

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = -4 + 2i, \qquad \lambda_2 = -4 - 2i, \qquad \lambda_3 = 1$$

Собственные вектора матрицы A:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 - i \\ -1 - i \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -3 + i \\ -1 + i \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ЖНФ матрицы A:

$$A = \begin{bmatrix} -3 - i & -3 + i & -1 \\ -1 - i & -1 + i & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 + 2i & 0 & 0 \\ 0 & -4 - 2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{i}{4} & \frac{1}{4} + \frac{i}{4} & \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{4} - \frac{i}{4} & \frac{1}{4} - \frac{i}{4} & -\frac{i}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Перепишем в вещественном виде:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма системы:

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x', \qquad y' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} x'$$

Наблюдаемость собственных чисел:

$\boldsymbol{\lambda_1 = -4 + 2i}$

Так как элементы первого столбца матрицы выходов, соответствующего жордановой клетке собственного числа не равны нулю, то собственное число наблюдаемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер $2x2$.

Проверка ранговым критерием:

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_1 E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-2i & 9 & 1 \\ -5 & 7-2i & -3 \\ 3 & -7 & 1-2i \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad rank\left(\begin{bmatrix} A-\lambda_1 E \\ C \end{bmatrix}\right) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число наблюдаемо.

$\boldsymbol{\lambda_2 = -4 - 2i}$

Так как элементы первого столбца матрицы выходов, соответствующего жордановой клетке собственного числа не равны нулю, то собственное число наблюдаемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер $2x2$.

Проверка ранговым критерием:

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_2 E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+2i & 9 & 1 \\ -5 & 7+2i & -3 \\ 3 & -7 & 1+2i \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad rank\left(\begin{bmatrix} A-\lambda_2 E \\ C \end{bmatrix}\right) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число наблюдаемо.

$\boldsymbol{\lambda_3 = 1}$

Так как элементы первого столбца матрицы выходов, соответствующего жордановой клетке собственного числа не равны нулю, то собственное число наблюдаемо.

Проверка ранговым критерием:

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_3 E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 9 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad rank\left(\begin{bmatrix} A-\lambda_3 E \\ C \end{bmatrix}\right) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число наблюдаемо.

3.3. Грамиан наблюдаемости системы

Программный код:

```
(* plant parameters *)
a = {{-7, 9, 1}, {-5, 3, -3}, {3, -7, -3}};
c = {{3, -2, 3}};

(* rank observability matrix *)
o = Join[c, c.a, c.a.a];
MatrixRank[o];

(* eigen values and Jordan form *)
eVal = Eigenvalues[a];
eVec = Transpose[Eigenvectors[a]];
aj = {{-4, 2, 0}, {-2, -4, 0}, {1, -1, 1}};
m = {{m11, m12, m13}, {m21, m22, m23}, {m31, m32, m33}};
Solve[m.aj == a.m, {m11, m12, m13, m21, m22, m23, m31, m32, m33}];
m = {{-2, 1, -1}, {-1, 0, -1}, {1, -1, 1}};
cj = c.m;

(* observability of eigen values *)
MatrixRank[Join[a - eVal[[1]] * IdentityMatrix[3], c]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[2]] * IdentityMatrix[3], c]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[3]] * IdentityMatrix[3], c]];

(* gramian and its eigen values *)
t1 = 3;
g = Integrate[MatrixExp[Transpose[a] * t].Transpose[c].c.MatrixExp[a * t], {t, 0, t1}];
Eigenvalues[g];

(* initial condition *)
y = -3 * Exp[-4 * t] * Cos[2 * t] + 2 * Exp[-4 * t] * Sin[2 * t];
x0 = Inverse[g].Integrate[MatrixExp[Transpose[a] * t].Transpose[c] * y, {t, 0, t1}]
```

$$t_1 = 3$$

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At}\, dt$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & e^t - e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + 2e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + 3e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] \\ -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] & e^t + e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] \\ e^t - e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] - e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] - e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & e^t - 2e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] \end{bmatrix}$$

$$e^{A^T t} = \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] & e^t - e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] - e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] \\ e^t - e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + 2e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & e^t + e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] - e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] \\ -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + 3e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & e^t - 2e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] \end{bmatrix}$$

$$C^T C = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 9 \\ -6 & 4 & -6 \\ 9 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$e^{A^T t} C^T C e^{At} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-8t}(2e^{5t} + \mathrm{Cos}[2t])^2 & e^{-8t}(2e^{5t} + \mathrm{Cos}[2t])(-2e^{5t} + \mathrm{Sin}[2t]) & e^{-8t}(2e^{5t} + \mathrm{Cos}[2t])(2e^{5t} + \mathrm{Cos}[2t] + \mathrm{Sin}[2t]) \\ e^{-8t}(2e^{5t} + \mathrm{Cos}[2t])(-2e^{5t} + \mathrm{Sin}[2t]) & e^{-8t}(-2e^{5t} + \mathrm{Sin}[2t])^2 & e^{-8t}(-2e^{5t} + \mathrm{Sin}[2t])(2e^{5t} + \mathrm{Cos}[2t] + \mathrm{Sin}[2t]) \\ e^{-8t}(2e^{5t} + \mathrm{Cos}[2t])(2e^{5t} + \mathrm{Cos}[2t] + \mathrm{Sin}[2t]) & e^{-8t}(-2e^{5t} + \mathrm{Sin}[2t])(2e^{5t} + \mathrm{Cos}[2t] + \mathrm{Sin}[2t]) & e^{-8t}(2e^{5t} + \mathrm{Cos}[2t] + \mathrm{Sin}[2t])^2 \end{bmatrix}$$

$$Q(3) = \int_0^3 e^{A^T t} C^T C e^{At}\, dt = \begin{bmatrix} 805.893 & -804.986 & 806.226 \\ -804.986 & 804.255 & -805.282 \\ 806.226 & -805.282 & 806.571 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 2416.57, \qquad \lambda_2 = 0.147320, \qquad \lambda_3 = 0.00174878$$

3.4. Поиск вектора начальных условий системы

Выход системы:

$$y(t) = -3e^{-4t}\cos(2t) + 2e^{-4t}\sin(2t), \qquad t \in [0, t_1], \qquad t_1 = 3$$

Формула начального условия:

$$x(0) = \left(Q(t_1)\right)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt$$

$$\left(Q(t_1)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 337.405 & 64.0614 & -273.301 \\ 64.0614 & 16.0026 & -48.0569 \\ -273.301 & -48.0569 & 225.206 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt = \begin{bmatrix} -1.05657 \\ 0.719076 \\ -1.10657 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Так как система является полностью наблюдаемой, то различным начальным условиям соответствуют различные выходы, а значит не существует других начальных условий, кроме тех, которые мы нашли выше.

3.5. Моделирование системы

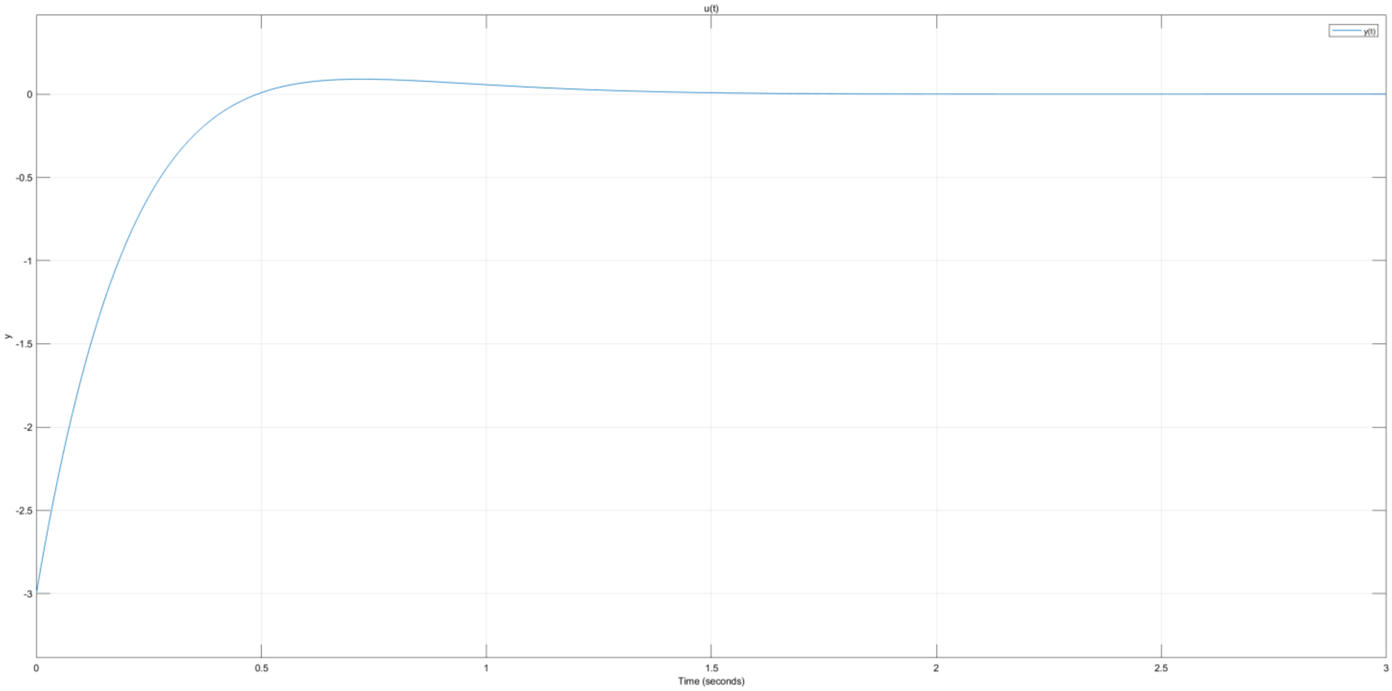

Рисунок 5: график сигнала выхода $y(t)$

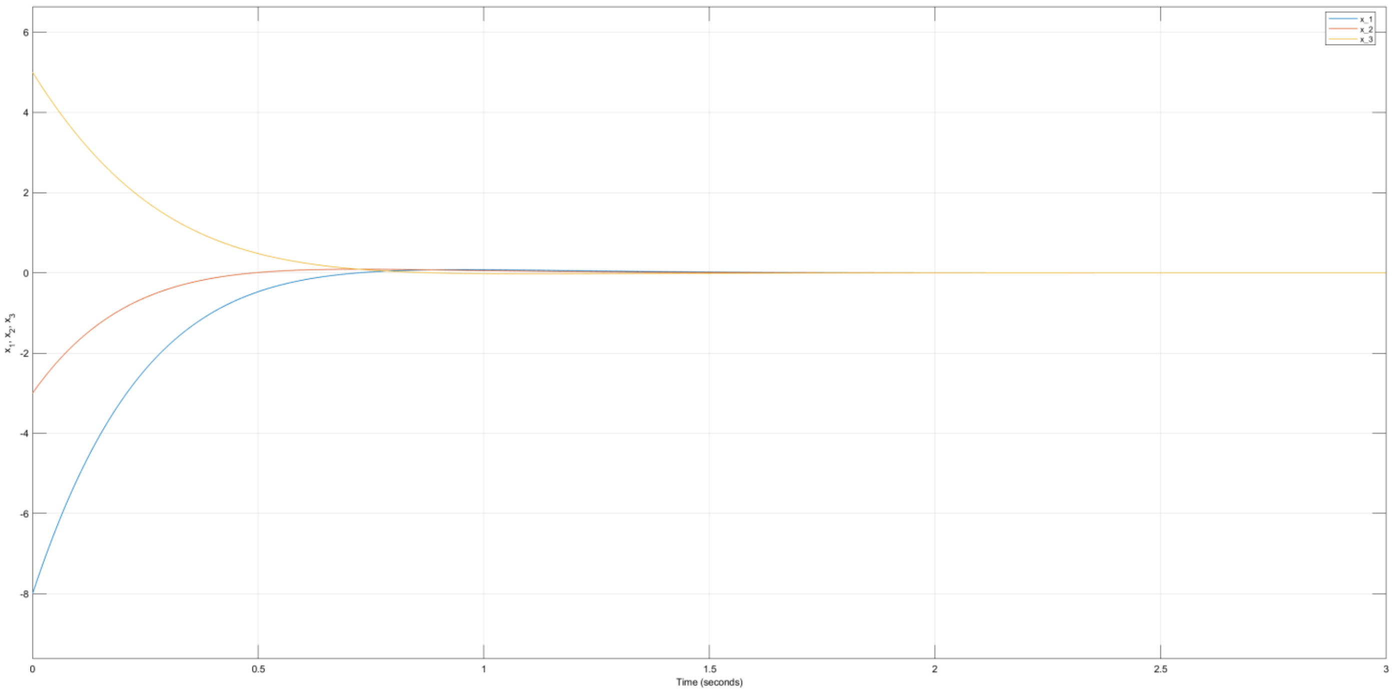

Рисунок 6: графики компонент вектора $x(t)$

Задание 4.

4.1. Матрица наблюдаемости

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{bmatrix} x, \qquad y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} x$$

Матрица наблюдаемости системы:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -12 & 6 & -6 \\ 36 & -48 & -12 \end{bmatrix}, \qquad rank(\mathcal{O}) = 2$$

Так как ранг матрицы управляемости не равен порядку системы, то по критерию Калмана система не полностью наблюдаема.

4.2. Наблюдаемость собственных чисел

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = -4 + 2i, \qquad \lambda_2 = -4 - 2i, \qquad \lambda_3 = 1$$

Собственные вектора матрицы A:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 - i \\ -1 - i \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -3 + i \\ -1 + i \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ЖНФ матрицы A:

$$A = \begin{bmatrix} -3 - i & -3 + i & -1 \\ -1 - i & -1 + i & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 + 2i & 0 & 0 \\ 0 & -4 - 2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{i}{4} & \frac{1}{4} + \frac{i}{4} & \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{4} - \frac{i}{4} & \frac{1}{4} - \frac{i}{4} & -\frac{i}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Перепишем в вещественном виде:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма системы:

$$\dot{x'} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x', \qquad y' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} x'$$

Наблюдаемость собственных чисел:

$\boldsymbol{\lambda_1 = -4 + 2i}$

Так как элементы первого столбца матрицы выходов, соответствующего жордановой клетке собственного числа не равны нулю, то собственное число наблюдаемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер $2x2$.

Проверка ранговым критерием:

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_1 E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-2i & 9 & 1 \\ -5 & 7-2i & -3 \\ 3 & -7 & 1-2i \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad rank(\begin{bmatrix} A-\lambda_1 E \\ C \end{bmatrix}) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число наблюдаемо.

$\boldsymbol{\lambda_2 = -4 - 2i}$

Так как элементы первого столбца матрицы выходов, соответствующего жордановой клетке собственного числа не равны нулю, то собственное число наблюдаемо. Жорданова клетка в данном случае имеет размер $2x2$.

Проверка ранговым критерием:

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_2 E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+2i & 9 & 1 \\ -5 & 7+2i & -3 \\ 3 & -7 & 1+2i \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad rank(\begin{bmatrix} A-\lambda_2 E \\ C \end{bmatrix}) = 3$$

Так как ранг совпал с порядком системы, то собственное число наблюдаемо.

$\boldsymbol{\lambda_3 = 1}$

Так как элементы первого столбца матрицы выходов, соответствующего жордановой клетке собственного числа равны нулю, то собственное число не наблюдаемо.

Проверка ранговым критерием:

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_3 E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 9 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad rank(\begin{bmatrix} A-\lambda_3 E \\ C \end{bmatrix}) = 2$$

Так как ранг не совпал с порядком системы, то собственное число не наблюдаемо.

4.3. Грамиан наблюдаемости системы

Программный код:

```
(* plant parameters *)
a = {{-7, 9, 1}, {-5, 3, -3}, {3, -7, -3}};
c = {{3, 0, 3}};

(* rank observability matrix *)
o = Join[c, c.a, c.a.a];
MatrixRank[o];

(* eigen values and Jordan form *)
eVal = Eigenvalues[a];
eVec = Transpose[Eigenvectors[a]];
aj = {{-4, 2, 0}, {-2, -4, 0}, {1, -1, 1}};
m = {{m11, m12, m13}, {m21, m22, m23}, {m31, m32, m33}};
Solve[m.aj == a.m, {m11, m12, m13, m21, m22, m23, m31, m32, m33}];
m = {{-2, 1, -1}, {-1, 0, -1}, {1, -1, 1}};
cj = c.m;

(* observability of eigen values *)
MatrixRank[Join[a - eVal[[1]] * IdentityMatrix[3], c]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[2]] * IdentityMatrix[3], c]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[3]] * IdentityMatrix[3], c]];

(* gramian and its eigen values *)
t1 = 3;
g = Integrate[MatrixExp[Transpose[a] * t].Transpose[c].c.MatrixExp[a * t], {t, 0, t1}] ;
Eigenvalues[g];

(* initial condition *)
y = -3 * Exp[-4 * t] * Cos[2 * t] + 2 * Exp[-4 * t] * Sin[2 * t];

N[Integrate[MatrixExp[Transpose[a] * t].Transpose[c] * y, {t, 0, 3}], 6] // MatrixForm;
x0 = PseudoInverse[g].Integrate[MatrixExp[Transpose[a] * t].Transpose[c] * y, {t, 0, t1}];
k = {{k1}, {k2}, {k3}};
Solve[o.{{k1}, {k2}, {k3}} == 0, {k1, k2, k3}];
```

$$t_1 = 3$$

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At}\, dt$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & e^t - e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + 2e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + 3e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] \\ -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] & e^t + e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] \\ e^t - e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] - e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] - e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & e^t - 2e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] \end{bmatrix}$$

$$e^{A^T t} = \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] & e^t - e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] - e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] \\ e^t - e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + 2e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & e^t + e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] - e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] \\ -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + 3e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & -e^t + e^{-4t}\mathrm{Cos}[2t] + e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] & e^t - 2e^{-4t}\mathrm{Sin}[2t] \end{bmatrix}$$

$$C^T C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$e^{A^T t} C^T C e^{At} = \begin{bmatrix} 9e^{-8t}\mathrm{Cos}[2t]^2 & \frac{9}{2}e^{-8t}\mathrm{Sin}[4t] & 9e^{-8t}\mathrm{Cos}[2t](\mathrm{Cos}[2t] + \mathrm{Sin}[2t]) \\ \frac{9}{2}e^{-8t}\mathrm{Sin}[4t] & 9e^{-8t}\mathrm{Sin}[2t]^2 & 9e^{-8t}\mathrm{Sin}[2t](\mathrm{Cos}[2t] + \mathrm{Sin}[2t]) \\ 9e^{-8t}\mathrm{Cos}[2t](\mathrm{Cos}[2t] + \mathrm{Sin}[2t]) & 9e^{-8t}\mathrm{Sin}[2t](\mathrm{Cos}[2t] + \mathrm{Sin}[2t]) & 9e^{-8t}(\mathrm{Cos}[2t] + \mathrm{Sin}[2t])^2 \end{bmatrix}$$

$$Q(3) = \int_0^3 e^{A^T t} C^T C e^{At}\, dt = \begin{bmatrix} 1.0125 & 0.225 & 1.2375 \\ 0.225 & 0.1125 & 0.3375 \\ 1.2375 & 0.3375 & 1.575 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 2.6277, \qquad \lambda_2 = 0.072246, \qquad \lambda_3 = 0$$

4.4. Поиск вектора начальных условий системы

Выход системы:

$$y(t) = -3e^{-4t}\cos(2t) + 2e^{-4t}\sin(2t), \qquad t \in [0, t_1], \qquad t_1 = 3$$

Формула начального условия:

$$x(0) = \left(Q(t_1)\right)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt$$

Так как Грамиан наблюдаемости является вырожденной матрицей, будет использовать псевдообратную матрицы, вместо обратной.

$$\left(Q(t_1)\right)^{+} = \begin{bmatrix} 4.1481 & -5.9259 & -1.7777 \\ -5.9259 & 8.8889 & 2.9629 \\ -1.7777 & 2.9629 & 1.1851 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt = \begin{bmatrix} -0.8625 \\ -0.15 \\ -1.0125 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} -0.889 \\ 0.778 \\ -0.111 \end{bmatrix}$$

Для полностью наблюдаемой системы уравнение $\mathcal{O}x_0 = 0$ верно только при $x_0 = \overline{0}$.

Найдем $\mathcal{O}x(0)$:

$$\mathcal{O}x(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 16.002 \\ -68.016 \end{bmatrix}$$

Так как наша система не является наблюдаемой, то будет хотя бы один ненулевой вектор x_0, который удовлетворяет $\mathcal{O}x_0 = 0$.

Найдем этот x_0:

$$\mathcal{O}x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \\ -\xi \end{bmatrix}$$

Для того чтобы сигнал $y(t)$ мог быть порожден векторами $\{x_n\}$ начальных условий, необходимо:

$$\forall x \in \{x_n\}: \mathcal{O}x = k$$

Вектор k можем найти:

$$\mathcal{O}x(0) = k = \begin{bmatrix} -3 \\ 16.002 \\ -68.016 \end{bmatrix}$$

Другие начальные условия можем исходя из того, что:

$$\forall x \in \{x_n\}: \mathcal{O}x = \mathcal{O}(x(0) - \mu x_0) = \mathcal{O}x' + \mathcal{O}x_0 = \mathcal{O}x' + 0 = k, \qquad \text{где } \mu = const$$

Например, получим начальные условия следующим образом:

$$x_1(0) = x(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.111 \\ 1.778 \\ -1.111 \end{bmatrix}$$

$$x_2(0) = x(0) + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.111 \\ 2.778 \\ -2.111 \end{bmatrix}$$

$$x_3(0) = x(0) - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.889 \\ -0.222 \\ 0.889 \end{bmatrix}$$

4.5. Моделирование системы

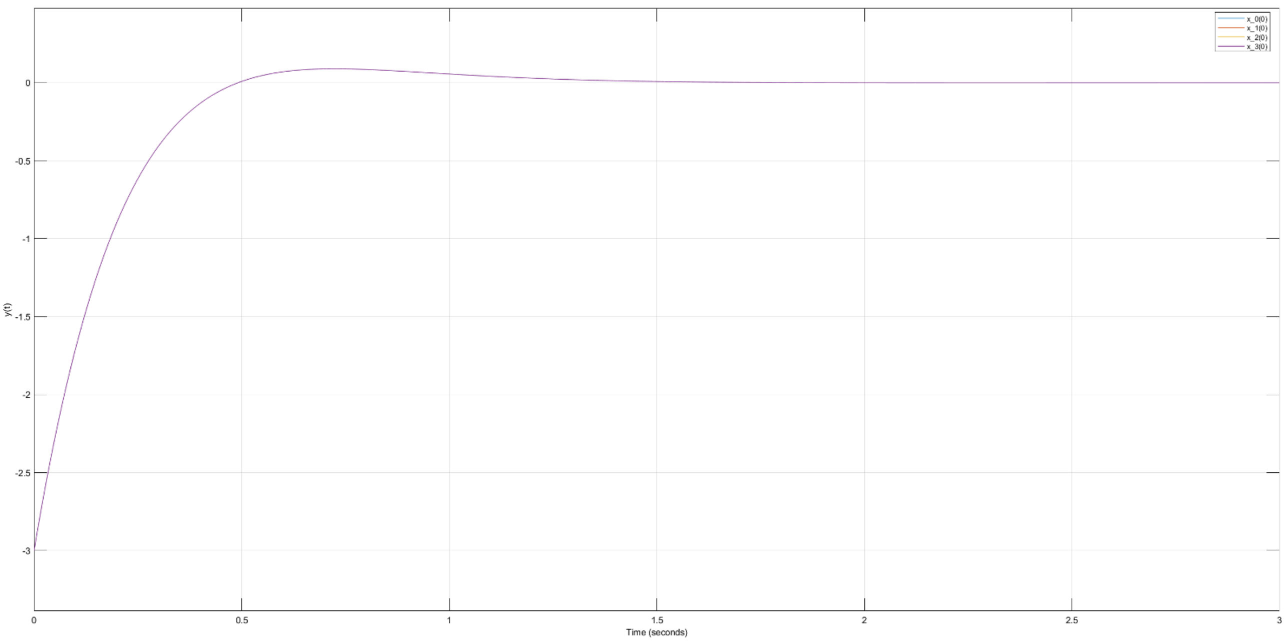

Рисунок 7: графики сигнала выхода $y(t)$ при найденных различных начальных условиях

Вычисленные начальные условия действительно порождают один и тот же выходной сигнал $y(t)$, так как на рисунке выше, все смоделированные графики совпали.

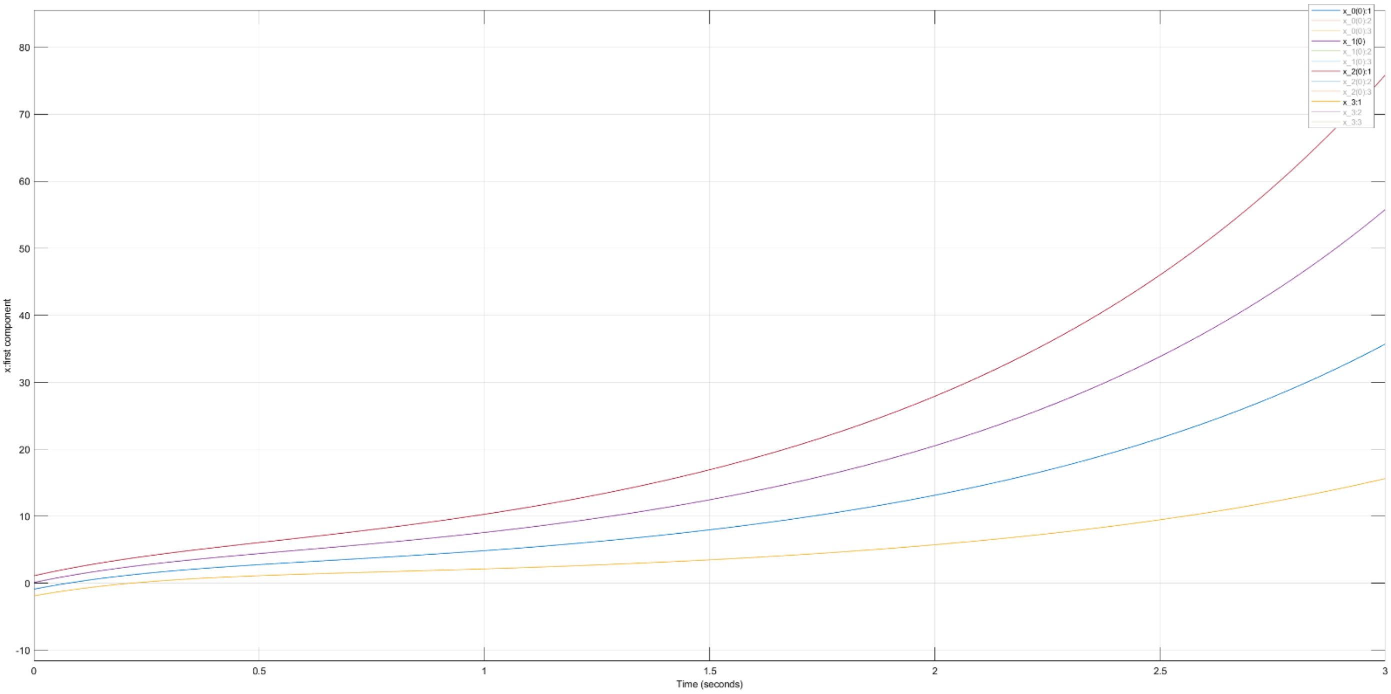

Рисунок 6: графики первых компонент векторов $x(t)$

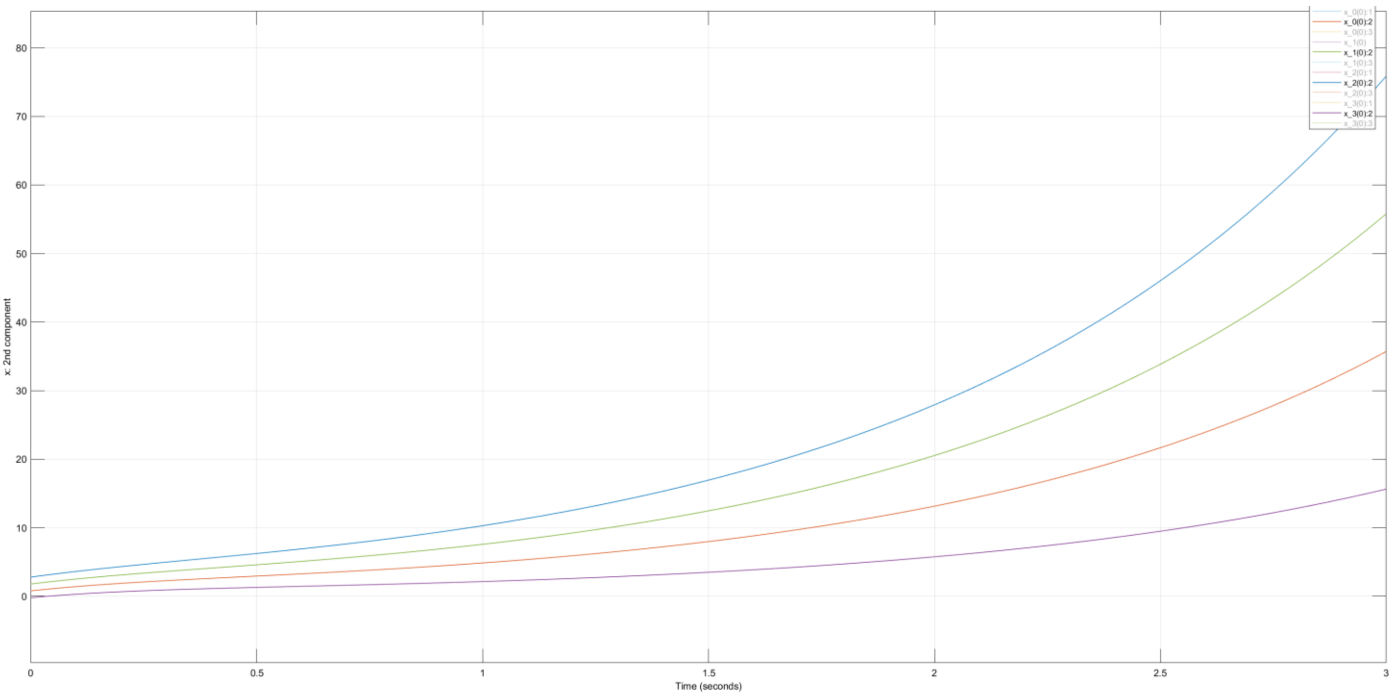

Рисунок 7: графики вторых компонент векторов $x(t)$

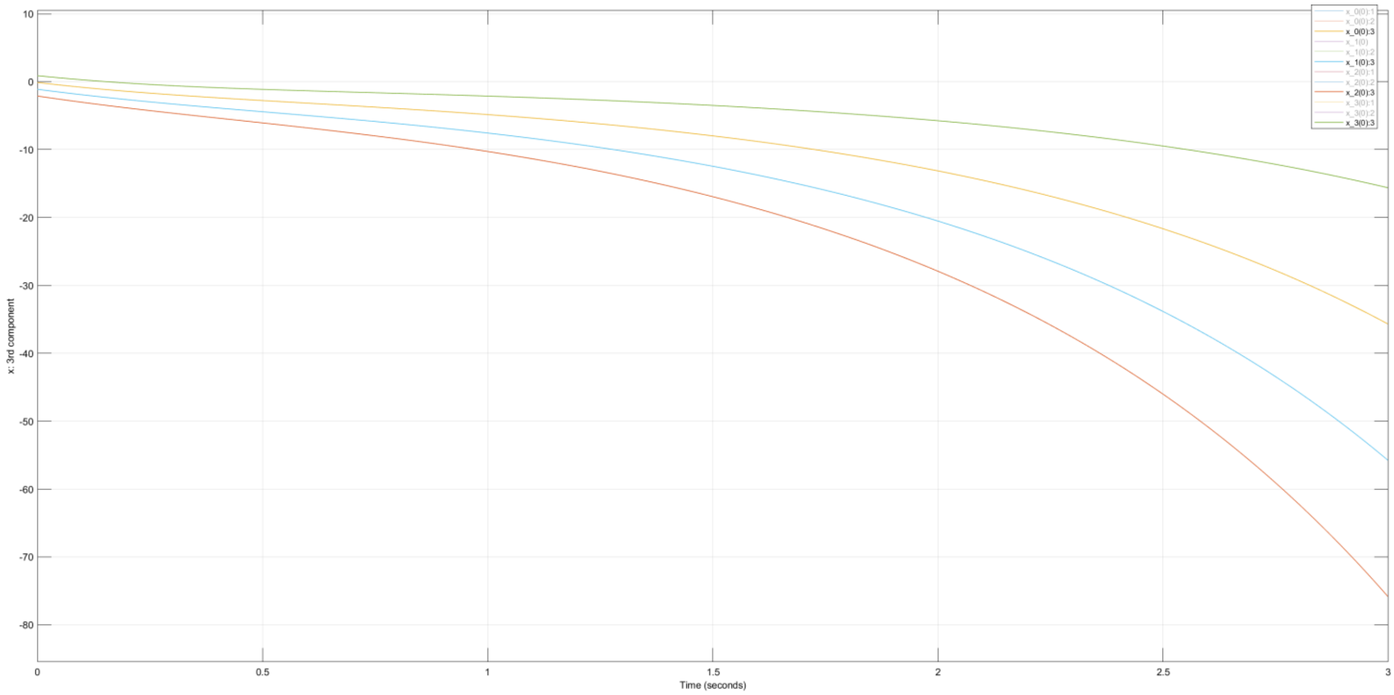

Рисунок 8: графики третьих компонент векторов $x(t)$

Выводы

В данной лабораторной работе были исследованы системы на наблюдаемость и управляемость. Определялась управляемость и наблюдаемость собственных чисел матрицы двумя способами: на основе жордановой формы и с помощью матрицы Хаутуса. Были построены подпространства управляемости и подпространство ненаблюдаемости. Вычислены Грамианы систем, с помощью них были найдены функции управления и начальные условия системы. В конце каждого задания проведено моделирование исследуемой системы.