Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №12
«Слежение и компенсация»
по дисциплине «Теория автоматического управления»

Выполнил: студент гр. R3238,
Кирбаба Д.Д.
Преподаватель: Перегудин А.А.,
ассистент фак. СУиР

Санкт-Петербург, 2022

Цель работы

Исследование и синтез следящих/компенсирующих регуляторов/наблюдателей с сигналами, генерируемыми с помощью матричной экспоненты.

Проверить выполнение принципа внутренней модели.

Выполнение работы

Задание 1. Компенсирующий регулятор по состоянию

Объект управления:

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Генератор внешнего возмущения:

$$\dot{w} = A_2 w, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Целевая переменная (регулируемый выход):

$$z = C_2 x, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы A_1:

$$\sigma(A_1) = \{4 \pm 2i, -2\}$$

Собственные числа матрицы A_2:

$$\sigma(A_2) = \{\pm 3i, \pm i\}$$

Пара (A_1, B_1) – управляема, так как ранг матрицы управляемости равен 3.

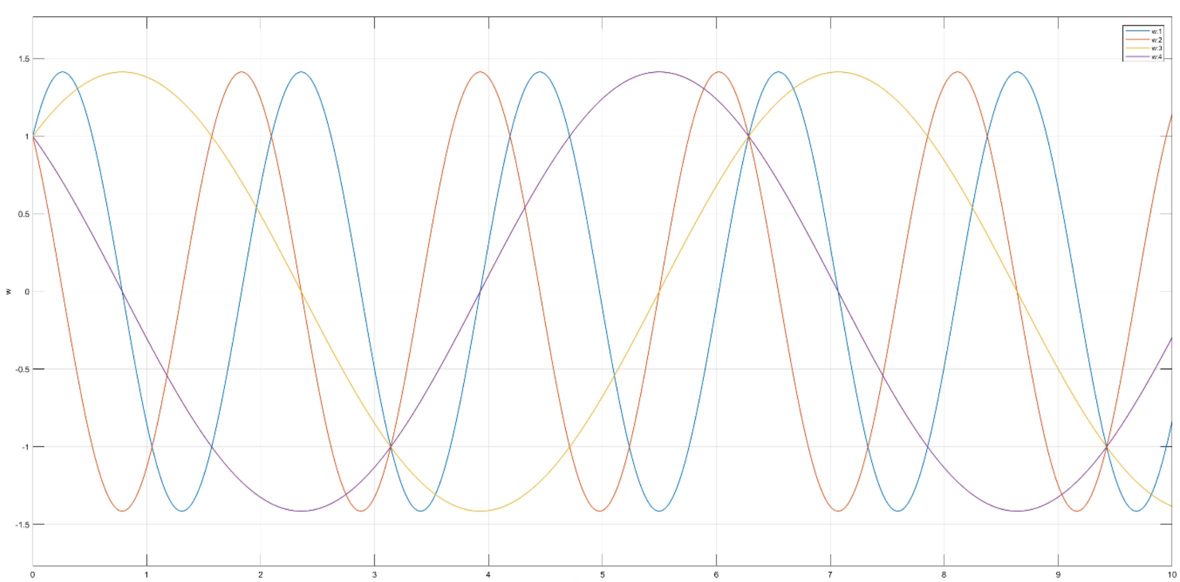

Рисунок 1: Задающее воздействие, сформированное матрицей A_2

Поиск регулятора вида $u = K_1 x + K_2 w$

Матрицу K_1 найдем модальным способом:

```
% K1 calculation
G = [-1 0 0; 0 -2 1; 0 -1 -2];
Y = [1 1 1];
V = [Y; Y*G; Y*G*G];
if rank(V) == 3
    cvx_begin sdp
        variable P(3,3)
        A1*P - P*G == B1*Y;
    cvx_end
    K1 = -Y*inv(P);
end
```

Целевые значения спектра матрицы $A_1 + B_1 K_1$ равны $\{-1, -2 \pm i\}$

Вычисление K_2:

```
% K2 calculation
cvx_begin sdp
    variable P2(3,4)
    variable Y2(1,4)
    P2*A2 - A1*P2 == B1*Y2 + B2;
    C2*P2 + D2 == 0;
cvx_end
K2 = Y2 - K1*P2;
```

Так как регулятор компенсирующий, то $B_2 \neq 0, D_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$.

При выполнении расчетов получились следующие матрицы:

$$K_1 = [0.025 \quad -12.225 \quad 1.2], \qquad K_2 = [0.1007 \quad 0.2435 \quad -1.7514 \quad 1.4084]$$

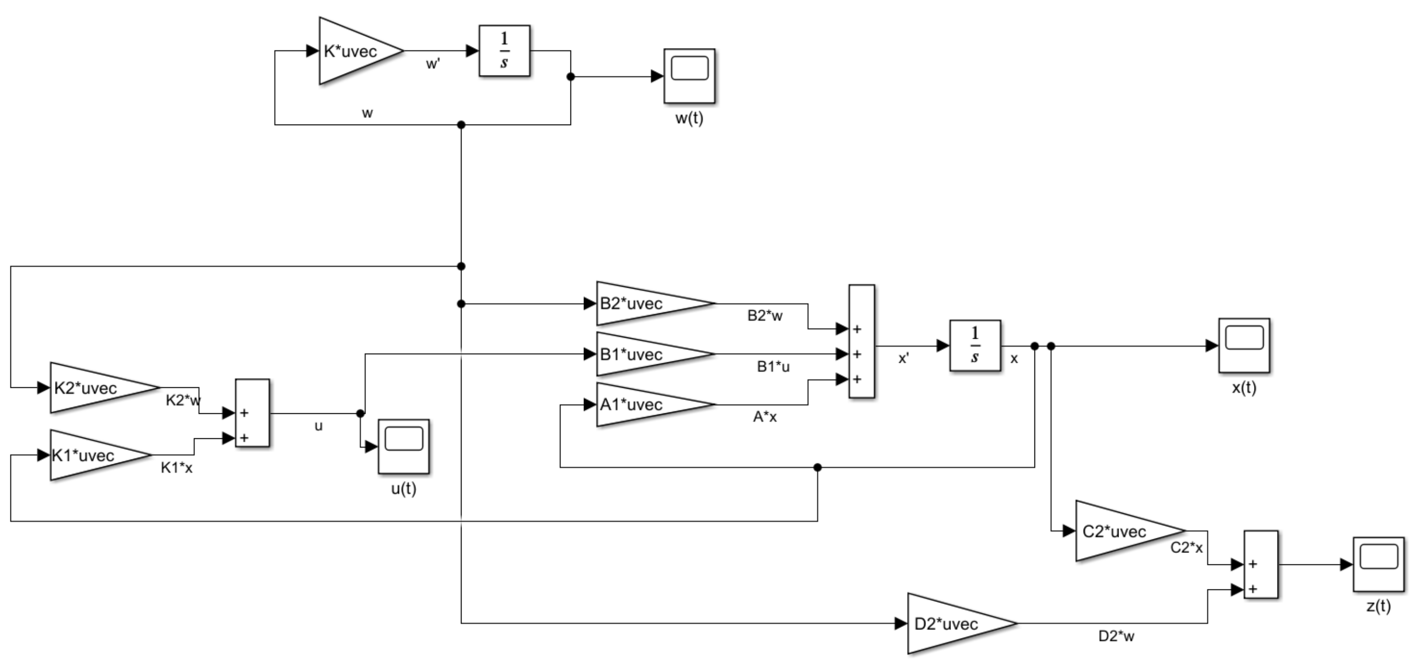

Рисунок 2: схема моделирования системы

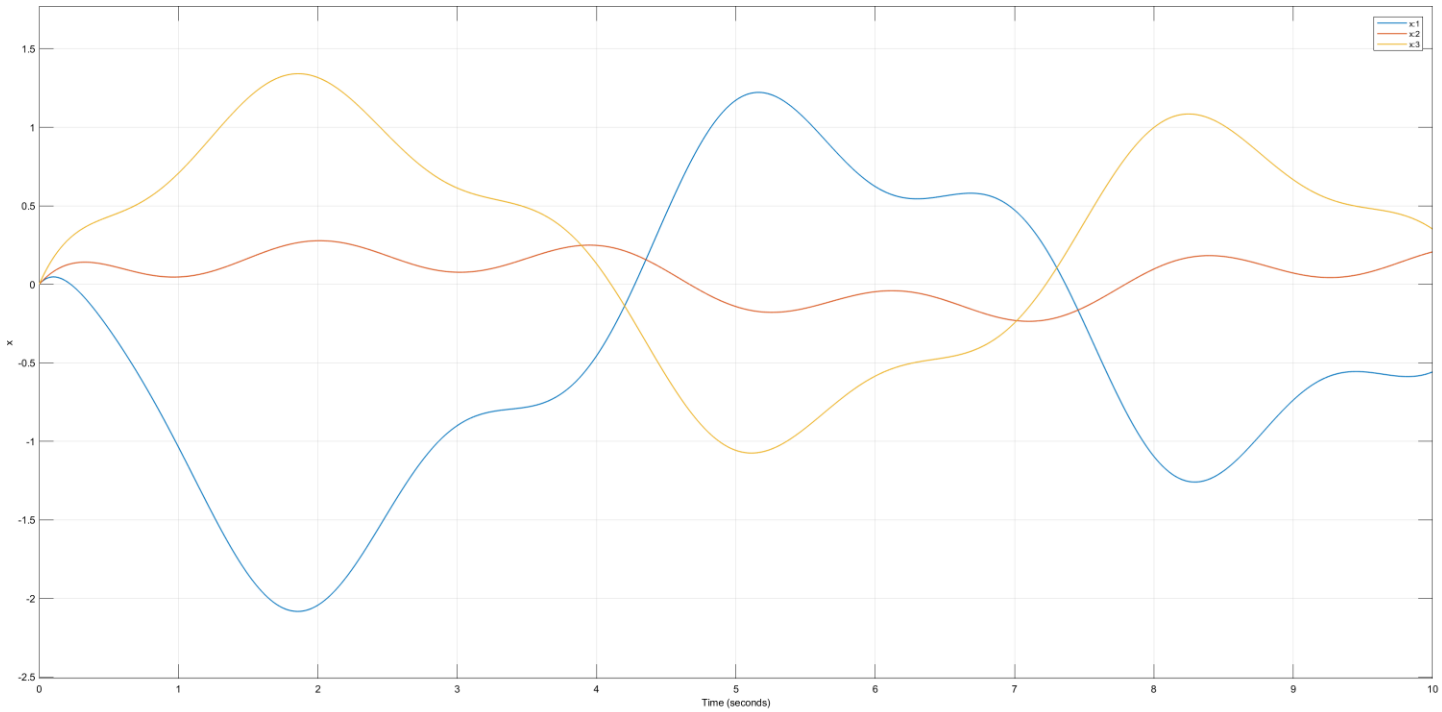

Рисунок 3: $x(t)$

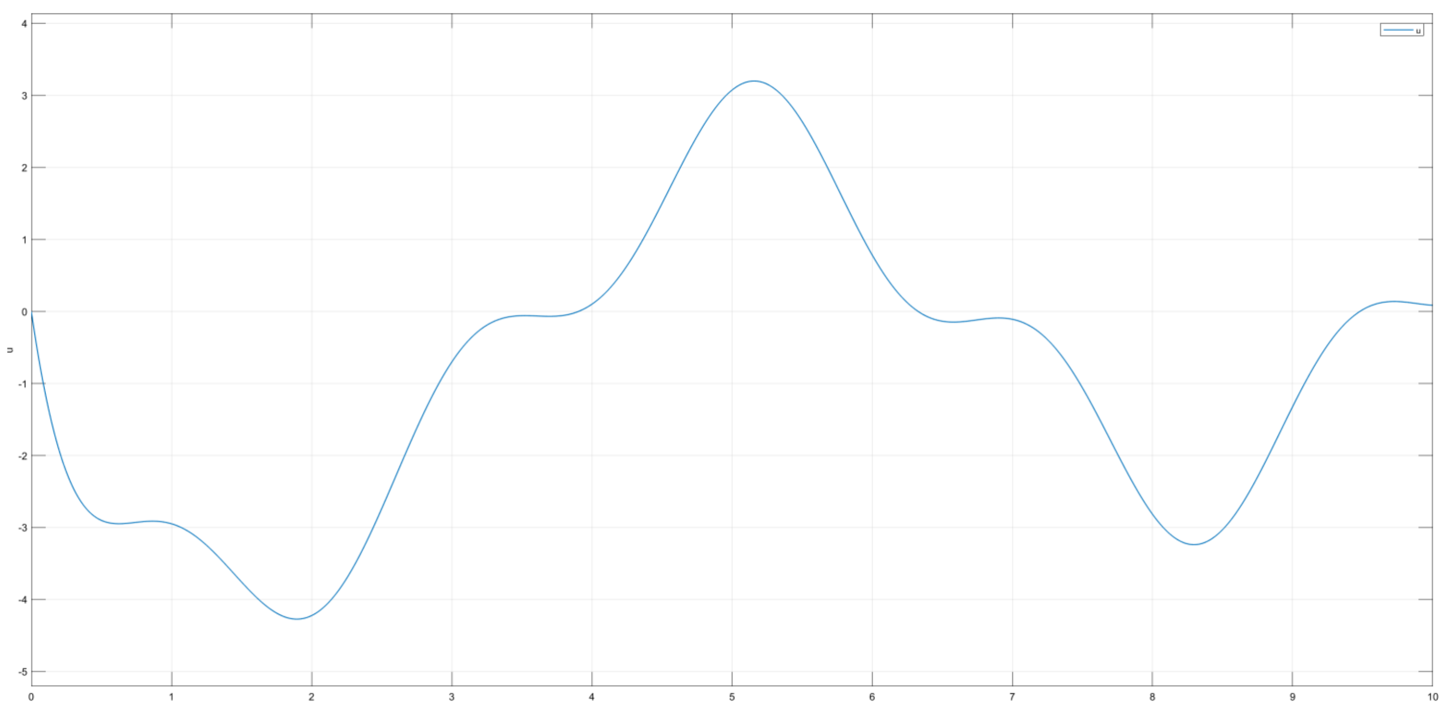

Рисунок 4: $u(t)$

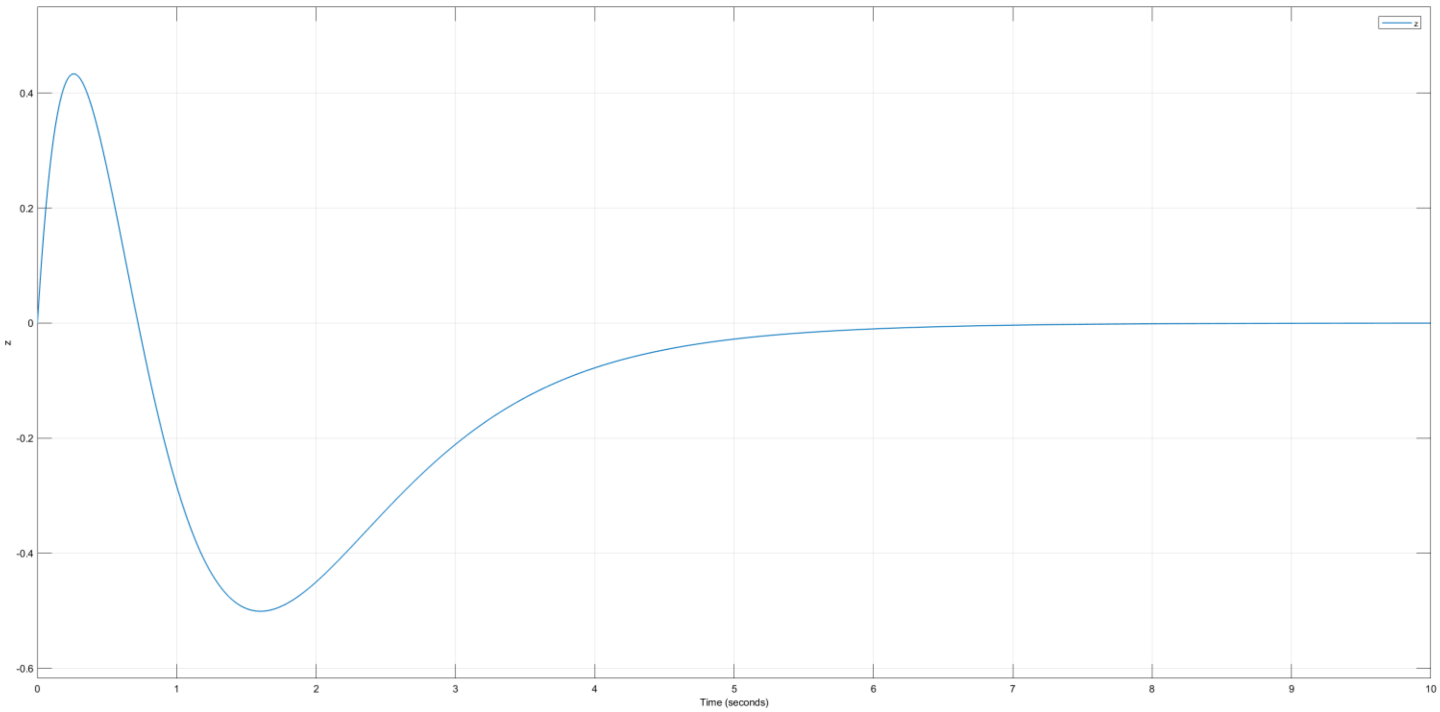

Рисунок 5: цель управления $z(t)$

Цель управления достигнута, $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Задание 2. Следящий регулятор по состоянию

Так как регулятор следящий, то $B_2 = 0$, $D_2 = [-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1]$.

Матрицы регулятора:

$$K_1 = [0.025 \quad -12.225 \quad 1.2], \qquad K_2 = [1.2932 \quad -0.2849 \quad -0.7172 \quad -0.6069]$$

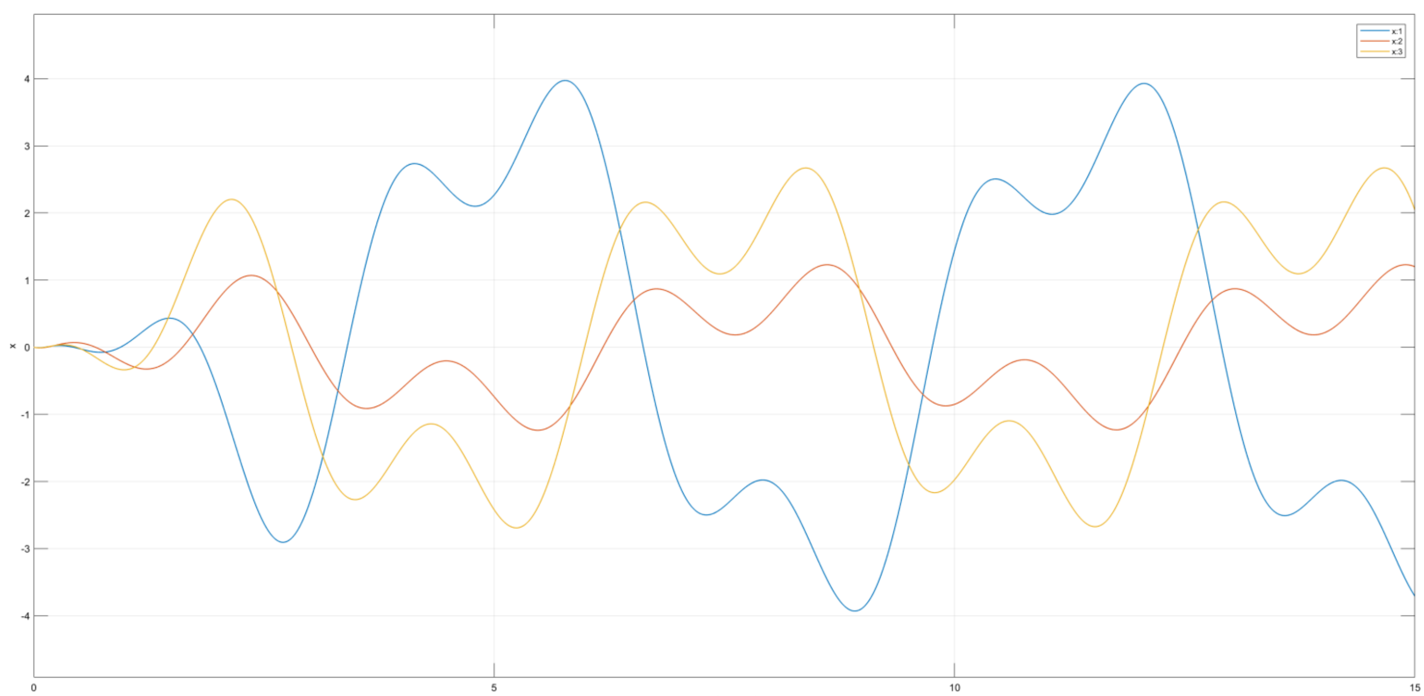

Рисунок 6: $x(t)$

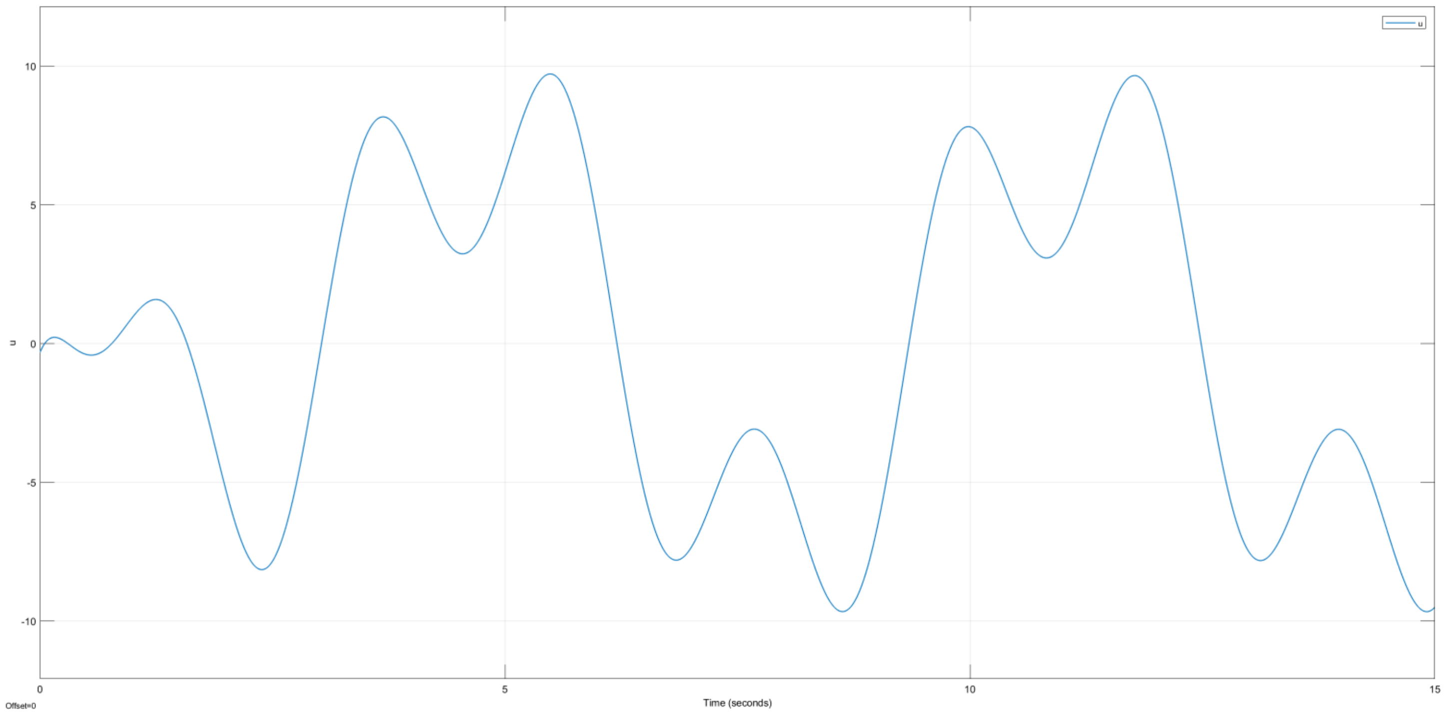

Рисунок 7: $u(t)$

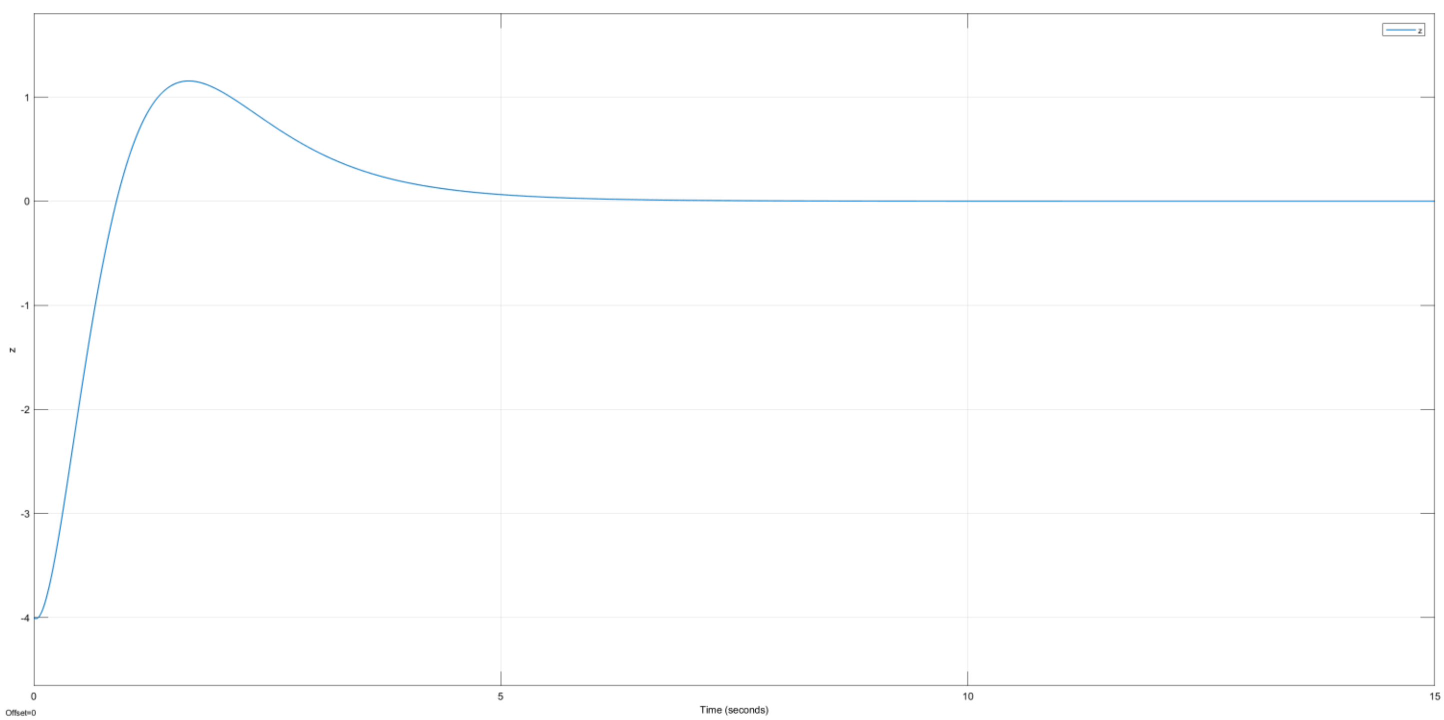

Рисунок 8: цель управления $z(t)$

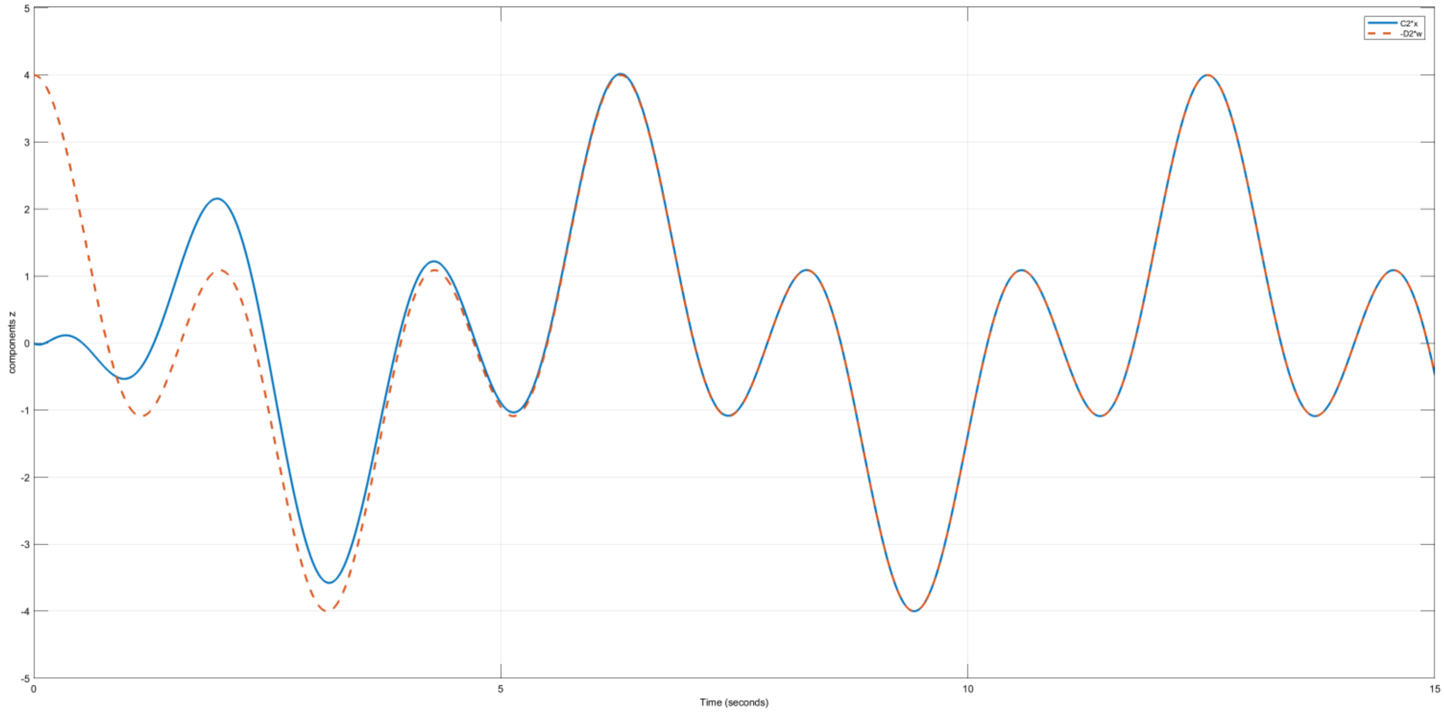

Рисунок 9: компоненты цели управления

Задание 3. Расчет матриц наблюдаемости замкнутой и разомкнутой систем

Система: $\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ \dot{w} = A_2 w \\ u = K_1 x + K_2 w \end{cases}$

Подставим u в первое уравнение: $\dot{x} = A_1 x + B_1 K_1 x + B_1 K_2 w + B_2 w = (A_1 + B_1 K_1)x + (B_2 + B_1 K_2)w$

Матричная форма расширенного объекта:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 + B_1 K_1 & B_2 + B_1 K_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}}_{a} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \qquad z = \underbrace{\begin{bmatrix} C_2 & D_2 \end{bmatrix}}_{c} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

```
% u=0
c = [C2 D2];
a = [A1 B2; zeros(4,3) A2];
v = [c; c*a; c*(a^2); c*(a^3); c*(a^4); c*(a^5); c*(a^6)];
rank(v)

% u=K1x+K2w
c = [C2 D2];
a = [A1+B1*K1 B2+B1*K2; zeros(4,3) A2];
v = [c; c*a; c*(a^2); c*(a^3); c*(a^4); c*(a^5); c*(a^6)];
rank(v)
```

При расчетах для каждого регулятора по состоянию матрица наблюдаемости разомкнутой системы имеет ранг 7 (полный ранг, т. е. система наблюдаема). Для замкнутой системы ранг становится равным 3, система соответственно не наблюдаема. Если проверить обнаруживаемость каждого собственного числа матрицы системы (т. е. матриц A_2 и $A_1 + B_1 K_1$), то выяснится, что собственные числа матрицы A_2 – не обнаруживаемы.

Таким образом, при замыкании системы регулятором и, соответственно, устранении внешнего воздействия, мы теряем информацию о нем.

Задание 4. Регулятор по выходу при различных y и z

Общие параметры для заданий 5, 6

В качестве параметров объекта были выбраны следующие матрицы:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Пара (A_1, B_1) – стабилизируема. Проверка обнаруживаемости пары $\left([C_1 \quad D_1], \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\right)$ осуществляется фрагментом кода ниже:

```
% observability of ([C1 D1], [A1 B2; 0 A2])
c = [C1 D1];
a = [A1 B2; zeros(4,3) A2];
v = [c; c*a; c*(a^2); c*(a^3); c*(a^4); c*(a^5); c*(a^6)];
rank(v)

% check observability of each eigenvalue
obs = [eig(a) zeros(7,1)];
for i=1:7
    hautus = [a-obs(i,1)*eye(7);c];
    obs(i,2) = rank(hautus);
end
disp(obs)
```

Код для расчета коэффициентов регулятора и наблюдателя для обоих заданий

```
% plant parameters
A1 = [-3 0 0; 0 4 2; 0 -2 4];
B1 = [1; 1; 1];
B2 = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 1];
A2 = [0 5 0 0; -5 0 0 0; 0 0 0 2; 0 0 -2 0];
C2 = [1 1 1];
D2 = [-1 -1 -1 -1];

% step 1.1: serching K1
G = [-2 0 0; 0 -2 2; 0 -2 -2];
y = [1 1 1];
V = [y; y*G; y*G*G];
if rank(V) == 3
    cvx_begin sdp
        variable p(3,3)
        A1*p - p*G == B1*y;
    cvx_end
    K1 = -y*inv(p)
end

% step 1.2: searching L1 & L2
g = [-1.5 0 0 0 0 0 0;
    0 -0.5 0 0 0 0 0;
    0 0 -1 1 0 0 0;
    0 0 -1 -1 0 0 0;
    0 0 0 0 -2 0 0;
    0 0 0 0 0 -3 5;
    0 0 0 0 0 -5 -3];
c = [C1 D1];
a = [A1 B2; zeros(4,3) A2];
y = [-1; -1; -1; -1; -1; -1; -1];
```

```
% check if pair (g, y) is controllable to count l
u = rank([y g*y (g^2)*y (g^3)*y (g^4)*y (g^5)*y (g^6)*y]);

cvx_begin sdp
    variable p(7,7)
    g*p - p*a == y*c;
cvx_end
l = inv(p)*y;
L1 = l(1:3); L2 = l(4:7);

% step 2.3: solve
cvx_begin sdp
    variable P(3,4)
    variable Y(1,4)
    P*A2 - A1*P == B1*Y + B2;
    C2*P + D2 == 0;
cvx_end

K2 = Y - K1*P
```

Расчет регулятора в форме ВСВ

$$
\begin{cases}
\dot{\hat{x}} = A_1\hat{x} + B_1 u + B_2\hat{w} + L_1(\hat{y} - y) \\
\dot{\hat{w}} = A_2\hat{w} + L_2(\hat{y} - y) \\
\hat{y} = C_1\hat{x} + D_1\hat{w} \\
u = K_1\hat{x} + K_2\hat{w}
\end{cases}
$$

Подставим в первое и второе уравнения выражения для $\hat{y}$ и u:

$$
\dot{\hat{x}} = (A_1 + B_1K_1 + L_1C_1)\hat{x} + (B_1K_2 + B_2 + L_1D_1)\hat{w} - L_1 y
$$

$$
\dot{\hat{w}} = L_2C_1\hat{x} + (A_2 + L_2D_1)\hat{w} - L_2 y
$$

Форма вход-состояние-выход для регулятора:

$$
\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C_1 & B_2 + B_1K_2 + L_1D_1 \\ L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} y
$$

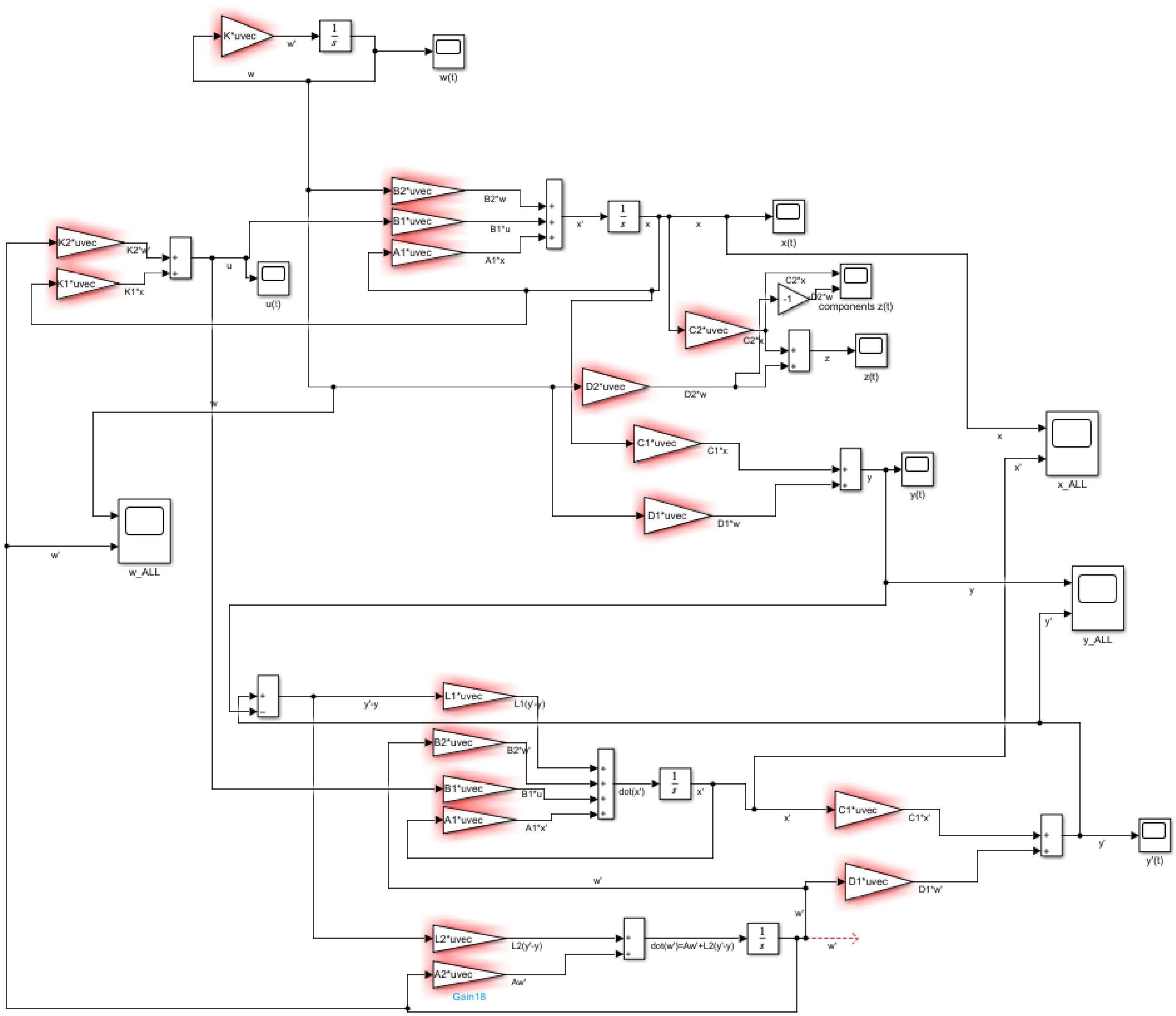

Рисунок 10: схема моделирования для заданий 5, 6

Задание 5. Регулятор по выходу при различных y и z

Матрицы, определяющие y и z:

$$C_1 = [1 \quad 0 \quad 1], \qquad D_1 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$
$$C_2 = [1 \quad 1 \quad 1], \qquad D_2 = [-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1]$$

Результаты расчетов:

- пара $\left([C_1 \quad D_1], \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\right)$ наблюдаема
- $K_1 = [0.0943 \quad -13.1321 \quad 2.0377]$
- $K_2 = [2.9362 \quad 0.1154 \quad 0.5840 \quad 0.6144]$
- $L_1 = [0.3499 \quad 23.16776 \quad -20.11949]^T$
- $L_2 = [3.133 \quad -0.36 \quad -2.1681 \quad -0.36923]^T$

Результаты моделирования:

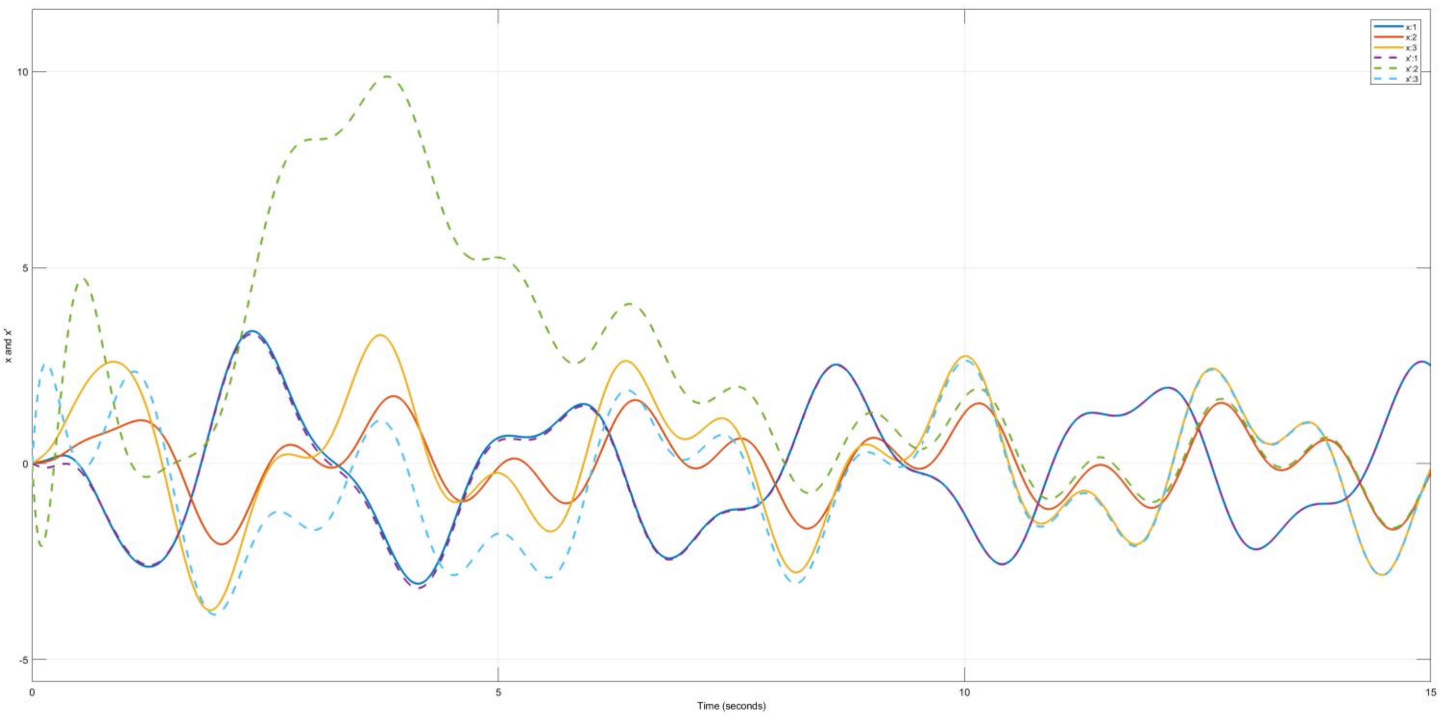

Рисунок 11: $x(t)$ и $x'(t)$

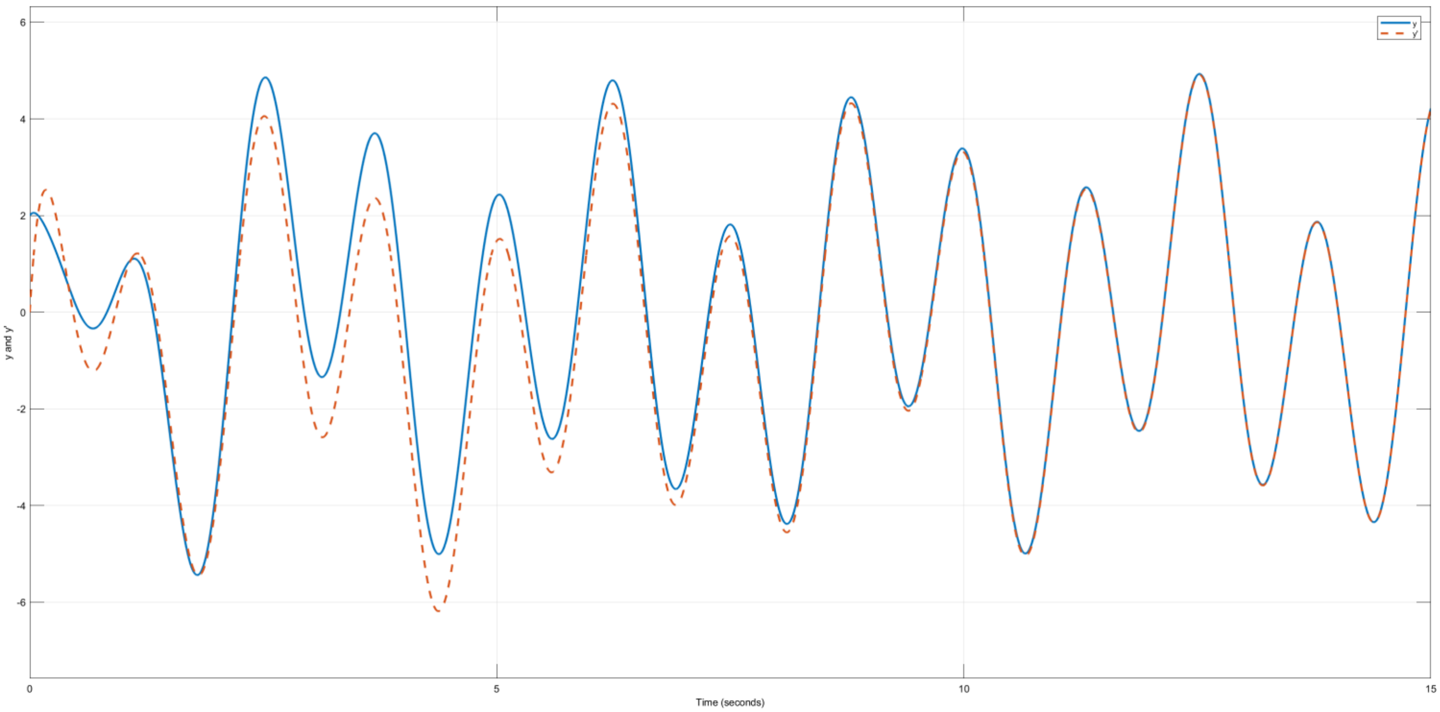

Рисунок 12: $y(t)$ *и* $y'(t)$

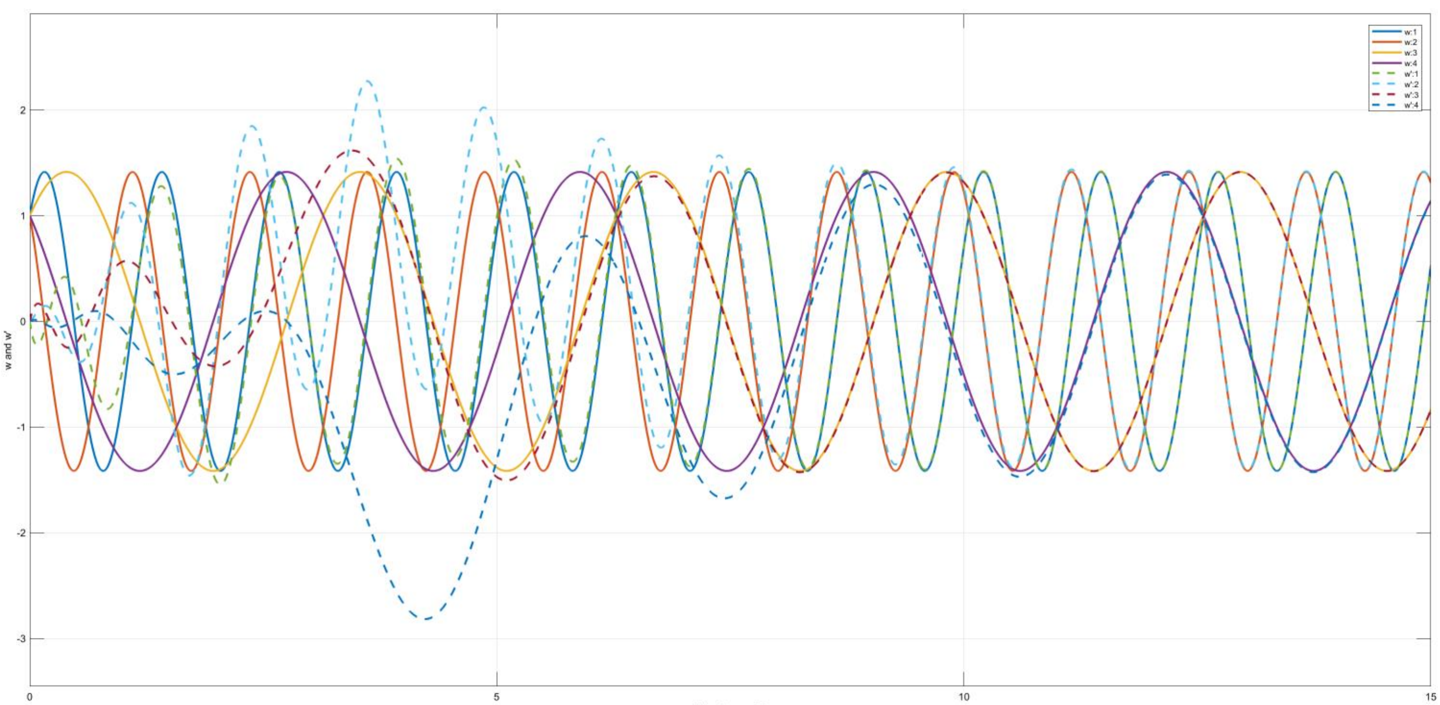

Рисунок 13: $w(t)$ *и* $w'(t)$

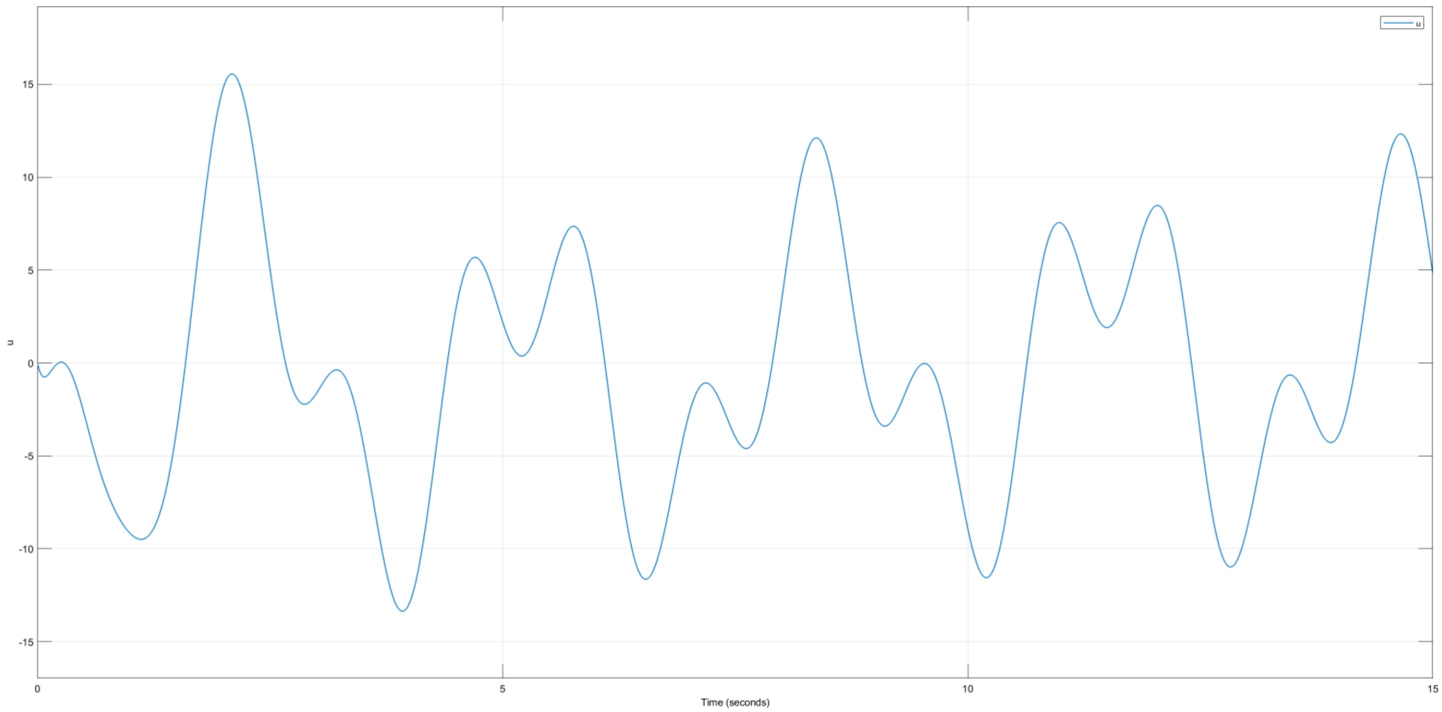

Рисунок 14: $u(t)$

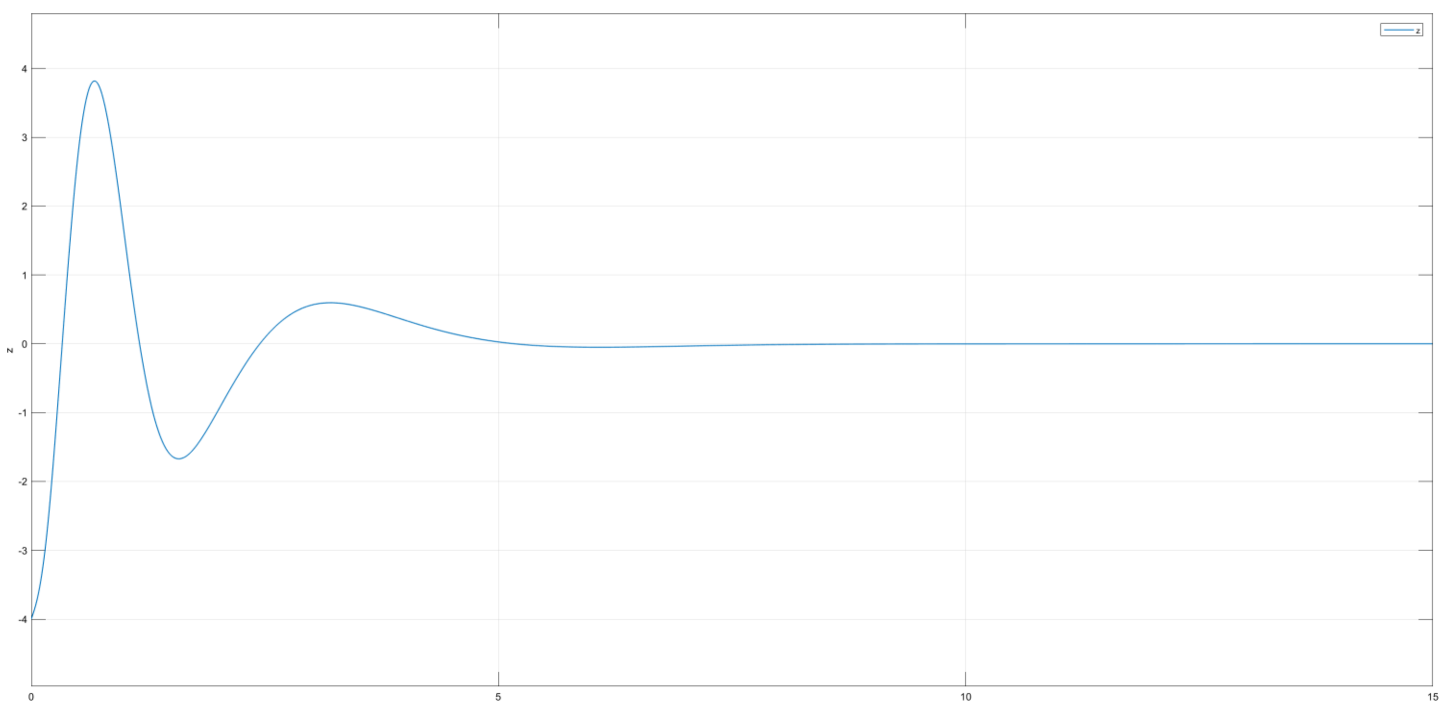

Рисунок 15: $z(t)$

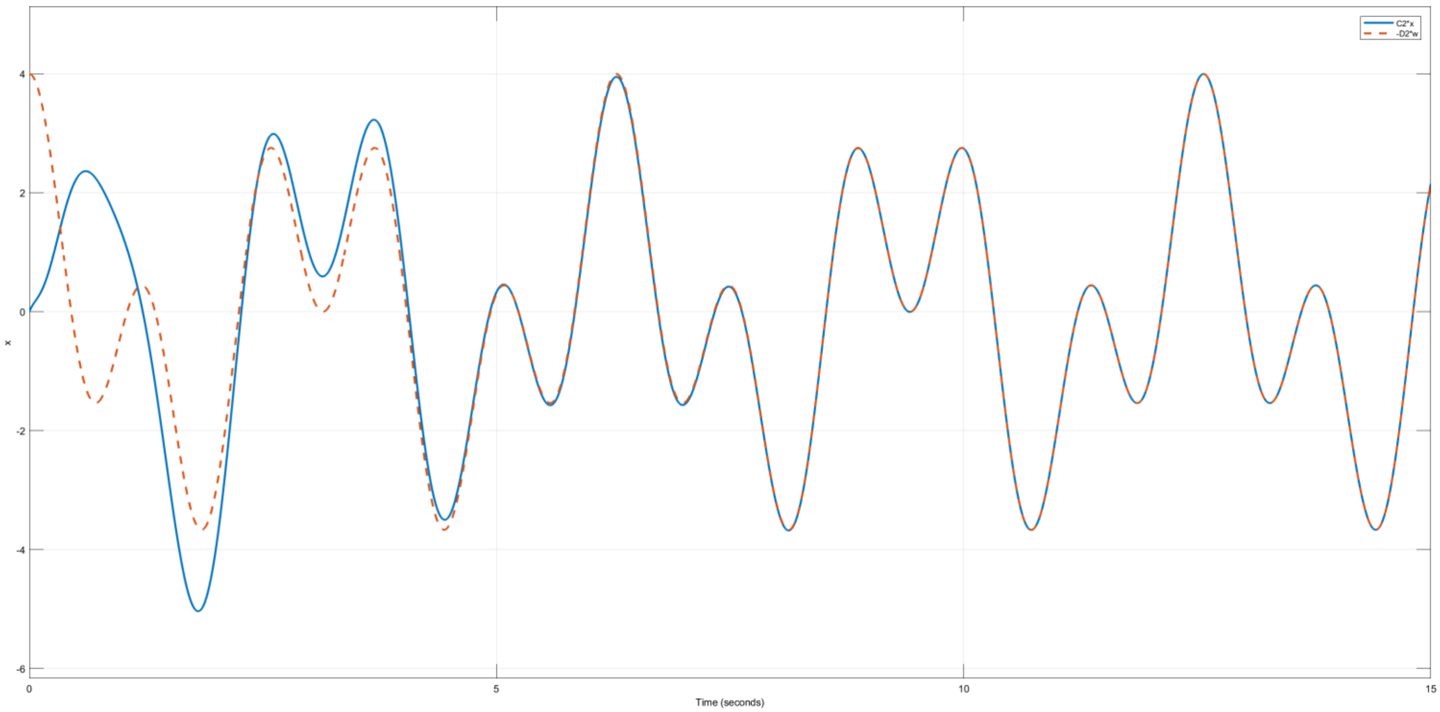

Рисунок 16: $z(t)$, отображенная покомпонентно

Матрица регулятора:

Собственные числа матрицы регулятора для полученных коэффициентов K_1 и K_2 получились следующие: $\{-11.4777 \pm 28.3686i,\ -0.1101 \pm 5.0384i,\ \ 0.1875,\ -0.0059 \pm 1.9845i\}$. Собственные числа матрицы A_2 не совпадают с этими значениями, однако есть достаточно близкие числа.

Задание 6. Регулятор по выходу при одинаковых y и z

Матрицы, определяющие y и z:

$$C = C_1 = C_2 = [1 \quad 1 \quad 1], \qquad D = D_1 = D_2 = [-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1]$$

Результаты расчетов:

- пара $\left([C \quad D], \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\right)$ наблюдаема
- $K_1 = [0.0943 \quad -13.1321 \quad 2.0377]$
- $K_2 = [2.9362 \quad 0.1154 \quad 0.5840 \quad 0.6144]$
- $L_1 = [-0.12152 \quad 0.851 \quad -21.8442]^T$
- $L_2 = [-2.971 \quad -0.820 \quad -0.3818 \quad 0.05891]^T$

Изменение матриц C_1, D_1, C_2, D_2 не влияет на расчет коэффициентов регулятора, поэтому они совпадают с предыдущим пунктом.

Результаты моделирования:

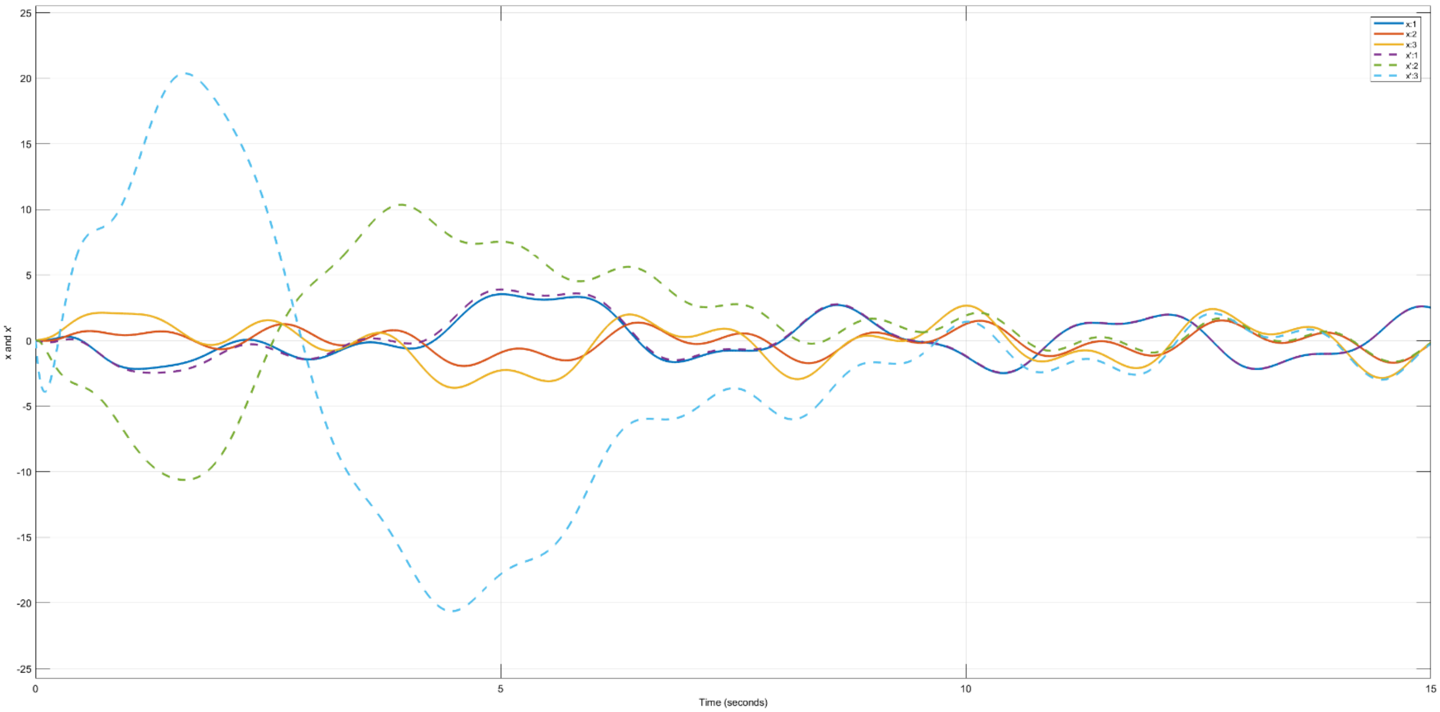

Рисунок 17: $x(t)$ и $x'(t)$

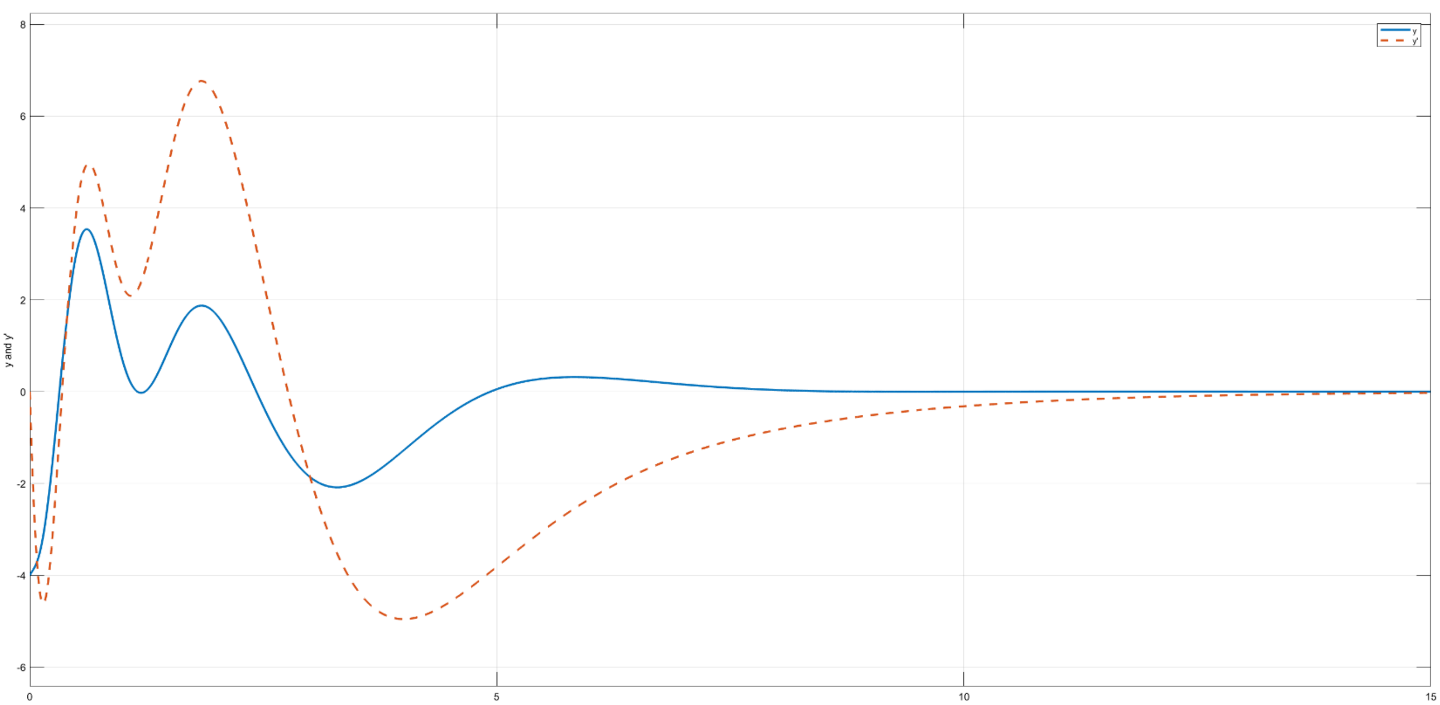

Рисунок 18: $y(t)$ и $y'(t)$

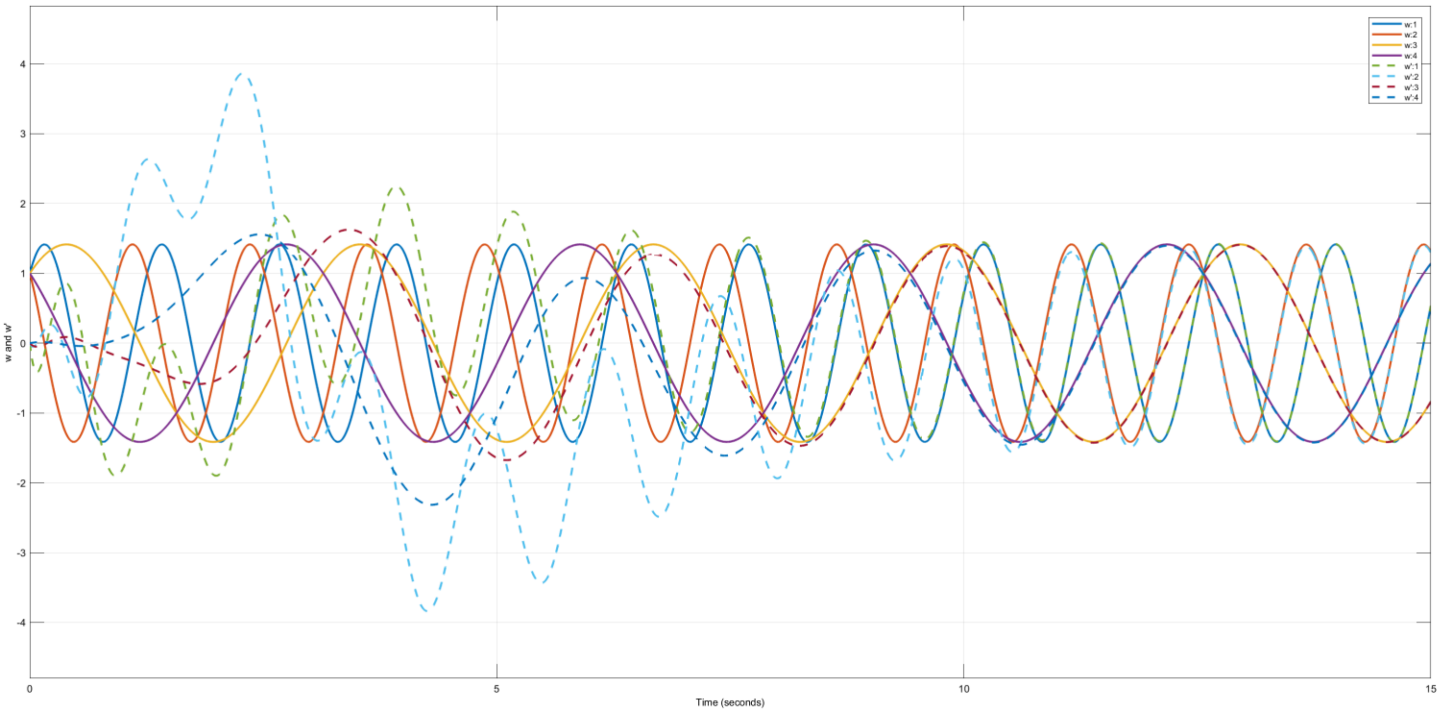

Рисунок 19: $w(t)$ *и* $w'(t)$

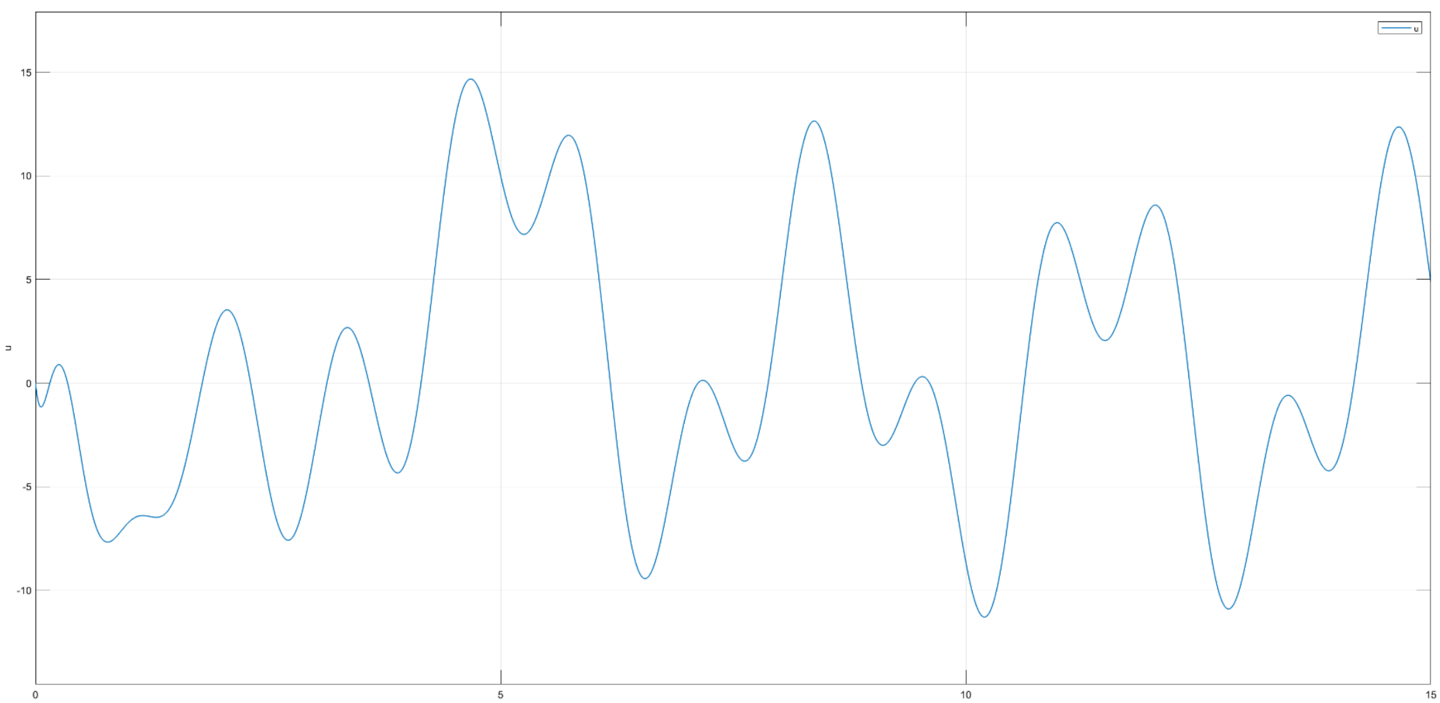

Рисунок 20: $u(t)$

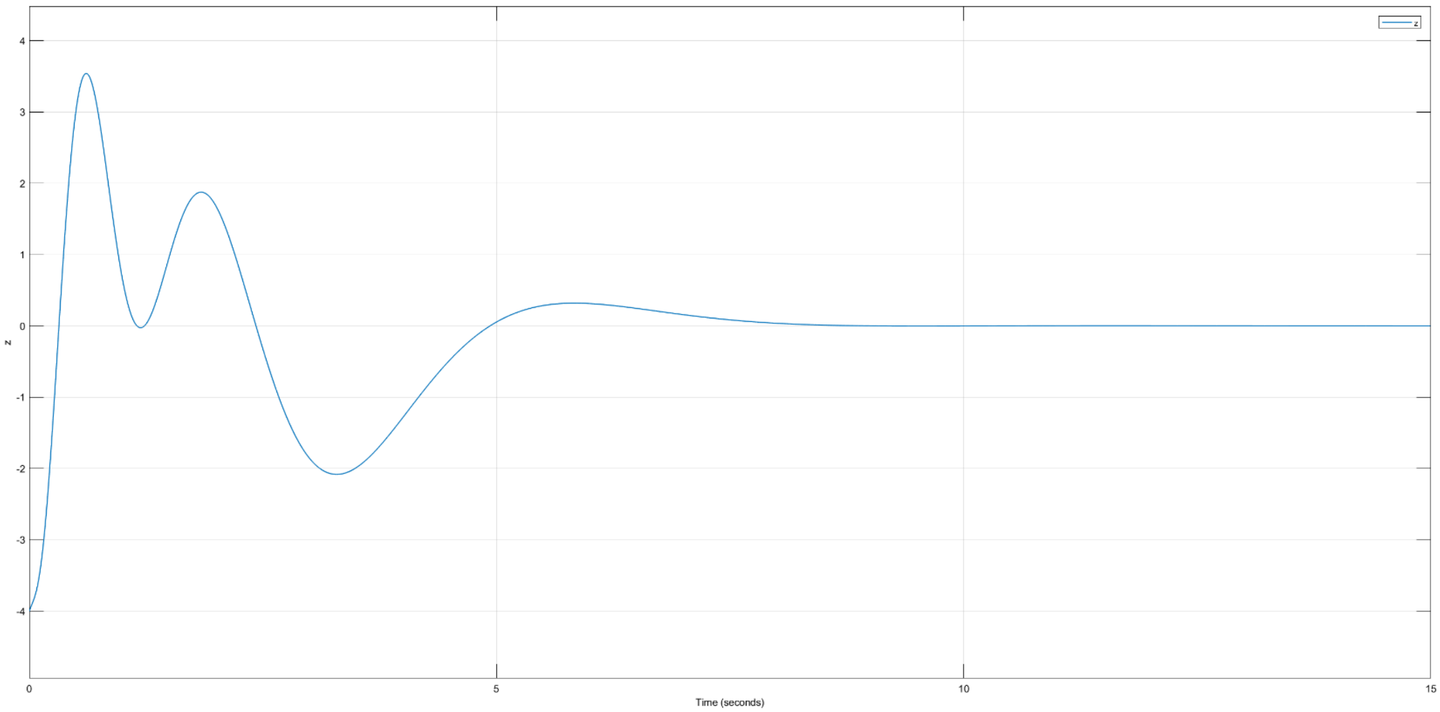

Рисунок 21: $z(t)$

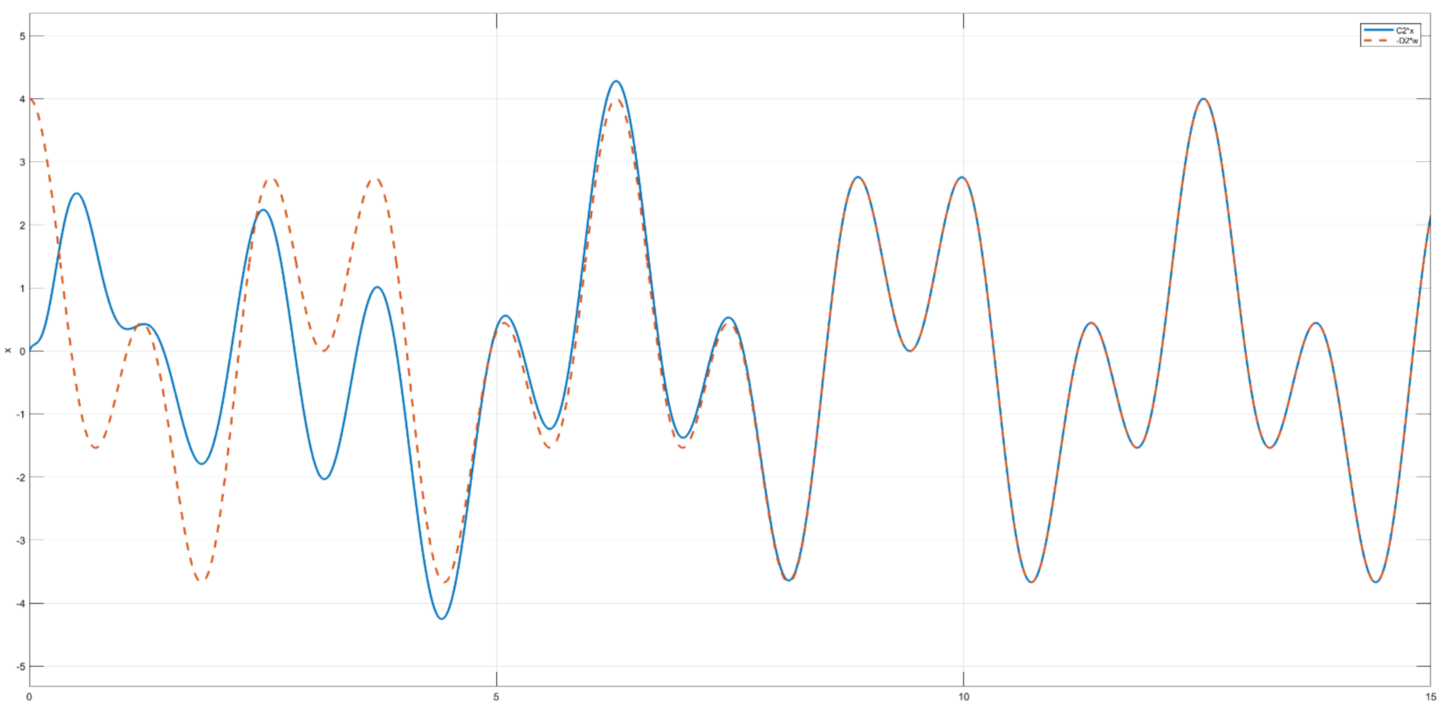

Рисунок 22: $z(t)$, отображенная покомпонентно

Матрица регулятора:

Собственные числа матрицы регулятора для полученных коэффициентов K_1 и K_2 получились следующие: $\{-11.3195 \pm 17.9043i,\ \pm 5i,\ -0.3610,\ \ \pm 2i\}$. Собственные числа матрицы A_2 есть в этих значениях. Это следуем из того, что выполнен принцип внутренней модели: матрицы $C_1 = C_2 = C$, $D_1 = D_2 = D$, матрица $A_1 + B_1 K_1$ – гурвицева, а значит, $\sigma(A) \subset \sigma(\begin{bmatrix} A_1 + B_1 K_1 + L_1 C_1 & B_2 + B_1 K_2 + L_1 D_1 \\ L_2 C_1 & A_2 + L_2 D_1 \end{bmatrix})$.

Задание 7. Тележка и меандр

Объект управления: $\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases}$, регулятор $u = K_1 x + K_2 w$.

В данном задании при реализации тележки использовались следующие матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1 \quad 0], \qquad C_2 = -C_1$$

Матрица B_2 тут нулевая, так как решается задача слежения за внешним сигналом.

Для того, чтобы выполнялись все условия обнаруживаемости и управляемости для расчета матриц регулятора, матрица D_1 выбрана ненулевой, в системе присутствуют помехи измерения: $D_1 = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$. Матрица D_2 выбрана таким образом, чтобы при её перемножении с вектором внешнего возмущения получающийся сигнал был разложением меандра в ряд Фурье.

Создание генератора сигнала

Ряд Фурье для меандра выглядит следующим образом:

$$g_{ideal} = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\,(2\pi(2k-1)ft))}{2k-1} = \frac{4A}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \frac{1}{7}\sin(7\omega t) + \cdots\right)$$

Здесь $\omega = 2\pi f$, f – частота, A – амплитуда сигнала.

При решении задачи выбраны следующие параметры сигнала: $A = \frac{\pi}{4}, f = \frac{1}{2\pi}$. Тогда формула выглядит следующим образом:

$$g_{ideal} = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \cdots$$

Такой сигнал невозможно реализовать в чистом виде с помощью матричной экспоненты, так как вместе с синусами результат будет содержать и косинусы. Для решения можно использовать в качестве внешнего возмущения именно такой сигнал, но с помощью матрицы D_2 получить уже необходимый для минимизации разности с y меандр.

Внешнее возмущение задаётся уравнением:

$$\dot{w} = Gw, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Порождаемый сигнал $w(t) = [\sin(t) \quad \cos(t) \quad \sin(3t) \quad \cos(3t) \quad \sin(5t) \quad \cos(5t) \quad \sin(7t) \quad \cos(7t)]^T$

$$D_2 = \left[1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{5} \quad 0 \quad \frac{1}{7} \quad 0\right]$$

Результаты расчетов и моделирования

Для расчета коэффициентов регулятора и наблюдателя используется один и тот же код, что и для предыдущих заданий, модифицированный для других размерностей. Моделирование осуществлялось также с помощью предыдущей схемы моделирования.

- пара ($[A_1 \quad B_1]$) стабилизируема
- пара ($[C \quad D], \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$) наблюдаема
- $K_1 = [-7.5 \quad -6.5]$
- $K_2 = [6.5 \quad 6.5 \quad -0.5 \quad 6.5 \quad -3.5 \quad 6.5 \quad -5.93 \quad 6.5]$
- $L_1 = [-0.4 \quad -0.09]^T$
- $L_2 = [-0.2 \quad -0.04 \quad 1.34 \quad 2.71 \quad -10.88 \quad 9.99 \quad -7.06 \quad -18.24]^T$

Результаты моделирования:

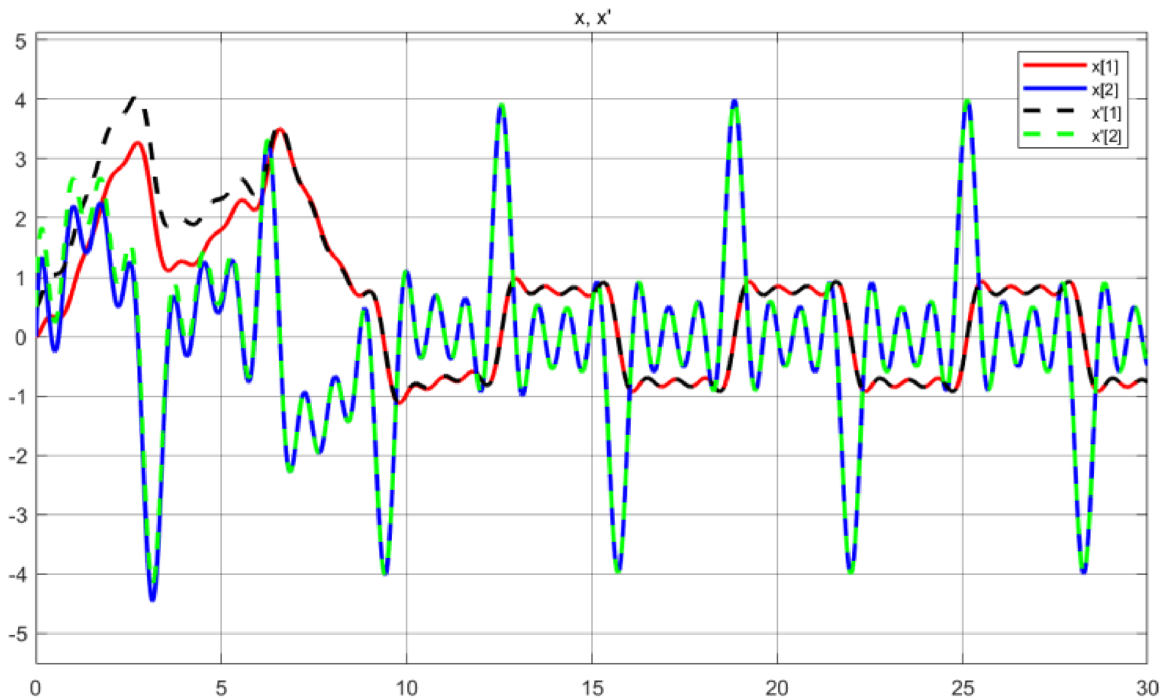

Рисунок 23: $x(t)$ и $x'(t)$

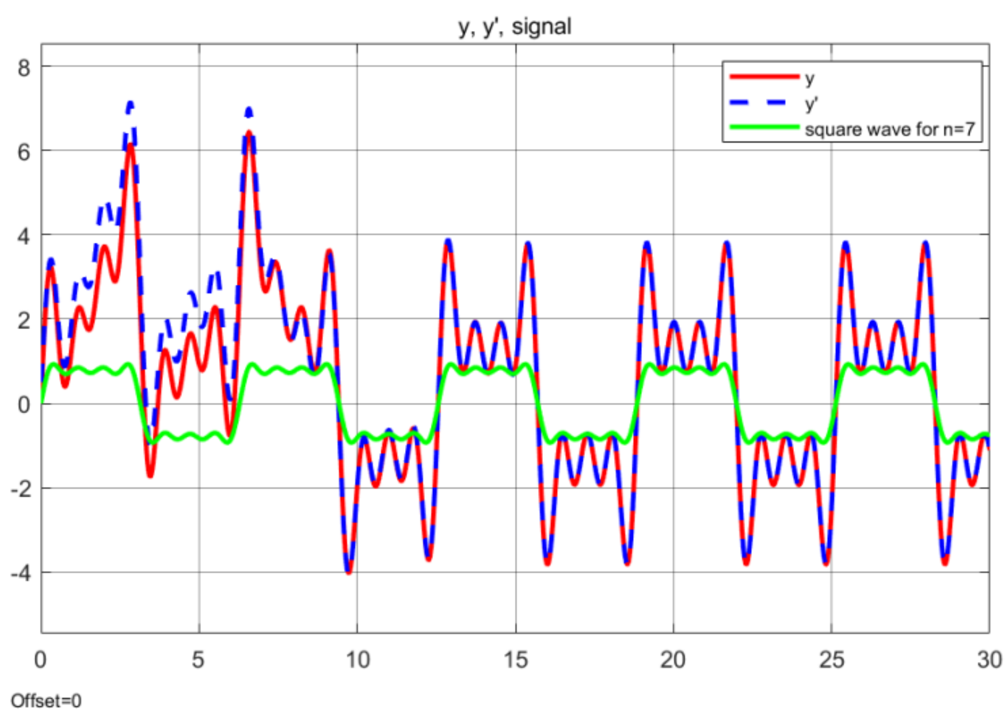

Рисунок 24: $y(t)$ и $y'(t)$

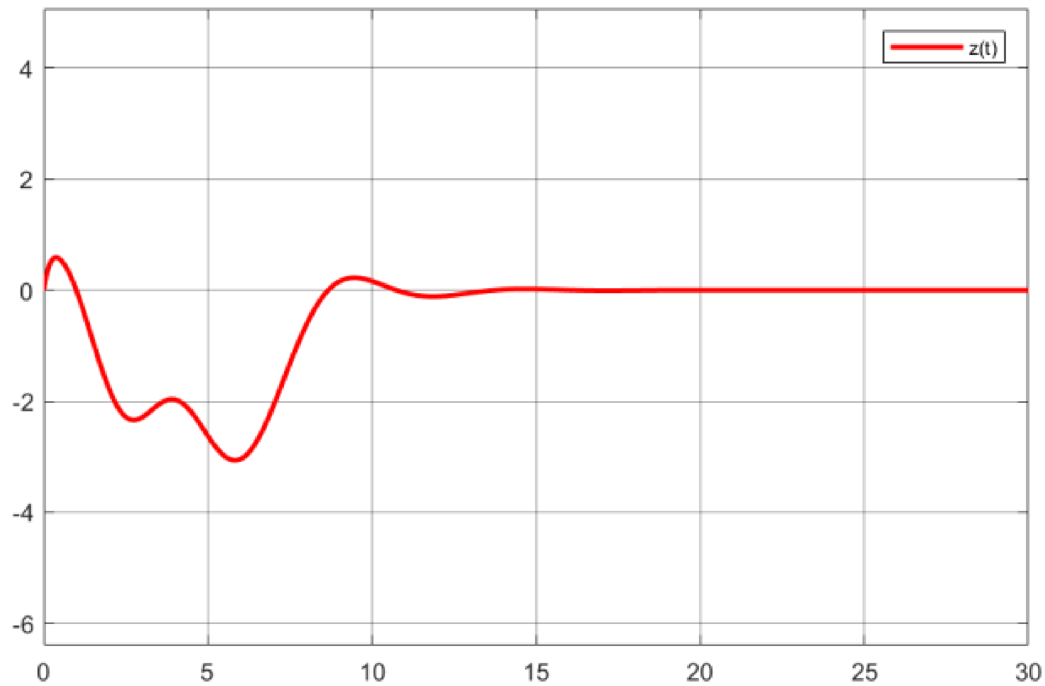

Рисунок 25: $z(t)$

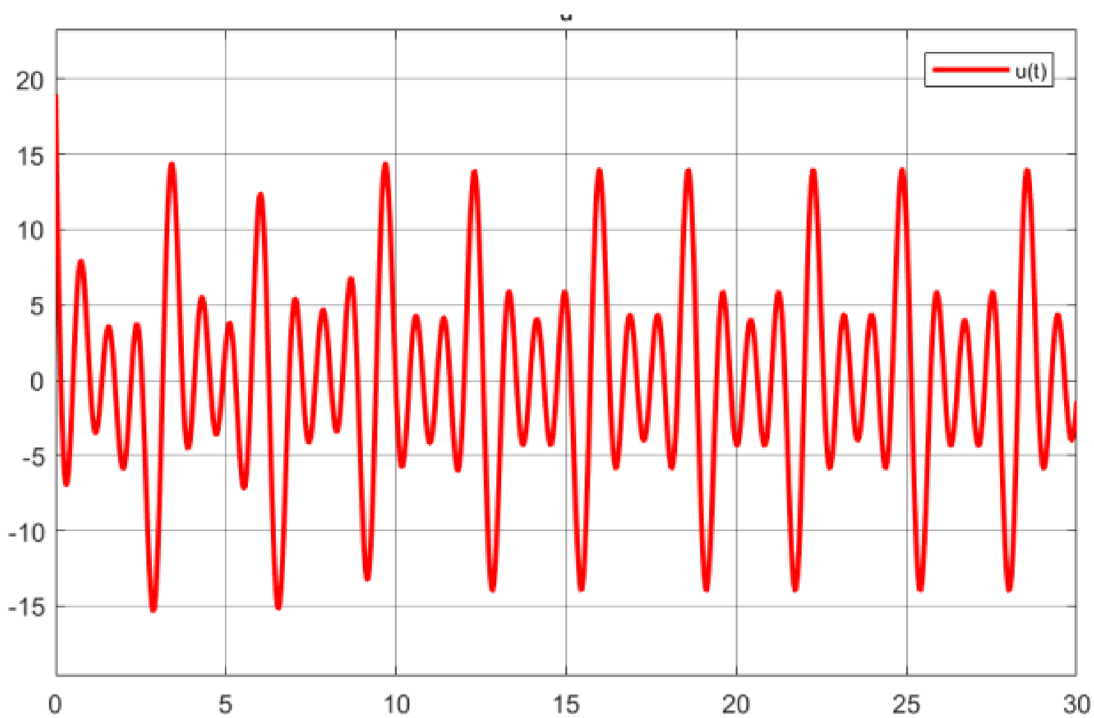

Рисунок 26: $u(t)$

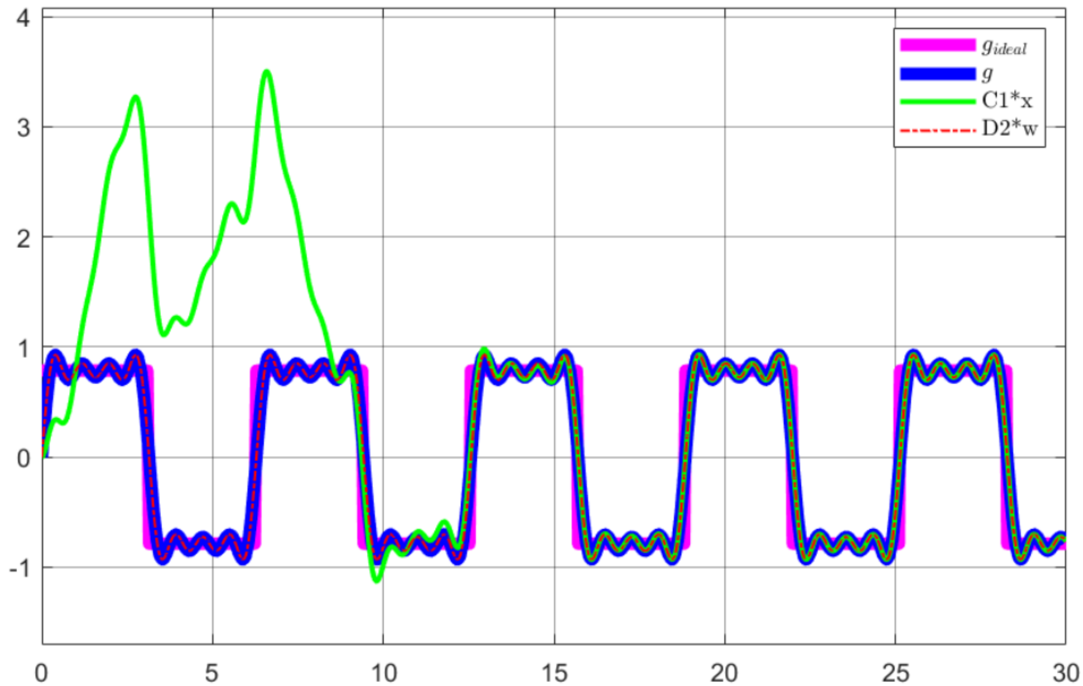

Рисунок 27: сравнение сигналов

По рисункам видно, что за счет ненулевой D_1 выходной сигнал y не стремится к меандру из-за помех, но при этом компонента z, соответствующая чистому выходу (график C_1x), сходится к меандру (графики D_2w, g) идеально. Также показано, что для седьмых гармоник, сигнал уже близок к идеальному square wave.

Выводы

В процессе выполнения лабораторной работы были изучены компенсирующий и следящий регуляторы по состоянию. При замыкании системы регуляторами такого вида и, соответственно, устранении внешнего воздействия, теряется часть информации о внешнем воздействии.

Также были исследованы регуляторы по выходу при различных и одинаковых y и z. Стало очевидно, что во втором случае выполняется принцип внутренней модели: при совпадении регулируемого и измеряемого выхода спектр матрицы возмущающего воздействия включен в спектр матрицы регулятора. Заметно, что при выполнении этого принципа управление и регулируемый выход более гладкие, а перерегулирование меньше, чем ситуации, когда принцип не выполняется.

Для математической модели тележки был создан следящий регулятор по выходу. Для этого выход в виде координаты без помех создать не получилось, так как нарушаются условия создания регулятора, поэтому появляются помехи измерения. Из-за этого не видно, что $y(t) \to g(t)$, но на дополнительных графиках компонент $z(t)$ видно, что не зашумлённый выход действительно идеально сходится к меандру.