# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

# ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМЕ. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ

**Цель работы.** Исследование переходных процессов в линейных системах второго порядка и ознакомление с аналитическим методом построения областей устойчивости линейных динамических систем.

**Методические рекомендации.** До начала работы студенты должны получить от преподавателя вариант задания. Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

**Теоретические сведения.** При исследовании движений линейных динамических систем принято различать свободную и вынужденную составляющие. Свободная составляющая описывает движение системы при отсутствии воздействия на систему со стороны окружающей среды (автономной системы) и обусловлено ее состоянием в начальный момент времени. Вынужденная составляющая представляет собой реакцию системы на входное воздействие и не зависит от ее начального состояния.

Рассмотрим систему второго порядка

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = bg, \quad y(0) = y_0, \, \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \qquad (3.1)$$

где $g = g(t)$ - входное воздействие, $y = y(t)$ — выход системы, $a_1, a_0, b$ - параметры системы. Переменные состояния рассматриваемой системы могут быть определены как $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$. Тогда система уравнений вход-состояние-выход принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + bg, \\ y = x_1, \end{cases} \qquad (3.2)$$

с начальными условиями $x_{10} = x_1(0) = y_0$, $x_{20} = x_2(0) = \dot{y}_0$. Структурная схема, соответствующая уравнениям (3.2) приведена на рис. 3.1.

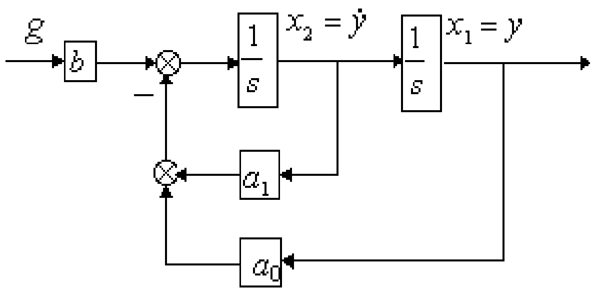


Рис. 5.1. Структурная схема

Примером такой системы является тело массой $m$ (рис. 3.2), которое подвешено на пружине и может совершать вертикальные движения. При условии, что сила трения пропорциональна скорости движения тела, а сила, с которой действует пружина на тело, пропорциональна его смещению $y$ относительно положения равновесия, движение такой системы описывается дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{y} + l\dot{y} + ky = F,$$

где $l$ — коэффициент трения, $k$— коэффициент жесткости пружины, $F$ — внешняя сила, приложенная к телу. Полагая $a_1 = \frac{l}{m}$, $a_0 = \frac{k}{m}$, $b = \frac{1}{m}$, получим уравнение (3.1).

Движение рассматриваемой динамической системы описывается решением $y(t)$ дифференциального уравнения (3.1) и содержит две составляющие

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{в}(t),$$

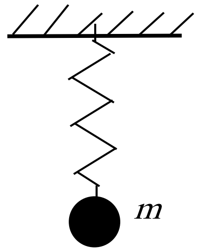

Рис.5.2. Механическая система

где $y_{св}(t)$ и $y_{в}(t)$ — соответственно свободная и вынужденная составляющая движения. Свободная составляющая $y_{св}(t)$ находится как частное решение однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0 \qquad (3.3)$$

с начальными условиями $y_{св}(0) = y_0,\ \dot{y}_{св}(0) = \dot{y}_0$. Вынужденная составляющая $y_{в}(t)$ находится как частное решение неоднородного дифференциального уравнения (3.1) при нулевых начальных условиях $y_{в}(0) = \dot{y}_{в}(0) = 0$. Таким образом, исследование рассматриваемых процессов сводится к изучению свойств решений дифференциальных уравнений (3.1) и (3.3).

Для интегрирования дифференциального уравнения (3.3) надо найти корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \qquad (3.4)$$

Если корни $\lambda_1, \lambda_2$ характеристического уравнения вещественны и различны, то решение дифференциального уравнения (3.3) есть

$$y_{св}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (3.5)$$

где постоянные $C_1, C_2$ определяются по начальным условиям. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то

$$y_{св}(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_1 t} \qquad (3.6)$$

Когда корни характеристического уравнения (3.4) комплексные $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$, решение дифференциального уравнения (3.3)

$$y_{св}(t) = Ae^{\alpha t}\sin(\omega t + \varphi), \qquad (3.7)$$

где постоянные $A, \varphi$ определяются по начальным условиям.
При $a_1 = 0$ корни характеристического уравнения (3.3) чисто мнимые $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ и выражение (3.7) будет иметь вид

$$y_{св}(t) = A\sin(\omega t + \varphi). \qquad (3.8)$$

Соотнося приведенные выше формулы для свободной составляющей движения с параметрами $l, k$ механической системы (рис. 3.2), можно сделать следующий вывод. При увеличении коэффициента трения $l$ и фиксированном значении коэффициента жесткости пружины $k$ характер свободной составляющей изменяется от гармонического незатухающего (3.8) (при $l=0$) до колебательного затухающего (3.7) (при $0 < l^2 < 4km$). При дальнейшем увеличении коэффициента трения характер свободной составляющей принимает монотонный затухающий характер (3.4).

Рассмотрим на примере поиск свободной составляющей системы с параметрами $a_1 = 2$ $a_0 = 1$ и начальными условиями $y_{св}(0) = 1, \dot{y}_{св}(0) = 0$. В этом случае корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Свободную составляющую ищем в виде (3.6) и, следовательно, при $t = 0$ имеем: $y_{св}(0) = C_1 = 1$, $\dot{y}_{св}(0) = -C_1 + C_2 = 0$. Таким образом, $C_1 = C_2 = 1$ и $y_{св}(t) = (1+t)e^{-t}$.

Для исследования свободного движения динамических систем часто оказывается удобным изобразить его на плоскости в Декартовой прямоугольной системе координат $Ox_1x_2$. Координаты $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{y}$ в этом случае называют *фазовыми координатами*, а плоскость $Ox_1x_2$ - *фазовой плоскостью*. В каждом частном случае движения системы (3.3) при $t = t_0$ состояние системы изображается на фазовой плоскости точкой с фиксированными координатами $x_1 = y(t_0), x_2 = \dot{y}(t_0)$. При изменении времени $t$ *изображающая точка* перемещается по фазовой плоскости, прочерчивая на ней линию, называемую *фазовой траекторией.* Совокупность фазовых траекторий системы (3.3) образует *фазовый портрет*.

Вынужденная составляющая $y_в(t)$ движения системы есть решение неоднородного уравнения (3.1) при нулевых начальных условиях. Установившейся реакцией на заданное воздействие $g(t)$ называют, такую функцию $y_у(t)$, что

$$\lim_{t\to\infty} |y(t) - y_у(t)| = 0$$

Одним из основных требований к системам автоматического управления является *устойчивость*. В соответствии с корневым критерием устойчивости, для того чтобы система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть, т.е. $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$
.

Под *областью устойчивости в пространстве параметров* понимается множество значений параметров, при которых система является асимптотически устойчивой. Под *областью неустойчивости,* соответственно, понимается множество значений параметров, при которых система является неустойчивой. Области устойчивости и неустойчивости отделены друг от друга так называемыми *границами устойчивости*, т.е. множествами значений параметров, при которых система является устойчивой по Ляпунову. Пример графического представления границы устойчивости на плоскости двух параметров $\xi_1$ и $\xi_2$ приведен на рис.3.3.

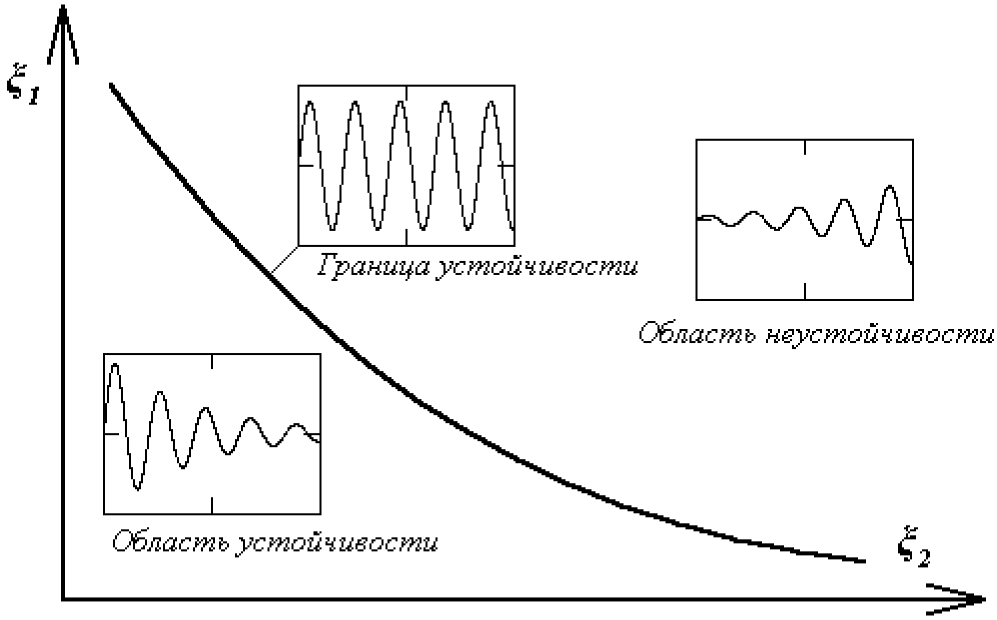


Рис.3.3 Пример границы устойчивости на плоскости двух параметров $\xi_1$ и $\xi_2$

В работе исследуется линейная система третьего порядка, структурная схема которой представлена на рис.3.4. Подобная структурная схема является типичной для широкого класса электромеханических объектов управления. Система имеет три параметра — постоянные времени $T_1$, $T_2$ и коэффициент передачи $K$.

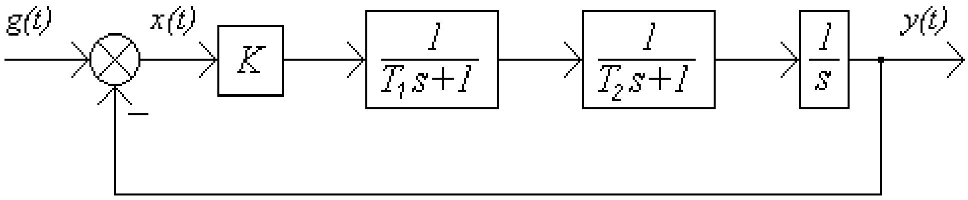


Рис.3.4. Структурная схема линейной системы третьего порядка

Для некоторых видов воздействий, т.е. некоторых функций $g(t)$, удается указать очень простые способы вычисления установившейся реакции системы при условии, что система устойчива. Так реакция системы на воздействие

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} A_k t^k ,$$

где $n$ - любое неотрицательное целое число, есть

$$y_y(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k t^k ,$$

а на воздействие

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} [A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)]$$

есть

$$y_y(t) = \sum_{k=0}^{n} [C_k \cos(k\omega t) + D_k \sin(k\omega t)].$$

Неизвестные постоянные $C_k, D_k$ ($k = 0,1,2,\ldots,n$), участвующие в определении установившейся реакции, определяются из условия обращения уравнения (3.1) в тождество при подстановке в него соответствующего воздействия и реакции. Проиллюстрируем сказанное на примере. Пусть требуется определить установившуюся реакцию системы с параметрами $a_1 = 3$, $a_0 = 2$, $b = 2$ на воздействие $g(t) = 2\cos(t)$. В этом случае, корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = -1 < 0, \lambda_2 = -2 < 0$. Установившуюся реакцию ищем в виде $y_y(t) = C_0 + C_1 \cos(t) + D_1 \sin(t)$. После подстановки функций $y_y(t)$, $g(t)$ в уравнение (3.1) и группировки подобных членов, получим

$$2C_0 + (C_1 + 3D_1 - 4)\cos(t) + (D_1 - 3C_1)\sin(t) = 0.$$

Для выполнения последнего равенства необходимо, чтобы постоянные $C_0, C_1, D_1$ удовлетворяли системе линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 + 3D_1 = 4, \\ D_1 - 3C_1 = 0, \\ 2C_0 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $C_0 = 0, C_1 = 0.4, D = 1.2$. Таким образом, установившаяся реакция системы будет иметь вид

$$y_y(t) = 0.4\cos(t) + 1.2\sin(t).$$

**Порядок выполнения работы**

*1. Свободная и вынужденная составляющая*

1.1 Для каждого из вариантов (Табл. 3.1) задано по шесть наборов значений корней $\lambda_1, \lambda_2$ характеристического уравнения (3.4) и начальных условий $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$. Вычислить коэффициенты $a_1, a_0$ и найти аналитическое выражение для свободной составляющей $y_{св}(t)$. Результаты вычислений занести в табл. 3.2. Осуществить моделирование свободного движения системы при $t \geq 0$ с соответствующими заданной функции $y_{св}(t)$ параметрами $a_1$, $a_0$ и начальными условиями $y(0)$, $\dot{y}(0)$. На экран монитора выводить графики $y(t)$, $\dot{y}(t)$.

1.2 Для 2-го, 3-го и 4-го набора значений корней $\lambda_1, \lambda_2$ и начальных условий $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$ (Табл. 3.1) экспериментально построить фазовые траектории автономной системы. На экран монитора выводить зависимости $\dot{y}(y)$

1.3 Для каждого входного воздействия $g(t)$ осуществить моделирование вынужденного движения системы при $t \geq 0$ с начальными условиями $y_0 = -1; 0; 1$ и

$\dot{y}_0 = 0$. Параметры системы и входные воздействия приведены в Табл. 3.3. На экран монитора выводить графики $y(t), g(t)$.

*2. Область устойчивости*

2.1 Собрать схему моделирования (см. рис. 3.4), установив значение постоянных времени $T_1$ и $T_2$ согласно первому набору корней $\lambda_1, \lambda_2$ (см. табл. 3.1).

2.2 Определите аналитически границу устойчивости в пространстве параметров $K$ и $T_1$ для системы, изображенной. с использованием критерия Гурвица. Привести графическое изображение границы устойчивости на плоскости двух параметров $K$ и $T_1$ и определить область устойчивости системы.

2.3 Определите аналитически границу устойчивости в пространстве параметров $K$ и $T_2$ для системы, изображенной. с использованием критерия Гурвица. Привести графическое изображение границы устойчивости на плоскости двух параметров $K$ и $T_2$ и определить область устойчивости системы.

**Содержание отчета**

**1.** Математическая модель исследуемой динамической системы и соответствующая ей схема моделирования.

**2.** Результаты расчетов (Табл. 3.2).

**3.** Результаты вычислительных экспериментов (шесть графиков свободного движения, три графика фазовых траекторий и три графика вынужденного движения системы).

**4.** Аналитически рассчитанные границы устойчивости, представленные в виде зависимостей $K(T_1)$ и $K(T_2)$.

**5.** Графическое изображение границ устойчивости на плоскостях двух параметров $(K, T_1)$ и $(K, T_2)$ областей устойчивости системы.

**6.** Листинги аналитических расчетов и графических представлений.

**7.** Выводы.

**Вопросы к защите лабораторной работы**

**1.** Как связаны знаки вещественных частей корней характеристического уравнения и коэффициентов?

**2.** Какими должны быть корни характеристического уравнения, чтобы свободная составляющая движения системы с течением времени стремилась к нулю ?

**3.** Какими должны быть корни характеристического уравнения, чтобы свободная составляющая движения системы подчинялась гармоническому закону ?

**4.** Определите корни характеристического уравнения, если свободная составляющая движения системы равна $e^{2t}\sin(2t)$.

**5.** Определите установившуюся реакцию системы $\ddot{y} + 2\dot{y} + 1y = 3f$, если $f(t) = 2t$.

**6.** Дайте определение устойчивости систем автоматического управления.

**7.** Как определить свойства устойчивости линейной стационарной системы по корням ее характеристического уравнения?

**8.** Определите свойства устойчивости линейной стационарной системы с характеристическим полиномом $D(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$, если все коэффициенты полинома положительны и, дополнительно, $a_1 a_2 < a_0$.

Таблица 3.1

Варианты начальных условий и корней характеристического уравнения

| Вариант | Номер эксперимента | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | |
| | Начальные условия | | | | | | | | | | | |
| | $y_0$ | $\dot{y}_0$ | $y_0$ | $\dot{y}_0$ | $y_0$ | $\dot{y}_0$ | $y_0$ | $\dot{y}_0$ | $y_0$ | $\dot{y}_0$ | $y_0$ | $\dot{y}_0$ |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0.05 | 0 | 0.05 | 0 | 0 | 0.1 |
| | Корни характеристического уравнения | | | | | | | | | | | |
| | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
| 1 | -1 | -1 | -0.5+j3 | -0.5-j3 | j3 | -j3 | 0.5+j3 | 0.5-j3 | 1 | 1 | -0.1 | 0.1 |
| 2 | -1 | -1.5 | -0.6+j4 | -0.6-j4 | j4 | -j4 | 0.6+j4 | 0.6-j4 | 1 | 1.5 | -0.2 | 0.2 |
| 3 | -1 | -2 | -0.7+j5 | -0.7-j5 | j5 | -j5 | 0.7+j5 | 0.7-j5 | 1 | 2 | -0.3 | 0.3 |
| 4 | -2 | -1.5 | -0.8+j6 | -0.8-j6 | j6 | -j6 | 0.8+j6 | 0.8-j6 | 2 | 1.5 | -0.4 | 0.4 |
| 5 | -2 | -2 | -0.9+j7 | -0.9-j7 | j7 | -j7 | 0.9+j7 | 0.9-j7 | 2 | 2 | -0.5 | 0.5 |
| 6 | -2.5 | -2.5 | -1+j8 | -1-j8 | j8 | -j8 | 1+j8 | 1-j8 | 2.5 | 2.5 | -0.6 | 0.6 |
| 7 | -3 | -1 | -1.1+j9 | -1.1-j9 | j9 | -j9 | 1.1+j9 | 1.1-j9 | 3 | 1 | -0.7 | 0.7 |
| 8 | -3 | -1.5 | -1.2+j10 | -1.2-j10 | j10 | -j10 | 1.2+j10 | 1.2-j10 | 3 | 1.5 | -0.8 | 0.8 |
| 9 | -3 | -2 | -1.3+j11 | -1.3-j11 | j11 | -j11 | 1.3+j11 | 1.3-j11 | 3 | 2 | -0.9 | 0.9 |
| 10 | -3 | -3 | -1.4+j12 | -1.4-j12 | j12 | -j12 | 1.4+j12 | 1.4-j12 | 3 | 3 | -1 | 1 |
| 11 | -4 | -3 | -1.6+j13 | -1.6-j13 | j13 | -j13 | 1.6+j13 | 1.6-j13 | 4 | 3 | -1.2 | 1.2 |
| 12 | -4 | -4 | -1.7+j14 | -1.7-j14 | j14 | -j14 | 1.7+j14 | 1.7-j14 | 4 | 4 | -1.3 | 1.3 |

Таблица 3.2

Результаты вычислений

| № | Корни | | Параметры системы | | Начальные условия | | Свободная составляющая $y_{св}(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $a_0$ | $a_1$ | $y(0)$ | $\dot{y}(0)$ | |
| 1 | | | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| 6 | | | | | | | |

Таблица 3.3

Варианты параметров системы и входного воздействия

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_0$ | 4 | 1 | 4 | 4 | 3 | 1 | 4 | 1 | 4 | 4 | 3 | 1 |
| $a_1$ | 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 3 |
| $b$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| $g_1(t)$ | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 2 | 2.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 1 | 1.5 |
| $g_2(t)$ | $0.5t$ | $0.4t$ | $0.8t$ | $0.6t$ | $0.8t$ | $0.6t$ | $0.5t$ | $0.4t$ | $0.8t$ | $0.6t$ | $0.5t$ | $0.4t$ |
| $g_3(t)$ | $\sin(2t)$ | $\cos(2t)$ | $\sin(3t)$ | $\cos(t)$ | $\sin(3t)$ | $\cos(t)$ | $\sin(2t)$ | $\cos(2t)$ | $\sin(3t)$ | $\cos(t)$ | $\sin(2t)$ | $\cos(2t)$ |