H_2 и H_∞ управление

«Размеры» сигналов

«Размер» вектора $v \in \mathbb{R}^n$

$$|v| = \sqrt{v^T v}$$

«Размер» сигнала f, если $f(t) \in \mathbb{R}^n$

?

«Размер» сигнала f, если $f(t) \in \mathbb{R}^n$

"Energy" (Евклидова норма)

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty |f(t)|^2 dt}$$

"Peak" (наибольшее значение)

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$$

"Impulse" (размер импульсных сигналов)

Если $f(t) = f_0 \delta(t)$, то размер сигнала определяется как $|f_0|$

Gain'ы линейных систем

$f(t)$ – какое-то внешнее возмущение, а не управляющее воздействие. $f(t)$ – действует на нашу уже замкнутую каким-то регулятором систему.

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{Линейная система}} \longrightarrow y(t)$$

Систему можно охарактеризовать степенью усиления (Gain’ом)

$$\Gamma = \sup_{f \neq 0} \left(\frac{\text{размер}(y)}{\text{размер}(f)} \right)$$

Линейный факт

$$\Gamma = \text{наибольший размер}(y) \text{ при условии, что размер}(f) \leq 1$$

$$\Gamma = \sup_{f \neq 0} \left(\frac{\text{размер}(y)}{\text{размер}(f)} \right)$$

Impulse-to-Energy (при $f(t) = f_0 \delta(t)$)

$$\Gamma_{ie} = \sup \frac{\|y\|_2}{|f_0|} = \sup_{|f_0| \leq 1} \|y\|_2$$

Energy-to-Peak

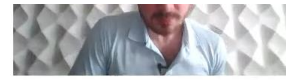
$$\Gamma_{ep} = \sup \frac{\|y\|_\infty}{\|f\|_2} = \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \|y\|_\infty$$

Energy-to-Energy

$$\Gamma_{ee} = \sup \frac{\|y\|_2}{\|f\|_2} = \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \|y\|_2$$

Peak-to-Peak

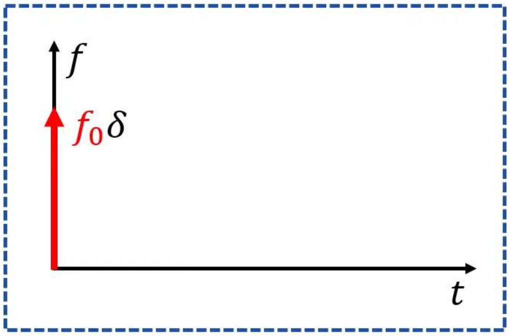
$$\Gamma_{pp} = \sup \frac{\|y\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|y\|_\infty$$



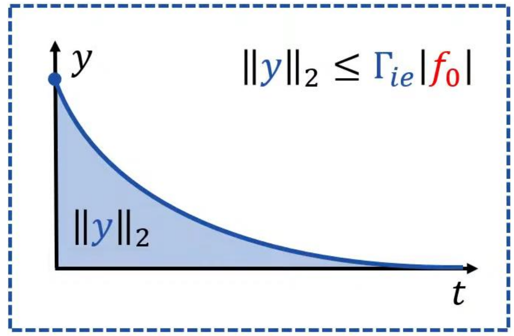
Impulse-to-Energy

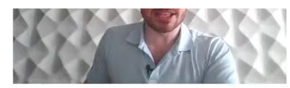
$$\Gamma_{ie} = \sup \frac{\|y\|_2}{|f_0|} = \sup_{|f_0| \le 1} \|y\|_2$$

Входной сигнал



Выходной сигнал

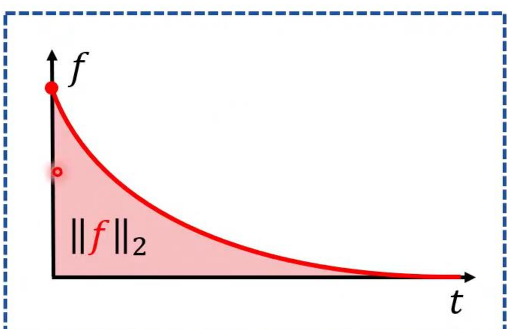




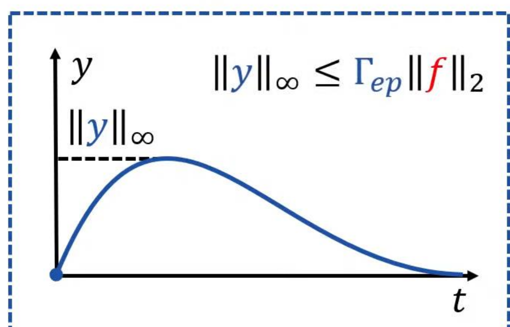
Energy-to-Peak

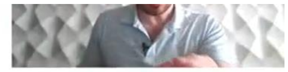
$$\Gamma_{ep} = \sup \frac{\|y\|_\infty}{\|f\|_2} = \sup_{\|f\|_2 \le 1} \|y\|_\infty$$

Входной сигнал



Выходной сигнал

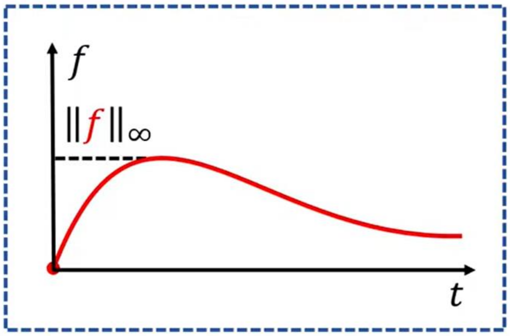




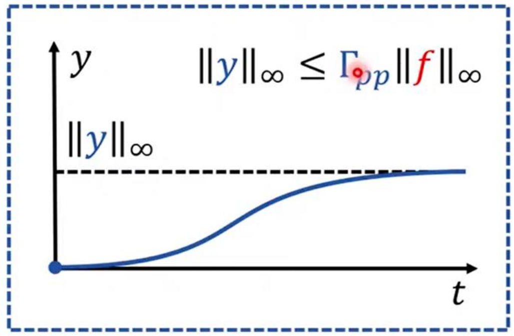
Peak-to-Peak

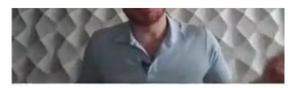
$$\Gamma_{pp} = \sup \frac{\|y\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \|y\|_\infty$$

Входной сигнал



Выходной сигнал

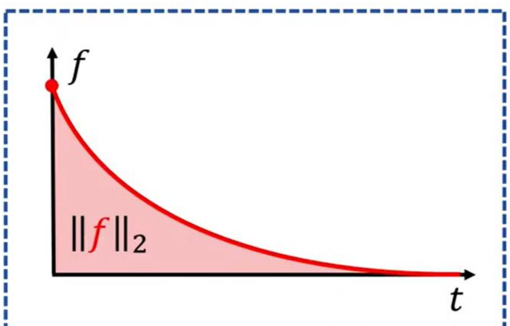




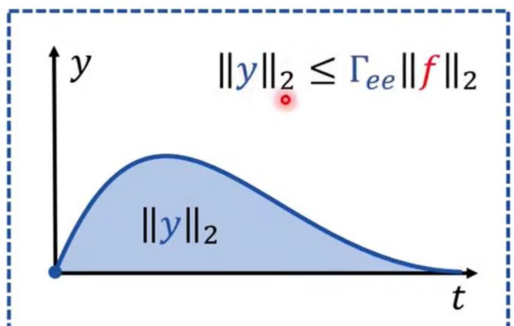
Energy-to-Energy

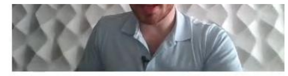
$$\Gamma_{ee} = \sup \frac{\|y\|_2}{\|f\|_2} = \sup_{\|f\|_2 \le 1} \|y\|_2$$

Входной сигнал



Выходной сигнал





$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bf \\ y = Cx\end{cases}$$

Асимптотически устойчивая система

Impulse-to-Energy

$$\Gamma_{ie}^2 = \lambda_{\max}(B^T Q B)$$

Energy-to-Peak

$$\Gamma_{ep}^2 = \lambda_{\max}(C P C^T)$$

Грамиан наблюдаемости

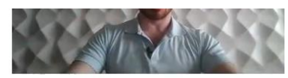
$$Q = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At}\, dt$$

$$QA + A^T Q + C^T C = 0$$

Грамиан управляемости

$$P = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt$$

$$AP + PA^T + BB^T = 0$$



$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bf \\ y = Cx + Df\end{cases}$$

Асимптотически устойчивая система

Energy-to-Energy

$$\Gamma_{ee} < \gamma$$

$\Leftrightarrow$

Существует $P \succ 0$ такая, что

$$\begin{bmatrix} AP + PA^T & B & PC^T \\ B^T & -\gamma I & D^T \\ CP & D & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0$$

$\Leftrightarrow$

Существует $Q \succ 0$ такая, что

$$\begin{bmatrix} QA + A^T Q & QB & C^T \\ B^T Q & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0$$

H_2 и H_∞ нормы передаточных функций

Если один вход и один выход (SISO) и $W(s)$ – передаточная функция

$\mathcal{H}_2$-норма

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathcal{H}_\infty$-норма

$$\|W\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} |W(j\omega)|$$

Что это такое?

АЧХ системы

(лекция 5)

Евклидова норма АЧХ

(«корень из суммы квадратов»)

Наибольшее значение АЧХ

Примеры

Апериодическое звено 2-го порядка

$$W_1(s) = \frac{20}{s^2 + 6s + 9} \qquad A_1(\omega) = \left|\frac{20}{(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 9}\right| \qquad A_1(\omega) = \frac{20}{\sqrt{(9-\omega^2)^2 + (6\omega)^2}}$$

$$\|W_1\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(A_1(\omega)\right)^2 d\omega} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{400}{(9-\omega^2)^2 + (6\omega)^2} d\omega} = \frac{10}{3\sqrt{3}} \approx 1.92$$

$$\|W_1\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} |A_1(\omega)| = \sup_{\omega} \left|\frac{20}{\sqrt{(9-\omega^2)^2 + (6\omega)^2}}\right| = \frac{20}{9} \approx 2.22$$

Колебательное звено

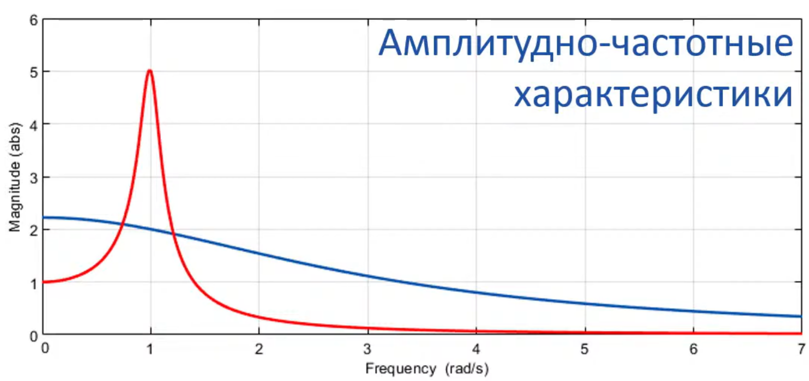
$$W_2(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1} \qquad A_2(\omega) = \left|\frac{1}{(j\omega)^2 + 0.2(j\omega) + 1}\right| \qquad A_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (0.2\omega)^2}}$$

$$\|W_2\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(A_2(\omega)\right)^2 d\omega} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1-\omega^2)^2 + (0.2\omega)^2} d\omega} = \sqrt{2.5} \approx 1.58$$

$$\|W_2\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} |A_2(\omega)| = \sup_{\omega} \left|\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (0.2\omega)^2}}\right| \approx 5.03$$

$$W_1(s) = \frac{20}{s^2 + 6s + 9} \qquad W_2(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

$$\|W_1\|_{\mathcal{H}_2} \approx 1.92 \qquad \|W_1\|_{\mathcal{H}_\infty} \approx 2.22 \qquad \|W_2\|_{\mathcal{H}_2} \approx 1.58 \qquad \|W_2\|_{\mathcal{H}_\infty} \approx 5.03$$



Таким образом, мы можем сравнивать «размер» усиления системы, который она несет.

В среднем внешним возмущения меньше подвержена вторая система, а в пике (в наихудшем случае) – первая.

H_2 и H_∞ нормы передаточных матриц

Если несколько входов и выходов (MIMO) и $W(s)$ – передаточная матрица

$\mathcal{H}_2$-норма

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{trace}\left(W^*(j\omega) W(j\omega)\right) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Эрмитово сопряжение (транспонирование + комплексное сопряжение)

$\mathcal{H}_\infty$-норма

$$\|W\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} \sigma_{\max}\left(W(j\omega)\right)$$

Наибольшее сингулярное число

Попытка объяснить формулы выше через математику

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \qquad \operatorname{trace}(A^T A) = ?$$

Три математических смысла

$$\operatorname{trace}(A^T A) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{12}^2$$

Квадраты элементов матрицы A

$$\operatorname{trace}(A^T A) = \lambda_1(A^T A) + \lambda_2(A^T A) + \lambda_3(A^T A)$$

Собственные числа матрицы $A^T A$

$$\operatorname{trace}(A^T A) = \sigma_1^2(A) + \sigma_2^2(A) + \sigma_3^2(A)$$

Квадраты сингулярных чисел матрицы A

$$W(j\omega) = \begin{bmatrix} W_1(j\omega) & W_2(j\omega) & W_3(j\omega) & W_4(j\omega) \\ W_5(j\omega) & W_6(j\omega) & W_7(j\omega) & W_8(j\omega) \\ W_9(j\omega) & W_{10}(j\omega) & W_{11}(j\omega) & W_{12}(j\omega) \end{bmatrix} \qquad \|W\|^2_{\mathcal{H}_2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{trace}(W^*W)d\omega = ?$$

$$\|W\|^2_{\mathcal{H}_2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (|W_1|^2 + |W_2|^2 + |W_3|^2 + \cdots + |W_{12}|^2)d\omega$$

$|W_i|$ – элементарные АЧХ (от одного из входов к одному из выходов)

$$\|W\|^2_{\mathcal{H}_2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\lambda_1(W^*W) + \lambda_2(W^*W) + \lambda_3(W^*W)\big)d\omega$$

Каждое собственное число зависит от частоты ω

$$\|W\|^2_{\mathcal{H}_2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\sigma_1^2(W) + \sigma_2^2(W) + \sigma_3^2(W)\big)\, d\omega$$

Каждое сингулярное число зависит от частоты ω

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \qquad \sigma_{\max}(A) = ?$$

Математический смысл

$$\sigma_{\max}(A) = \max_i \sigma_i(A) \quad \longleftarrow$$ Самое большое сингулярное число

$$\sigma_{\max}(A) = \max_{x\neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} \quad \longleftarrow$$ Наибольшее удлиннение, которое может дать матрица A вектору x

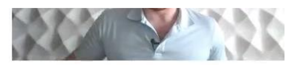
Одно число, характеризующее максимальную силу, которую может проявить матрица

$$W(j\omega) = \begin{bmatrix} W_1(j\omega) & W_2(j\omega) & W_3(j\omega) & W_4(j\omega) \\ W_5(j\omega) & W_6(j\omega) & W_7(j\omega) & W_8(j\omega) \\ W_9(j\omega) & W_{10}(j\omega) & W_{11}(j\omega) & W_{12}(j\omega) \end{bmatrix} \qquad \|W\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_\omega \sigma_{\max}(W) = ?$$

$\sigma_{\max}(W(j\omega))$ — Наибольшее “усиление”, которое система может дать синусоидальному векторному сигналу фиксированный частоты ω

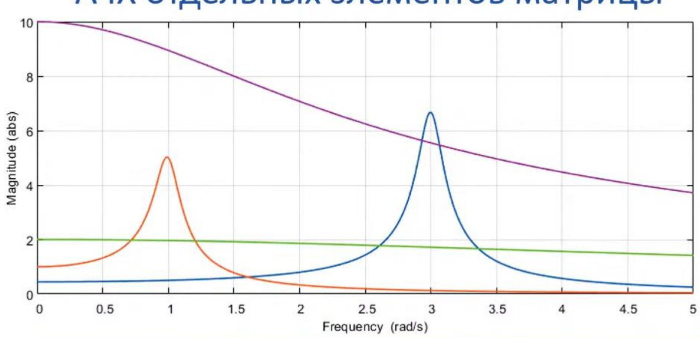
$\sup\limits_\omega \sigma_{\max}(W(j\omega))$ — Наибольшее “усиление”, которое система может дать синусоидальному векторному сигналу среди всех частот

Примеры H_∞ нормы передаточных матриц

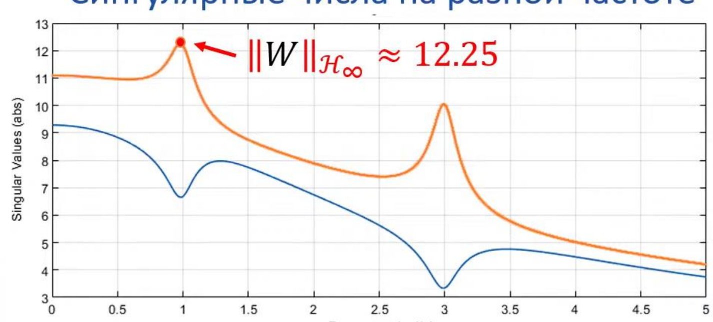


$$W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{s^2+0.2s+9} & \dfrac{20}{s+2} \\ \dfrac{20}{s+2} & \dfrac{1}{s^2+0.2s+1} \\ \dfrac{10}{s+5} & \dfrac{10}{s+5} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

АЧХ отдельных элементов матрицы



Сингулярные числа на разной частоте

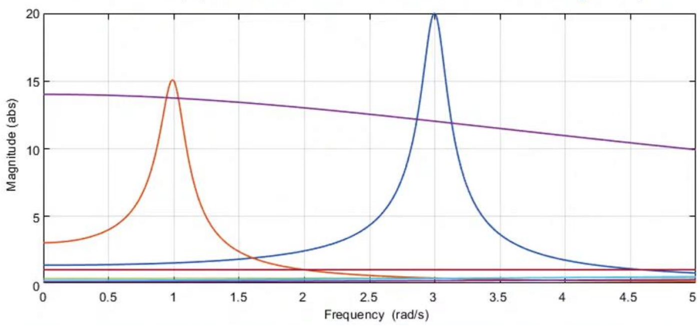


То есть сингулярные числа справа на графике показывают в совокупности все что содержится в 6 АЧХ отдельных.

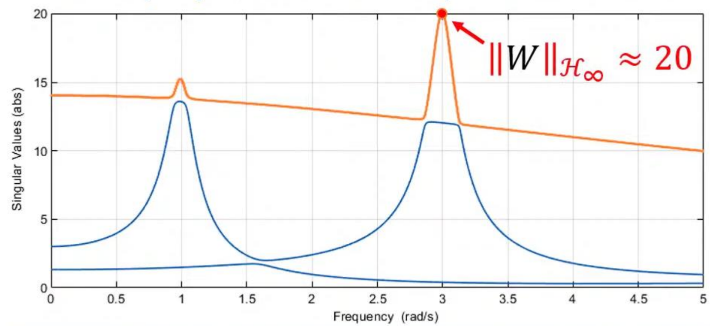
Они в итоге оценивают, насколько большое усиление дает система.

$$W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{36}{s^2+0.2s+9} & \dfrac{s-2}{s+20} & \dfrac{s-7}{s+20} & \dfrac{s-2}{s+10} \\ \dfrac{s-2}{s+20} & \dfrac{s-2}{s+20} & 1 & \dfrac{3}{s^2+0.2s+1} \\ \dfrac{s-7}{s+20} & \dfrac{s-2}{s+20} & \dfrac{70}{s+5} & \dfrac{s-2}{s+20} \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

АЧХ отдельных элементов матрицы



Сингулярные числа на разной частоте



Весовая матрица системы

Весовая матрица системы

$$H(t) = Ce^{At}B \quad (\text{при } t \geq 0)$$

Каждый элемент – соответствующий Impulse Response

$$\begin{matrix} y_1(t) \leftarrow \\ y_2(t) \leftarrow \\ y_3(t) \leftarrow \end{matrix} \quad \boxed{H(t) = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & h_{13}(t) & h_{14}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & h_{23}(t) & h_{24}(t) \\ h_{31}(t) & h_{32}(t) & h_{33}(t) & h_{34}(t) \end{bmatrix}} \quad \begin{matrix} \leftarrow u_1(t) \\ \leftarrow u_2(t) \\ \leftarrow u_3(t) \\ \leftarrow u_4(t) \end{matrix}$$

Образ Лапласа

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = W(s)$$

Образ Фурье

$$\mathcal{F}\{H(t)\} = W(j\omega)$$

Преобразование Фурье

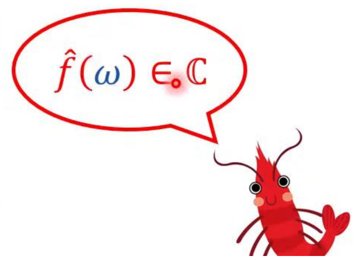
$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

“Изменив точку зрения, ты можешь увидеть вещи, невиданные раннее”

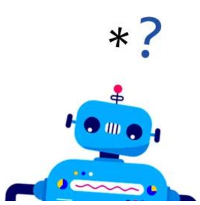
— Кот Платон

Равенство Парсеваля для $f(t) \in \mathbb{R}$

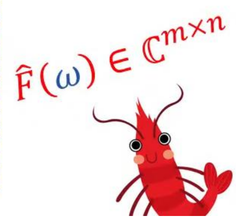
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$



Равенство Парсеваля для $F(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{trace}\big(F^T(t)F(t)\big)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{trace}\left(\hat{F}^*(\omega)\hat{F}(\omega)\right)d\omega$$



$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{trace}\big(W^*(j\omega)W(j\omega)\big)d\omega$$

Равенство Парсеваля

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{trace}\big(H^T(t)H(t)\big)dt$$

Весовая матрица

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \int_0^{\infty} \mathrm{trace}\big((Ce^{At}B)^T(Ce^{At}B)\big)dt$$

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \int_0^{\infty} \mathrm{trace}\big((Ce^{At}B)^T(Ce^{At}B)\big)dt = \int_0^{\infty} \mathrm{trace}\big((Ce^{At}B)(Ce^{At}B)^T\big)dt$$

$$\boxed{\mathrm{trace}(XY) = \mathrm{trace}(YX)}$$

Свойство следа

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \int_0^{\infty} \mathrm{trace}\big((Ce^{At}B)^T(Ce^{At}B)\big)dt = \int_0^{\infty} \mathrm{trace}\big((Ce^{At}B)(Ce^{At}B)^T\big)dt$$

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \int_0^{\infty} \mathrm{trace}\left(B^T e^{A^T t} C^T C e^{At} B\right) dt$$

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \mathrm{trace}\left(B^T \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt\, B\right)$$

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \mathrm{trace}(B^T Q B)$$

Грамиан наблюдаемости

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \int_0^{\infty} \mathrm{trace}\left(C e^{At} B B^T e^{A^T t} C^T\right) dt$$

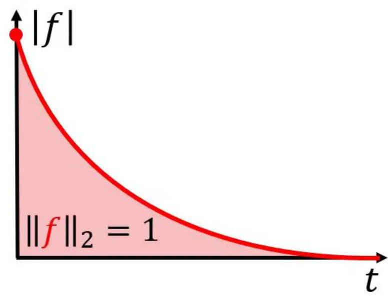
$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \mathrm{trace}\left(C \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt\, C^T\right)$$

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \mathrm{trace}(C P C^T)$$

Грамиан управляемости

Геометрический смысл Грамиана управляемости

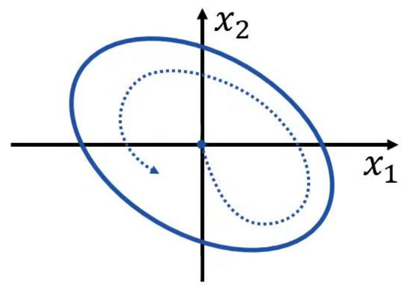
Входной сигнал



Входной сигнал имеет единичную энергию

$$\|f\|_2 = 1$$

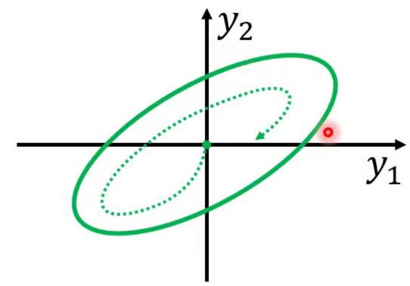
Траектория состояния



Вектор состояния не покидает эллипсоид

$$x^T P^{-1} x \leq 1$$

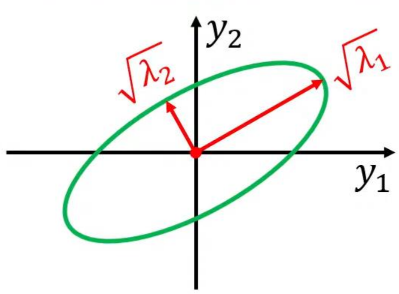
Траектория выхода



Вектор выхода не покидает эллипсоид

$$y^T (CPC^T)^{-1} y \leq 1$$

Траектория выхода



Вектор выхода не покидает эллипсоид

$$y^T (CPC^T)^{-1} y \leq 1$$

$\mathcal{H}_2$-норма системы

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \mathrm{trace}(CPC^T)$$

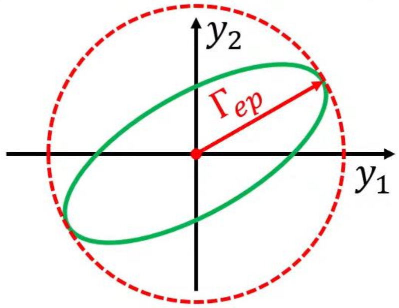
$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \lambda_1(CPC^T) + \cdots + \lambda_k(CPC^T)$$

Сумма квадратов полуосей эллипсоида

Energy-to-Peak Gain

$$\Gamma_{ep}^2 = \lambda_{\max}(CPC^T)$$

Траектория выхода



Вектор выхода не покидает эллипсоид

$$y^T (CPC^T)^{-1} y \le 1$$

$\mathcal{H}_2$-норма системы

$$\|W\|^2_{\mathcal{H}_2} = \mathrm{trace}(CPC^T)$$

$$\|W\|^2_{\mathcal{H}_2} = \lambda_1(CPC^T) + \cdots + \lambda_k(CPC^T)$$

Сумма квадратов полуосей эллипсоида

Energy-to-Peak Gain

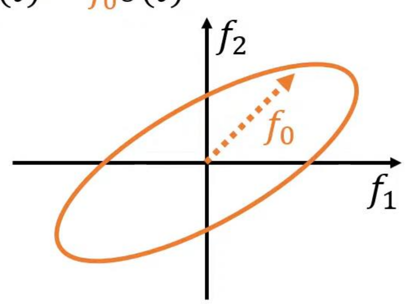
$$\Gamma^2_{ep} = \lambda_{\max}(CPC^T)$$

Квадрат наибольшей полуоси эллипсоида

Геометрический смысл Грамиана наблюдаемости

Импульсный вход

$f(t) = f_0 \delta(t)$

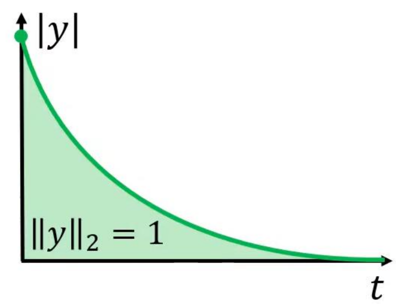


"Направление" импульсного сигнала лежит в эллипсоиде

$$f_0^T (B^T Q B) f_0 \le 1$$

$\Rightarrow$

Выходной сигнал

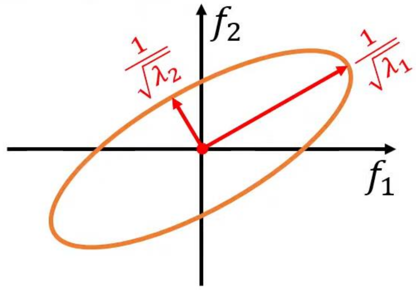


Выходной сигнал имеет единичную энергию

$$\|y\|_2 = 1$$

Импульсный вход

$f(t) = f_0 \delta(t)$



"Направление" импульсного сигнала лежит в эллипсоиде

$$f_0^T (B^T Q B) f_0 \leq 1$$

$\mathcal{H}_2$-норма системы

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \mathrm{trace}(B^T Q B)$$

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \lambda_1(B^T Q B) + \cdots + \lambda_m(B^T Q B)$$

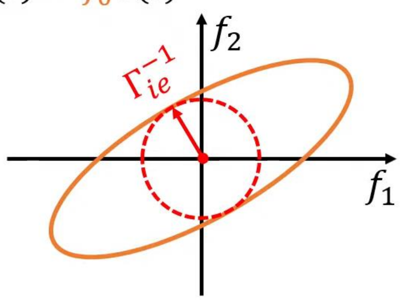
Сумма обратных квадратов полуосей эллипсоида

Impulse-to-Energy Gain

$$\Gamma_{ie}^2 = \lambda_{\max}(B^T Q B)$$

Импульсный вход

$f(t) = f_0 \delta(t)$



"Направление" импульсного сигнала лежит в эллипсоиде

$$f_0^T (B^T Q B) f_0 \leq 1$$

$\mathcal{H}_2$-норма системы

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \mathrm{trace}(B^T Q B)$$

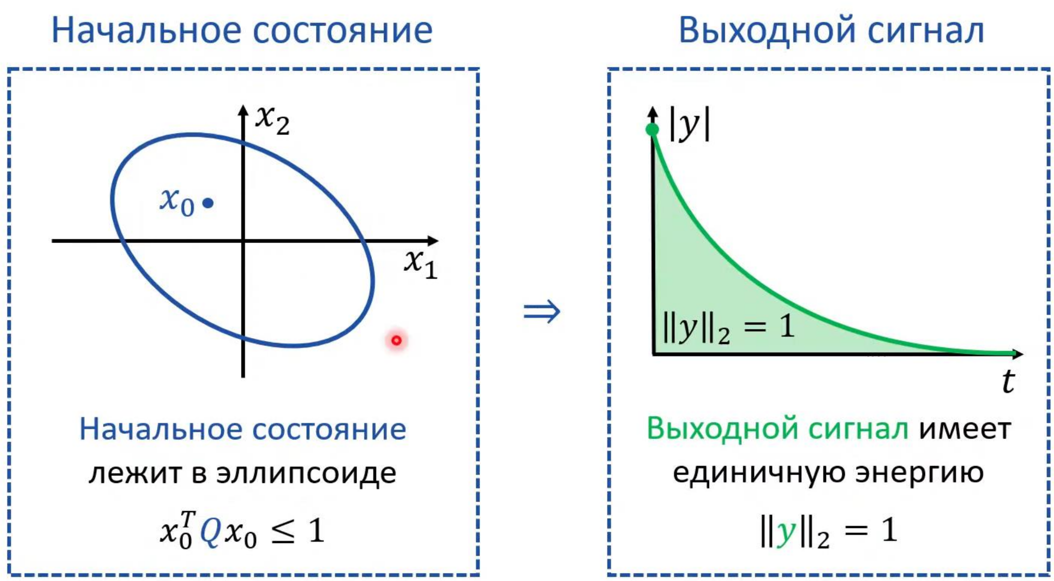
$$\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \lambda_1(B^T Q B) + \cdots + \lambda_m(B^T Q B)$$

Сумма обратных квадратов полуосей эллипсоида

Impulse-to-Energy Gain

$$\Gamma_{ie}^2 = \lambda_{\max}(B^T Q B)$$

Обратный квадрат наименьшей полуоси эллипсоида



Связь Γ_{ie} и Γ_{ep} с H_2-нормой

Impulse-to-Energy

$$\Gamma_{ie} = \sqrt{\lambda_{\max}(B^T Q B)}$$

Energy-to-Peak

$$\Gamma_{ep} = \sqrt{\lambda_{\max}(C P C^T)}$$

$\mathcal{H}_2$-норма системы

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\operatorname{trace}(B^T Q B)} = \sqrt{\operatorname{trace}(C P C^T)}$$

Если система SISO (один вход – один выход)

$$\|W\|_{\mathcal{H}_2} = \Gamma_{ie} = \Gamma_{ep}$$

Связь Γ_{ee} с H_∞-нормой

$$\|y\|_2^2 = \int_0^\infty |y(t)|^2 dt$$

Равенство Парсеваля

$$\|y\|_2^2 = \boxed{\int_0^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{y}(\omega)|^2 d\omega}$$

Равенство Парсеваля

$$\|y\|_2^2 = \boxed{\int_0^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{y}(\omega)|^2 d\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|W(j\omega)\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$

Выход = Передаточная функция × Вход

$$\|y\|_2^2 = \int_0^{\infty} |y(t)|^2 dt = \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{y}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|W(j\omega)\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega}$$

$$\|y\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|W(j\omega)\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$

Обычное неравенство

$$\boxed{|Ax| \leq \sigma_{\max}(A) \cdot |x|}$$

Равенство, если x – подходящий сингулярный вектор матрицы A,

В нашем случае (для каждой из частот ω)

$$\boxed{\left|W(j\omega)\hat{f}(\omega)\right| \leq \sigma_{\max}\big(W(j\omega)\big) \cdot \left|\hat{f}(\omega)\right|}$$

Равенство (для частоты ω), если $\hat{f}(\omega)$ – подходящий сингулярный вектор матрицы $W(j\omega)$

$$\|y\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| W(j\omega)\hat{f}(\omega) \right|^2 d\omega$$

Обычное неравенство

$$|Ax| \leq \sigma_{\max}(A) \cdot |x|$$

В нашем случае (для каждой из частот ω)

$$\left| W(j\omega)\hat{f}(\omega) \right| \leq \sigma_{\max}\big(W(j\omega)\big) \cdot \left| \hat{f}(\omega) \right|$$

$$\|y\|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sigma_{\max}\big(W(j\omega)\big) \cdot \left| \hat{f}(\omega) \right| \right)^2 d\omega$$

Обычное неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) h(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_x \big(g(x)\big) h(x) dx$$

Обычное неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) h(x) dx \leq \sup_x \big(g(x)\big) \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx$$

Для нашего случая

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sigma_{\max}\big(W(j\omega)\big) \cdot \left| \hat{f}(\omega) \right| \right)^2 d\omega \leq \sup_\omega \left(\sigma_{\max}^2\big(W(j\omega)\big) \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(\omega) \right|^2 d\omega$$

$$\|y\|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi} \sup_\omega \left(\sigma_{\max}^2\big(W(j\omega)\big) \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(\omega) \right|^2 d\omega$$

$$\|y\|_2^2 \le \sup_{\omega}\left(\sigma_{\max}^2\left(W(j\omega)\right)\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$

$$\|y\|_2^2 \le \sup_{\omega}\left(\sigma_{\max}^2\left(W(j\omega)\right)\right)\|f\|_2^2$$

$$\|y\|_2^2 \le \|W\|_{\mathcal{H}_\infty}^2\|f\|_2^2$$

Равенство достижимо $\longrightarrow$ $$\frac{\|y\|_2}{\|f\|_2} \le \|W\|_{\mathcal{H}_\infty}$$

$$\sup\frac{\|y\|_2}{\|f\|_2} = \|W\|_{\mathcal{H}_\infty}$$

Только что доказанный факт

$$\boxed{\sup\frac{\|y\|_2}{\|f\|_2} = \|W\|_{\mathcal{H}_\infty}}$$

Определение Energy-to-Energy Gain

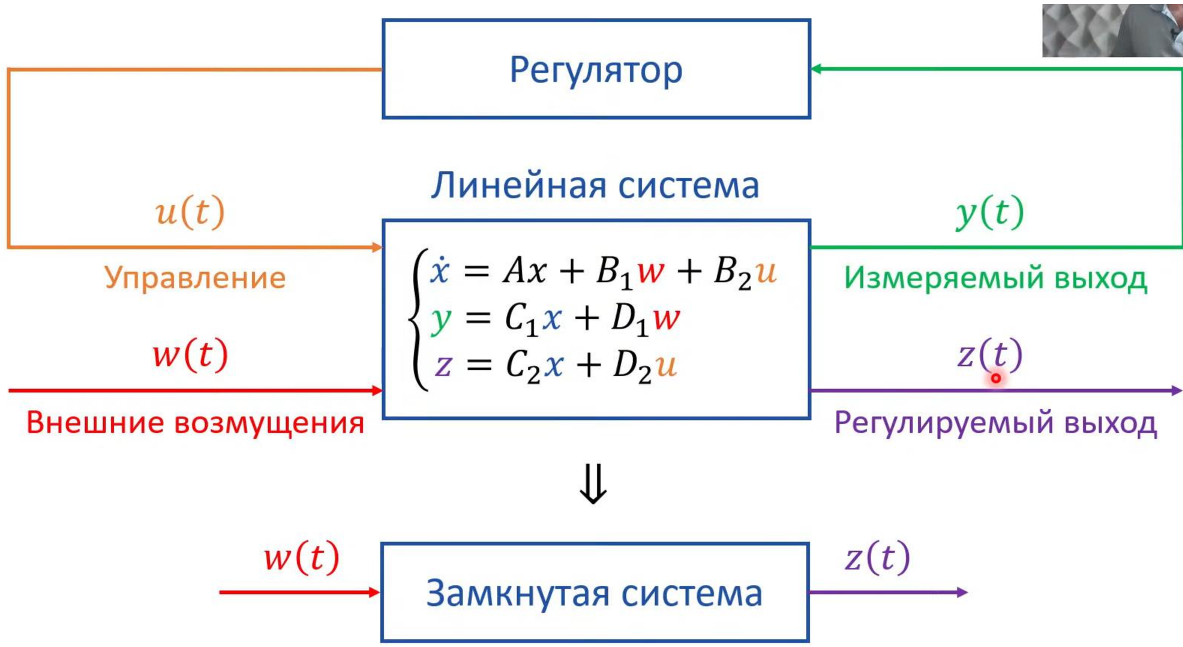
$$\boxed{\Gamma_{ee} = \sup\frac{\|y\|_2}{\|f\|_2}}$$

$$\boxed{\|W\|_{\mathcal{H}_\infty} = \Gamma_{ee}}$$

Видим	Хотим свести в ноль	Наше воздействие	Воздействие мира
$y(t)$	$z(t)$	$u(t)$	$w(t)$

Два игрока – u и w – играют друг против друга, мы играем за u

На замкнутую систему воздействует внешнее возмущение $w(t)$, порождая ненулевой регулируемый выход $z(t)$



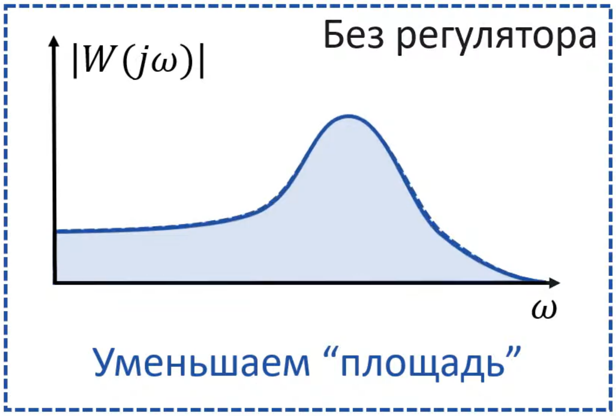
Задача синтеза

Сделать такой закон управления, при котором внешние возмущения будут минимальным образом влиять на регулируемый выход

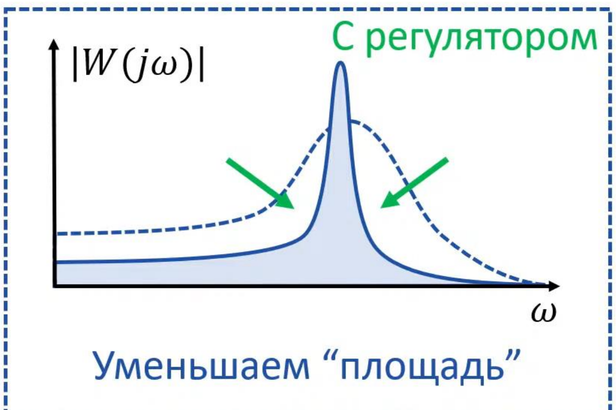
$$\Gamma = \sup \frac{\|z\|}{\|f\|} \to \min \qquad \|W\| \to \min$$

Передаточная функция замкнутой системы: $W_{w\to z}(s)$

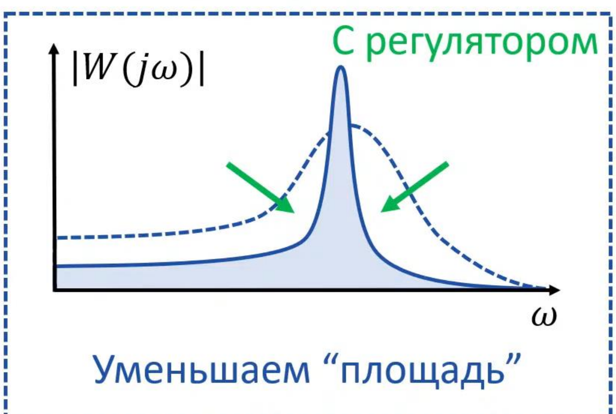
$\mathcal{H}_2$-управление



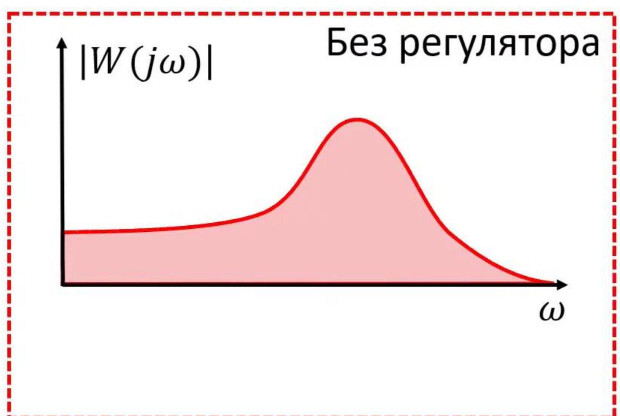
$\mathcal{H}_2$-управление



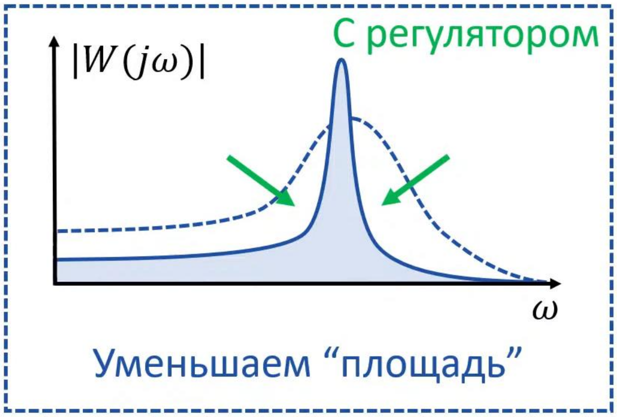
$\mathcal{H}_2$-управление



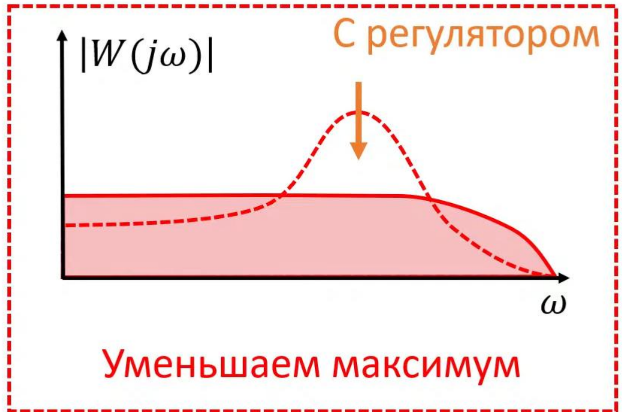
$\mathcal{H}_\infty$-управление



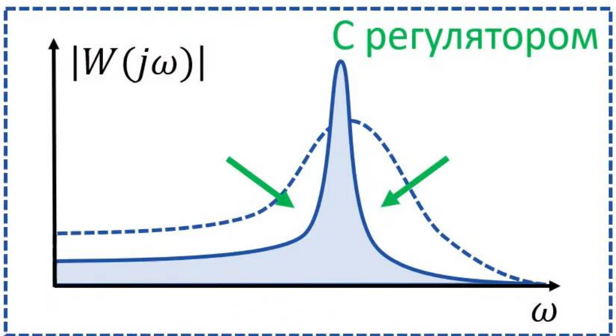
$\mathcal{H}_2$-управление



$\mathcal{H}_\infty$-управление

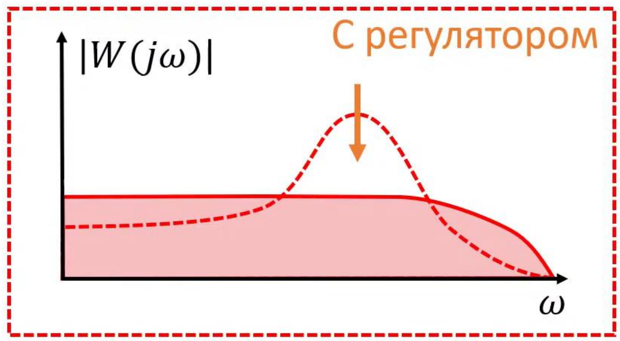


$\mathcal{H}_2$-управление



Боремся против
среднестатистического
возмущения

$\mathcal{H}_\infty$-управление



Боремся против
самого плохого
возмущения

Улучшаем
среднюю температуру
по больнице

Спасаем
самого тяжёлого
пациента

Объект	Регулятор	Целевой критерий
$\begin{cases}\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_2 x + D_2 u\end{cases}$	$u = Kx$	$\left\Vert \underset{w\to z}{W}(s) \right\Vert_{\mathcal{H}_2} \to \min$

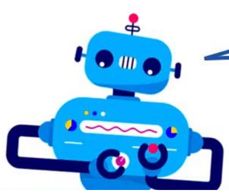
Предположение ради упрощения формул: $C_2^T D_2 = 0$

Поясняющий пример

$$z = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_2 \\ 5u \end{bmatrix}$$

Уравнения $\mathcal{H}_2$-регулятора

$$\begin{cases} A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = 0 \\ K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q \end{cases}$$



ТАК, И КТО ЭТО БУДЕТ ВЫВОДИТЬ?

Студенты сами выведут по аналогии с LQR

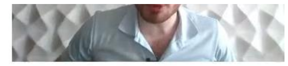
Если $C_2^T D_2 = 0$, $D_2^T D_2$ обратима, (A, B_2) стабилизируема, (C_2, A) обнаруживаема, то существует решение $Q \succ 0$ уравнения Риккати, и соответствующий регулятор делает замкнутую систему устойчивой + доставляет минимум её $\mathcal{H}_2$-норме

Грамиан наблюдаемости
замкнутой системы

$$Q$$

$\mathcal{H}_2$-норма замкнутой системы

$$\left\Vert \underset{w\to z}{W}(s) \right\Vert_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\operatorname{trace}(B_1^T Q B_1)}$$



Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases}$$

Регулятор

$$u = Kx$$

Частный случай

$$C_2 = \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix}$$

Следствие

$$C_2^T D_2 = 0$$

Обозначения

$$C_2^T C_2 = X^T X = Q \quad D_2^T D_2 = Y^T Y = R$$

Квадрат Евклидовой нормы выходного сигнала

$$\|z\|_2^2 = \int_0^\infty z^T z dt = \int_0^\infty (C_2 x + D_2 u)^T (C_2 x + D_2 u) dt = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Уравнения $\mathcal{H}_2$-регулятора

$$\begin{cases} A^T Q + QA + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = 0 \\ K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q \end{cases}$$

Уравнения LQR-регулятора

$$\begin{cases} A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \\ K = -R^{-1} B^T P \end{cases}$$

LQR и $\mathcal{H}_2$-регулятор – одно и то же!

Синтез H_2-наблюдателя

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} \\ \hat{z} = C_2 \hat{x} \end{cases}$$

Целевой критерий

$$\left\| \underset{w \to (z-\hat{z})}{W}(s) \right\|_{\mathcal{H}_2} \to \min$$

Предположение ради упрощения формул: $B_1 D_1^T = 0$

Поясняющий пример

$$w = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \xi \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{Возмущения} \\ \\ \leftarrow \text{Помеха} \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \xi \end{bmatrix} = \xi$$

Уравнения $\mathcal{H}_2$-наблюдателя

$$\boxed{\begin{cases} AP + PA^T + B_1 B_1^T - PC_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P = 0 \\ L = -PC_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} \end{cases}}$$

Если $B_1 D_1^T = 0$, $D_1 D_1^T$ обратима, (C_1, A) обнаруживаема и (A, B_1) стабилизируема, то существует решение $P \succ 0$ уравнения Риккати, и соответствующий наблюдатель имеет устойчивую динамику ошибки + соответствующая $\mathcal{H}_2$-норма минимальна

Грамиан управляемости замкнутой системы

$$P$$

$\mathcal{H}_2$-норма замкнутой системы

$$\left\| \underset{w \to (z-\hat{z})}{W}(s) \right\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\operatorname{trace}(C_2 P C_2^T)}$$

Сравнение H_2-наблюдателя с фильтром Калмана

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = C_1 x + D_1 w \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} \end{cases}$$

Внешние сигналы

$$f = B_1 w \quad \xi = D_1 w$$

Частный случай

$$B_1 = [X \quad 0] \quad D_1 = [0 \quad Y] \quad B_1 D_1^T = 0$$

Обозначения

$$B_1 B_1^T = XX^T = Q \quad D_1 D_1^T = YY^T = R$$

Корреляционные функции (типа дисперсии)

"Единичный" сигнал

$$\mathbb{E}\big(w(t)w^T(\tau)\big) = I\delta(t-\tau) \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbb{E}\big(f(t)f^T(\tau)\big) = \mathbb{E}(B_1 w(t)w^T(\tau)B_1^T) = Q\delta(t-\tau) \\ \mathbb{E}\big(\xi(t)\xi^T(\tau)\big) = \mathbb{E}(D_1 w(t)w^T(\tau)D_1^T) = R\delta(t-\tau) \end{array}$$

Уравнения $\mathcal{H}_2$-наблюдателя

$$\begin{cases} AP + PA^T + B_1 B_1^T - PC_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P = 0 \\ L = -PC_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} \end{cases}$$

Уравнения фильтра Калмана

$$\begin{cases} AP + PA^T + Q - PC_1^T R^{-1} C_1 P = 0 \\ L = -PC_1^T R^{-1} \end{cases}$$

Фильтр Калмана и $\mathcal{H}_2$-наблюдатель – одно и то же!

H_2-управление по выходу

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases}$$

Полный регулятор

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} \\ u = K\hat{x} \end{cases}$$

Уравнения полного $\mathcal{H}_2$-регулятора (LQG)

$$\begin{cases} AP + PA^T + B_1 B_1^T - PC_1^T (D_1^T D_1)^{-1} C_1 P = 0 \\ L = -PC_1^T (D_1^T D_1)^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = 0 \\ K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q \end{cases}$$

Оптимальность

$$\left\| \underset{w \to z}{W}(s) \right\|_{\mathcal{H}_2} \to \min$$

Separation principle

Уравнения независимы

Постановка задачи о H_∞-регуляторе

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases}$$

Регулятор

$$u = Kx$$

Целевой критерий

$$\left\| \underset{w \to z}{W}(s) \right\|_{\mathcal{H}_\infty} \to \min$$

Непосредственно найти регулятор K, который придаст $\mathcal{H}_\infty$-норме замкнутой системы самое маленькое возможное значение – трудно!

Но можно задаться числом γ и (если это в принципе возможно для данной системы) найти регулятор, который гарантирует, что

$$\left\| \underset{w \to z}{W}(s) \right\|_{\mathcal{H}_\infty} \le \gamma$$

Целевое неравенство

$$\boxed{\|z\|_2 \le \Gamma_{ee}\|w\|_2}$$

$$\Gamma_{ee} = \|W\|_{\mathcal{H}_\infty} \le \gamma$$

$$\|z\|_2^2 \le \gamma^2\|w\|_2^2$$

$$\int_0^\infty z^T z dt \le \gamma^2 \int_0^\infty w^T w dt$$

$$\boxed{z = C_2 x + D_2 u}$$

$$\int_0^\infty \big((C_2 x + D_2 u)^T (C_2 x + D_2 u) - \gamma^2 w^T w\big) dt \le 0$$

Для упрощения итоговых формул предположим, что

$$C_2^T D_2 = 0$$

$$\int_0^\infty (x^T C_2^T C_2 x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w) dt \le 0$$

$$\int_0^\infty (x^T C_2^T C_2 x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w) dt \le 0$$

Замкнутая система будет устойчивой

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}(x^T Q x) dt = \lim_{t\to\infty} x^T Q x - x_0^T Q x_0$$

$$\int_0^\infty (x^T C_2^T C_2 x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w) dt \le 0$$

Начальные условия считаем нулевыми

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}(x^T Q x) dt = \lim_{t\to\infty} x^T Q x - x_0^T Q x_0$$

$$\int_0^\infty (x^T C_2^T C_2 x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w)dt \le 0$$

Это штука равна нулю – прибавим её!

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{d}{dt}(x^T Q x)dt = \lim_{t\to\infty} x^T Q x - x_0^T Q x_0 = 0}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{d}{dt}(x^T Q x) + x^T C_2^T C_2 x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w\right)dt \le 0$$

$$\int_0^\infty (\dot{x}^T Q x + x^T Q \dot{x} + x^T C_2^T C_2 x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w)dt \le 0$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u}$$

$$\int_0^\infty \begin{pmatrix} (Ax + B_1 w + B_2 u)^T Q x + x^T Q (Ax + B_1 w + B_2 u) + \\ + x^T C_2^T C_2 x + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w \end{pmatrix} dt \le 0$$

То же самое целевое неравенство при условии, что замкнутая система будет асимптотически устойчива, а матрица Q – любая симметричная

$$\int_0^\infty (x^T(A^T Q + QA + C_2^T C_2)x + 2x^T Q B_1 w + 2x^T Q B_2 u + u^T D_2^T D_2 u - \gamma^2 w^T w)dt \le 0$$

$$\int_0^\infty \boxed{(x^T(A^T Q + QA + C_2^T C_2)x} + \boxed{2x^T Q B_1 w} + \boxed{2x^T Q B_2 u} + \boxed{u^T D_2^T D_2 u} - \boxed{\gamma^2 w^T w})dt \le 0$$

Квадраты и неквадраты

Хотим, чтобы были только квадраты!

$$\int_0^\infty (x^T(A^TQ+QA+C_2^TC_2)x+2x^TQB_1w+2x^TQB_2u+u^TD_2^TD_2u-\gamma^2w^Tw)dt\le 0$$

Выделение полного квадрата по x и u

$x^TMx+2x^TNu+u^TRu=$ (лекция 10)

$x^T(M-NR^{-1}N^T)x+(u+R^{-1}N^Tx)^TR(u+R^{-1}N^Tx)$

$$\int_0^\infty \begin{pmatrix} x^T(A^TQ+QA+C_2^TC_2-QB_2(D_2^TD_2)^{-1}B_2^TQ)x+2x^TQB_1w+ \\ (u+(D_2^TD_2)^{-1}B_2^TQ)^TD_2^TD_2(u+(D_2^TD_2)^{-1}B_2^TQ)-\gamma^2w^Tw \end{pmatrix} dt\le 0$$

$$\int_0^\infty \begin{pmatrix} \boxed{x^T(A^TQ+QA+C_2^TC_2-QB_2(D_2^TD_2)^{-1}B_2^TQ)x}+\boxed{2x^TQB_1w}+ \\ \boxed{(u+(D_2^TD_2)^{-1}B_2^TQ)^TD_2^TD_2(u+(D_2^TD_2)^{-1}B_2^TQ)}-\boxed{\gamma^2w^Tw} \end{pmatrix} dt\le 0$$

x x

Квадраты и неквадрат

Выделение полного квадрата по x и w

$x^TMx+2x^TNw+w^TRw=$ (лекция 10)

$x^T(M-NR^{-1}N^T)x+(w+R^{-1}N^Tx)^TR(w+R^{-1}N^Tx)$

$$\int_0^\infty \begin{pmatrix} x^T\left(A^TQ+QA+C_2^TC_2-QB_2(D_2^TD_2)^{-1}B_2^TQ+\frac{1}{\gamma^2}QB_1B_1^TQ\right)x+ \\ +(u+(D_2^TD_2)^{-1}B_2^TQx)^TD_2^TD_2(u+(D_2^TD_2)^{-1}B_2^TQx)- \\ -\left(w-\frac{1}{\gamma^2}B_1^TQx\right)^T\gamma^2\left(w-\frac{1}{\gamma^2}B_1^TQx\right) \end{pmatrix} dt\le 0$$

$$\int_0^\infty \begin{pmatrix} \boxed{x^T\left(A^TQ+QA+C_2^TC_2-QB_2(D_2^TD_2)^{-1}B_2^TQ+\frac{1}{\gamma^2}QB_1B_1^TQ\right)x}+ \\ +\boxed{(u+(D_2^TD_2)^{-1}B_2^TQx)^TD_2^TD_2(u+(D_2^TD_2)^{-1}B_2^TQx)}- \\ -\boxed{\left(w-\frac{1}{\gamma^2}B_1^TQx\right)^T\gamma^2\left(w-\frac{1}{\gamma^2}B_1^TQx\right)} \end{pmatrix} dt\le 0$$

Когда все квадраты,

$$\int_0^\infty \left(\begin{gathered} x^T \left(A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \tfrac{1}{\gamma^2} Q B_1 B_1^T Q \right) x + \\ + (u + (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q x)^T D_2^T D_2 (u + (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q x) - \\ - \left(w - \tfrac{1}{\gamma^2} B_1^T Q x \right)^T \gamma^2 \left(w - \tfrac{1}{\gamma^2} B_1^T Q x \right) \end{gathered} \right) dt \leq 0$$

Матрица Q до этого момента была произвольной симметричной – какой её следует выбрать?

Выбирай уравнение Риккати – и не выбирай вообще!

$$\boxed{A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} Q B_1 B_1^T Q = 0}$$

$$\int_0^\infty \left(\begin{gathered} x^T \left(A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \tfrac{1}{\gamma^2} Q B_1 B_1^T Q \right) x + \\ + (u + (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q x)^T D_2^T D_2 (u + (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q x) - \\ - \left(w - \tfrac{1}{\gamma^2} B_1^T Q x \right)^T \gamma^2 \left(w - \tfrac{1}{\gamma^2} B_1^T Q x \right) \end{gathered} \right) dt \leq 0$$

Если Q выбрана так, что выполнено это равенство

$$\boxed{A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} Q B_1 B_1^T Q = 0}$$

$$\int_0^\infty \left(\begin{gathered} (u + (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q x)^T D_2^T D_2 (u + (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q x) - \\ - \left(w - \tfrac{1}{\gamma^2} B_1^T Q x \right)^T \gamma^2 \left(w - \tfrac{1}{\gamma^2} B_1^T Q x \right) \end{gathered} \right) dt \leq 0$$

$$\int_0^\infty \left(\begin{matrix} (u + (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Qx)^T D_2^T D_2 (u + (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Qx) - \\ -\left(w - \frac{1}{\gamma^2} B_1^T Qx\right)^T \gamma^2 \left(w - \frac{1}{\gamma^2} B_1^T Qx\right) \end{matrix} \right) dt \le 0$$

$$\int_0^\infty \left(\boxed{\begin{matrix}\text{Положительное слагаемое,} \\ \text{зависящее от } u\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{Отрицательное слагаемое,} \\ \text{зависящее от } w\end{matrix}} \right) dt \le 0$$

В лучшем случае управление не мешает интегралу стать отрицательным

$$\boxed{u_{\text{лучшее}} = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Qx}$$

В худшем случае возмущение не помогает интегралу стать отрицательным

$$\boxed{w_{\text{худшее}} = \gamma^{-2} B_1^T Qx}$$

$$\int_0^\infty \left(\begin{matrix} (u + (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Qx)^T D_2^T D_2 (u + (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Qx) - \\ -\left(w - \frac{1}{\gamma^2} B_1^T Qx\right)^T \gamma^2 \left(w - \frac{1}{\gamma^2} B_1^T Qx\right) \end{matrix} \right) dt \le 0$$

Самая сильная стратегия управляющего сигнала

$$\boxed{u_{\text{лучшее}} = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Qx}$$

Гарантирует выполнение целевого неравенства

Самая сильная стратегия внешнего возмущения

$$\boxed{w_{\text{худшее}} = \gamma^{-2} B_1^T Qx}$$

Уменьшает запас, с которым оно выполнено

Синтез H_∞-регулятора

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases}$$

Регулятор

$$u = Kx$$

Целевое неравенство

$$\left\| \underset{w \to z}{W}(s) \right\|_{\mathcal{H}_\infty} \le \gamma$$

Уравнения $\mathcal{H}_\infty$-регулятора

$$\begin{cases} A^T Q + QA + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} Q B_1 B_1^T Q = 0 \\ K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q \end{cases}$$

Если $C_2^T D_2 = 0$, $D_2^T D_2$ обратима, (A, B_2) стабилизируема, (C_2, A) обнаруживаема, и при $\gamma > 0$ существует решение $Q \succ 0$ уравнения Риккати, то соответствующий регулятор делает замкнутую систему устойчивой + гарантирует, что $\|W\|_{\mathcal{H}_\infty} \le \gamma$

Синтез H_∞-наблюдателя

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} \\ \hat{z} = C_2 \hat{x} \end{cases}$$

Целевой критерий

$$\left\| \underset{w \to (z - \hat{z})}{W}(s) \right\|_{\mathcal{H}_\infty} \le \gamma$$

Уравнения $\mathcal{H}_\infty$-наблюдателя

$$\begin{cases} AP + PA^T + B_1 B_1^T - P C_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P + \gamma^{-2} P C_2^T C_2 P = 0 \\ L = -P C_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} \end{cases}$$

Если $B_1 D_1^T = 0$, $D_1 D_1^T$ обратима, (C_1, A) обнаруживаема и (A, B_1) стабилизируема,
и для $\gamma > 0$ $\exists$
~~то существует~~ решение $P \succ 0$ уравнения Риккати, то ~~и~~ соответствующий наблюдатель имеет устойчивую динамику ошибки + гарантирует, что $\|W\|_{\mathcal{H}_\infty} \le \gamma$

H_∞-управление по выходу (здесь формулы неожиданно сходят с ума)

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1\hat{w} + B_2 u + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1\hat{x} + D_1\hat{w} \\ \hat{w} = \gamma^{-2} B_1^T Q \hat{x} \end{cases}$$

Регулятор

$$u = K\hat{x}$$

Наблюдатель, который исходит в своей оценке из наихудшего возможного возмущения

$$\boxed{w_{\text{худшее}} = \gamma^{-2} B_1^T Q x}$$

(наблюдатель-пессимист)

Уравнения полного $\mathcal{H}_\infty$-регулятора с наблюдателем-пессимистом

$$AP + PA^T + B_1 B_1^T - PC_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P + \gamma^{-2} P C_2^T C_2 P = 0$$

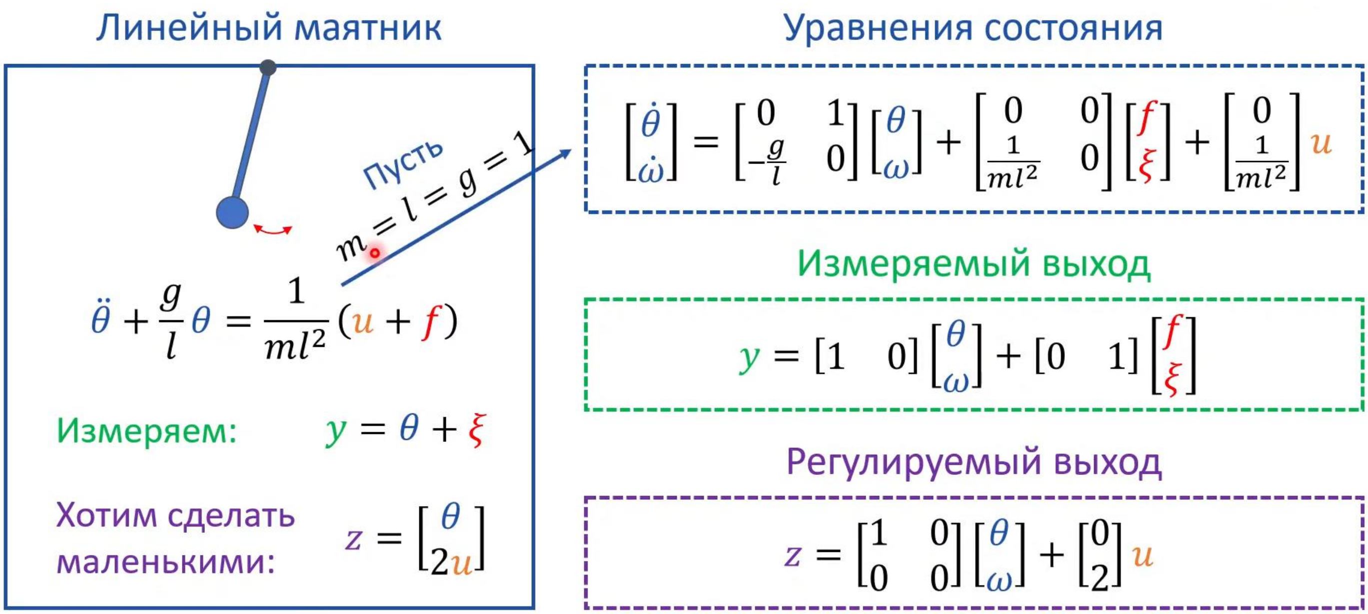
$$A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} Q B_1 B_1^T Q = 0$$

$$L = -P(I - \gamma^{-2} QP)^{-1} (C_1 + \gamma^{-2} D_1 B_1^T Q)^T (D_1 D_1^T)^{-1} \qquad K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q$$

Условие согласованности

Separation principle не выполняется $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_{\max}(PQ) \le \gamma^2}$ $\Rightarrow$ $\left\| \underset{w \to z}{W}(s) \right\|_{\mathcal{H}_\infty} \le \gamma$


Линейный маятник
Управление
u — вращающий момент (хороший)
Возмущения
f — вращающий момент (плохой)
ξ — шум датчика
$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}(u + f)$
Измеряем: $y = \theta + \xi$
Хотим сделать маленькими: $z = \begin{bmatrix} \theta \\ 2u \end{bmatrix}$
Измеряемый выход
y — зашумлённое положение маятника
Регулируемый выход
Положение маятника θ и управление u
(u в 2 раза важнее)


Линейный маятник
$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}(u + f)$
Измеряем: $y = \theta + \xi$
Хотим сделать маленькими: $z = \begin{bmatrix} \theta \\ 2u \end{bmatrix}$
Пусть $m = l = g = 1$
Уравнения состояния
$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{ml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u$
Измеряемый выход
$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \xi \end{bmatrix}$
Регулируемый выход
$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$

Линейный маятник

Пусть $m = l = g = 1$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}(u + f)$$

Измеряем: $y = \theta + \xi$

Хотим сделать маленькими: $z = \begin{bmatrix} \theta \\ 2u \end{bmatrix}$

Уравнения состояния

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Измеряемый выход

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \xi \end{bmatrix}$$

Регулируемый выход

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} f \\ \xi \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Проверка “независимости”

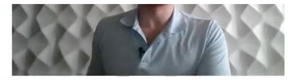
$$B_1 D_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^T D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Проверка “невырожденности”

$$D_1 D_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$D_2^T D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 4$$



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} f \\ \xi \end{bmatrix} \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Вагончик расчётов

$\mathcal{H}_2$–регулятор по выходу (LQG)

$$L = \begin{bmatrix} -0.91 \\ -0.41 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} -0.12 \\ -0.49 \end{bmatrix}^T$$

Обычный наблюдатель — Обычный регулятор

$\mathcal{H}_\infty$–регулятор при $\gamma = 2.6$

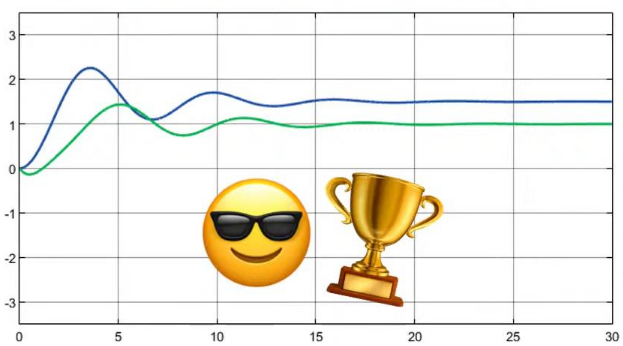
$$L = \begin{bmatrix} -5.05 \\ -5.58 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} -0.12 \\ -0.77 \end{bmatrix}^T$$

Наблюдатель со слагаемым $\hat{w}$ — Обычный регулятор

Возмущения частоты $\omega = 0$

$$f(t) = \xi(t) = 1$$

Система с LQG-регулятором



Графики $\theta(t)$ и $2u(t)$

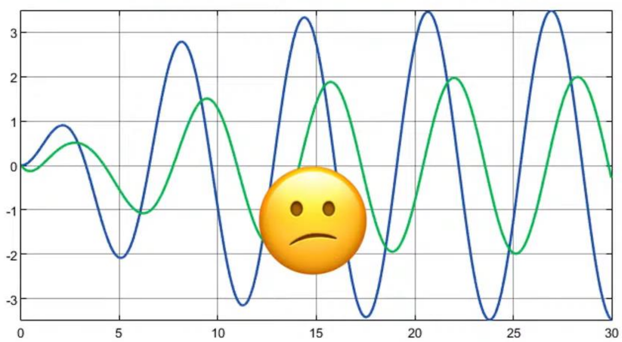
Система с $\mathcal{H}_\infty$-регулятором

Графики $\theta(t)$ и $2u(t)$

Возмущения частоты $\omega = 1$

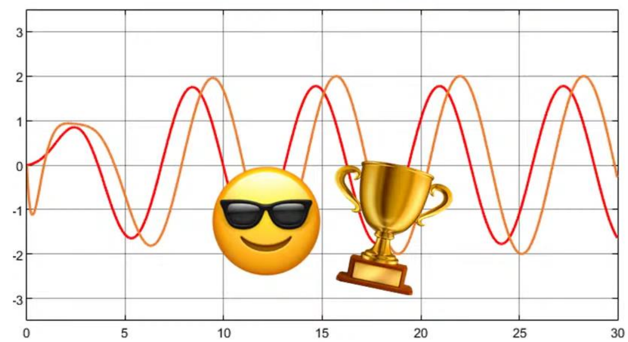
$$f(t) = \xi(t) = \cos(t)$$

Система с LQG-регулятором



Графики $\theta(t)$ и $2u(t)$

Система с $\mathcal{H}_\infty$-регулятором

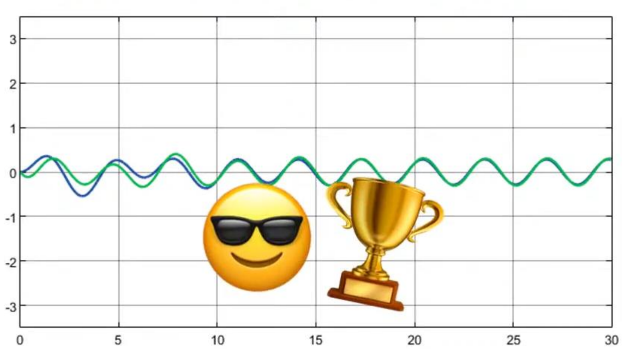


Графики $\theta(t)$ и $2u(t)$

Возмущения частоты $\omega = 2$

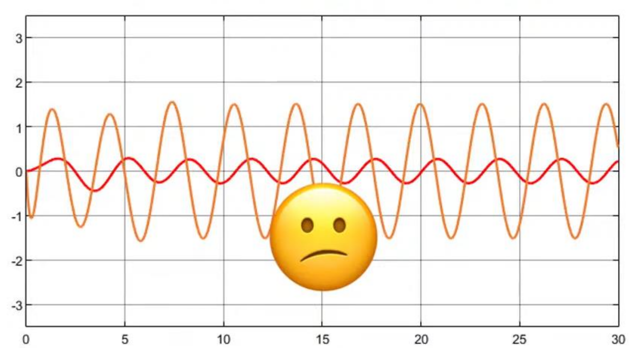
$$f(t) = \xi(t) = \cos(2t)$$

Система с LQG-регулятором



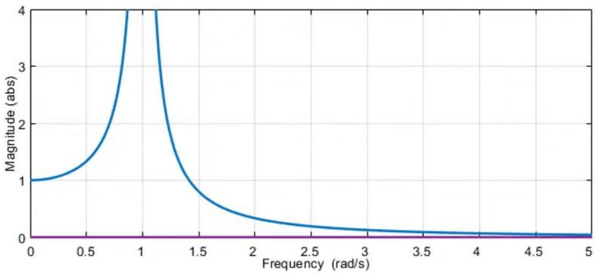
Графики $\theta(t)$ и $2u(t)$

Система с $\mathcal{H}_\infty$-регулятором



Графики $\theta(t)$ и $2u(t)$

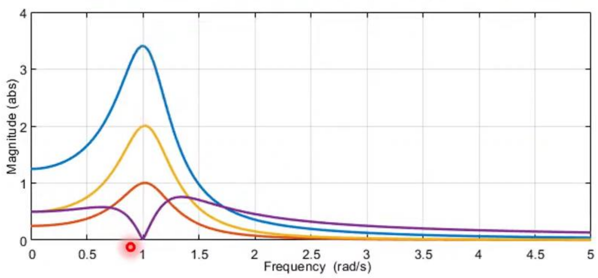
АЧХ разомкнутой системы



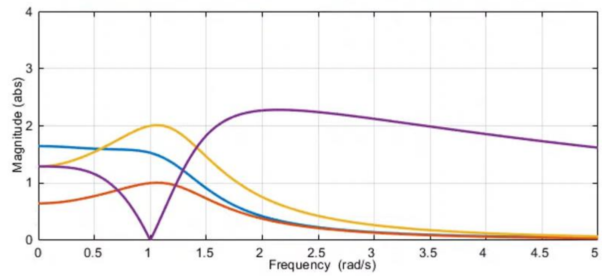
Передаточная матрица

$$\underset{w\to z}{W}(s) = \begin{bmatrix} \underset{f\to\theta}{W}(s) & \underset{\xi\to\theta}{W}(s) \\ \underset{f\to 2u}{W}(s) & \underset{\xi\to 2u}{W}(s) \end{bmatrix}$$

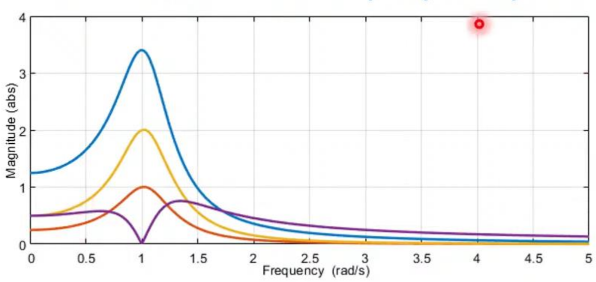
АЧХ системы с LQG-регулятором



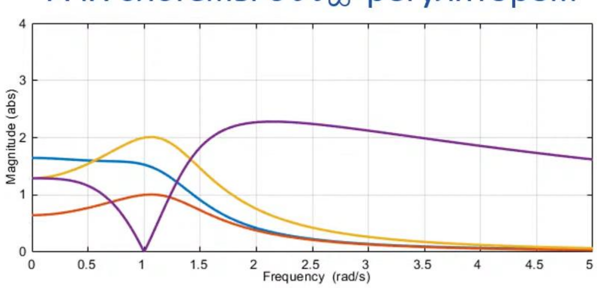
АЧХ системы с $\mathcal{H}_\infty$-регулятором



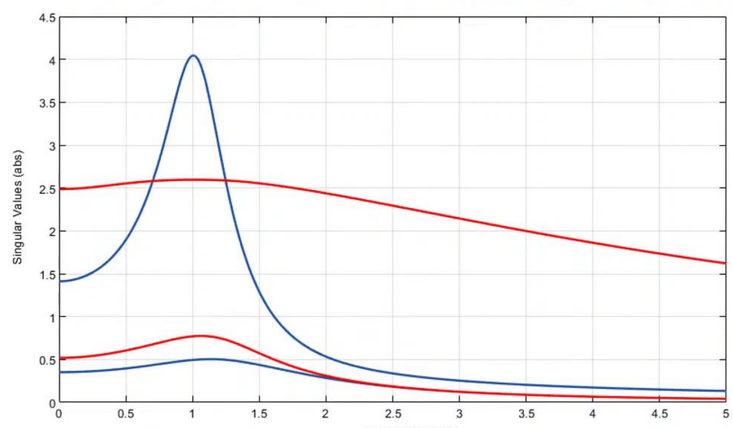
АЧХ системы с LQG-регулятором



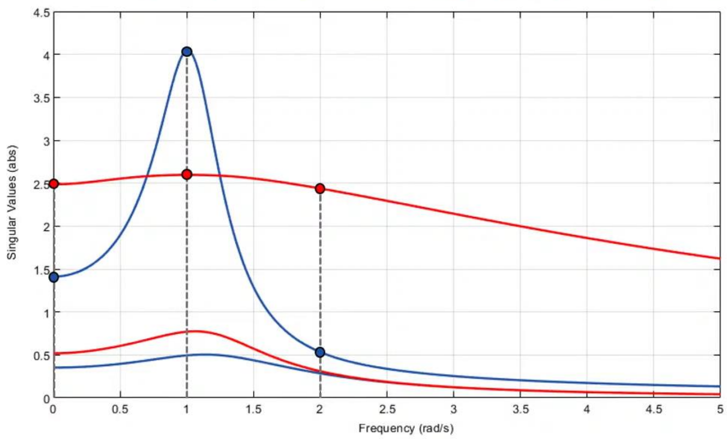
АЧХ системы с $\mathcal{H}_\infty$-регулятором



Сингулярные числа при замыкании LQG-регулятором и $\mathcal{H}_\infty$-регулятором



Сингулярные числа при замыкании LQG-регулятором и $\mathcal{H}_\infty$-регулятором



Кто лучше в наихудшем случае?

$\|W\|_{\mathcal{H}_\infty} = 4.05 \qquad \|W\|_{\mathcal{H}_\infty} = 2.60$

Кто лучше в среднем?

$\|W\|_{\mathcal{H}_2} = 1.84 \qquad \|W\|_{\mathcal{H}_2} = 3.70$

Какой регулятор выбрать?

Какой регулятор выбрать?

Если нам не страшны резонансы и мы хотим играть против широкого диапазона частот, то выбираем $\mathcal{H}_2$ (LQR)

Если нам крайне важно уменьшить самый сильный из резонансов, то мы играем против “сильнейшего соперника” и выбираем $\mathcal{H}_\infty$