

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №2
«Канонические формы представления динамических систем»
по дисциплине «Теория автоматического управления»

Выполнил: студент гр. R3238,
Кирбаба Д.Д.

Преподаватель: Перегудин А.А.,
ассистент фак. СУиР

Цель работы

Ознакомление с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход, а также со структурными свойствами системы.

Начальные данные

9 вариант

Параметры одноканальной системы вход-выход:

$$a_0 = 6, a_1 = 5, a_2 = 2, b_0 = 9, b_1 = 1, b_2 = 4$$

Значения матриц A, B, C:

$$n = 2, A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Параметры многоканальной модели вход-состояние-выход:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Матрица преобразования координат:

$$M = \begin{bmatrix} 2.5 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Выполнение работы

1. Переход от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход 1.1.

Дифференциальное уравнение, описывающее систему:

$$6\ddot{y} + 5\dot{y} + 2y = 9\ddot{u} + \dot{u} + 4u$$

$$\ddot{y} + \frac{5}{6}\dot{y} + \frac{1}{3}y = \frac{3}{2}\ddot{u} + \frac{1}{6}\dot{u} + \frac{2}{3}u$$

$$s^2y + \frac{5}{6}sy + \frac{1}{3}y = \frac{3}{2}s^2u + \frac{1}{6}su + \frac{2}{3}u$$

$$y = \frac{3}{2}u + \frac{1}{s}\left(\frac{1}{6}u - \frac{5}{6}y\right) + \frac{1}{s^2}\left(\frac{2}{3}u - \frac{1}{3}y\right)$$

Передаточная функция:

$$W(s) = \frac{9s^2 + s + 4}{6s^2 + 5s + 2} = \frac{\frac{3}{2}(6s^2 + 5s + 2) - \frac{13}{2}s + 1}{6s^2 + 5s + 2} = \frac{3}{2} + \frac{-\frac{13}{2}s + 1}{6s^2 + 5s + 2} = \frac{3}{2} + \frac{-\frac{13}{12}s + \frac{1}{6}}{s^2 + \frac{5}{6}s + \frac{1}{3}}$$

Каноническая наблюдаемая форма:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{13}{12} \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}u \end{cases}$$

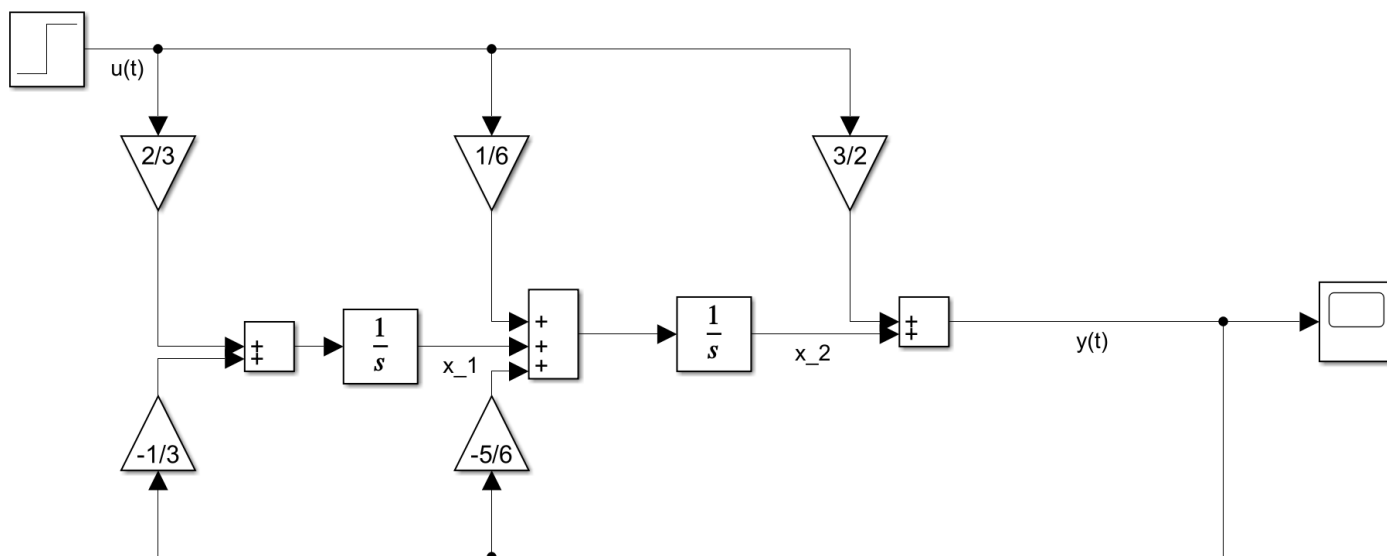


Рисунок 1: схема моделирования системы в канонической наблюдаемой форме

Каноническая управляемая форма:

$$\ddot{z} + \frac{5}{6}\dot{z} + \frac{1}{3}z = u, \text{ где } z = x_1, \dot{z} = x_2$$

$$\ddot{z} = -\frac{5}{6}\dot{z} - \frac{1}{3}z + u$$

$$y = \frac{3}{2}\ddot{z} + \frac{1}{6}\dot{z} + \frac{2}{3}z = -\frac{13}{12}\dot{z} + \frac{1}{6}z + \frac{3}{2}u$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{13}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}u \end{cases}$$

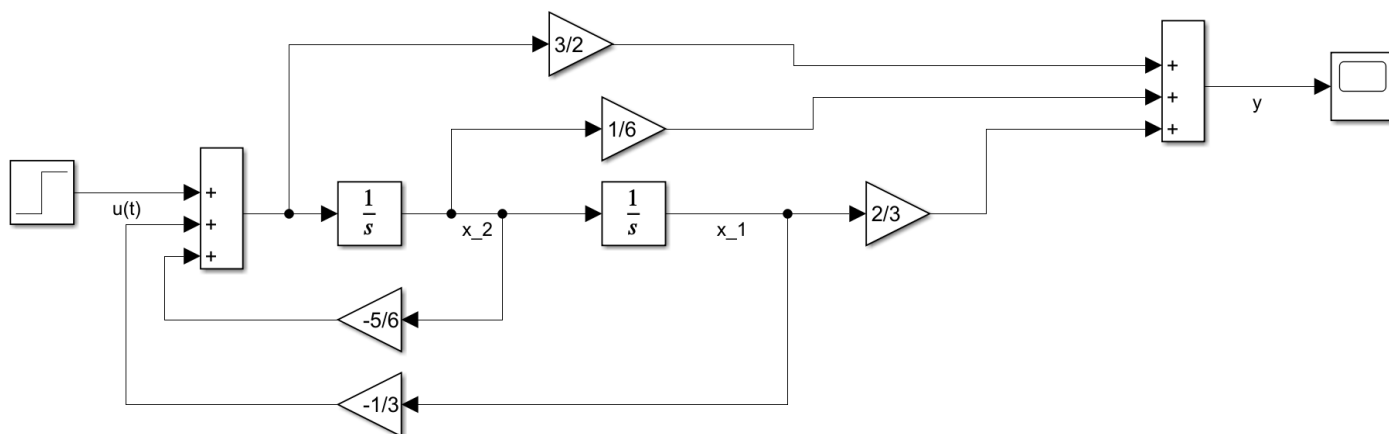


Рисунок 2: схема моделирования системы в канонической управляемой форме

Жорданова форма:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{13}{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{Собственные числа: } \lambda_1 = -\frac{5}{12} - \frac{\sqrt{23}}{12}i, \lambda_2 = -\frac{5}{12} + \frac{\sqrt{23}}{12}i$$

$$\text{Собственные векторы: } u_1 = \begin{bmatrix} -5 + \sqrt{23}i \\ 4 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -5 - \sqrt{23}i \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\check{A} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{12} & \frac{\sqrt{23}}{12} \\ -\frac{\sqrt{23}}{12} & -\frac{5}{12} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -5 + \sqrt{23}i & -5 - \sqrt{23}i \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, M^{-1} = \frac{1}{184} \begin{bmatrix} -4\sqrt{23}i & 23 - 5\sqrt{23}i \\ -4\sqrt{23}i & 23 + 5\sqrt{23}i \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \check{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + M^{-1}Bu \\ y = CM \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{12} & \frac{\sqrt{23}}{12} \\ -\frac{\sqrt{23}}{12} & -\frac{5}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{184} \begin{bmatrix} 23 - 5\sqrt{23}i \\ 23 + 5\sqrt{23}i \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -\frac{31 + \sqrt{23}i}{6} & -\frac{31 - \sqrt{23}i}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Чтобы матрицы \hat{A} , \hat{B} не содержали комплексных чисел, произведем расчет с матрицы преобразования координат по следующим формулам:

$$A = M^{-1}\check{A}M \Leftrightarrow MA = \check{A}M$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{12} & \frac{\sqrt{23}}{12} \\ -\frac{\sqrt{23}}{12} & -\frac{5}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3}m_{12} & m_{11} - \frac{5}{6}m_{12} \\ -\frac{1}{3}m_{21} & m_{21} - \frac{5}{6}m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{12}m_{11} + \frac{\sqrt{23}}{12}m_{21} & -\frac{5}{12}m_{12} + \frac{\sqrt{23}}{12}m_{22} \\ -\frac{5}{12}m_{21} - \frac{\sqrt{23}}{12}m_{11} & -\frac{5}{12}m_{22} - \frac{\sqrt{23}}{12}m_{12} \end{bmatrix}$$

После составления и решения системы нашли $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -\sqrt{23} & -\sqrt{23} \end{bmatrix}, M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{7}{6\sqrt{23}} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6\sqrt{23}} \end{bmatrix}$$

Тогда вид системы в жордановой форме:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + M^{-1}Bu \\ y = CM \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{12} & \frac{\sqrt{23}}{12} \\ -\frac{\sqrt{23}}{12} & -\frac{5}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{7}{6\sqrt{23}} \\ \frac{1}{6\sqrt{23}} \end{bmatrix} u \\ y = \left[\frac{1}{6} + \frac{13\sqrt{23}}{12} \quad \frac{7}{6} + \frac{13\sqrt{23}}{12} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

1.2.

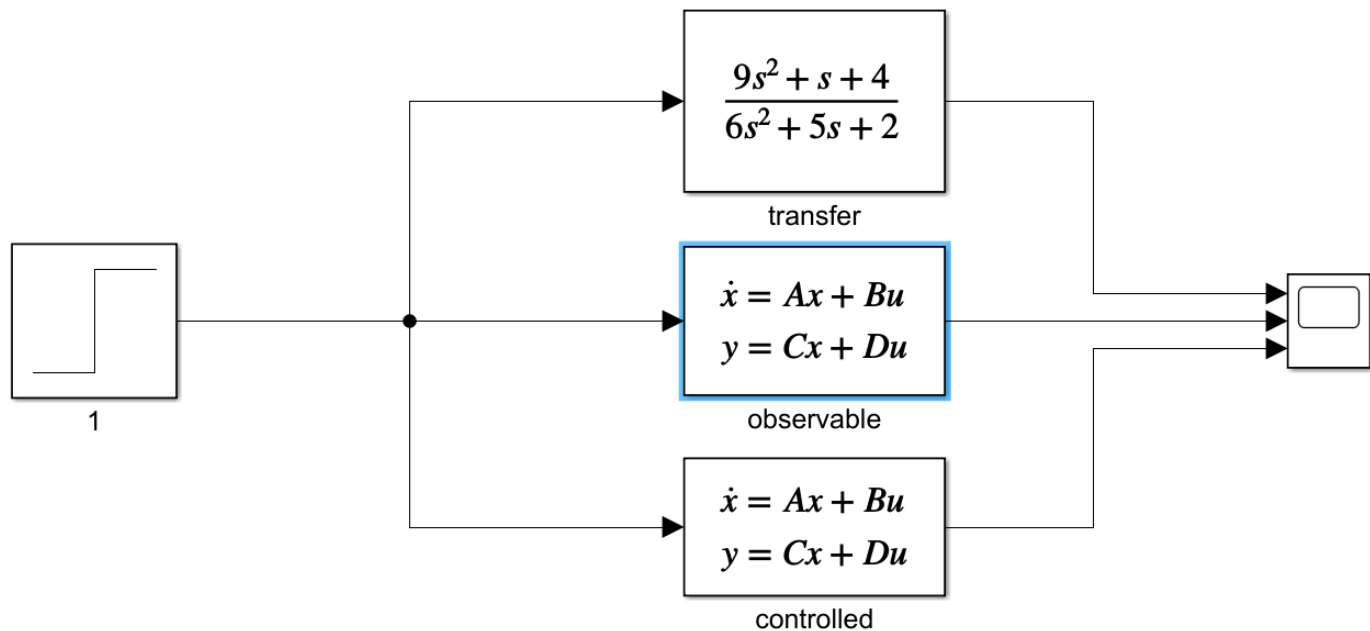


Рисунок 3: схема моделирования моделей вход-выход (transfer), вход-состояние-выход в канонической управляемой (controlled) и канонической наблюдаемой (observable) формах при ступенчатом входном воздействии и отсутствии начальных условий

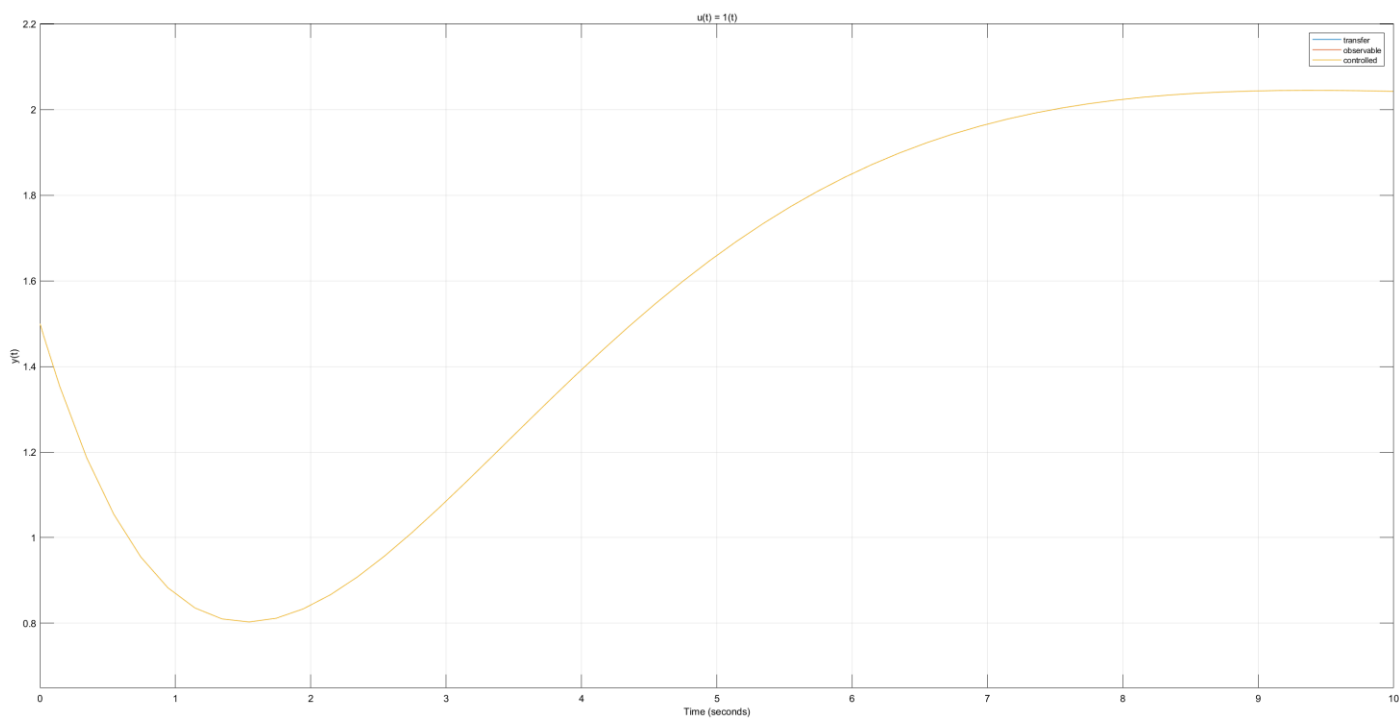


Рисунок 4: Графики $y(t)$ системы, смоделированной в разных формах, при $u(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях

Все три графика совпали, а значит переход между формами был выполнен правильно. Также стоит отметить, что при $t = 0$: $y \neq 0$, так как система имеет относительный динамический порядок $= 0$.

2. Переход от модели вход-состояние-выход к модели вход-выход

2.1.

Вид системы в форме вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Найдем передаточную функцию

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$W(s) = [8 \quad 1] \begin{bmatrix} s-2 & -2 \\ 15 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + s + 24} [8 \quad 1] \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -15 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W(s) = \frac{s + 14}{s^2 + s + 24}$$

Дифференциальное уравнение системы в форме вход-выход

$$\ddot{y} + \dot{y} + 24y = \dot{u} + 14u$$

Каноническая наблюдаемая форма

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -24 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Каноническая управляемая форма

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -24 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [14 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2.2.

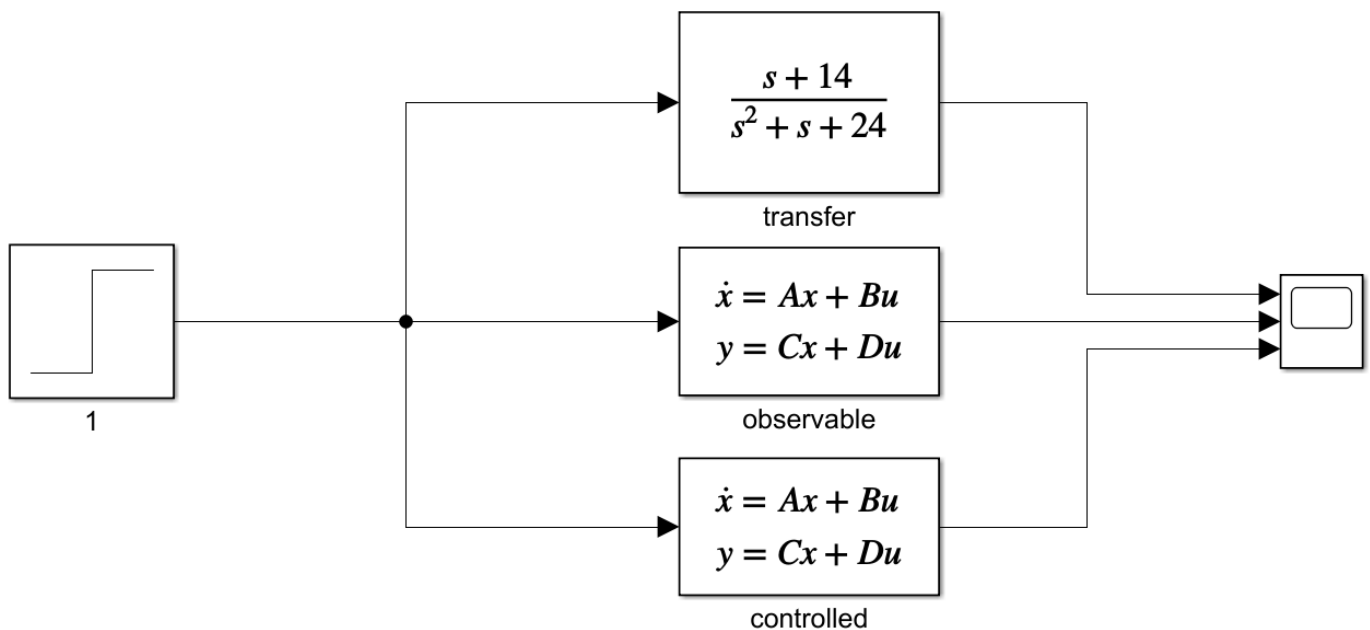


Рисунок 5: схема моделирования моделей вход-выход (transfer), вход-состояние-выход в канонической управляемой (controlled) и канонической наблюдаемой (observable) формах при ступенчатом входном воздействии и отсутствии начальных условий

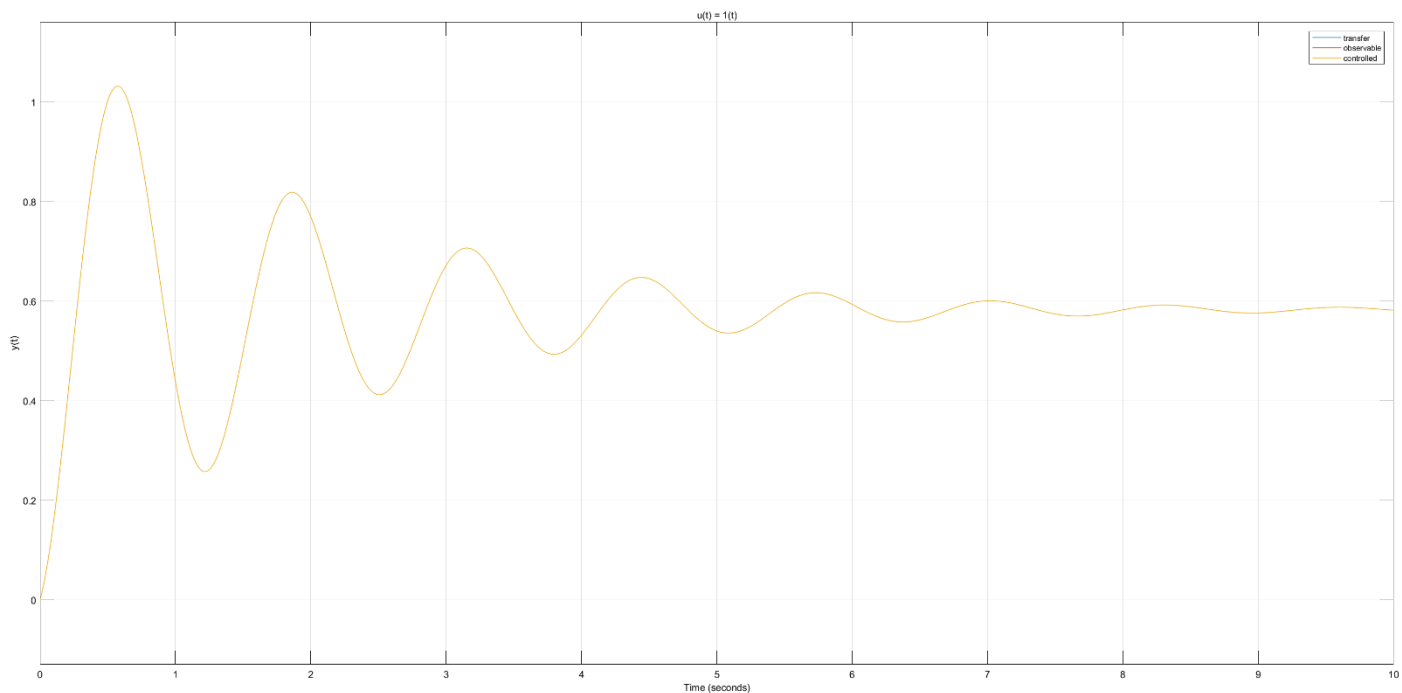


Рисунок 6: Графики $y(t)$ системы, смоделированной в разных формах, при $u(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях

Все три графика совпали, а значит переход между формами был выполнен правильно.

2.3.

Найдем матрицы преобразования исходной модели к каноническим формам

Матрицы управляемости:

$$N_{y,or} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, N_{y,obs} = \begin{bmatrix} 14 & -24 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}, N_{y,con} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Обратные матрицы:

$$N_{y,obs}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{206} & \frac{24}{206} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{206} \end{bmatrix}, N_{y,con}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрицы преобразования:

$$M_{or,obs} = N_{y,or} N_{y,obs}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{103} & \frac{14}{103} \\ \frac{8}{103} & -\frac{1}{103} \end{bmatrix}, M_{or,con} = N_{y,or} N_{y,con}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим переходом $\hat{A} = M^{-1}AM$:

$$A_{obs} = M_{or,obs}^{-1} A M_{or,obs} = \begin{bmatrix} 9 & 14 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{103} & \frac{14}{103} \\ \frac{8}{103} & -\frac{1}{103} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -24 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{con} = M_{or,con}^{-1} A M_{or,con} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -24 & -1 \end{bmatrix}$$

2.4.

Многоканальная система:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 6 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s & 6 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4s + 6} \begin{bmatrix} s+4 & -6 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{18s-37}{s^2+4s+6} & \frac{37s+117}{s^2+4s+6} \\ \frac{23s-21}{s^2+4s+6} & \frac{32s+111}{s^2+4s+6} \end{bmatrix}$$

3. Замена базиса в пространстве состояний

3.1.

Исходная модель:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

С помощью матрицы преобразования $M = \begin{bmatrix} 2.5 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, найдем подобную модель:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \tilde{B} u \\ y = \tilde{C} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases}, \text{ где } \tilde{A} = M^{-1} A M, \tilde{B} = M^{-1} B, \tilde{C} = C M$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.5 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.5 & 13.2 \\ -9.375 & -10.5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.5 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 20 \end{bmatrix}$$

Подобная модель:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.5 & 13.2 \\ -9.375 & -10.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.25 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

3.2.

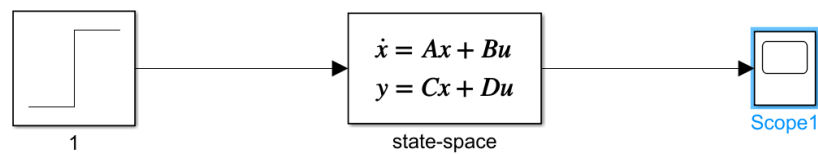


Рисунок 7: схема моделирования подобной модели при ступенчатом входном воздействии и отсутствии начальных условий

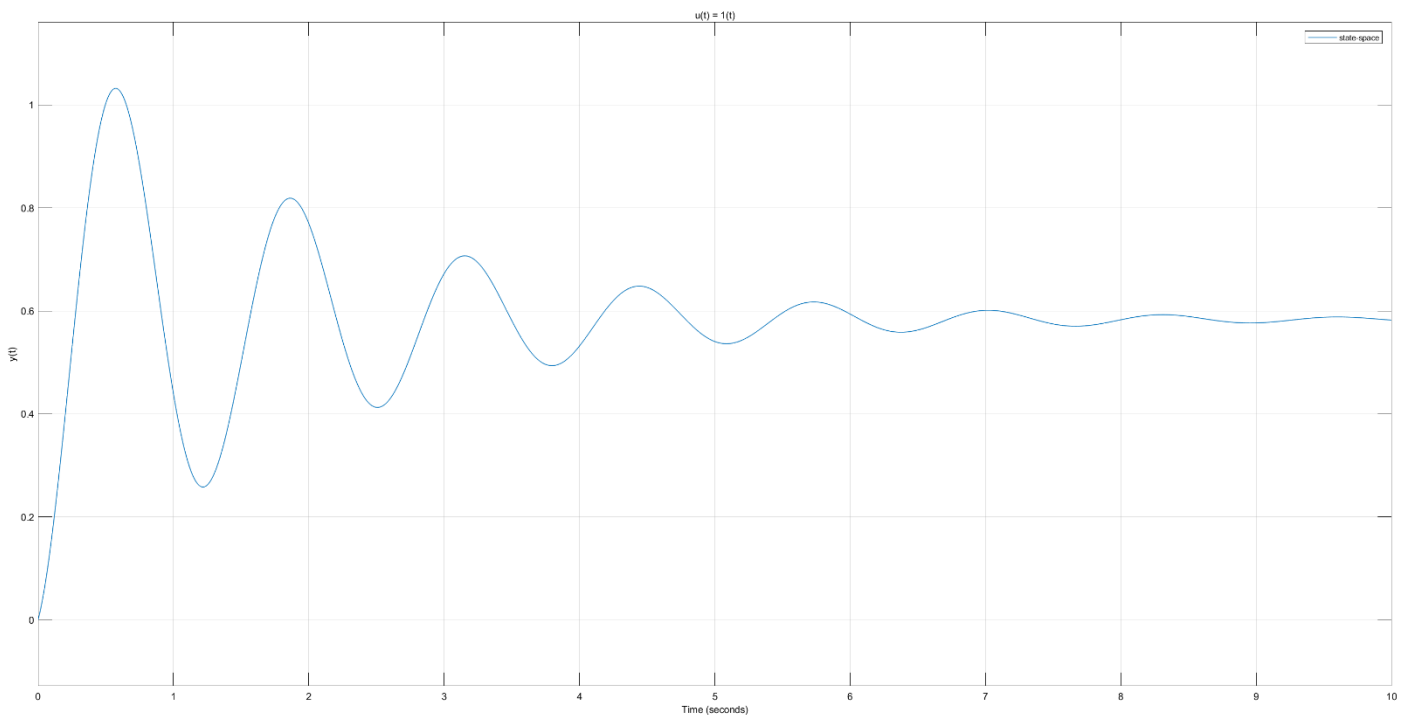


Рисунок 8: график $y(t)$ подобной системы при $u(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях

Данный график подобной системы совпадает с графиком моделирования исходной системы (Рисунок 6), а замена базиса в пространстве состояний была выполнена верно.

Выводы

В данной лабораторной работе были выполнены прямые и обратные переходы от моделей вход-выход к моделям вход-состояние-выход в канонической управляемой, канонической наблюдаемой и жордановой формах. Было осуществлено моделирование данных систем, а также произведена замена базиса системы в пространстве состояний с помощью матрицы преобразования.

Стоит отметить, что математические модели одной и той же динамической системы являются эквивалентными, если они определяют одно и то же преобразование входного сигнала u в выходной

сигнал u . И если переход от модели ВСВ к ВВ является однозначным, то переход от ВВ к ВСВ таковым не является, из-за произвольного выбора вектора состояния.