**Управляемость и наблюдаемость**

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

## Управляемость

Возможность управлять состоянием $x(t)$
с помощью входного воздействия $u(t)$

## Наблюдаемость

Возможность узнавать состояние $x(t)$
по выходному сигналу $y(t)$

### Управляемость (Controllability)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

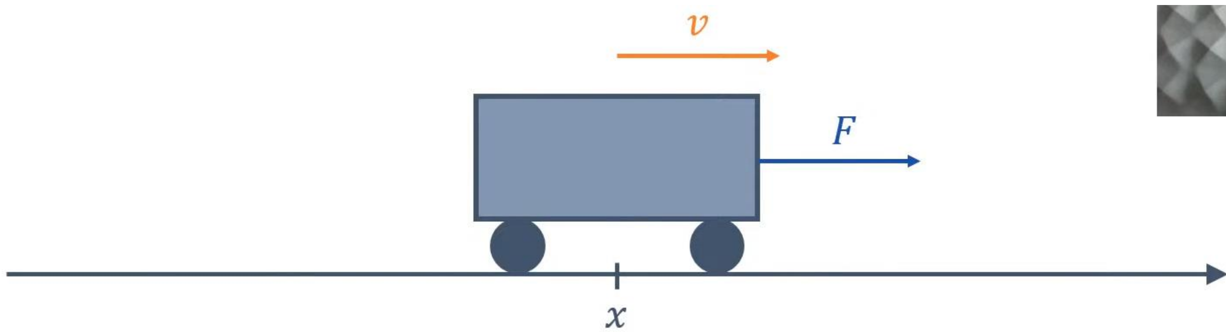
$$x(t) \in \mathbb{R}^n \qquad u(t) \in \mathbb{R}$$

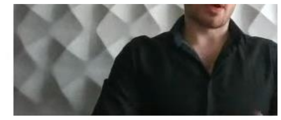
Множество состояний $x \in \mathbb{R}^n$, в которые система может быть переведена за конечное время из начального состояния $x(0) = 0$, является линейным пространством и называется подпространством управляемости этой системы.

Если подпространство управляемости совпадает со всем пространством состояний $\mathbb{R}^n$, то система называется полностью управляемой.

### Интуитивные примеры

1. Тележка



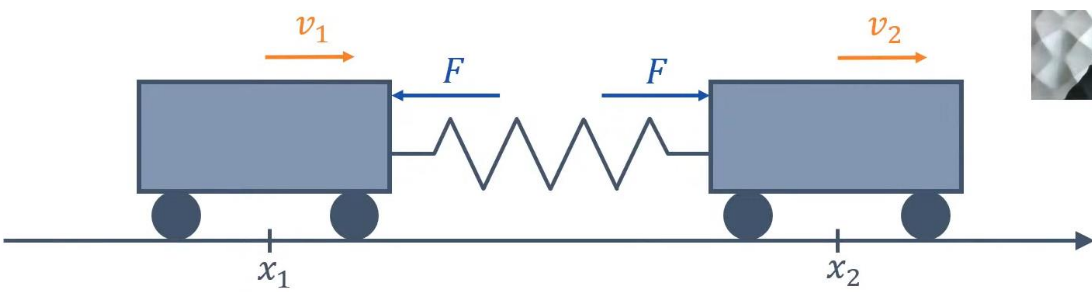



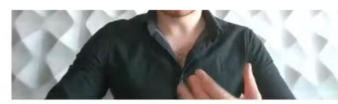
$$\ddot{x} = F \qquad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = F \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F$$

Подпространство управляемости: $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$

Систему можно привести в любое состояние $\Rightarrow$ система полностью управляема

2. Две тележки и внутренние силы



$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) - F \\ \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + F \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = k(x_2 - x_1) - F \\ \dot{x}_2 = v_2 \\ \dot{v}_2 = k(x_1 - x_2) + F \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} F$$

Подпространство управляемости: $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ v \\ -x \\ -v \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \right\} \sim \mathbb{R}^2$ система не является полностью управляемой

Матрица управляемости системы $\dot{x} = Ax + Bu$:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

($n$ – порядок системы)

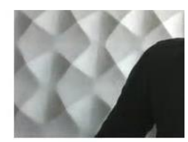
## Подпространство управляемости

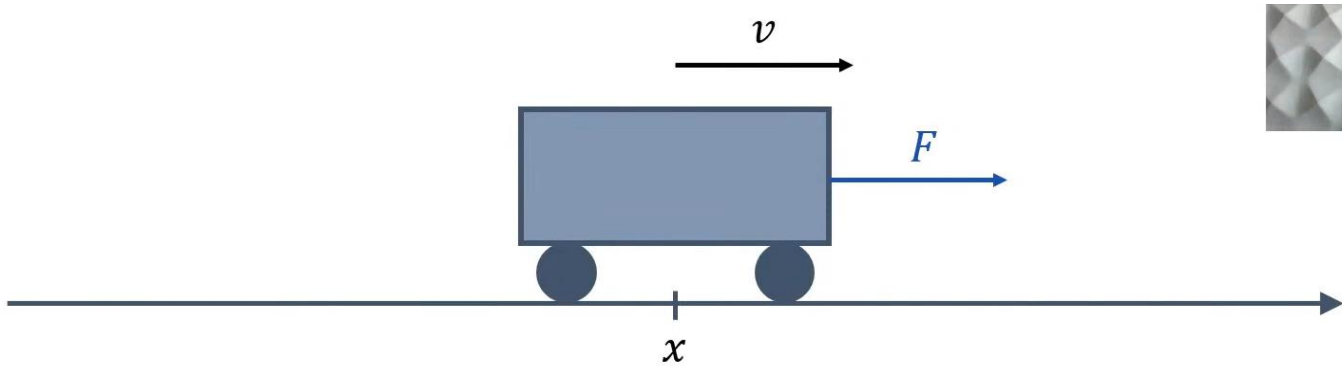
Подпространство управляемости совпадает с $\mathrm{Range}\,\mathcal{C}$ –
то есть, может быть найдено как линейная оболочка столбцов матрицы $\mathcal{C}$.

## Критерий Калмана

Система полностью управляема тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank}\,\mathcal{C} = n$.

Тележка



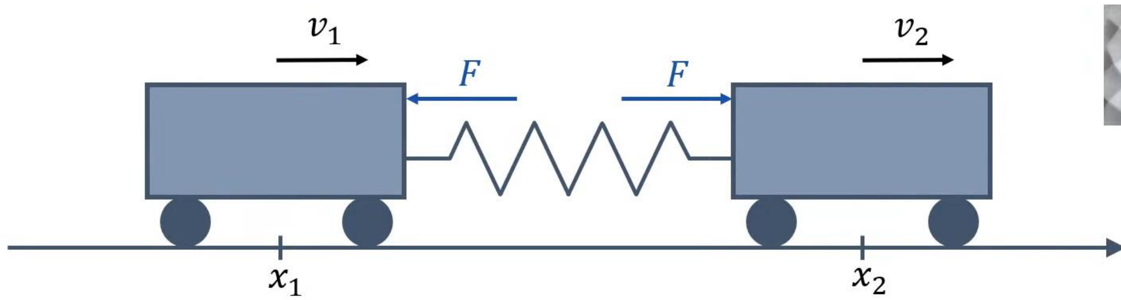


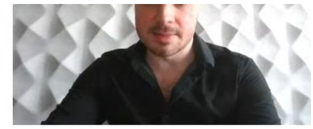

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}F \qquad B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathrm{Range}\,\mathcal{C} = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{rank}\,\mathcal{C} = 2$$

Система полностью управляема

Две тележки и внутренние силы



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} F$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2k \\ 0 \\ -2k \end{bmatrix} \quad A^3B = \begin{bmatrix} 2k \\ 0 \\ -2k \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2k \\ -1 & 0 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2k \\ 1 & 0 & -2k & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2k \\ -1 & 0 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2k \\ 1 & 0 & -2k & 0 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{Range} \mathcal{C} = \operatorname{Span}\left( \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\operatorname{Range} \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ -a \\ -b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad \operatorname{rank} \mathcal{C} = 2$$

Система не является полностью управляемой

Можно ли перевести систему в заданное состояние?

Систему $\dot{x} = Ax + Bu$ можно перевести из состояния $x(0) = 0$ в состояние $x_*$ за конечное время тогда и только тогда, когда

$$x_* \in \operatorname{Range} \mathcal{C}$$

## Как это проверить?

$$\operatorname{rank} \mathcal{C} = \operatorname{rank}[\mathcal{C} \quad x_*]$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{rank}[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] = \operatorname{rank}[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B \quad x_*]$$

Если выполнено это условие, то состояние $x_*$ принадлежит подпространству управляемости

Пример

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} u$$

Можно ли за конечное время перевести систему из $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ в $x_* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$?

$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B]$ $\qquad$ $[\mathcal{C} \quad x_*] = [B \quad AB \quad A^2B \quad x_*]$

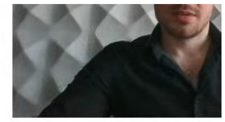
$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $[\mathcal{C} \quad x_*] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & -6 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $x_* \in \operatorname{Range} \mathcal{C}$

Да, можно

$\operatorname{rank} \mathcal{C} = 2$ $\qquad$ $\operatorname{rank}[\mathcal{C} \quad x_*] = 2$

Пример

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 2\\ -3\end{bmatrix} u$$



Можно ли за конечное время перевести систему из $x = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ в $x_* = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$?

$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B]$ $\qquad [\mathcal{C} \quad x_*] = [B \quad AB \quad A^2B \quad x_*]$

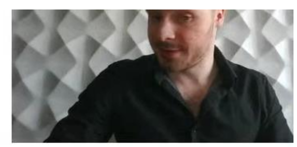
$\mathcal{C} = \begin{bmatrix}-1 & -2 & -4\\ 2 & 1 & 5\\ -3 & 0 & -6\end{bmatrix}$ $\qquad [\mathcal{C} \quad x_*] = \begin{bmatrix}-1 & -2 & -4 & 0\\ 2 & 1 & 5 & 1\\ -3 & 0 & -6 & 2\end{bmatrix}$ $\qquad x_* \notin \operatorname{Range} \mathcal{C}$

Нет, нельзя

$\operatorname{rank} \mathcal{C} = 2$ $\qquad \operatorname{rank}[\mathcal{C} \quad x_*] = 3$

Доказательство критерия управляемости

## Теорема Гамильтона-Кэли



Если $p(\lambda)$ — характеристический полином матрицы $A$, то $p(A) = 0$.

*«Матрица обнуляет свой характеристический полином»*

## Пример

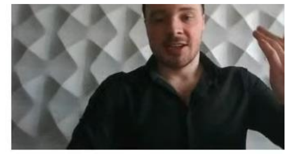
$A = \begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}$

$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$

$p(A) = A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}^3 - 2\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

## Следствие: линейная зависимость матричных степеней



Старшие степени матрицы можно выразить через младшие.

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad A^m = (\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1}) \qquad \alpha_i \in \mathbb{R} \qquad m \geq n$$

## Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad p(A) = A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 = 2A^2 + A - 2I$$

$$A^4 = 2A^3 + A^2 - 2A \quad \Rightarrow \quad A^4 = 5A^2 - 4I$$

$$A^5 = 5A^3 - 4A \quad \Rightarrow \quad A^5 = 5(2A^2 + A - 2I) - 4A$$

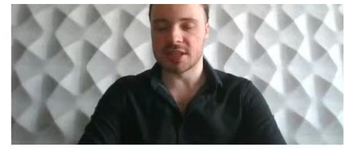
$$A^3 = 2A^2 + A - 2I$$

$$A^4 = 5A^2 - 4I$$

Степени $\geq 3$ являются линейной комбинацией степеней $< 3$.

$$A^5 = 10A^2 + A - 10I$$

## Следствие: матричная экспонента как конечная сумма



Применяем теорему Гамильтона-Кэли к матричной экспоненте:

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad e^{At} = (\alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1})$$

### Пример

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2} + A^3\frac{t^3}{6} + A^4\frac{t^4}{24} + \cdots$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{t^2}{2} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\frac{t^3}{6} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{t^4}{24} + \cdots$$

$$e^{At} = \cos t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin t \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \cos t \cdot I + \sin t \cdot A$$

## Вывод критерия управляемости

Хотим привести систему из начального состояния $x(0) = 0$ в конечное состояние $x(T) = x_*$ за конечное время $T$.

Нужно понять, при каких условиях, наложенных на матрицы $A$ и $B$, найдётся входное воздействие $u(t)$ такое, что

$$x_* = \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x_* = e^{AT}\int_0^T e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$e^{-AT}x_* = \int_0^T e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$e^{-AT}x_* = \int_0^T (\alpha_0(\tau)I + \alpha_1(\tau)A + \alpha_2(\tau)A^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(\tau)A^{n-1})Bu(\tau)d\tau$$

$$e^{-AT}x_* = B\left(\int_0^T \alpha_0(\tau)u(\tau)d\tau\right) + AB\left(\int_0^T \alpha_1(\tau)u(\tau)d\tau\right) + \cdots + A^{n-1}B\left(\int_0^T \alpha_{n-1}(\tau)u(\tau)d\tau\right)$$

$$e^{-AT}x_* = [B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B]\begin{bmatrix} \int_0^T \alpha_0(\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_0^T \alpha_1(\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_0^T \alpha_2(\tau)u(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_0^T \alpha_{n-1}(\tau)u(\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^T \alpha_0(\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_0^T \alpha_1(\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_0^T \alpha_2(\tau)u(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_0^T \alpha_{n-1}(\tau)u(\tau)d\tau \end{bmatrix} = e^{-AT}\, x_*$$

## д критерия управляемости

Вектор

Квадратная матрица

Вектор

$$[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \int_0^T \alpha_0(\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_0^T \alpha_1(\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_0^T \alpha_2(\tau)u(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_0^T \alpha_{n-1}(\tau)u(\tau)d\tau \end{bmatrix} = e^{-AT}\, x_*$$

$$Ax = b$$

…д критерия управляемости

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}_{\text{Квадратная матрица}}
\underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^T \alpha_0(\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_0^T \alpha_1(\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_0^T \alpha_2(\tau)u(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_0^T \alpha_{n-1}(\tau)u(\tau)d\tau \end{bmatrix}}_{\text{Вектор}}
= \underbrace{e^{-AT}\, x_*}_{\text{Вектор}}
$$

Для любого $x_*$ решение существует в том и только в том случае, если

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

Наблюдаемость (Observability)

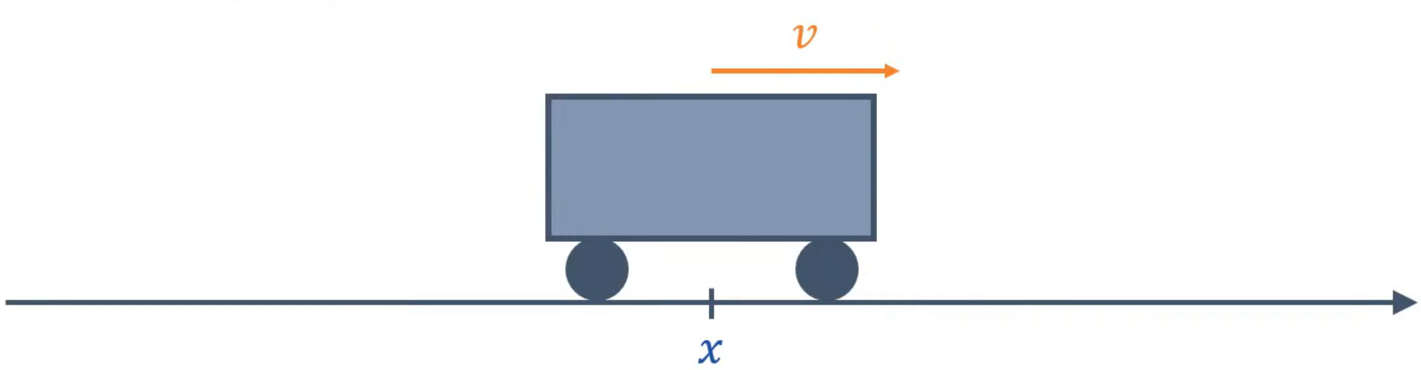
$$\dot{x} = Ax$$
$$y = Cx$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n \qquad y(t) \in \mathbb{R}$$

Система называется полностью наблюдаемой, если пронаблюдав выход $y(t)$ в течение конечного времени, можно однозначно узнать состояние $x(t)$.

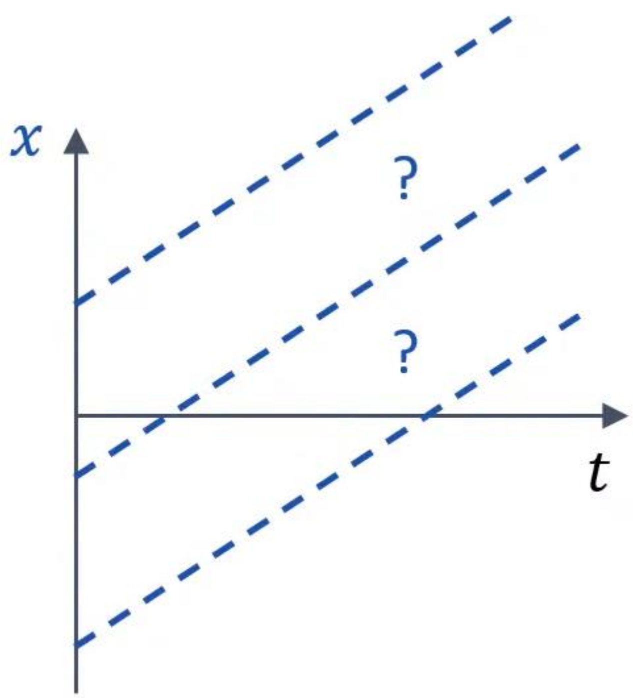
Интуитивные примеры

1. Тележка (видим только её скорость)





Можем ли узнать $x(t)$?

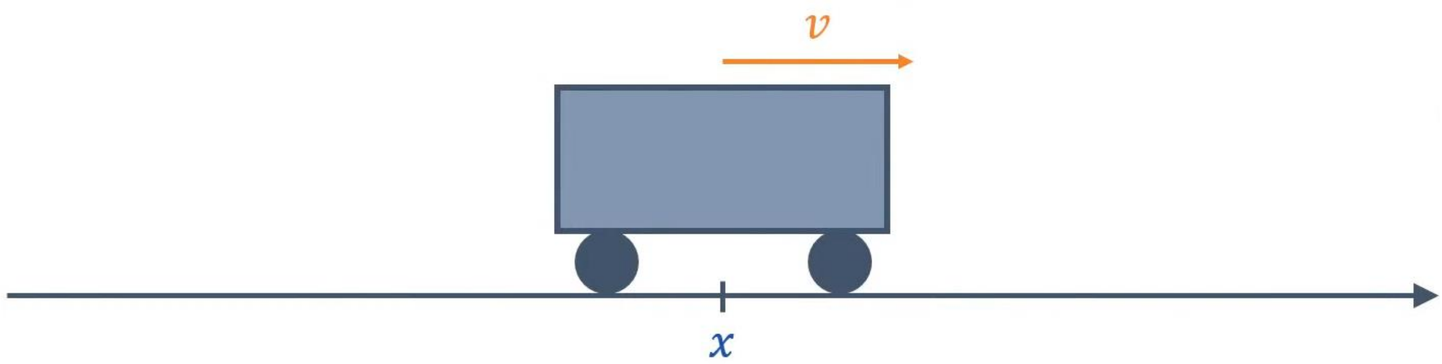


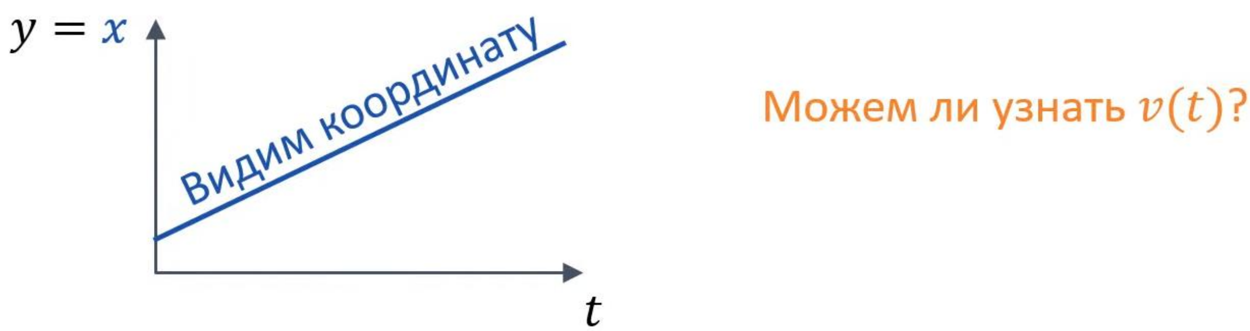

Не можем однозначно узнать координату

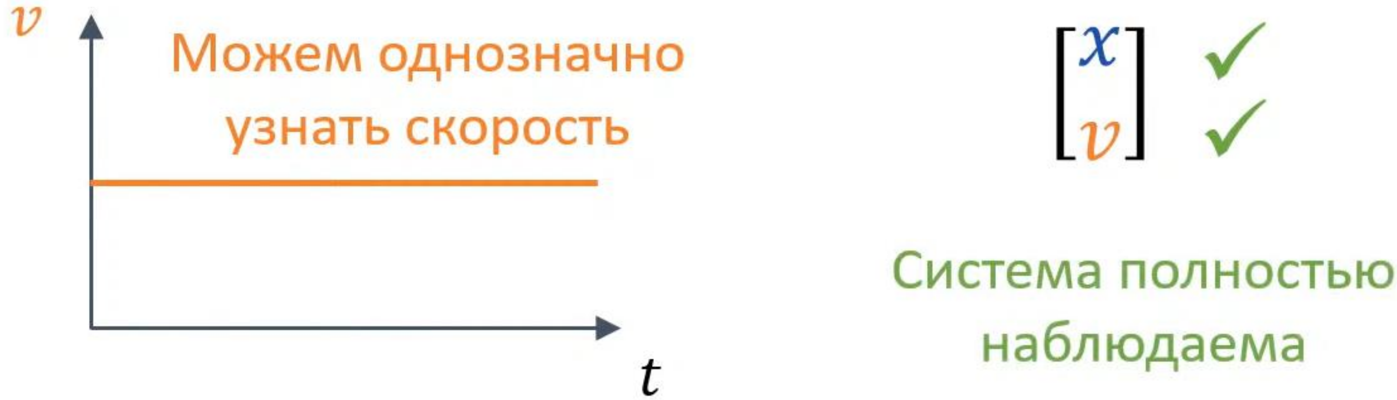
$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \begin{matrix} \times \\ \checkmark \end{matrix}$$

Система не полностью наблюдаема

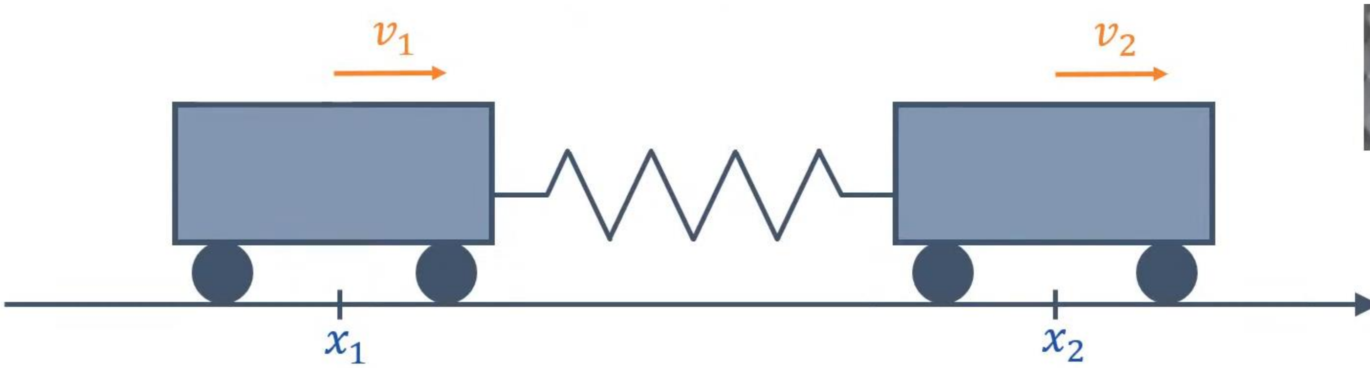
2. Тележка (видим только её координату)

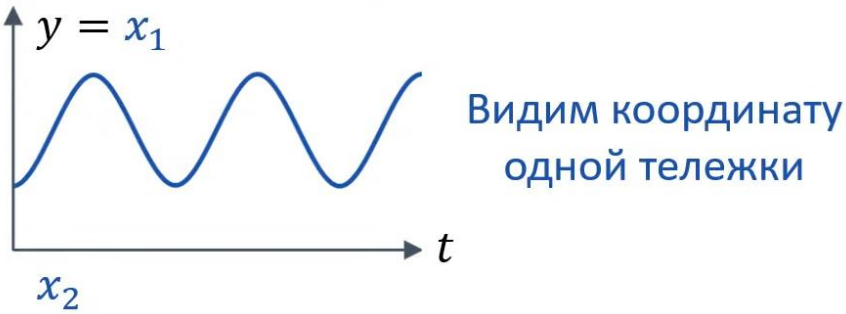


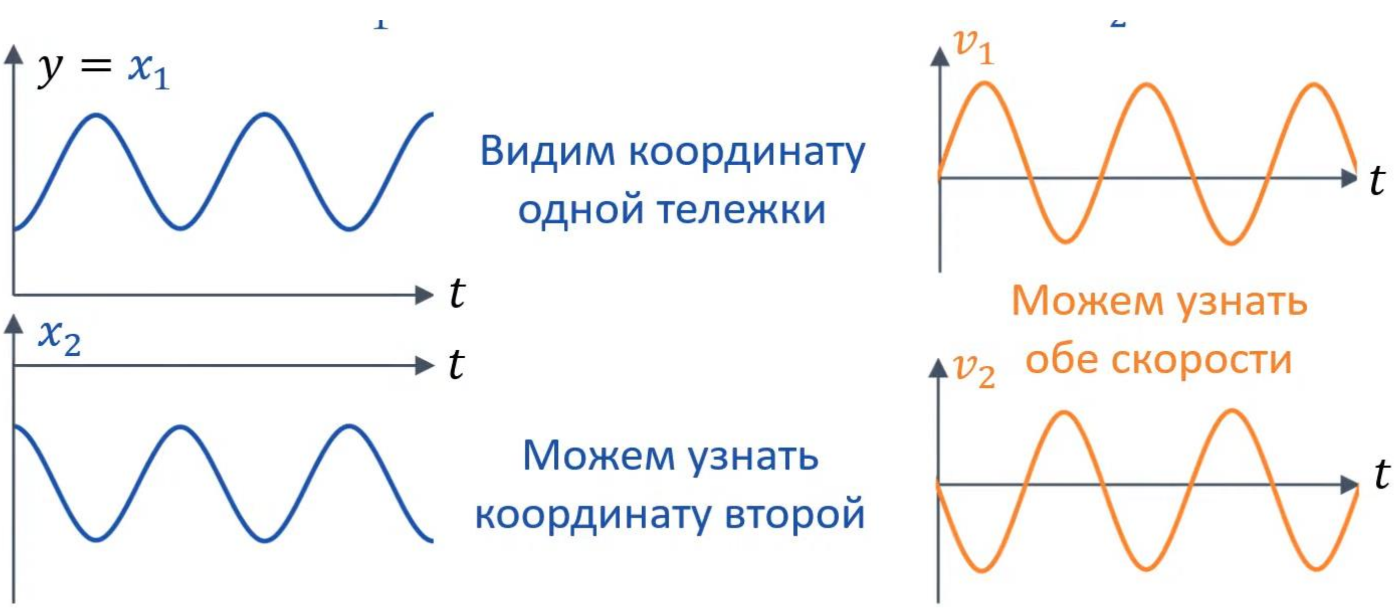

3. Две тележки (видим координату одной)




Можем ли узнать $x_2(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$?

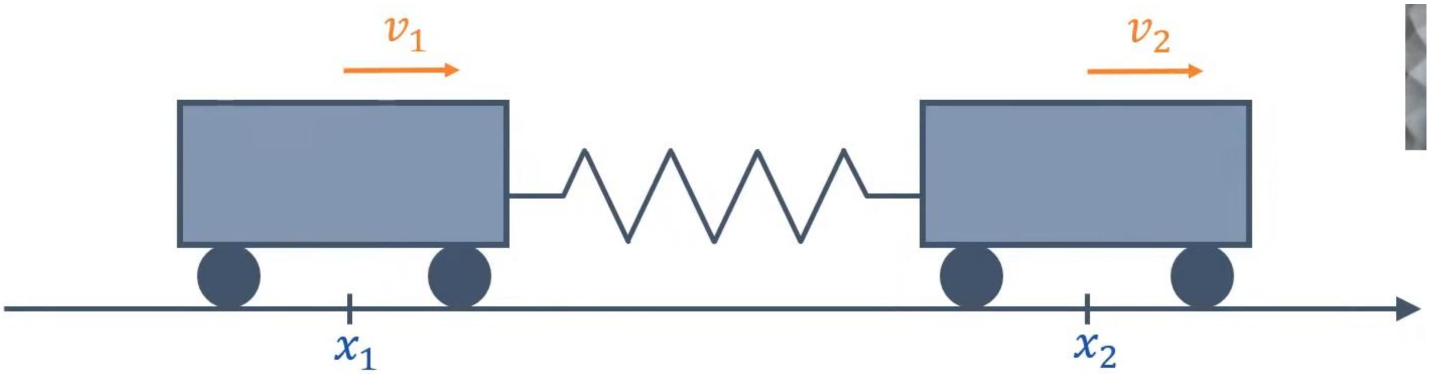
Мы знаем координату первой тележки, продифференцировав её, найдем скорость первой тележки. Продифференцировав $v_1$ узнаем ускорение первой тележки. А ускорение первой тележки это по сути есть сила действующая на первую тележку (так как у них единичная масса). И это ускорение пропорционально разности координат. Соответственно вычислим $x_1$ и $v_1$.

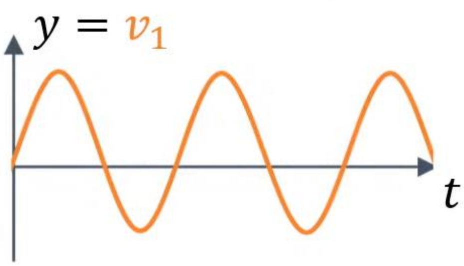


$$\begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{matrix}$$

Система полностью наблюдаема

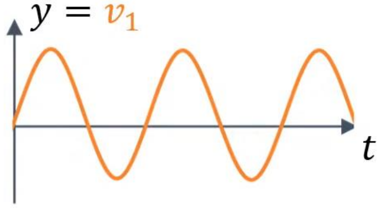
4. Две тележки (видим скорость одной)



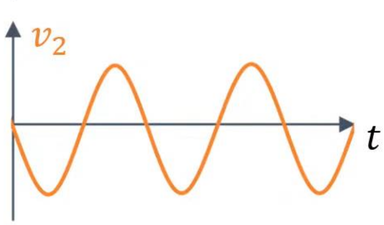




Видим скорость одной тележки

Можем ли узнать $x_1(t), x_2(t), v_2(t)$?




Видим скорость одной тележки




Можем узнать скорость другой

Но не можем узнать их координаты

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times \\ \checkmark \\ \times \\ \checkmark \end{matrix}$$

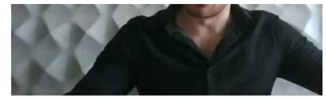
Система не полностью наблюдаема

(Правда, можем узнать разность координат)

$(x_1 - x_2)$

$\checkmark$

Подпространство ненаблюдаемости



$$\dot{x} = Ax$$
$$y = Cx$$
$$x(t) \in \mathbb{R}^n \quad y(t) \in \mathbb{R}$$

Множество состояний $x_0 \in \mathbb{R}^n$ таких, что если траектория $x(t)$ начнётся в точке $x_0$, то выход системы будет тождественно равен нулю $y(t) \equiv 0$, называется подпространством ненаблюдаемости этой системы.

Если подпространство ненаблюдаемости системы состоит из одной точки $0$, то система называется полностью наблюдаемой.

Критерий наблюдаемости

Матрица наблюдаемости системы $\dot{x} = Ax, y = Cx$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

($n$ – порядок системы)

## Подпространство ненаблюдаемости

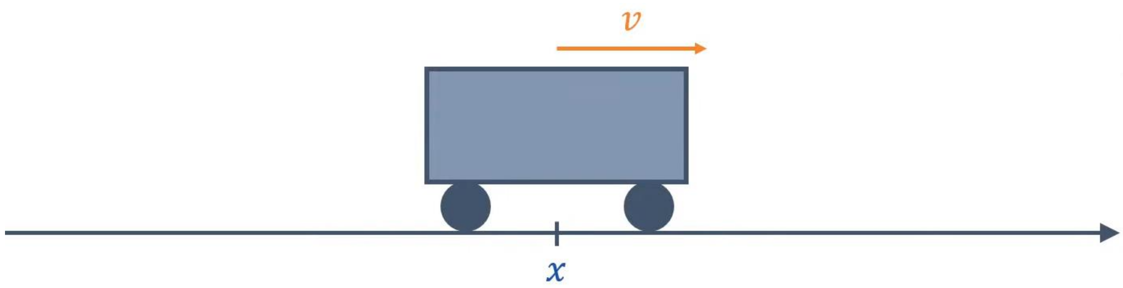
Подпространство ненаблюдаемости совпадает с $\mathrm{Nullspace}\ \mathcal{O}$ – то есть, состоит из всех векторов $x$ таких, что $\mathcal{O}x = 0$.

## Критерий Калмана

Система полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank}\ \mathcal{O} = n$.

Примеры

1. Тележка (видим только её скорость)




$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\end{bmatrix}$$

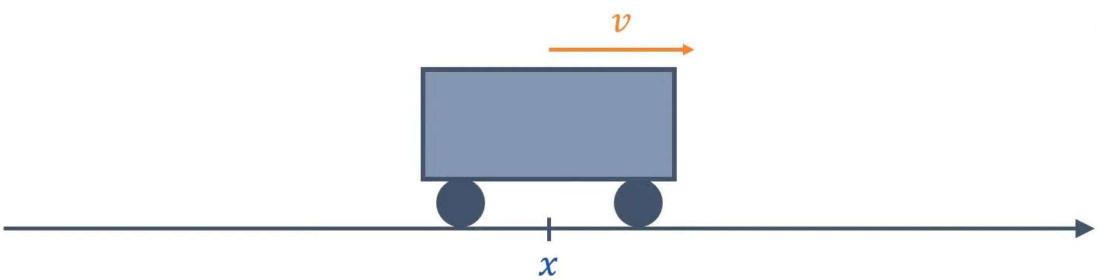
Траектории с начальным состоянием $\begin{bmatrix}x_0\\ 0\end{bmatrix}$ порождают нулевой выход

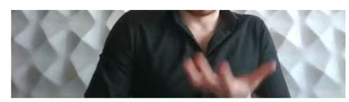
$$C = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \qquad CA = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{Nullspace}\,\mathcal{O} = \text{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right) \qquad \text{rank}\,\mathcal{O} = 1$$

Система не полностью наблюдаема

2. Тележка (видим только её координату)



$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\end{bmatrix}$$

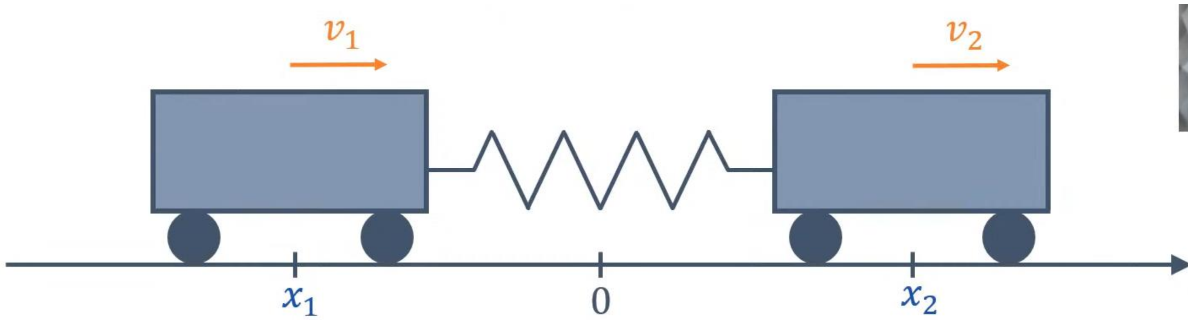
Только траектория с начальным состоянием $\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ порождает нулевой выход

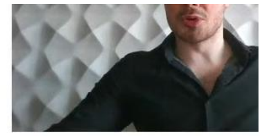
$$C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \qquad CA = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{Nullspace}\,\mathcal{O} = \{0\} \qquad \text{rank}\,\mathcal{O} = 2$$

Система полностью наблюдаема

3. Две тележки (видим координату одной)



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

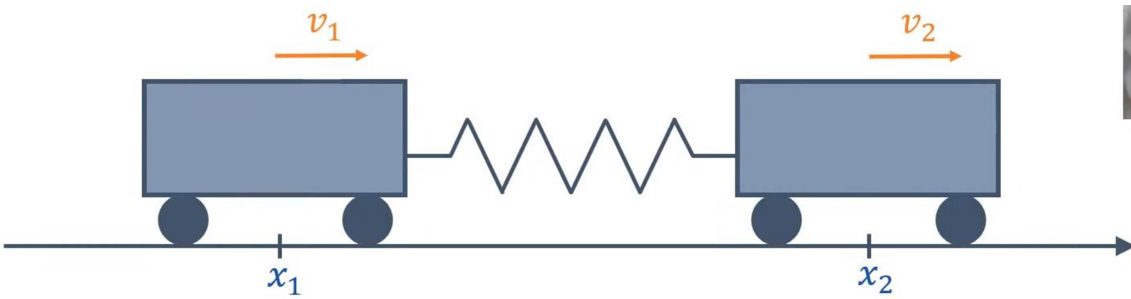
$$CA^2 = \begin{bmatrix} -k & 0 & k & 0 \end{bmatrix} \qquad CA^3 = \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix}$$

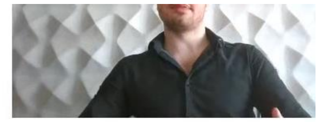
$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix}$$

$\text{Nullspace}\ \mathcal{O} = \{0\}$ $\qquad$ $\text{rank}\ \mathcal{O} = 4$ $\qquad$ Система полностью наблюдаема

4. Две тележки (видим скорость одной)



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{v}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{v}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -k & 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ k & 0 & -k & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ v_1\\ x_2\\ v_2\end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ v_1\\ x_2\\ v_2\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad CA = \begin{bmatrix}-k & 0 & k & 0\end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix}0 & -k & 0 & k\end{bmatrix} \qquad CA^3 = \begin{bmatrix}2k^2 & 0 & -2k^2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -k & 0 & k & 0\\ 0 & -k & 0 & k\\ 2k^2 & 0 & -2k^2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -k & 0 & k & 0\\ 0 & -k & 0 & k\\ 2k^2 & 0 & -2k^2 & 0\end{bmatrix}$$

Траектории с начальным состоянием $\begin{bmatrix}x_0\\ 0\\ x_0\\ 0\end{bmatrix}$ порождают нулевой выход

$$\text{Nullspace}\ \mathcal{O} = \text{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right) \qquad \text{rank}\ \mathcal{O} = 3$$

Система не полностью наблюдаема

Доказательство критерия наблюдаемости

Мы видим выход $y(t)$.
Сможем ли мы однозначно узнать траекторию $x(t)$?

## Берём производные

$$y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t)$$

$$\ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) = CA^2x(t)$$

$$\dddot{y}(t) = CA^2\dot{x}(t) = CA^3x(t)$$

$$\vdots$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \dddot{y}(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \dddot{y}(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

В силу теоремы Гамильтона-Кэли все строки после $n$-ой будут линейно зависимы.

Поэтому достаточно взять $n$ строк.

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Квадратная матрица

Вектор

Вектор

Однозначное решение $x(t)$ существует в том и только в том случае, если

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Про подпространство ненаблюдаемости

Мы видим выход $y(t)$.
Сможем ли мы однозначно узнать начальное состояние $x(0)$?
Если да, то сможем узнать и всю траекторию $x(t)$.

## Какие начальные состояния не видны в выходе?

$$y(t) = Ce^{At}x(0) \equiv 0$$

$$C(\alpha_0(\tau)I + \alpha_1(\tau)A + \alpha_2(\tau)A^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(\tau)A^{n-1})x(0) \equiv 0$$

$$Cx(0) = 0 \qquad CAx(0) = 0 \qquad CA^2x(0) = 0 \qquad CA^{n-1}x(0) = 0$$

$$Cx(0) = 0 \qquad CAx(0) = 0 \qquad CA^2x(0) = 0 \qquad CA^{n-1}x(0) = 0$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) = 0$$

Если начальное состояние $x(0)$ лежит в подпространстве ненаблюдаемости

$$x(0) \in \mathrm{Nullspace}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

то выход будет тождественно равен нулю.

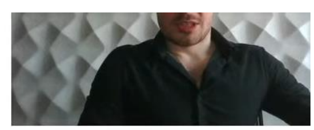
## Какие начальные состояния дают одинаковый выход?

Если два начальных состояния $x_0$ и $x_0'$ таковы, что

$$(x_0 - x_0') \in \mathrm{Nullspace}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

то выход $y(t)$ при $x(0) = x_0$ будет тождественно равен выходу $y(t)$ при $x(0) = x_0'$.

### Использование жорданова разложения



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Пусть $P$ — матрица, столбцы которой – обобщённые собственные вектора матрицы $A$. Тогда после замены базиса $\hat{x} = P^{-1}x$ получаем систему в жордановой форме:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \\ y = CP\hat{x} \end{cases}$$

Система в жордановой форме полностью управляема тогда и только тогда, когда

- ✓ Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам.
- ✓ Элементы матрицы входных воздействий, соответствующие последним строкам жордановых клеток, не равны нулю.

Система в жордановой форме полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда

- ✓ Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам.
- ✓ Элементы матрицы выходов, соответствующие первым столбцам жордановых клеток, не равны нулю.

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\\ \dot{\hat{x}}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}u$$

Полностью управляема?

Нет

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\\ \dot{\hat{x}}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}u$$

Полностью управляема?

Да

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\\ \dot{\hat{x}}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\4\end{bmatrix}u$$

Полностью управляема?

Да

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\\ \dot{\hat{x}}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}u$$

Полностью управляема?

Нет

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\\ \dot{\hat{x}}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

Полностью управляема?

Нет

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\\ \dot{\hat{x}}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

Полностью управляема?

Да

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\\ \dot{\hat{x}}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

Полностью управляема?

Нет

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\\ \dot{\hat{x}}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\hat{x}$$

Полностью наблюдаема?

Нет

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\\ \dot{\hat{x}}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}1&2&3&4\end{bmatrix}\hat{x}$$

Полностью наблюдаема?

Да

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\\ \dot{\hat{x}}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}0&2&3&4\end{bmatrix}\hat{x}$$

Полностью наблюдаема?

Нет

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\\ \dot{\hat{x}}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&3&0\end{bmatrix}\hat{x}$$

Полностью наблюдаема?

Да

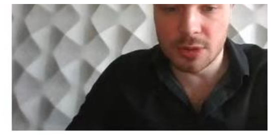
$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\\ \dot{\hat{x}}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}0&2&0&4\end{bmatrix}\hat{x}$$

Полностью наблюдаема?

Нет

## Использование спектрального разложения



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Пусть у $A$ все собственные числа различны, $P$ — матрица её собственных векторов. Тогда после замены базиса $\hat{x} = P^{-1}x$ получаем систему в диагональной форме:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \\ y = CP\hat{x} \end{cases}$$

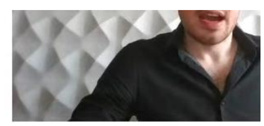
Система полностью управляема тогда и только тогда, когда

✓ Все элементы матрицы $P^{-1}B$ не равны нулю.

Система полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда

✓ Все элементы матрицы $CP$ не равны нулю.

## Пример



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -16 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & -10 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Матрица собственных векторов

$$CP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Система не полностью управляема и не полностью наблюдаема

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

Управляемость и наблюдаемость мод (диагональная форма)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

Моды $e^{2t}$, $e^{-3t}$, $e^{4t}$ управляемы

Мода $e^{-5t}$ неуправляема

Моды $e^{-3t}$, $e^{-5t}$ наблюдаемы

Моды $e^{2t}$, $e^{4t}$ ненаблюдаемы

Управляемость и наблюдаемость мод (жорданова форма)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

Моды с $\lambda = -3$ полностью управляемы

Моды с $\lambda = 5$ неполностью управляемы

Моды с $\lambda = -3$ неполностью наблюдаемы

Моды с $\lambda = 5$ полностью наблюдаемы

Стабилизируемость и обнаруживаемость (Stabilizability and detectability)

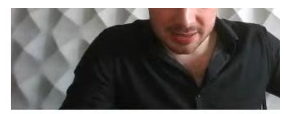
## Стабилизируемость

Система называется стабилизируемой, если все её неуправляемые моды устойчивы.
(stabilizable)

## Обнаруживаемость

Система называется обнаруживаемой, если все её ненаблюдаемые моды устойчивы.
(detectable)

Пример (с диагональной формой)



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -16 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & -10 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$\Downarrow$ Переход в диагональную форму

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица собственных векторов

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

Мода $e^{-5t}$ устойчива

Все неуправляемые моды устойчивы

Система стабилизируема

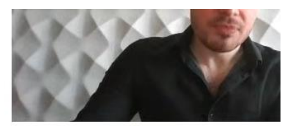
Моды $e^{2t}$, $e^{4t}$ неустойчивы

Не все ненаблюдаемые моды устойчивы

Система не обнаруживаема

Пример (с жордановой формой)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -7 & -1 \\ 0 & -4 & 9 & -8 \\ 0 & -1 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

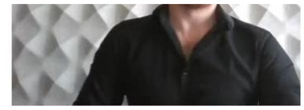


$\Downarrow$ Переход в жорданову форму

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица обобщённых собственных векторов

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases}$$



$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}
\end{cases}
$$

Мода с $\lambda = 5$
неустойчива

Не все неуправляемые моды устойчивы
Система не стабилизируема

Мода с $\lambda = -3$
устойчива

Все ненаблюдаемые моды устойчивы
Система обнаруживаема

Терминология

$$
\begin{cases}
\dot{x} = Ax + Bu \\
y = Cx
\end{cases}
$$

Вместо «система управляема/стабилизируема» говорят
«пара $(A, B)$ управляема/стабилизируема»

Вместо «система наблюдаема/обнаруживаема» говорят
«пара $(C, A)$ наблюдаема/обнаруживаема»

О самой системе говорят
«система $(C, A, B)$»

## Стабилизируемость

Пара $(A, B)$ стабилизируема

$\Updownarrow$

Существует матрица $K$ такая, что $A + BK$ устойчива

*(Все собственные числа матрицы $A + BK$ имеют отрицательную вещественную часть)*

$$A + BK = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

## Обнаруживаемость

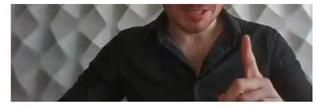
Пара $(C, A)$ обнаруживаема

$\Updownarrow$

Существует матрица $L$ такая, что $A + LC$ устойчива

$$A + LC = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Статический регулятор по состоянию



Объект управления $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

Статический регулятор $u = Kx$

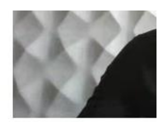
Замкнутая система $\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x \\ y = Cx \end{cases}$

Хотим, чтобы замкнутая система была устойчива, а траектория $x(t)$ стремилась к нулю.

Траектория $x(t) = e^{(A+BK)t}x(0)$ $\quad y(t) = Ce^{(A+BK)t}x(0)$

Статический регулятор, делающий замкнутую систему устойчивой, существует в том и только в том случае, если пара $(A, B)$ стабилизируема.

Наблюдатель (Люенбергера)



Объект управления $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

Наблюдатель $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$

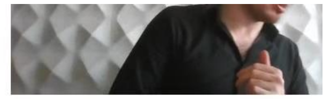
Ошибка наблюдения $e = x - \hat{x}$

Динамика ошибки наблюдения $\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$

$$\dot{e} = Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + LC\hat{x} - LCx)$$

$$\dot{e} = A(x - \hat{x}) + LC(x - \hat{x})$$

$$\dot{e} = (A + LC)e$$



Объект управления $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

Наблюдатель $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$

Ошибка наблюдения $e = x - \hat{x}$

Динамика ошибки наблюдения $\dot{e} = (A + LC)e$

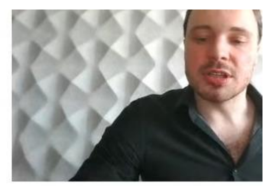
Траектория ошибки $e(t) = e^{(A+LC)t}e(0)$

Хотим, чтобы динамика ошибки была устойчива, а траектория $e(t)$ стремилась к нулю.

Наблюдатель, делающий динамику ошибки наблюдения устойчивой, существует в том и только в том случае, если пара $(C, A)$ обнаруживаема.



## Zero-pole cancellation



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad W(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

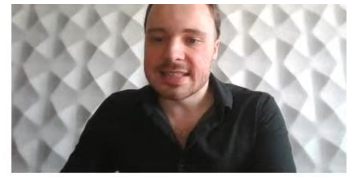
Если система не полностью управляема и/или не полностью наблюдаема, то некоторые нули передаточной функции совпадают с её полюсами, и передаточная функция сокращается.

## Пример

Система 4-го порядка, не являющаяся полностью управляемой и наблюдаемой

$$W(s) = \frac{(s-2)(s+3)(s+10)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s-5)} = \frac{(s-2)\ (s+10)}{(s+1)(s+2)\ (s-5)}$$

## Доказательство для диагонализируемой системы



Рассмотрим систему в диагональной форме и найдём её передаточную функцию.

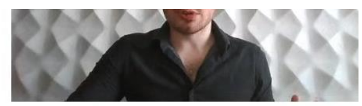
$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\\ \dot{\hat{x}}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{bmatrix}\hat{x}$$

Если $c_i$ или $b_i$ равно нулю, то слагаемое исчезнет и порядок передаточной функции понизится

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$W(s) = \begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s-\lambda_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s-\lambda_2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s-\lambda_3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s-\lambda_4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix} = \frac{c_1 b_1}{s-\lambda_1} + \cdots + \frac{c_4 b_4}{s-\lambda_4}$$

Пример



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

$$W(s) = \frac{1}{s+1}$$

Передаточная функция выражает полностью управляемую и наблюдаемую часть системы