

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

Факультет систем управления и робототехники

**Отчет по лабораторной работе №10**

**«LQR, LQE, LQG»**

**по дисциплине «Теория автоматического управления»**

Выполнил: студент гр. Р3238,  
Кирбаба Д.Д.

Преподаватель: Перегудин А.А.,  
ассистент фак. СУиР

## Цель работы

Исследование, сравнение и синтез LQR, LQE, LQG

## Начальные данные

3 вариант

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 19 & 10 & -13 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ -4 & 8 & 6 & -7 \\ 0 & -15 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

## Выполнение работы

### Задание 1.

1.1. Описание системы и алгоритма синтеза LQR

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & 19 & 10 & -13 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ -4 & 8 & 6 & -7 \\ 0 & -15 & 0 & 9 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}u, \quad u = Kx, \quad x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Построим LQR на основе различных пар матриц  $(Q, R)$ .

Для этого будем использовать следующий алгоритм:

- Выбираем матрицы  $Q \geq 0, R > 0$  с определенным соотношением между величиной траектории сходимости и величиной управления
- Проверяем необходимые условия: пара  $(A, B)$  – стабилизируема, пара  $(Q, A)$  – обнаруживается
- Находим решение  $P > 0$  уравнения Риккати  $A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$
- Вычисляем матрицу регулятора  $K = -R^{-1}B^T P$

Тогда в замкнутой системе с найденной матрицей регулятора  $K$  критерий качества

$$J = \int_0^\infty (x^t(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt = \int_0^\infty x^t(t)Qx(t)dt + \int_0^\infty u^T(t)Ru(t)dt = J_x + J_u$$

примет наименьшее значение, равное  $J = x_0^T Px_0$ .

## 1.2. Синтез LQR

Программный код:

```
% plant parameters
A = [-6 19 10 -13; 0 -9 0 6; -4 8 6 -7; 0 -15 0 9];
B = [2 0; 1 0; 3 0; 2 0];

% initial conditions
x0 = [1; -2; -1; 2];

% controllability
eig(A);
CM = [B A*B A*A*B A*A*A*B];
rank(CM);

%-----

% LQR 1
Q1 = [10 0 0 0; 0 5 0 0; 0 0 20 0; 0 0 0 1];
R1 = [0.1 0; 0 0.1];

% (Q, A) - detectable check
OM1 = [Q1; Q1*A; Q1*A*A; Q1*A*A*A];
rank(OM1);

% finding P, K
[P1, ~, L1] = icare(A, B, Q1, R1, 0, eye(4), 0);
K1 = -inv(R1)*B'*P1;

% min J
minJ1 = x0'*P1*x0;

% experimental J
exp_J1 = sum(out.stiff_j);
```

В начале проверим сможем ли мы вообще построить регулятор, сводящий систему в ноль. Для этого необходимо, чтобы пара  $(A, B)$  являлась стабилизируемой.

$$\sigma(A) = \{\pm 2i, \pm 3i\}$$

Необходимо проверять управляемость всех собственных чисел, для этого найдем ранг матрицы управляемости

$$\text{rank}([B \ AB \ A^2B \ A^3B]) = 4 = n$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы, значит все собственные числа управляемы, а значит и пара  $(A, B)$  является стабилизируемой.

### Жесткий регулятор

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Данный выбор матриц значит, что уменьшение количества ошибки отклонения от точки равновесия для нас намного важнее, чем уменьшение количества затраченного управления. То есть мы разрешаем регулятору приводить систему в равновесие достаточно большим управлением. Однаковые значения в матрице  $R$  значит то, что компоненты вектора управления равны по важности в критерии качества  $J$ . А матрице  $Q$  заложен следующий смысл: чем больше значение, тем более важно нам быстро свести в ноль соответствующую компоненту вектора состояний.

Проверка условия пары  $(Q, A)$  – обнаруживаема:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} Q \\ QA \\ QA^2 \\ QA^3 \end{pmatrix} = 4 = n$$

Решим уравнение Риккати и найдем  $P, K$ :

$$P = \begin{bmatrix} 19.64 & -132.25 & -28.33 & 88.83 \\ -132.25 & 980.42 & 204.85 & -661.83 \\ -28.33 & 204.85 & 51.14 & -149.51 \\ 88.83 & -661.83 & -149.51 & 464.14 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 3.17 & -68.14 & -25.9 & 44.41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Значение функционала качества:

$$J = 13502$$

### Мягкий регулятор

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

При данной конфигурации больший вес имеет количество затраченного управления, а количество ошибки отклонения играет второстепенную роль. Регулятор будет подавать меньше управления через первую компоненту, чем через вторую. Так же все компоненты вектора состояний имеют равны по важности в критерии качества  $J$ .

Проверка условия пары  $(Q, A)$  – обнаруживаема:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} Q \\ QA \\ QA^2 \\ QA^3 \end{pmatrix} = 4 = n$$

Решим уравнение Риккати и найдем  $P, K$ :

$$P = \begin{bmatrix} 17 & -63.27 & -25.86 & 44.31 \\ -63.27 & 348.41 & 102.88 & -235.48 \\ -25.86 & 102.88 & 44.2 & -73.41 \\ 44.31 & -235.48 & -73.41 & 164.66 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.18 & -0.6 & -0.37 & 0.38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Значение функционала качества:

$$J = 5184.5$$

## Средний регулятор

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Такое соотношение значений в матрицах означает, что для нас одинаково важно как количество ошибки отклонения, так и количество управления.

Проверка условия пары  $(Q, A)$  – обнаруживаема:

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} Q \\ QA \\ QA^2 \\ QA^3 \end{bmatrix} \right) = 4 = n$$

Решим уравнение Риккати и найдем  $P, K$ :

$$P = \begin{bmatrix} 16.23 & -105.34 & -25.33 & 70.42 \\ -105.34 & 782.37 & 179.83 & -527.63 \\ -25.33 & 179.83 & 48.79 & -127.53 \\ 70.42 & -527.63 & -127.53 & 367.36 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.61 & -11.18 & -4.1 & 6.93 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

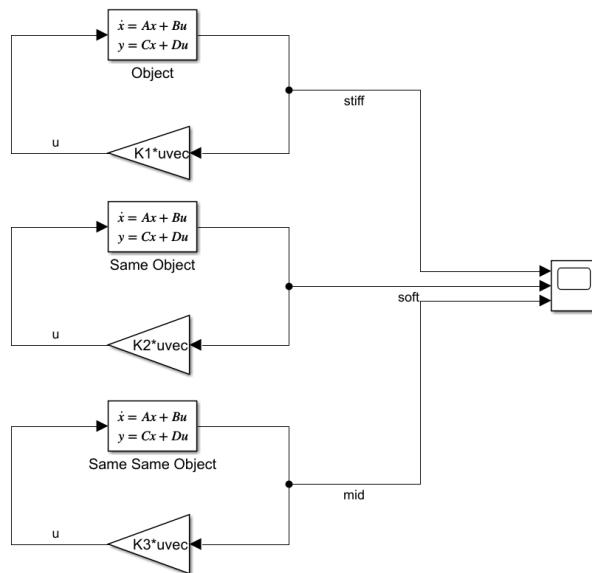
Значение функционала качества:

$$J = 10868$$

Заметим, что у каждого регулятора вторая строка в матрице  $K$  – нулевая. Это происходит из-за того, что в матрице системы  $B$  второй столбец полностью нулевой, а значит при умножении матриц  $BK$  вторая строка матрицы  $K$  обращается в ноль независимо от значений.

### 1.3. Моделирование и сравнение регуляторов

Схема моделирования:



Сравнительные графики компонент векторов при различных LQR:

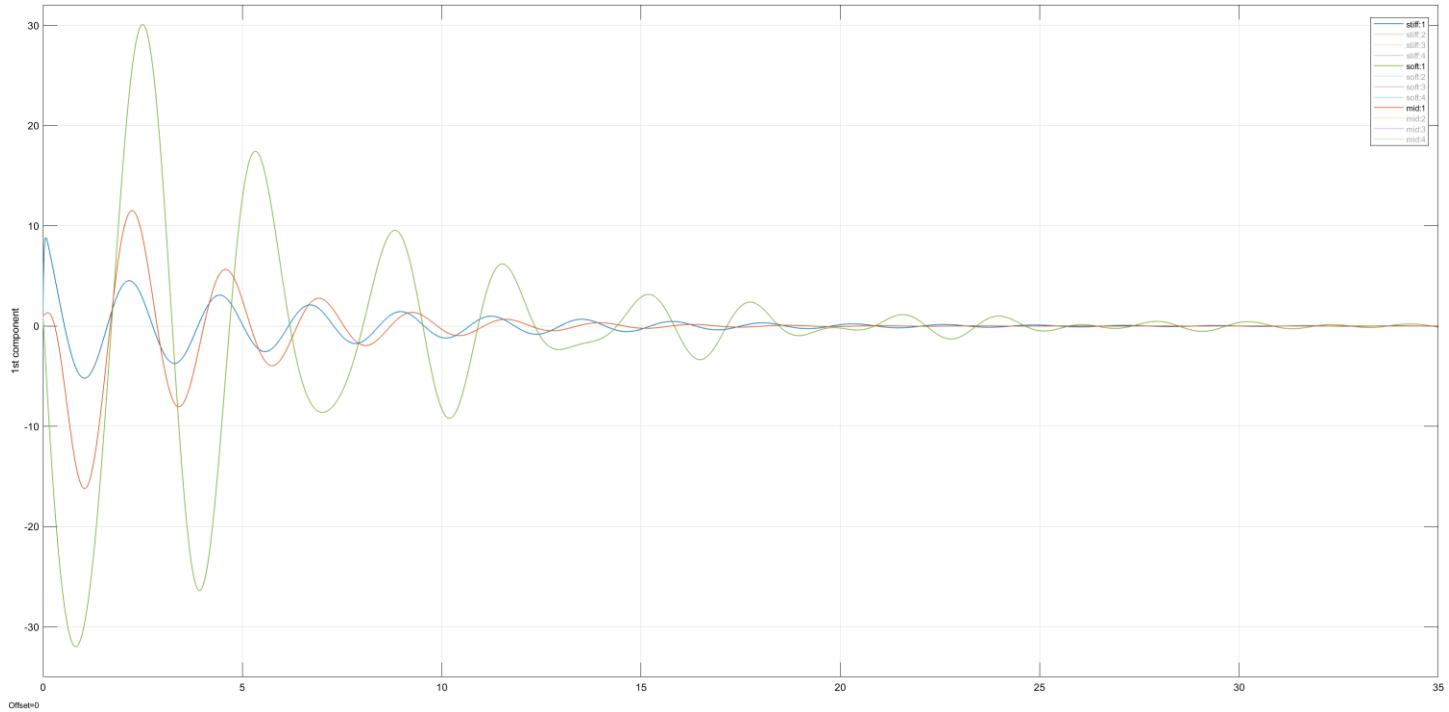


Рисунок 1: графики первых компонент

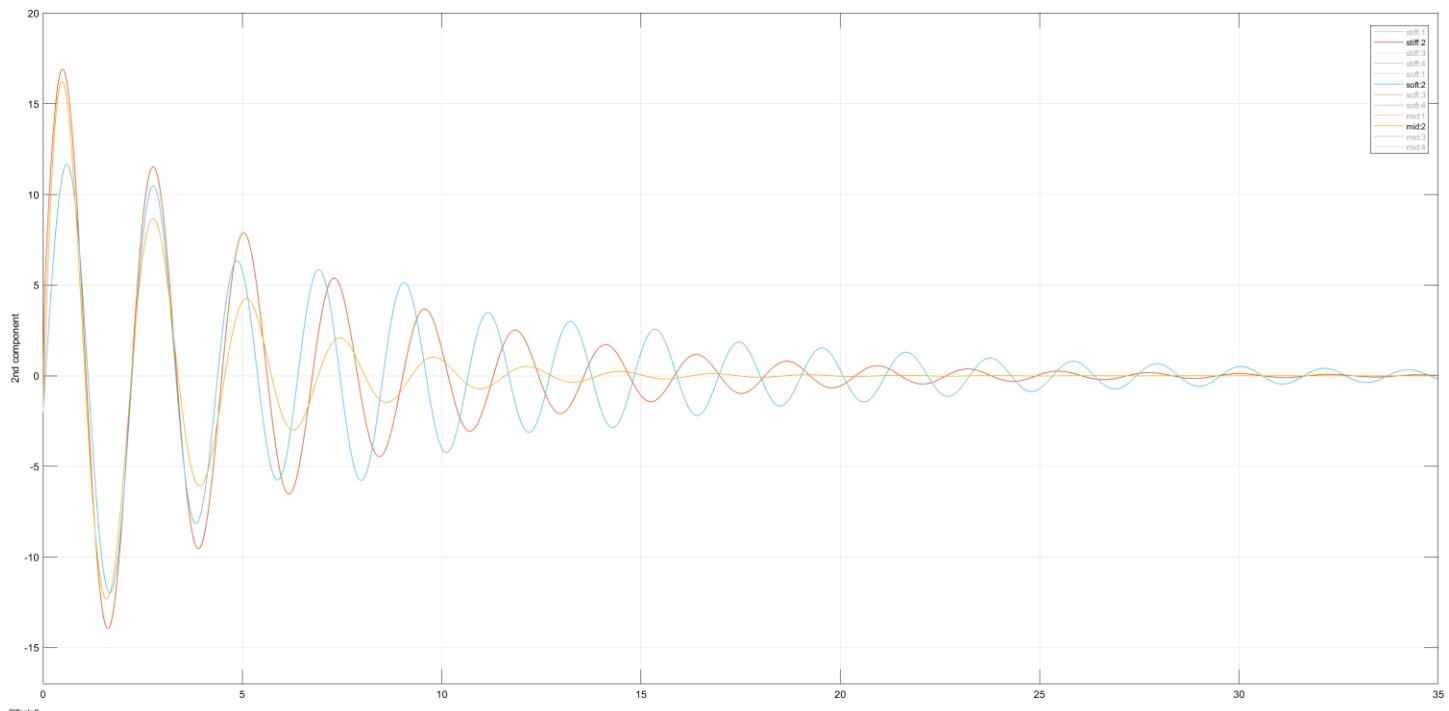


Рисунок 2: графики вторых компонент

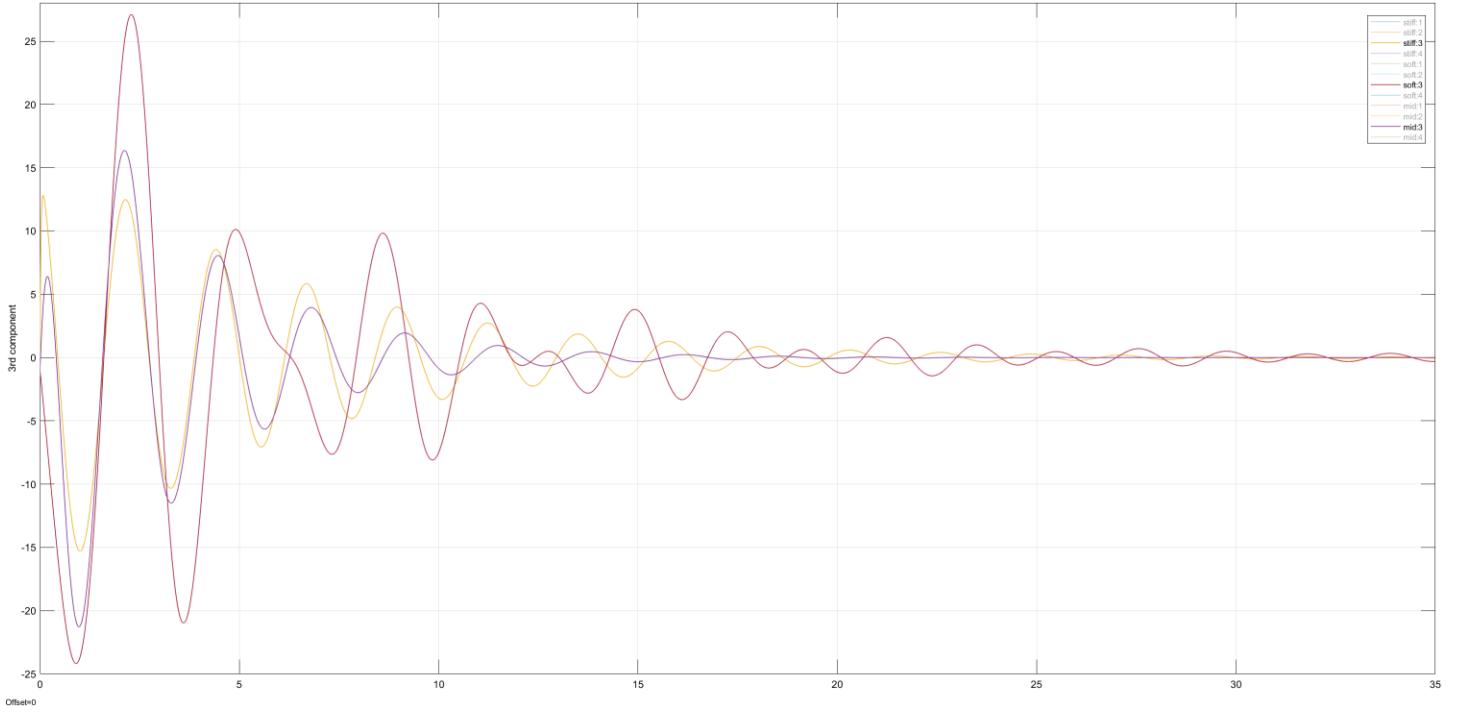


Рисунок 3: график третьих компонент

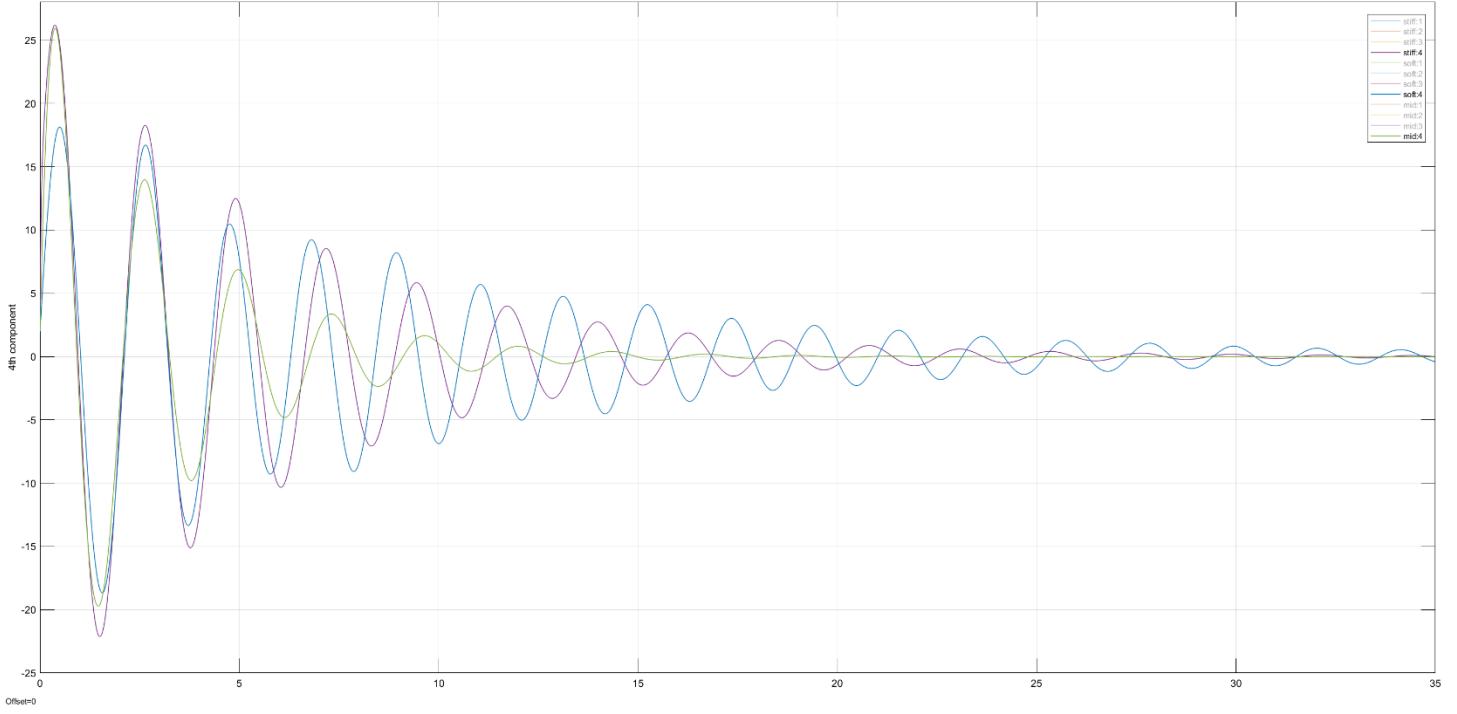


Рисунок 4: графики четвертых компонент

Самое большое время переходного процесса при каждой компоненте, как и ожидалось, у мягкого регулятора, так как элементы матрицы регулятора малы из-за большого штрафа на управление.

У среднего регулятора самое быстрое время переходного процесса при каждой компоненте, но жесткий регулятор имеет наименьшие отклонения от оси  $Ox$  по каждой компоненте.

Еще более четкую зависимость между регуляторами и временем и видом переходного процесса отдельных компонент можно достичь если увеличить разрыв между значениями матриц  $Q$  и  $R$ .

Сравнительные графики управляющих воздействий:

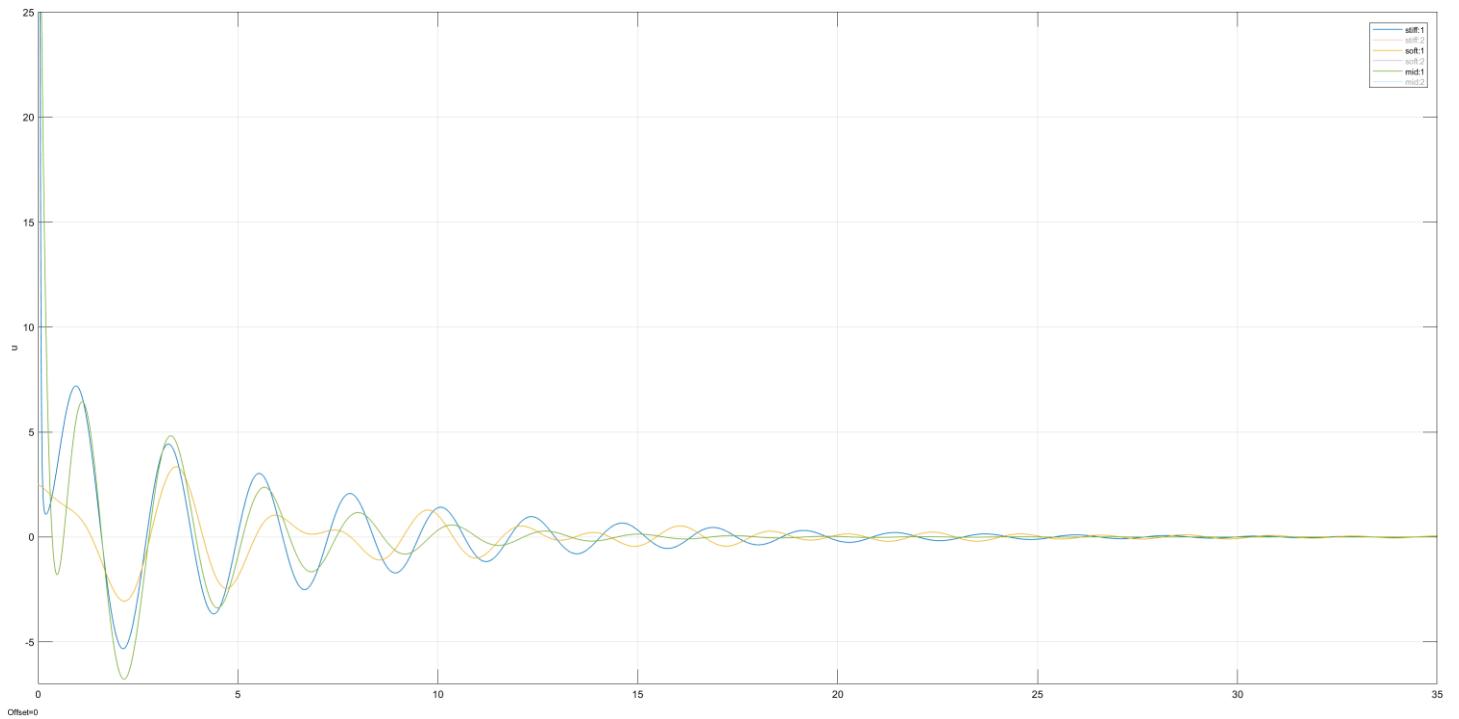


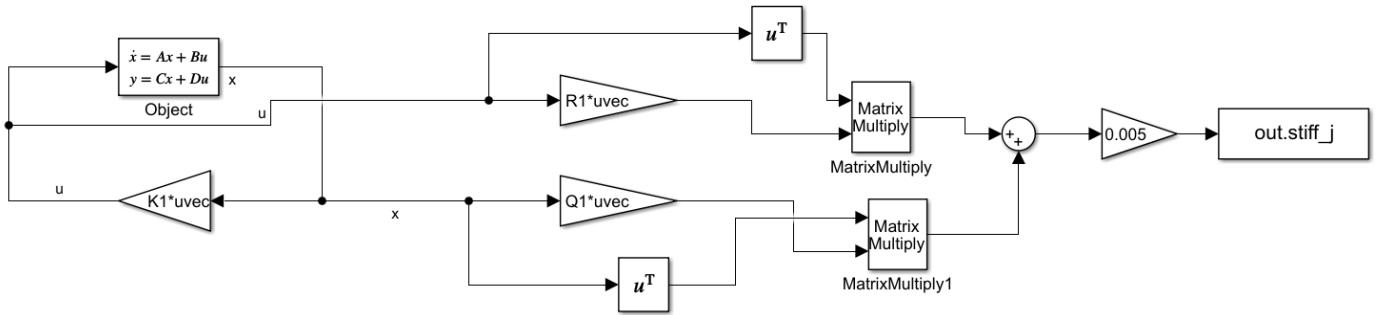
Рисунок 5: графики управляющих воздействий

Мягкий регулятор затрачивает наименьшее количество управления, средний – среднее, жесткий – наибольшее.

Итого, все LQR подчинялись закону: чем «больше»  $Q$  относительно  $R$ , тем больше «штраф» за отклонение  $x$  от 0 и, соответственно, меньше интеграл от квадрата отклонения от оси  $0x$ . А чем «больше»  $R$  относительно  $Q$ , тем больше «штраф» за управление и, соответственно, меньше интеграл от квадрата управления во время переходного процесса.

Найдем экспериментально значение  $J$  для каждого регулятора и сравним с полученным аналитически.

Моделируем 1000 секунд при шаге в 0.005 секунд.



### Жесткий регулятор

Аналитическое значение:  $J = 13502$

Найденное экспериментально:  $J = 13497$

## Мягкий регулятор

Аналитическое значение:  $J = 5184.5$

Найденное экспериментально:  $J = 5183.7$

## Средний регулятор

Аналитическое значение:  $J = 10868$

Найденное экспериментально:  $J = 10866.5$

При увеличении времени моделирования и уменьшении шага, экспериментальное значение будет стремиться к аналитическому.

В процессе синтеза LQR важны не абсолютные значения элементов матриц  $Q$  и  $R$ , а их отношение. Взяв «большой»  $Q$ , мы обозначаем большой штраф за отклонение системы от точки устойчивости, тем самым переходный процесс «ускоряется» и при этом увеличивается максимальное управление. Если же взять «большим»  $R$ , то нам важно уменьшить управление, а тогда процесс «замедляется».

## Задание 2.

2.1. Синтез не-LQR

### Регулятор модального управления

Пусть желаемый спектр:  $\sigma(\Gamma) = \sigma(A + BK) = \{-1, -1, -2, -3\}$ .

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Выберем матрицу  $Y$ , так чтобы пара  $(Y, \Gamma)$  была наблюдаема:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу подобия  $P$ :

$$AP - P\Gamma = BY, \quad P = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{61}{25} & -\frac{19}{26} & -\frac{25}{78} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{17}{50} & -\frac{1}{13} & 0 \\ -\frac{3}{10} & -\frac{47}{50} & \frac{2}{13} & \frac{25}{78} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{8}{25} & \frac{1}{13} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Матрица регулятора:

$$K = -YP^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{21}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{7}{2} \\ \frac{6}{5} & -\frac{21}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

## Регулятор со степенью сходимости $\alpha = 3$

Решением соответствующих LMI, получили матрицу  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} 7.7 & 1.95 & 1.5 & 1.8 \\ 1.95 & 1 & 3.25 & 2.15 \\ 1.47 & 3.25 & 16.6 & 9.95 \\ 1.8 & 2.15 & 9.94 & 6 \end{bmatrix}$$

Матрица регулятора:

$$K = \begin{bmatrix} 55.1 & -476.89 & -158 & 408.94 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.2. Сравнение переходных процессов

Будем сравнивать средний LQR из 1 задания с двумя вычислёнными не-LQR.

Графики переходного процесса:

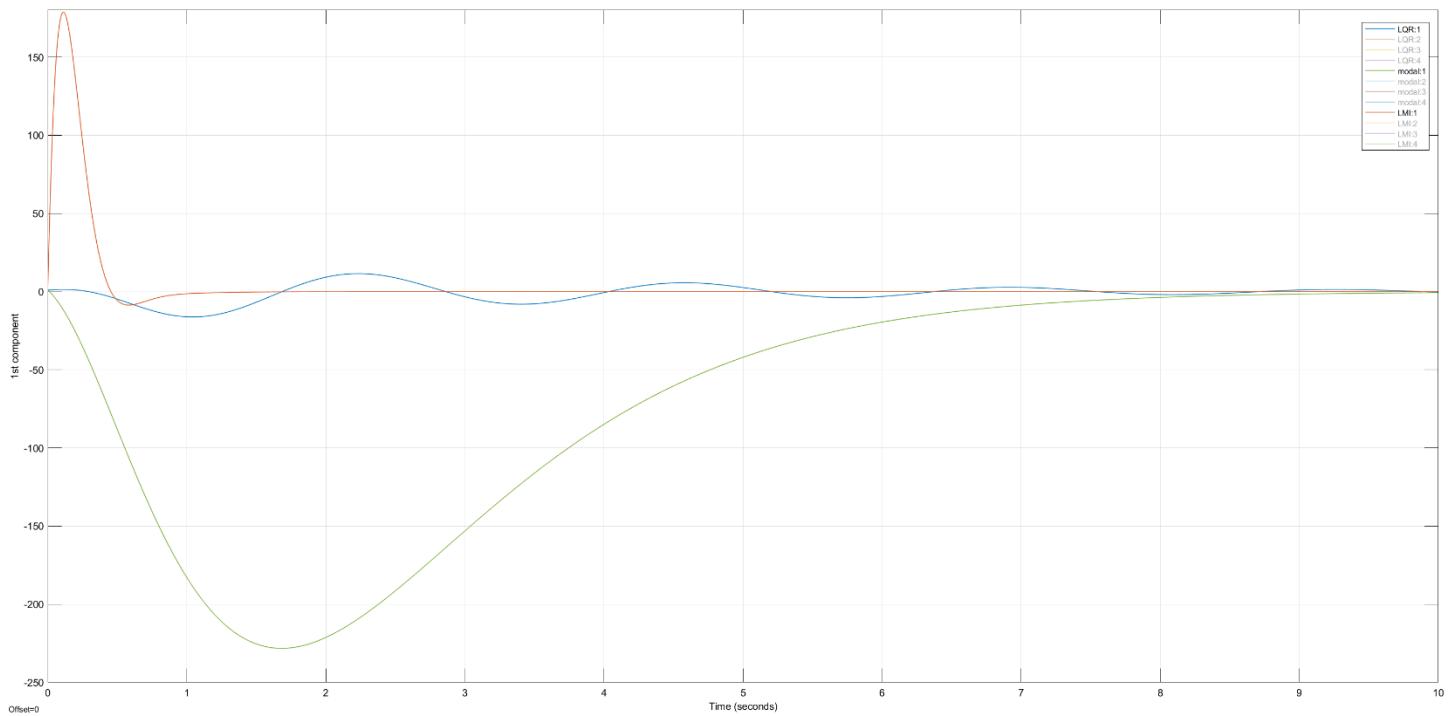


Рисунок 6: графики первых компонент

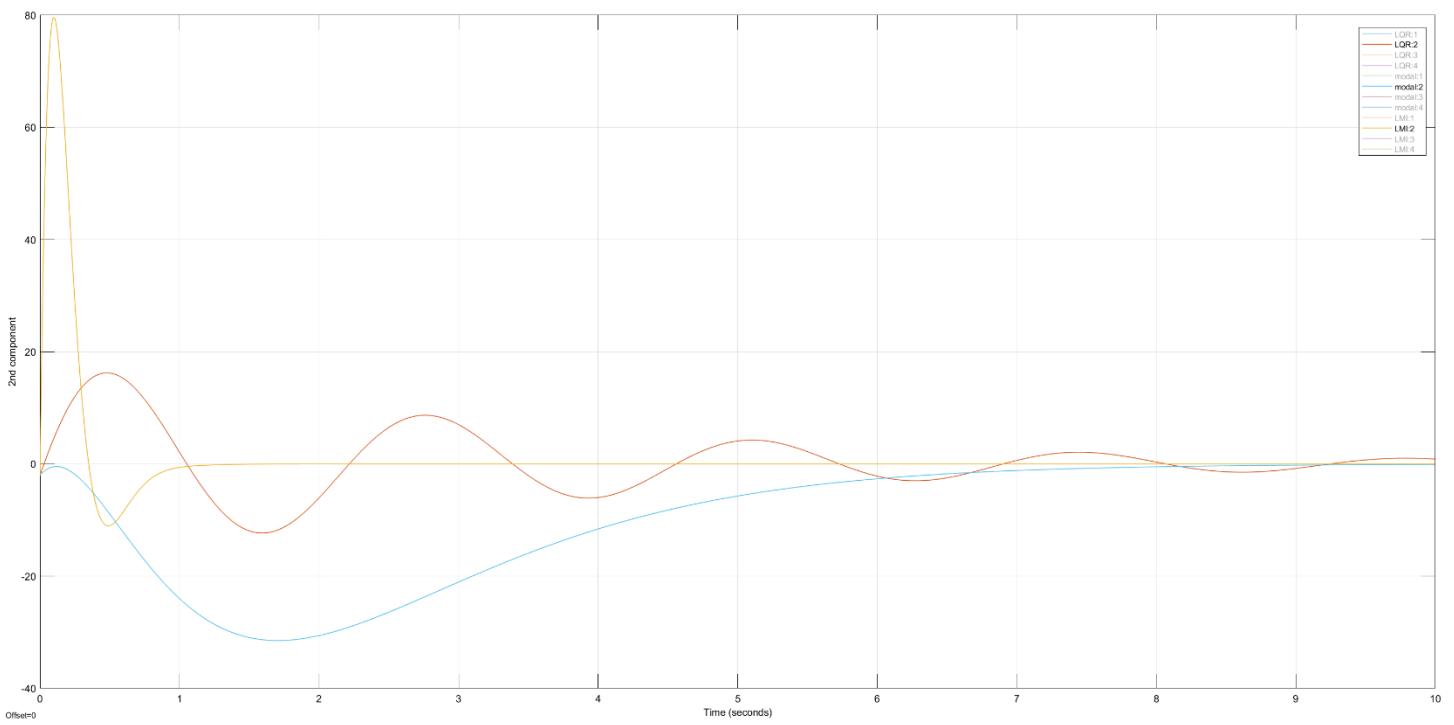


Рисунок 7: графики вторых компонент

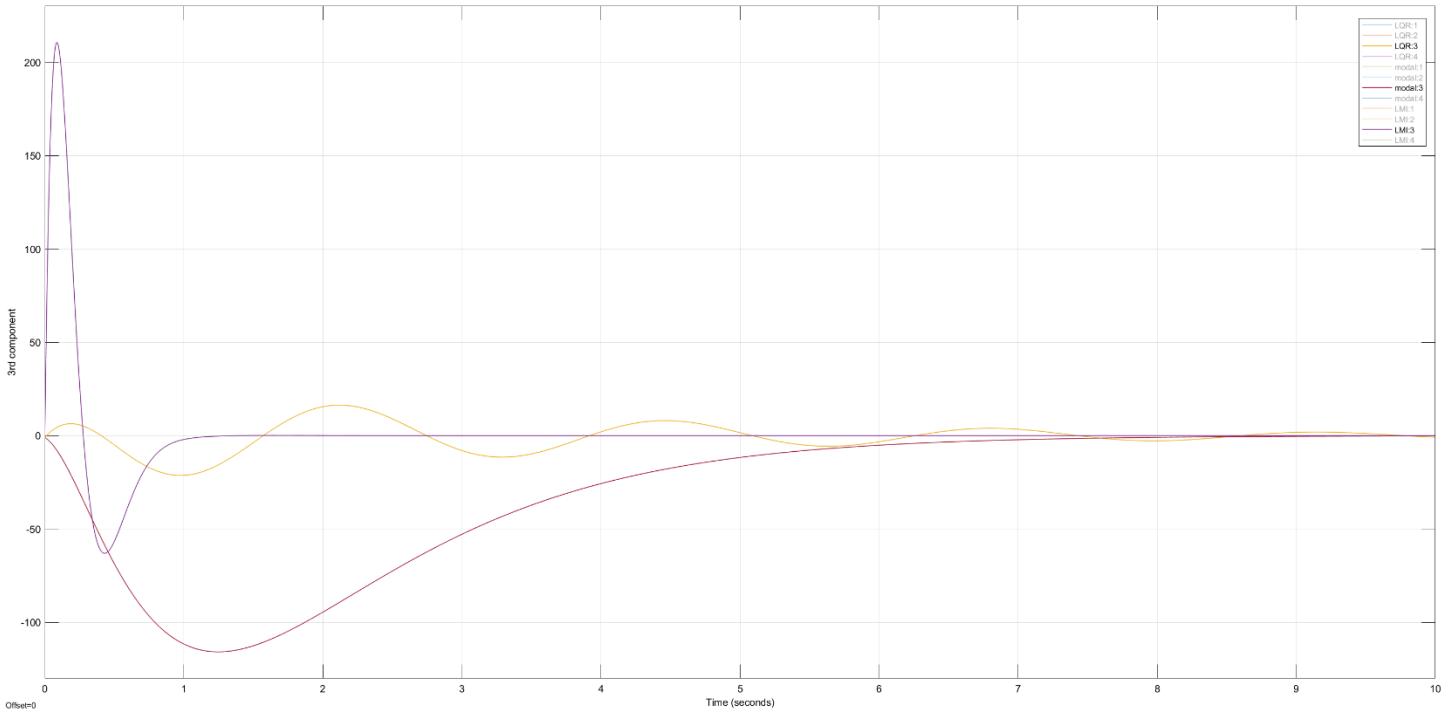


Рисунок 8: графики третьих компонент

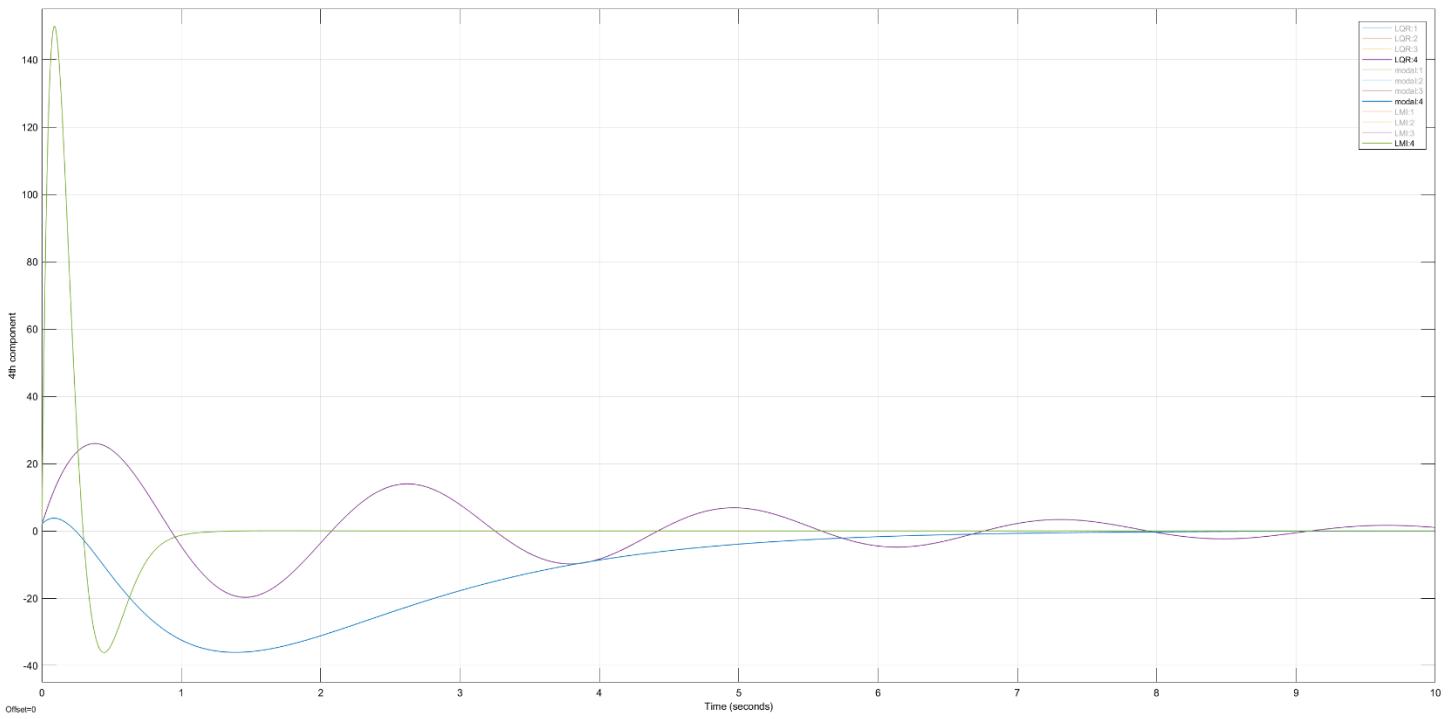


Рисунок 9: графики четвертых компонент

Во всех случаях LQR имеет наибольшее время переходного процесса, однако при нем отсутствует большое отклонение при малых  $t$  как в модальном регуляторе и регуляторе с экспоненциальной степенью сходимости.

Графики входных воздействий:

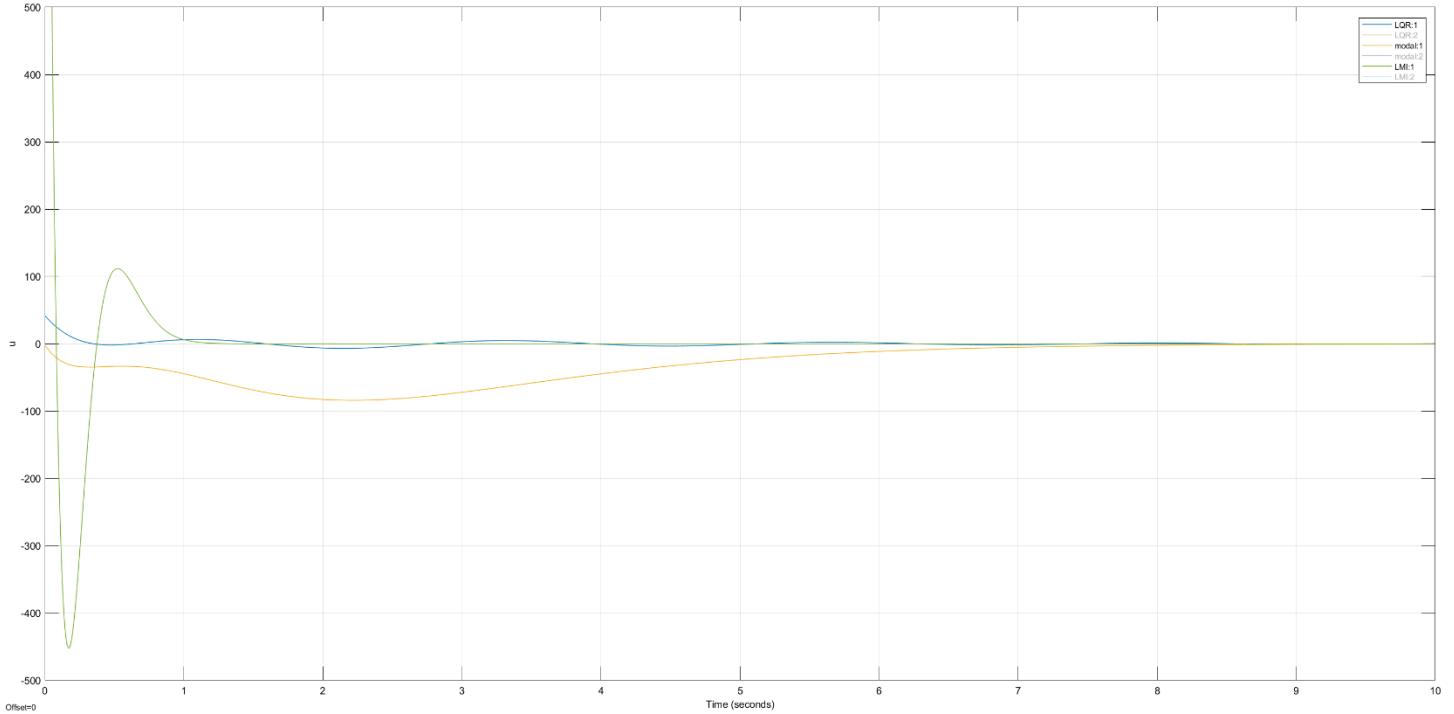


Рисунок 10: графики входных воздействий

При LQR не наблюдается большого «опасного» входного управления на систему при малых  $t$ .

Графики сравнения критерия качества  $J = \int_0^{20} (x^t(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt$ :

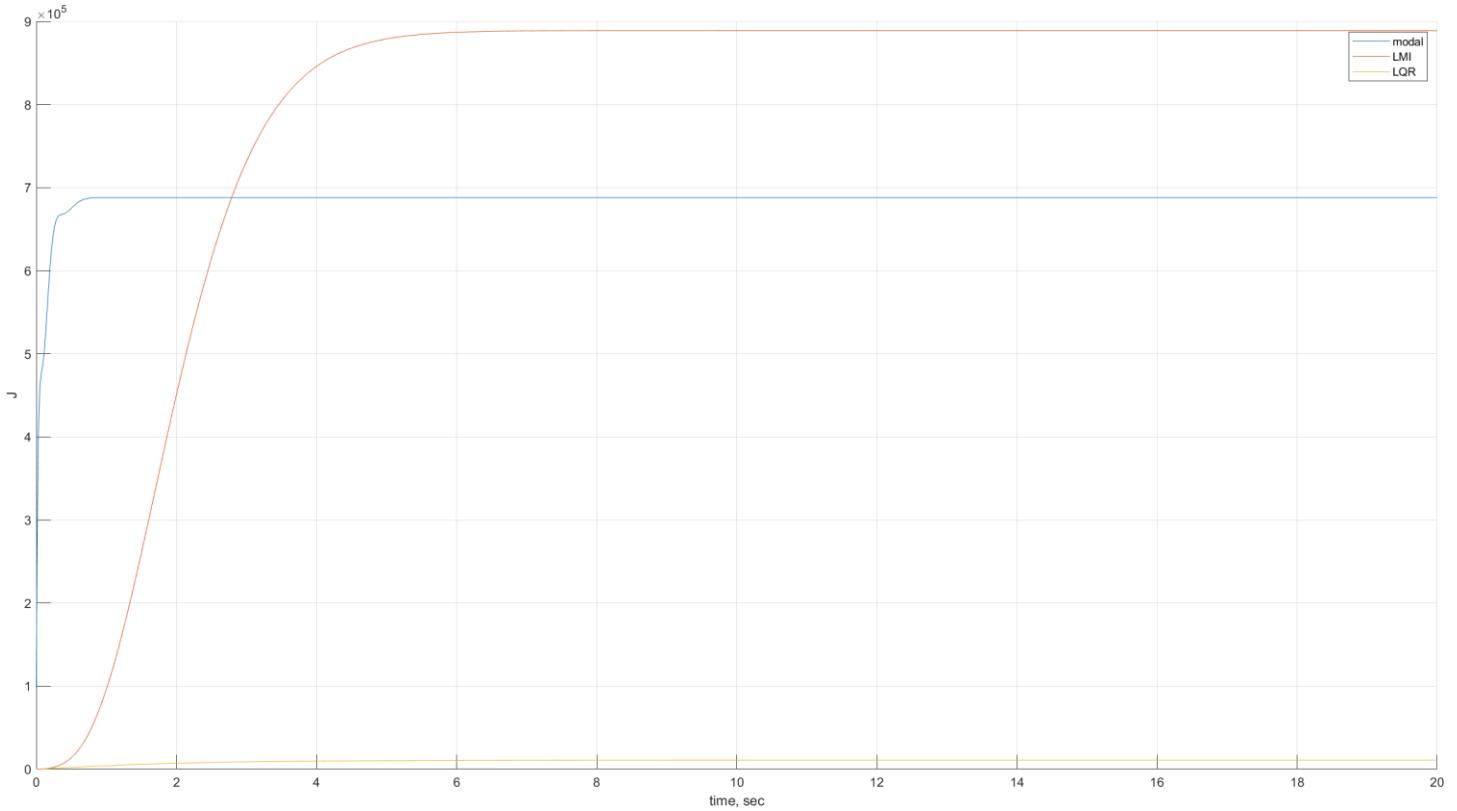


Рисунок 11: графики  $J$

Установившиеся значения  $J$ :

688010 – регулятор с экспоненциальной сходимостью

889050 – модальный регулятор

10890 –  $LQR$

Как мы видим,  $LQR$  действительно является оптимальным регулятором, начиная с некоторого момента времени, при выбранных условиях  $Q, R$ , то есть имеет наименьшее значение критерия качества  $J$  по сравнению с любыми другими регуляторами.

### Задание 3.

#### 3.1. Описание системы и синтеза фильтра Калмана

Рассматриваемая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & 19 & 10 & -13 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ -4 & 8 & 6 & -7 \\ 0 & -15 & 0 & 9 \end{bmatrix} x + f(t), \\ y = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \xi(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 19 & 10 & -13 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ -4 & 8 & 6 & -7 \\ 0 & -15 & 0 & 9 \end{bmatrix} \hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

$f(t)$  – внешние возмущения,  $\xi(t)$  – помеха измерений

$$x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Построим LQE на основе различных пар матриц  $(Q, R)$ .

Для этого будем использовать следующий алгоритм:

- Выбираем матрицы  $Q \geq 0, R > 0$  с определенным соотношением между величиной возмущения и величиной помехи
- Проверяем необходимые условия: пара  $(A, Q)$  – стабилизуема, пара  $(C, A)$  – обнаруживаема
- Находим решение  $P > 0$  уравнения Риккати  $AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0$
- Вычисляем матрицу наблюдателя  $L = -PC^T R^{-1}$

Тогда при найденной матрице наблюдателя  $L$ ,  $\hat{x}(t)$  будет с нулевой ошибкой сходиться к  $x(t)$  и при конкретных  $f(t), \xi(t)$  величина критерия доверия

$$J = \int_{-\infty}^t (f^t(t)Q^{-1}f(t) + \xi^T(t)R^{-1}\xi(t))dt = \int_0^\infty f^t(t)Q^{-1}f(t)dt + \int_0^\infty \xi^T(t)R^{-1}\xi(t)dt = J_f + J_\xi$$

примет наименьшее возможное (при данном выходе  $y(t)$ ) значение.

### 3.2. Синтез LQE

Программный код:

```
% plant parameters
A = [-6 19 10 -13; 0 -9 0 6; -4 8 6 -7; 0 -15 0 9];
C = [3 -9 -3 6; 0 2 0 -1];

% initial conditions
x0 = [1; -2; -1; 2];
x0obs = [-2; 0; 3; 1];

% observeability
eig(A);
OM = [A; C*A; C*A*A; C*A*A*A];
rank(OM);

%-----

% LQE 1
Q1_inv = [100 0 0 0; 0 100 0 0; 0 0 100 0; 0 0 0 100];
R1_inv = [1 0; 0 1];
Q1 = inv(Q1_inv);
R1 = inv(R1_inv);

% (A, Q) - stabilisable check
AQ1 = [Q1 A*Q1 A*A*Q1 A*A*A*Q1];
rank(AQ1);

% finding P, L
[P1, ~, ~] = icare(A', C', Q1, R1, 0, eye(4), 0);
L1 = -P1*C'*R1_inv;
```

В начале проверим сможем ли мы вообще построить наблюдатель, сходящийся к системе. Для этого необходимо, чтобы пара  $(C, A)$  являлась обнаруживаемой.

$$\sigma(A) = \{\pm 2i, \pm 3i\}$$

Необходимо проверять наблюдаемость всех собственных чисел, для этого найдем ранг матрицы наблюдаемости

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = 4 = n$$

Так как ранг матрицы наблюдаемости равен порядку системы, значит все собственные числа наблюдаемы, а значит и пара  $(C, A)$  является обнаруживаемой.

**Наблюдатель-1 (верим в то, что внешнее возмущение  $f$  мало)**

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Данное соотношение матриц означает, что мы предполагаем, что в  $y(t)$  будет много шумов, но возмущений мало.

Критерий доверия:

$$J = \int_{-\infty}^t (100 \sum_{i=1}^4 f_i^2(t) + \sum_{i=1}^2 \xi_i^2(t)) dt$$

Проверка условия пары  $(A, Q)$  – стабилизируема:

$$\text{rank}([Q \ A Q \ A^2 Q \ A^3 Q]) = 4 = n$$

Решим уравнение Риккати и найдем  $P, L$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1.43 & 0.03 & 0.87 & -0.0095 \\ 0.034 & 0.44 & 0.0729 & 0.6651 \\ 0.87 & 0.073 & 0.818 & 0.23 \\ -0.0095 & 0.665 & 0.23 & 1.11 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -1.326 & -0.775 \\ 0.094 & -0.2166 \\ -0.887 & 0.0845 \\ 0.0411 & -0.2195 \end{bmatrix}$$

**Наблюдатель-2 (верим в то, что помехи измерений  $\xi$  малы)**

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 150 & 0 \\ 0 & 150 \end{bmatrix}$$

Данное соотношение матриц означает, что мы предполагаем, что в  $y(t)$  будет мало шумов, но большое количество внешних возмущений.

Критерий доверия:

$$J = \int_{-\infty}^t (\sum_{i=1}^4 f_i^2(t) + 150 \sum_{i=1}^2 \xi_i^2(t)) dt$$

Проверка условия пары  $(A, Q)$  – стабилизируема:

$$\text{rank}([Q \ A \ A^2 \ A^3]) = 4 = n$$

Решим уравнение Риккати и найдем  $P, L$ :

$$P = \begin{bmatrix} 20.2091 & -5.1375 & 14.3112 & -10.5096 \\ -5.1375 & 1.8673 & -3.3438 & 3.6542 \\ 14.3112 & -3.3438 & 10.4730 & -6.8375 \\ -10.5096 & 3.6542 & -6.8375 & 7.2542 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -131.0435 & -35.1924 \\ 39.2482 & -12.0594 \\ -87.4960 & -22.4990 \\ 56.8018 & -8.1266 \end{bmatrix}$$

**Наблюдатель-3 (внешнее возмущение примерно равно помехам измерений)**

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Критерий доверия:

$$J = 5 \int_{-\infty}^t (\sum_{i=1}^4 f_i^2(t) + \sum_{i=1}^2 \xi_i^2(t)) dt$$

Проверка условия пары  $(A, Q)$  – стабилизируема:

$$\text{rank}([Q \ A \ A^2 \ A^3]) = 4 = n$$

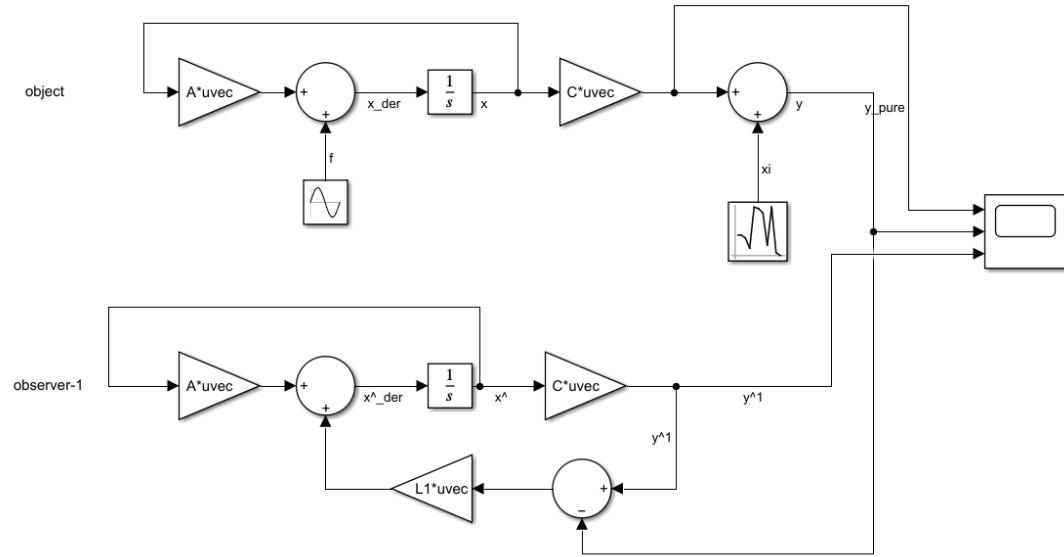
Решим уравнение Риккати и найдем  $P, L$ :

$$P = \begin{bmatrix} 7.07 & -1.4 & 4.6 & -2.97 \\ -1.4295 & 0.9 & -0.85 & 1.5 \\ 4.6 & -0.85 & 3.3276 & -1.648 \\ -2.97 & 1.54 & -1.6 & 2.82 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -12.2935 & -0.5445 \\ 3.1918 & -1.3468 \\ -7.9824 & 0.2608 \\ 4.6455 & -1.3279 \end{bmatrix}$$

### 3.3. Моделирование и сравнение наблюдателей

Схема моделирования:



Сравним работу наблюдателей при различных внешних возмущениях. Для удобства будем рассматривать только первую компоненту вектора  $y$ .

$$f \equiv 0, \quad \xi \equiv 0$$

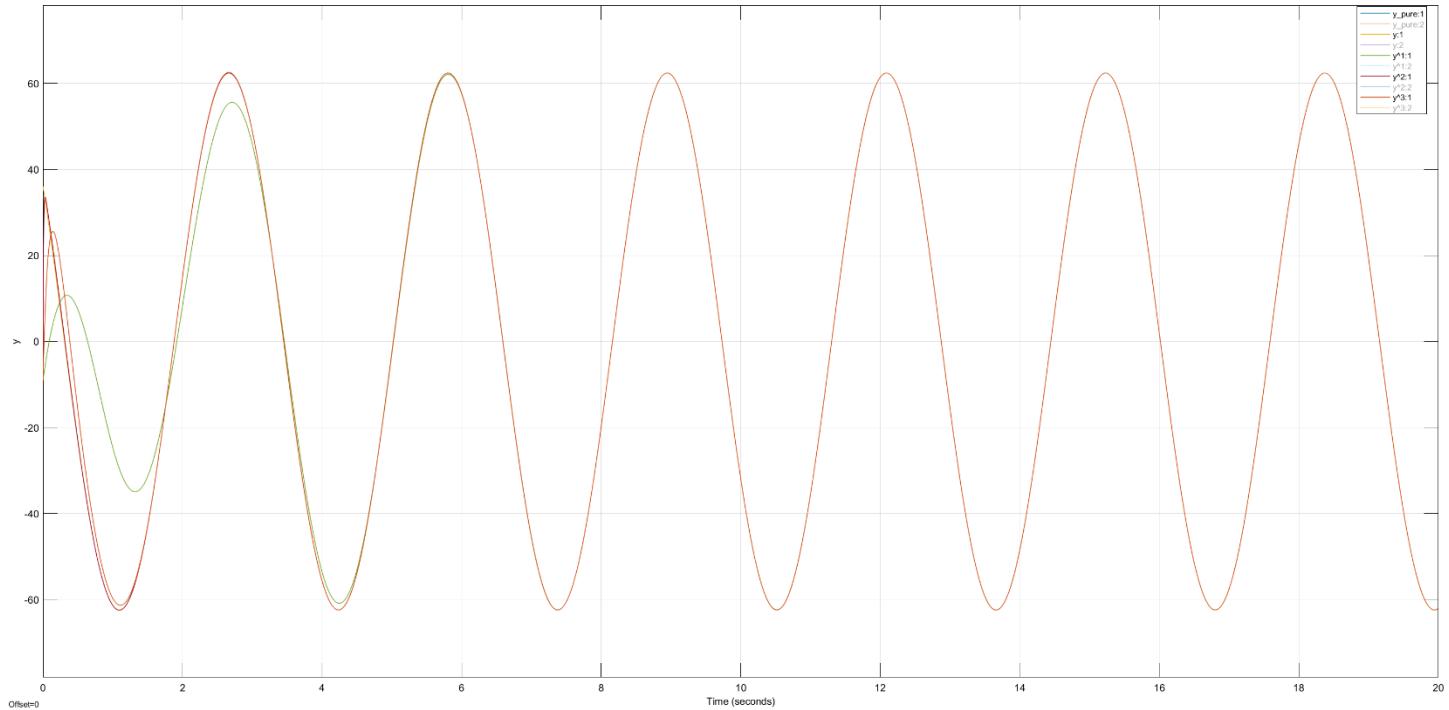


Рисунок 12: нулевые внешние возмущения

Убедились, что все построенные наблюдатели сходятся к объекту.

$$f = 33 \sin\left(19t + \frac{\pi}{4}\right) + 11, \quad \xi \equiv 0$$

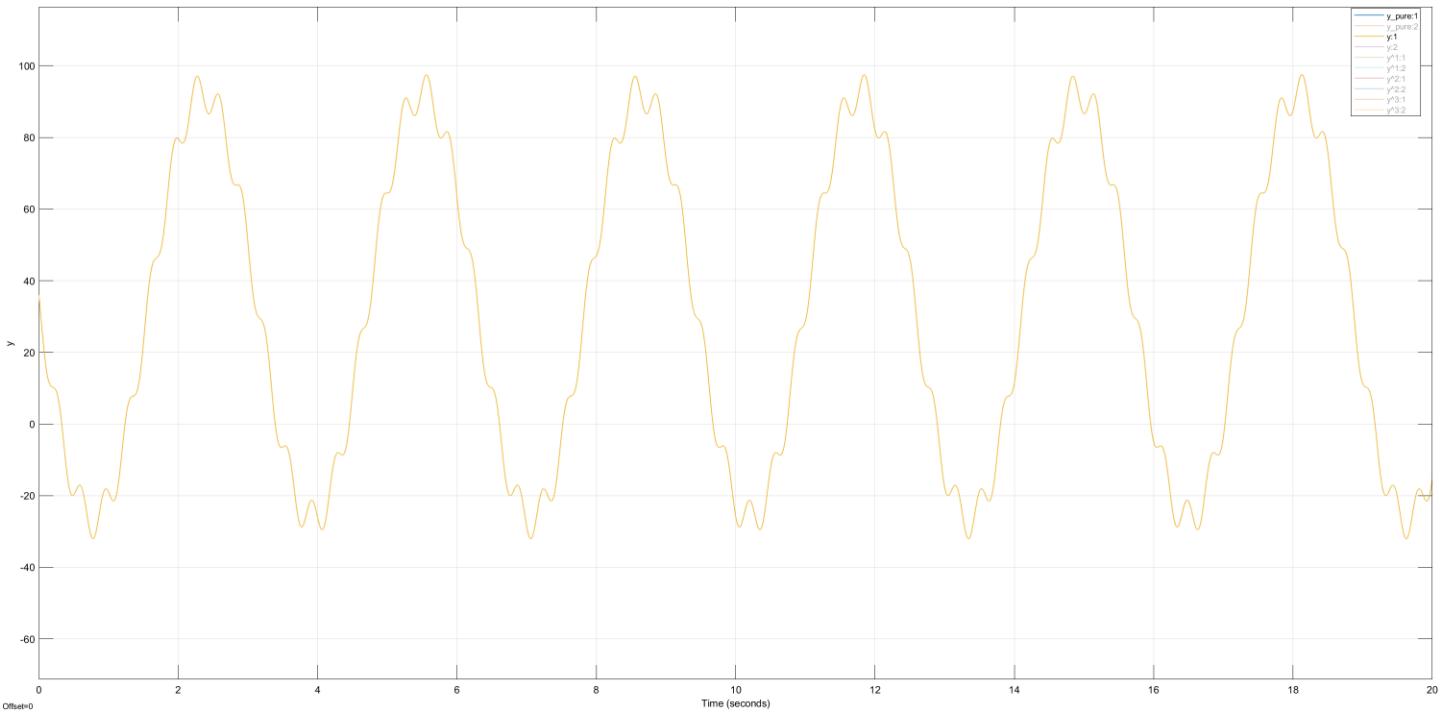


Рисунок 13: график истинного значения  $y$

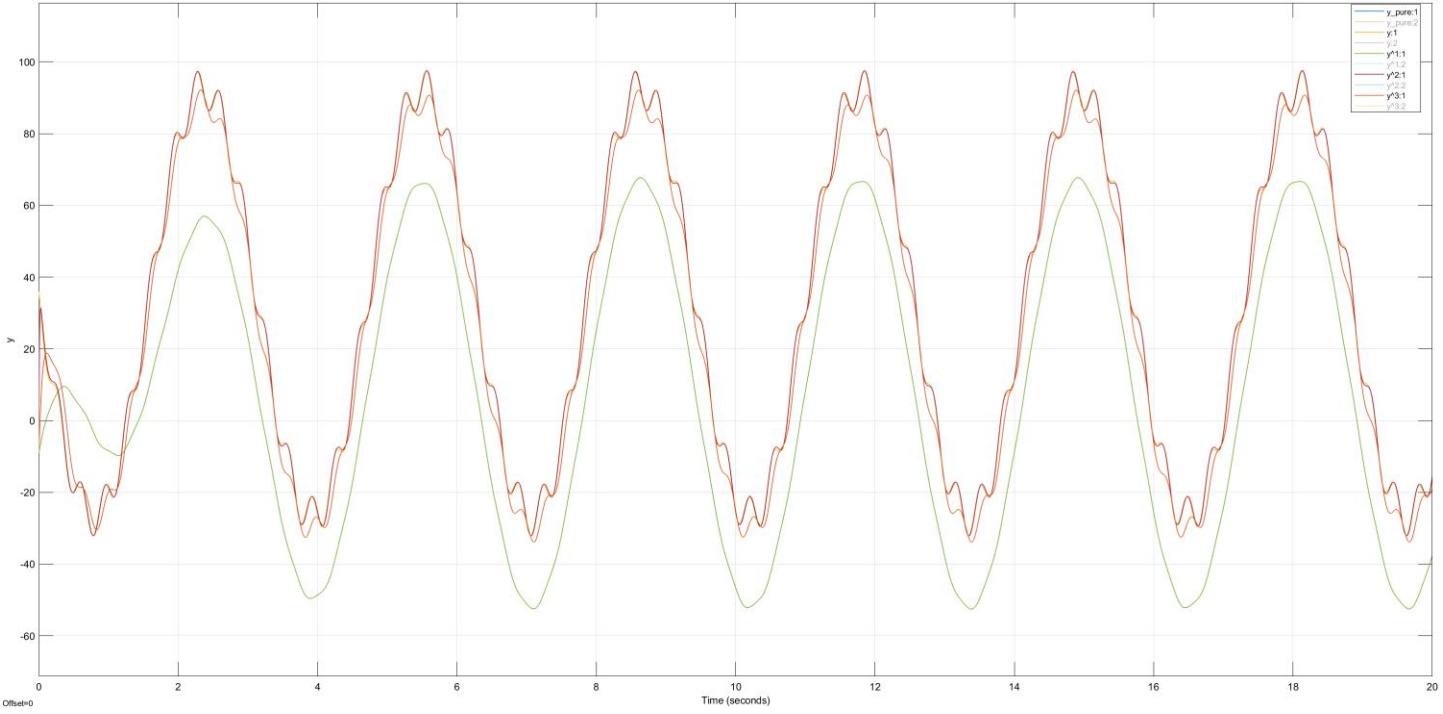


Рисунок 14: графики выхода  $y(t)$  наблюдателей

Наблюдатель-1 имеет значения матрицы  $Q^{-1}$  больше, чем  $R^{-1}$  – мы предполагали, что будут маленькое внешнее возмущение и большие помехи измерения. Поэтому он не сходится к реальному вектору  $y(t)$  так как считает изменения выхода как помехи.

В соотношении значений  $Q^{-1}, R^{-1}$  у наблюдателя-2 мы вкладывали смысл того, что ожидаем большое внешнее возмущение при малых помехах измерений. Поэтому данный выход наблюдателя-2 хорошо повторяет поведение выхода  $y(t)$  реального объекта.

Наблюдатель-3 имел равное соотношение значений матриц  $R^{-1}, Q^{-1}$  он ожидает внешнее возмущение и помехи равные между собой. Поэтому он является усредненным вариантом двух предыдущих наблюдателей – довольно хорошо описывает движение вектора  $y(t)$  с возмущениями.

Приведем графики первой компоненты вектора состояния  $x(t)$ :

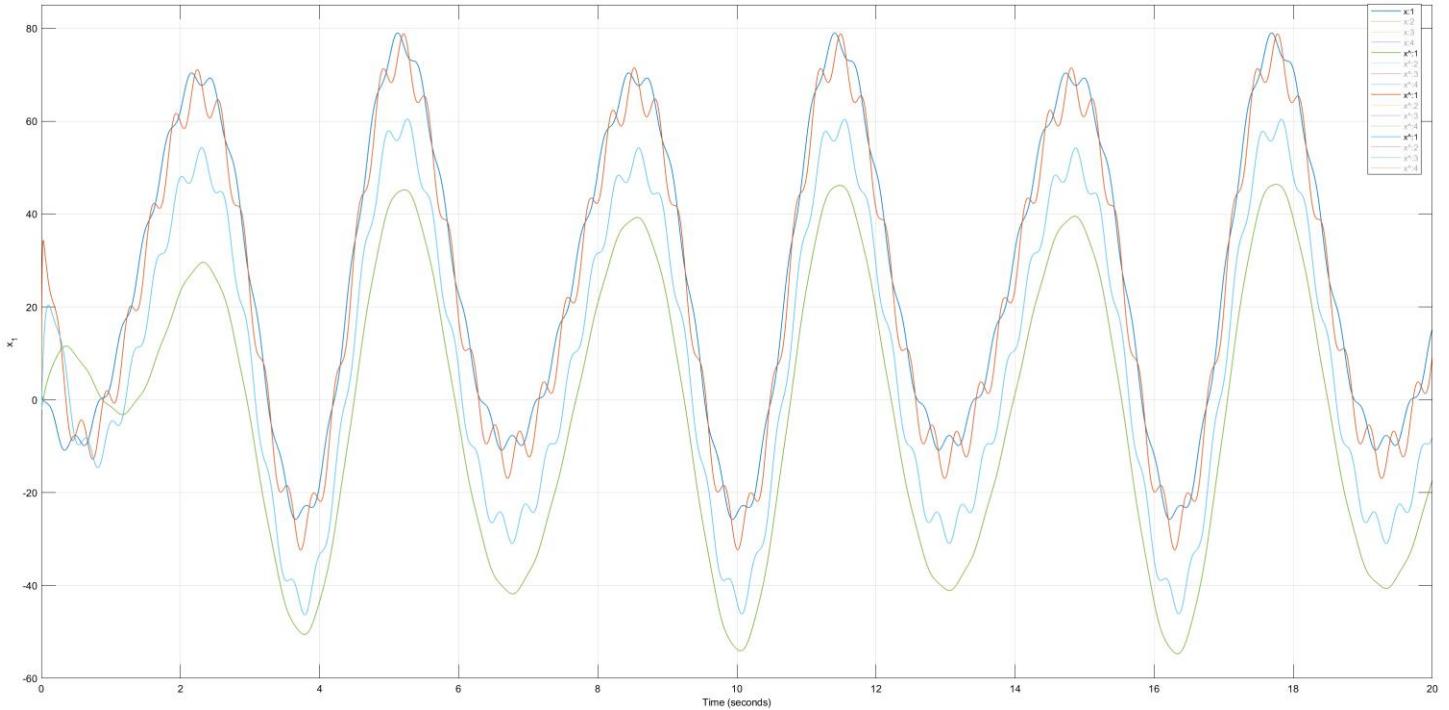


Рисунок 15: графики первого компонента  $x(t)$  объекта и 3-ч наблюдателей

Как видно, ни один из наблюдателей не сходится к объекту с нулевой ошибкой, так как  $f, \xi$  не удовлетворяют критерию оптимальности ни одному из исследуемых наблюдателей (не минимизируют критерий доверия).

$$f = \mathbf{0}, \quad \xi \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 21)$$

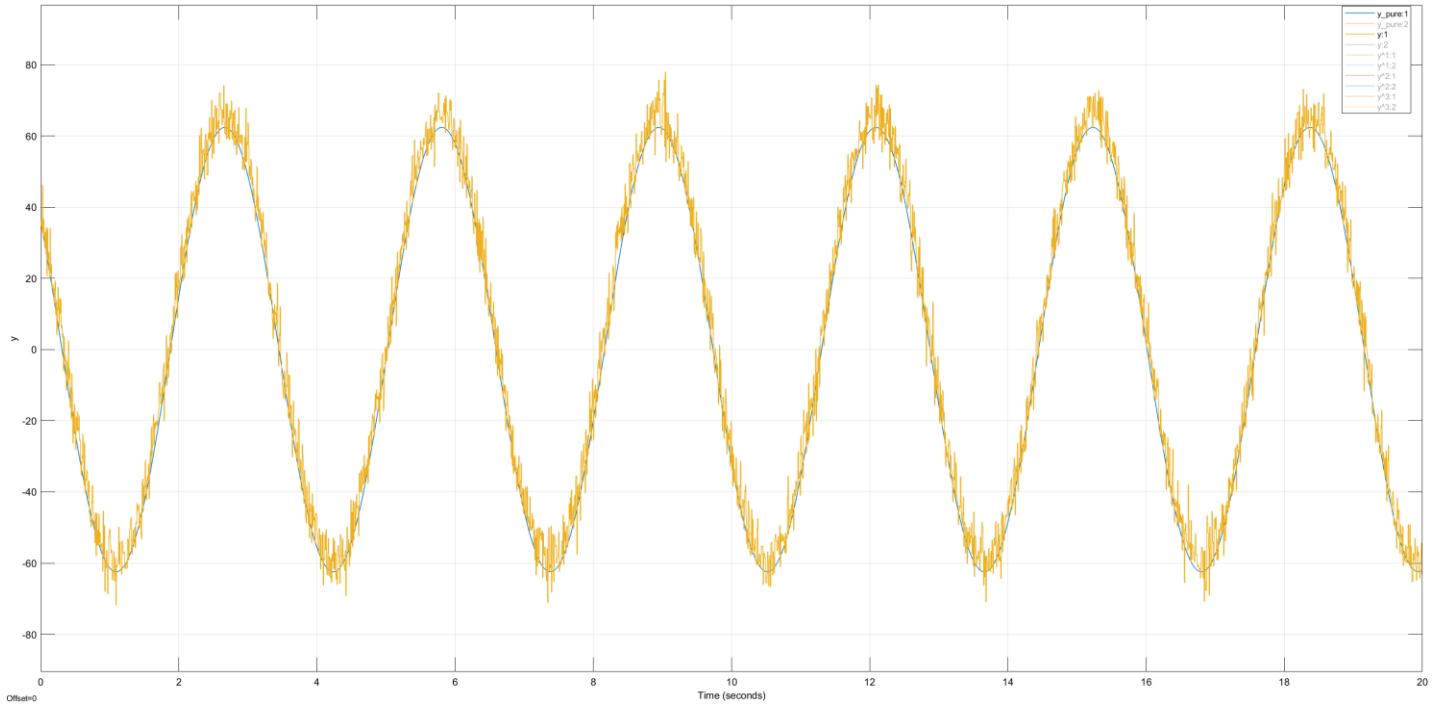


Рисунок 16: графики истинного значения  $Cx(t)$  и выхода  $y(t)$  объекта

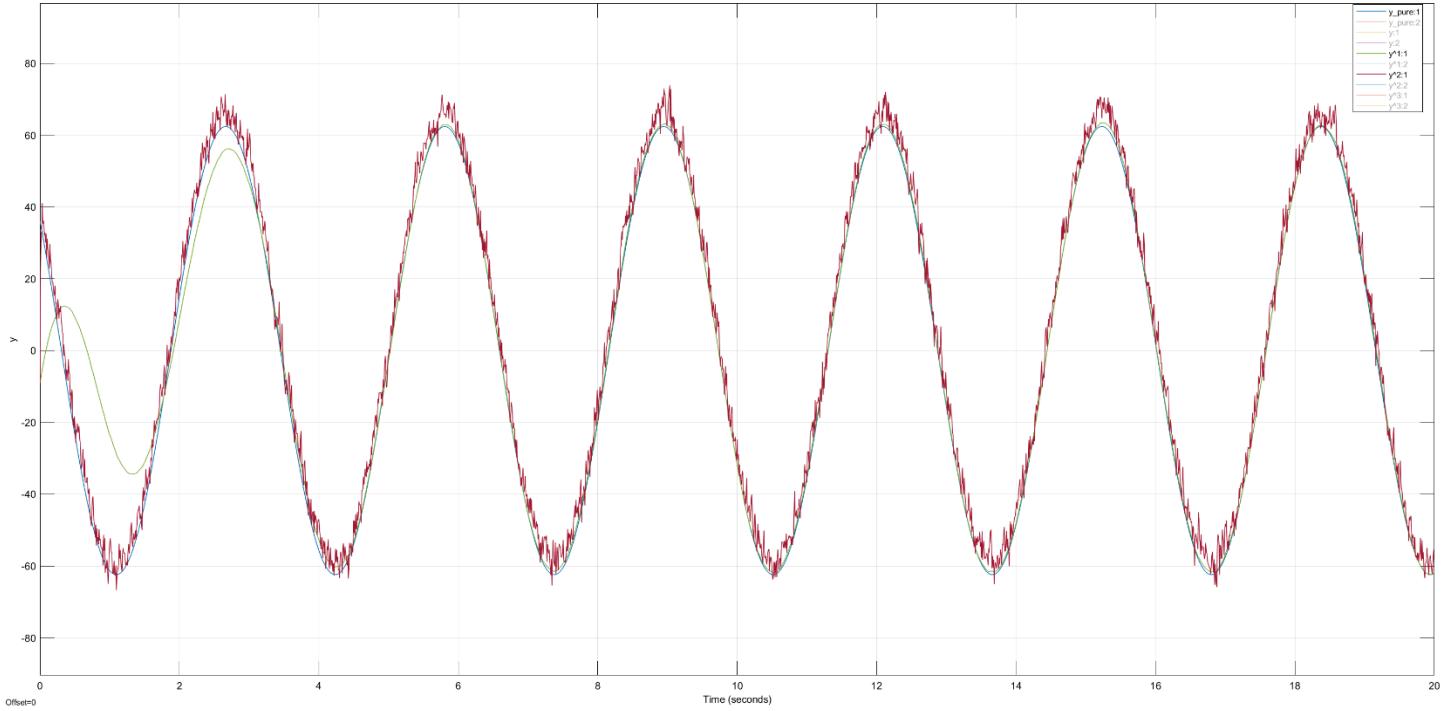


Рисунок 17: графики  $y(t)$  реального объекта без помех, наблюдателя-1 и наблюдателя-2

Как мы видим, выход наблюдателя-1 почти сходится к истинному значению выхода объекта, успешно профильтровав помехи. Это произошло, так как мы и ожидали большое количество помех при его синтезе.

Наблюдатель-2 пропускает большое количество помех в свой выход, так как он предполагает, что такие скачки – результат внешних возмущений объекта, а не помех измерений.

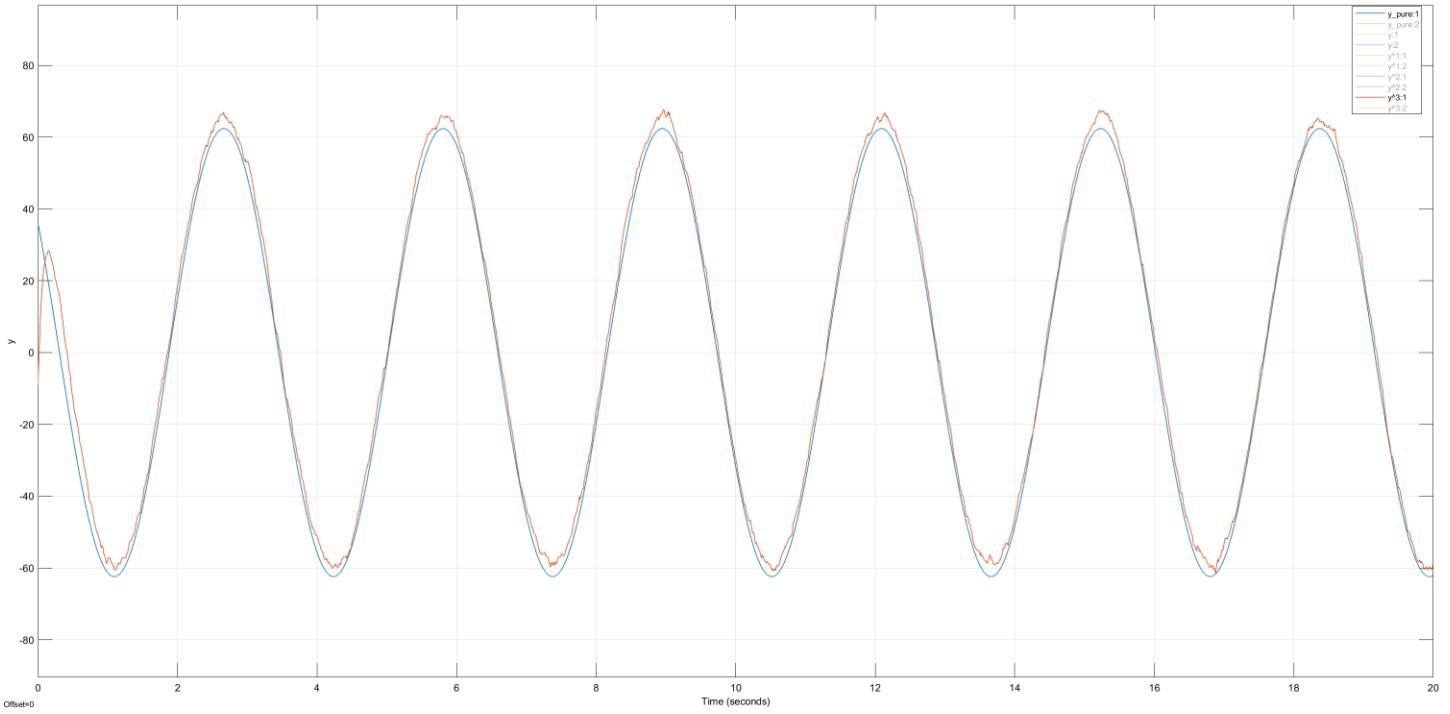


Рисунок 18: график истинного выхода объекта и выхода наблюдателя-3

Наблюдатель-3 неплохо передает поведение функции  $y(t)$ , однако имеет небольшие расхождения в вершинах. Так как он ожидает количество внешних возмущений в том же количестве, как и помех измерений, то в данном случае определенное количество помех принимает за внешние возмущения.

Приведем графики первой компоненты вектора состояния  $x(t)$ :

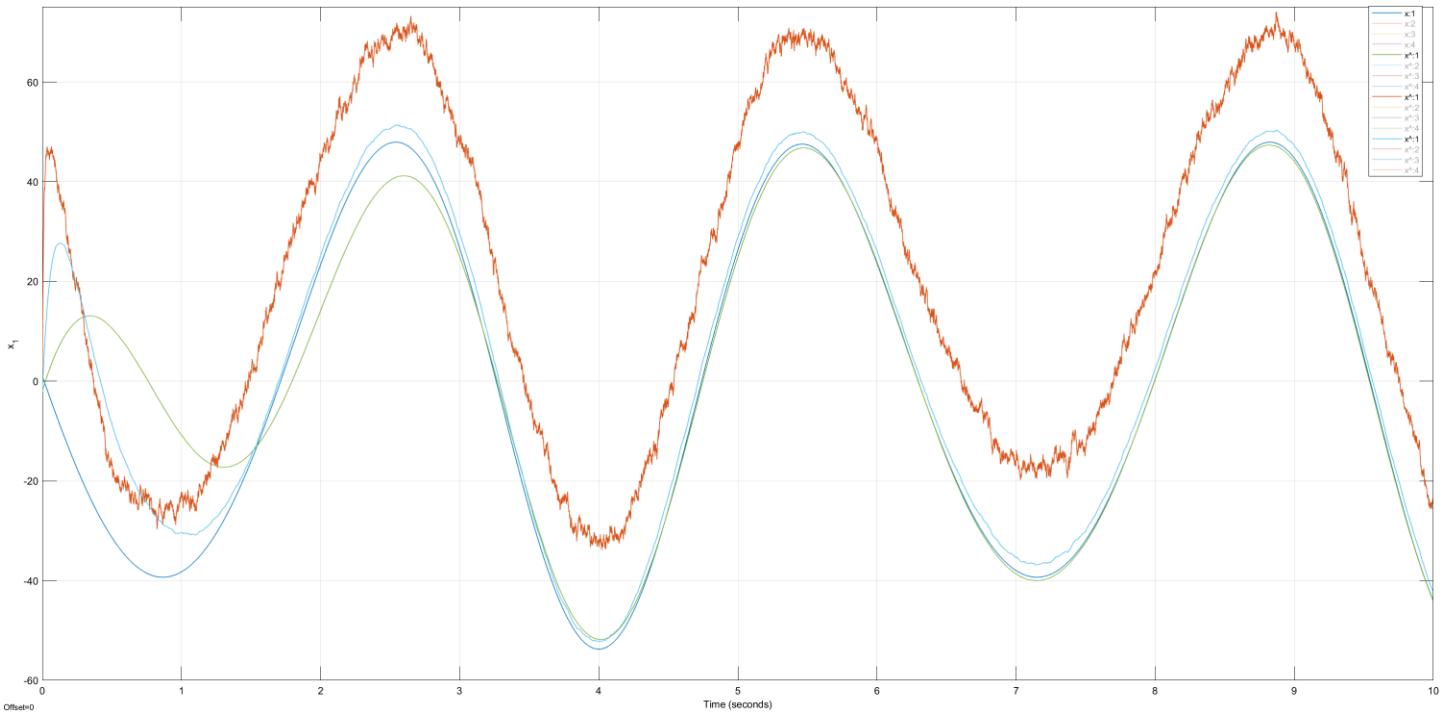


Рисунок 19: графики первого компонента  $x(t)$  объекта и 3-ч наблюдателей

Как видно, ни один из наблюдателей не сходится к объекту с нулевой ошибкой, так как  $f, \xi$  не удовлетворяют критерию оптимальности ни одному из исследуемых наблюдателей (не минимизируют критерий доверия).

$$f = 79 \sin\left(32t - \frac{\pi}{2}\right) - 13, \quad \xi \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 80)$$

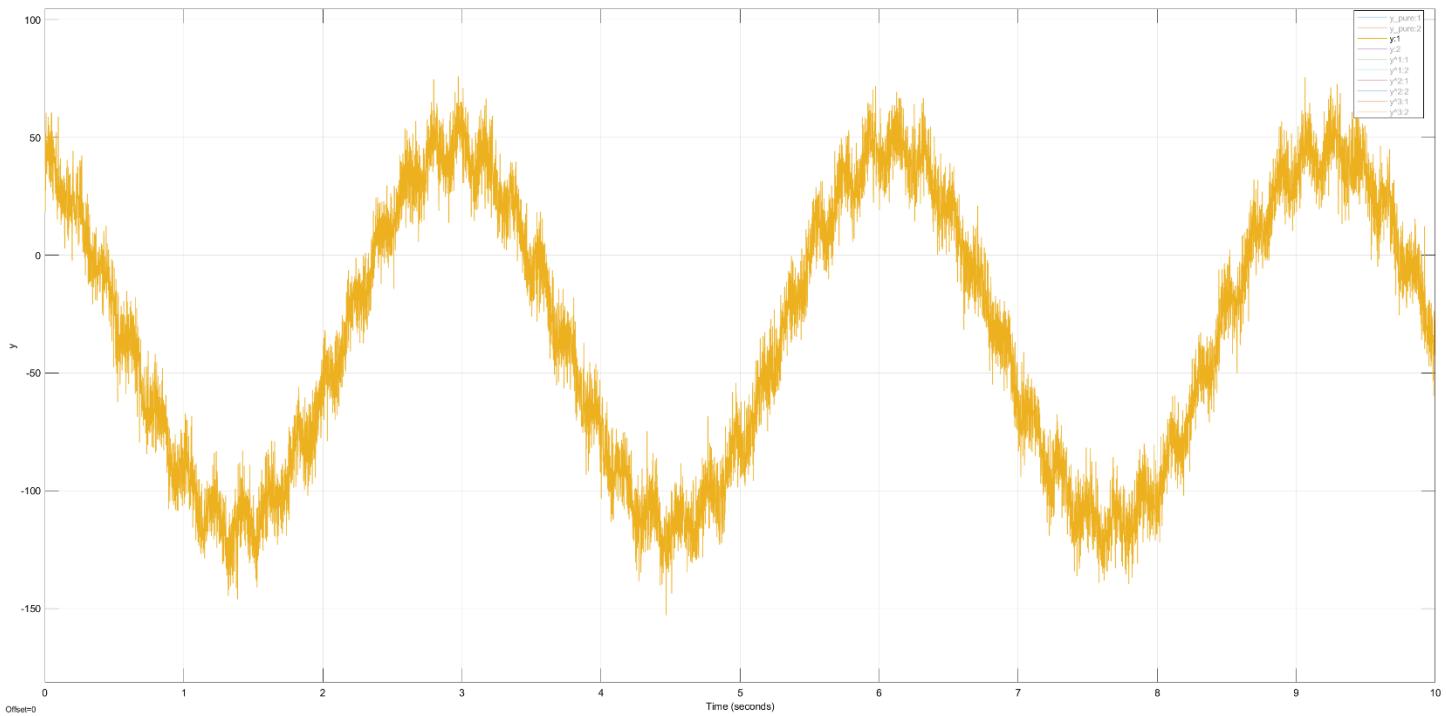


Рисунок 20: график выхода  $y(t)$  объекта

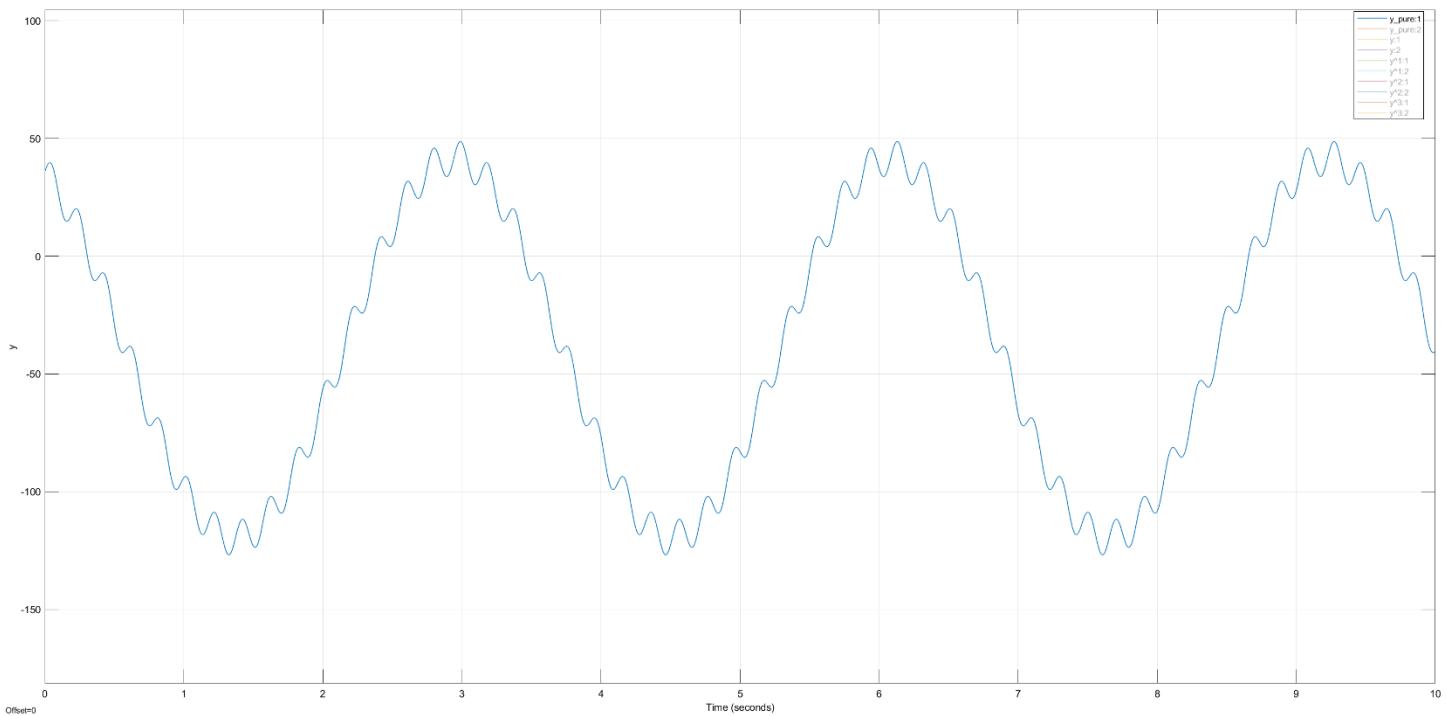


Рисунок 21: график истинного значения  $Cx(t)$  объекта

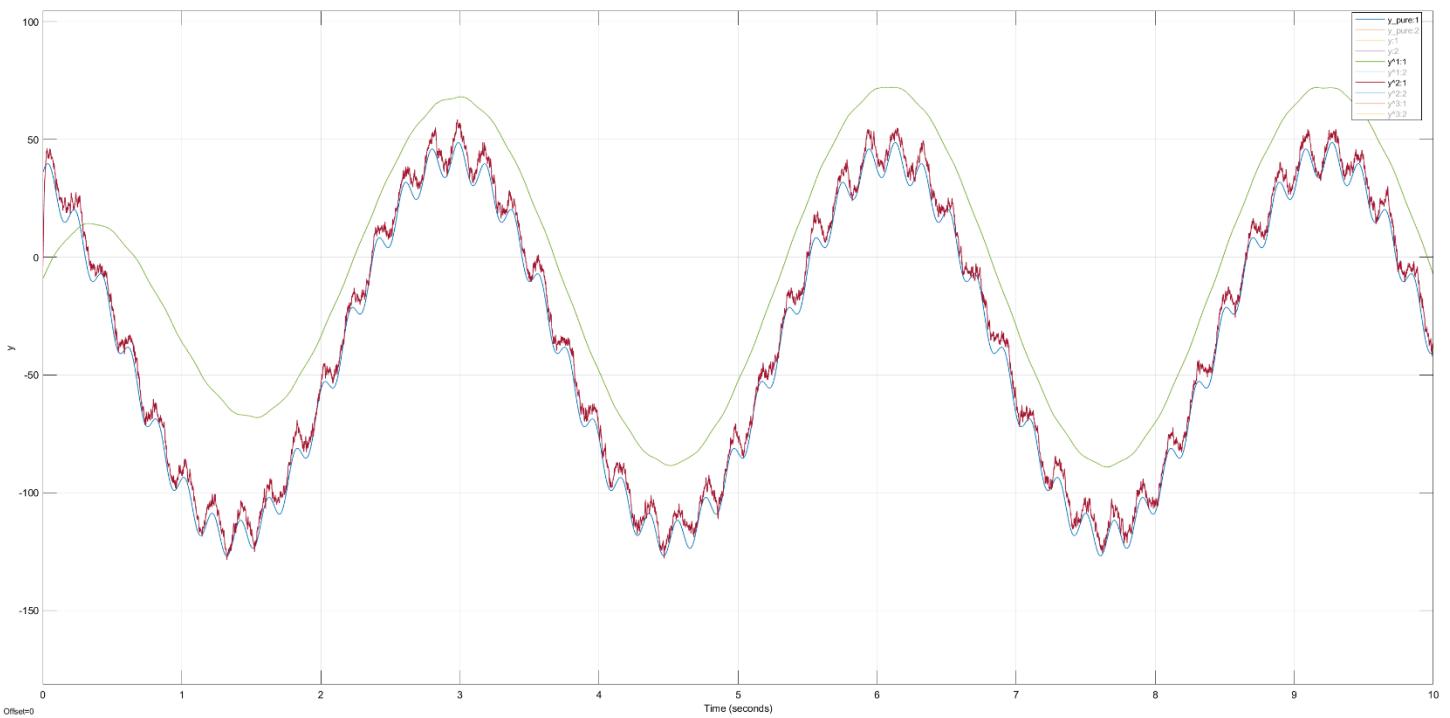


Рисунок 22: графики  $y(t)$  реального объекта без помех, наблюдателя-1 и наблюдателя-2

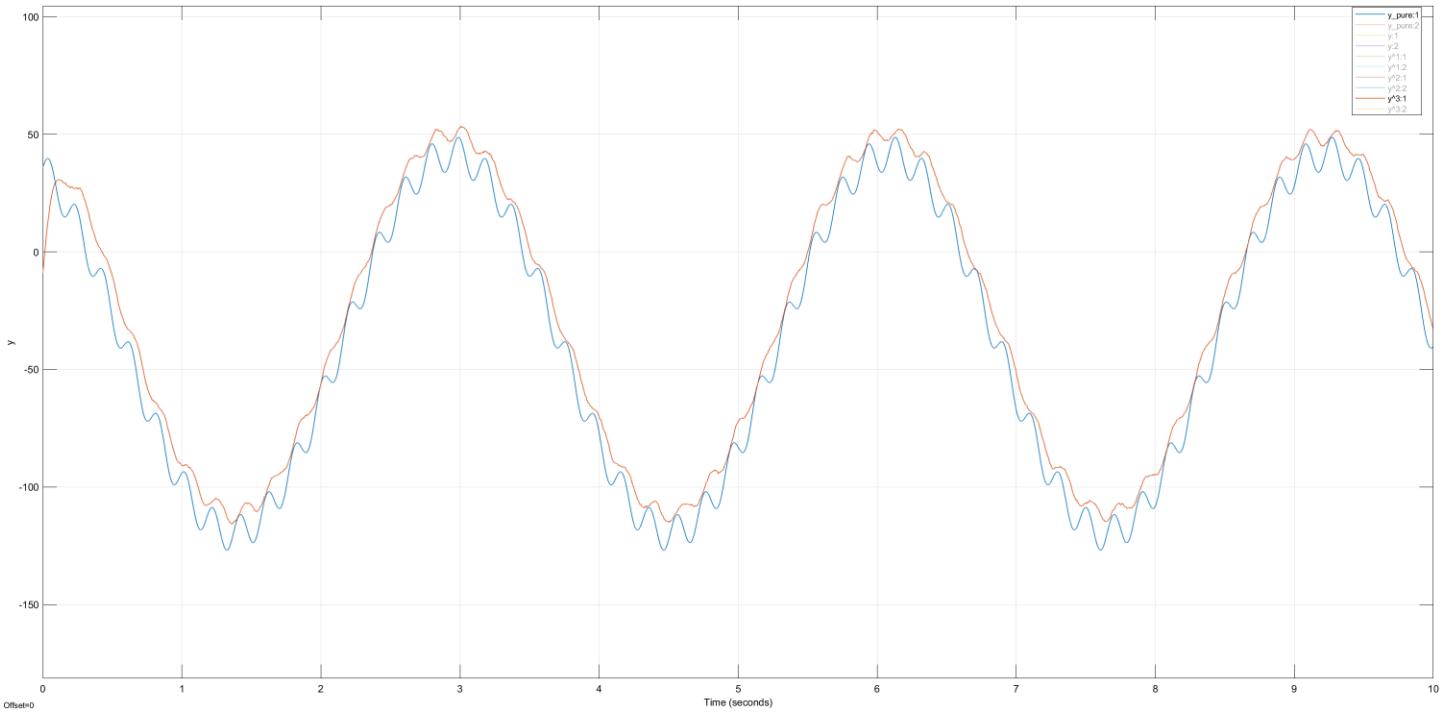
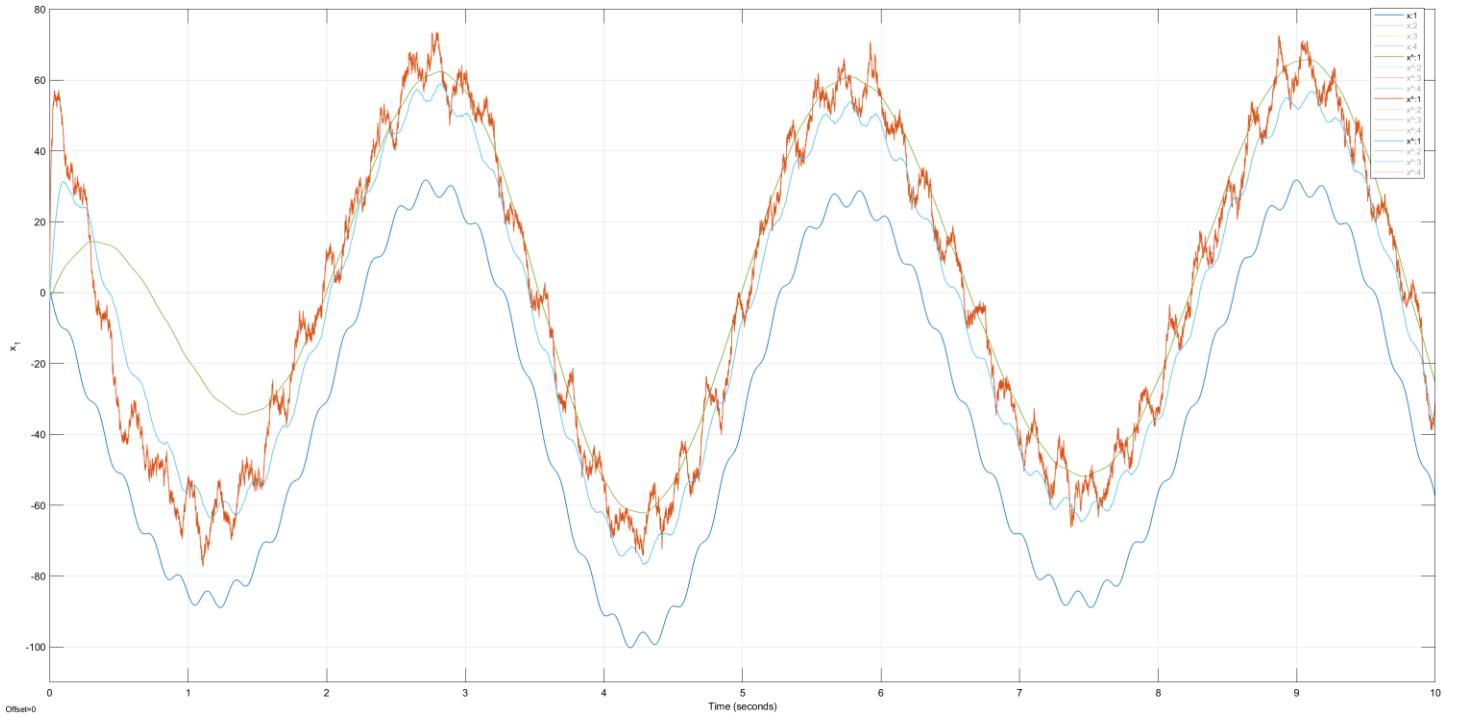


Рисунок 23: график истинного выхода объекта и выхода наблюдателя-3

Как мы видим, наблюдатель-3 сравнимыми значениями в матрицах  $Q^{-1}, R^{-1}$  как и ожидалось является усредненным вариантом первых двух наблюдателей, так как он учитывает наличие внешних возмущений и помех измерений в равных пропорциях.

Приведем графики первой компоненты вектора состояния  $x(t)$ :



Так как внешние условия не соответствуют критерию оптимальности ни одному наблюдателю, поэтому ни один наблюдатель точно не сходится к реальному объекту.

Добиться сходимости наблюдателя к реальному объекту при данных внешних воздействиях можно, если рассмотреть такие внешние возмущения, которые бы соответствовали критерию оптимальности для определенного наблюдателя.

Будем рассматривать наблюдатель-3, его матрицы:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Тогда если  $f$  и  $\xi$  – белый шум, для которых выполнены:

$$\mathbb{E}(f(t)f^T(\tau)) = \delta(t-\tau) \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_4^2 \end{bmatrix} = \delta(t-\tau)Q, \quad \mathbb{E}(\xi(t)\xi^T(\tau)) = \delta(t-\tau) \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \delta(t-\tau)R$$

то средний квадрат отклонения установившейся ошибки наблюдателя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2)$$

примет наименьшее возможное значение.

Исходя из этого, выберем следующие  $f$  и  $\xi$ :

- Компоненты  $f$  и  $\xi$  независимы, так как матрицы  $Q, R$  – являются диагональными
- $f_{1,2,3,4} \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 0.2)$
- $\xi_{1,2} \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 0.2)$

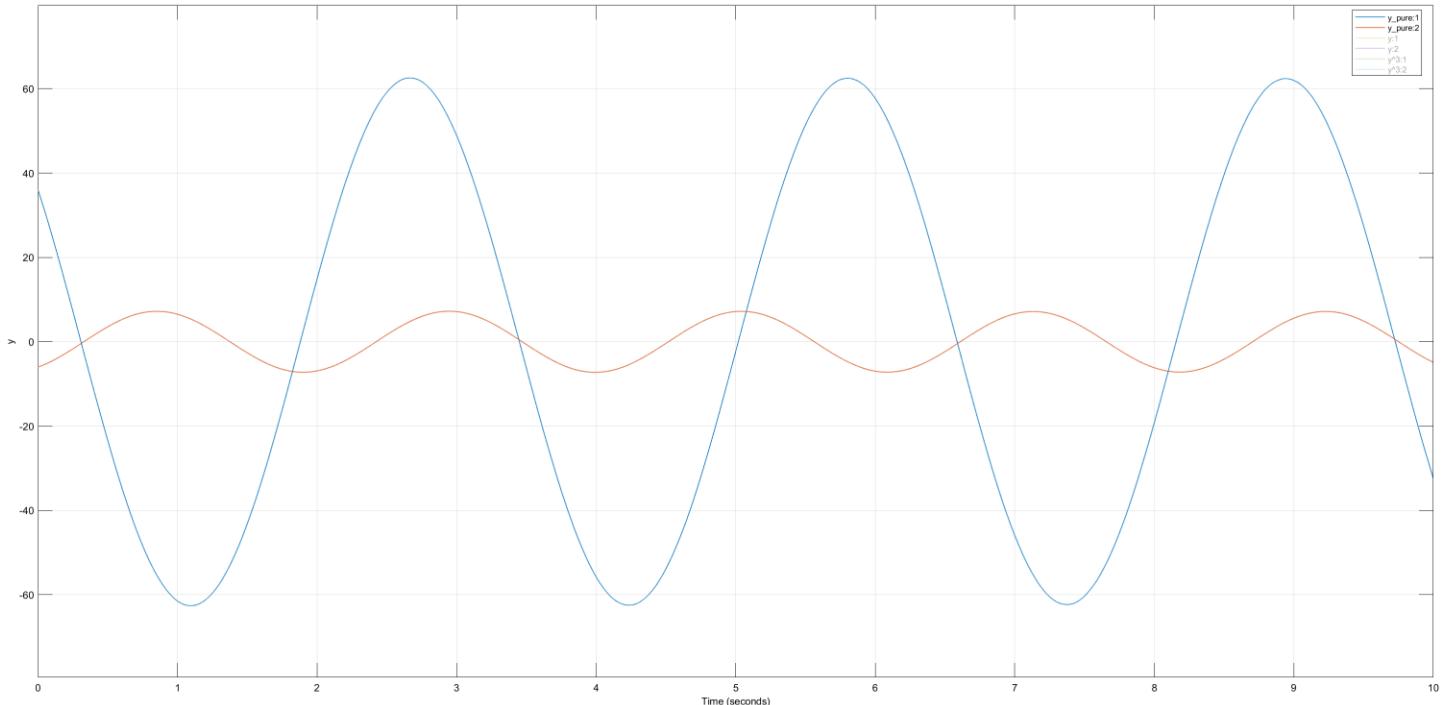


Рисунок 24: графики  $Cx(t)$  объекта

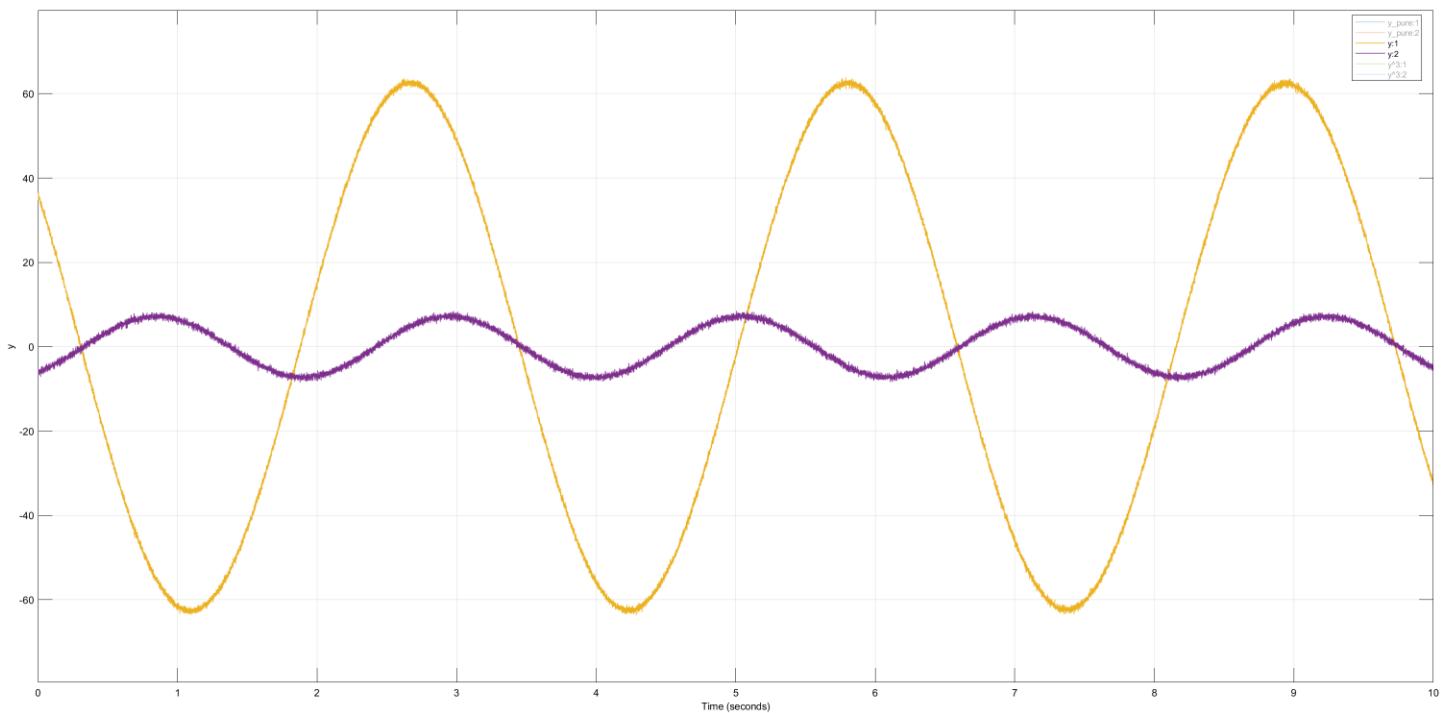


Рисунок 25: графики  $y(t)$  объекта

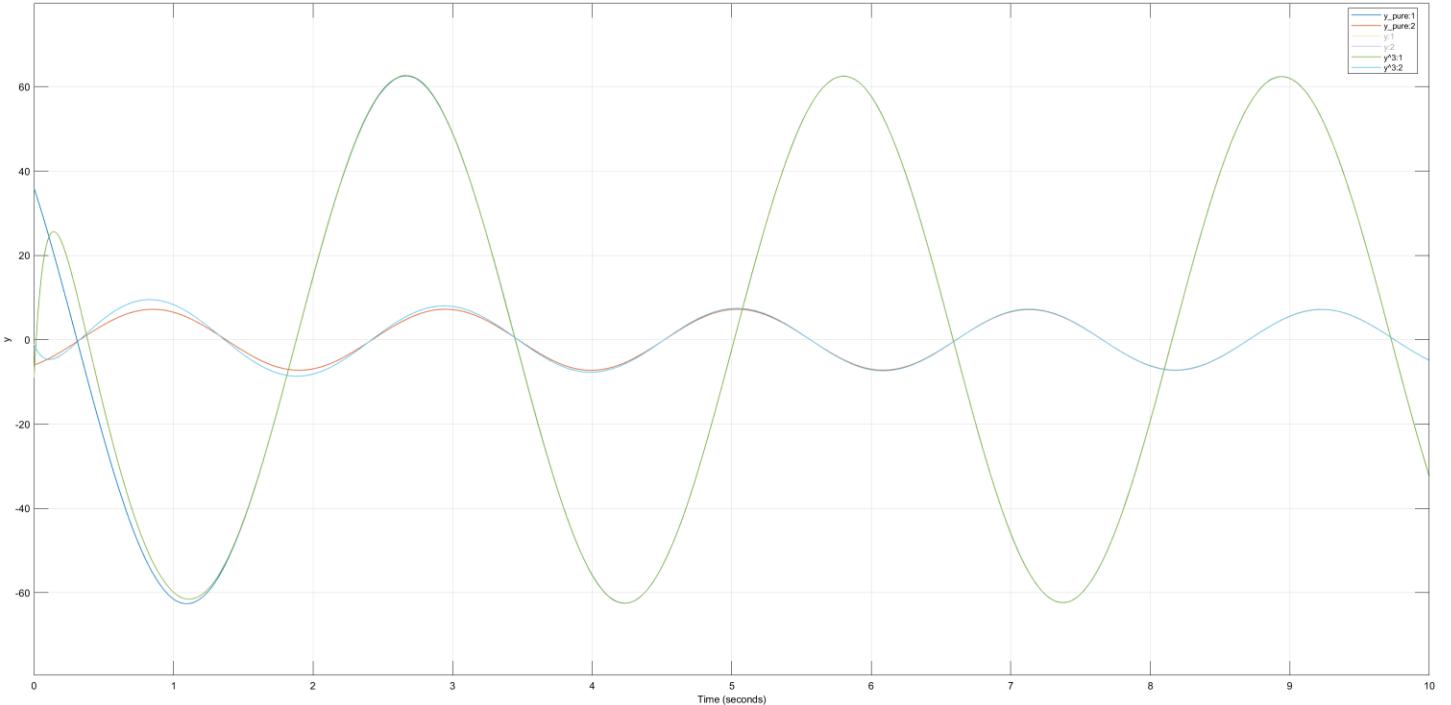


Рисунок 26: графики  $Cx(t)$  объекта и выхода наблюдателя

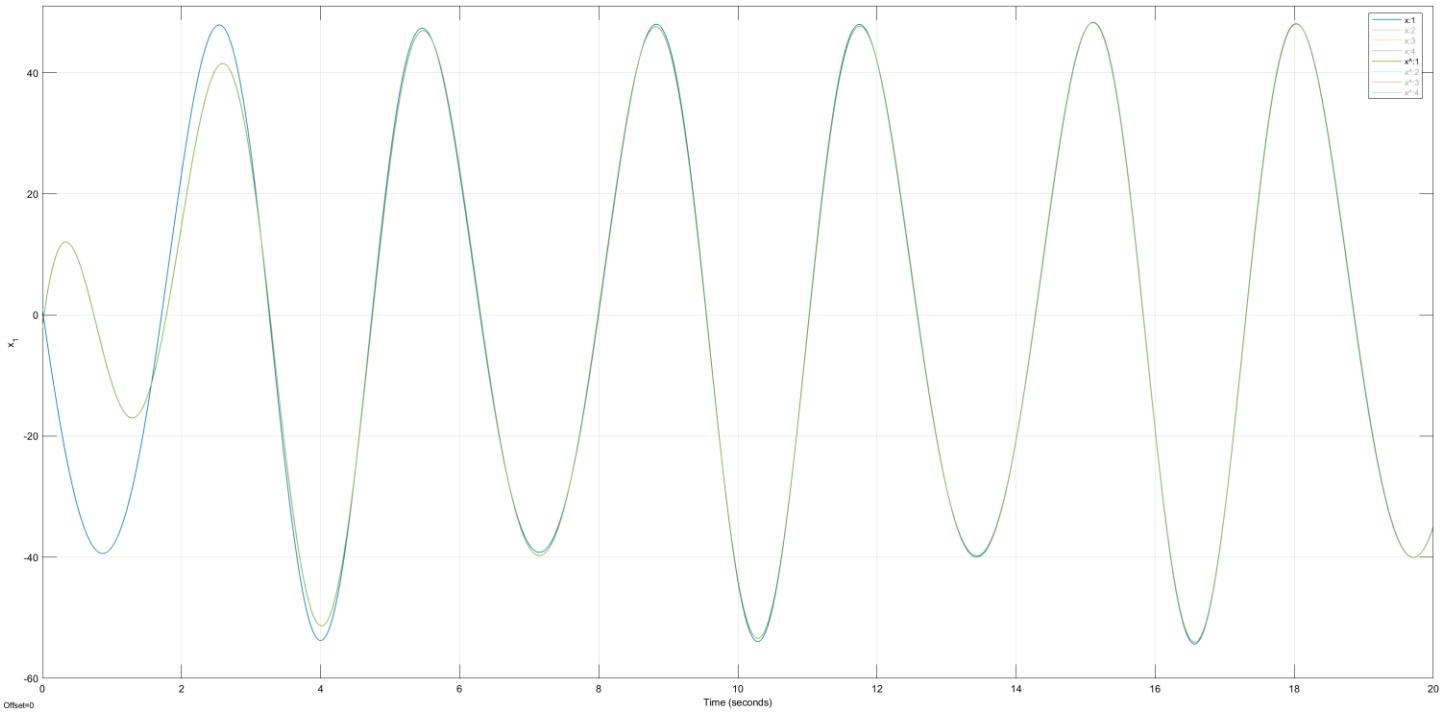


Рисунок 27: график первой компоненты  $x(t)$  объекта и наблюдателя

Данный наблюдатель является оптимальным при конкретных внешних возмущениях и помехах измерений - квадрат отклонения установившейся ошибки минимален.

Таким образом, если мы четко знаем характеристики внешнего возмущения и помех измерений, то сможем синтезировать оптимальный по квадрату отклонения установившейся ошибки наблюдатель, используя вышеописанный метод.

## Задание 4.

### 4.1. Описание системы и синтеза LQG

Рассматриваемая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & 19 & 10 & -13 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ -4 & 8 & 6 & -7 \\ 0 & -15 & 0 & 9 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}u + f, \\ y = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}u + \xi \end{cases}, \quad x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$f$  – внешние возмущения,  $\xi$  – помеха измерений

$f, \xi$  – белый шум, независимый по всем своим компонентам

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} N(\mu = 0, \sigma^2 = 32) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 17) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 6) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 1) \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} N(\mu = 0, \sigma^2 = 8) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 59) \end{bmatrix}$$

Будем строить LQG – комбинация LQR и LQE. Для синтеза LQG, на основе принципа разделения, можно отдельно построить необходимый регулятор и наблюдатель и в конце их соединить – тогда, с некоторого момента времени, получится оптимальная относительно определенных критериев связка.

### 4.2 Синтез LQR

Уже проверено, что пара  $(A, B)$  является стабилизируемой.

Определим следующие матрицы, с учетом того, для нас одинаково важно как уменьшение количества ошибки отклонения, так и уменьшение количества затраченного управления.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Проверка условия пары  $(Q_1, A)$  – обнаруживается:

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} Q \\ QA \\ QA^2 \\ QA^3 \end{bmatrix} \right) = 4 = n$$

Решим уравнение Риккати и найдем  $P_1, K$ :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 325 & -2107 & -507 & 1408 \\ -2107 & 15648 & 3597 & -10553 \\ -507 & 3597 & 976 & -2551 \\ 1408 & -10553 & -2551 & 7347 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.61 & -11.18 & -4.1 & 6.93 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Значение функционала качества:

$$J = 217360$$

#### 4.3. Синтез LQE

Наблюдатель к нашему объекту:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 19 & 10 & -13 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ -4 & 8 & 6 & -7 \\ 0 & -15 & 0 & 9 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} u + L(\hat{y} - y), & \hat{x}(0) = \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hat{y} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Уже проверено, что пара  $(C, A)$  является обнаруживаемой.

Выберем матрицы, опираясь на то, что мы точно знаем параметры внешних возмущений и помех измерений:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 59 \end{bmatrix}$$

Проверка условия пары  $(A, Q_2)$  – стабилизируема:

$$\text{rank}([Q \ A\bar{Q} \ A^2\bar{Q} \ A^3\bar{Q}]) = 4 = n$$

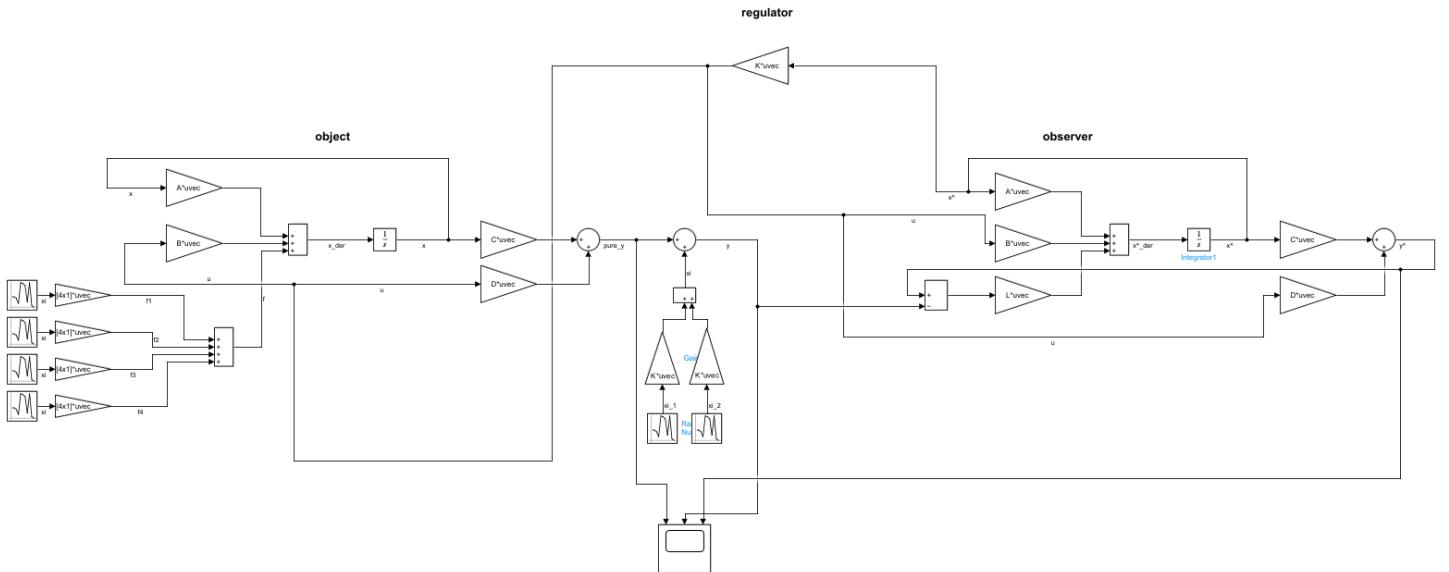
Решим уравнение Риккати и найдем  $P_2, L$ :

$$P_2 = \begin{bmatrix} 431.39 & -58.65 & 263.22 & -151.94 \\ -58.65 & 86.4 & -25.42 & 140.77 \\ 263.22 & -25.42 & 205.75 & -54.21 \\ -151.94 & 140.77 & -54.21 & 251.9 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -15.09 & -0.59 \\ 4.09 & -0.54 \\ -9.49 & 0.06 \\ 6.09 & -0.5 \end{bmatrix}$$

#### 4.4. Моделирование LQG

Схема моделирования:



Исследуем первую компоненту:

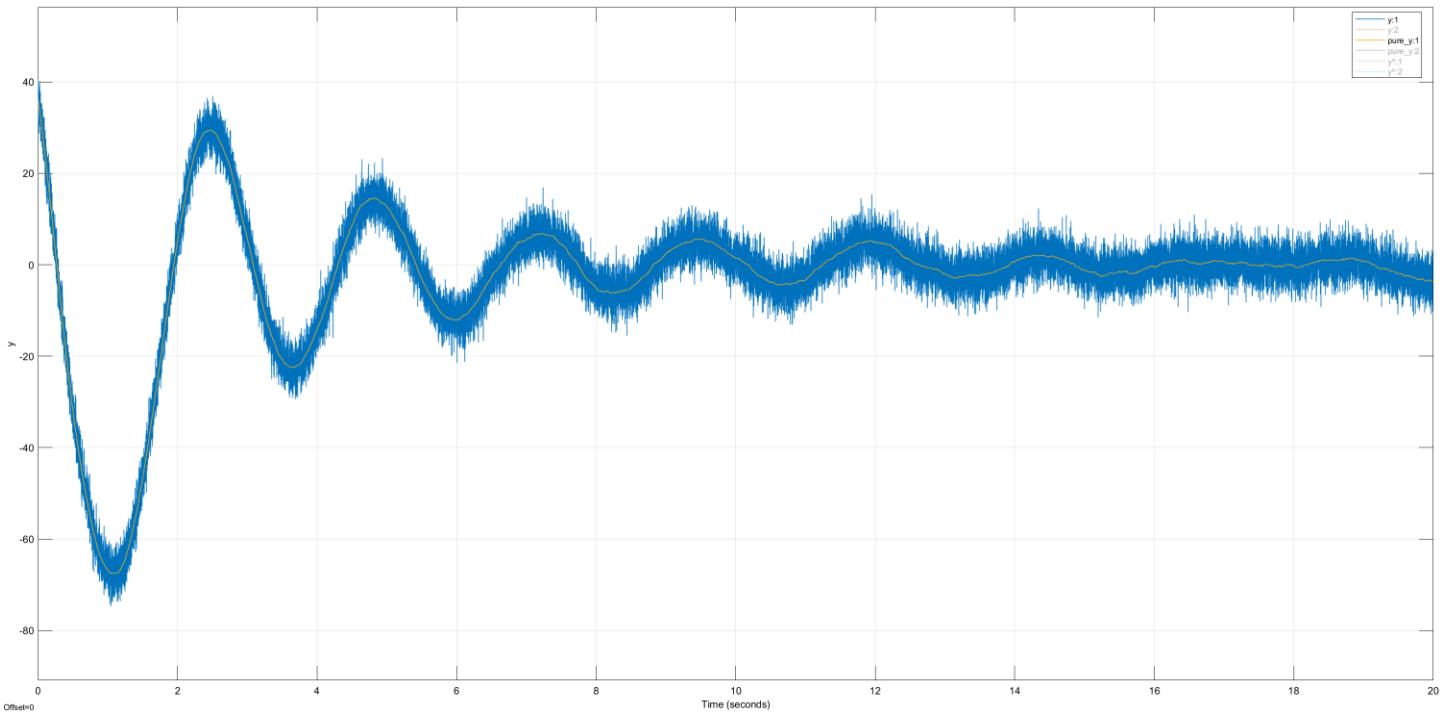


Рисунок 28: графики первой компоненты  $Cx(t)$  и  $y(t)$  объекта

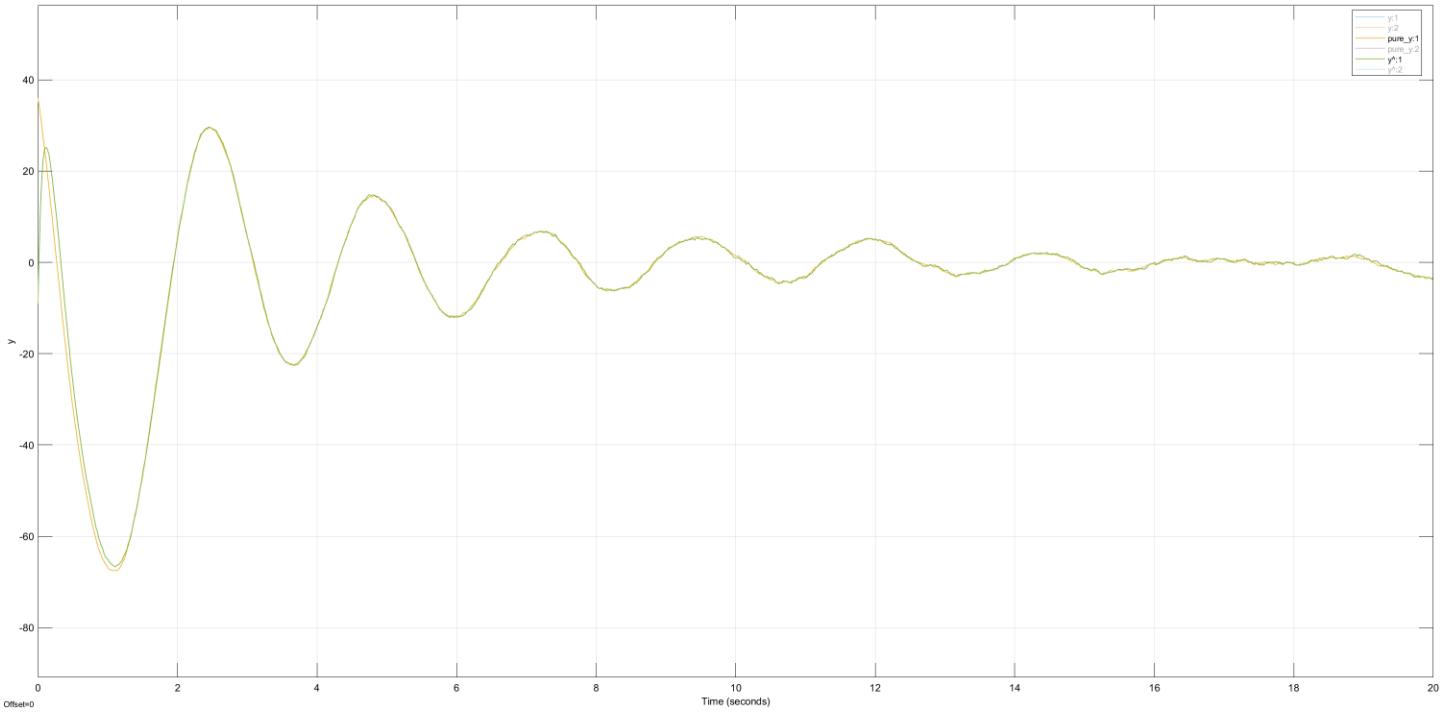


Рисунок 29: графики первой компоненты  $y(t)$  объекта и наблюдателя

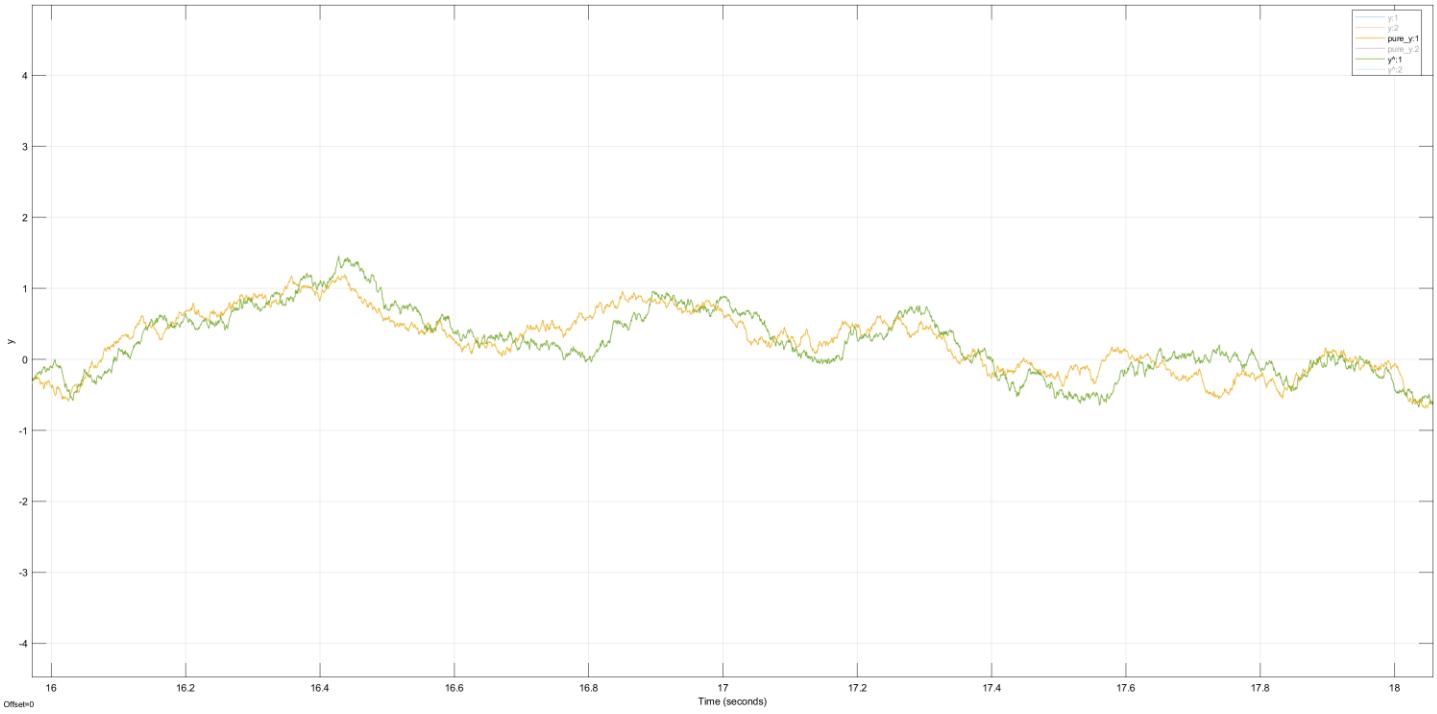


Рисунок 30: приближение графиков первой компоненты  $y(t)$  объекта и наблюдателя

Исследуем вторую компоненту:

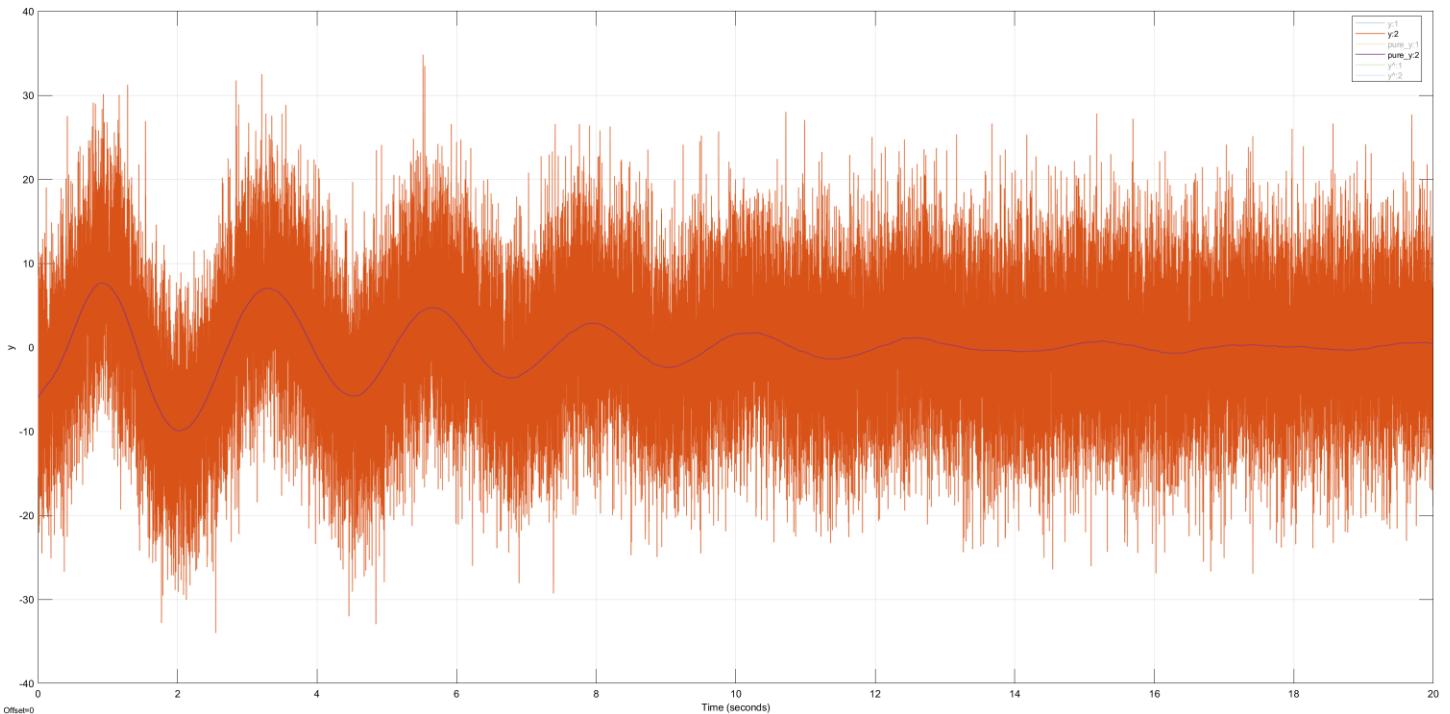


Рисунок 31: графики первой компоненты  $Cx(t)$  и  $y(t)$  объекта

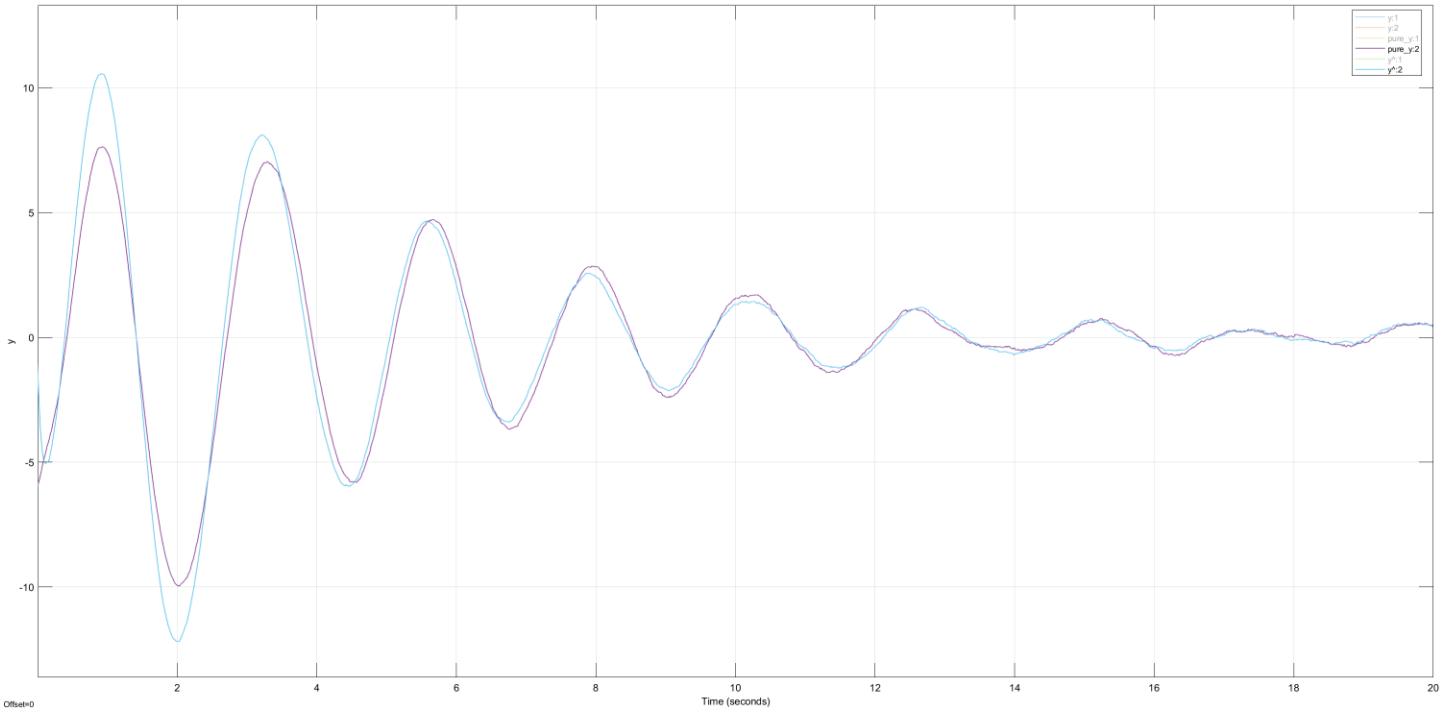


Рисунок 32: графики первой компоненты  $y(t)$  объекта и наблюдателя

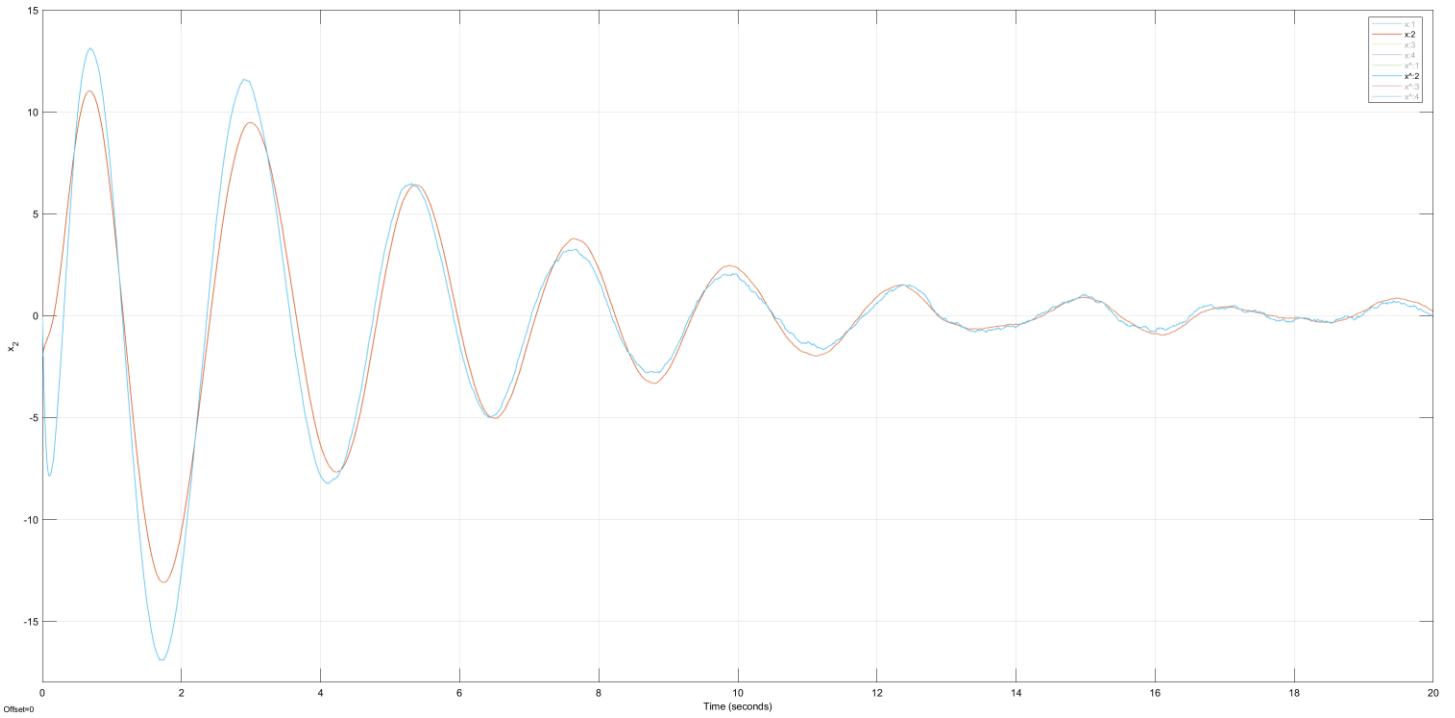


Рисунок 33: графики третьей компоненты вектора  $x(t)$  объекта и наблюдателя

Как видно, LQG не сводит систему в ноль так как при построении регулятора мы не учитывали наличие внешнего возмущения  $f$ . Мы строили LQR для минимизации функционала качества  $J = \int_0^\infty (x^t(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt$  с определенными  $Q_1, R_1$  и при данных условиях синтезированный регулятор начиная с некоторого момента времени будет являться оптимальным. Ошибка слежения наблюдателя также не сходится к 0, но построенный LQE минимизирует значение  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2)$ . И относительно данного критерия при конкретных условиях начиная с некоторого момента времени также будет являться оптимальным.

По сути, рассмотрев  $f, \xi$  в виде белого шума – мы доказали, что даже в этом наихудшем случае характеристики нашей системы останутся удовлетворительными. А значит при любой другой случайной помехе, они не будут хуже.

### Задание 5.

5.1. Различные  $f, \xi$ , но с одинаковыми  $\mu, \sigma^2$

Будем исследовать LQG из предыдущей задачи, меняя реализацию случайных величин  $f, \xi$ , но не меняя их числовые характеристики.

Оценивать будем по величине:

$$J(t) = \int_0^t (x^T(\tau) Q x(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau)) d\tau$$

#### J1

Возьмем величины как в прошлой задаче

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} N(\mu = 0, \sigma^2 = 32) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 17) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 6) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 1) \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} N(\mu = 0, \sigma^2 = 8) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 59) \end{bmatrix}$$

$f, \xi$  – белый шум, независимый по всем своим компонентам

$$Seed(f_i) = i, \quad Seed(\xi_i) = i + 4$$

#### J2

$$Seed(f_i) = 10 + i, \quad Seed(\xi_i) = i + 14$$

#### J3

$$Seed(f_1, f_2, f_3, f_4, \xi_1, \xi_2) = \{55, 72, 94, 7, 891, 17\}$$

#### J4

$$Seed(f_1, f_2, f_3, f_4, \xi_1, \xi_2) = \{9, 99, 999, 9999, 99999, 999999\}$$

## Графики J:

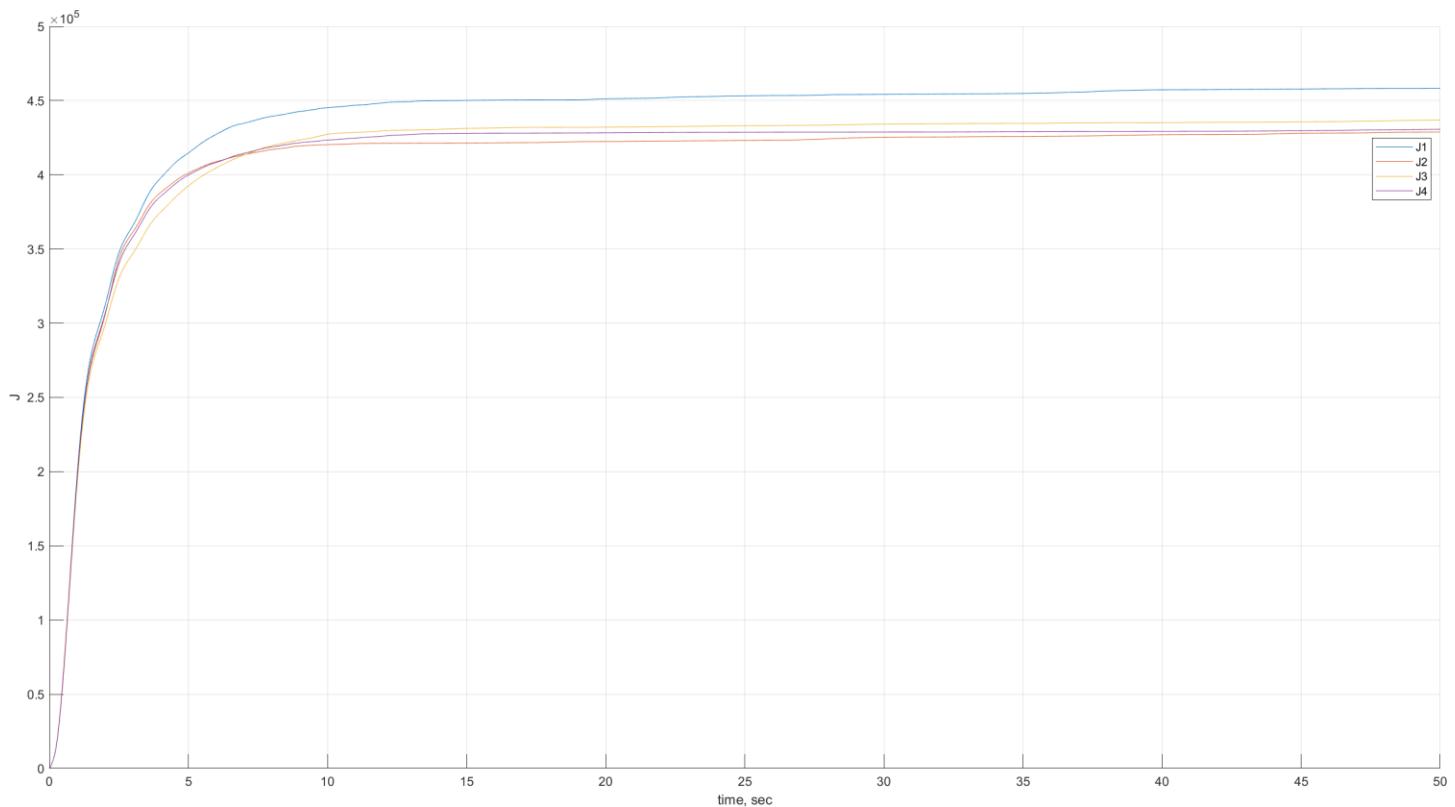


Рисунок 34: графики J при различных Seed, но равных дисперсий и мат ожиданий, 50 сек

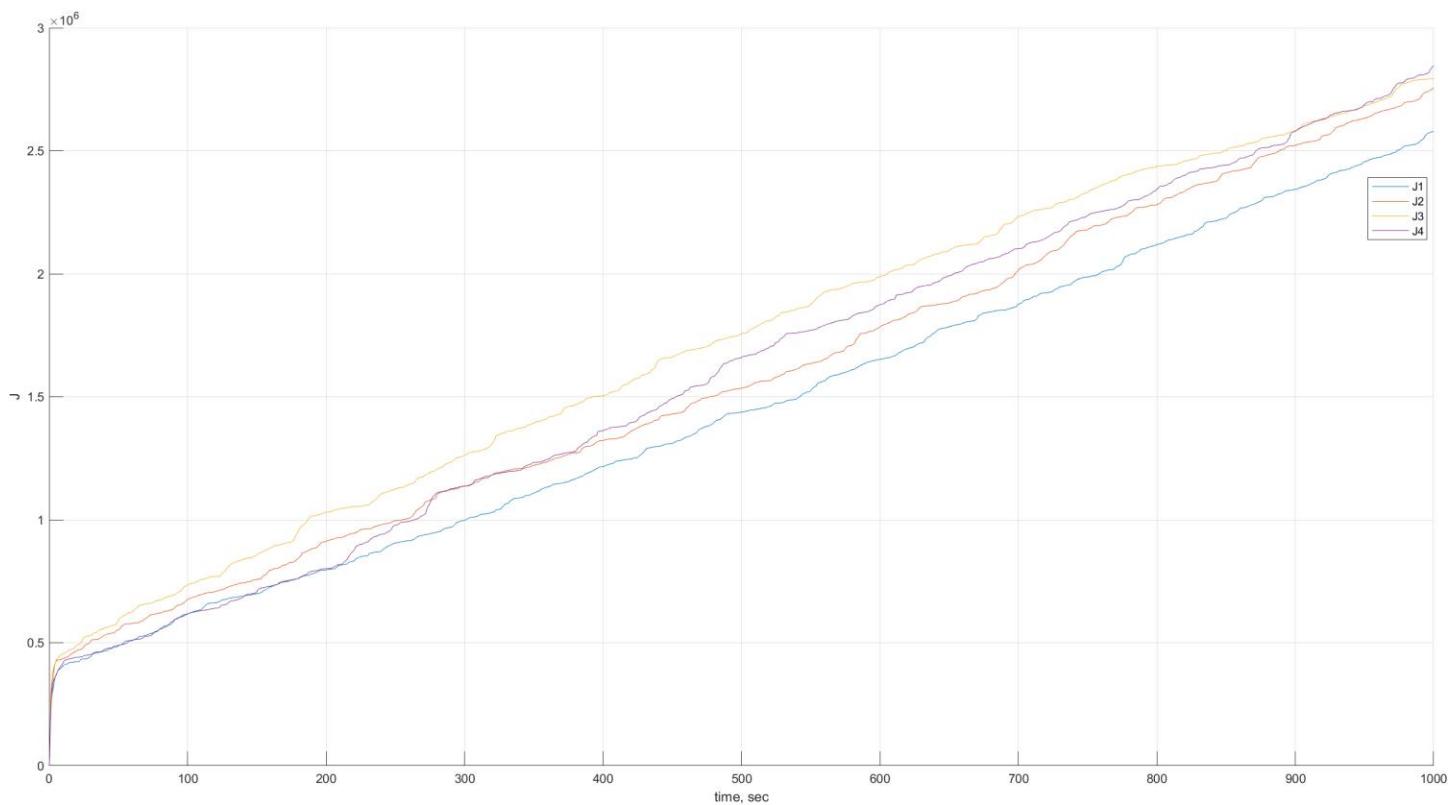


Рисунок 35: графики J при различных Seed, но равных дисперсий и мат ожиданий, 1000 сек

Мы рассмотрели 4 реализации случайных величин  $f, \xi$  с равными числовыми характеристиками.

Как мы видим, в зависимости от реализации случайной величины построенный LQG минимизирует значение функционала на некотором промежутке времени.

Графики  $J$  являются монотонно возрастающими, так как в рассматриваемой системе присутствуют внешние воздействия и помехи измерения, регулятор не может свести систему в 0 и держать её там.

## 5.2. Различные $f, \xi$ , с различными $\sigma^2$

Будем изменять дисперсию случайных  $f, \xi$  и для наглядности использовать те же значения *Seed*. В конце также построим сравнительные графики  $J$ .

Так как мы меняем дисперсию, то для оптимального LQE необходимо также менять матрицы  $Q, R, L$ .

J5

$$f \sim \begin{bmatrix} N(\mu = 0, \sigma^2 = 14) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 6) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 54) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 18) \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} N(\mu = 0, \sigma^2 = 41) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 3) \end{bmatrix}$$

$f, \xi$  – белый шум, независимый по всем своим компонентам

$$Seed(f_i) = i, \quad Seed(\xi_i) = i + 4$$

J6

$$f \sim \begin{bmatrix} N(\mu = 0, \sigma^2 = 1) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 61) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 31) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 7) \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} N(\mu = 0, \sigma^2 = 2) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 42) \end{bmatrix}$$

$f, \xi$  – белый шум, независимый по всем своим компонентам

$$Seed(f_i) = 10 + i, \quad Seed(\xi_i) = i + 14$$

J7

$$f \sim \begin{bmatrix} N(\mu = 0, \sigma^2 = 15) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 9) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 29) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 33) \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} N(\mu = 0, \sigma^2 = 19) \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 5) \end{bmatrix}$$

$f, \xi$  – белый шум, независимый по всем своим компонентам

$$Seed(f_1, f_2, f_3, f_4, \xi_1, \xi_2) = \{9,99,999,9999,99999,999999\}$$

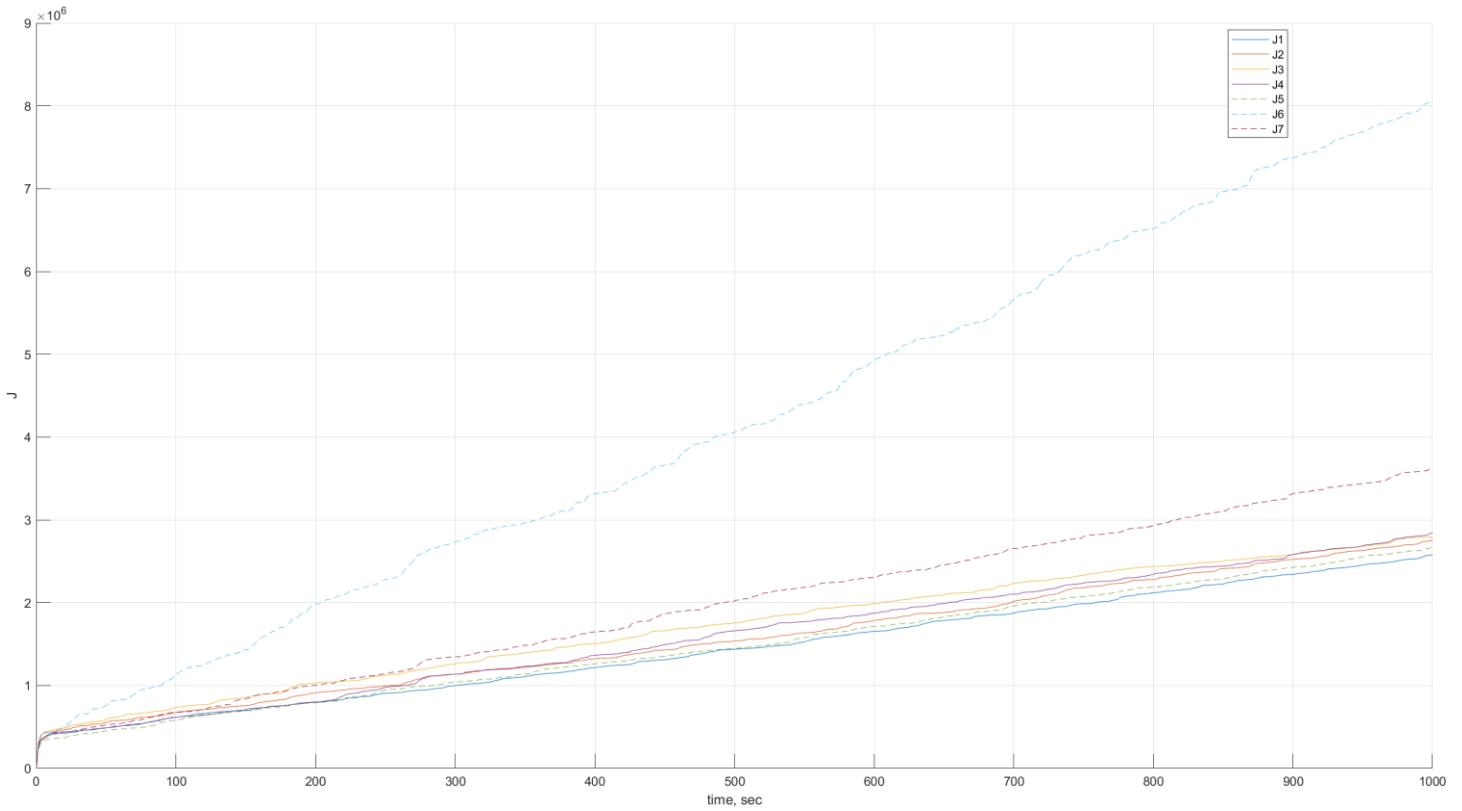


Рисунок 36: графики  $J$

Критерий оптимальности LQG таков, что при выбранных определенным образом матриц  $Q_1, R_1, Q_2, R_2$  мы предполагаем, что  $\int_{-\infty}^t (f^T Q_1^{-1} f + \xi^T R_1^{-1} \xi) d\tau \rightarrow \min$  и получаем  $\int_0^t (x^T Q_2^{-1} x + u^T R_2^{-1} u) d\tau \rightarrow \min$ .

То есть функционал  $J$  может монотонно возрастать и нам необходимо фиксировать верхний предел интегрирования  $t$ .

Таким образом мы будем получать LQR, который с некоторого момента времени станет оптимальным для рассматриваемой нами системы с определёнными  $f, \xi$ .

## Выводы

В данной лабораторной работе были исследованы LQR, LQE (фильтр Калмана) и их комбинация – LQG. Проведено сравнение различных LQR друг с другом, а также с другими модальными регуляторами. При сравнении LQE были найдены внешние возмущения, которые удовлетворяют условию оптимальности наблюдателя. В конце был проведен анализ функционала качества в различных случаях.