LQR и фильтр Калмана

Минимум скалярной квадратичной функции

Скалярная задача

Найти число u, минимизирующее функцию

$$f(x,u) = mx^2 + 2nxu + ru^2$$

Решение через производную

$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u} = 2nx + 2ru = 0$$

Скалярный ответ

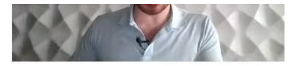
$$u = -\frac{nx}{r}$$

Решение через выделение полного квадрата

$$\begin{aligned}
f(x,u) &= mx^2 + 2nxu + ru^2 \\
&= mx^2 + r\left(u^2 + 2\frac{nx}{r}u\right) + r\left(\frac{nx}{r}\right)^2 - r\left(\frac{nx}{r}\right)^2 \\
&= mx^2 + r\left(u^2 + 2\frac{nx}{r}u + \left(\frac{nx}{r}\right)^2\right) - r\left(\frac{nx}{r}\right)^2 \\
&= \boxed{\left(m - \frac{n^2}{r}\right)x^2} + \boxed{r\left(u + \frac{nx}{r}\right)^2}
\end{aligned}$$

Это слагаемое не зависит от u, его изменить не получится

Это слагаемое всегда ≥ 0, его можно сделать $= 0$



Скалярная задача

Найти число u, минимизирующее функцию

$$f(x,u) = mx^2 + 2nxu + ru^2$$

Решение через выделение полного квадрата

$$f(x,u) = mx^2 + 2nxu + ru^2 = \boxed{\left(m - \frac{n^2}{r}\right)x^2} + \boxed{r\left(u + \frac{nx}{r}\right)^2}$$

Скалярный ответ

$$u = -\frac{nx}{r}$$

Минимум векторной квадратичной функции

Векторная задача

Найти вектор u, минимизирующий функцию

$$f(x,u) = x^TMx + 2x^TNu + u^TRu$$

(Полагаем $R \succ 0$)

Решение через производную

$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u} = 2x^TN + 2u^TR$$

Как договоримся, так и будет!

Получился вектор-строка,
а мы бы хотели вектор-столбец…

$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u} = (2x^TN + 2u^TR)^T$$

Как договоримся, так и будет!

$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u} = 2N^Tx + 2Ru$$

Как договоримся, так и будет!

$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u} = 2N^T x + 2Ru = 0$$

Векторный ответ

$$u = -R^{-1}N^T x$$

Решение через выделение полного квадрата

$$f(x,u) = x^T M x + 2x^T N u + u^T R u$$

$$= x^T M x + \boxed{x^T N u} + \boxed{u^T N^T x} + u^T R u$$

Скалярное произведение коммутативно

$$a^T b = b^T a$$

$$a = x \quad b = Nu$$

$$f(x,u) = x^T M x + 2x^T N u + u^T R u$$

$$= x^T M x + x^T N u + u^T N^T x + u^T R u + x^T N R^{-1} N^T x - x^T N R^{-1} N^T x$$

$$= x^T M x + (u^T + x^T N R^{-1}) R (u + R^{-1} N^T x) - x^T N R^{-1} N^T x$$

$$= \boxed{x^T (M - N R^{-1} N^T) x} + \boxed{(u + R^{-1} N^T x)^T R (u + R^{-1} N^T x)}$$

Это слагаемое не зависит от u, его изменить не получится

Это слагаемое всегда ≥ 0, его можно сделать $= 0$

Векторная задача

Найти вектор u, минимизирующий функцию

$$f(x,u) = x^T M x + 2x^T N u + u^T R u$$

Решение через выделение полного квадрата

$$f(x,u) = \boxed{x^T (M - NR^{-1}N^T) x} + \boxed{(u + R^{-1}N^T x)^T R (u + R^{-1}N^T x)}$$

Векторный ответ

$$u = -R^{-1}N^T x$$

Что мы сегодня изучим?

САМЫЙ ЛУЧШИЙ (В НЕКОТОRОМ СМЫСЛЕ) РЕГУЛЯТОР

&&

САМЫЙ ЛУЧШИЙ (В Н$\mathbb{E}$КОТОРОМ СМЫСЛЕ) НАБЛЮДАТЕЛЬ

Дисклеймер про обозначения

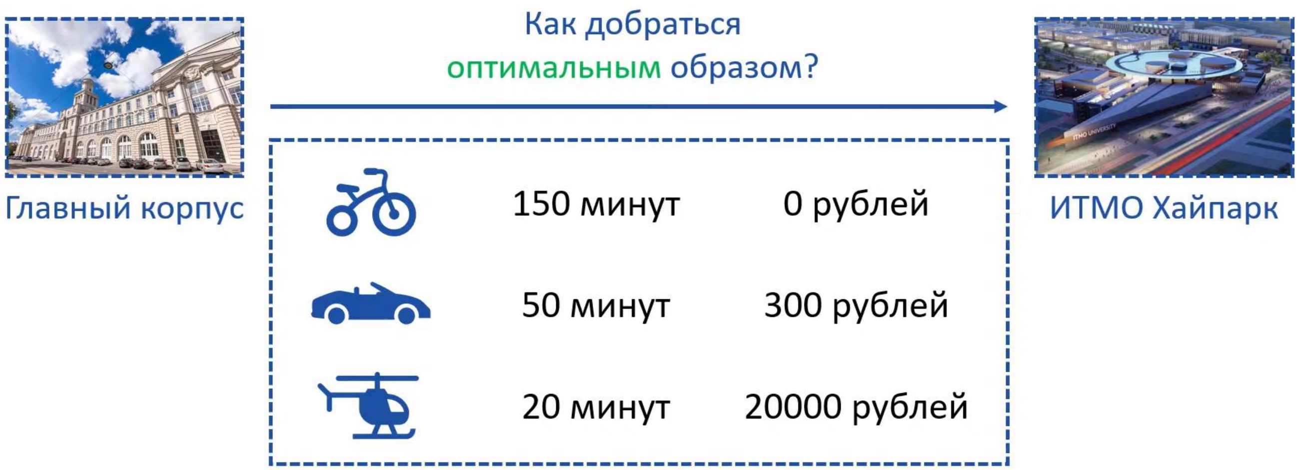
Уравнения, которые в прошлой лекции выглядели так

$$A^T Q + QA = -R \qquad AP + PA^T = -R$$

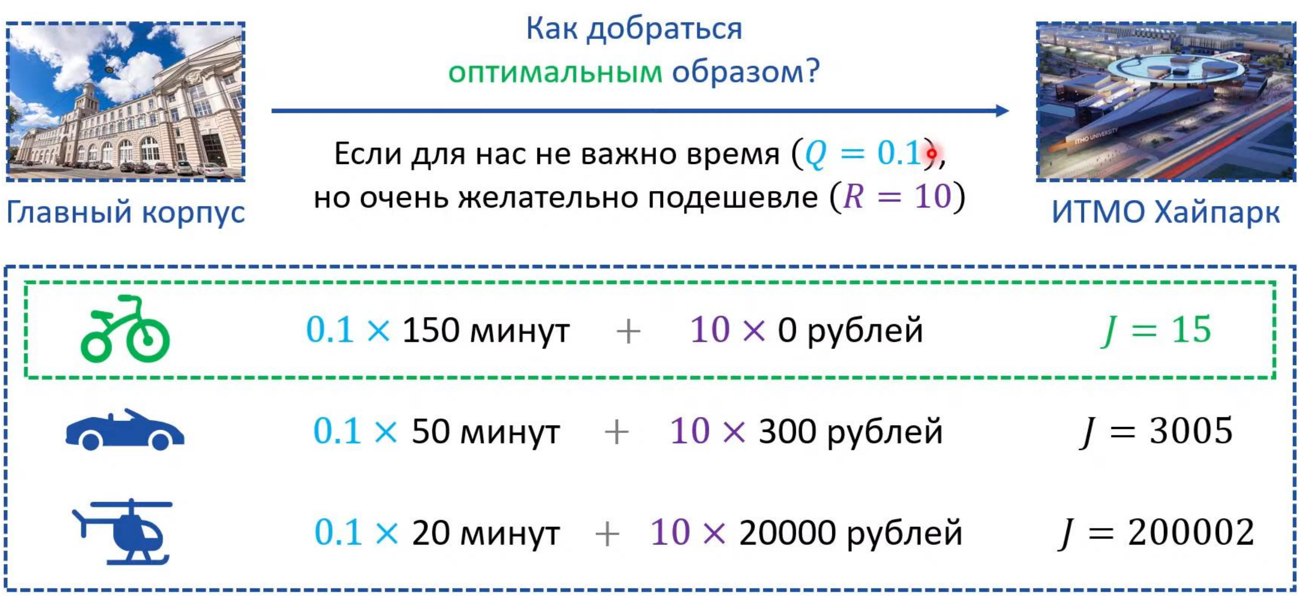
В обозначениях сегодняшней лекции приняли бы вид

$$A^T P + PA = -Q \qquad AP + PA^T = -Q$$

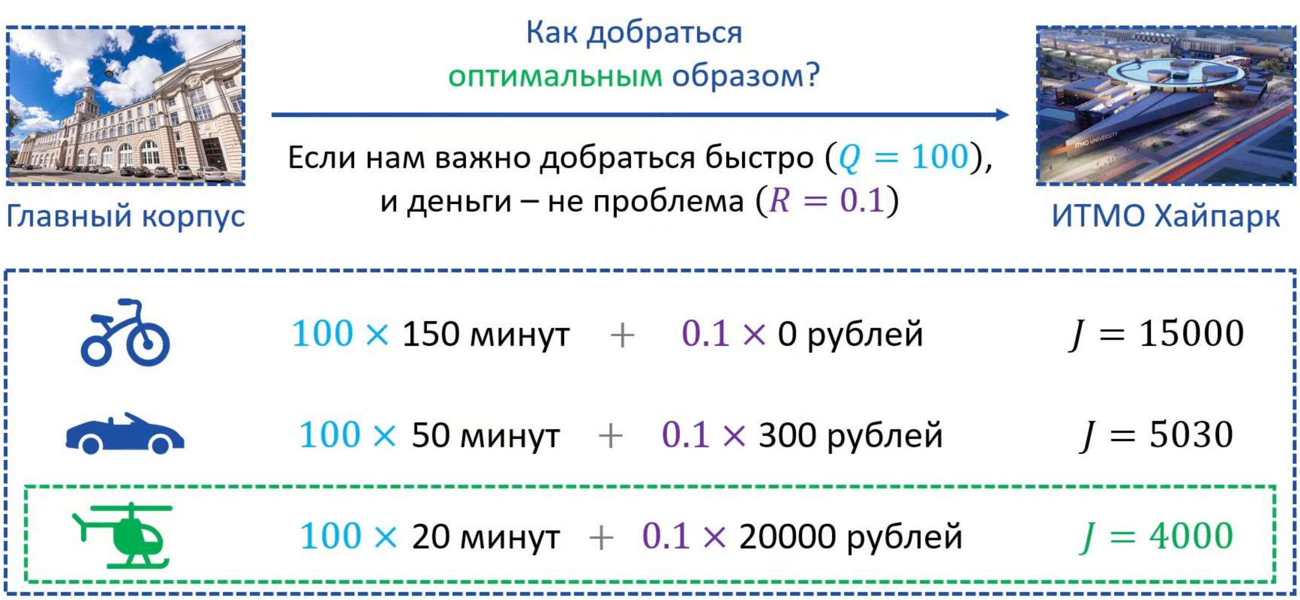
Основная идея LQR (Linear-quadratic regulator): скорость vs затраты



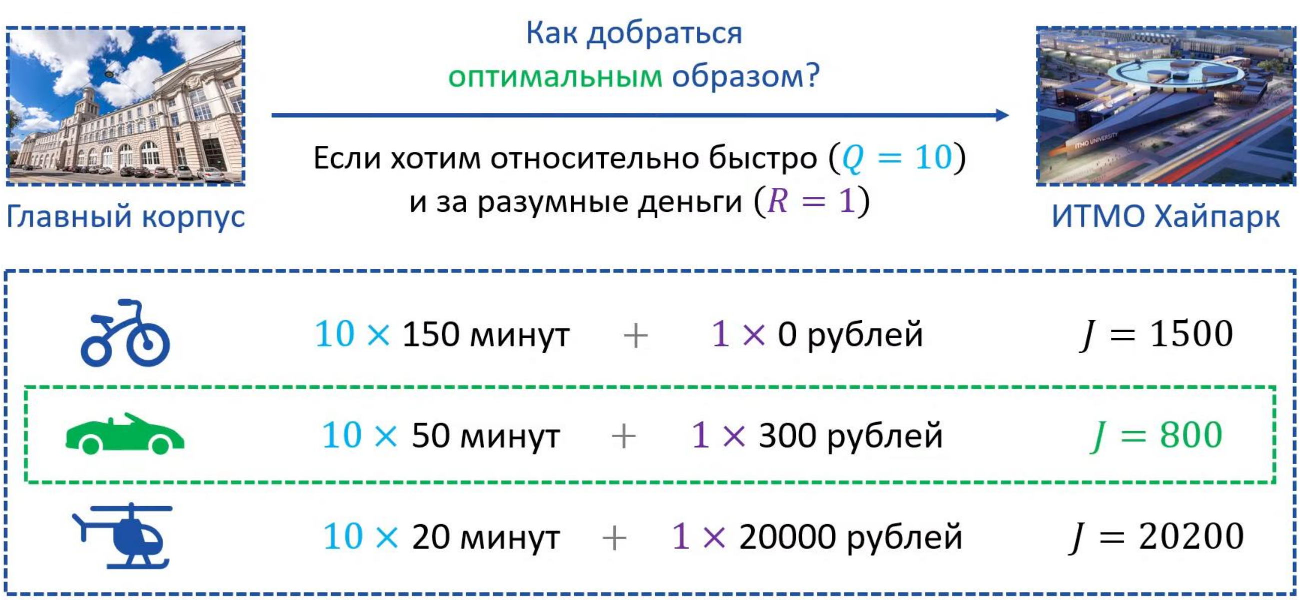
Что для нас оптимально?



В этом случае велосипед – оптимальный способ передвижения



В этом случае вертолет – оптимальный способ передвижения



В этом случае автомобиль – оптимальный способ передвижения

Постановка задачи о линейно-квадратичном регуляторе

Объект	Начальные условия	Регулятор
$\dot{x} = Ax + Bu$	$x(0) = x_0$	$u = Kx$

Постановка задачи

Найти матрицу K регулятора, при которой величины $x(t)$ и $u(t)$ в замкнутой системе будет вести себя так, что критерий качества

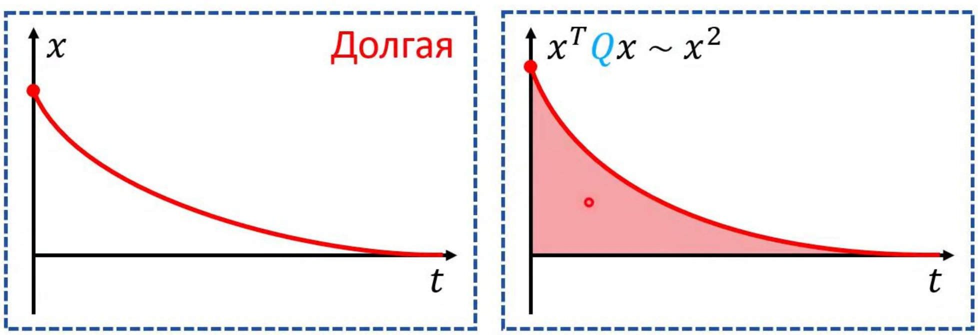
$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

примет наименьшее возможное значение

J – функционал качества. Первое слагаемое показывает, насколько долго длился процесс, второе – насколько много было потрачено управления.

$$J = J_x + J_u = \underbrace{\boxed{\int_0^\infty (x^T Q x) dt}}_{\text{Насколько большой (долгой) была траектория}} + \underbrace{\boxed{\int_0^\infty (u^T R u) dt}}_{\text{Насколько большим было управление (цена)}} \rightarrow \min$$

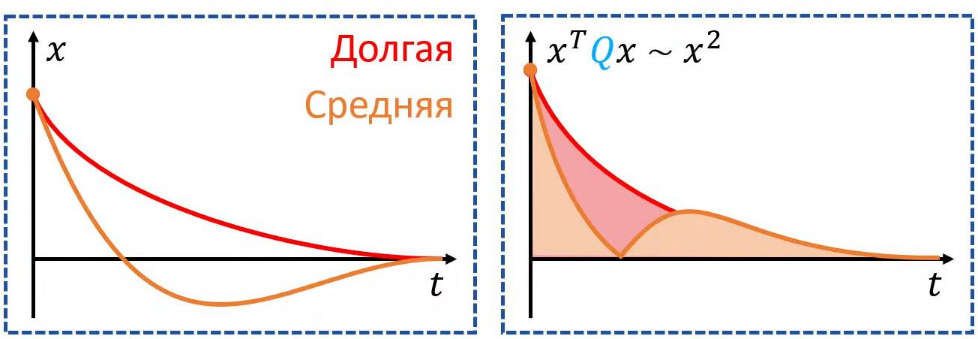
Типа траектория — Типа её квадрат



Интеграл от квадрата

$J_x =$ много

Типа траектория — Типа её квадрат

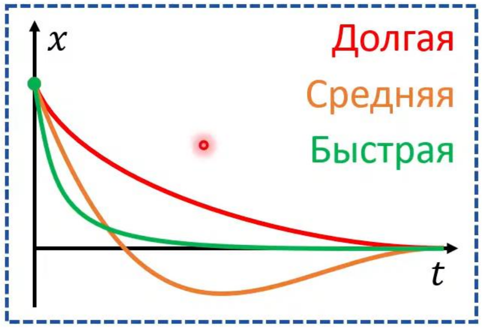


Интеграл от квадрата

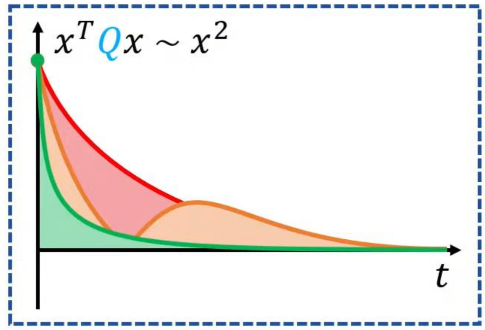
$J_x =$ много

$J_x =$ средне

Типа траектория



Типа её квадрат



Интеграл от квадрата

$J_x =$ много

$J_x =$ средне

$J_x =$ мало

Быстрые процессы требуют большого управления

$J_x =$ много	$\Leftrightarrow$	$J_u =$ мало
$J_x =$ средне		$J_u =$ средне
$J_x =$ мало		$J_u =$ много

Чем больше Q, тем важнее для нас, чтобы процесс был быстрым

Чем больше R, тем важнее для нас, чтобы управление было малым

Вывод уравнений для синтеза LQR

Критерий качества

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)dt$$

Прибавим и вычтем одно и то же

$$J = \boxed{x_0^T P x_0 - x_0^T P x_0} + \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)dt$$

А что тут за матрица P?

Пока просто какая-то симметричная, но чуть позже мы поймём, какую именно надо взять

$$J = x_0^T P x_0 \boxed{- x_0^T P x_0} + \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)dt$$

Занесём слагаемое
под знак интеграла

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{d}{dt}(x^T P x)dt = x^T P x\Big|_0^\infty = \underbrace{\lim_{t\to\infty} x^T P x}_{=0} - x_0^T P x_0}$$

Заранее предполагаем
устойчивость

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \left(\boxed{\frac{d}{dt}(x^T P x)} + x^T Q x + u^T R u\right)dt$$

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \left(\boxed{\frac{d}{dt}(x^T P x)} + x^T Q x + u^T R u\right)dt$$

Производная
произведения

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty (\boxed{\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}} + x^T Q x + u^T R u)dt$$

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty (\boxed{\dot{x}^T} P x + x^T P \boxed{\dot{x}} + x^T Q x + u^T R u)dt$$

Уравнение
объекта

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \left(\boxed{(Ax + Bu)^T} P x + x^T P \boxed{(Ax + Bu)} + x^T Q x + u^T R u\right)dt$$

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty (\boxed{x^T A^T P x} + \boxed{u^T B^T P x} + \boxed{x^T P A x} + \boxed{x^T P B u} + \boxed{x^T Q x} + u^T R u)dt$$

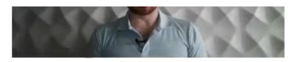
$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty (\boxed{x^T (A^T P + P A + Q) x} + \boxed{2 x^T P B u} + u^T R u)dt$$

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \left(x^T(A^T P + PA + Q)x + 2x^T PBu + u^T Ru\right)dt$$

Выделение полного квадрата

$$\boxed{\begin{aligned}&x^T M x + 2x^T N u + u^T R u = \\ &x^T(M - NR^{-1}N^T)x + (u + R^{-1}N^T x)^T R(u + R^{-1}N^T x)\end{aligned}}$$

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \left(x^T(A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P)x + (u + R^{-1}B^T P x)^T R(u + R^{-1}B^T P x)\right)dt$$



Критерий качества

$$\boxed{J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)dt}$$

Тот же самый критерий качества

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \left(x^T(A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P)x + (u + R^{-1}B^T P x)^T R(u + R^{-1}B^T P x)\right)dt$$

Матрица P – любая симметричная

Как выбрать матрицу P так, чтобы второе выражение сильно упростилось?

Пусть P такова, что $\boxed{A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0}$

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)dt$$

Если P такая, что

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \underbrace{(u + R^{-1}B^T P x)^T}_{} R \underbrace{(u + R^{-1}B^T P x)}_{} dt$$

$$v^T R v$$

Так как $R \succ 0$, это выражение всегда ≥ 0
и равно нулю только при $v = 0$

$$J = \boxed{x_0^T P x_0} + \boxed{\int_0^\infty (u + R^{-1}B^T P x)^T R (u + R^{-1}B^T P x)dt}$$

Это слагаемое
не зависит от u

Это слагаемое будет равно нулю,
если выбрать $u = -R^{-1}B^T P x$
(при других u оно будет больше)

Критерий качества

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)dt$$

Если P такая, что

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

Минимальное значение
критерия качества

$$J = x_0^T P x_0$$

Зависит от
начальных условий

То критерий качества оказывается
минимальным при

$$u = -R^{-1}B^T P x$$

Не зависит от
начальных условий

Объект	Начальные условия	Регулятор
$\dot{x} = Ax + Bu$	$x(0) = x_0$	$u = Kx$

Постановка задачи

Найти матрицу K регулятора, при которой величины $x(t)$ и $u(t)$ в замкнутой системе будет вести себя так, что критерий качества

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

примет наименьшее возможное значение

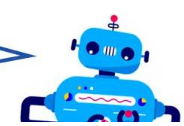
Объект	Регулятор	Критерий качества
$\dot{x} = Ax + Bu$	$u = Kx$	$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$

Уравнения LQR-регулятора

$$\begin{cases} A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}$$

Первое строчка – это алгебраическое уравнение Риккати

ЧЕМ ОНО ОТЛИЧАЕТСЯ ОТ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА?



(В отличие от уравнений Сильвестра или Ляпунова оно является квадратным относительно неизвестной P)

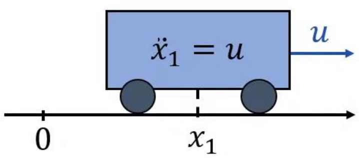
Если $Q \succcurlyeq 0$, $R \succ 0$, пара (A, B) стабилизируема и пара (Q, A) обнаруживаема, то из всех решений P уравнения Риккати только одно положительно определено, и соответствующий ему регулятор K делает систему асимптотически устойчивой

При использовании такого регулятора критерий качества окажется меньше, чем при использовании любого другого (этот регулятор – оптимальный)

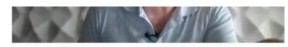
Как синтезировать линейно-квадратичный регулятор?

1. Выбрать матрицы $Q \succcurlyeq 0$ и $R \succ 0$ так, чтобы они отражали соотношение между желаемой скоростью сходимости и величиной управления
2. Найти решение $P \succ 0$ уравнения Риккати $A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$
3. Вычислить K по формуле $K = -R^{-1}B^T P$

Пример синтеза LQR



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad x(0) = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

Все компоненты x одинаково важно быстро свести в ноль

Шаг 1. Выбираем матрицы Q и R

Не допустить больших значений u – не так уж важно

$$Q = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \qquad R = \frac{1}{4} \succ 0$$

Соответствующий критерий качества

$$J = \int_0^\infty \left(x_1^2 + x_2^2 + \frac{u^2}{4}\right) dt$$

Шаг 2. Решаем уравнение Риккати

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\p_2 & p_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\p_2 & p_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\p_2 & p_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}4\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\p_2 & p_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1-4p_2^2 & p_1-4p_2p_3\\p_1-4p_2p_3 & 2p_2+1-4p_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}1-4p_2^2=0\\p_1-4p_2p_3=0\\1+2p_2-4p_3^2=0\end{cases}\Rightarrow$$

Несколько возможных решений

$$\left(0,-\frac{1}{2},0\right)\quad\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Эти решения соответствуют матрицам P

$$P=\begin{bmatrix}0 & -1/2\\-1/2 & 0\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1/2\\1/2 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & 1/2\\1/2 & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1/2\\1/2 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\succ 0$$

Шаг 3. Вычисляем матрицу регулятора

$$K=-R^{-1}B^TP$$

$$K=-4\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1/2\\1/2 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}-2 & -2\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

При желании можем вычислить значение критерия качества

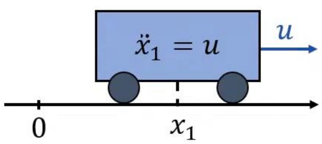
$$J=x_0^TPx_0$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

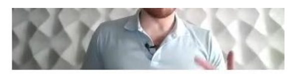
$$J = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$J \approx 3.12$$

Сравнение LQR с модальными регуляторами



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Linear Quadratic Regulator

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \frac{1}{4} \qquad J = \int_0^\infty \left(x_1^2 + x_2^2 + \frac{u^2}{4} \right) dt$$

$$K = \begin{bmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \sigma(A + BK) = \{-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

Слабый модальный

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

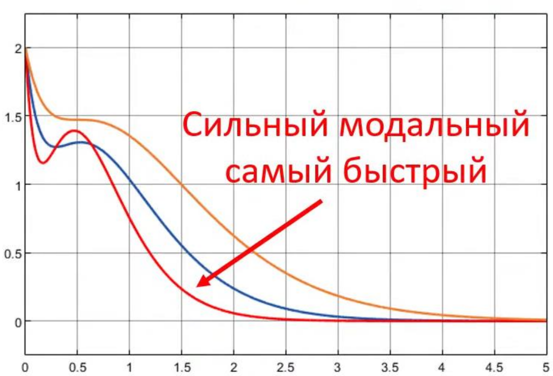
$$\sigma(A + BK) = \{-1, -1\}$$

Сильный модальный

$$K = \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A + BK) = \{-2, -2\}$$

Графики зависимости величины $x^T Q x$ от времени



Linear Quadratic Regulator

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \frac{1}{4} \qquad J = \int_0^\infty \left(x_1^2 + x_2^2 + \frac{u^2}{4} \right) dt$$

$$K = \begin{bmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \sigma(A + BK) = \{-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

Слабый модальный

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

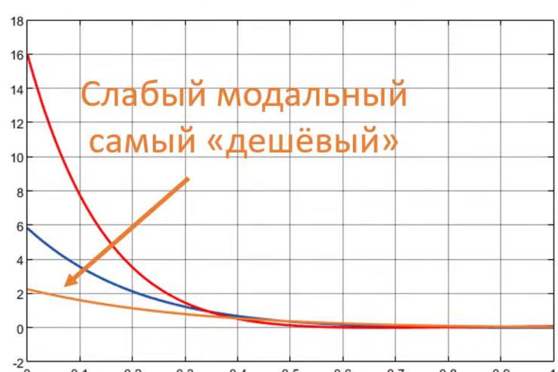
$$\sigma(A + BK) = \{-1, -1\}$$

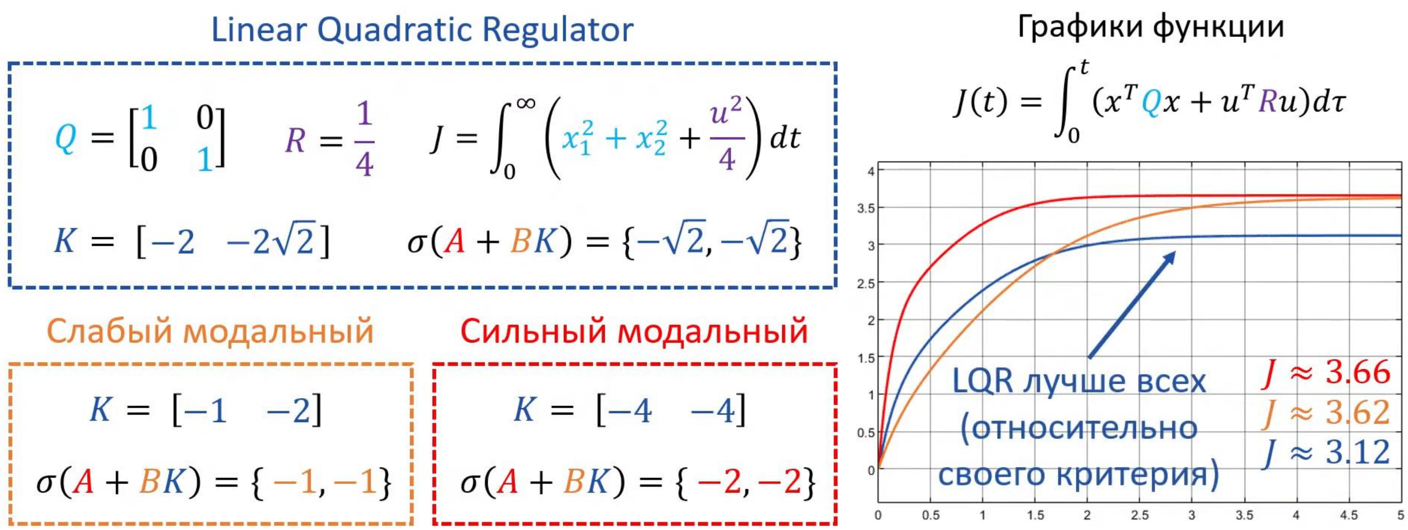
Сильный модальный

$$K = \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix}$$

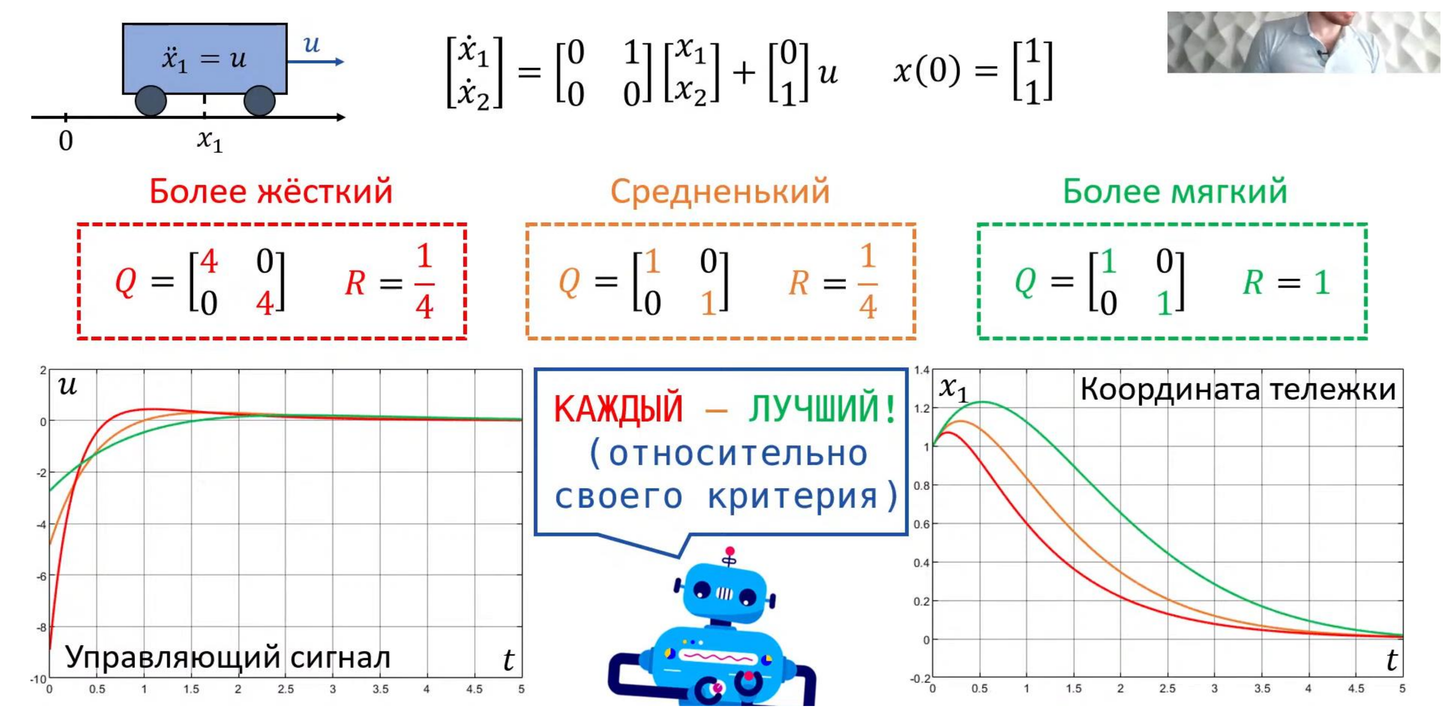
$$\sigma(A + BK) = \{-2, -2\}$$

Графики зависимости величины $u^T R u$ от времени





Сравнение разных LQR



Чем «больше» Q, тем больше «штраф» за отклонение x от 0. Соответственно, чем «больше» R, тем больше «штраф» за управление.

Как вы знаете, для любого регулятора
есть двойственный ему наблюдатель

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f \\ y = Cx + \xi \end{cases}$$

Посторонние сигналы

f − внешнее возмущение

ξ − помеха измерений

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Предполагаемая природа сигналов

В этой постановке задачи мы предполагаем, что возмущение f и помеха ξ являются детерминированными (неслучайными) сигналами, но они неизвестны нам и не могут быть непосредственно измерены

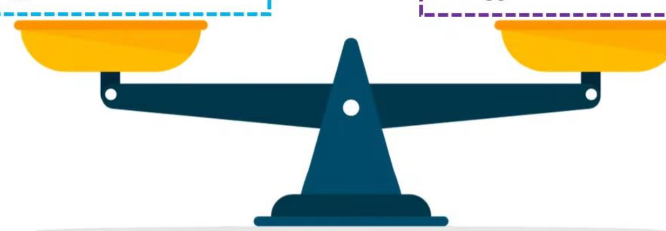
Постановка задачи

Найти матрицу L наблюдателя, при которой $\hat{x}(t)$ точно сходится к $x(t)$ в случае, если посторонние сигналы $f(t)$ и $\xi(t)$ таковы, что величина «критерия доверия»

$$J = \int_{-\infty}^{t} (f^T Q^{-1} f + \xi^T R^{-1} \xi) dt$$

принимает наименьшее возможное (при данном выходе $y(t)$) значение

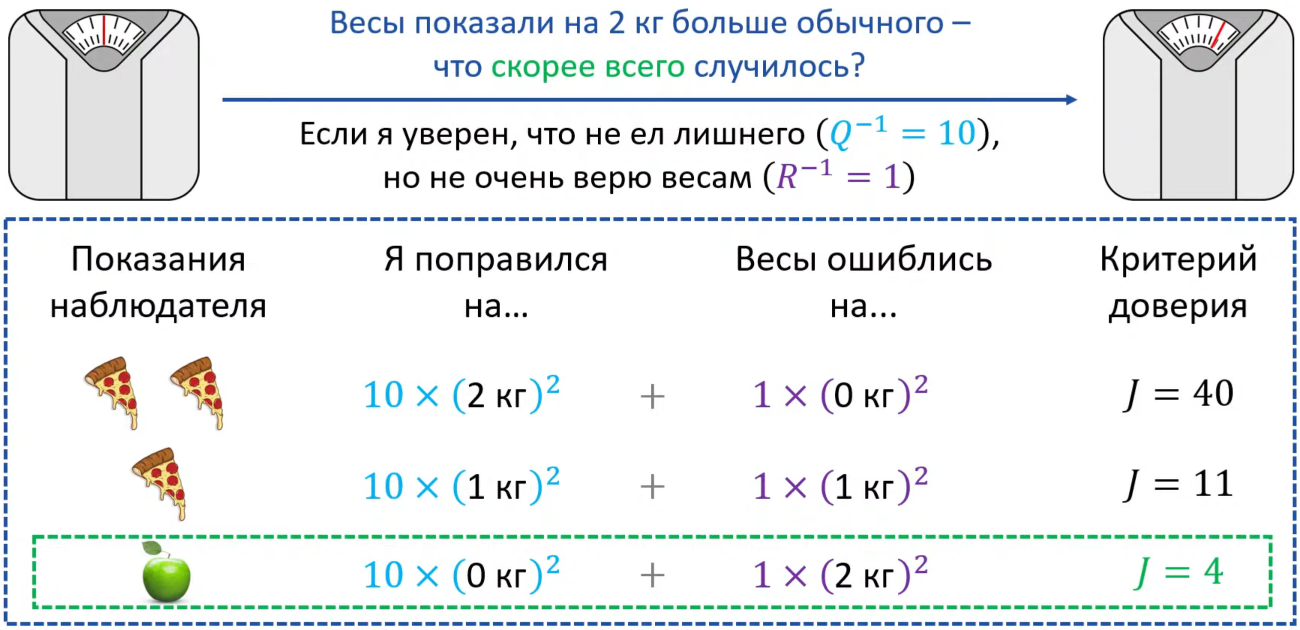
$$\int_{-\infty}^{t} (f^T Q^{-1} f) dt \qquad \int_{-\infty}^{t} (\xi^T R^{-1} \xi) dt$$



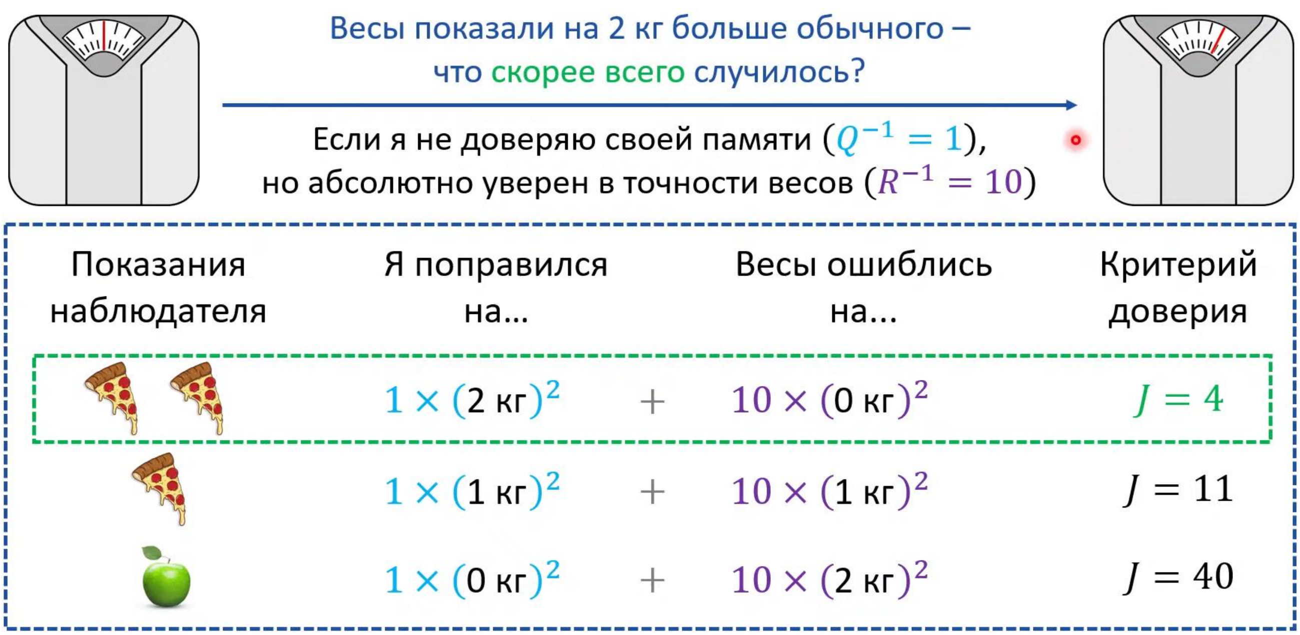
Чем больше Q^{-1}, тем сильнее мы верим, что возмущение f – маленькое

Чем больше R^{-1}, тем сильнее мы верим, что помеха ξ – маленькая

Основная идея LQE: верим прошлому или датчикам?



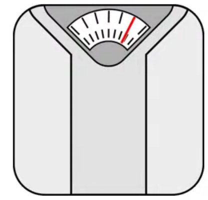
В этом случае последний наблюдатель оптимален



В этом случае первый наблюдатель оптимален

Весы показали на 2 кг больше обычного – что скорее всего случилось?

Если я одинаково доверяю своей памяти ($Q^{-1} = 1$), и своим весам ($R^{-1} = 1$)



Показания наблюдателя	Я поправился на...		Весы ошиблись на...	Критерий доверия
	$1 \times (2\text{ кг})^2$	$+$	$1 \times (0\text{ кг})^2$	$J = 4$
	$1 \times (1\text{ кг})^2$	$+$	$1 \times (1\text{ кг})^2$	$J = 2$
	$1 \times (0\text{ кг})^2$	$+$	$1 \times (2\text{ кг})^2$	$J = 4$

В этом случае второй наблюдатель оптимален

Линейно-квадратичный наблюдатель (Linear-Quadratic Estimator)

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f \\ y = Cx + \xi \end{cases}$$

Посторонние сигналы

f – внешнее возмущение

ξ – помеха измерений

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Постановка задачи

Найти матрицу L наблюдателя, при которой $\hat{x}(t)$ точно сходится к $x(t)$ в случае, если посторонние сигналы $f(t)$ и $\xi(t)$ таковы, что величина «критерия доверия»

$$J = \int_{-\infty}^{t} (f^T Q^{-1} f + \xi^T R^{-1} \xi) dt$$

принимает наименьшее возможное (при данном выходе $y(t)$) значение

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f \\ y = Cx + \xi \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Критерий доверия

$$\int_{-\infty}^{t} (f^T Q^{-1} f + \xi^T R^{-1} \xi) dt$$

Уравнения LQE-наблюдателя

$$\boxed{\begin{cases} AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0 \\ L = -PC^T R^{-1} \end{cases}}$$

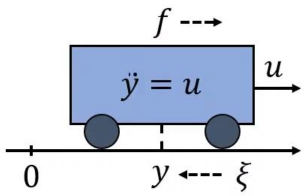
Алгебраическое уравнение Риккати

Если $Q \succcurlyeq 0$, $R \succ 0$, пара (C, A) обнаруживаема и пара (A, Q) стабилизируема, то из всех решений P уравнения Риккати только одно положительно определено, и динамика ошибки соответствующего наблюдателя асимптотически устойчива

Состояние $\hat{x}$ такого наблюдателя будет с нулевой ошибкой сходиться к состоянию x объекта при условии, что посторонние сигналы f и ξ минимизируют критерий доверия (и при этом не противоречат измеряемому сигналу $y(t)$)

Как синтезировать линейно-квадратичный наблюдатель?

1. Выбрать $Q \succcurlyeq 0$ и $R \succ 0$ так, чтобы они отражали распределение доверия между тем, что рассчитывает наблюдатель, и тем, что сообщают датчики
2. Найти решение $P \succ 0$ уравнения Риккати $AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0$
3. Вычислить L по формуле $L = -PC^T R^{-1}$



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}f_1\\ f_2\end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \xi$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

Предположим, что все компоненты f примерно одинаковы

Шаг 1. Выбираем матрицы Q и R

Предположим, что ξ имеет примерно ту же величину, что и f

$$Q = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \qquad R = 1 \succ 0$$

Соответствующий критерий доверия

$$J = \int_{-\infty}^{t} (f_1^2 + f_2^2 + \xi^2)dt$$

Шаг 2. Решаем уравнение Риккати

$$AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0$$

$$\begin{cases} 1 + 2p_2 - p_1^2 = 0\\ p_3 - p_1 p_2 = 0\\ 1 - p_2^2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Несколько возможных решений

$(\sqrt{3},\ 1,\ \sqrt{3}) \quad (-\sqrt{3},\ 1, -\sqrt{3})$

$$P = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix}-\sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

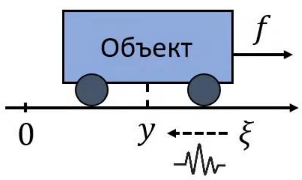
$$P = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix} \succ 0$$

Шаг 3. Вычисляем матрицу наблюдателя

$$L = -\,PC^T R^{-1}$$

$$L = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

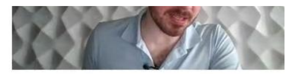
Сравнение работы LQE при разных критериях доверия



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \xi$$

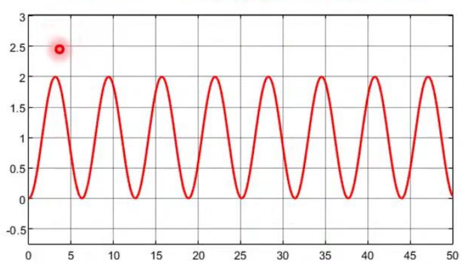
$f(t) = \cos t$

какой-то шум

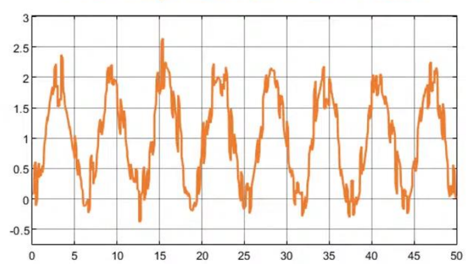


Доверяем измерениям $\Rightarrow$ $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $R^{-1} = 100$ $\Rightarrow$ $L = \begin{bmatrix} -2\sqrt{30} \\ -10 \end{bmatrix}$

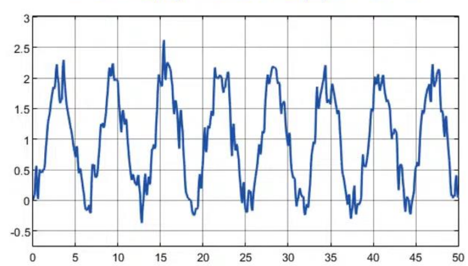
Истинное движение



Измеряемый сигнал

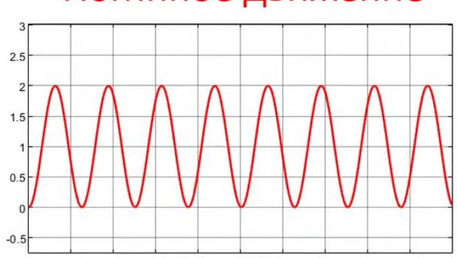


Выход наблюдателя

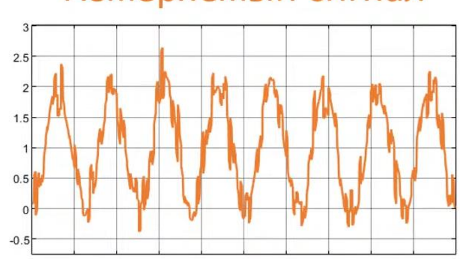


Доверяем, но не слишком $\Rightarrow$ $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $R^{-1} = 1$ $\Rightarrow$ $L = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$

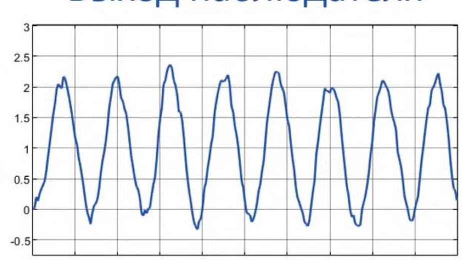
Истинное движение



Измеряемый сигнал

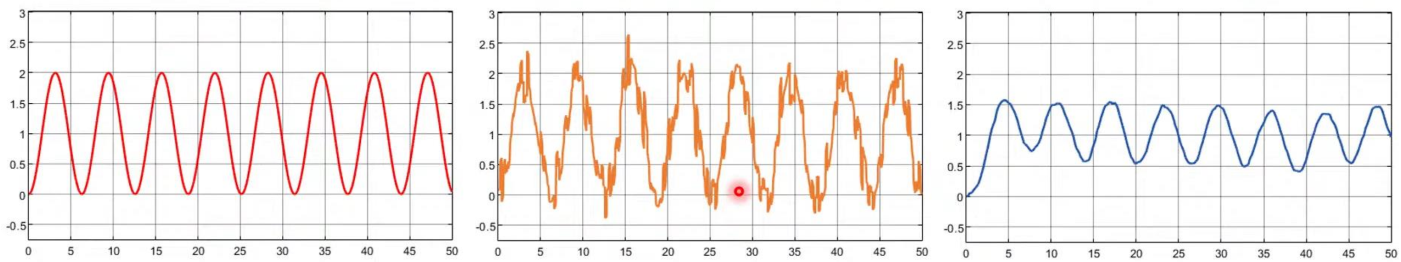


Выход наблюдателя



Боимся, что в $y(t)$ много шумов $\Rightarrow$ $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$ $R^{-1} = 1$ $\Rightarrow$ $L = \begin{bmatrix} -\sqrt{21}/10 \\ -1/10 \end{bmatrix}$

Истинное движение | Измеряемый сигнал | Выход наблюдателя



Фильтр Калмана: постановка задачи

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f \\ y = Cx + \xi \end{cases}$$

Случайные сигналы

f – белый шум

ξ – белый шум

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

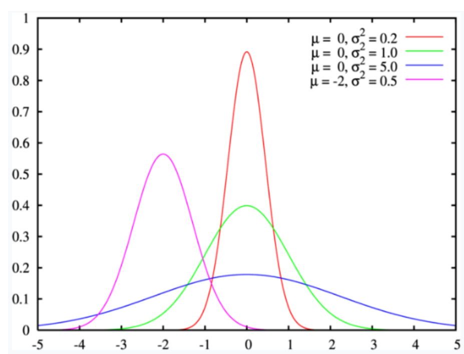
Предполагаемая природа сигналов

В этой постановке задачи мы предполагаем, что возмущение f и помеха ξ являются гауссовским белым шумом (случайными процессами с нулевым математическим ожиданием и равномерной спектральной плотностью)

Нормáльное распределéние[1][2], также называемое **распределением Гаусса** или **Гаусса — Лапласа**[3] — распределение вероятностей, которое в одномерном случае задаётся функцией плотности вероятности, совпадающей с функцией Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

где параметр μ — математическое ожидание (среднее значение), медиана и мода распределения, а параметр σ — среднеквадратическое отклонение, σ^2 — дисперсия распределения.



Зеленая линия соответствует стандартному нормальному распределению

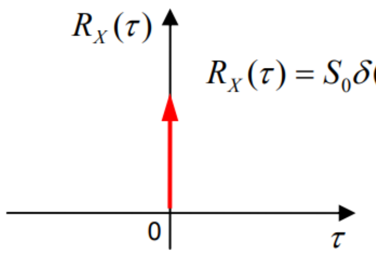
Плотность вероятности

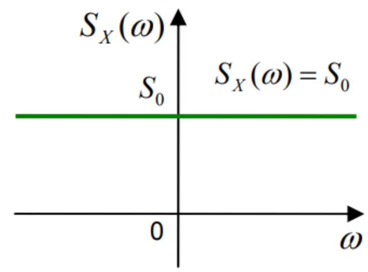
Спектральная плотность – это функция, которая показывает распределение *мощности* сигнала по частотам. Такая информация о полезных сигналах, помехах и возмущениях очень важна для разработчика систем управления. Система должна быть спроектирована так, чтобы усиливать сигналы с «полезными» частотами и подавлять «вредные» частоты, характерные для помех и возмущений.

В математике для теоретических исследований иногда удобно использовать математические объекты, которые нереализуемы на практике (например, дельта-функцию). В теории случайных процессов важную роль играет *белый шум*[5], имеющий равномерную спектральную плотность по всем частотам, то есть, $S_X(\omega) = S_0 = \text{const}$. Очевидно, что при этом площадь под кривой спектральной плотности (определяющая средний квадрат процесса) бесконечна, то есть сигнал имеет бесконечную мощность и не может существовать в природе.

Если нет никакой информации о свойствах случайных возмущений, действующих на системы, часто считают, что они приближенно описываются моделью белого шума. Если мы докажем, что даже в этом (наихудшем) случае характеристики системы останутся удовлетворительными, то они будут не хуже и при любой другой случайной помехе.

Корреляционная функция и спектральная плотность белого шума показаны на рисунках:





Белый шум, как сигнал с бесконечной энергией, невозможно получить на практике. При моделировании его обычно заменяют на *белый шум с ограниченной полосой*, который имеет равномерный спектр в полосе частот от $-\omega_0$ до ω_0, и нулевой вне этой полосы:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} S_0, & |\omega| \le \omega_0 \\ 0, & |\omega| > \omega_0 \end{cases}.$$

Autocovariance (корреляционная функция)

$$\mathbb{E}\left(f(t)f^T(\tau)\right)$$

Математическое ожидание

Значения одной случайной функции в разные моменты времени

$$\mathbb{E}\left(f(t)f^T(\tau)\right) = \mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\tau) & f_2(\tau) & f_3(\tau) \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbb{E}\left(f(t)f^T(\tau)\right) = \mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} f_1(t)f_1(\tau) & f_1(t)f_2(\tau) & f_1(t)f_3(\tau) \\ f_2(t)f_1(\tau) & f_2(t)f_2(\tau) & f_2(t)f_3(\tau) \\ f_3(t)f_1(\tau) & f_3(t)f_2(\tau) & f_3(t)f_3(\tau) \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbb{E}\left(f(t)f^T(\tau)\right) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left(f_1(t)f_1(\tau)\right) & \mathbb{E}\left(f_1(t)f_2(\tau)\right) & \mathbb{E}\left(f_1(t)f_3(\tau)\right) \\ \mathbb{E}\left(f_2(t)f_1(\tau)\right) & \mathbb{E}\left(f_2(t)f_2(\tau)\right) & \mathbb{E}\left(f_2(t)f_3(\tau)\right) \\ \mathbb{E}\left(f_3(t)f_1(\tau)\right) & \mathbb{E}\left(f_3(t)f_2(\tau)\right) & \mathbb{E}\left(f_3(t)f_3(\tau)\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E}\left(f(t)f^T(\tau)\right) = \begin{bmatrix} \delta(t-\tau)\sigma_1^2 & \delta(t-\tau)\sigma_{12} & \delta(t-\tau)\sigma_{13} \\ \delta(t-\tau)\sigma_{21} & \delta(t-\tau)\sigma_2^2 & \delta(t-\tau)\sigma_{23} \\ \delta(t-\tau)\sigma_{31} & \delta(t-\tau)\sigma_{32} & \delta(t-\tau)\sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E}\left(f(t)f^T(\tau)\right) = \delta(t-\tau)\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

Что-то типа дисперсий (квадратов) компонент f

Что-то типа их ковариаций (попарных произведений)

Значения в разные моменты времени абсолютно независимы

$$\mathbb{E}\left(f(t)f^T(\tau)\right) = \delta(t-\tau)\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

Матрица спектральной плотности сигнала f

Значения в разные моменты времени абсолютно независимы

$$\mathbb{E}\left(f(t)f^T(\tau)\right) = \delta(t-\tau)Q \qquad \mathbb{E}\left(\xi(t)\xi^T(\tau)\right) = \delta(t-\tau)R$$

Матрица спектральной плотности сигнала f

Матрица спектральной плотности сигнала ξ

Матрицы Q и R выражают «квадраты амплитуд» случайных сигналов

$$\boxed{\mathbb{E}\left(f(t)f^T(\tau)\right) = \delta(t-\tau)Q \qquad \mathbb{E}\left(\xi(t)\xi^T(\tau)\right) = \delta(t-\tau)R}$$

Если компоненты f независимы, то Q будет диагональной

Если компоненты ξ независимы, то R будет диагональной

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f \\ y = Cx + \xi \end{cases}$$

Случайные сигналы

f — белый шум

ξ — белый шум

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Постановка задачи

Найти матрицу L наблюдателя такую, что если для $f(t)$ и $\xi(t)$ выполнено

$$\mathbb{E}\big(f(t)f^T(\tau)\big) = \delta(t-\tau)Q \qquad \mathbb{E}\big(\xi(t)\xi^T(\tau)\big) = \delta(t-\tau)R$$

то средний квадрат отклонения установившейся ошибки наблюдателя

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2)$$

примет наименьшее возможное значение

$\mathbb{E}(ff^T) \sim Q$ $\qquad$ $\mathbb{E}(\xi\xi^T) \sim R$

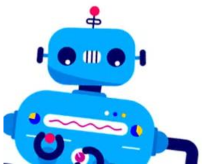
Чем больше Q, тем (в среднем) больше случайное возмущение f

Чем больше R, тем (в среднем) больше случайная помеха ξ

Объект	Случайные сигналы	Наблюдатель
$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f \\ y = Cx + \xi \end{cases}$	f – белый шум, $f^2 \sim Q$ ξ – белый шум, $\xi^2 \sim R$	$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$

Уравнения фильтра Калмана

$$\begin{cases} AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0 \\ L = -PC^T R^{-1} \end{cases}$$



ЧТО_ТО ЗНАКОМОЕ…

"За разными названиями может быть скрыта одна суть" – Кот Платон

Фильтр Калмана – это LQE

Пример работы фильтра Калмана с разными настройками

Объект (тележка)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \xi$$

Наблюдатель (фильтр Калмана)

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} (\hat{y} - y)$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

Объект (тележка)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \xi$$

Наблюдатель (фильтр Калмана)

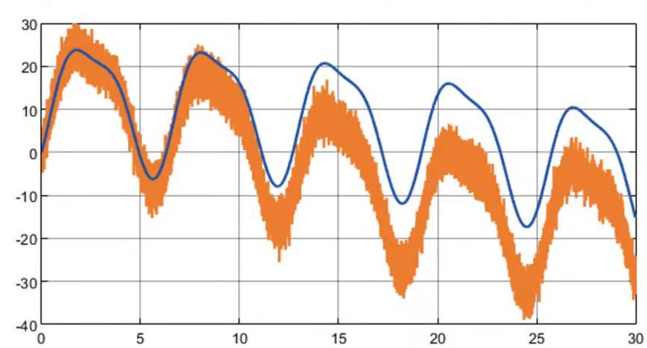
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -0.045 \\ -0.001 \end{bmatrix} (\hat{y} - y)$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

Предполагаем, что измерения сильно зашумлены

$$Q = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{bmatrix} \qquad R = 10^3$$

Измеряемый выход $y(t)$ и выход наблюдателя $\hat{y}(t)$



Объект (тележка)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ f_2\end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \xi$$

Наблюдатель (фильтр Калмана)

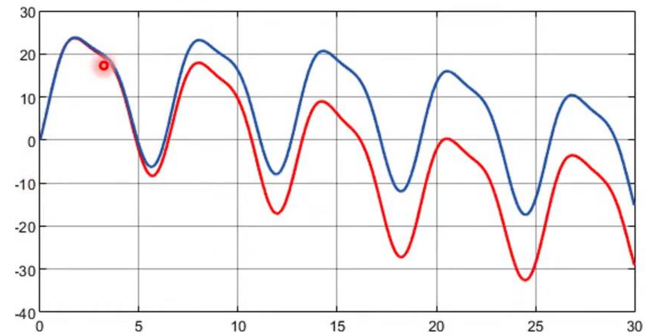
$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}-0.045\\ -0.001\end{bmatrix}(\hat{y} - y)$$

$$\hat{y} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

Предполагаем, что измерения сильно зашумлены

$$Q = \begin{bmatrix}10^{-3} & 0\\ 0 & 10^{-3}\end{bmatrix} \qquad R = 10^3$$

Реальный выход $Cx(t)$ и выход наблюдателя $\hat{y}(t)$



Объект (тележка)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ f_2\end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \xi$$

Наблюдатель (фильтр Калмана)

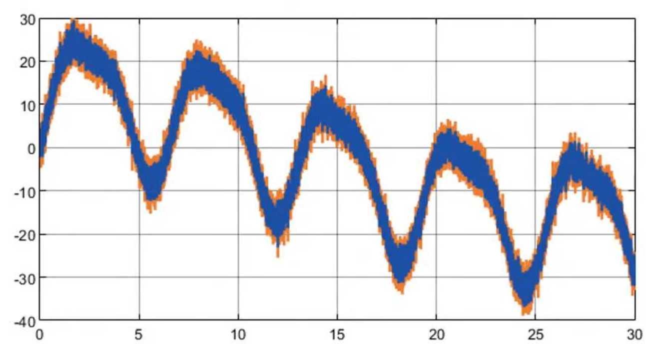
$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}-1001\\ -1000\end{bmatrix}(\hat{y} - y)$$

$$\hat{y} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

Предполагаем, что измерения слабо зашумлены

$$Q = \begin{bmatrix}10^{3} & 0\\ 0 & 10^{3}\end{bmatrix} \qquad R = 10^{-3}$$

Измеряемый выход $y(t)$ и выход наблюдателя $\hat{y}(t)$



Объект (тележка)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ f_2\end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \xi$$

Наблюдатель (фильтр Калмана)

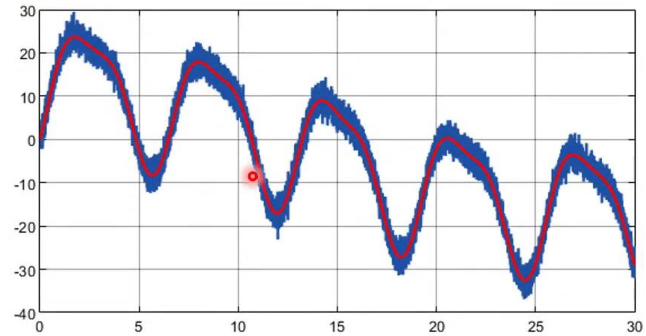
$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}-1001\\ -1000\end{bmatrix}(\hat{y} - y)$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

Предполагаем, что измерения слабо зашумлены

$$Q = \begin{bmatrix}10^3 & 0\\ 0 & 10^3\end{bmatrix} \qquad R = 10^{-3}$$

Реальный выход $Cx(t)$
и выход наблюдателя $\hat{y}(t)$



Объект (тележка)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ f_2\end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \xi$$

Наблюдатель (фильтр Калмана)

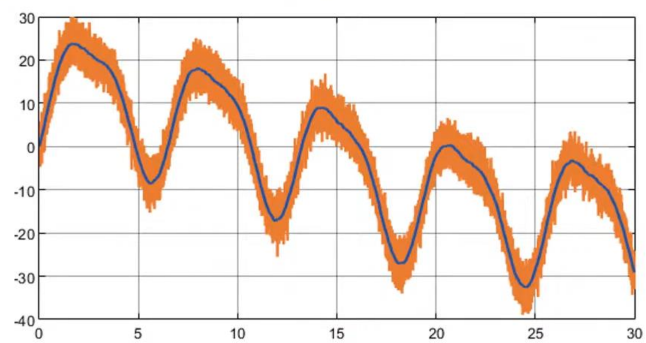
$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}-7.95\\ -31.62\end{bmatrix}(\hat{y} - y)$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

Точно знаем характеристики возмущения и помехи

$$Q = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 200\end{bmatrix} \qquad R = 5$$

Измеряемый выход $y(t)$
и выход наблюдателя $\hat{y}(t)$



Объект (тележка)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ f_2\end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \xi$$

Наблюдатель (фильтр Калмана)

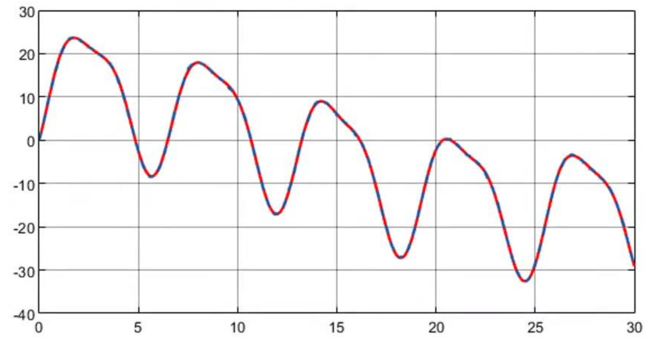
$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}-7.95\\ -31.62\end{bmatrix}(\hat{y} - y)$$

$$\hat{y} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

Точно знаем характеристики возмущения и помехи

$$Q = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 200\end{bmatrix} \qquad R = 5$$

Реальный выход $Cx(t)$ и выход наблюдателя $\hat{y}(t)$



Часто фильтр Калмана рассматривают в дискретном времени

Уравнения из Википедии

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{K}_k[\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}]$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{F}_k^{\mathsf{T}} + \mathbf{Q}_k$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathsf{T}}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{S}_k^{-1}$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\,\mathbf{P}_{k|k-1}$$

Как на них смотреть?

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x})$$

$$L = PC^TR^{-1}$$

Динамическое дискретное уравнение Риккати (в трёх кусках)

Выглядит страшно, потому что это уравнения дискретного фильтра Калмана с динамическим уравнением Риккати

Регулятор + Наблюдатель (Linear Quadratic Gaussian)

Объект	Наблюдатель	Регулятор
$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu + f \\ y = Cx + \xi\end{cases}$	$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x}\end{cases}$	$u = K\hat{x}$

Предполагаем

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} (f^T Q_1^{-1} f + \xi^T R_1^{-1} \xi)dt \to \min}$$

или

$$\boxed{\begin{matrix}\mathbb{E}(ff^T) \sim Q_1 \\ \mathbb{E}(\xi\xi^T) \sim R_1\end{matrix}}$$

Хотим добиться

$$\boxed{J = \int_{0}^{\infty} (x^T Q_2 x + u^T R_2 u)dt \to \min}$$

или

$$\boxed{\mathbb{E}(J) \to \min}$$

Уравнения LQE (фильтра Калмана)

$$\boxed{\begin{cases}AP_1 + P_1A^T + Q_1 - P_1C^T R_1^{-1} C P_1 = 0 \\ L = -P_1 C^T R_1^{-1}\end{cases}}$$

Уравнения LQR

$$\boxed{\begin{cases}A^T P_2 + P_2 A + Q_2 - P_2 B R_2^{-1} B^T P_2 = 0 \\ K = -R_2^{-1} B^T P_2\end{cases}}$$

Separation Principle

$$\boxed{\text{LQG} = \text{LQE} + \text{LQR} = \text{Оптимальная связка}}$$

Это лучшая комбинация регулятора и наблюдателя!
(конечно же, относительно своих собственных критериев)

Несколько MATLAB-команд

`are` `lqr` `lqe` `kalman` `lqg`