Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Отчет по лабораторной работе

«Оценивание или идентификация неизвестных параметров системы»

по дисциплине «Специальные разделы ТАУ»

Выполнили: студенты гр. R3338,

Кирбаба Д.Д., Курчавый В.В.

Преподаватель: Бобцов А.А.,

доктор техн. наук, профессор ФСУ и Р.

Санкт-Петербург, 2023

Цель работы

Реализация и сравнение двух методов для инициализации неизвестных параметров динамической системы.

Теоретическое обоснование применяемых методов

Допустим, наша система задана в виде *линейной регрессионной модели* (LRM):

$$y(t) = \phi^T(t)\theta = \theta_1\phi_1(t) + \theta_2\phi_2(t).$$

Будем искать параметры двумя способами: классический метод наименьших квадратов с градиентным спуском и основанный на нем метод динамического расширения и смешивания регрессора (DREM).

1. Метод градиентного спуска

Введем оценку $\hat{\theta}(t)$, которая выбирается в соответствии со следующим дифференциальным уравнением

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -k\phi(t)\phi^T(t)\theta + k\phi(t)y(t),\ k - \text{коэффициент настройки.}$$

Тогда ошибка оценивания будет в виде $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$, тогда её динамика будет задаваться следующим уравнением

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -k\phi(t)\phi^T(t)\tilde{\theta}.$$

2. DREM

Первый шаг в алгоритме – применение фильтра (в данном случае простейшего) $H(p) = \frac{1}{p+1}$ к векторам $y(t)$ и $\phi(t)$, в результате синтезируется новое уравнение

$$\bar{y}(t) = y(t)\frac{1}{p+1} = \theta_1(t)\frac{1}{p+1}\phi_1 + \ \theta_2(t)\frac{1}{p+1}\phi_2 = \theta_1\bar{\phi}_1(t) + \theta_2\bar{\phi}_2(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(t) = \theta_1\phi_1(t) + \theta_2\phi_2(t) \\ \bar{y}(t) = \theta_1\bar{\phi}_1(t) + \theta_2\bar{\phi}_2(t) \end{cases} \Rightarrow\ Y = M\Theta, \qquad \text{где } Y = \begin{bmatrix} y(t) \\ \bar{y}(t) \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \bar{\phi}_1(t) & \bar{\phi}_2(t) \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow\ \Theta = M^{-1}Y = \frac{adj\{M\}}{\det\{M\}}Y\ \Rightarrow \det\{M\}\,\Theta = adj\{M\}Y, \qquad \text{пусть } \xi = adj\{M\}Y\ \Rightarrow \xi = \det\{M\}\Theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \det\{M\}\,\theta_1 \\ \xi_2 = \det\{M\}\,\theta_2 \end{cases} \Rightarrow \text{(применяя метод 1)} \begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1(t) = -k_1\det\{M\}^2\hat{\theta}_1(t) + k_1\det\{M\}\xi_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2(t) = -k_2\det\{M\}^2\hat{\theta}_2(t) + k_2\det\{M\}\xi_2 \end{cases}$$

Зависимость работы методов от коэффициентов усиления

Пусть задача слудующая:

$$\phi_1 = 3\sin\left(t + \frac{\pi}{12}\right), \phi_2 = 5\cos\left(t + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$y = 5\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\theta_1, \theta_2 - ?$$

1. Метод градиентного спуска

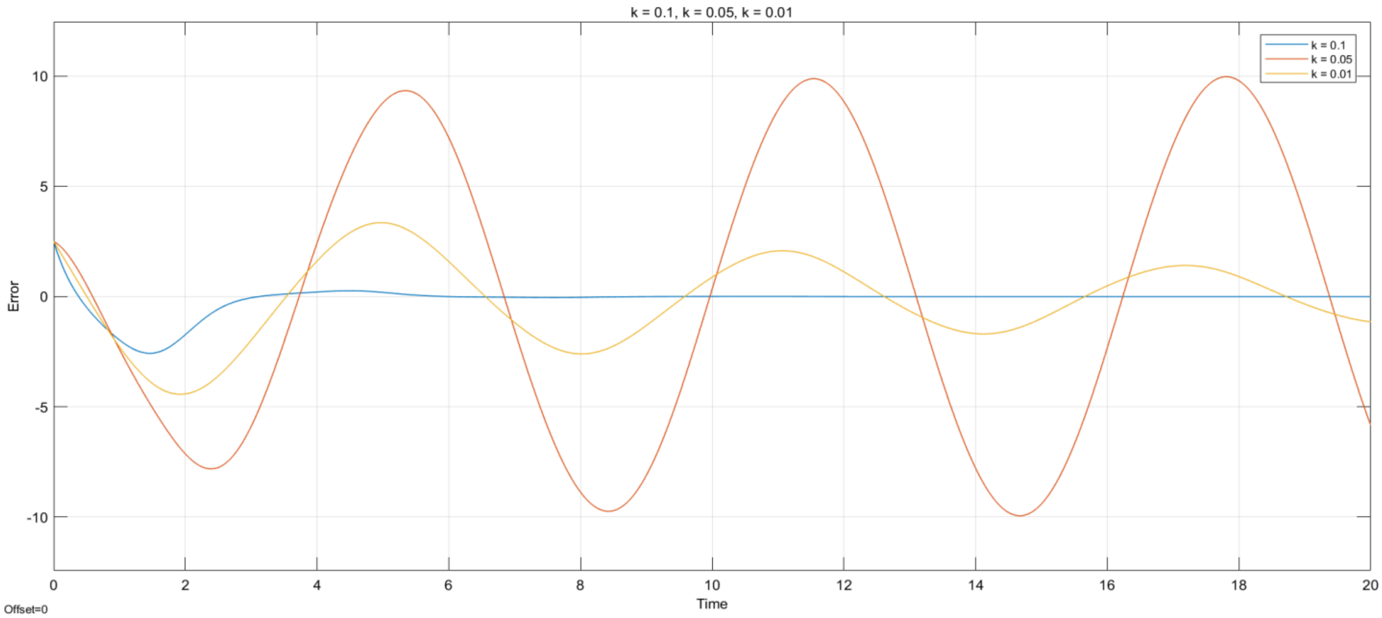

Рисунок 1. Зависимость ошибки от коэффициента усиления

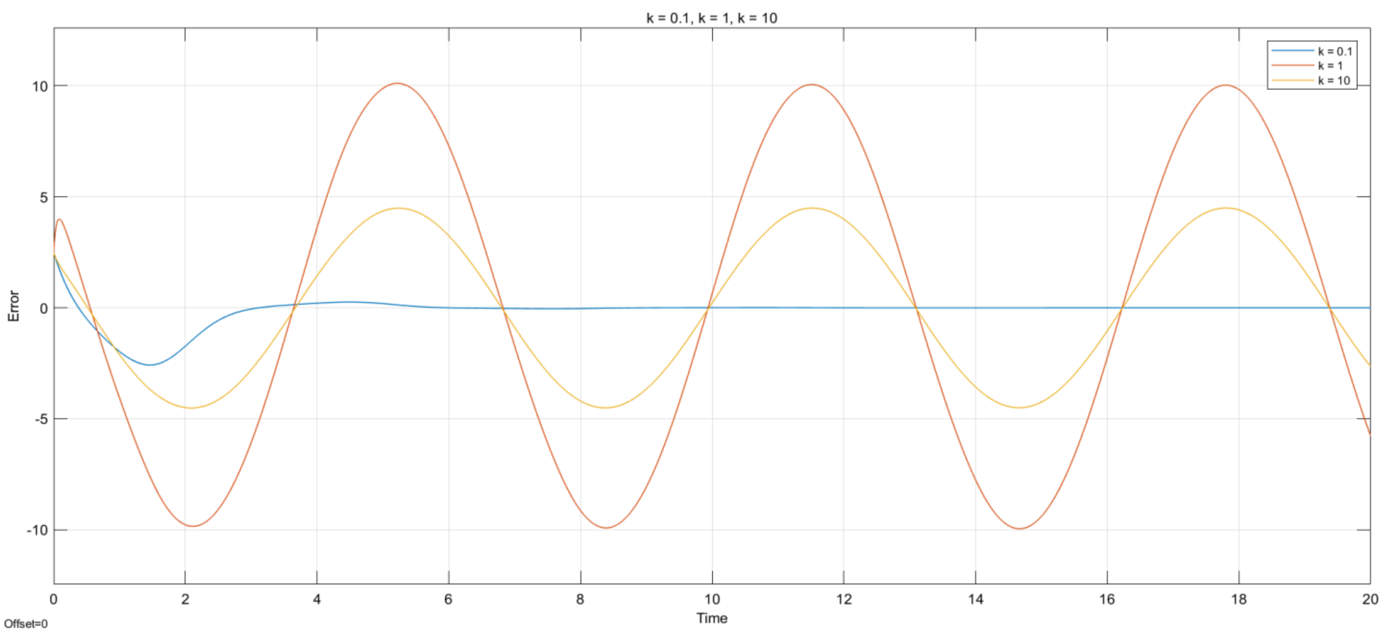

Рисунок 2. Зависимость ошибки от коэффициента усиления

Наилучший результат метод градиентного спуска показал при $k = 0.1$. Если брать k сильно больше 0.1, то будет больше перерегулирование и время переходного процесса тоже увеличится. Если брать k сильно меньше 0.1, то результаты будут неудовлетворитены.

2. **DREM**

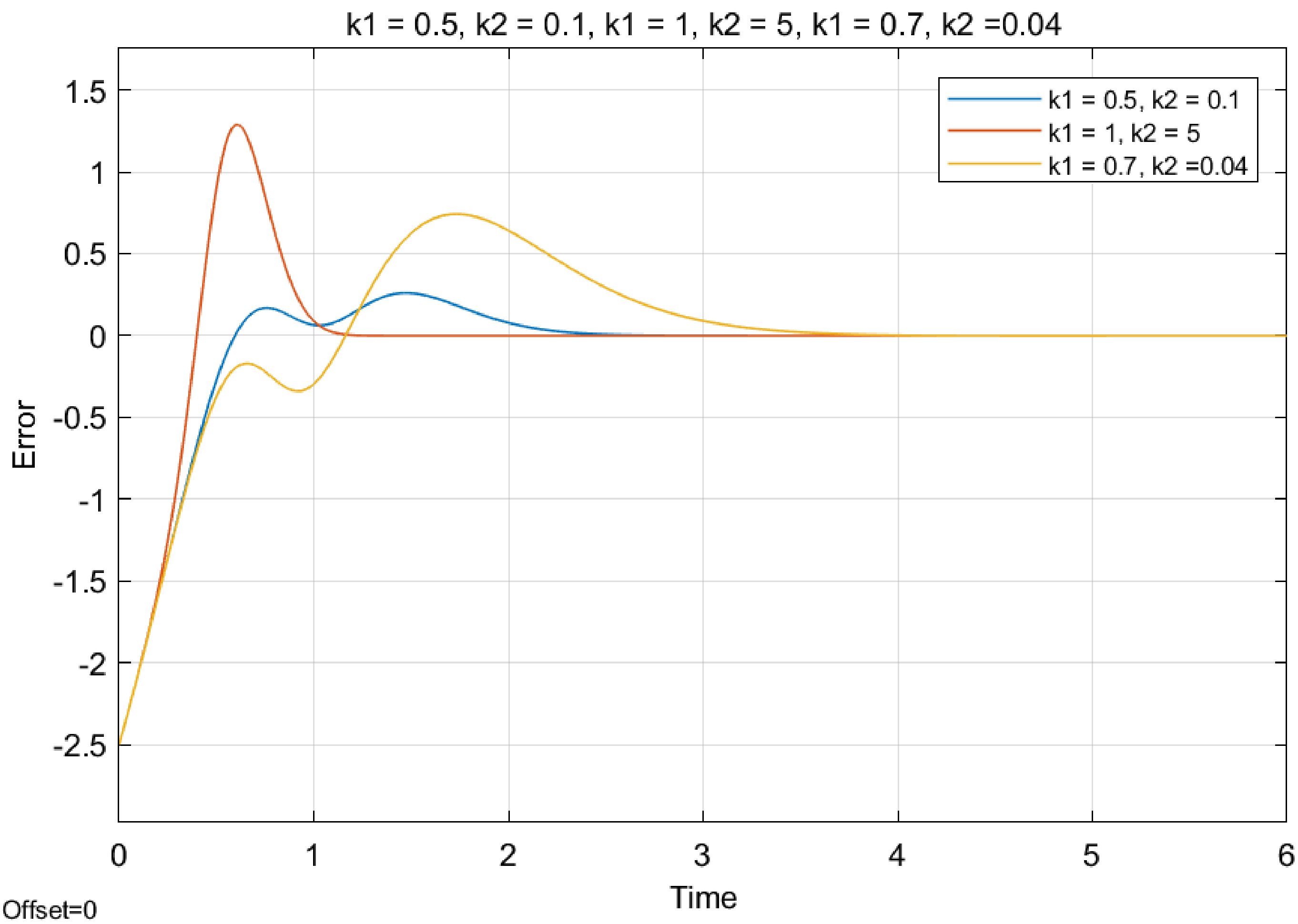

Рисунок 3. Зависимость ошибки от коэффициентов усиления

При комбинации коэффициентов $k_1 = 1$ и $k_2 = 5$, ошибка сходится быстрее, чем при комбинации параметров $k_1 = 0.5$ и $k_2 = 0.1$, но зато больше перерегулирование.

Сравнение методов

Зафиксируем коэффициенты:

$k = 0.2$ и $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$.

1. **Задача 1:**

$\phi_1 = 3\sin\left(t + \frac{\pi}{12}\right)$, $\phi_2 = 5\cos\left(t + \frac{\pi}{8}\right)$

$y = 5\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$

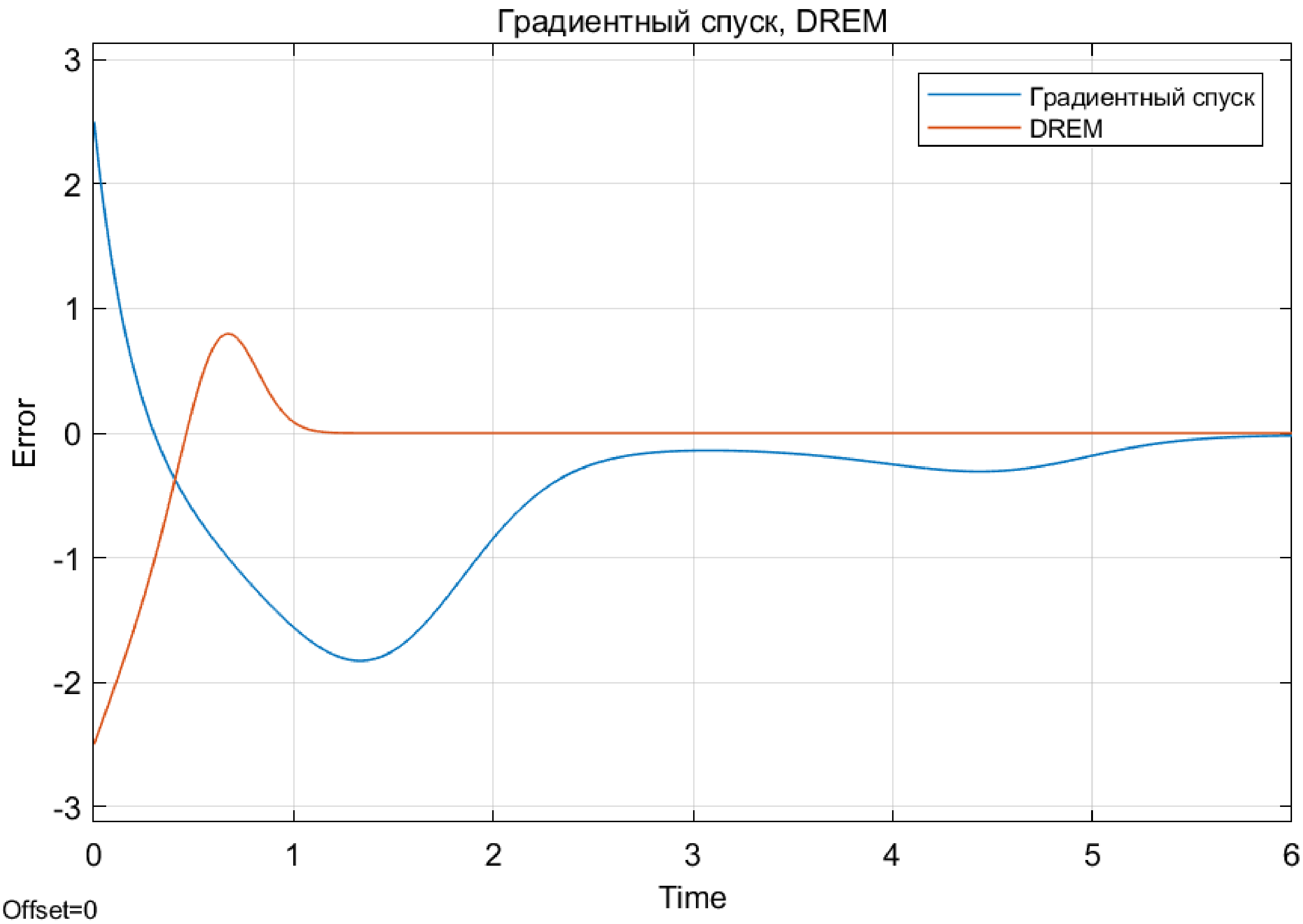

Рисунок 4. Сравненние градиентного спуска и DREM

2. Задача 2:

$\phi_1 = 3\sin\left(10t + \frac{\pi}{12}\right)$, $\phi_2 = 8\,sin\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$

$y = 7\cos\,(10t + \dfrac{\pi}{3})$

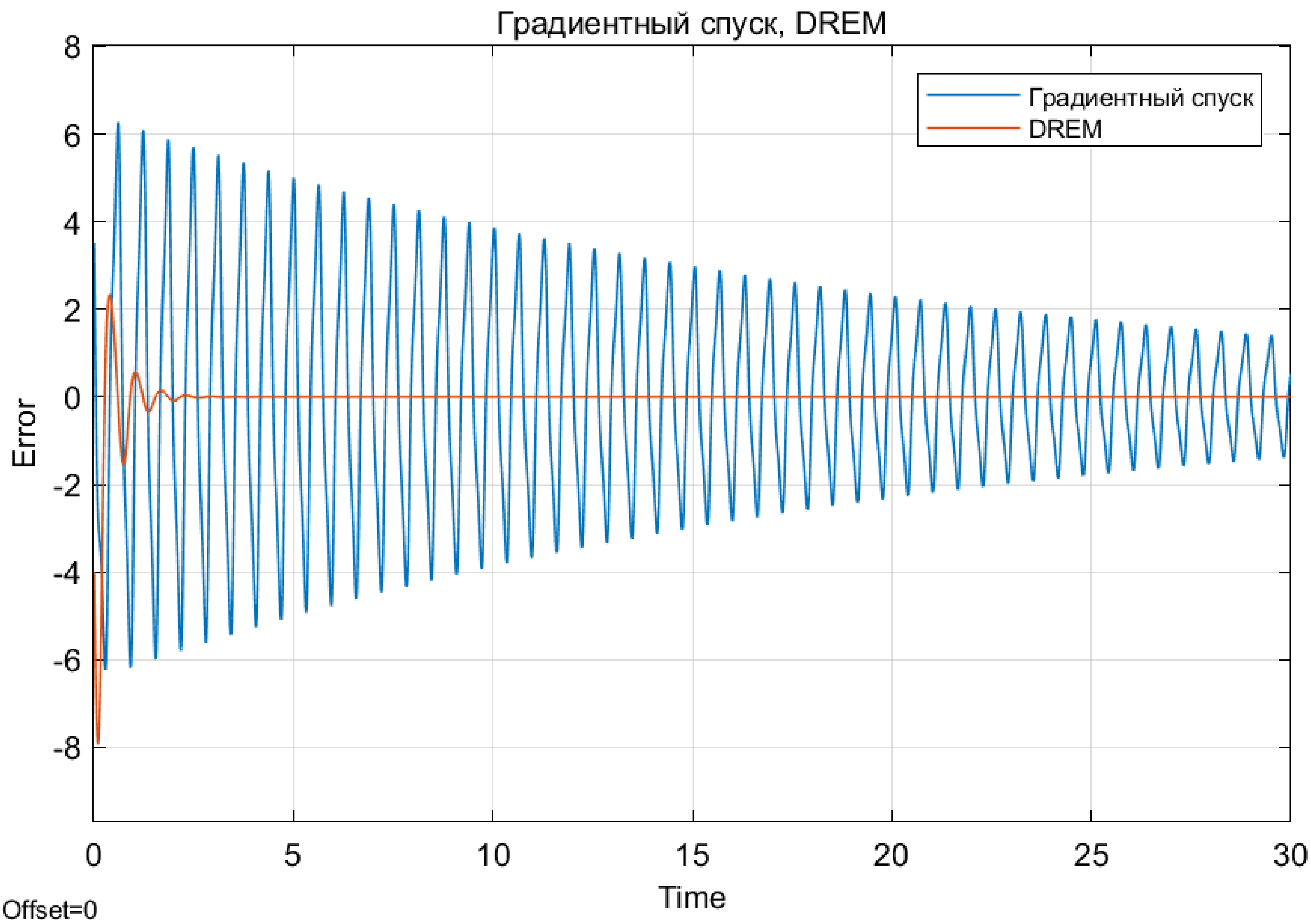

Рисунок 5. Сравненние градиентного спуска и DREM

В данном случае, DREM работает намного лучше градиентного спуска. Ошибка быстрее сходится к нулю в десятки разы.

3. **Задача 3:**

$\phi_1 = 3\sin\left(7t + \frac{\pi}{12}\right), \phi_2 = 0.2\, sin\left(7t + \frac{\pi}{6}\right)$

$y = 7\cos\left(7t + \frac{\pi}{3}\right)$

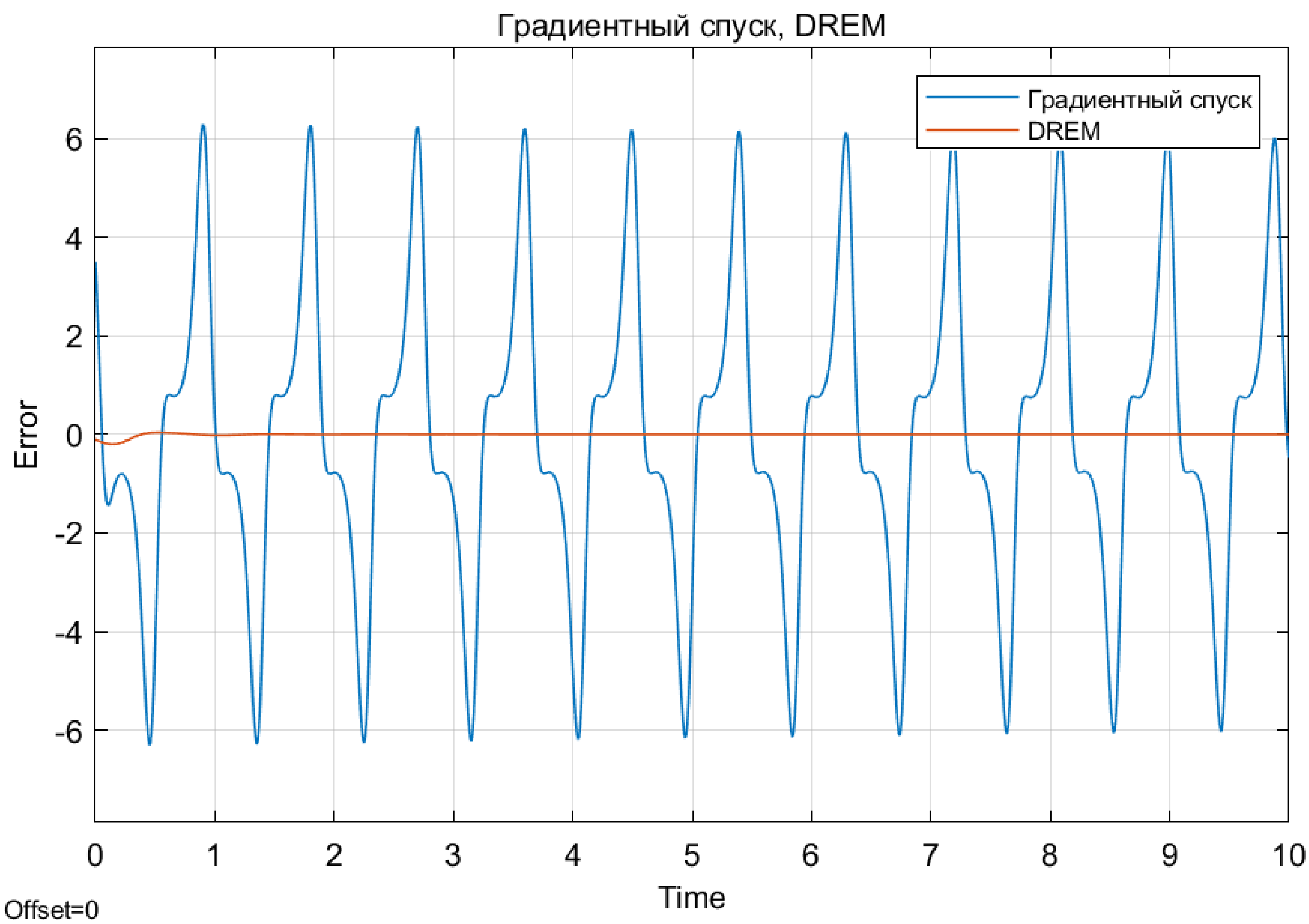

Рисунок 6. Сравнение градиентного спуска и DREM

Выводы

В большинстве случаем DREM устраняет ошибку гораздо быстрее, чем градиентный спуск, помимо этого, используя DREM часто можно добиться монотонной сходимости за счет редактирования коэффициентов, чего нельзя в градиентном спуске.