Синтез регуляторов с помощью матричных неравенств

Знакоопределённые матрицы

Положительно определённые матрицы

Про симметричную матрицу $M = M^T$ говорят, что она положительно определена, если для всех $v \neq 0$ выполнено

$$v^T M v > 0$$

Примеры

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Положительно определена}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 2y^2 > 0 \quad \text{при} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Примеры

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{Положительно определена}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 - 2xy + 3y^2 = x^2 + (x - y)^2 + 2y^2 > 0$$

$$\text{при} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Если матрица симметрична, то она имеет действительные собственные числа.

Про симметричную матрицу $M = M^T$ говорят, что она

Положительно определена $M \succ 0$	Положительно полуопределена $M \succcurlyeq 0$	Отрицательно определена $M \prec 0$	Отрицательно полуопределена $M \preccurlyeq 0$

если для всех $v \neq 0$ выполнено

$v^T M v > 0$	$v^T M v \geq 0$	$v^T M v < 0$	$v^T M v \leq 0$

или (равносильное условие)

Все $\lambda > 0$	Все $\lambda \geq 0$	Все $\lambda < 0$	Все $\lambda \leq 0$

Пример: положительно определённая матрица

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 2y^2$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} > 0$$

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \{1, 2\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \succ 0$$

Пример: положительно полуопределённая матрица

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq 0 \qquad \begin{bmatrix} 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{0, 2\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \succ 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

Пример: отрицательно определённая матрица

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -3x^2 + 4xy - 3y^2 = -x^2 - 2(x-y)^2 - y^2$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} < 0 \quad \text{при} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right) = \{-5, -1\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \succ 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \qquad \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \prec 0$$

Пример: незнакоопределённая матрица

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4xy + y^2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 < 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 > 0$$

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{-1, 3\}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \succ 0$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \prec 0$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ Ни то, ни сё!

Критерий Сильвестра

Критерий положительной определённости

$$M \succ 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Все угловые миноры} > 0$$

Пояснение

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{bmatrix} \succ 0 \qquad\qquad a > 0$$

Критерий положительной определённости

$M \succ 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Все угловые миноры > 0

Пояснение

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{bmatrix} \succ 0 \qquad \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} > 0$$

Критерий положительной определённости

$M \succ 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Все угловые миноры > 0

Пояснение

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{bmatrix} \succ 0 \qquad \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{bmatrix} > 0$$

Критерий положительной определённости

$M \succ 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Все угловые миноры > 0

Пояснение

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{bmatrix} \succ 0 \qquad \det\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{bmatrix} > 0$$

Критерий отрицательной определённости

$M \prec 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Знаки угловых миноров чередуются и первый < 0

Пояснение

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{bmatrix} \prec 0 \qquad a < 0$$

Критерий отрицательной определённости

$M \prec 0 \quad \Leftrightarrow$ Знаки угловых миноров чередуются и первый < 0

Пояснение

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{bmatrix} \prec 0 \qquad \det\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} > 0$$

Критерий отрицательной определённости

$M \prec 0 \quad \Leftrightarrow$ Знаки угловых миноров чередуются и первый < 0

Пояснение

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{bmatrix} \prec 0 \qquad \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{bmatrix} < 0$$

Критерий отрицательной определённости

$M \prec 0 \quad \Leftrightarrow$ Знаки угловых миноров чередуются и первый < 0

Пояснение

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{bmatrix} \prec 0 \qquad \det\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{bmatrix} > 0$$

Линейные матричные неравенства (LMI)

Скалярный пример

$$\begin{bmatrix} x+y & 2x \\ 2x & 3 \end{bmatrix} \succ 0$$

Матричный пример

$$A^T X + X^T A + Y \preccurlyeq 0$$

Множество решений – всегда выпуклая область, поэтому компьютеру с ними легко

Нелинейные матричные неравенства

Скалярный пример

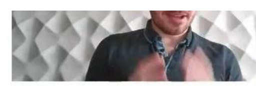
$$\begin{bmatrix} 2x & xy \\ xy & y^{-1} \end{bmatrix} \succ 0$$

Матричный пример

$$A + XBY + Y^T B^T X^T \preccurlyeq 0$$

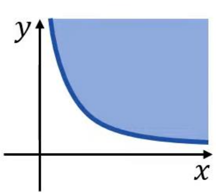
Множество решений может быть невыпуклой и несвязной областью, поэтому компьютеру с ними трудно

Примеры областей, задаваемых с помощью линейных матричных неравенств (LMI)



$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

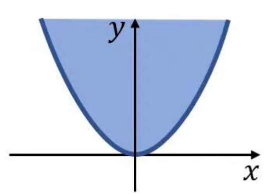
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ xy - 1 \geq 0 \end{cases}$$



$$y \geq \frac{1}{x}$$

$$\begin{bmatrix} y & x \\ x & 1 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

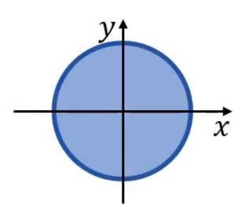
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y - x^2 \geq 0 \end{cases}$$



$$y \geq x^2$$

$$\begin{bmatrix} 1-x & y \\ y & 1+x \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ (1-x)(1+x) - y^2 \geq 0 \end{cases}$$



$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Система

$$\dot{x} = f(x) \qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Критерий устойчивости

Если существует дифференцируемая $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что

- $\begin{cases} V(0) = 0 \\ V(x) > 0 \ (\text{при } x \neq 0) \end{cases}$
- $\begin{cases} \dot{V}(0) = 0 \\ \dot{V}(x) < 0 \ (\text{при } x \neq 0) \end{cases}$

то точка равновесия $x = 0$ асимптотически устойчива

Линейная система

$$\dot{x} = Ax \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Рассмотрим в качестве функции Ляпунова квадратичную форму

$$V = x^T Q x$$

Возьмём от неё производную по времени

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T Q x + x^T Q \dot{x} \\ &= (Ax)^T Q x + x^T Q (Ax) \\ &= x^T A^T Q x + x^T Q A x \\ &= x^T (A^T Q + QA) x \end{aligned}$$

Линейная система

$$\dot{x} = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Критерий устойчивости

Если существует матрица $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такая, что

- $\{Q \succ 0,$
- $\{A^T Q + QA \prec 0,$

то система асимптотически устойчива

Неравенство Ляпунова

Линейная система

$$\dot{x} = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Неравенство Ляпунова

$$A^T Q + QA \prec 0$$

Если система асимптотически устойчива, то имеет бесконечно много решений $Q \succ 0$

Является ли это матричное неравенство линейным?

Да, это LMI

Уравнение Ляпунова

$$A^T Q + QA = -R$$

Если система асимптотически устойчива, то для любой $R \succ 0$ имеет единственное решение $Q \succ 0$

Пример численного решения уравнения Ляпунова

Линейная система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Выбираем $R \succ 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \succ 0$$

Уравнение Ляпунова

$$A^T Q + QA = -R$$

$$A^T\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix} A = -R$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -R$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 \\ q_1 - q_2 & q_2 - q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q_1 & q_1 - q_2 \\ -q_2 & q_2 - q_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2q_1 & q_1 - 2q_2 \\ q_1 - 2q_2 & 2q_2 - 2q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \succ 0$$

Решение уравнения (неравенства) Ляпунова

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \succ 0$$

$$A^TQ + QA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \prec 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \succ 0$$

$$A^TQ + QA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \prec 0$$

$\Rightarrow$ Система асимптотически устойчива

Решение уравнения (неравенства) Ляпунова

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \succ 0 \qquad V = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 > 0$$

$$A^TQ + QA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \prec 0 \qquad \dot{V} = -2x_1^2 - 3x_2^2 < 0$$

Аналитическое решение уравнения Ляпунова

Уравнение Ляпунова

$$A^TQ + QA = -R, \qquad R \succ 0$$

Теорема о решении уравнения Ляпунова

Если A гурвицева (все собственные числа отрицательны), то решением уравнения Ляпунова является матрица

$$Q = \int_0^\infty e^{A^Tt} R e^{At} dt$$

Теорема о решении уравнения Ляпунова

$$A^TQ + QA = -R, \quad R \succ 0 \quad \Leftarrow \quad Q = \int_0^\infty e^{A^Tt} R e^{At} dt$$

Введём обозначение

$$S(t) = e^{A^Tt} R e^{At}$$

$$\Updownarrow$$

$$Q = \int_0^\infty S(t) dt$$

Доказательство

$$\dot{S}(t) = A^T e^{A^Tt} R e^{At} + e^{A^Tt} R e^{At} A$$

Доказательство

Введём обозначение

$$S(t) = e^{A^T t} R e^{At}$$

$$\Updownarrow$$

$$Q = \int_0^\infty S(t)dt$$

$$\dot{S}(t) = A^T S(t) + S(t)A$$

Доказательство

Введём обозначение

$$S(t) = e^{A^T t} R e^{At}$$

$$\Updownarrow$$

$$Q = \int_0^\infty S(t)dt$$

$$\dot{S}(t) = A^T S(t) + S(t)A$$

$$\int_0^\infty \dot{S}(t)dt = A^T\left(\int_0^\infty S(t)dt\right) + \left(\int_0^\infty S(t)dt\right)A$$

$$S(t)\Big|_0^\infty = A^T Q + QA$$

Доказательство

Введём обозначение

$$S(t) = e^{A^T t} R e^{At}$$

$$\Updownarrow$$

$$Q = \int_0^\infty S(t)dt$$

$$\dot{S}(t) = A^T S(t) + S(t)A$$

$$\int_0^\infty \dot{S}(t)dt = A^T\left(\int_0^\infty S(t)dt\right) + \left(\int_0^\infty S(t)dt\right)A$$

$$S(\infty) - S(0) = A^T Q + QA$$

Доказательство

Введём обозначение

$$S(t) = e^{A^T t} R e^{At}$$

$$\Updownarrow$$

$$Q = \int_0^\infty S(t)dt$$

$$\dot{S}(t) = A^T S(t) + S(t)A$$

$$\int_0^\infty \dot{S}(t)dt = A^T\left(\int_0^\infty S(t)dt\right) + \left(\int_0^\infty S(t)dt\right)A$$

A гурвицева, поэтому это 0 → $S(\infty) - S(0) = A^T Q + QA$

Доказательство

Введём обозначение

$$S(t) = e^{A^T t} R e^{At}$$

$$\Updownarrow$$

$$Q = \int_0^\infty S(t)dt$$

$$\dot{S}(t) = A^T S(t) + S(t)A$$

$$\int_0^\infty \dot{S}(t)dt = A^T\left(\int_0^\infty S(t)dt\right) + \left(\int_0^\infty S(t)dt\right)A$$

$$A^T Q + QA = -S(0)$$

Доказательство

Введём обозначение

$$S(t) = e^{A^T t} R e^{At}$$

$$\Updownarrow$$

$$Q = \int_0^\infty S(t)dt$$

$$\dot{S}(t) = A^T S(t) + S(t)A$$

$$\int_0^\infty \dot{S}(t)dt = A^T\left(\int_0^\infty S(t)dt\right) + \left(\int_0^\infty S(t)dt\right)A$$

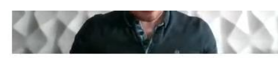
$$A^T Q + QA = -R$$

Пример аналитического решения уравнения Ляпунова

Линейная система

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Выбираем $R \succ 0$



$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix} \succ 0$$

Уравнение Ляпунова

$$A^T Q + QA = -R$$

Его решение

$$Q = \int_0^\infty e^{A^T t} R e^{At} dt$$

$$Q = \int_0^\infty \begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ te^{-t} & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & te^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix} dt$$

$$Q = \int_0^\infty \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & 2te^{-2t} \\ 2te^{-2t} & 3e^{-2t} + 2t^2e^{-2t} \end{bmatrix} dt$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

Два слова про Грамианы

Если все собственные числа матрицы A отрицательны, то существуют…

Грамиан управляемости

$$\boxed{P = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt}$$

Грамиан наблюдаемости

$$\boxed{Q = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt}$$

Что-то мне это всё напоминает!

Грамиан управляемости

$$\boxed{P = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt}$$

$\downarrow$

Решение уравнения Ляпунова

$$AP + PA^T + BB^T = 0$$

(A, B) управляема $\Leftrightarrow$ $P \succ 0$

Грамиан наблюдаемости

$$\boxed{Q = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt}$$

$\downarrow$

Решение уравнения Ляпунова

$$A^T Q + QA + C^T C = 0$$

(C, A) наблюдаема $\Leftrightarrow$ $Q \succ 0$

Асимптотическая устойчивость

При всех начальных условиях $x(0)$ выполнено $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$

Экспоненциальная устойчивость

Существуют положительные числа c и α такие, что при всех начальных условиях $x(0)$ выполнено $\|x(t)\| \le ce^{-\alpha t}\|x(0)\|$

Для линейных стационарных систем
оба типа устойчивости эквивалентны…

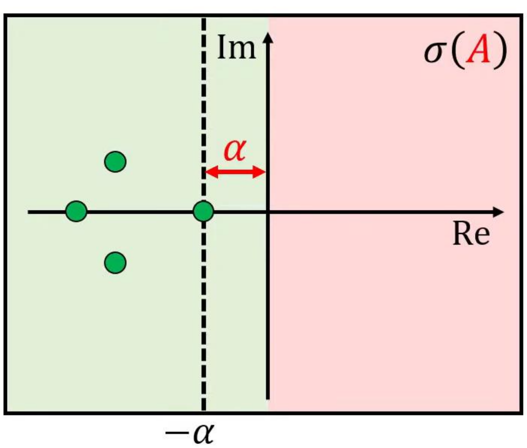
… но в определении экспоненциальной устойчивости
дополнительно упоминается скорость сходимости

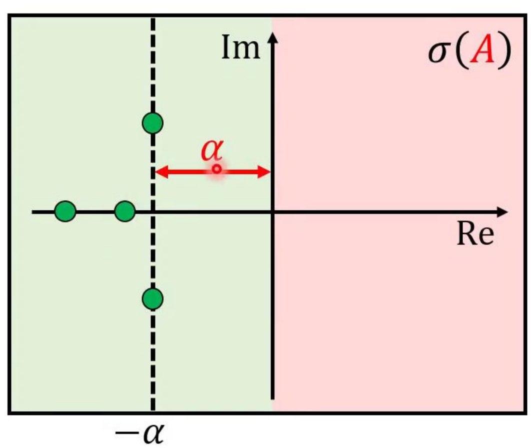
Экспоненциальная устойчивость

Существуют положительные числа c и α такие, что при всех начальных условиях $x(0)$ выполнено $\|x(t)\| \le ce^{-\alpha t}\|x(0)\|$

Наибольшее из таких чисел α называется
степенью устойчивости системы

Степень устойчивости (устойчивой системы) – положительное число, равное наименьшему из расстояний от собственных чисел до мнимой оси





Линейная система

$$\dot{x} = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Критерий экспоненциальной устойчивости

Если существуют матрица $Q \succ 0$ и число $\alpha > 0$ такие, что

$$A^T Q + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0,$$

то система асимптотически устойчива и существует c такая, что для любых начальных условий $x(0)$ выполнено $\|x(t)\| \le ce^{-\alpha t}\|x(0)\|$

Неравенство Ляпунова для экспоненциальной устойчивости

Линейная система

$$\dot{x} = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

LMI-критерий

$$A^T Q + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0$$

при всех x

Доказательство

$$x^T(A^T Q + QA + 2\alpha Q)x \le 0$$

$$x^T A^T Q x + x^T Q A x + 2\alpha x^T Q x \le 0$$

$$\dot{x}^T Q x + x^T Q \dot{x} + 2\alpha x^T Q x \le 0$$

Функция Ляпунова $\quad V(t) = x^T(t) Q x(t)$

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \le 0$$

Линейная система

$$\dot{x} = Ax \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

LMI-критерий

$$A^TQ + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0$$

$$V(t) = x^T(t)Qx(t)$$

Доказательство

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \le 0$$

Вспомогательный математический факт #1

Если бы было уравнение, то его решение было бы таким

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V(t) = e^{-2\alpha t}V(0)$$

У нас неравенство, поэтому $V(t) \le e^{-2\alpha t}V(0)$

Вспомогательный математический факт #2

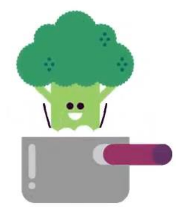
Если $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ – наименьшее и наибольшее собственные числа симметричной матрицы Q, то верны неравенства

$$\lambda_{\min}x^Tx \le x^TQx \le \lambda_{\max}x^Tx$$

Вспомогательный математический факт #2

Если $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ – наименьшее и наибольшее собственные числа симметричной матрицы Q, то верны неравенства

$$\lambda_{\min}\|x\|^2 \le x^TQx \le \lambda_{\max}\|x\|^2$$



$$\lambda_{\min}\|x(t)\|^2 \le x^T(t)Qx(t)$$

$$\|x(t)\|^2 \le \frac{1}{\lambda_{\min}}x^T(t)Qx(t)$$

Линейная система

$$\dot{x} = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

LMI-критерий

$$A^T Q + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0$$

$V(t) = x^T(t)Qx(t)$

Доказательство

$$\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \le 0$$

$$V(t) \le e^{-2\alpha t} V(0)$$

$$\|x(t)\|^2 \le \frac{1}{\lambda_{\min}} \underbrace{\boxed{x^T(t)Qx(t)}}_{V(t)} \le \frac{1}{\lambda_{\min}} e^{-2\alpha t} \underbrace{\boxed{x^T(0)Qx(0)}}_{V(0)}$$

$$\|x(t)\|^2 \le \frac{1}{\lambda_{\min}} \underbrace{\boxed{x^T(t)Qx(t)}}_{V(t)} \le \frac{1}{\lambda_{\min}} e^{-2\alpha t} \underbrace{\boxed{x^T(0)Qx(0)}}_{V(0)} \le \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} e^{-2\alpha t} \|x(0)\|^2$$

$$\|x(t)\|^2 \le \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} e^{-2\alpha t} \|x(0)\|^2$$

Линейная система

$$\dot{x} = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

LMI-критерий

$$A^T Q + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0$$

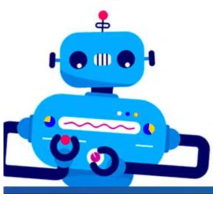
λ – собственные числа матрицы Q

Доказательство

$$\|x(t)\|^2 \le \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} e^{-2\alpha t} \|x(0)\|^2$$

$$\sqrt{\|x(t)\|^2} \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} e^{-2\alpha t} \|x(0)\|^2}$$

$$\|x(t)\| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} e^{-\alpha t} \|x(0)\|$$



Линейная система

$$\dot{x} = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

LMI-критерий

$$A^T Q + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0$$

λ – собственные числа матрицы Q

Доказательство

$$\|x(t)\| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} e^{-\alpha t} \|x(0)\|$$

Получилось определение экспоненциальной устойчивости

$$\|x(t)\| \le c e^{-\alpha t} \|x(0)\|$$

Что и требовалось доказать!

Двойственные матричные неравенства

Асимптотическая устойчивость

$$A^T Q + QA \prec 0, \quad Q \succ 0$$

Экспоненциальная устойчивость

$$A^T Q + QA + 2\alpha Q \preccurlyeq 0, \quad Q \succ 0$$

Домножим на $P = Q^{-1} \succ 0$ с двух сторон

$$PA^T \cancel{Q}P + P\cancel{Q}AP \prec 0$$

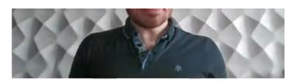
$$PA^T \cancel{Q}P + P\cancel{Q}AP + 2\alpha P\cancel{Q}P \prec 0$$

$$PA^T + AP \prec 0, \quad P \succ 0$$

$$PA^T + AP + 2\alpha P \preccurlyeq 0, \quad P \succ 0$$

Верхние и нижние неравенства эквивалентны

Пример решения матричных неравенств в cvx



```
% Plant parameters

A = [-86  -56  -28;
      211  144  78;
     -167 -119  -68];

% Eigenvalues

eig(A)
```

```
-1.7452 + 8.2603i
-1.7452 - 8.2603i
-6.5096 + 0.0000i
```

```
% Desired decay rate

a = 1.7;
```

← С этим значением получилось

```
% Lyapunov inequality

cvx_begin sdp
variable Q(3,3)
Q > 0.0001*eye(3);
A'*Q+Q*A+2*a*Q <= 0;
cvx_end

Q
```

```
Status: Solved
Q =

    2.3418    1.7269    1.0009
    1.7269    1.3844    0.8848
    1.0009    0.8848    0.6270
```

```
% Dual Lyapunov inequality

cvx_begin sdp
variable P(3,3)
P > 0.0001*eye(3);
P*A'+A*P+2*a*P <= 0;
cvx_end

P
```

```
Status: Solved
P =

    0.4479   -1.0895    0.8373
   -1.0895    2.6895   -2.0842
    0.8373   -2.0842    1.6333
```

```
% Plant parameters

A = [-86  -56  -28;
      211  144  78;
     -167 -119  -68];

% Eigenvalues

eig(A)
```

```
-1.7452 + 8.2603i
-1.7452 - 8.2603i
-6.5096 + 0.0000i
```

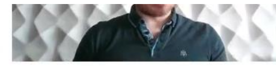
```
% Desired decay rate

a = 1.8;
```

```
% Lyapunov inequality

cvx_begin sdp
variable Q(3,3)
Q > 0.0001*eye(3);
A'*Q+Q*A+2*a*Q <= 0;
cvx_end

Q
```

```
Status: Inaccurate/Infeasible

Q =

   NaN   NaN   NaN
   NaN   NaN   NaN
   NaN   NaN   NaN
```

```
% Dual Lyapunov inequality

cvx_begin sdp
variable P(3,3)
P > 0.0001*eye(3);
P*A'+A*P+2*a*P <= 0;
cvx_end

P
```

```
Status: Inaccurate/Infeasible

P =

   NaN   NaN   NaN
   NaN   NaN   NaN
   NaN   NaN   NaN
```



С этим значением решения не нашлось Почему?


```
% Plant parameters

A = [-86  -56  -28;
      211  144  78;
     -167 -119  -68];

% Eigenvalues

eig(A)
```

```
-1.7452 + 8.2603i
-1.7452 - 8.2603i
-6.5096 + 0.0000i
```

```
% Desired decay rate

a = 1.8;
```

```
% Lyapunov inequality

cvx_begin sdp
variable Q(3,3)
Q > 0.0001*eye(3);
A'*Q+Q*A+2*a*Q <= 0;
cvx_end

Q
```

```
Status: Inaccurate/Infeasible

Q =

   NaN   NaN   NaN
   NaN   NaN   NaN
   NaN   NaN   NaN
```

```
% Dual Lyapunov inequality

cvx_begin sdp
variable P(3,3)
P > 0.0001*eye(3);
P*A'+A*P+2*a*P <= 0;
cvx_end

P
```

```
Status: Inaccurate/Infeasible

P =

   NaN   NaN   NaN
   NaN   NaN   NaN
   NaN   NaN   NaN
```


Потому что степень устойчивости системы $\alpha \approx 1.7452$

Как правильно думать о матричных неравенствах?

Если система устойчива, то матрица A
в некотором смысле отрицательна

Однако запись $A \prec 0$ обычно не имеет смысла,
потому что матрица A не симметричная

$$\underbrace{A^T Q + QA}_{\text{Симметричная}} \prec 0$$

Симметричная Положительная

$$q > 0,\quad 2qa < 0 \quad\Downarrow\quad a < 0$$

Фактически мы констатируем «отрицательность» матрицы A

$$\underbrace{A^T Q + QA}_{\text{Отрицательная}} + 2\alpha Q \preccurlyeq 0$$

Отрицательная Положительная

$$2qa + 2q\alpha \le 0 \quad\Downarrow\quad a \le -\alpha$$

Матрица A «отрицательна» с запасом!

Синтез регуляторов с заданной степенью устойчивости

Объект	Регулятор	Замкнутая система
$\dot{x} = Ax + Bu$	$u = Kx$	$\dot{x} = (A + BK)x$

Неравенство Ляпунова для замкнутой системы

$$P(A + BK)^T + (A + BK)P + 2\alpha P \prec 0$$

$$PA^T + AP + 2\alpha P + PK^T B^T + BKP \prec 0$$

Это линейное матричное неравенство?

Неизвестные матрицы P и K перемножены $\Rightarrow$ неравенство нелинейное

Введём замену $Y = KP$

$$PA^T + AP + 2\alpha P + PK^T B^T + BKP \prec 0$$

$$Y = KP$$

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \prec 0$$

Это линейное матричное неравенство?

Да, это LMI!

Неравенства для синтеза регулятора

$$\boxed{P \succ 0, \quad PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \prec 0}$$

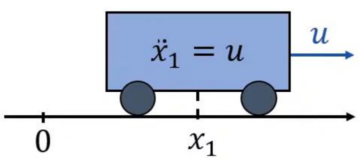
Порядок действий

1. Выбрать желаемую степень устойчивости α

2. Решить неравенства, найти P и Y

3. Вычислить матрицу регулятора как $K = YP^{-1}$

Пример синтеза регулятора с заданной устойчивостью



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

```
% Plant parameters

 A = [0 1;
      0 0];

 B = [0;
      1];

% Desired decay rate

a = 0.5;
```

```
% Solving LMI

cvx_begin sdp
variable P(2,2)
variable Y(1,2)
P > 0.0001*eye(2);
P*A'+A*P+2*a*P+Y'*B'+B*Y <= 0;
cvx_end

% Finding controller matrix

K = Y*inv(P)
```

Результат

$$K = [-2.55 \quad -1.95]$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma(A + BK) = \begin{Bmatrix} -0.97 + 1.27i, \\ -0.97 - 1.27i \end{Bmatrix}$$

```
% Plant parameters

A = [0 1;
     0 0];

B = [0;
     1];

% Desired decay rate

a = 2;
```

```
% Solving LMI

cvx_begin sdp
variable P(2,2)
variable Y(1,2)
P > 0.0001*eye(2);
P*A'+A*P+2*a*P+Y'*B'+B*Y <= 0;
cvx_end

% Finding controller matrix

K = Y*inv(P)
```

Результат

$$K = [-71.7 \quad -19]$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma(A + BK) = \begin{Bmatrix} -5.19, \\ -13.83 \end{Bmatrix}$$

```
% Plant parameters

A = [0 1;
     0 0];

B = [0;
     1];

% Desired decay rate

a = 10;
```

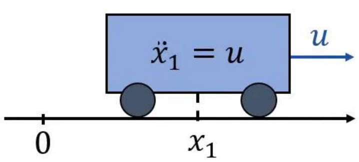
```
% Solving LMI

cvx_begin sdp
variable P(2,2)
variable Y(1,2)
P > 0.0001*eye(2);
P*A'+A*P+2*a*P+Y'*B'+B*Y <= 0;
cvx_end

% Finding controller matrix

K = Y*inv(P)
```

Результат

$$K = [-354 \quad -27.9]$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma(A + BK) = \begin{Bmatrix} -13.93 + 12.66i, \\ -13.93 - 12.66i \end{Bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$x_1(0) = 1 \quad x_2(0) = 0$

Тележка с тремя различными регуляторами

$$K = [-2.55 \quad -1.95]$$

$$K = [-71.7 \quad -19]$$

$$K = [-354 \quad -27.9]$$

Графики переходных процессов

Тележка с тремя различными регуляторами

$$K = [-2.55 \quad -1.95]$$

$$K = [-71.7 \quad -19]$$

$$K = [-354 \quad -27.9]$$

Матрица K может получиться **большой**, ведь её ничто не ограничивает…

Как мне добавить ограничение на управление?

Синтез регуляторов при ограничении на управлении

Объект	Начальные условия	Регулятор	Ограничение
$\dot{x} = Ax + Bu$	$x(0) = x_0$	$u = Kx$	$\lVert u(t) \rVert \le \mu$

Неравенства для синтеза регулятора

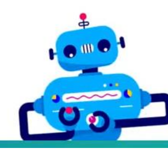
$$P \succ 0, \quad PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} \succ 0$$

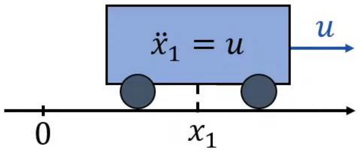
Это можно вывести, но мы не будем!

Э?

Use Schur Complement!



Регулятор $K = YP^{-1}$ гарантирует $\lVert u(t) \rVert \le \mu$ при $x(0) = x_0$



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad x_0 = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

```
% Plant parameters

A = [0 1; 0 0];
B = [0; 1];
x0 = [1; 0];

% Desired decay rate

a = 2;

% Control constraint

mu = 15;
```

$\mu = 15$

```
% Solving LMI

cvx_begin sdp
variable P(2,2)
variable Y(1,2)
P > 0.0001*eye(2);
P*A'+A*P+2*a*P+Y'*B'+B*Y <= 0;
[P x0;
 x0' 1] > 0;
[P Y';
 Y mu^2] > 0;
cvx_end
```

Близко!

```
% Finding controller matrix

K = Y*inv(P)
```

Результат

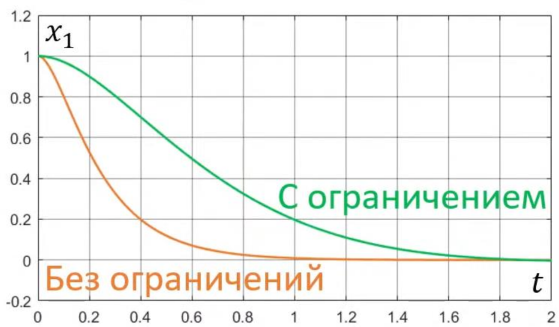
$$K = [-6.74 \quad -4.42]$$

$$\Downarrow$$

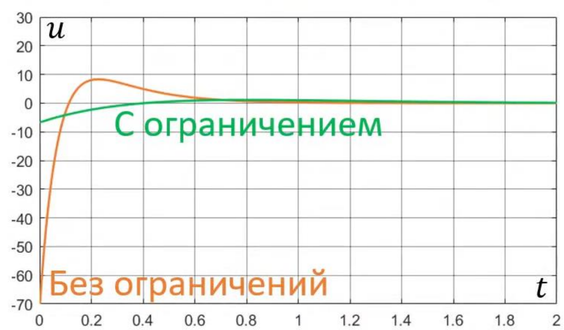
$$\sigma(A + BK) = \begin{Bmatrix}-2.21 + 1.36i,\\ -2.21 - 1.36i\end{Bmatrix}$$

Результаты моделирования

Координата тележки



Управляющее воздействие




```
% Plant parameters

A = [0 1; 0 0];
B = [0; 1];
x0 = [1; 0];

% Desired decay rate

a = 2;

% Control constraint

mu = 5;
```

$\mu = 5$

```
% Solving LMI

cvx_begin sdp
variable P(2,2)
variable Y(1,2)
P > 0.0001*eye(2);
P*A'+A*P+2*a*P+Y'*B'+B*Y <= 0;
[P x0;
 x0' 1] > 0;
[P Y';
 Y mu^2] > 0;
cvx_end
```

Результат

```
Status: Infeasible
```

Таких матриц P и Y не существует

Ограничение μ оказалось нереализуемым

🙁

Объект	Начальные условия	Регулятор	Ограничение
$\dot{x} = Ax + Bu$	$x(0) = x_0$	$u = Kx$	$\|u(t)\| \leq \mu$

Как найти самое маленькое μ,
которое можно гарантировать?

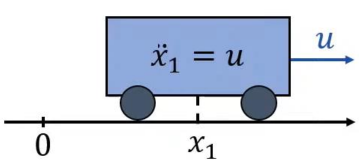
Задача выпуклой минимизации

минимизировать γ

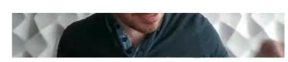
при ограничениях $P \succ 0, \quad PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \prec 0,$

$$\begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \gamma I \end{bmatrix} \succ 0$$

Регулятор $K = YP^{-1}$ гарантирует $\|u(t)\| \leq \sqrt{\gamma} = \mu$ при $x(0) = x_0$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Задача минимизации

```
% Plant parameters

A = [0 1; 0 0];
B = [0; 1];
x0 = [1; 0];

% Desired decay rate

a = 2;
```

```
% Solving LMI

cvx_begin sdp
variable P(2,2)
variable Y(1,2)
variable mumu
minimize mumu
P > 0.0001*eye(2);
P*A'+A*P+2*a*P+Y'*B'+B*Y <= 0;
[P x0;
 x0' 1] > 0;
[P Y';
 Y mumu] > 0;
cvx_end
```

```
% Finding controller matrix
% and upper bound on control

K = Y*inv(P);
mu = sqrt(mumu);
```

Точно!

Результат

$K = [-6 \quad -4]$

$\sigma(A + BK) = \{-2 \pm \sqrt{2}i\}$

$\mu = 10.39$

Объект

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Динамика ошибки

$$\dot{e} = (A + LC)e$$

Хотим выбрать матрицу L таким образом, чтобы динамика ошибки была экспоненциально устойчива со степенью устойчивости не менее, чем α

Неравенство Ляпунова для динамики ошибки

$$(A + LC)^T Q + Q(A + LC) + 2\alpha Q \prec 0$$

$$A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T L^T Q + QLC \prec 0$$

Это линейное матричное неравенство?

Неизвестные матрицы Q и L перемножены $\Rightarrow$ неравенство нелинейное

Введём замену $Y = QL$

$$A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T L^T Q + QLC \prec 0$$

$$Y = QL$$

$$A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T Y^T + YC \prec 0$$

Это линейное матричное неравенство?

Да, это LMI!

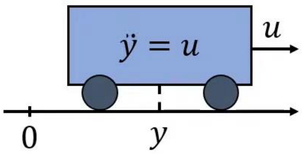
Неравенства для синтеза наблюдателя

$$\boxed{Q \succ 0, \quad A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T Y^T + YC \prec 0}$$

Порядок действий

1. Выбрать желаемую степень устойчивости α
2. Решить неравенства, найти Q и Y
3. Вычислить матрицу наблюдателя как $L = Q^{-1} Y$

Пример синтеза наблюдателя с заданной степенью сходимости



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

```
% Plant parameters

A = [0 1;
     0 0];

B = [0;
     1];

C = [1 0];

% Desired decay rate

a = 0.5;
```

```
% Solving LMI

cvx_begin sdp
variable Q(2,2)
variable Y(2,1)
Q > 0.0001*eye(2);
A'*Q+Q*A+2*a*Q+C'*Y'+Y*C <= 0;
cvx_end

% Finding observer matrix

L = inv(Q)*Y;
```

Результат

$$L = \begin{bmatrix}-1.95\\ -2.55\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma(A + LC) = \begin{Bmatrix}-0.97 + 1.27i,\\ -0.97 - 1.27i\end{Bmatrix}$$

```
% Plant parameters

A = [0 1;
     0 0];

B = [0;
     1];

C = [1 0];

% Desired decay rate

a = 2;
```

```
% Solving LMI

cvx_begin sdp
variable Q(2,2)
variable Y(2,1)
Q > 0.0001*eye(2);
A'*Q+Q*A+2*a*Q+C'*Y'+Y*C <= 0;
cvx_end

% Finding observer matrix

L = inv(Q)*Y;
```

Результат

$$L = \begin{bmatrix}-19\\ -71.7\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma(A + LC) = \begin{Bmatrix}-5.19,\\ -13.83\end{Bmatrix}$$

```
% Plant parameters

A = [0 1;
     0 0];

B = [0;
     1];

C = [1 0];

% Desired decay rate

a = 10;
```

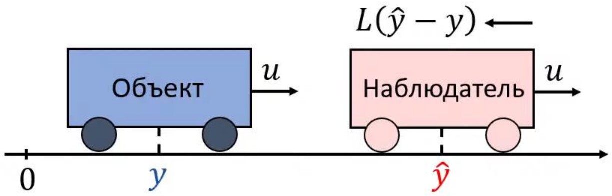
```
% Solving LMI

cvx_begin sdp
variable Q(2,2)
variable Y(2,1)
Q > 0.0001*eye(2);
A'*Q+Q*A+2*a*Q+C'*Y'+Y*C <= 0;
cvx_end

% Finding observer matrix

L = inv(Q)*Y;
```

Результат

$$L = \begin{bmatrix}-27.9\\ -354\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

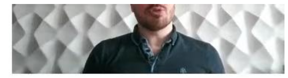
$$\sigma(A + LC) = \begin{Bmatrix}-13.93 + 12.66i,\\ -13.93 - 12.66i\end{Bmatrix}$$



$x_1(0) = 2$

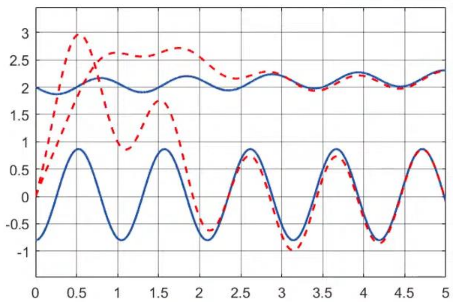
$x_2(0) = -0.8$

$u(t) = 5 \sin 6t$

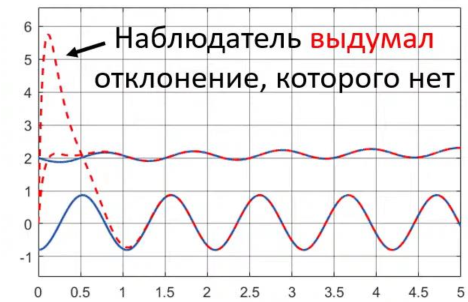


Сравнение вектора состояния объекта с вектором состояния наблюдателя

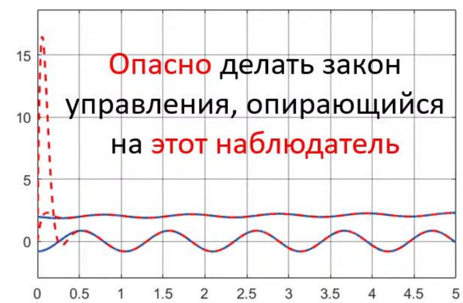
$\alpha = 0.5 \quad L = \begin{bmatrix} -1.95 \\ -2.55 \end{bmatrix}$



$\alpha = 2 \quad L = \begin{bmatrix} -19 \\ -71.7 \end{bmatrix}$



$\alpha = 10 \quad L = \begin{bmatrix} -27.9 \\ -354 \end{bmatrix}$



«Вся наша жизнь – это борьба между
перерегулированием и временем
переходного процесса»

— Кот Платон