ITMO UNIVERSITY

Геометрический подход к синтезу робастных законов управления

Борисов Олег Игоревич

Факультет систем управления и робототехники, Университет ИТМО

1–4 февраля 2022

Содержание

Метод расширенного наблюдателя

Нормальная форма

Рассмотрим класс нелинейных систем вида

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\
y &= h(x),
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — гладкие функции.
Осуществим глобальную замену переменных для преобразования системы (1) в строгую нормальную форму вида

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= f_0(z,\xi), \\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\
\dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r, \\
\dot{\xi}_r &= q(z,\xi) + b(z,\xi)u, \\
y &= \xi_1,
\end{aligned} \tag{2}
$$

где r — относительная степень, $b(z,\xi)$ ограничена как $0 < b_{min} \leq b(z,\xi) \leq b_{max}$.

Нормальная форма

Система (2) может быть представлена как

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_0(z,\xi), \\ \dot{\xi} &= A\xi + B[q(z,\xi) + b(z,\xi)u], \\ y &= C\xi, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выражение $\dot{z} = f_0(z,\xi)$ отражает нуль-динамику системы. Если она содержит управление

$$\dot{z} = f_0(z,\xi) + g_0(z,\xi)u,$$

то такое представление системы носит название нестрогой нормальной формы.

Исходя из (3), выберем номинальный закон управления

$$u = b^{-1}(z,\xi)[-q(z,\xi) + K\xi], \tag{4}$$

подставив который в объект управления, получим замкнутую модель вида

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_0(z,\xi), \\ \dot{\xi} &= (A+BK)\xi, \\ y &= C\xi, \end{aligned} \tag{5}$$

где K может быть выбрана из условия гурвицевости матрицы $A+BK$. Для устойчивости всей системы в целом требуется допущение об асимптотической устойчивости нуль-динамики $\dot{z} = f_0(z,\xi)$. Системы с уточивой нуль-динамкой называются минимально-фазовыми.

! Однако, закон управления (4) является нереализуемым, поскольку содержит неопределенные составляющие $b(z,\xi)$, $q(z,\xi)$ и ξ.

Робастный закон управления

Заменим нереализуемый закон управления

$$u = b^{-1}(z, \xi)[-q(z, \xi) + K\xi]$$

на

$$u = \mathrm{sat}_N[\bar{b}^{-1}(-\sigma + K\hat{\xi})], \tag{6}$$

где $\mathrm{sat}_N(\cdot)$ — гладкая функция насыщения с пределом N, $\bar{b}$ — ненулевой параметр, удовлетворяющий условию

$$|[b(z, \xi) - \bar{b}]\bar{b}^{-1}| \leq \delta < 1,$$

$\hat{\xi}$ и σ — являются состоянием расширенного наблюдателя вида

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \kappa a_r(y - \hat{\xi}_1), \\
\dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \kappa^2 a_{r-1}(y - \hat{\xi}_1), \\
&\vdots \\
\dot{\hat{\xi}}_{r-1} &= \hat{\xi}_r + \kappa^{r-1} a_2(y - \hat{\xi}_1), \\
\dot{\hat{\xi}}_r &= \sigma + \bar{b}u + \kappa^r a_1(y - \hat{\xi}_1), \\
\dot{\sigma} &= \kappa^{r+1} a_0(y - \hat{\xi}_1),
\end{aligned} \tag{7}$$

где κ и $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r$ — настроечные параметры.

- Параметр $\bar{b}$ должен достаточно близко апроксимировать функцию $b(z, \xi)$.
- Предел насыщения N должен обеспечивать охват достаточно большого множества начальных условий (значений задающего сигнала), для которых сохраняются свойства устойчивости.
- Матрица K выбирается из условия гурвицевости матрицы $A + BK$.
- Параметр κ должен иметь достаточно большое значение.
- Параметры $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ выбираются так, что собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -a_r & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{r-1} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

вещественны и отрицательны.

Свойства устойчивости

Обратим внимание, что нереализуемый закон управления

$$u = b^{-1}(z,\xi)[-q(z,\xi) + K\xi]$$

обеспечивает в системе **глобальную асимптотическую устойчивость**.
В случае робастного закона управления

$$u = \mathrm{sat}_N[\bar{b}^{-1}(-\sigma + K\hat{\xi})],$$

глобальная асимптотическая устойчивость недостижима по причине использования функции насыщения $\mathrm{sat}_N(\cdot)$.

Свойства устойчивости

Однако, для фиксированного сколь угодно большого множества начальных условий может быть гарантирована ограниченность траекторий системы и их сходимость к сколь угодно малому множеству, что соответствует полуглобальной практической устойчивости.

Если, кроме того, нереализуемый закон управления обеспечивает локальную экспоненциальную устойчивость, то с помощью робастного закона управления достигается полуглобальная асимптотическая устойчивость.

Утверждение Для заданного произвольного компактного множества начальных условий существует набор параметров регулятора такой, что для $t \geq 0$ все траектории замкнутой системы (3), (17), (18) остаются ограниченными и $y(t)$ стремится к нулю при времени, стремящемся к бесконечности, что обеспечивает выполнение цели управления.

Метод внутренней модели

Внешние воздействия могут быть представлены

- задающими сигналами (отрадают желаемое поведение системы)
- возмущающими сигналами (препятствуют достижению желаемого поведения)

Оба типа сигналов могут быть представлены как

$$\varrho = \delta + \rho,$$

где δ — нерегулярная компонента, представляющая собой стохастическую функцию пренебрежимо малой амплитуды, ρ — регулярная компонента, представляющая собой детерминированную функцию доминнирующей амплитуды.

Регулярная компонента ρ внешнего воздействия может рассматриваться как выход генератора вида

$$\begin{aligned} \dot{w} &= Sw, \\ \rho &= Hw, \end{aligned} \tag{8}$$

где $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ — вектор состояния с начальными условиями $w(0)$, S — матрица состояния, H — матрица выхода.

Решением системы (8) является

$$\rho(t) = He^{St}w(0),$$

откуда видно, что параметры производимого сигнала $\rho(t)$ зависят от матриц H, S и начальных условий $w(0)$.

Построение генераторов может быть выполнено с использованием подхода последовательного дифференцирования.

Рассмотрим статический сигнал

$$\rho(t) = \mathcal{C} = const. \tag{9}$$

Зададим первое состояние

$$w_1 = \mathcal{C}$$

и его продифференцируем

$$\dot{w}_1 = \dot{\mathcal{C}} = 0.$$

В резльтате можем сделать вывод, что сигнал (9) может быть произведен генератором (8) при

$$S = 0, \quad H = 1, \quad w(0) = \mathcal{C}.$$

Рассмотрим гармонический сигнал

$$\rho(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t + \psi), \tag{10}$$

где $\mathcal{A}$ — амплитуда, ω — частота, ψ — фазовый сдвиг.
Зададим первое состояние

$$w_1 = \mathcal{A}\sin(\omega t + \psi)$$

и, его продифференцировав, зададим второе состояние

$$\dot{w}_1 = \omega\mathcal{A}\cos(\omega t + \psi) = w_2,$$

дифференцируя которое, получим

$$\dot{w}_2 = -\omega^2\mathcal{A}\sin(\omega t + \psi) = -\omega^2 w_1.$$

В результате можем сделать вывод, что сигнал (10) может быть произведен генератором (8) при

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w(0) = \begin{pmatrix} \rho(0) \\ \dot{\rho}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\sin\psi \\ \omega\mathcal{A}\cos\psi \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Смещенный гармонический сигнал

Рассмотрим смещенный синусоидальный сигнал

$$\rho(t) = \mathcal{C} + \mathcal{A}\sin(\omega t + \psi), \tag{11}$$

где $\mathcal{A}$ — амплитуда, ω — частота, ψ — фазовый сдвиг, $\mathcal{C}$ — смещение.
Зададим первое состояние

$$w_1 = \mathcal{C}$$

и, его продифференцируем

$$\dot{w}_1 = \dot{\mathcal{C}} = 0.$$

Зададим второе состояние

$$w_2 = \mathcal{A}\sin(\omega t + \psi)$$

и, его продифференцировав, зададим третье состояние

$$\dot{w}_2 = \omega\mathcal{A}\cos(\omega t + \psi) = w_3,$$

дифференцируя которое, получим

$$\dot{w}_3 = -\omega^2\mathcal{A}\sin(\omega t + \psi) = -\omega^2 w_2.$$

В результате можем сделать вывод, что сигнал (11) может быть произведен генератором (8) при

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w(0) = \begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ \rho(0) \\ \dot{\rho}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{A}\sin\psi \\ \omega\mathcal{A}\cos\psi \end{pmatrix}.$$

Мультигармонические сигналы

Аналогичным образом могут быть построены генератора, производящие мультигармонические сигналы, состоящие из ℓ гармоник
$$\rho(t) = \mathcal{A}_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \mathcal{A}_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2) + \cdots + \mathcal{A}_\ell \sin(\omega_\ell t + \psi_\ell).$$

Векторные сигналы

С использованием блочно-диагонального представления системы могут быть построены генераторы, производящие векторные сигналы
$$S = \operatorname{diag}(S_1, S_2, \ldots, S_n), \quad H = \operatorname{diag}(H_1, H_2, \ldots, H_n), \quad \rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_1(t) & \rho_2(t) & \ldots & \rho_n(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Нелинейные генераторы

В общем виде генераторы могут рассматриваться в нелинейной виде
$$\dot{w} = s(w).$$

Нормальная форма

Рассмотрим систему, подверженную влиянию внешних воздействий, в нормалной форме

$$\begin{aligned} \dot{w} &= s(w), \\ \dot{z} &= f_0(w, z, \xi), \\ \dot{\xi} &= A\xi + B[q(w, z, \xi) + b(w, z, \xi)u], \\ y &= C\xi, \end{aligned} \tag{12}$$

при

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сосредоточимся на классе линейных генераторов, для которого справедливо $\dot{w} = s(w) = Sw$.

Рассмотрим выражения

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) = f(w, \pi(w), \psi(w)), \qquad h_e(w, \pi(w)) = 0.$$

Исходя из (12), зададим

$$\begin{array}{rcl} \pi(w) & = & 0, \\ \psi(w) & = & -b^{-1} q(w, 0, 0) := \bar{\Psi} w. \end{array}$$

Для компенсации внешних воздействий добавим в систему внутреннюю модель вида

$$\begin{array}{rcl} \dot{\eta} & = & F\eta + G[\Gamma\eta + \bar{u}], \\ u & = & \Gamma\eta + \bar{u}, \end{array} \tag{13}$$

где $\bar{u}$ — закон управления, который будет определен позднее, $F \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$ — гурвицева матрица во фробениусовой форме, векторы $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n_w}$ и $\Gamma \in \mathbb{R}^{1 \times n_w}$ такие, что пара (F, G) является управляемой и выполняется условие

$$\lambda_i\{F + G\Gamma\} = \lambda_i\{S\}.$$

Известно, что существует матрица Σ такая, что

$$\begin{array}{rcl} \Sigma S & = & (F + G\Gamma)\Sigma, \\ \bar{\Psi} & = & \Gamma\Sigma. \end{array}$$

Расчет вектора Γ внутренней модели

Поскольку матрица $\Phi = F + G\Gamma$ характеризуется чисто мнимыми собственными числами, то ее характеристический полином имеет вид

$$\begin{aligned}\phi(s) &= s(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)\dots(s^2+\omega_l^2)\\ &= s^{2l+1}+\theta_1 s^{2l-1}+\dots+\theta_l s,\end{aligned}$$

где ω_k $(k=\overline{1,l})$ представляют собой частоты l гармоник, а θ_k являются параметрами, связанными с ω_k с помощью формулы Виета

$$\begin{array}{rcl}\theta_1 &=& \omega_1^2+\omega_2^2+\dots+\omega_l^2,\\ \theta_2 &=& \omega_1^2\omega_2^2+\omega_1^2\omega_3^2+\dots+\omega_{l-1}^2\omega_l^2,\\ \vdots && \\ \theta_l &=& \omega_1^2\omega_2^2\dots\omega_l^2.\end{array}$$

Расчет вектора Γ внутренней модели

Тогда матрицы Φ и F могут рассматриваться как

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -\theta_l & 0 & -\theta_{l-1} & \cdots & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -f_0 & -f_1 & -f_2 & \cdots & -f_{2l-1} & -f_{2l} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{2l-1} & \gamma_{2l} \end{pmatrix}.$$

откуда можем вычислить составляющие вектора Γ как

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= f_0, \\ \gamma_1 &= f_1 - \theta_l, \\ \gamma_2 &= f_2, \\ &\vdots \\ \gamma_{2l-2} &= f_{2l-2}, \\ \gamma_{2l-1} &= f_{2l-1} - \theta_1, \\ \gamma_{2l} &= f_{2l}. \end{aligned}$$

Добавляя внутреннюю модель, получим агрегированную систему

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_0(w, z, \xi), \\ \dot{\eta} &= F\eta + G[\Gamma\eta + \bar{u}], \\ \dot{\xi} &= A\xi + B[q(w, z, \xi) + b(w, z, \xi)[\Gamma\eta + \bar{u}]], \\ y &= C\xi, \end{aligned} \tag{14}$$

В качестве предварительного этапа синтеза управления $\bar{u}$, введем новую переменную

$$\tilde{\eta} = \eta - \Sigma w,$$

дифференцруя которую, получим

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= F\eta + G[\Gamma\eta + \bar{u}] - \Sigma S w \\ &= (F + G\Gamma)\eta + G\bar{u} - (F + G\Gamma)\Sigma w \\ &= F\tilde{\eta} + G(\Gamma\tilde{\eta} + \bar{u}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + B[q(w, z, \xi) + b(w, z, \xi)[\Gamma\tilde{\eta} + \bar{\Psi}w + \bar{u}]] \\ &= A\xi + B[\tilde{q}(w, z, \xi) + b(w, z, \xi)[\Gamma\tilde{\eta} + \bar{u}]] \end{aligned}$$

где $\tilde{q}(w, z, \xi) = q(w, z, \xi) + b(w, z, \xi)\bar{\Psi}w$ равно нулю при $(z, \xi) = (0, 0)$ по построению $\bar{\Psi}$.

В итоге система (14) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_0(w, z, \xi), \\ \dot{\tilde{\eta}} &= F\tilde{\eta} + G[\Gamma\tilde{\eta} + \bar{u}], \\ \dot{\xi} &= A\xi + B[\tilde{q}(w, z, \xi) + b(w, z, \xi)[\Gamma\tilde{\eta} + \bar{u}]], \\ y &= C\xi, \end{aligned} \tag{15}$$

При выборе закона управления $\bar{u}$ как

$$\bar{u} = -\Gamma\tilde{\eta} + b^{-1}(w, z, \xi)[-\tilde{q}(w, z, \xi) + K\xi], \tag{16}$$

получим замкнутую систему

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_0(w, z, \xi), \\ \dot{\tilde{\eta}} &= F\tilde{\eta} + Gb^{-1}[-\tilde{q}(w, z, \xi) + K\xi], \\ \dot{\xi} &= (A + BK)\xi, \\ y &= C\xi, \end{aligned}$$

которая при соответствующем выборе K является глобально асимптотически устойчивой.

Выберем робастный закон управления

$$\bar{u} = \mathrm{sat}_N[\bar{b}^{-1}(-\sigma + K\hat{\xi})], \tag{17}$$

где $\mathrm{sat}_N(\cdot)$ — гладкая функция насыщения с пределом N, $\bar{b}$ — ненулевой параметр, удовлетворяющий условию

$$|[b(z,\xi) - \bar{b}]\bar{b}^{-1}| \leq \delta < 1,$$

$\hat{\xi}$ и σ — являются состоянием расширенного наблюдателя вида

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \kappa a_r(y - \hat{\xi}_1),\\
\dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \kappa^2 a_{r-1}(y - \hat{\xi}_1),\\
&\vdots\\
\dot{\hat{\xi}}_{r-1} &= \hat{\xi}_r + \kappa^{r-1} a_2(y - \hat{\xi}_1),\\
\dot{\hat{\xi}}_r &= \sigma + \bar{b}\bar{u} + \kappa^r a_1(y - \hat{\xi}_1),\\
\dot{\sigma} &= \kappa^{r+1} a_0(y - \hat{\xi}_1),
\end{aligned} \tag{18}$$

где κ и $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ — настроечные параметры.

Приложение 1. Управление манипуляционным роботом

Динамическая модель

Рассмотрим динамическую модель n-звенного робота

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + G(q) = u, \tag{19}$$

где $q \in \mathbb{R}^n$, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$, $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ — векторы обобщенных координат, скоростей и ускорений, соответственно, $u \in \mathbb{R}^n$ — вектор управляющих воздействий, $M(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица инерции , $C(q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица кориолисовых и центробежных сил, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица демпфирования (вязкого трения), $G(q) \in \mathbb{R}^n$ — вектор гравитационных сил.

Цель

Целью является синтез регулятора по выходу, обеспечиающего для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$ выполнение соотношения

$$\lim_{t\to\infty} |q_{\mathrm{e}}(t)| \leq \epsilon, \tag{20}$$

где $q_{\mathrm{e}}(t) = q(t) - q_{\mathrm{ref}}(t)$ — сигнал ошибки, $q_{\mathrm{ref}}(t) \in \mathbb{R}^n$ — ограниченный задающий сигнал, характеризующийся ограниченными $\dot{q}_{\mathrm{ref}}(t)$ и $\ddot{q}_{\mathrm{ref}}(t)$.

Параметры

Без потери общности рассмотрим 2-звенный плоский манипуляционный робот. Матрицы $M(q)$, $C(q,\dot{q})$, F и $G(q)$ примут вид

$$M(q) = \begin{bmatrix} \rho_1 + \rho_2 + 2\rho_3 c_2 + \rho_4 & \rho_2 + \rho_3 c_2 \\ \rho_2 + \rho_3 c_2 & \rho_2 + \rho_5 \end{bmatrix}, \qquad C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} -\rho_3 s_2 \dot{q}_2 & -\rho_3 s_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \rho_3 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho_9 & 0 \\ 0 & \rho_{10} \end{bmatrix}, \qquad G(q) = \begin{bmatrix} \rho_6 c_1 + \rho_7 c_{12} \\ \rho_8 c_{12} \end{bmatrix},$$

при

$$\begin{aligned} \rho_1 &= m_1 \ell_{c1}^2 + m_2 \ell_1^2 + 2 m_2 \ell_1 \ell_{c2}^2 + I_1, & \rho_6 &= (m_1 \ell_{c1} + m_2 \ell_1) g, \\ \rho_2 &= m_2 \ell_{c2}^2 + I_2, & \rho_7 &= m_2 \ell_{c2} g, \\ \rho_3 &= m_2 \ell_1 \ell_{c2}, & \rho_8 &= m_2 \ell_{c2}, \\ \rho_4 &= r_1^2 J_1, & \rho_9 &= r_1^2 F_1, \\ \rho_5 &= r_2^2 J_2, & \rho_{10} &= r_2^2 F_2, \end{aligned}$$

где m_1, m_2 — массы звеньев, ℓ_1, ℓ_2 длины звеньев, ℓ_{c1}, ℓ_{c2} — расстояния от точек начала отсчета систем координат, связанных со звеньями, до центров масс звеньев, $g = 9.81\,\mathrm{m/s}^2$, I_1, I_2 — моменты инерции звеньев, J_1, J_2 — моменты инерции приводов, F_1, F_2 — постоянные трения, r_1, r_2 — передаточные числа.

Динамическая модель манипуляционного робота с электромеханическими приводами имеет вид

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + G(q) = u, \tag{21}$$

где вектор управляющих воздействий u может быть выражен как

$$\begin{aligned}
u &= \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \tau, && \text{при управлении по моменту сил } \tau \\
u &= \begin{bmatrix} r_1 K_{\tau,1} & 0 \\ 0 & r_2 K_{\tau,2} \end{bmatrix} i, && \text{при управлении по силе тока } i \\
u &= \begin{bmatrix} \frac{r_1 K_{\tau,1}}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{r_2 K_{\tau,2}}{R_2} \end{bmatrix} V, && \text{при управлении по напряжению } V
\end{aligned} \tag{22}$$

Рассмотрим следующие задающие сигналы

$$q_{\text{ref}}(t) = \begin{bmatrix} q_{\text{ref},1}(t) \\ q_{\text{ref},2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\text{ref},1} + A_{\text{ref},1}\sin(\omega_{\text{ref},1}t + \psi_{\text{ref},1}) \\ C_{\text{ref},2} + A_{\text{ref},2}\sin(\omega_{\text{ref},2}t + \psi_{\text{ref},2}) \end{bmatrix}, \tag{23}$$

которые могут быть произведены генератором вида

$$\begin{aligned} \dot{w}_{\text{ref}} &= S_{\text{ref}} w_{\text{ref}}, \\ q_{\text{ref}} &= H^p_{\text{ref}} w_{\text{ref}} \\ \dot{q}_{\text{ref}} &= H^v_{\text{ref}} w_{\text{ref}} \\ \ddot{q}_{\text{ref}} &= H^a_{\text{ref}} w_{\text{ref}}, \end{aligned} \qquad w_{\text{ref}}(0) = \begin{bmatrix} C_{\text{ref},1} \\ A_{\text{ref},1}\sin\psi_{\text{ref},1} \\ \omega_{\text{ref},1}A_{\text{ref},1}\cos\psi_{\text{ref},1} \\ C_{\text{ref},2} \\ A_{\text{ref},2}\sin\psi_{\text{ref},2} \\ \omega_{\text{ref},2}A_{\text{ref},2}\cos\psi_{\text{ref},2} \end{bmatrix}.$$

где

$$\begin{aligned}
S_{\text{ref}} &= \begin{bmatrix} S_{\text{ref},1} & 0 \\ 0 & S_{\text{ref},2} \end{bmatrix}, & S_{\text{ref},1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2_{\text{ref},1} & 0 \end{bmatrix}, & S_{\text{ref},2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2_{\text{ref},2} & 0 \end{bmatrix}, \\
H^p_{\text{ref}} &= \begin{bmatrix} H^p_{\text{ref},1} & 0 \\ 0 & H^p_{\text{ref},2} \end{bmatrix}, & H^p_{\text{ref},1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & H^p_{\text{ref},2} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
H^v_{\text{ref}} &= \begin{bmatrix} H^v_{\text{ref},1} & 0 \\ 0 & H^v_{\text{ref},2} \end{bmatrix}, & H^v_{\text{ref},1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & H^v_{\text{ref},2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
H^a_{\text{ref}} &= \begin{bmatrix} H^a_{\text{ref},1} & 0 \\ 0 & H^a_{\text{ref},2} \end{bmatrix}, & H^a_{\text{ref},1} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2_{\text{ref},1} & 0 \end{bmatrix}, & H^a_{\text{ref},2} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2_{\text{ref},2} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Следуя [1], введем новые переменные

$$\xi_1 = q,$$
$$\xi_2 = \dot{q},$$

и, дифференцируя которые, преобразуем модель (29) к нормальной форме

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2,$$
$$\dot{\xi}_2 = M^{-1}(\xi_1)[-C(\xi_1, \xi_2)\xi_2 - F\xi_2 - G(\xi_1)] + M^{-1}(\xi_1)u.$$

[1] Jose Antonio Heredia and Wen Yu. A high-gain observer-based pd manipulator control for robot. In Proc. of the proceedings of the American control conference, pages 2218–522, 2000.

Выберем закон управления

$$u = M(q)\left(\ddot{q}_{\mathrm{ref}} - K_p q_{\mathrm{e}} - K_d(\hat{\dot{q}} - \dot{q}_{\mathrm{ref}})\right) + C(q, \hat{\dot{q}})\hat{\dot{q}} + F\hat{\dot{q}} + G(q), \tag{24}$$

где $K_p = \mathrm{diag}(k_{p1}, k_{p2})$ и $K_d = \mathrm{diag}(k_{d1}, k_{d2})$ — положительно определенные матрицы пропорциональной и дифференциальной составляющих, соответственно, $\hat{\dot{q}} = \dot{\hat{\xi}}_1$ — оценка неизмеримых обобщенных скоростей, полученная с помощью расширенного наблюдателя

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \kappa A_2(\xi_1 - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \kappa^2 A_1(\xi_1 - \hat{\xi}_1), \\ \hat{\dot{q}} &= \dot{\hat{\xi}}_1, \end{aligned} \tag{25}$$

где $\kappa > 0$ — достаточно большое число, A_2 и A_1 — положительно определенные матрицы такие, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} -A_2 & I \\ -A_1 & 0 \end{bmatrix}$$

является гурвицевой, т.е. $\mathrm{Re}\lambda_{\mathrm{i}}\{\mathrm{A}\} < 0$.

Введем новые переменные

$$\xi_1 = q - q_{\text{ref}},$$
$$\xi_2 = \dot{q} - \dot{q}_{\text{ref}},$$

и, дифференцируя которые, преобразуем модель (29) к нормальной форме

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2,$$
$$\dot{\xi}_2 = f(\xi, q_{\text{ref}}, \dot{q}_{\text{ref}}, \ddot{q}_{\text{ref}}) + M^{-1}(\xi_1 + q_{\text{ref}})u,$$

где $f(\xi, q_{\text{ref}}, \dot{q}_{\text{ref}}, \ddot{q}_{\text{ref}}) =$
$M^{-1}(\xi_1 + q_{\text{ref}})[-C(\xi_1 + q_{\text{ref}}, \xi_2 + \dot{q}_{\text{ref}})\xi_2 - F(\xi_2 + \dot{q}_{\text{ref}}) - G(\xi_1 + q_{\text{ref}})] - \ddot{q}_{\text{ref}}.$

Расширенный наблюдатель

Следуя [2] выберем робастный закон управления

$$u = \bar{u} = \mathrm{sat}_N\, M_0[-\sigma - K\hat{\xi}] \tag{26}$$

где $N > 0$ — предел насыщения, $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$, $K_1 = \mathrm{diag}(k_{11}, k_{12})$, $K_2 = \mathrm{diag}(k_{21}, k_{22})$ M_0 — обратимая матрица, удовлетворяющая условию

$$\|[M^{-1}(\xi) - M_0^{-1}]M_0\|_1 \le \delta < 1 \tag{27}$$

$\hat{\xi}$ и σ — состояния расширенного наблюдателя вида

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \kappa A_2(q - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \sigma + M_0^{-1}\bar{u} + \kappa^2 A_1(q - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\sigma} &= \kappa^3 A_0(q - \hat{\xi}_1), \end{aligned} \tag{28}$$

где $\kappa > 0$ — достаточно большое число, A_2, A_1 и A_0 — положительно определенные матрицы такие, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} -A_2 & I & 0 \\ -A_1 & 0 & I \\ -A_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

является гурвицевой, т.е. $\mathrm{Re}\lambda_i\{\mathrm{A}\} < 0$.

[2] Freidovich, L. and Khalil, H. (2008). Performance recovery of feedback-linearization-based designs. IEEE Transactions on Automatic Control, 53(10), 2324-2334.

Рассмотрим динамическую модель манипуляционного робота, подверженного влиянию внешних возмущений

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + G(q) = u + \tau_{\text{dist}}, \tag{29}$$

где $\tau_{\text{dist}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dist}}}$ — вектор внешних моментов сил, обусловленных нагрузкой, приложенной к звеньям робота.

Рассмотрим следующие возмущающие сигналы

$$\tau_{\text{dist}}(t) = \begin{bmatrix} \tau_{\text{dist},1}(t) \\ \tau_{\text{dist},2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\text{dist},1} + A_{\text{dist},1}\sin(\omega_{\text{dist},1}t + \psi_{\text{dist},1}) \\ C_{\text{dist},2} + A_{\text{dist},2}\sin(\omega_{\text{dist},2}t + \psi_{\text{dist},2}) \end{bmatrix}, \tag{30}$$

которые могут быть произведены генератором вида

$$\begin{aligned} \dot{w}_{\text{dist}} &= S_{\text{dist}} w_{\text{dist}}, \\ \tau_{\text{dist}} &= H_{\text{dist}} w_{\text{dist}}, \end{aligned} \qquad w_{\text{dist}}(0) = \begin{bmatrix} C_{\text{dist},1} \\ A_{\text{dist},1}\sin\psi_{\text{dist},1} \\ \omega_{\text{dist},1} A_{\text{dist},1}\cos\psi_{\text{dist},1} \\ C_{\text{dist},2} \\ A_{\text{dist},2}\sin\psi_{\text{dist},2} \\ \omega_{\text{dist},2} A_{\text{dist},2}\cos\psi_{\text{dist},2} \end{bmatrix}.$$

где

$$S_{\text{dist}} = \begin{bmatrix} S_{\text{dist},1} & 0 \\ 0 & S_{\text{dist},2} \end{bmatrix}, \quad S_{\text{dist},1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_{\text{dist},1}^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{\text{dist},2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_{\text{dist},2}^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_{\text{dist}} = \begin{bmatrix} H_{\text{dist},1} & 0 \\ 0 & H_{\text{dist},2} \end{bmatrix}, \quad H_{\text{dist},1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_{\text{dist},2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Внутренняя модель

Для компенсации внешних воздействий добавим в систему внутреннюю модель вида

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= F\eta + G[\Gamma\eta + \bar{u}], \\ u &= \Gamma\eta + \bar{u}, \end{aligned} \tag{31}$$

где $F = \mathrm{diag}\{F_1, F_2\}$, $G = \mathrm{diag}\{G_1, G_2\}$, $\Gamma = \mathrm{diag}\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$, $F_i \in \mathbb{R}^{n_{\text{dist}} \times n_{\text{dist}}}$ — гурвицева матрица во фробениусовой форме, векторы $G_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dist}}}$ и $\Gamma \in \mathbb{R}^{1 \times n_{\text{dist}}}$ такие, что пара (F_i, G_i) является управляемой и выполняется условие

$$\lambda_k\{F_i + G_i\Gamma_i\} = \lambda_k\{S_{\text{dist,i}}\}.$$

Приложение 2. Управление квадрокоптером

Рассмотрим модель квадрокоптера[3]

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \tfrac{1}{m}\left(\textstyle\sum_{i=1}^4 F_i\right)[c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi], \\ \ddot{y} &= \tfrac{1}{m}\left(\textstyle\sum_{i=1}^4 F_i\right)[s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi], \\ \ddot{z} &= \tfrac{1}{m}\left(\textstyle\sum_{i=1}^4 F_i\right) c_\theta c_\psi - g, \\ \ddot{\theta} &= \tfrac{\ell}{J_\theta}[-F_1 - F_2 + F_3 + F_4], \\ \ddot{\psi} &= \tfrac{\ell}{J_\psi}[-F_1 + F_2 + F_3 - F_4], \\ \ddot{\phi} &= \tfrac{C}{J_\phi}[F_1 - F_2 + F_3 - F_4], \end{aligned} \tag{32}$$

где x, y, z — декартовы координаты центра масс, θ, ψ, ϕ — углы Эйлера, характеризующие положение квадрокоптера, F_i, $i = \{1, 2, 3, 4\}$ — значения подъемной силы каждого привода, m — масса, $g = 9.81\,\mathrm{m/s}^2$ — ускорение свободного падения, J_θ, J_ψ, J_ϕ — моменты инерции, ℓ — расстояние между центром масс и исполнительными приводами, C — масштабирующий коэффициент между силой и моментом силы, $s_{(\cdot)} \equiv \sin(\cdot)$, $c_{(\cdot)} \equiv \cos(\cdot)$. Задача заключается в синтезе управления для F_i, обеспечивающего сходимость x, y, z и θ, ψ, ϕ к нулю.

[3] Altug, E., Ostrowski, J., and Taylor, C. (2005). Control of a quadrotor helicopter using dual camera visual feedback. International Journal of Robotics Research, 24(5), 329-341.

Динамическая модель

ITMO UNIVERSITY

Выберем новые управляющие воздействия

$$
\begin{aligned}
u_0' &= \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{4} F_i\right) := (g+u_0),\\
u_1 &= \frac{\ell}{J_\theta}[-F_1 - F_2 + F_3 + F_4],\\
u_2 &= \frac{\ell}{J_\psi}[-F_1 + F_2 + F_3 - F_4],\\
u_3 &= \frac{C}{J_\phi}[F_1 - F_2 + F_3 - F_4]
\end{aligned}
$$

и перепишем модель (32) как

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= (g+u_0)[c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi],\\
\ddot{y} &= (g+u_0)[s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi],\\
\ddot{z} &= (g+u_0)c_\theta c_\psi - g,\\
\ddot{\theta} &= u_1,\\
\ddot{\psi} &= u_2,\\
\ddot{\phi} &= u_3.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Поскольку модель декомпозирована, угол рыскания ϕ может быть застабизирован независимо с помощью закона управления u_3. Примем допущение, что эта задача выполнена (например, с помощью обыкновенного ПД регулятора), тогда модель (33) при $\phi = \dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$ примет вид

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= (g + u_0) s_\theta c_\psi, \\
\ddot{y} &= -(g + u_0) s_\psi, \\
\ddot{z} &= (g + u_0) c_\theta c_\psi - g, \\
\ddot{\theta} &= u_1, \\
\ddot{\psi} &= u_2.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Перейдем к ругелированию декартовых координат (x, y, z) через углы тангажа и крена (θ, ψ), которые принимаются неизмеримыми.

Выберем u_0 для стабилизации координаты z как

$$u_0 = \mathrm{sat}_L(-r_0 z - r_1 \dot{z}) \tag{35}$$

при $L = \alpha g$ и $\alpha < 1$.
Несложно показать при соответствующем выборе параметров r_0, r_1 итоговая динамика движения по вертикали

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= (g + \mathrm{sat}_{\alpha g}(-r_0 z_1 - r_1 z_2))c_\theta c_\psi - g \end{aligned}$$

при $z_1 = z$, которая может рассматриваться как система с входом (θ, ψ) и состоянием (z_1, z_2), устойчива по состоянию при выполнении условия $|c_\theta c_\psi| \geq 1/(1 + \alpha)$.

Выберем новые переменные $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3}, \xi_{i4})$ как

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= x, & \xi_{21} &= y, \\ \xi_{12} &= \dot{x}, & \xi_{22} &= \dot{y}, \\ \xi_{13} &= g s_\theta c_\psi, & \xi_{23} &= -g s_\psi, \\ \xi_{14} &= g c_\theta c_\psi \dot{\theta} - g s_\theta s_\psi \dot{\psi}, & \xi_{24} &= -g c_\psi \dot{\psi}. \end{aligned}$$

При $|\theta| < \pi/2$ и $|\psi| < \pi/2$ эта замена координат справедлива, поскольку преобразование

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_{13} \\ \xi_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g s_\theta c_\psi \\ -g s_\psi \end{pmatrix}$$

обратимо также, как и

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_{14} \\ \xi_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g c_\theta c_\psi & -g s_\theta s_\psi \\ 0 & -g c_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

В новых координатах система имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot\xi_{11} &= \xi_{12}, & \dot\xi_{21} &= \xi_{22},\\
\dot\xi_{12} &= \beta(t)\xi_{13}, & \dot\xi_{22} &= \beta(t)\xi_{23},\\
\dot\xi_{13} &= \xi_{14}, & \dot\xi_{23} &= \xi_{24},\\
\dot\xi_{14} &= q_1(\theta,\dot\theta,\psi,\dot\psi) + \begin{pmatrix} gc_\theta c_\psi & -gs_\theta s_\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, & \dot\xi_{24} &= q_2(\psi,\dot\psi) + \begin{pmatrix} 0 & -gc_\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где $q_1(\theta,\dot\theta,\psi,\dot\psi)$ и $q_2(\psi,\dot\psi))$ — некоторые функции, и

$$\beta(t) = \left(1 + \frac{u_0(t)}{g}\right) \tag{36}$$

удовлетворяет

$$0 < \beta_{min} \le \beta(t) \le \beta_{max} \tag{37}$$

в силу выбора $\alpha < 1$ в ПД-регуляторе (35).

Таким образом, динамика (ξ_1, ξ_2) может быть линеаризована по обратной связи. Номинальный закон управления (u_1, u_2) обеспечивает

$$\dot{\xi}_{14} = -k_1\xi_{11} - k_2\xi_{12} - k_3\xi_{13} - k_4\xi_{14} := K\xi_1,$$
$$\dot{\xi}_{24} = -k_1\xi_{21} - k_2\xi_{22} - k_3\xi_{23} - k_4\xi_{24} := K\xi_2$$

и соответственно определен как

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = B^{-1}(\theta, \psi) \begin{pmatrix} -q_1(\theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}) + K\xi_1 \\ -q_2(\psi, \dot{\psi}) + K\xi_2 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где $B(\theta, \psi)$ задана как

$$B(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} b_{11}(\theta, \psi) & b_{12}(\theta, \psi) \\ 0 & b_{22}(\theta, \psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gc_\theta c_\psi & -gs_\theta s_\psi \\ 0 & -gc_\psi \end{pmatrix}.$$

Применяя закон управления (38) к систем, получим две идентичные системы вида

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_{i1} &= \xi_{i2}, \\
\dot{\xi}_{i2} &= \beta(t)\xi_{i3}, \\
\dot{\xi}_{i3} &= \xi_{14}, \\
\dot{\xi}_{i4} &= -k_1\xi_{i1} - k_2\xi_{i2} - k_3\xi_{i3} - k_4\xi_{i4} := K\xi_i.
\end{aligned}$$

Поскольку функция $\beta(t)$ ограничена положительными числами снизу и сверху (см. (37)), возможно выбрать K, матрицу $P = P^T > 0$ и число λ, зависимые только от границ β_{min}, β_{max}, такие, что производная $V(\xi_i) = \xi_i^T P \xi_i$ вдоль траекторий системы ограничена как

$$\dot{V}(\xi_i) \leq -\lambda|\xi_i|^2$$

и, следовательно, $\xi_i(t)$ экспоненциально сходится к нулю 0. Доказательство существования K может быть получено тривиальным образом аналогично доказательству «стандартной версии» леммы Даяванца.

Усовершенствованный расширенный наблюдатель

ITMO UNIVERSITY

Следуя подходу, предложенному в[4] и расширенному в [5], зададим управляющие сигналы как

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{sat}_N(\hat{u}_1) \\ \mathrm{sat}_N(\hat{u}_2) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix} = \bar{B}^{-1} \begin{pmatrix} K\hat{\xi}_1 - \sigma_1 \\ K\hat{\xi}_2 - \sigma_2 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

где N — настроечный параметр, $\bar{B}$ — несингулярная матрица, выбранная таким образом, что

$$\|[B(\theta,\psi) - \bar{B}]\bar{B}^{-1}\|_1 \le \delta < 1, \tag{40}$$

и где $\hat{\xi}_i = (\hat{\xi}_{i1}, \hat{\xi}_{i2}, \hat{\xi}_{i3}, \hat{\xi}_{i3})$ и σ_i для $i = 1, 2$ — состояния пары «усовершенствованных» расширенных наблюдателей, заданных выражениями

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\xi}}_{11} &= \hat{\xi}_{12} + \kappa a_4(x - \hat{\xi}_{11}), & \dot{\hat{\xi}}_{21} &= \hat{\xi}_{22} + \kappa a_4(y - \hat{\xi}_{21}),\\
\dot{\hat{\xi}}_{12} &= \beta(t)\hat{\xi}_{13} + \kappa^2 a_3(x - \hat{\xi}_{11}), & \dot{\hat{\xi}}_{22} &= \beta(t)\hat{\xi}_{23} + \kappa^2 a_3(y - \hat{\xi}_{21}),\\
\dot{\hat{\xi}}_{13} &= \hat{\xi}_{14} + \kappa^3 a_2(x - \hat{\xi}_{11}), & \dot{\hat{\xi}}_{23} &= \hat{\xi}_{24} + \kappa^3 a_2(y - \hat{\xi}_{21}),\\
\dot{\hat{\xi}}_{14} &= \sigma_1 + \bar{b}_1 u + \kappa^4 a_1(x - \hat{\xi}_{11}), & \dot{\hat{\xi}}_{24} &= \sigma_2 + \bar{b}_2 u + \kappa^4 a_1(y - \hat{\xi}_{21}),\\
\dot{\sigma}_1 &= \kappa^5 a_0(x - \hat{\xi}_{11}), & \dot{\sigma}_2 &= \kappa^5 a_0(y - \hat{\xi}_{21}),
\end{aligned} \tag{41}$$

где с помощью $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ обозначены две строки матрицы $\bar{B}$.

[4] Freidovich, L. and Khalil, H. (2008). Performance recovery of feedback-linearization-based designs. IEEE Transactions on Automatic Control, 53(10), 2324-2334.

[5] Isidori, A., Pyrkin, A., and Borisov, O. (2019). An extension of a lemma of Dayawansa and its application in the design of extended observers for nonlinear systems. Automatica, 106, 178-183.

Simulation

Выберем параметры регулятора для управления вертикальным движением

$$r_0 = 5, \quad r_1 = 10, \quad \alpha = 0.9,$$

и параметры регулятора для управления горизонтальным движением

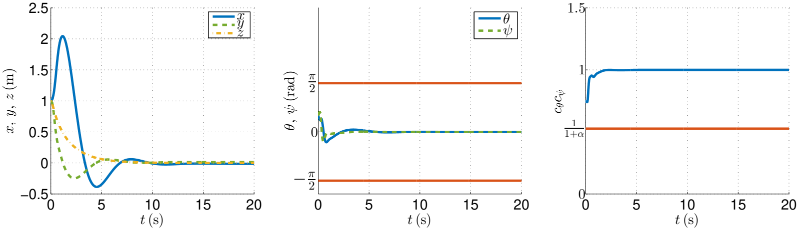
$$K = \begin{pmatrix} -100 & -100 & -100 & -10 \end{pmatrix},$$

$$a_0 = 0.01,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1000,\ a_3 = 1000,\ a_4 = 10,$$

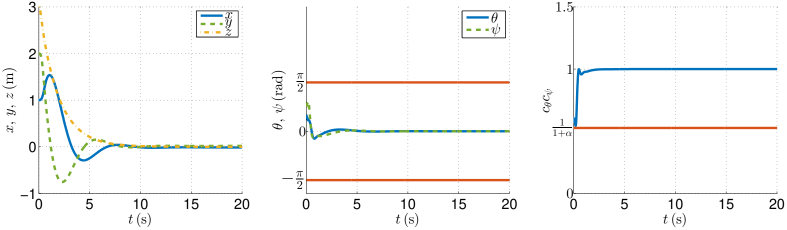
$$\bar{B} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & -g \end{pmatrix}, \quad N = 100, \quad \kappa = 5.$$

Моделирование

ITMO UNIVERSITY

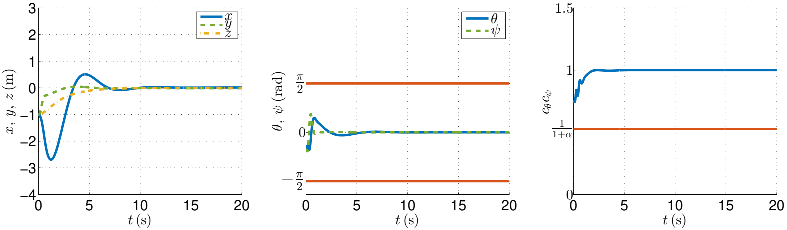


Результаты моделирования для $x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 1,\ \theta(0) = \pi/6,\ \psi(0) = \pi/6$

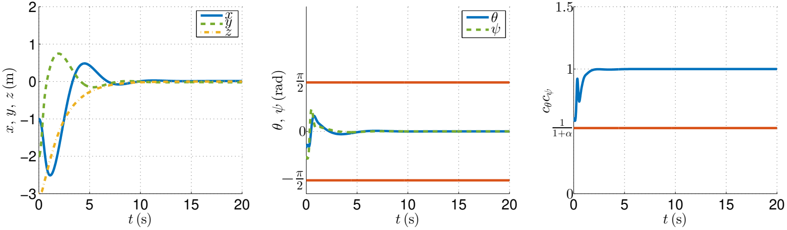


Результаты моделирования для $x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3,\ \theta(0) = \pi/6,\ \psi(0) = \pi/4$

Моделирование



Результаты моделирования для $x(0) = -1$, $y(0) = -1$, $z(0) = -1$, $\theta(0) = -\pi/6$, $\psi(0) = -\pi/6$



Результаты моделирования для $x(0) = -1$, $y(0) = -2$, $z(0) = -3$, $\theta(0) = -\pi/6$, $\psi(0) = -\pi/4$

Спасибо за внимание!