ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель работы. Ознакомление с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход, а также со структурными свойствами системы.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны получить от преподавателя вариант задания. Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

Теоретические сведения. Математическая модель одной и той же линейной динамической системы может быть представлена в различных формах: в форме скалярного дифференциального уравнения n-го порядка (модель вход-выход) или в форме системы из n дифференциальных уравнений 1-го порядка (модель вход-состояние-выход). Следовательно, между различными формами представления математических моделей существует определенная взаимосвязь, т.е. модель вход-состояние-выход может быть преобразована к модели вход-выход и наоборот. При этом модели будут эквивалентными в том смысле, что они определяют одно и то же преобразование входного сигнала u в выходной y.

Модель вход-выход динамической системы описывается уравнением (подробнее — см. лабораторную работу № 1)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \ldots + b_1 u^{(1)} + b_0 u\ , \qquad (2.1)$$

где y и u — выходная и входная переменные, соответственно. При $m < n$ модель вход-состояние-выход имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Координаты вектора состояния x и коэффициенты матриц A, B и C зависят от выбора базиса в пространстве состояний. Преобразование вектора состояния, связанное с заменой базиса, задается выражениями

$$x = M\hat{x}, \qquad \hat{x} = M^{-1}x, \qquad (2.3)$$

где $\hat{x}$ — вектор состояния в новом базисе, M — неособая (несингулярная, невырожденная) $n \times n$ матрица *преобразования координат*. Преобразование (2.3) обеспечивает переход от модели (2.2) к подобной модели

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u, \\ y = \hat{C}\hat{x}. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Матрицы подобных моделей связаны соотношениями:

$$\hat{A} = M^{-1}AM,\ \hat{B} = M^{-1}B,\ \hat{C} = CM\ .$$

Если известно, что модели (2.2) и (2.4) являются различными формами описания одной и той же динамической системы, то матрица преобразования координат M может быть найдена из выражения

$$M = N_y \hat{N}_y^{-1},$$

где $N_y = [B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B]$ — *матрица управляемости* модели (2.2), $\hat{N}_y = [\hat{B} \vdots \hat{A}\hat{B} \vdots \ldots \vdots \hat{A}^{n-1}\hat{B}]$—матрица управляемости модели (2.4).

Линейная система (2.2) полностью *управляема*, если для любых $t_0 \geq 0$ и $x_f \in R^n$ существует $t_f \geq t_o$ и ограниченное управление $u(t), t \in [t_o, t_f]$, переводящее систему из произвольного начального состояния $x(t_0) = x_0$ в произвольное конечное состояние $x(t_f) = x_f$ за конечное время.

Система (2.2) полностью управляема тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости равен порядку системы.

Система (2.2) называется полностью наблюдаемой, если для любых $t_0 \geq 0$ существует $t_1 > t_o$ такое, что выходной переменной $y = y(t), t \in [t_o, t_1]$ полученной для входного сигнала $u(t)$, соответствует единственное значение $x(t_o) = x_o$.

Система (2.2) полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда рангматрицы наблюдаемости $N_н = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ равен порядку системы.

Переход от модели вход-состояние-выход (2.2) к модели вход-выход (2.1) является однозначным и определяется соотношением

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

где $W(s)$ — передаточная функция системы. Очевидно, что по известной передаточной функции может быть легко записано дифференциальное уравнение (2.1).

В случае если $m = n$, модель вход-состояние-выход описывается

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du. \end{cases}$$

При преобразовании системы в другой базис матрица D останется прежней $\hat{D} = D$. Переход от модели вход-состояние-выход к модели вход-выход определяется соотношением

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Переход от модели вход-выход (2.1) к модели вход-состояние-выход (2.2) является неоднозначным, что связано с возможностью достаточно произвольного назначения вектора состояния. На практике наиболее часто используются следующие, так называемые, канонические формы представления моделей вход-состояние-выход: *диагональная*, *жорданова*, *каноническая наблюдаемая форма* и *каноническая управляемая формы*.

Удобство канонических наблюдаемой и управляемой форм состоит в возможности непосредственного определения параметров матриц A, B и C на основе коэффициентов a_i и b_j дифференциального уравнения (2.1) без каких-либо дополнительных вычислений полюсов системы. Кроме того, использование канонических форм позволяет упростить решение целого ряда прикладных задач анализа и синтеза систем управления.

Переход от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход удобнее всего совершать через схему моделирования. При этом в качестве переменных состояния выбираются выходы интеграторов, а уравнения состояния записываются в соответствии со структурой схемы моделирования.

Метод построения схемы моделирования в канонической наблюдаемой форме соответствует методу, рассмотренному в лабораторной работе № 1. При этом, в случае дифференциального уравнения n-го порядка, схема моделирования принимает вид, приведенный на рис.2.1. Нумеруя координаты вектора состояния в указанной на рисунке последовательности, легко получить следующие выражения для матриц системы вход-состояние-выход

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{vmatrix}, \qquad B=\begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}, \qquad C^T=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

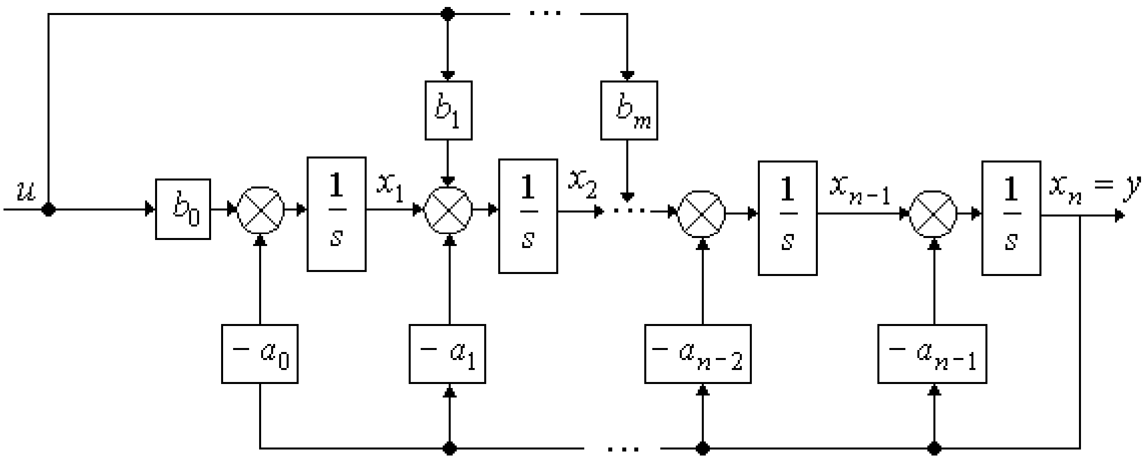

Рис.2.1. Схема моделирования в канонической наблюдаемой форме

При этом требуемые начальные условия координат вектора состояния $x(0)$ могут быть определены из системы алгебраических уравнений

$$y^{(i)}(0)=CA^{(i)}x(0), \qquad i=0,1,2,\dots,n-1. \tag{2.5}$$

В системе (2.5) слагаемые с начальными значениями входного сигнала и его производных отсутствуют, так как для начальных условий слева имеем $u(-0) = u^{(1)}(-0) = \ldots = 0$ (см. лабораторную работу №1).

Для построения схемы моделирования в канонической управляемой форме, введем вспомогательную переменную $z(t)$, являющуюся решением дифференциального уравнения

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)}+\ldots+a_1 z^{(1)} + a_0 z = u .$$

Следовательно

$$z^{(n)} = - a_{n-1}z^{(n-1)}-\ldots-a_1 z^{(1)} - a_0 z + u . \qquad (2.6)$$

Уравнение (2.6) позволяет определить структуру обратных связей схемы моделирования (см. рис.2.2). Для формирования прямых связей заметим, что в силу свойств линейных систем

$$y = b_m z^{(m)} + b_{m-1} z^{(m-1)}+\ldots+b_1 z^{(1)} + b_0 z .$$

Нумеруя координаты вектора состояния в указанной на рисунке последовательности, можно получить следующие выражения для матриц системы вход-состояние-выход

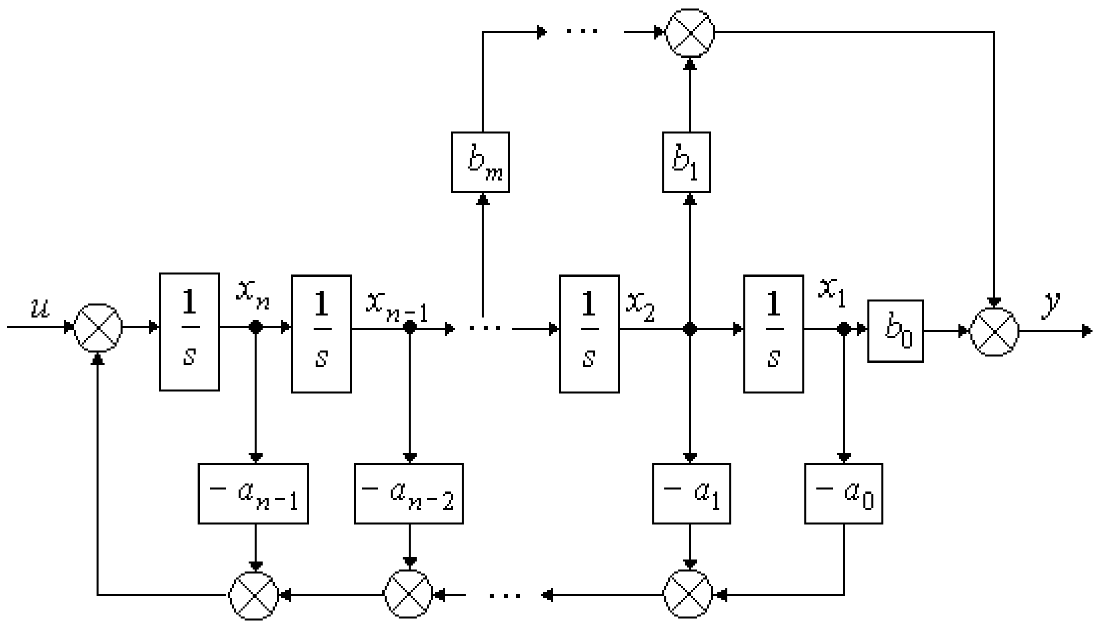

Рис.2.2. Схема моделирования в канонической управляемой форме

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \qquad C^T = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Требуемые начальные условия координат вектора состояния $x(0)$ рассчитываются из системы алгебраических уравнений (2.5).

Диагональной формой называется модель (рис. 2.3), представленная уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + \beta_1 u, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + \beta_2 u, \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n + \beta_n u, \\ y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \end{cases}$$

с матрицами системы вход-состояние-выход

$$A_\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}, \quad B_\Lambda = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{vmatrix}, \quad C_\Lambda^T = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix},$$

где $\lambda_i (i = \overline{1, n})$ — простые (некратные) вещественные собственные числа матрицы A (полюса системы).

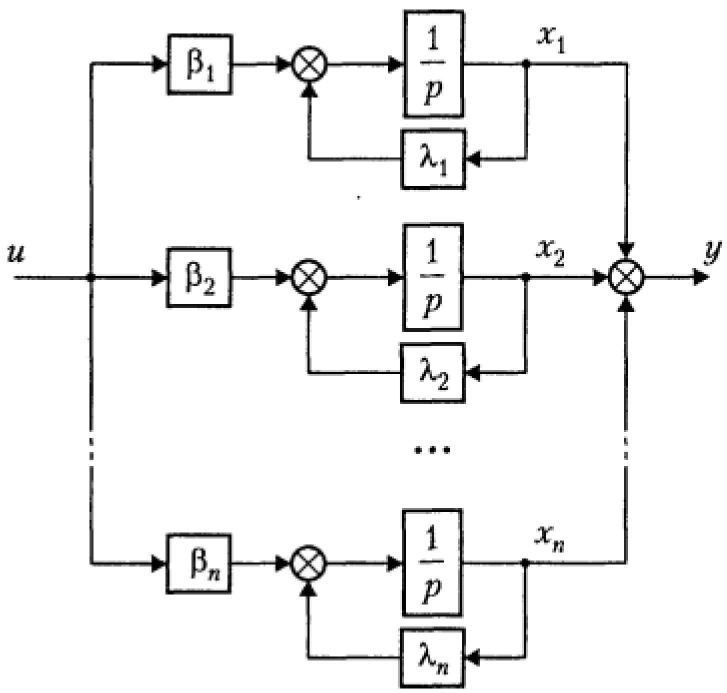

Рис.2.3. Схема моделирования в диагональной форме

В более общем случае (наличие у матрицы A кратных и/или комплексно-сопряжённых собственных чисел) система может быть описана в жордановой (блочно-диагональной) форме, т.е. найдется невырожденная матрица преобразования M такая, что $A_\Lambda = M^{-1} A M$:

$$A_\Lambda = \begin{vmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{vmatrix},$$

где диагональные элементы J_i для случая кратных собственных чисел λ_i представлены матрицами вида

$$J_i = \begin{vmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{vmatrix},$$

для случая комплексно-сопряженных собственных чисел $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$ представлены матрицами вида

$$J_i = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{vmatrix}.$$

Порядок выполнения работы.

1. *Переход от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход.*

1.1. В соответствии с вариантом задания (см. табл.1 из работы 1), построить математические модели вход-состояние-выход в канонической управляемой и канонической наблюдаемой формах. Определить передаточную функцию системы. Построить математические модели вход-состояние-выход в диагональной или жордановой форме.

1.2. Используя блоки "Transfer Fcn" и "State-Space" пакета SIMULINK, осуществить моделирование моделей вход-выход, вход-состояние-выход в канонической управляемой форме и вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях. Схема моделирования иллюстрируется рис.2.3, где блок с именем "Transfer Fcn" задает модель вход-выход в форме передаточной функции, блок "State-Space"— модель вход-состояние-выход в канонической управляемой форме, а блок "State-Space1"— модель вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме.

2. *Переход от модели вход-состояние-выход к модели вход-выход.*

2.1. В соответствии с вариантом задания (см. табл.2.1), осуществить расчет передаточной функции системы, а также канонических моделей вход-состояние-выход.

2.2. Используя блоки "Transfer Fcn" и "State-Space" пакета SIMULINK, осуществить моделирование исходной модели и полученных моделей вход-выход, вход-состояние-выход в канонической управляемой форме и вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме, при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях.

2.3. Рассчитать матрицы преобразования исходной модели к каноническим формам.

2.4. В соответствии с вариантом задания (см. табл.6 работы 1), осуществить расчет передаточной матрицы многоканальной системы.

3. *Замена базиса в пространстве состояний.*

3.1. В соответствии с вариантом матрицы преобразования координат (см. табл.2.2), построить модель, подобную модели из п.2.1.

3.2. Используя блоки "State-Space", осуществить моделирование исходной и преобразованной систем при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях. На экран вывести выходные переменные двух систем.

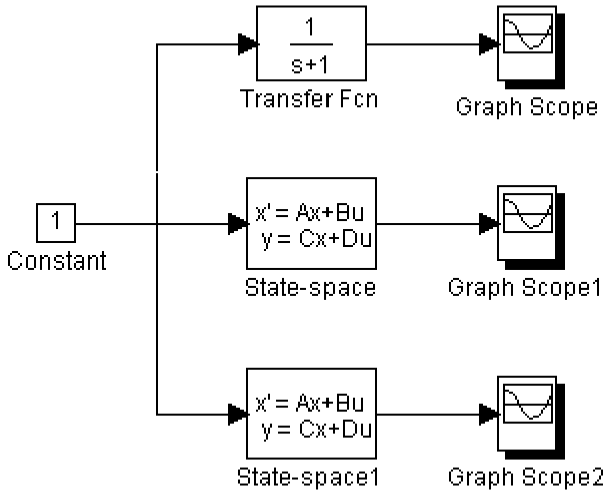

Рис. 2.3 Схема эксперимента

Содержание отчета.

1. Аналитический вывод математических моделей канонических форм, подобных систем и матриц преобразования координат.

2. Результаты моделирования.

3. Выводы.

Вопросы к защите лабораторной работы.

1. В каком смысле понимается эквивалентность подобных математических моделей вход-состояние-выход?

2. Выведете в общем виде матрицу преобразования координат M для перехода от канонической управляемой формы к канонической наблюдаемой форме модели второго порядка.

3. Чем вызвана неоднозначность перехода от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход?

4. Используя схему моделирования, приведенную на рис.2.2, составьте модель вход-состояние-выход, отличную от канонической управляемой формы.

Таблица 2.1

Варианты значений матриц *A, B* и *C*

Номер варианта	n	A	B	C^T	Номер варианта	n	A	B	C^T
1	2	$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0{,}5 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$	7	2	$\begin{vmatrix} 1 & -15 \\ 0{,}5 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{vmatrix}$
2	2	$\begin{vmatrix} -0{,}5 & 2 \\ -12 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 \\ 0{,}5 \end{vmatrix}$	8	2	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -15 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 10 \\ 1 \end{vmatrix}$
3	2	$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -10 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 \\ 0 \end{vmatrix}$	9	2	$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -15 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 \\ 1 \end{vmatrix}$
4	2	$\begin{vmatrix} 0{,}5 & 1 \\ -15 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix}$	10	2	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -10 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 \\ 2 \end{vmatrix}$
5	2	$\begin{vmatrix} 0{,}5 & -10 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$	11	2	$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -10 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 \\ 1{,}5 \end{vmatrix}$
6	2	$\begin{vmatrix} 1 & -15 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$	12	2	$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix}$

Таблица 2.2

Варианты элементов матрицы преобразования координат $M = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m_{11}	2	1	0,5	2	4	5	2	2	2,5	-1	1	5
m_{12}	1	5	0	0	0	0	3	8	2	0	2	0
m_{21}	0	0	6	5	-2	6	0	0	0	0	0	5
m_{22}	4	2	2	0,5	0,5	2	5	2	4	-1	2	1