

## Регуляторы и астатизмы

Open-Loop vs Closed-Loop

### Open-Loop (программное управление)



Входное воздействие  
рассчитано заранее

Таким способом можно управлять довольно простыми объектами (например: стиральная машина и т.д.), однако управлять таким образом более сложными объектами достаточно проблематично (самолёт).

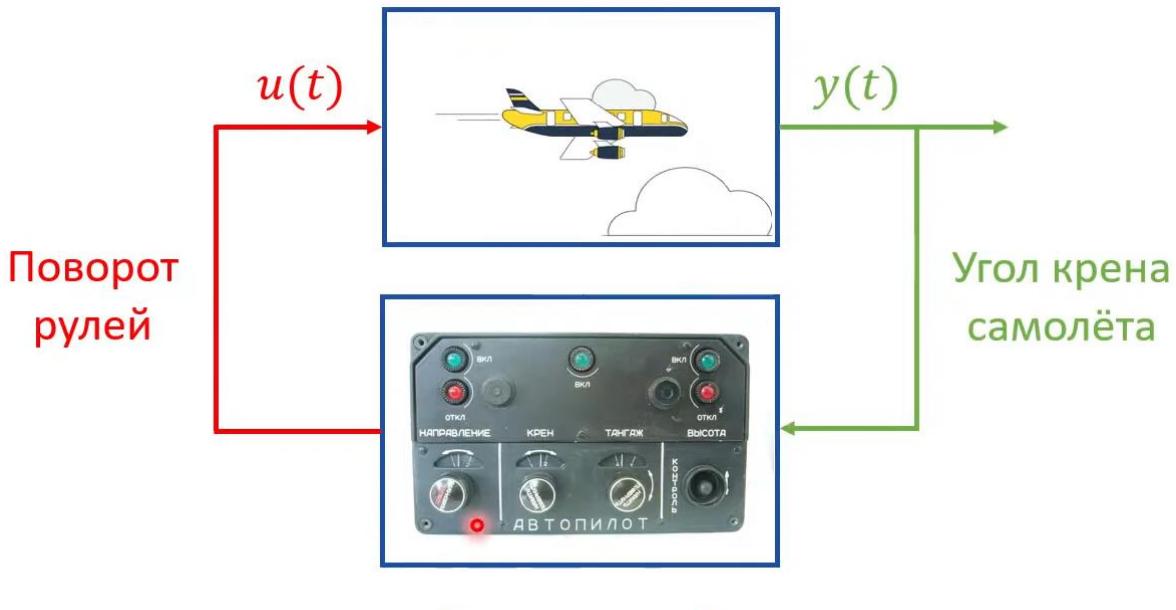
### Closed-Loop (управление по обратной связи)



Задача стабилизации

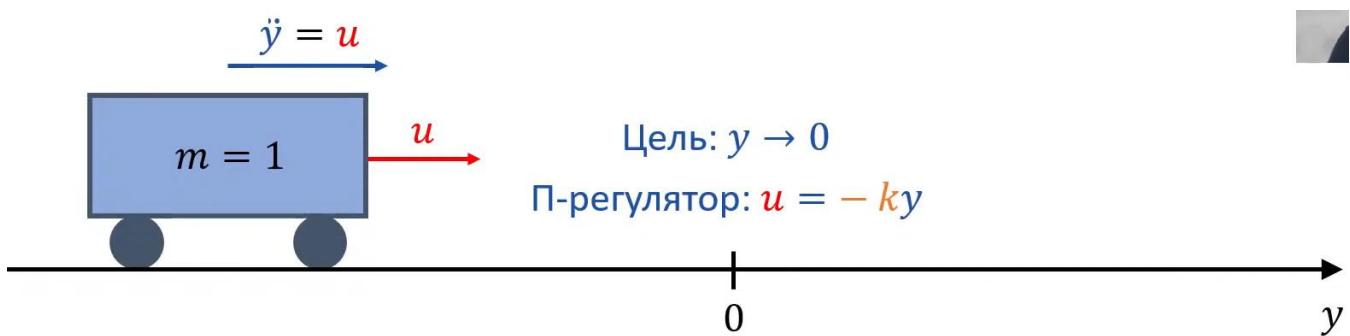


Цель:  $y \rightarrow 0$



Цель:  $y \rightarrow 0$

Задача стабилизации: простейший пример



Как будет двигаться тележка при использовании П-регулятора?

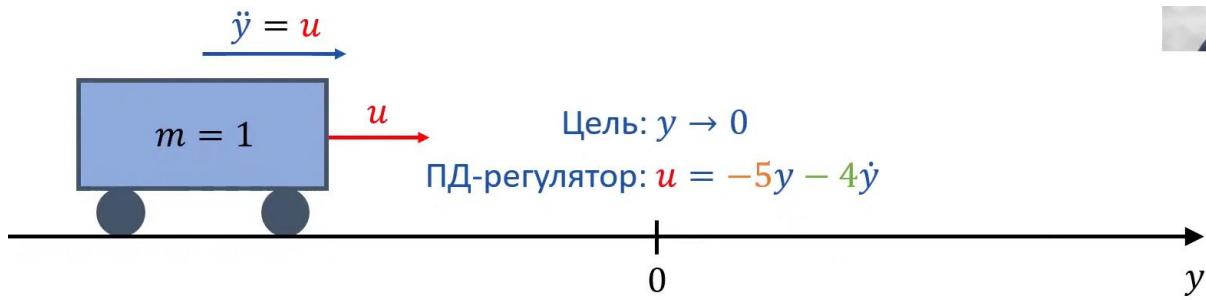
Дифференциальное уравнение:  $\ddot{y} = -ky$

Характеристическое уравнение:  $\lambda^2 + k = 0$

Алгебраические корни:  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{k}i$

Соответствующие моды:  $\sin(\sqrt{k}t), \cos(\sqrt{k}t)$

Общее решение:  $y(t) = c_1 \sin(\sqrt{k}t) + c_2 \cos(\sqrt{k}t)$



Как будет двигаться тележка при использовании этого ПД-регулятора?

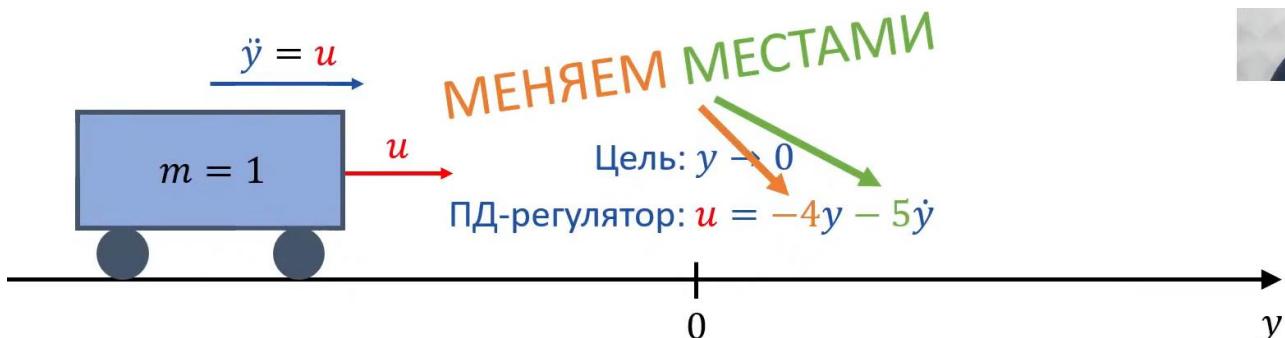
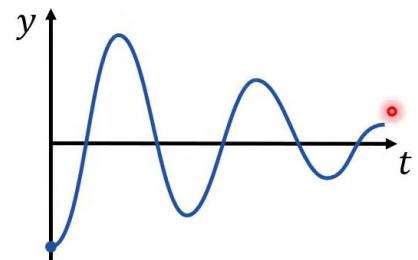
Дифференциальное уравнение:  $\ddot{y} = -5y - 4\dot{y}$

Характеристическое уравнение:  $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$

Алгебраические корни:  $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$

Соответствующие моды:  $e^{-2t} \sin t, e^{-2t} \cos t$

Общее решение:  $y(t) = c_1 e^{-2t} \sin t + c_2 e^{-2t} \cos t$



Как будет двигаться тележка при использовании такого ПД-регулятора?

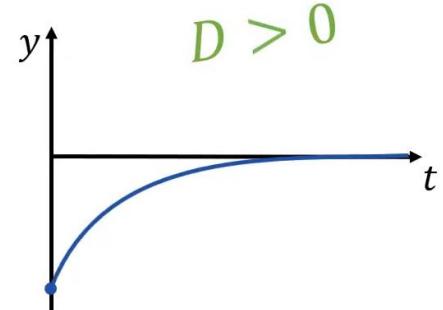
Дифференциальное уравнение:  $\ddot{y} = -4y - 5\dot{y}$

Характеристическое уравнение:  $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

Алгебраические корни:  $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1$

Соответствующие моды:  $e^{-4t}, e^{-t}$

Общее решение:  $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$



Задача стабилизации: абстрактный пример

Объект

$$\ddot{y} - 2\ddot{y} + 3\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = u$$

Регулятор

$$u = 0$$

Замкнутая система

$$\ddot{y} - 2\ddot{y} + 3\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = 0$$

Объект

$$\ddot{y} - 2\ddot{y} + 3\dot{y} - 4\dot{y} + 5y = u$$

Регулятор

$$u = k_0 y$$

•

Замкнутая система

$$\ddot{y} - 2\ddot{y} + 3\dot{y} - 4\dot{y} + (5 - k_0)y = 0$$

Объект

$$\ddot{y} - 2\ddot{y} + 3\dot{y} - 4\dot{y} + 5y = u$$

Регулятор

$$u = k_0 y + k_1 \dot{y}$$

Замкнутая система

$$\ddot{y} - 2\ddot{y} + 3\dot{y} + (-4 - k_1)\dot{y} + (5 - k_0)y = 0$$

Объект

$$\ddot{y} - 2\ddot{y} + 3\dot{y} - 4\dot{y} + 5y = u$$

Регулятор

$$u = k_0 y + k_1 \dot{y} + k_2 \ddot{y}$$

Замкнутая система

$$\ddot{y} - 2\ddot{y} + (3 - k_2)\dot{y} + (-4 - k_1)\dot{y} + (5 - k_0)y = 0$$

Объект

$$\ddot{y} - 2\ddot{y} + 3\dot{y} - 4\dot{y} + 5y = u$$

Регулятор

$$u = k_0 y + k_1 \dot{y} + k_2 \ddot{y} + k_3 \dddot{y}$$

•

Замкнутая система

$$\ddot{y} + (-2 - k_3)\ddot{y} + (3 - k_2)\dot{y} + (-4 - k_1)\dot{y} + (5 - k_0)y = 0$$

Данную систему сможет стабилизировать только ПДДД регулятор

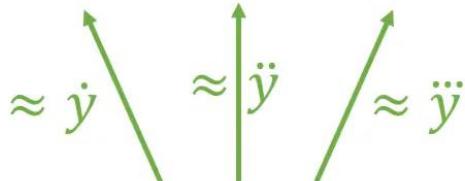
Чем больше производных использует регулятор,  
тем устойчивее он может сделать систему

$$u = k_0 y + k_1 \dot{y} + k_2 \ddot{y} + k_3 \dddot{y} + \dots$$

$$W_{\text{рег}}(p) = k_0 + k_1 p + k_2 p^2 + k_3 p^3 + \dots$$

Но такой регулятор физически нереализуем  
(порядок числителя больше порядка знаменателя)

$$u = k_0 y + k_1 \dot{y} + k_2 \ddot{y} + k_3 \dddot{y} + \dots$$



Производные можно вычислять приближённо

$$\dot{y} \approx \frac{p}{0.0001p + 1} [y]$$

Но это всё равно опасно,  
потому что усиливаются шумы

Задача слежения



Цель управления

$$y \rightarrow g$$

$$(e \rightarrow 0)$$



Цель управления

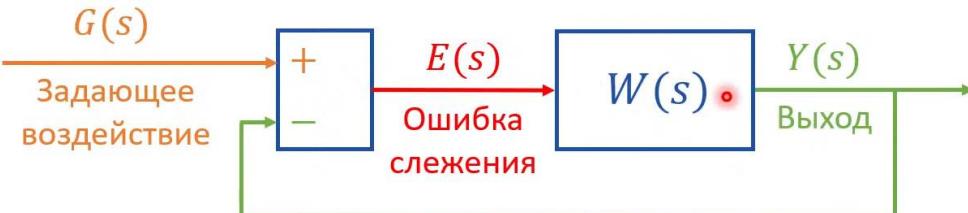
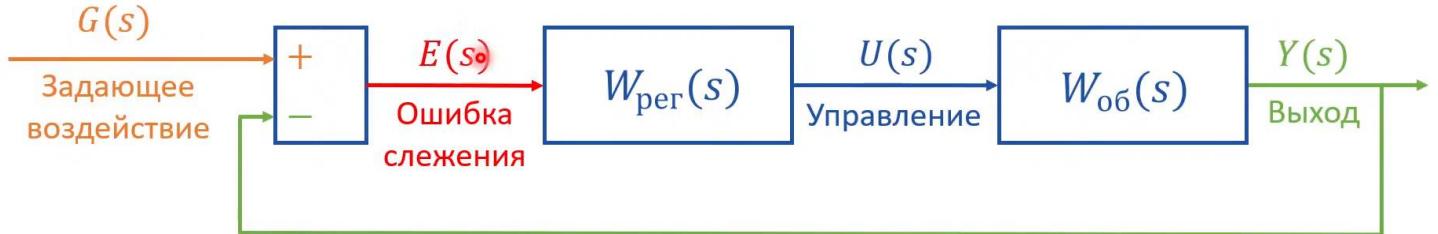
$$y \rightarrow g$$

$$(e \rightarrow 0)$$

## Передаточные функции замкнутой системы



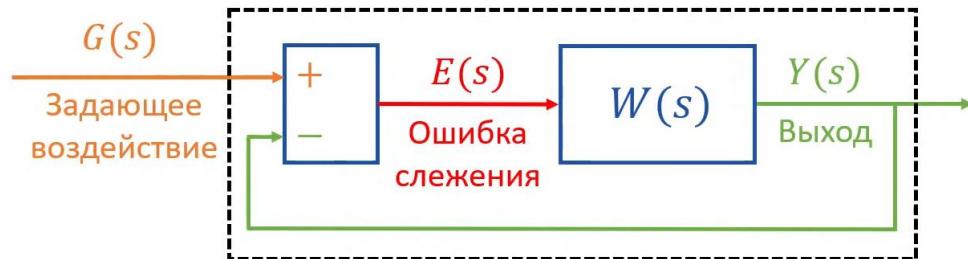
Можно записать с помощью передаточных функций



Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s)$$

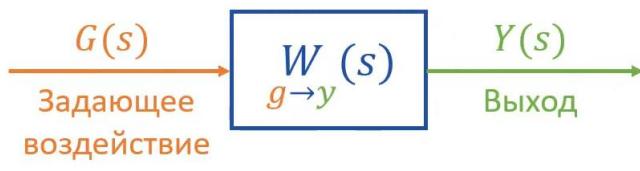
$$W(s) = W_{\text{рег}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s)$$



Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s)$$

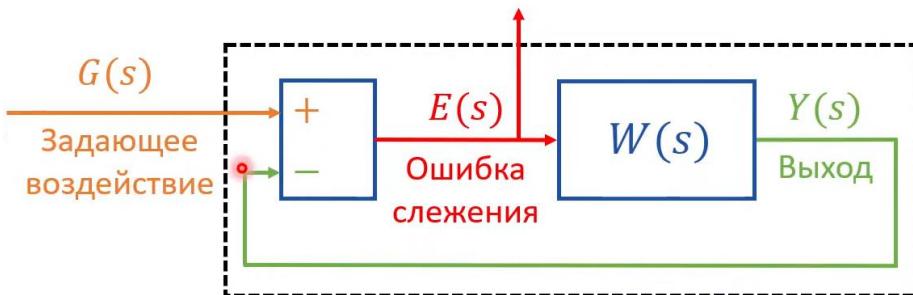
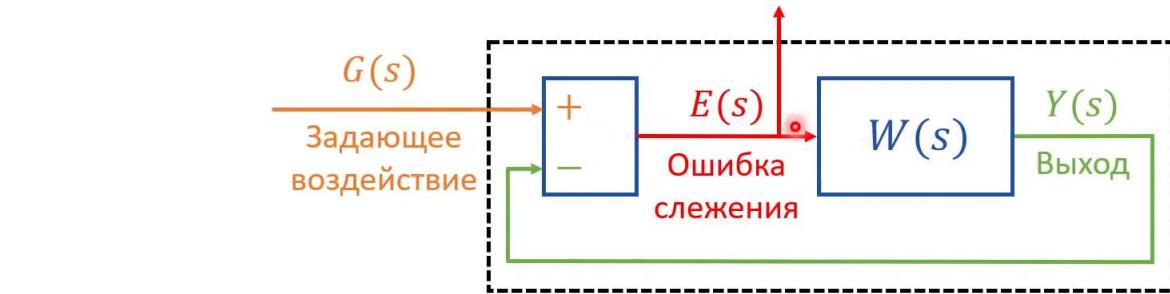
Заменим на один блок



Передаточная функция замкнутой системы

$$W(s)_{g \rightarrow y}$$

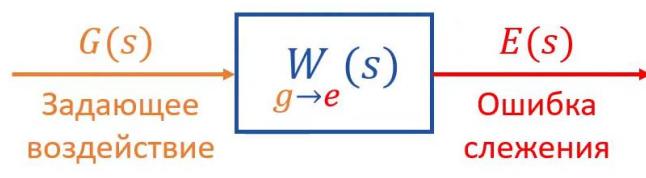
Если для нас важна **ошибка слежения**,  
мы можем выбрать её в качестве **выхода**



Передаточная функция  
разомкнутой системы

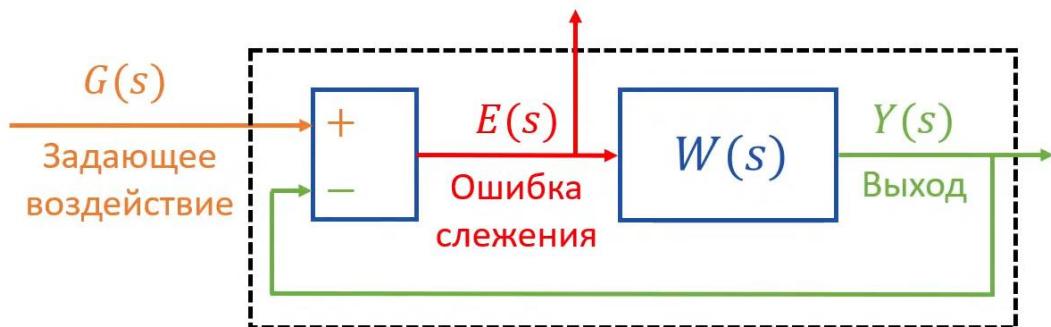
$$W(s)$$

Заменим на один блок



Передаточная функция  
по ошибке

$$W_{g \rightarrow e}(s)$$



$$G - Y = E$$

$$E \cdot W = Y$$

Выражаем связь между  $G$  и  $Y$

$$(G - Y) \cdot W = Y$$

$$G \cdot W = Y \cdot (1 + W)$$

$$\frac{Y}{G} = \frac{W}{(1 + W)}$$

Выражаем связь между  $G$  и  $E$

$$E \cdot W = G - E$$

$$(1 + W) \cdot E = G$$

$$\frac{E}{G} = \frac{1}{(1 + W)}$$

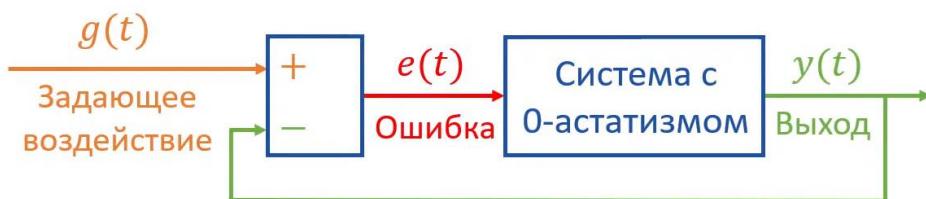
## Передаточная функция от $G$ к $Y$

$$W_{g \rightarrow y} = \frac{W}{(1 + W)}$$

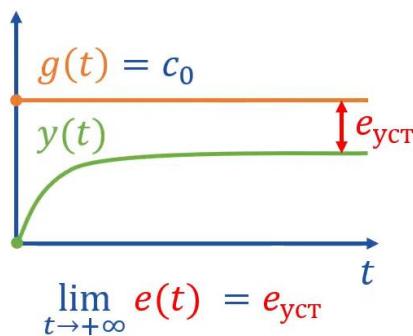
## Передаточная функция от $G$ к $E$

$$W_{g \rightarrow e} = \frac{1}{(1 + W)}$$

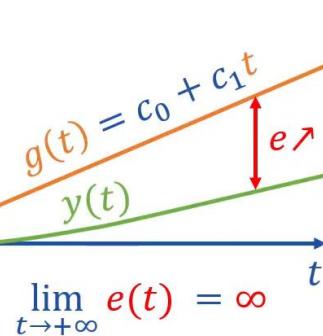
Порядок астатизма: нулевой



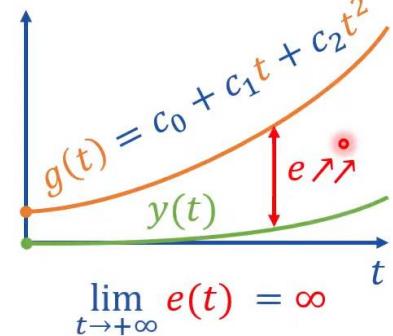
Если задающее воздействие будет  
... постоянным



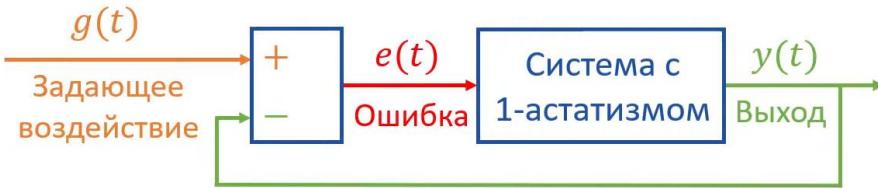
... линейным



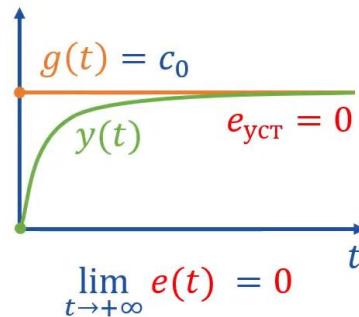
... квадратичным



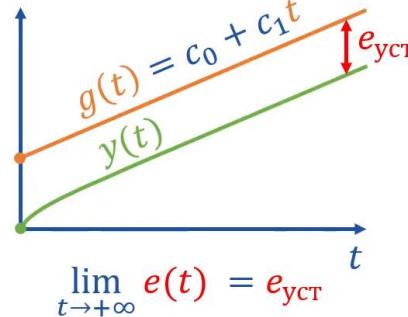
Порядок астатизма: первый



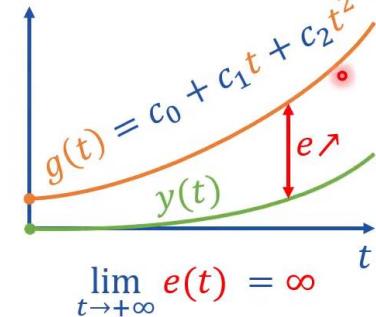
Если задающее воздействие будет  
... постоянным



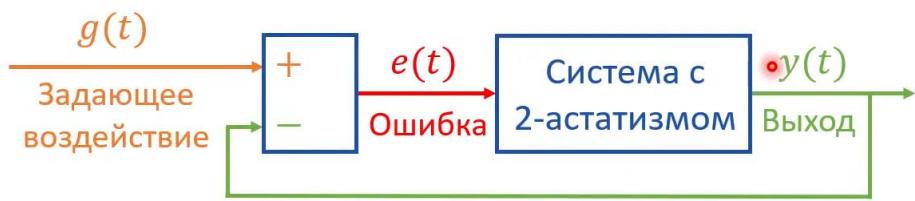
... линейным



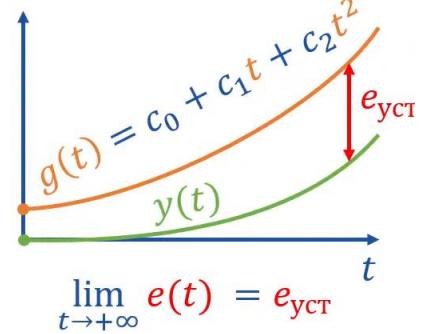
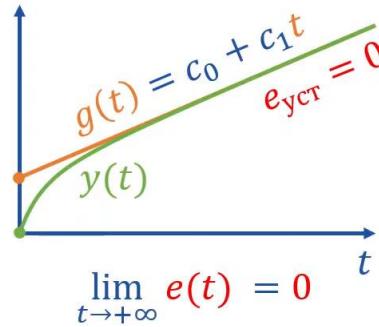
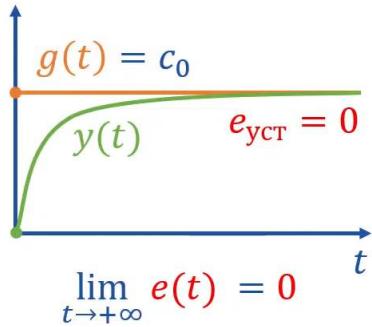
... квадратичным



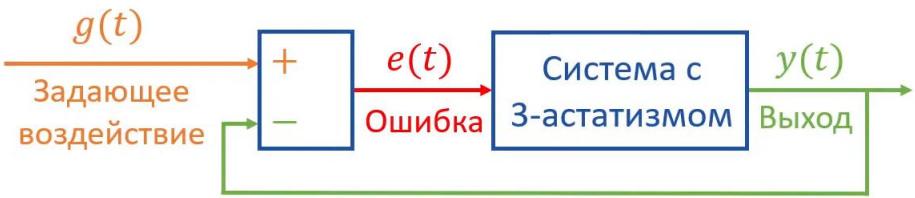
Порядок астатизма: второй



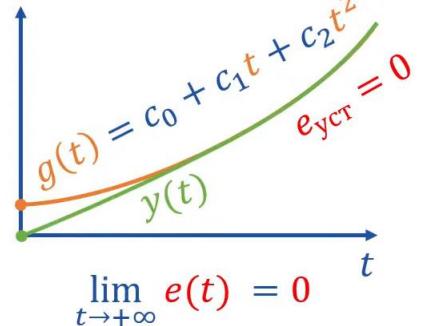
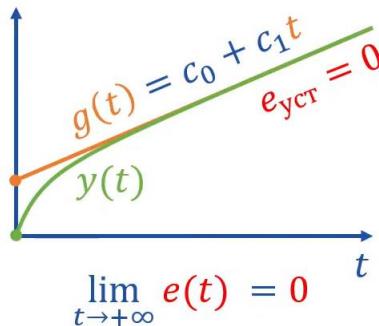
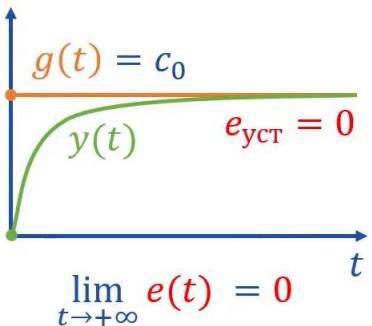
Если задающее воздействие будет  
... ПОСТОЯННЫМ      ... линейным      ... квадратичным



Порядок астатизма: третий



Если задающее воздействие будет  
... ПОСТОЯННЫМ      ... линейным      ... квадратичным

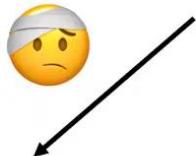


Если все полюса  $sY(s)$  имеют  
строго отрицательную вещественную часть, то

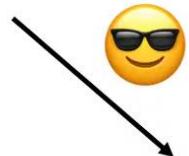
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

В противном случае предел  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$   
не существует или равен бесконечности

Знаем:  $Y(s) = \frac{7s^2 + 63s + 150}{s(s+3)(s+5)^2}$



Хотим узнать:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$



$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+3} + \frac{1}{(s+5)^2}$$

$$sY(s) = \frac{7s^2 + 63s + 150}{(s+3)(s+5)^2}$$

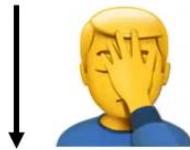
$$y(t) = 2 - 2e^{-3t} + te^{-5t}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{150}{3 \cdot 5^2} = 2$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 2$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 2$$

Знаем:  $Y(s) = \frac{7s^2 + 63s + 150}{s(s - 3)(s + 5)^2}$  Хотим узнать:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$

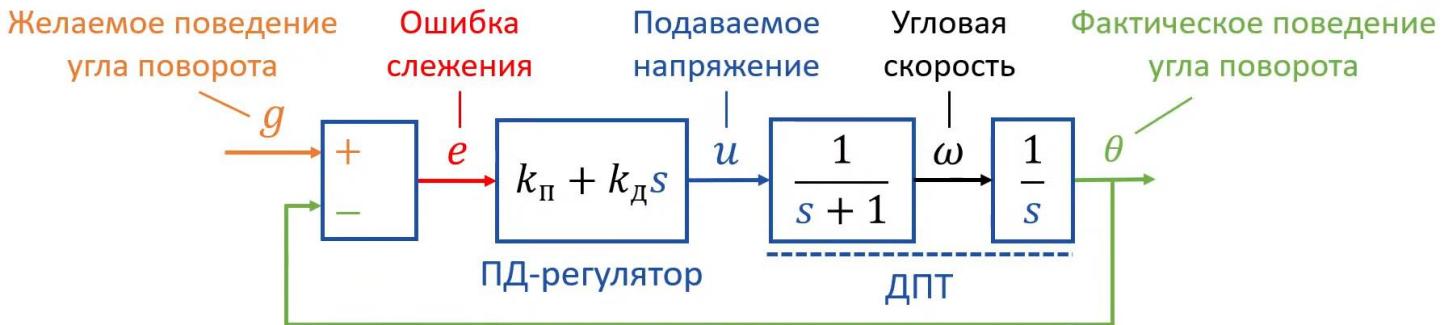


$$sY(s) = \frac{7s^2 + 63s + 150}{(s - 3)(s + 5)^2}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{150}{-3 \cdot 5^2} = -2$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -2$$

Двигатель постоянного тока с ПД-регулятором

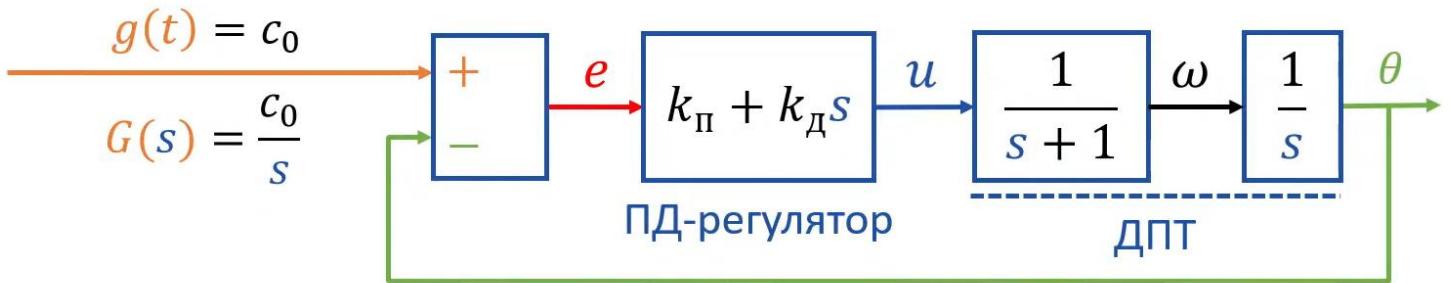


Передаточная функция по ошибке

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + (k_{\pi} + k_{\Delta}s) \cdot \left(\frac{1}{s+1}\right) \cdot \frac{1}{s}}$$

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k_{\pi} + k_{\Delta}s}{s(s+1)}} \quad W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s(s+1)}{s^2 + (1 + k_{\Delta})s + k_{\pi}}$$

Рассмотрим постоянное задающее воздействие



## Передаточная функция по ошибке

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{s(s+1)}{s^2 + (1+k_d)s + k_\pi}$$

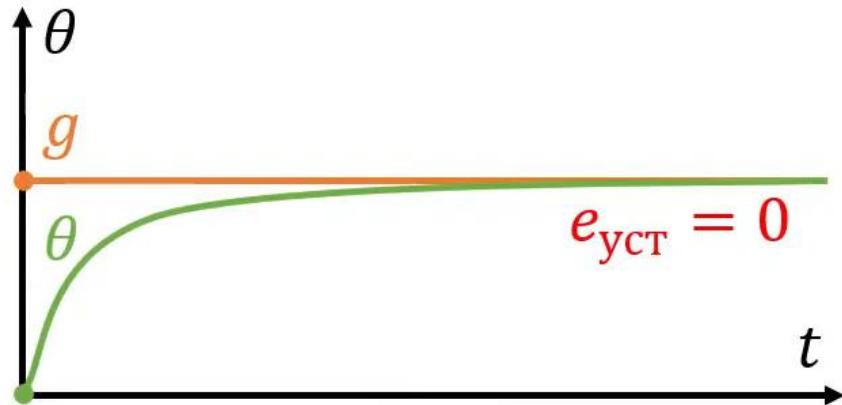
## Ошибка слежения

$$E(s) = W_{g \rightarrow e}(s) \cdot G(s)$$

$$E(s) = \frac{s(s+1)}{s^2 + (1+k_d)s + k_\pi} \cdot \frac{c_0}{s} \quad E(s) = \frac{(s+1) \cdot c_0}{s^2 + (1+k_d)s + k_\pi}$$

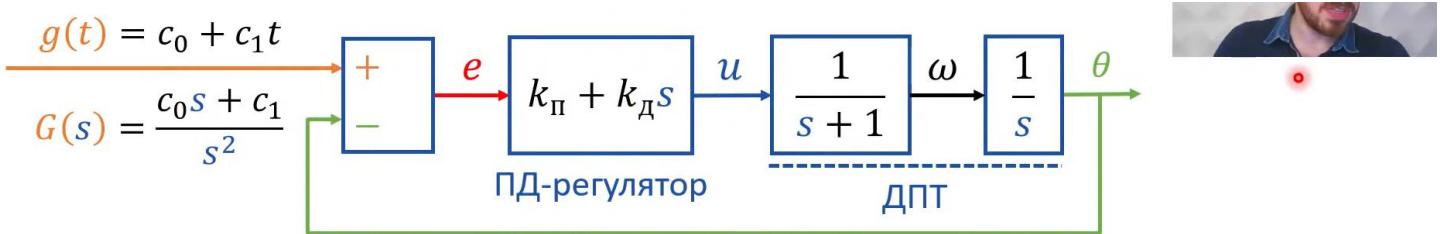
## Установившаяся ошибка

$$e_{\text{уст}} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = 0$$



Рассмотрим линейно растущее задающее воздействие

$$g(t) = c_0 + c_1 t \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) = \frac{c_0 s + c_1}{s^2}$$



Передаточная функция по ошибке

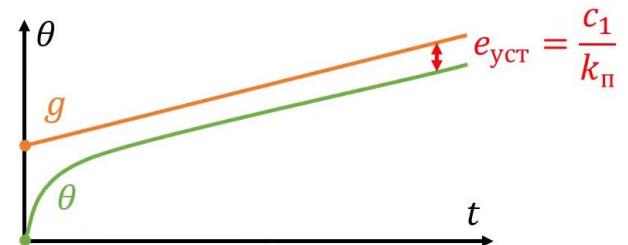
$$W(g \rightarrow e) = \frac{s(s+1)}{s^2 + (1+k_D)s + k_{\Pi}}$$

Ошибка слежения

$$E(s) = \frac{(s+1) \cdot (c_0 s + c_1)}{(s^2 + (1+k_D)s + k_{\Pi}) \cdot s}$$

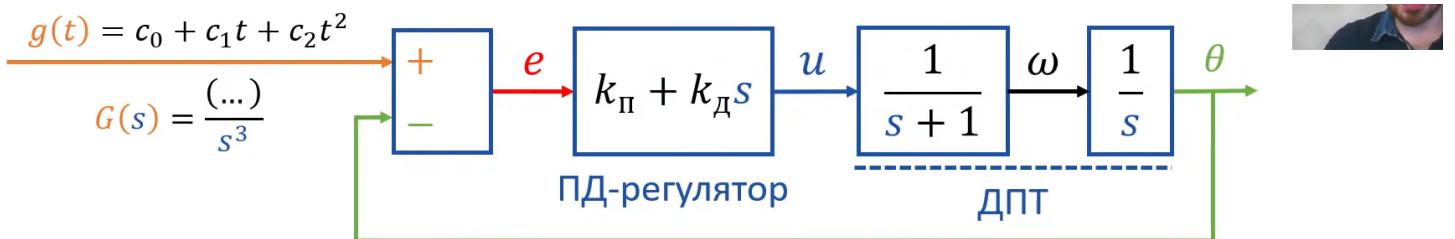
Установившаяся ошибка

$$e_{\text{уст}} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \frac{c_1}{k_{\Pi}}$$



Рассмотрим квадратично растущее задающее воздействие

$$g(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) = \frac{...}{s^3}$$



Передаточная функция по ошибке

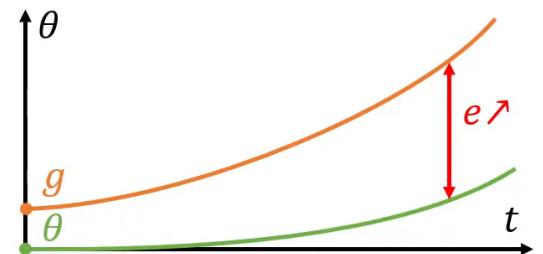
$$W(g \rightarrow e) = \frac{s \cdot (...) }{(...)}$$

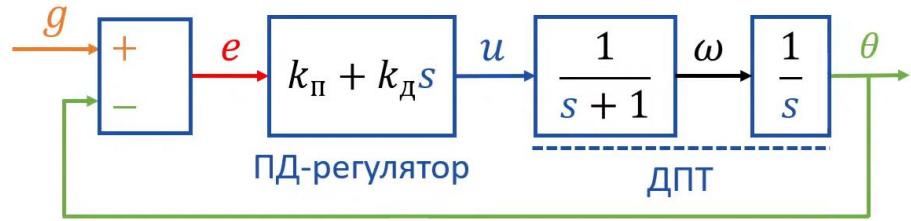
Ошибка слежения

$$E(s) = \frac{...}{(... \cdot s^2)}$$

Установившаяся ошибка

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{...}{(... \cdot s)} = \infty$$

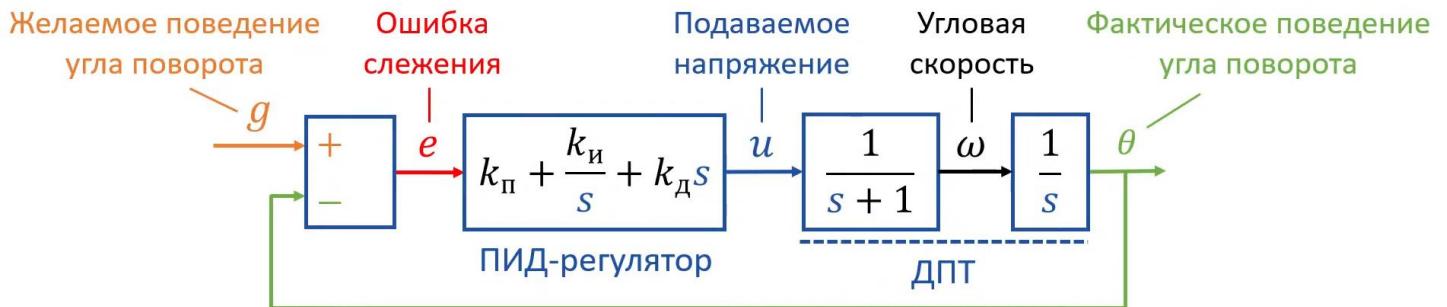




Какой порядок астатизма имеет система?

1

Двигатель постоянного тока с ПИД-регулятором

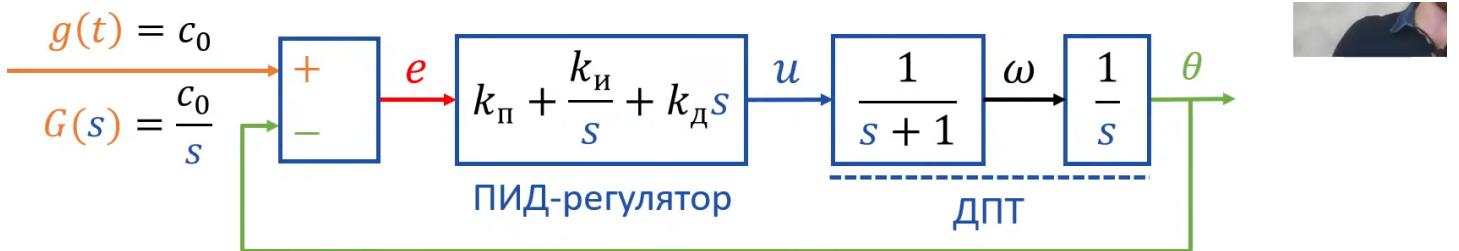


Передаточная функция по ошибке

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + \left( k_n + \frac{k_i}{s} + k_d s \right) \cdot \left( \frac{1}{s+1} \right) \cdot \frac{1}{s}}$$

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{s^2(s+1)}{s^3 + (1+k_d)s^2 + k_n s + k_i}$$

Рассмотрим постоянное задающее воздействие



### Передаточная функция по ошибке

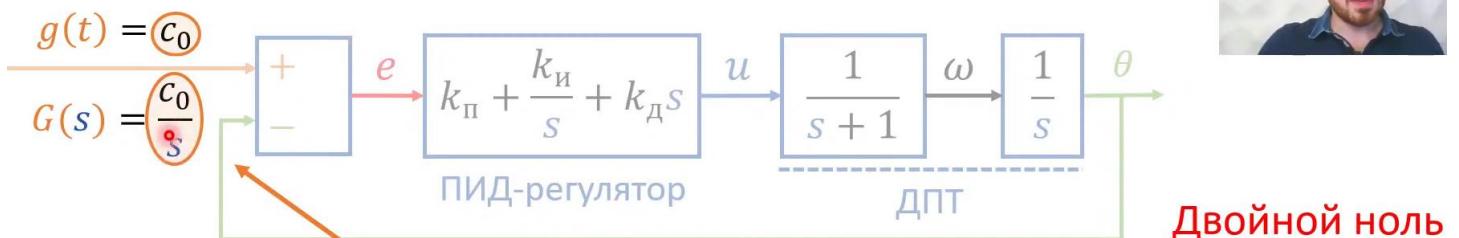
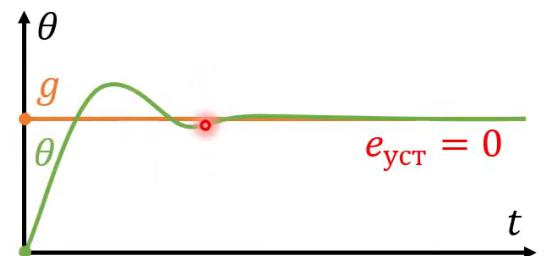
$$W(s) = \frac{s^2 \cdot (\dots)}{(\dots)}$$

### Установившаяся ошибка

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 \cdot (\dots)}{(\dots)} = 0$$

### Ошибка сложения

$$E(s) = \frac{s^2 \cdot (\dots)}{(\dots)} \cdot \frac{c_0}{s} = \frac{s \cdot (\dots)}{(\dots)}$$



**Двойной ноль**

### Передаточная функция по ошибке

$$W(s) = \frac{s^2 \cdot (\dots)}{(\dots)}$$

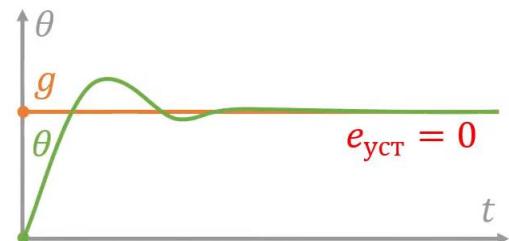
**Постоянное  
воздействие**

### Установившаяся ошибка

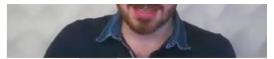
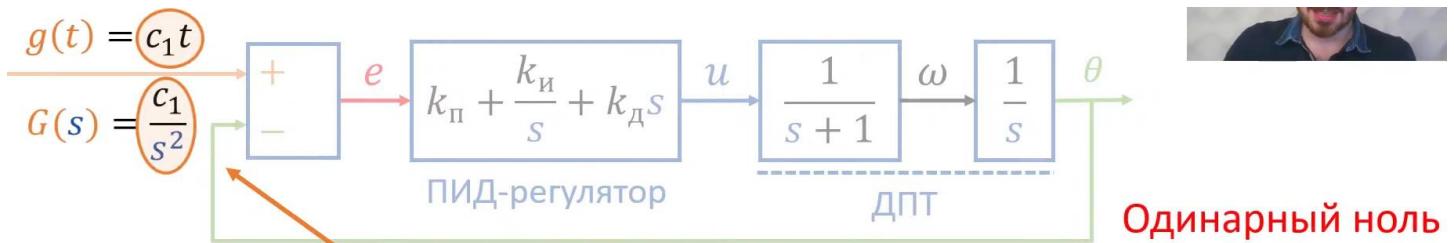
$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 \cdot (\dots)}{(\dots)} = 0$$

$$E(s) = \frac{s^2 \cdot (\dots)}{(\dots)} \cdot \frac{c_0}{s} = \frac{s \cdot (\dots)}{(\dots)}$$

### Ошибка сложения



Рассмотрим линейно растущее задающее воздействие



Передаточная функция по ошибке

$$W(s) = \frac{s^2 \cdot (...) }{(...)}$$

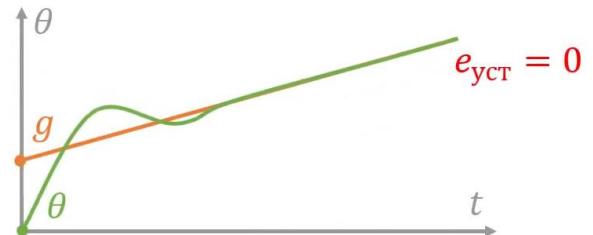
Линейное  
воздействие

Ошибка сложения

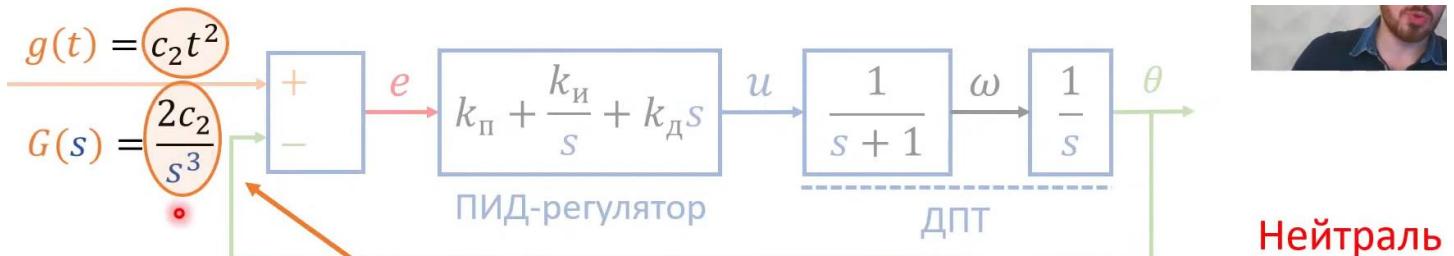
$$E(s) = \frac{s^2 \cdot (...) \cdot \frac{c_1}{s^2}}{(...) \cdot \frac{c_1}{s^2}} = \frac{(...)}{(...)}$$

Установившаяся ошибка

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot (...) }{(...) \cdot (...) \cdot s} = 0$$



Рассмотрим квадратично растущее задающее воздействие



Передаточная функция по ошибке

$$W(s) = \frac{s^2 \cdot (...) }{(...)}$$

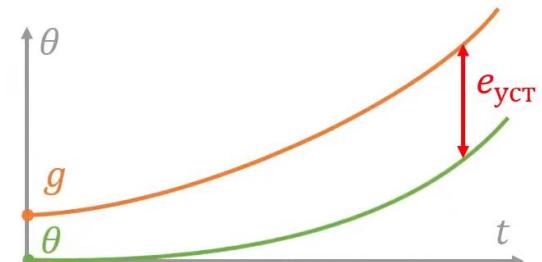
Квадратичное  
воздействие

Ошибка сложения

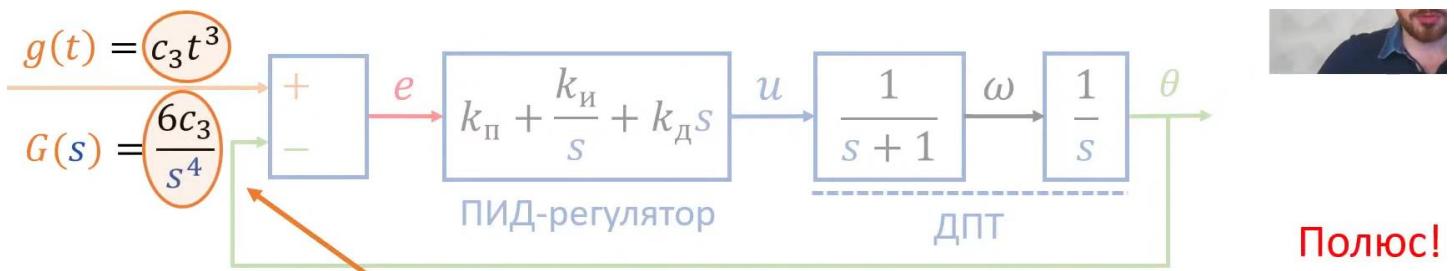
$$E(s) = \frac{s^2 \cdot (...) \cdot \frac{2c_2}{s^3}}{(...) \cdot \frac{2c_2}{s^3}} = \frac{(...)}{(... \cdot s)}$$

Установившаяся ошибка

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(...)}{(...) \cdot (...) \cdot s} = e_{уст}$$



Рассмотрим кубически растущее задающее воздействие



Передаточная функция по ошибке

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{s^2 \cdot (...) }{(...)}$$

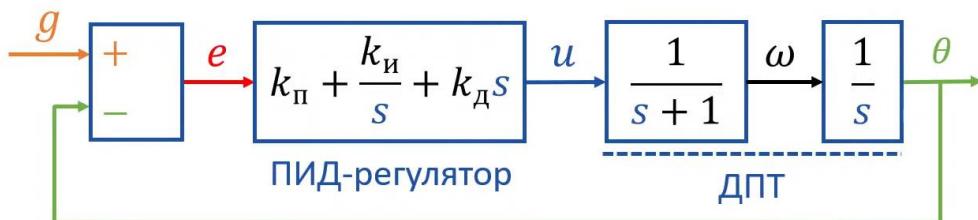
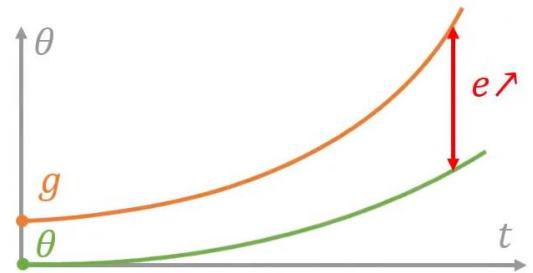
Кубическое  
воздействие

Ошибка сложения

$$E(s) = \frac{s^2 \cdot (...) \cdot \frac{6c_3}{s^4}}{(...) \cdot s^2} = \frac{(...)}{(...) \cdot s^2}$$

Установившаяся ошибка

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(...)}{(...) \cdot s} = \infty$$



Какой порядок астатизма имеет система?

2

Астатизм и передаточные функциции

Как определить порядок астатизма по передаточным функциям?

ПФ по ошибке

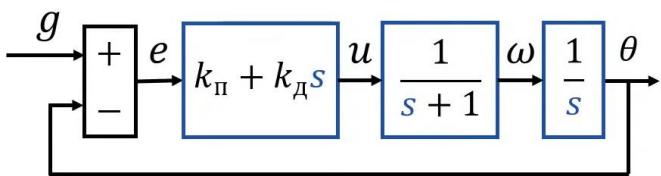
$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{s^p \cdot (...) \cdot ...}{(...) \cdot s^p \cdot (... \cdot s)}$$

ПФ разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{(... \cdot s)}{s^p \cdot (... \cdot s)}$$

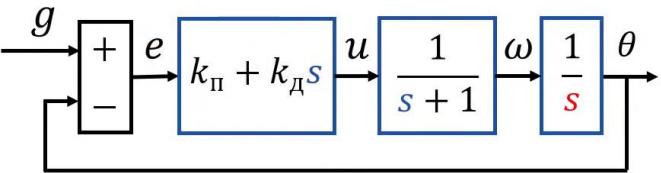
Если дроби больше нельзя сократить,  
то  $p$  – порядок астатизма

### ДПТ + ПД-регулятор



$$W(s) = \frac{s(s+1)}{s^2 + (1+k_d)s + k_n}$$

Астатизм **первого** порядка



**Один** чистый интегратор



Астатизм **первого** порядка

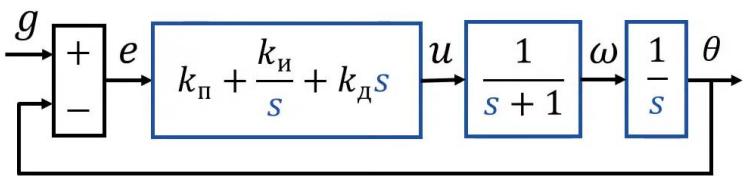
Что значит слово астатизм?

Астатизм – нестатичность, подвижность системы

Чем больше порядок астатизма, тем точнее слежение системы за быстрыми сигналами

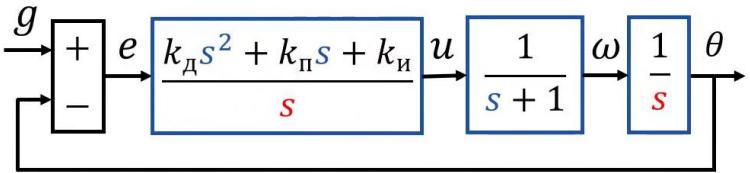
Общие мысли про ПИД-регуляторы

### ДПТ + ПИД-регулятор



$$W(s) = \frac{s^2(s+1)}{s^3 + (1+k_d)s^2 + k_n s + k_i}$$

Астатизм **второго** порядка



**Два** чистых интегратора

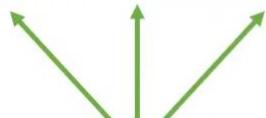


Астатизм **второго** порядка

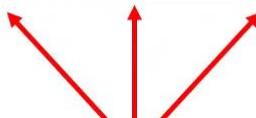
### Передаточная функция обобщённого ПИД-регулятора

$$\dots + k_{d3}s^3 + k_{d2}s^2 + k_{d1}s + k_n + \frac{k_{i1}}{s} + \frac{k_{i2}}{s^2} + \frac{k_{i3}}{s^3} + \dots$$

Улучшают устойчивость

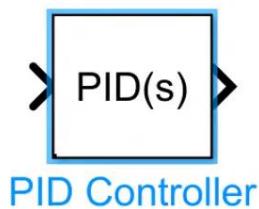


Повышают **порядок астатизма**

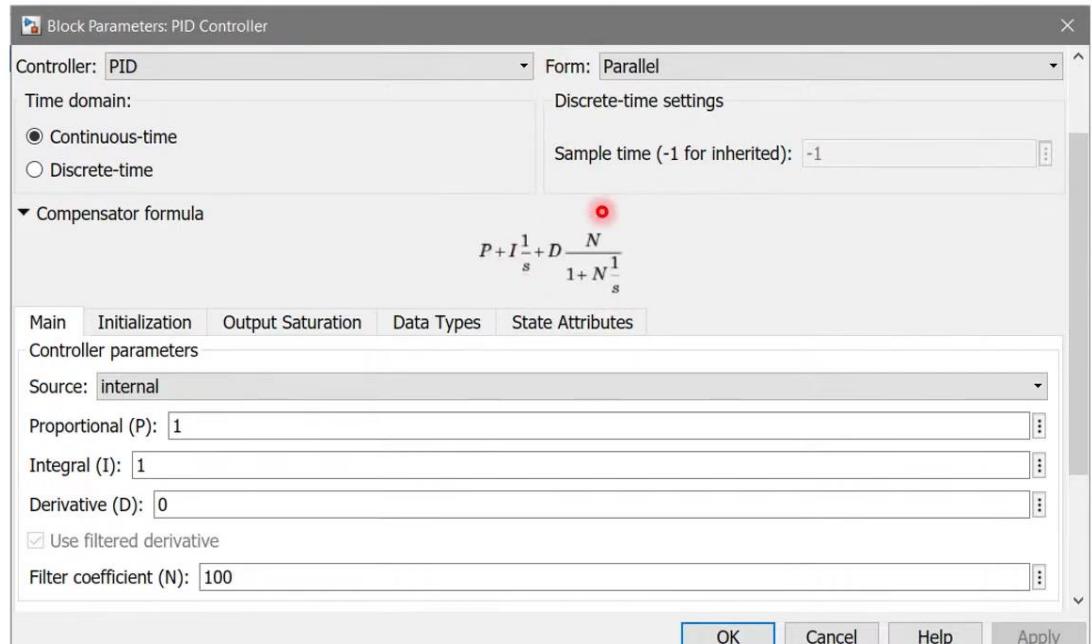


Дифференциальные составляющие усиливают шумы,  
да и реализованы могут быть только приближённо

## Интегральные составляющие повышают порядок системы и ухудшают её устойчивость



PID Controller



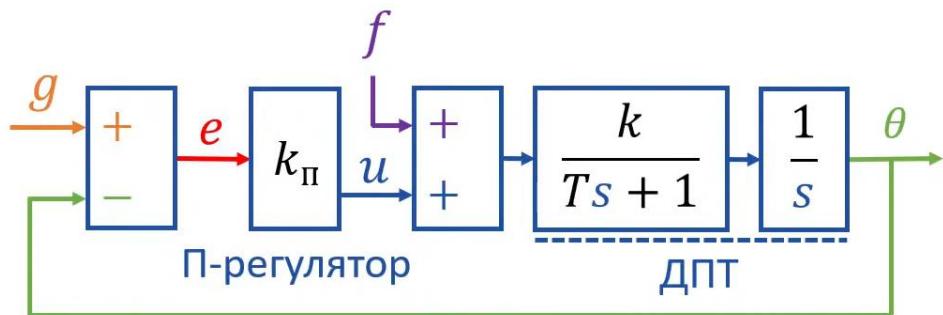
$$P + I \frac{1}{s} + D \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}}$$

$$P + I \frac{1}{s} + D \frac{N}{I + N \frac{1}{s}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} P + I \frac{1}{s} + DS$$

Матлабовский  
ПИД-регулятор

Настоящий двигатель с П-регулятором

Истинный  
ПИД-регулятор

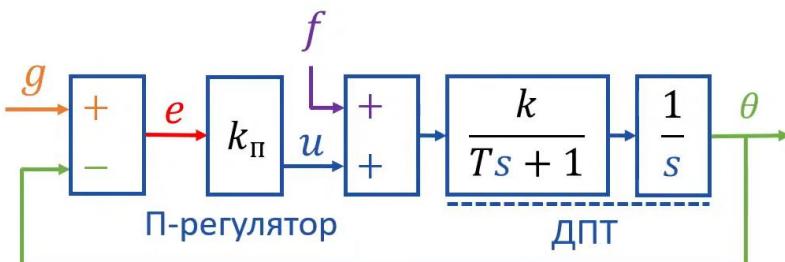


$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{(Ts + 1) \cdot s}{Ts^2 + s + kk_{\pi}}$$

Астатизм первого порядка  
по задающему воздействию

$$W_{f \rightarrow e}(s) = \frac{E(s)}{F(s)} = \frac{-k}{Ts^2 + s + kk_{\pi}}$$

Астатизм нулевого порядка  
по внешнему возмущению



$$k = 114.49, ^{\circ}/(B \cdot c)$$

$$T = 0.077, \text{с}$$

$$g(t) = c_0$$

$$G(s) = \frac{c_0}{s}$$

Постоянное  
задающее  
воздействие

$$f(t) = f_0$$

$$F(s) = \frac{f_0}{s}$$

Постоянное  
внешнее  
возмущение

$$E(s) = W_{g \rightarrow e}(s) \cdot G(s) + W_{f \rightarrow e}(s) \cdot F(s)$$

$$g(t) = c_0$$

$$G(s) = \frac{c_0}{s}$$

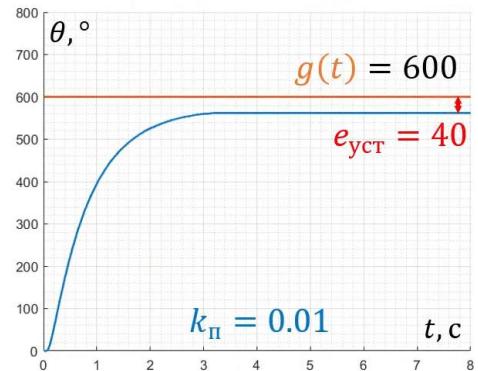
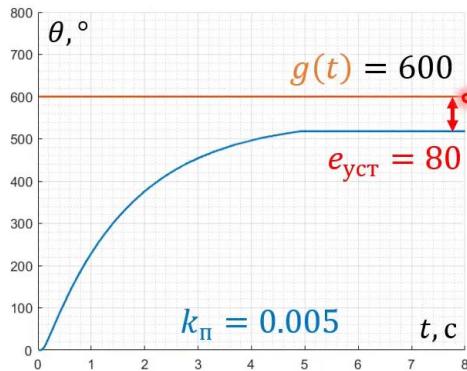
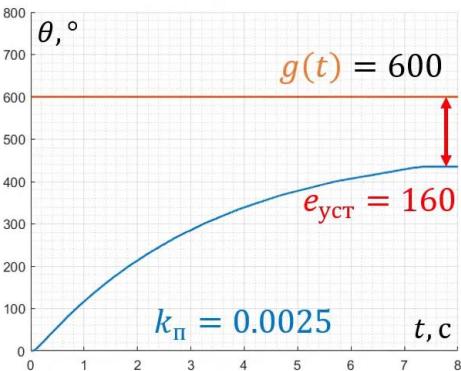
$$f(t) = f_0$$

$$F(s) = \frac{f_0}{s}$$

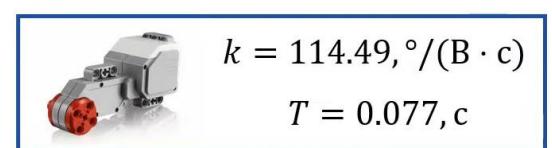
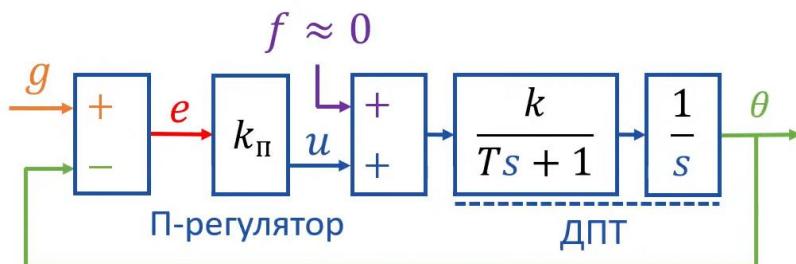
Установившаяся ошибка обратно  
пропорциональна коэффициенту регулятора

$$E(s) = \frac{(Ts + 1) \cdot s}{Ts^2 + s + kk_{\pi}} \cdot \left(\frac{c_0}{s}\right) + \frac{-k}{Ts^2 + s + kk_{\pi}} \cdot \left(\frac{f_0}{s}\right)$$

$$e_{\text{уст}} = 0 + \left(-\frac{f_0}{k_{\pi}}\right) = -\frac{f_0}{k_{\pi}}$$



Рассмотрим линейно и квадратично растущее задающее воздействие (в этом случае сила трения покоя будет примерно равна 0)



$$g(t) = c_0 + c_1 t$$

$$G(s) = \frac{c_0 s + c_1}{s^2}$$

$$E(s) \underset{g \rightarrow e}{=} W(s) \cdot G(s)$$

Линейно растущее  
задающее  
воздействие

$$g(t) = c_0 + c_1 t$$

$$G(s) = \frac{c_0 s + c_1}{s^2}$$

$$E(s) = \frac{(T s + 1) \cdot s}{T s^2 + s + k k_{\Pi}} \cdot \left( \frac{c_0 s + c_1}{s^2} \right)$$

Линейно растущее  
задающее  
воздействие

Установившаяся ошибка  
обратно пропорциональна  
коэффициенту регулятора

$$e_{yust} = \frac{c_1}{k k_{\Pi}}$$

$$g(t) = c_0 + c_1 t$$

$$G(s) = \frac{c_0 s + c_1}{s^2}$$

Линейно растущее  
задающее  
воздействие

$$E(s) = \frac{(Ts + 1) \cdot s}{Ts^2 + s + k_{\pi}} \cdot \left( \frac{c_0 s + c_1}{s^2} \right)$$

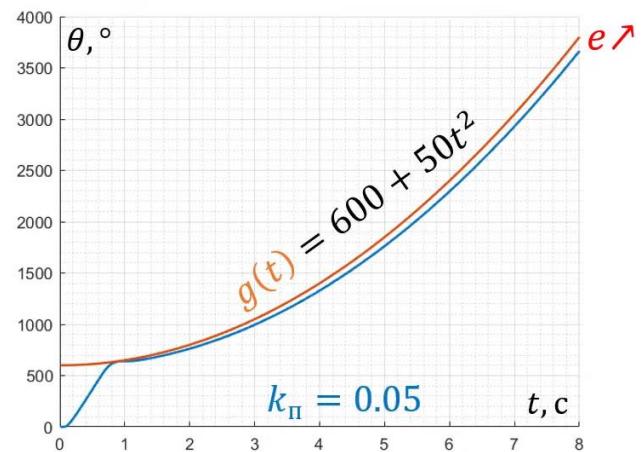
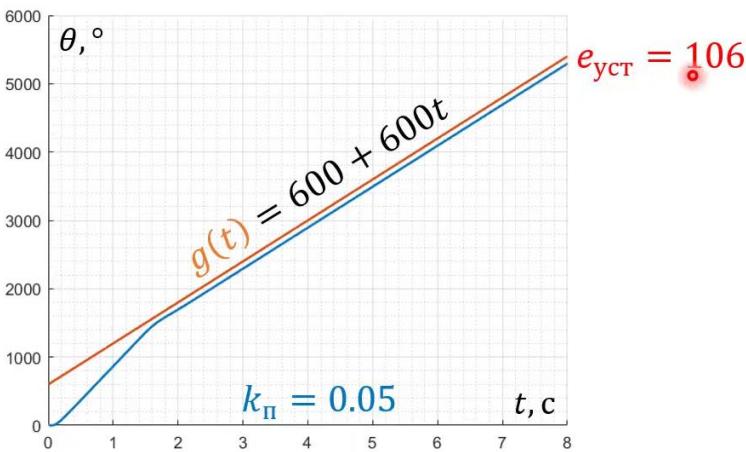
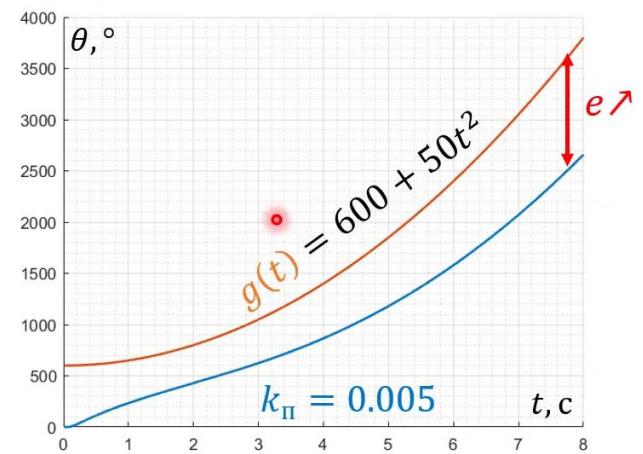
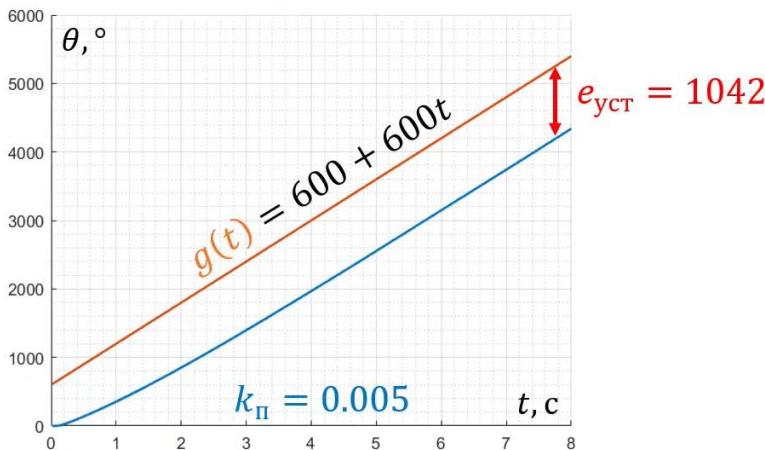
$$e_{\text{уст}} = \frac{c_1}{k_{\pi}}$$

Для значений

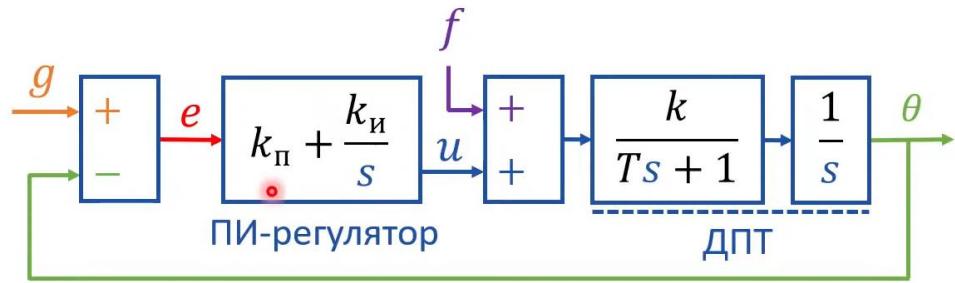
$$g(t) = 600 + 600t$$

$$k_{\pi} = 0.005$$

$$e_{\text{уст}} = \frac{600}{114 \cdot 0.005} = 1050$$

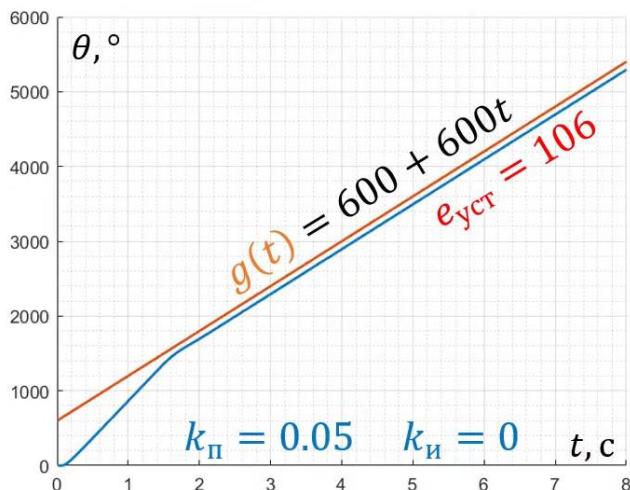


Настоящий двигатель с ПИ-регулятором



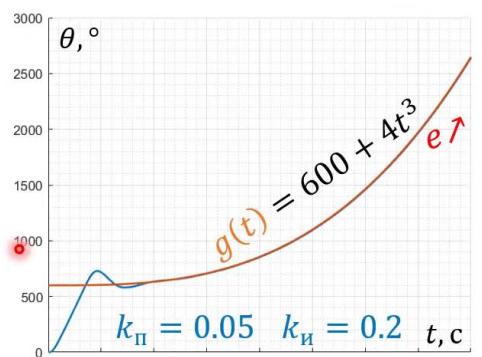
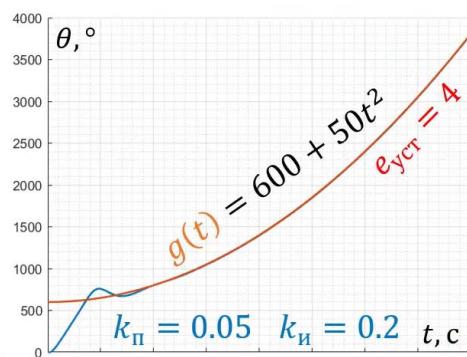
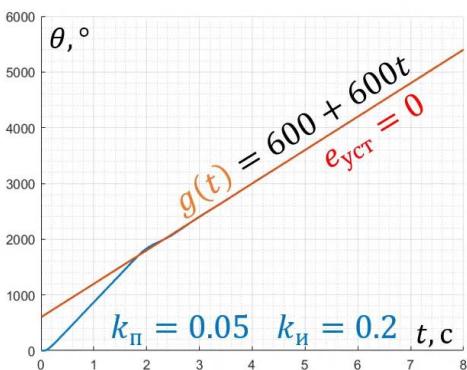
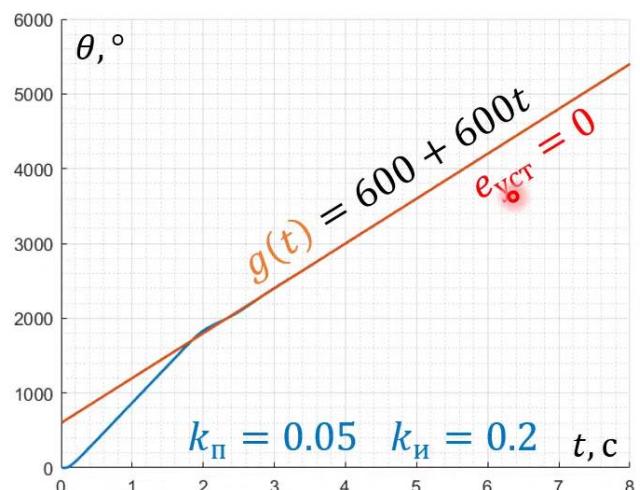
$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{(Ts + 1) \cdot s^2}{T s^3 + s^2 + k k_\pi s + k_i}$$

Астатизм второго порядка  
по задающему воздействию



$$W_{f \rightarrow e}(s) = \frac{E(s)}{F(s)} = \frac{-ks}{T s^3 + s^2 + k k_\pi s + k_i}$$

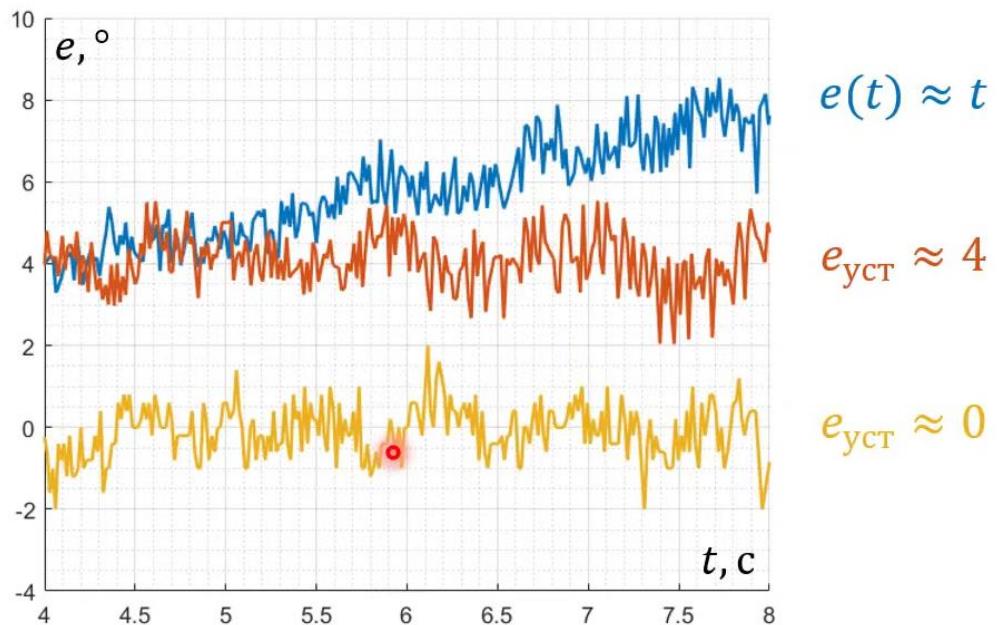
Астатизм первого порядка  
по внешнему возмущению



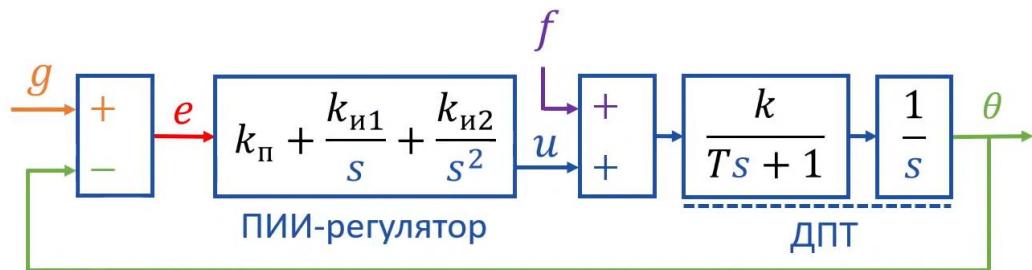
$$g(t) = 600 + 4t^3$$

$$g(t) = 600 + 50t^2$$

$$g(t) = 600 + 600t$$



Настоящий двигатель с ПИИ-регулятором

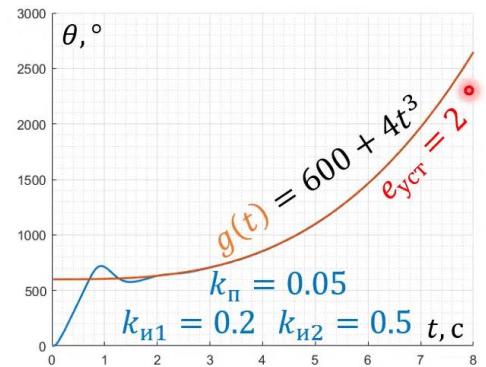
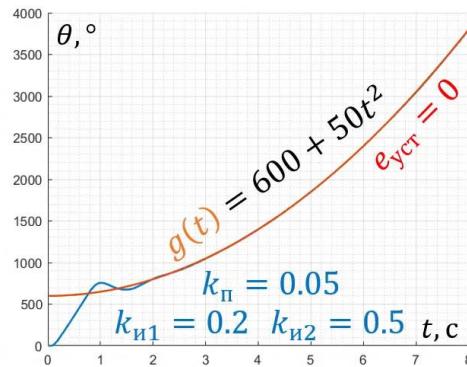
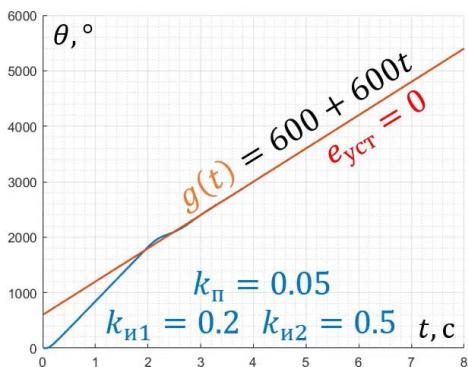


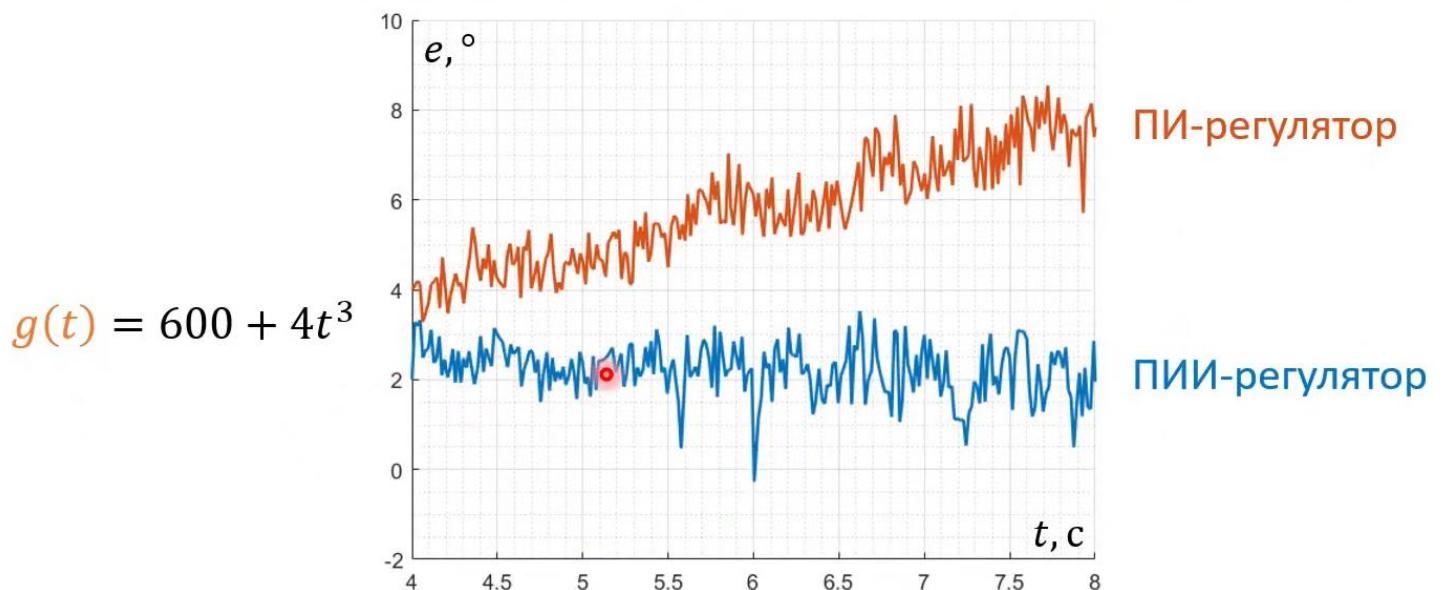
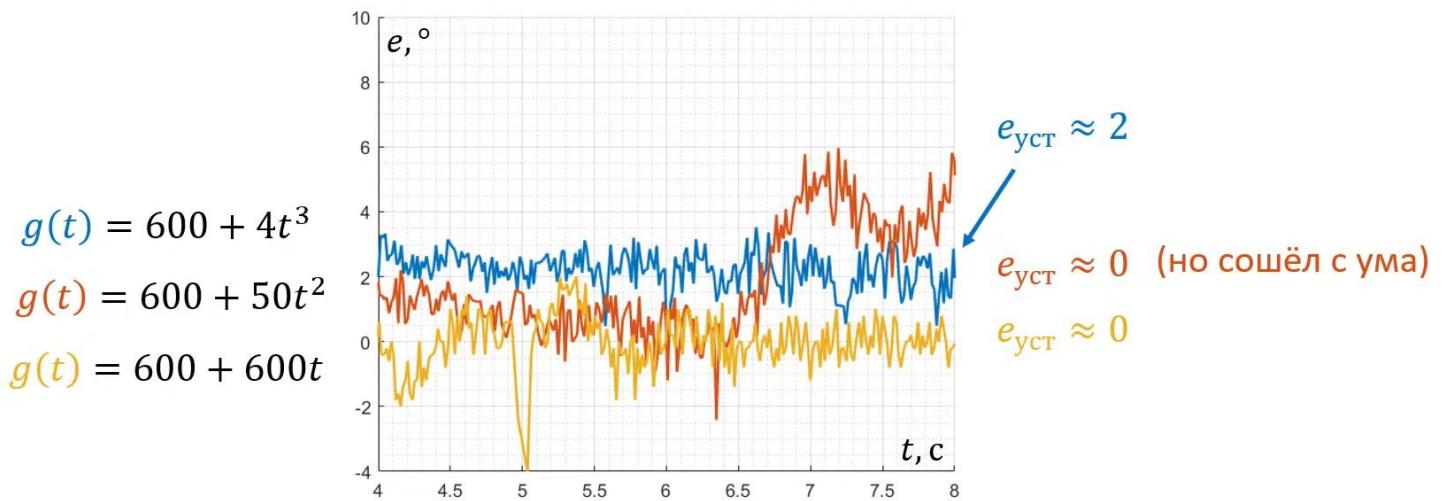
$$W_{g \rightarrow \theta}(s) = \frac{(Ts + 1) \cdot s^3}{T s^4 + s^3 + k k_\pi s^2 + k_{i1} s + k_{i2}}$$

Астатизм третьего порядка  
по задающему воздействию

$$W_{f \rightarrow \theta}(s) = \frac{-k s^2}{T s^4 + s^3 + k k_\pi s^2 + k_{i1} s + k_{i2}}$$

Астатизм второго порядка  
по внешнему возмущению





Самый общий вид линейного регулятора

### Передаточная функция ПИД-регулятора

$$\frac{k_{d1}s^2 + k_{\pi}s + k_{i1}}{s}$$

Как это скучно...



### Передаточная функция ПИИДД-регулятора

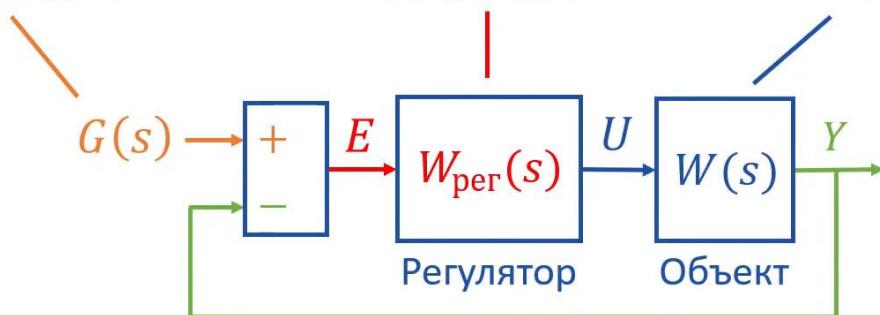
$$\frac{k_{d3}s^6 + k_{d2}s^5 + k_{d1}s^4 + k_{\pi}s^3 + k_{i1}s^2 + k_{i2}s + k_{i3}}{s^3}$$

# Самый общий вид линейного регулятора третьего порядка

$$\frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Принцип внутренней модели

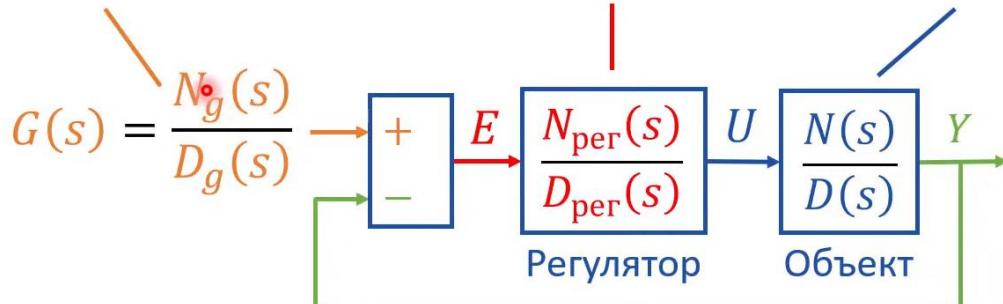
Изображение Лапласа задающего воздействия      Передаточная функция регулятора      Передаточная функция объекта управления



Изображение Лапласа задающего воздействия

Передаточная функция регулятора

Передаточная функция объекта управления



Если все корни  $D_g(s)$  отрицательные, то  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$

Предположим, что корни  $D_g(s)$  неотрицательные

$$E = \frac{W}{g \rightarrow e} \cdot G$$

$$E = \frac{1}{1 + \frac{N_{\text{рег}}}{D_{\text{рег}}} \cdot \frac{N}{D}} \cdot \frac{N_g}{D_g}$$

$$E = \frac{D_{\text{рег}} D}{D_{\text{рег}} D + N_{\text{рег}} N} \cdot \frac{N_g}{D_g}$$

$E = \frac{W}{g \rightarrow e} \cdot G$

Должны полностью сократиться, иначе у  $E(s)$  будут положительные полюса

$E = \frac{D_{\text{рег}} D}{D_{\text{рег}} D + N_{\text{рег}} N} \cdot \frac{N_g}{D_g}$

$E = \frac{D_{\text{рег}} D}{D_{\text{рег}} D + N_{\text{рег}} N} \cdot \frac{N_g}{D_g}$

### Принцип внутренней модели

Для успешного слежения необходимо, чтобы полюса разомкнутой системы (регулятор + объект) включали в себя полюса задающего воздействия

$$E = \frac{D_{\text{рег}} D}{D_{\text{рег}} D + N_{\text{рег}} N} \cdot \frac{N_g}{D_g}$$

Сложение!

Порядок синтеза регулятора

1. Выбираем  $D_{\text{рег}}$  так, чтобы корни  $D_{\text{рег}} D$  включали в себя корни  $D_g$

$$E = \frac{D_{\text{рег}} D}{D_{\text{рег}} D + N_{\text{рег}} N} \cdot \frac{N_g}{D_g}$$

Устойчивость!

Порядок синтеза регулятора

1. Выбираем  $D_{\text{рег}}$  так, чтобы корни  $D_{\text{рег}} D$  включали в себя корни  $D_g$

2. Выбираем  $N_{\text{рег}}$  так, чтобы корни  $D_{\text{рег}} D + N_{\text{рег}} N$  были отрицательными

Настоящий двигатель со специальным регулятором

Знаем общий вид задающего воздействия

$$g(t) = A \cos(t + \varphi)$$

Хотим найти **регулятор**, который

точнее других сможет проследить **за ним**



$$g(t) = A \cos(t + \varphi)$$

$$G(s) = \frac{c_1 s + c_2}{s^2 + 1}$$

Амплитуда и фаза  
влияют на числитель

Знаменатель (полюса)  
определяется частотой

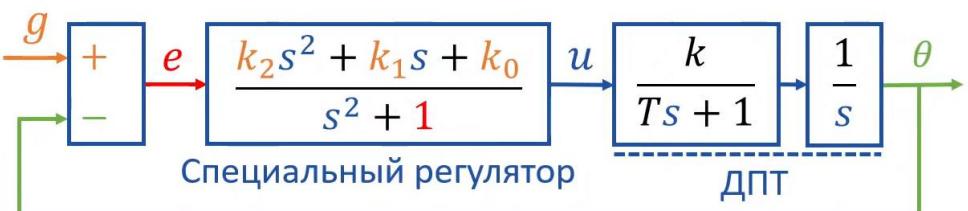


$$g(t) = A \cos(t + \varphi)$$

$$G(s) = \frac{c_1 s + c_2}{s^2 + 1}$$

Амплитуда и фаза  
влияют на числитель

Знаменатель (полюса)  
определяется частотой



$$W_{\text{пер}}(s) = \frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^2 + 1}$$

Устойчивость

Сложение

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{(Ts + 1) \cdot s \cdot (s^2 + 1)}{Ts^4 + s^3 + (T + k_2)s^2 + (1 + k_1)s + k_0}$$

Готовы сократиться!

Коэффициенты помогут добиться отрицательных корней знаменателя

Кто лучше проследит за задающим воздействием?

$$g(t) = 900 \cos(t)$$

$$k_p$$

**VS**

П-регулятор

$$k_p + \frac{k_{i1}}{s} + \frac{k_{i2}}{s^2}$$

ПИИ-регулятор

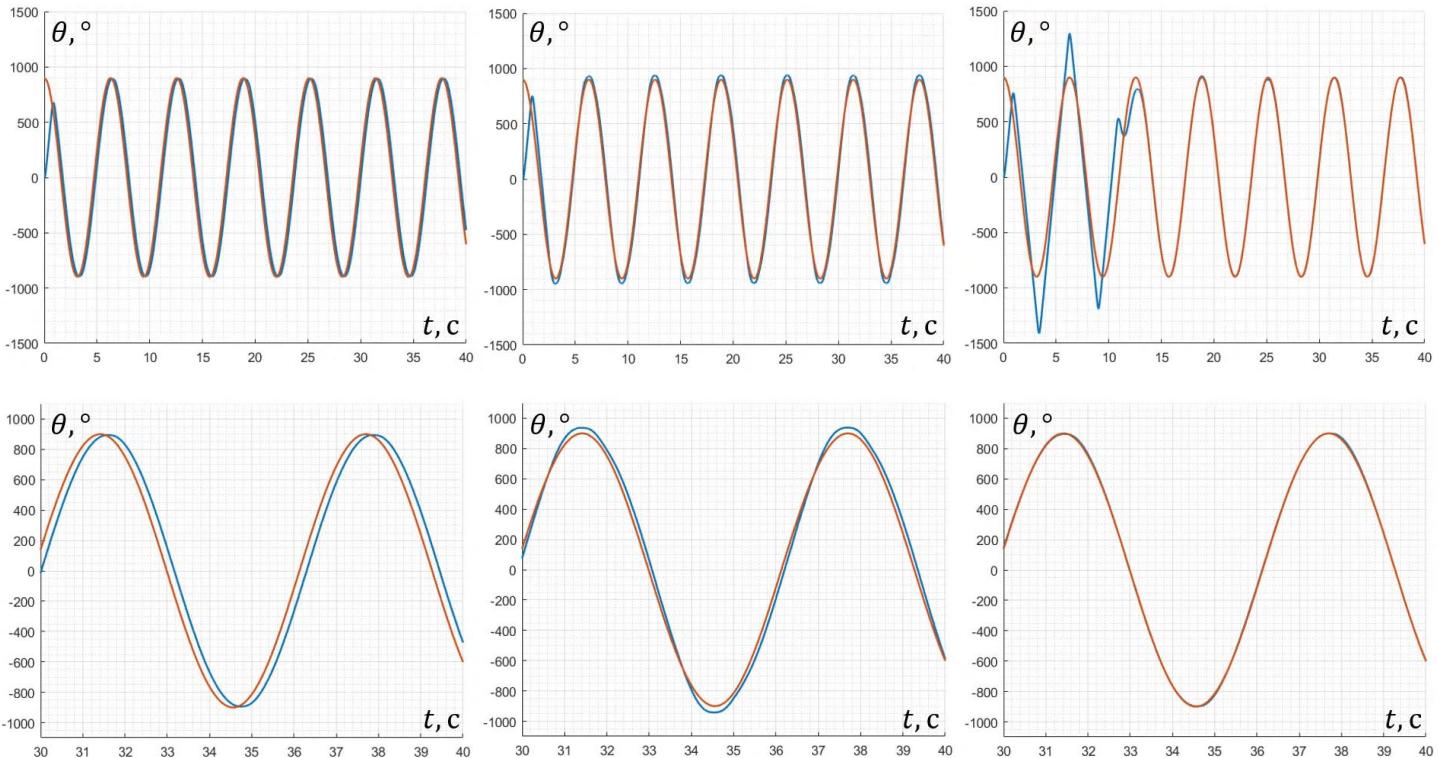
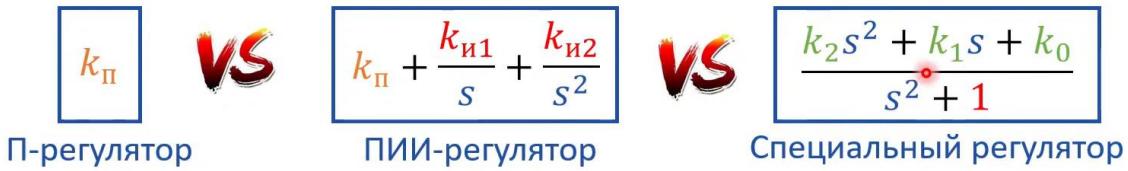
$$\frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^2 + 1}$$

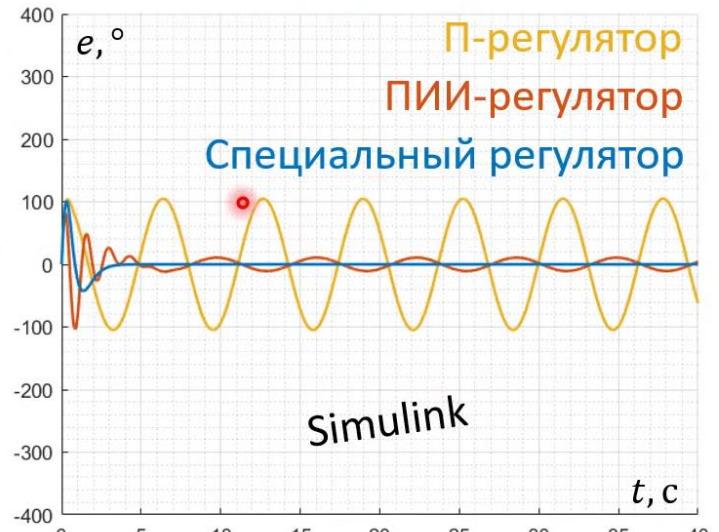
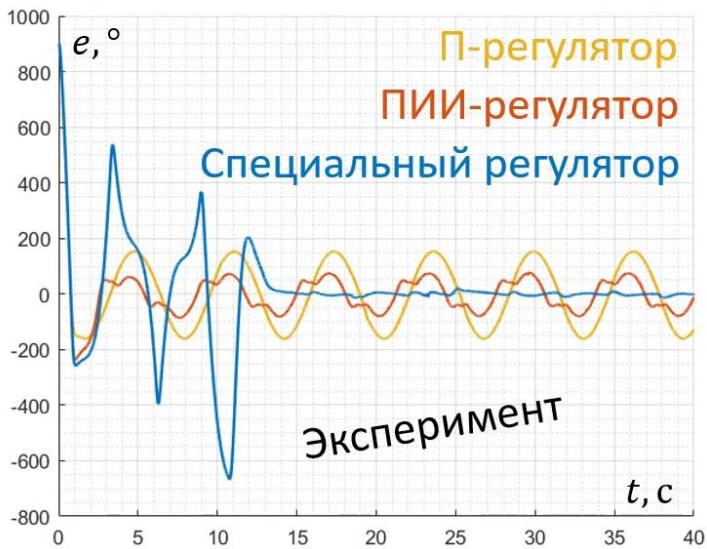
Специальный регулятор

**СИЛЬНЫЙ  
И ОПЫТНЫЙ**

**НЕВЕРОЯТНО  
ПОДВИЖНЫЙ**

**КАКОЙ-ТО  
СТРАННЫЙ**





За внешними воздействиями такого вида  
наш странный регулятор проследит **точнее всех**

$$g(t) = 900 \cos(t) \quad g(t) = 400 \sin(t) \quad g(t) = -100 \sin(t + 52^\circ) \quad \dots$$

