

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

Факультет систем управления и робототехники

**Отчет по лабораторной работе №11
« H_2 и H_∞ управление»
по дисциплине «Теория автоматического управления»**

Выполнил: студент гр. Р3238,

Кирбаба Д.Д.

Преподаватель: Перегудин А.А.,

ассистент фак. СУиР

Цель работы

Исследование H_2 и H_∞ управления

Выполнение работы

Задание 1. Исследование Грамианов

1.1. Грамиан управляемости

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}x$$

Собственные числа матрицы A :

$$\lambda(A) = \{-3, -8\}$$

Грамиан управляемости:

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 5.4 & 4 \\ 4 & 3.3 \end{bmatrix}$$

Эллипсоид управляемости:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 | x^T P^{-1} x = 1\}$$

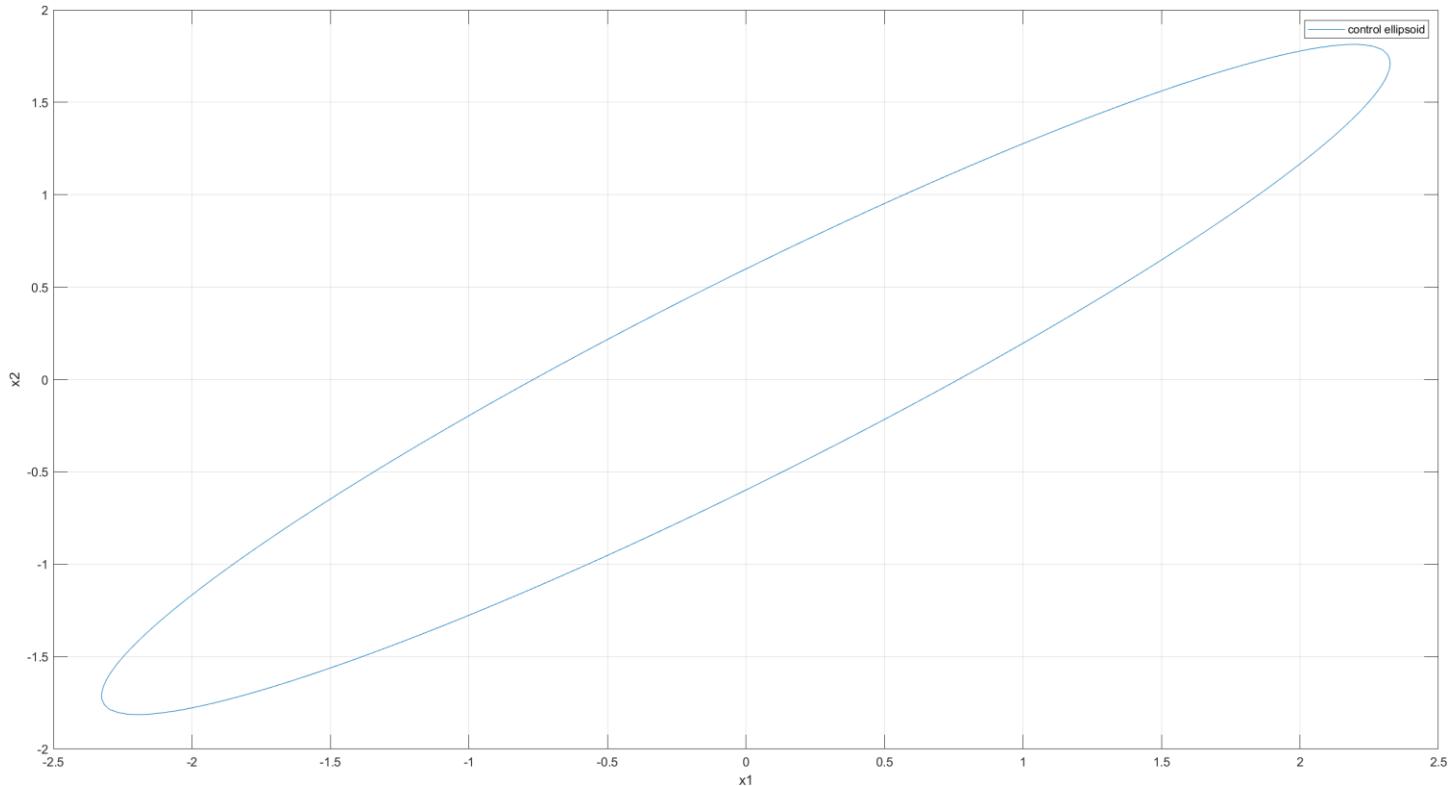


Рисунок 1: эллипсоид управляемости

Входные воздействия, подаваемые на систему:

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \\ 0, & t \notin [0,1] \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} \frac{1-t}{\sqrt{3}}, & t \in [0,3] \\ 0, & t \notin [0,3] \end{cases}$$

$$u_3(t) = \sqrt{2}e^{-t}$$

$$u_4(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)}(P(t_1)^{-1})x(t_1), \quad P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} BB^T e^{A^T t} dt, \quad x(t_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t_1 = 1$$

Вручную нашел время $t_0 = 1.1196826$ при котором энергия сигнала достигает единицы, тогда

$$u_4(t) = \begin{cases} 0.15075e^{3t} + 0.00112e^{8t}, & t \in [0, t_0] \\ 0, & t \notin [0, t_0] \end{cases}$$

Все входные воздействия имеют единичную энергию, то есть

$$\|u_i(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty |u_i(t)|^2 dt} = 1, \quad \forall i = \{1,2,3,4\}$$

Графики входных воздействий:

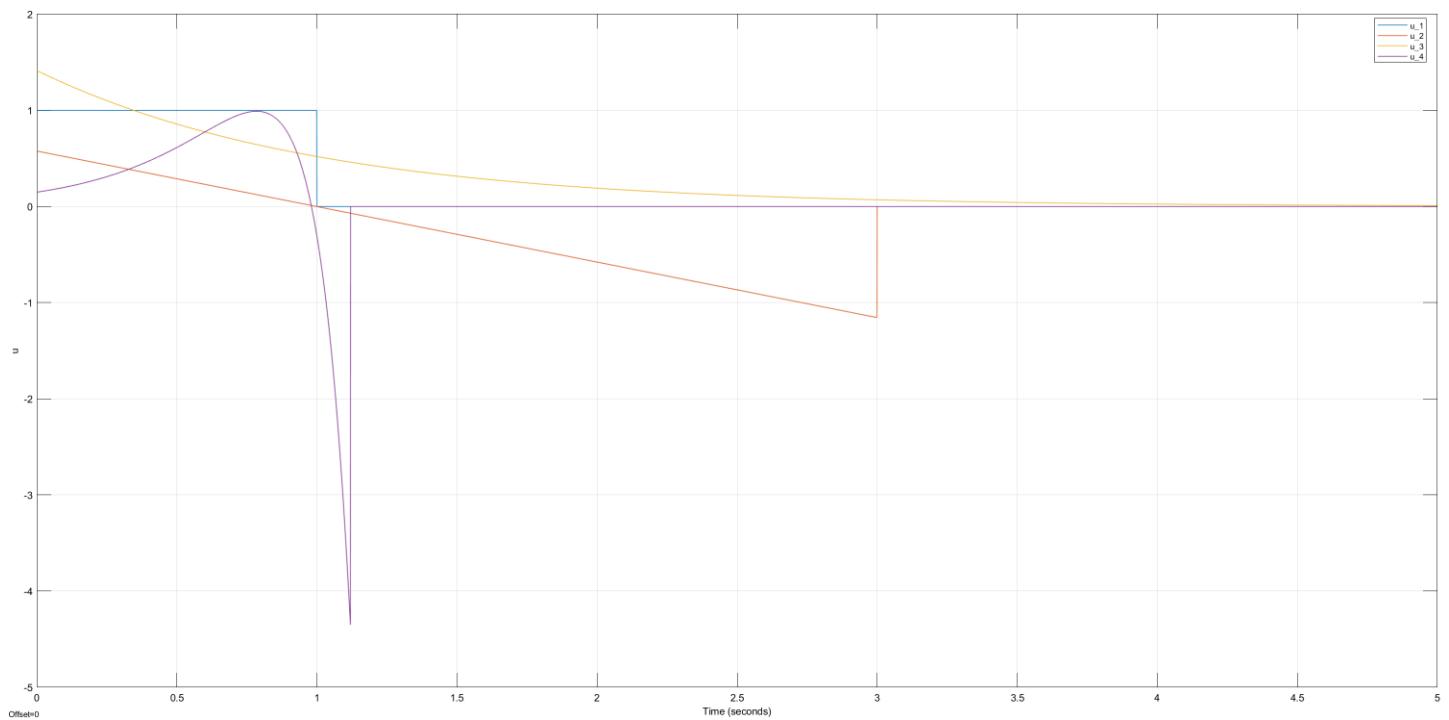


Рисунок 2: графики входных воздействий

Графики траекторий вектора состояний системы при различных входных воздействиях и при $x(0) = \bar{0}$:

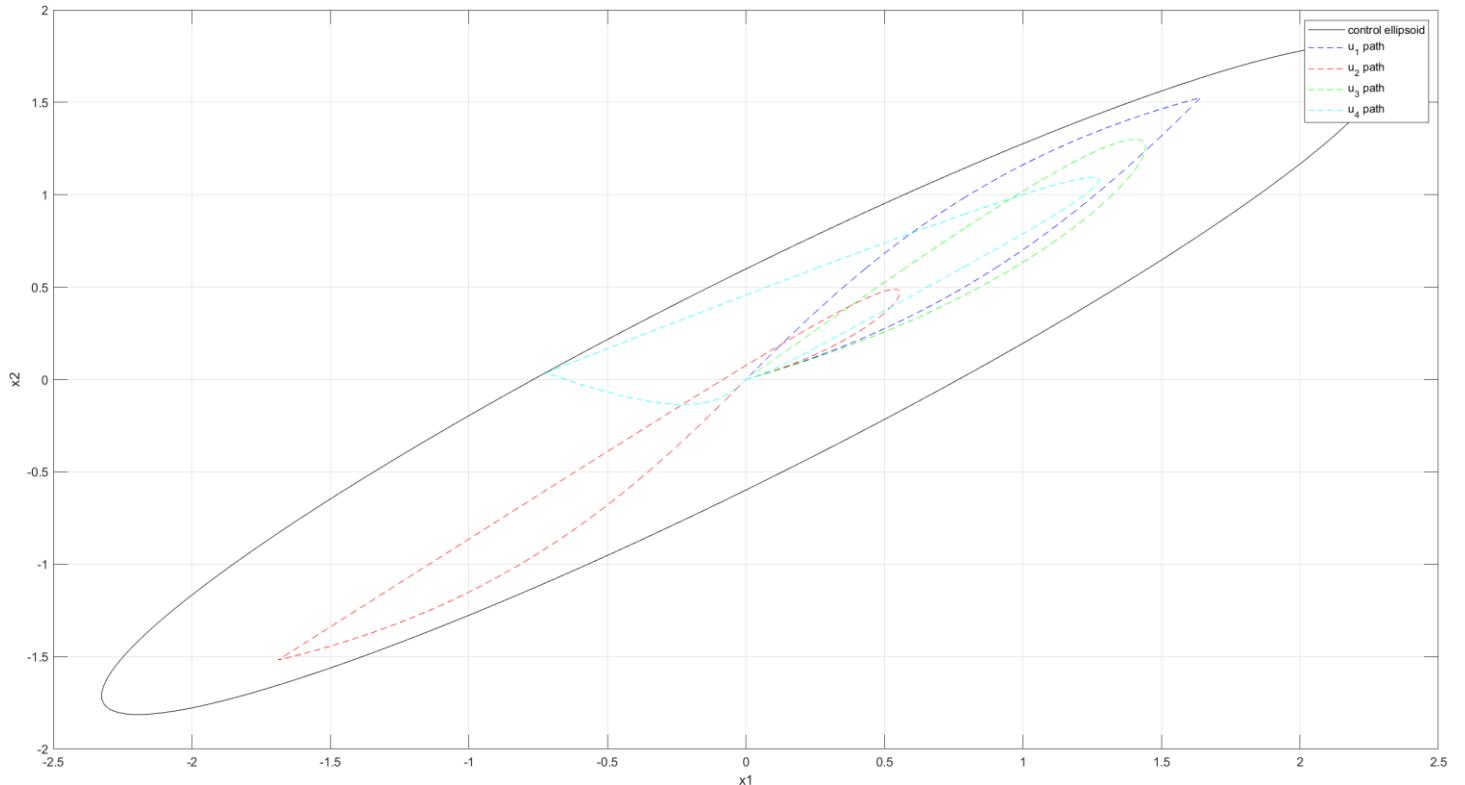


Рисунок 3: графики траекторий

Как мы видим, вектор состояний не покидает эллипсоид управляемости системы, если входной сигнал имеет единичную энергию.

Стоит отметить, что при использовании формулы для поиска программного управления, если же лаемое состояние вектора состояний не содержится в эллипсоиде, то нельзя будет привести систему в это состояние сигналом с единичной энергией.

Таким образом, Грамиан управляемости определяет замкнутую область состояний, в которую можно перевести систему сигналом с единичной энергией.

Собственные числа Грамиана управляемости:

$$P = \begin{bmatrix} 5.4 & 4 \\ 4 & 3.3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda(P) = \{0.2286, 8.4721\}$$

Собственные вектора Грамиана управляемости:

$$\nu_1 = \begin{bmatrix} 0.6094 \\ -0.7929 \end{bmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{bmatrix} -0.7929 \\ -0.6094 \end{bmatrix}$$

Собственные векторы – направления полуосей эллипсоида, а корень из соответствующих собственных чисел – длины данных полуосей.

Так как найденные собственные вектора имеют длину 1, то для того, чтобы найти вектора полуосей сделаем следующие преобразования:

$$\sqrt{\lambda_i} \nu_i = \nu'_i \text{ – вектор } i\text{-ой полуоси}$$

$$\nu'_1 = \begin{bmatrix} 0.2914 \\ -0.3791 \end{bmatrix}, \quad \nu'_2 = \begin{bmatrix} -2.3078 \\ -1.7737 \end{bmatrix}$$

То есть чем больше собственные числа Грамиана управляемости, тем больший диапазон состояний может принимать система при входном воздействии с единичной энергией.

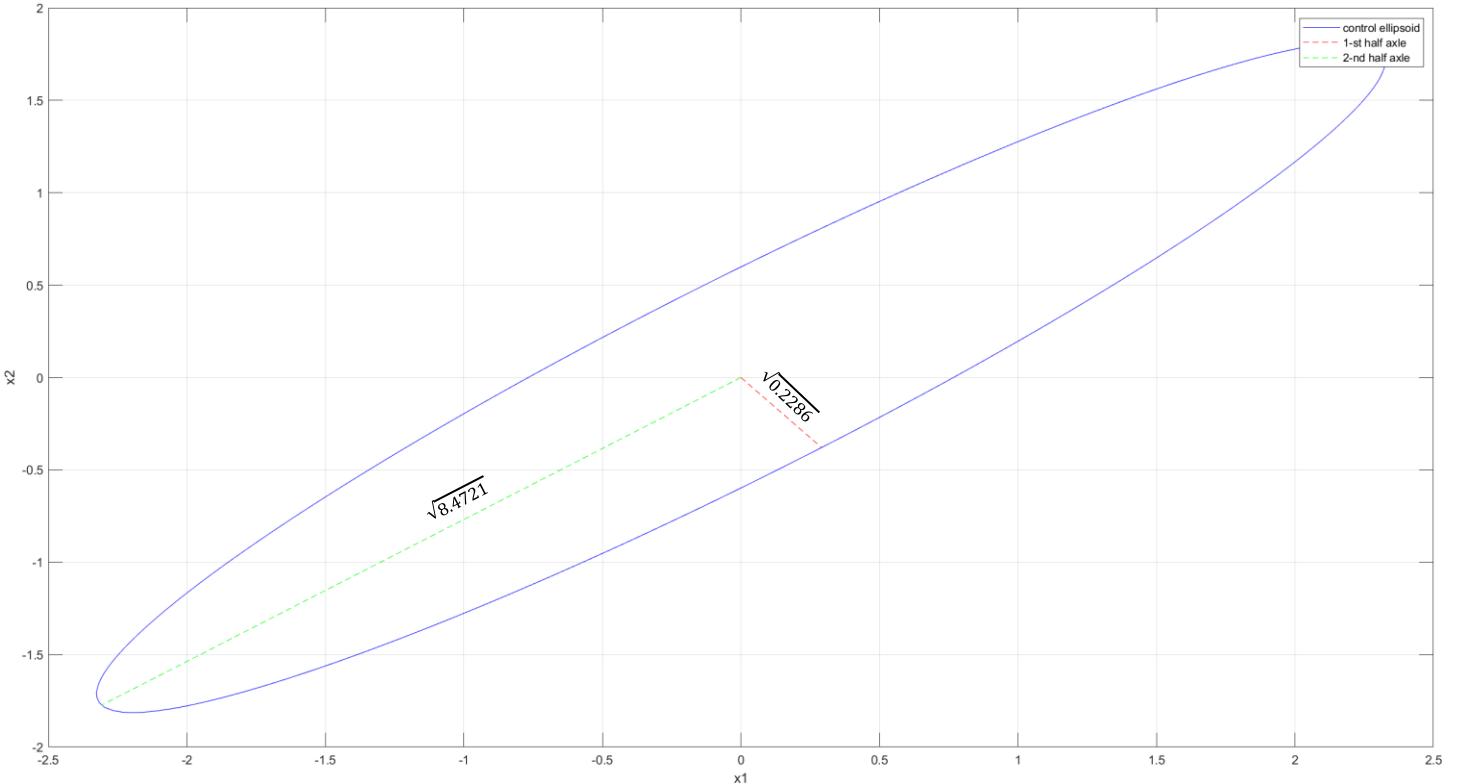


Рисунок 4: полуоси эллипсоида

Ограничивающий эллипсоид по выходу:

$$\{y \in \mathbb{R}^2 | y^T (CPC^T)^{-1} y = 1\}$$

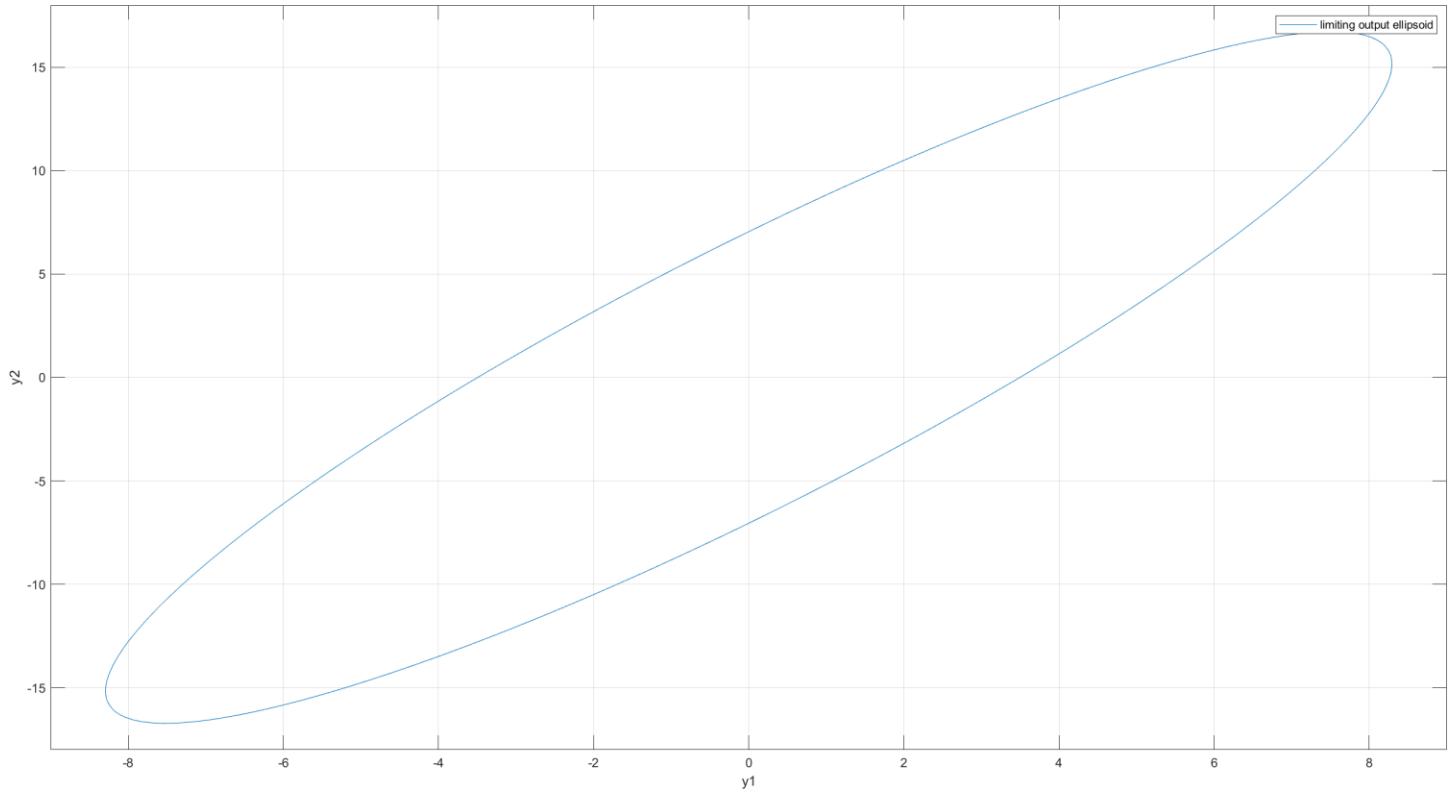


Рисунок 5: ограничивающий по выходу эллипсоид

Графики траектории выхода при различных входных воздействиях с единичной энергией:

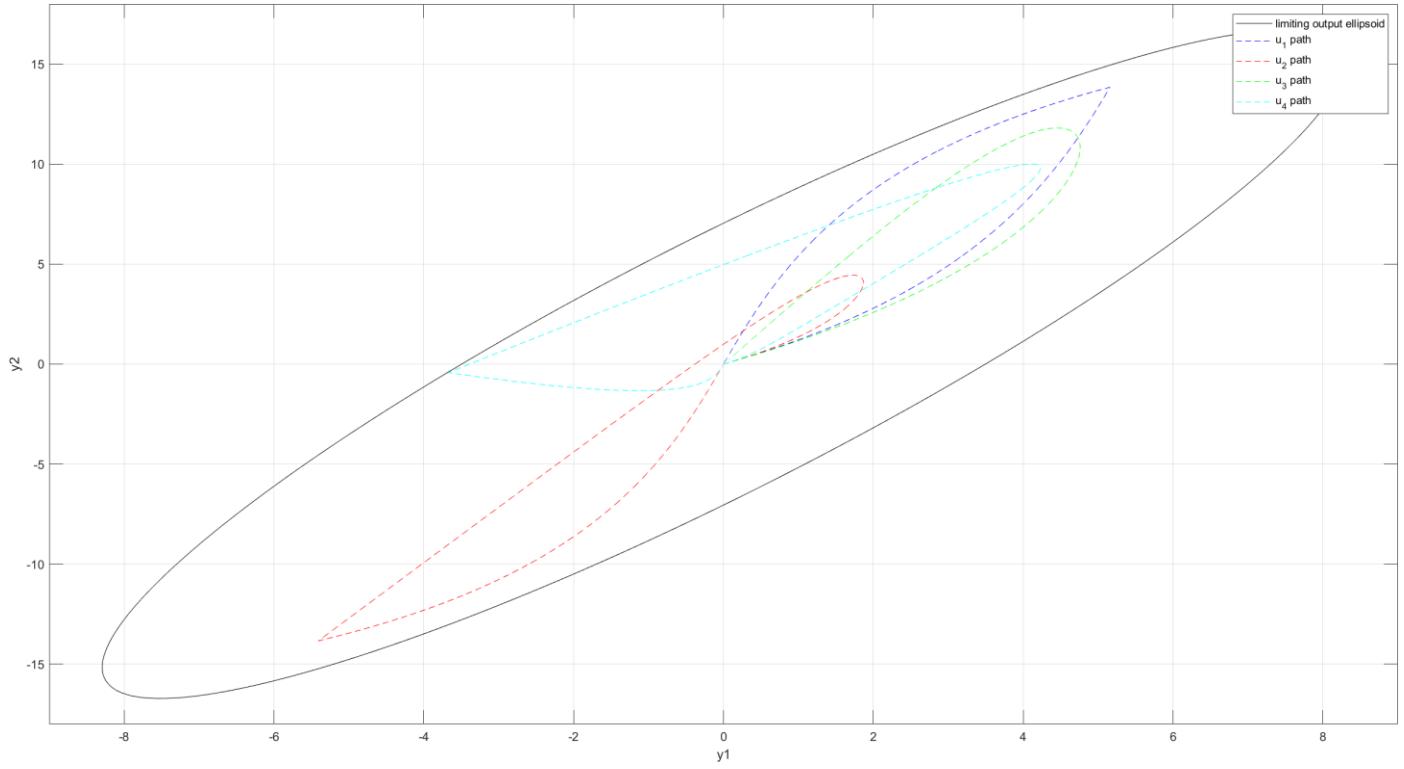


Рисунок 6: траектории выхода

Как мы видим, вектор выхода не покидает эллипсоид $\{y \in \mathbb{R}^2 | y^T (CPC^T)^{-1} y = 1\}$, если входное воздействие имеет единичную энергию.

Итого, Грамиан управляемости P вместе с матрицей выходов C определяют замкнутую область значений выходов $y(t)$, в которую можно перевести систему сигналом с единичной энергией.

Собственные числа матрицы CPC^T :

$$CPC^T = \begin{bmatrix} 68.77 & 125.77 \\ 125.77 & 279.68 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda(CPC^T) = \{10.0982, 338.36\}$$

Собственные векторы CPC^T :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.9062 \\ 0.4228 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -0.4228 \\ -0.9062 \end{bmatrix}$$

Собственные векторы – направления полуосей эллипса, а корень из соответствующих собственных чисел – длины данных полуосей.

Так как найденные собственные векторы имеют длину 1, то для того, чтобы найти вектора полуосей сделаем следующие преобразования:

$$\sqrt{\lambda_i} v_i = v'_i \text{ – вектор } i\text{-ой полуоси}$$

$$v'_1 = \begin{bmatrix} -2.8798 \\ 1.3435 \end{bmatrix}, \quad v'_2 = \begin{bmatrix} -7.777 \\ -16.6697 \end{bmatrix}$$

То есть чем больше собственные числа матрицы CPC^T , тем больший диапазон выходов может давать система при входном воздействии с единичной энергией.

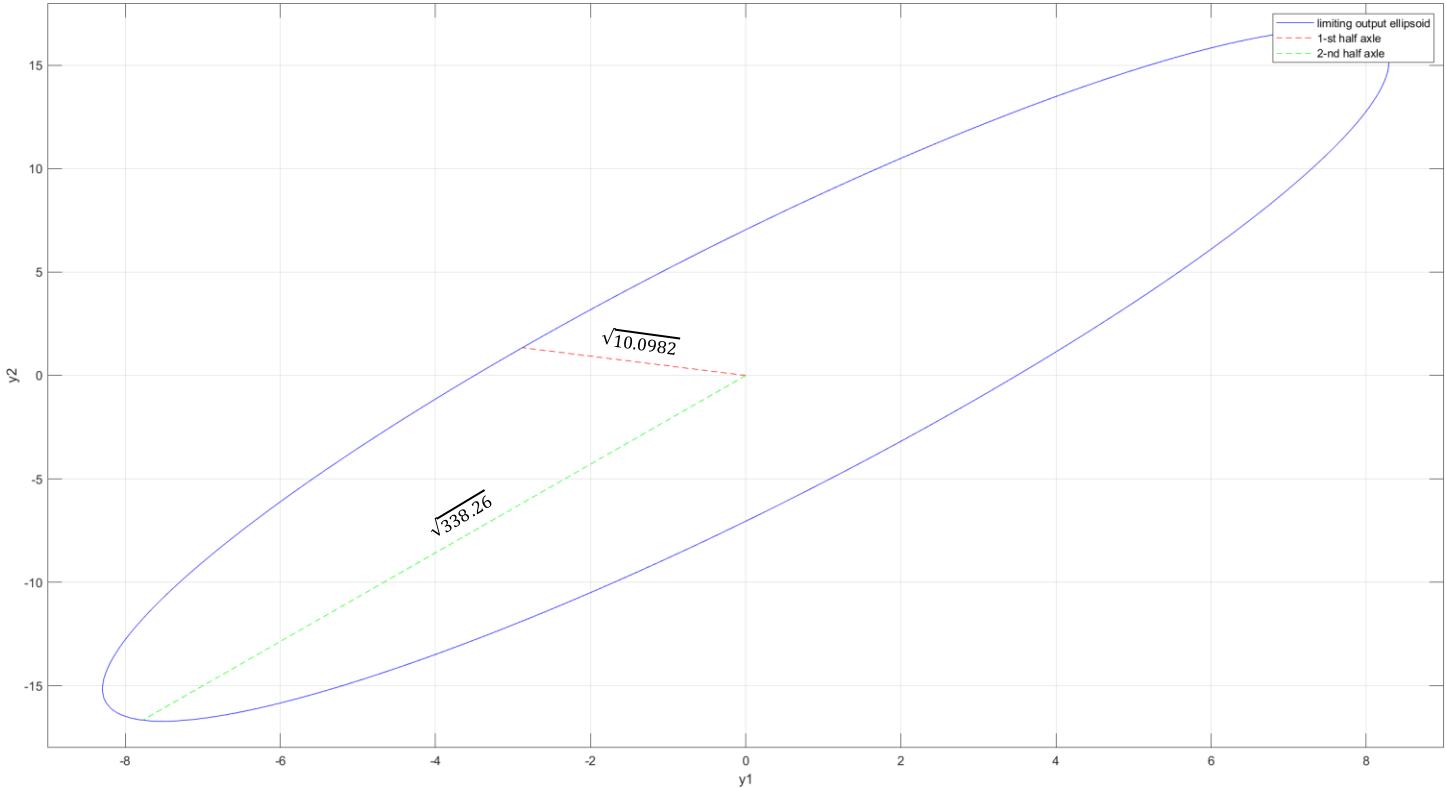


Рисунок 7: полуоси ограничивающего эллипса по выходу

1.2. Грамиан наблюдаемости

Грамиан наблюдаемости:

$$QA + A^T Q + C^T C = 0 \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 3.5 & 2.6 \\ 2.6 & 7.8 \end{bmatrix}$$

Эллипсоид наблюдаемости:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 | x^T Q x = 1\}$$

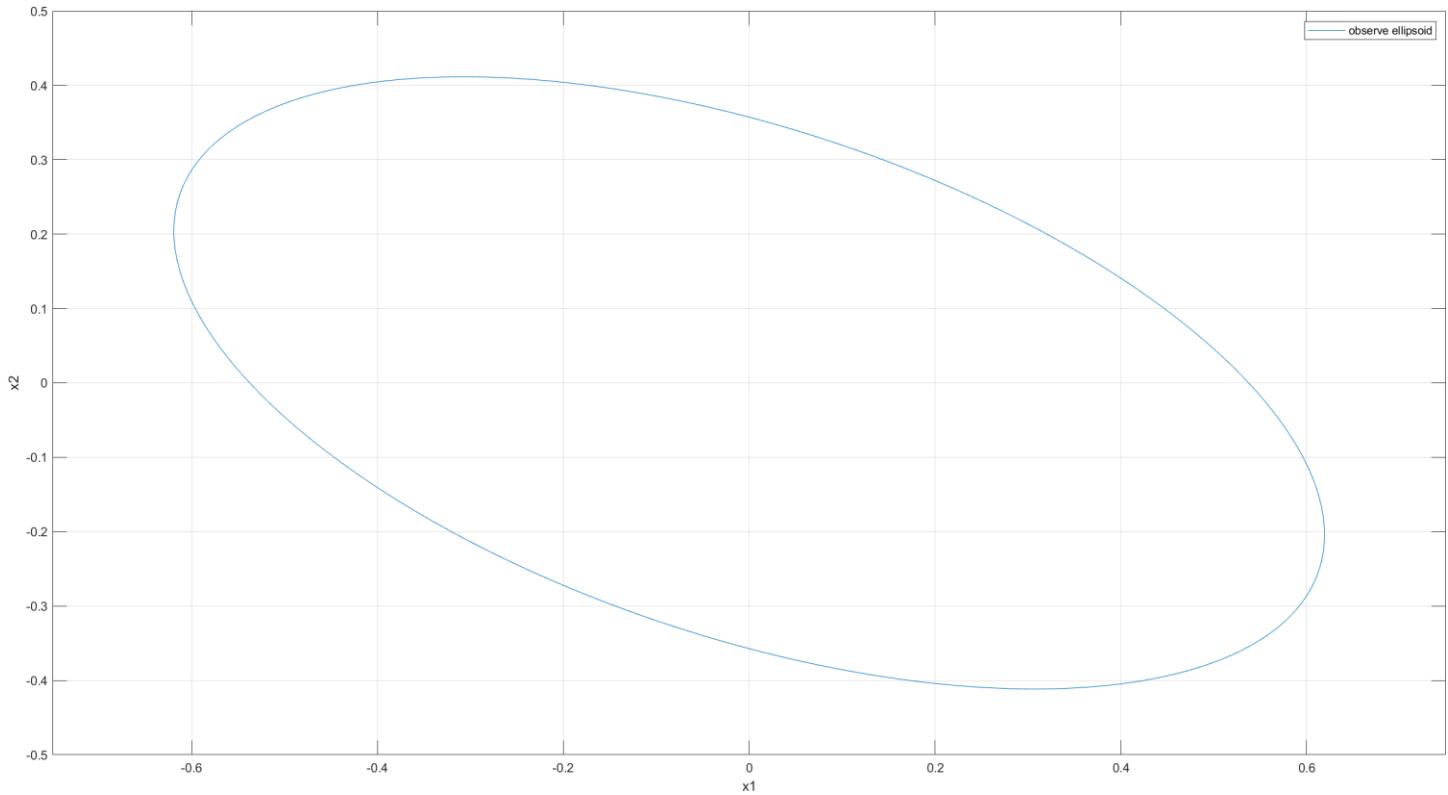
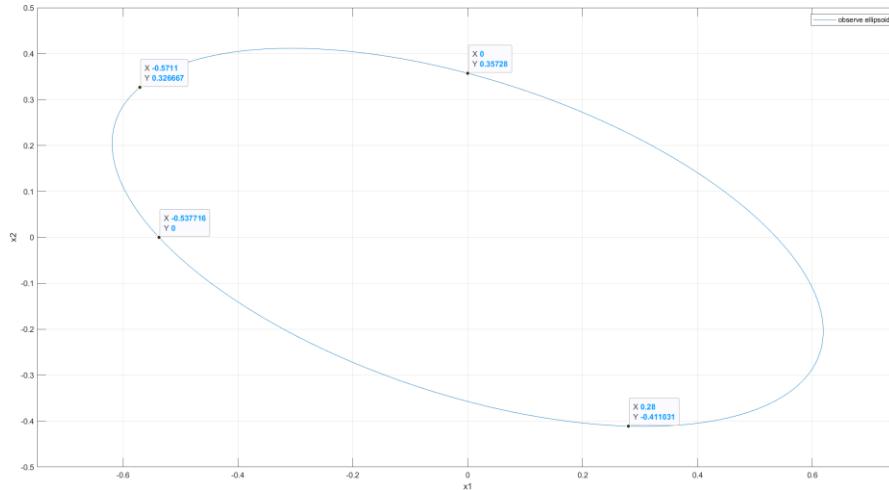


Рисунок 8: эллипсоид управляемости

Пусть, $u(t) \equiv 0$. Выберем 4 различных начальных условий $x(0) = x_0$ таких, что $x_0^T Q x_0 = 1$.

Условие $x_0^T Q x_0 = 1$ означает то, что мы выбираем такое состояние x_0 , которое находится на границе эллипса управляемости.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.35728 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -0.537716 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0.28 \\ -0.411031 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} -0.5711 \\ 0.326667 \end{bmatrix}$$



Выход системы при $x(0) = x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.35728 \end{bmatrix}$:

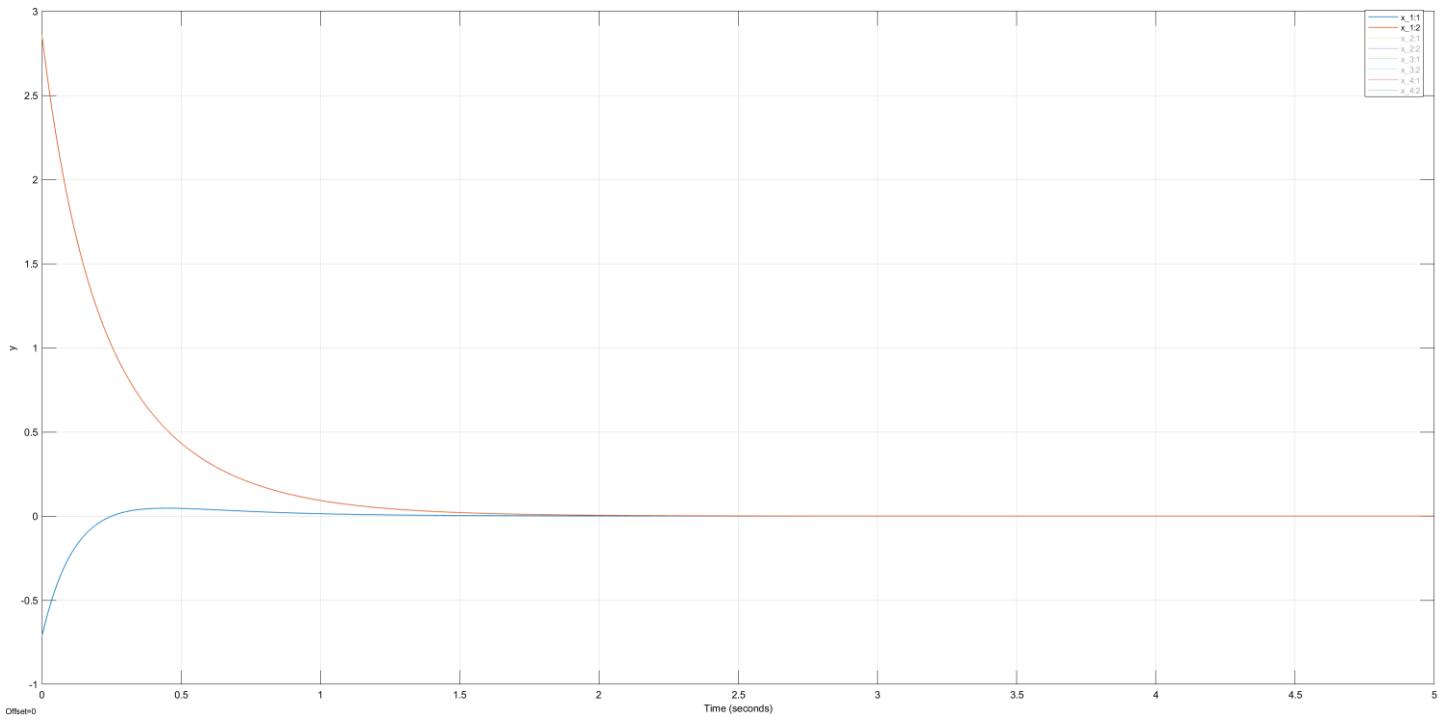


Рисунок 9: графики $y(t)$ при $x(0) = x_1$

Энергия выхода:

$$\|y_1(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty |y_1(t)|^2 dt} = 1.0021$$

Аналогичным путем найдем энергии выходов системы при остальных начальных условиях:

$$\|y_2(t)\|_2 = 1.0018$$

$$\|y_3(t)\|_2 = 1.0034$$

$$\|y_4(t)\|_2 = 1.0041$$

Итого, энергии выходов системы ≈ 1 , если уменьшать шаг моделирования. Это значит, что если система находится в состоянии $x_0: x_0^T Q x_0 = 1$ (на границе эллипсоида наблюдаемости), то выходной сингал всегда будет иметь единичную энергию. А если состояние x_0 находится внутри эллипсоида наблюдаемости, то $\|y(t)\|_2 < 1$.

То есть эллипсоид наблюдаемости определяет замкнутую область начальных состояний, выход системы которых при нулевых входных воздействиях будет иметь энергию ≤ 1 .

Собственные числа матрицы Q :

$$Q = \begin{bmatrix} 3.5 & 2.6 \\ 2.6 & 7.8 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda(Q) = \{2.2608, 9.0309\}$$

Собственные векторы Q :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.9073 \\ 0.4206 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.4206 \\ 0.9073 \end{bmatrix}$$

Собственные вектора – направления полуосей эллипсоида, а $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ – длины соответствующих полуосей.

Так как найденные собственные векторы имеют длину 1, то для того, чтобы найти вектора полуосей сделаем следующие преобразования:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} v_i = v'_i \text{ – вектор } i\text{-ой полуоси}$$

$$v'_1 = \begin{bmatrix} -0.6034 \\ 0.2797 \end{bmatrix}, \quad v'_2 = \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.3019 \end{bmatrix}$$

То есть чем меньше собственные числа матрицы Q , тем больший диапазон начальных состояний системы, при которых выход системы при нулевых входных воздействиях будет иметь энергию ≤ 1 .

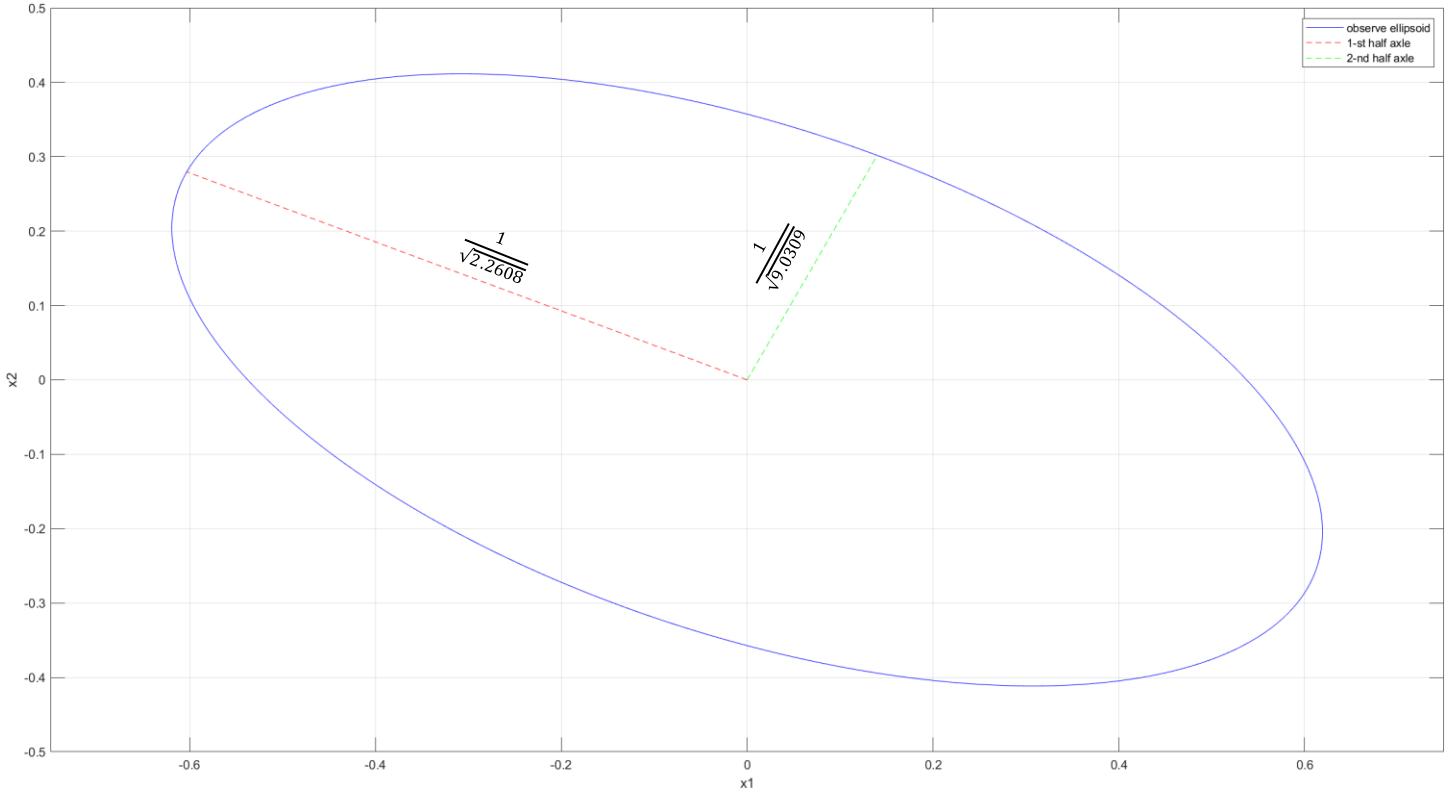


Рисунок 10: полуоси эллипсоида наблюдаемости

1.3. Расчет Gain-ов

$$\Gamma = \sup_{f \neq 0} \frac{\text{size}(y)}{\text{size}(f)} = \sup_{\text{size}(f) \leq 1} \text{size}(y)$$

$$\Gamma_{ie} = \sup_{\|f_0\|_2 \leq 1} \|y\|_2, \quad f(t) = f_0 \delta(t)$$

$$\Gamma_{ep} = \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \|y\|_\infty$$

$$\Gamma_{ee} = \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \|y\|_2$$

Вычисление Impulse-to-Energy gain-a:

$$\Gamma_{ie} = \sqrt{\lambda_{max}(B^T Q B)} = \sqrt{348.4583} = 18.667$$

Вычисление Energy-to-Peak gain-a:

$$\Gamma_{ep} = \sqrt{\lambda_{max}(CPC^T)} = 18.3946$$

Вычисление Energy-to-Energy gain-a:

$$\Gamma_{ee} < \gamma, \quad \text{если } \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bf \\ y = Cx + Df \end{cases} - \text{асимптотически устойчива и} \\ \text{если } \exists P > 0: \begin{bmatrix} AP + PA^T & B & PC^T \\ B^T & -\gamma I & D^T \\ CP & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Программный код:

```
% find energy-to-energy gain
gamma = 15.64;
D = [0; 0];
cvx_begin sdp
variable P_ee(2,2)
P_ee > 0.0001*eye(2);
[A*P_ee+P_ee*A' B P_ee*C';
B' -gamma D'];
C*P_ee D -gamma*eye(2)] < 0;
cvx_end
```

Γ_{ee} можно ограничить сверху значением $\gamma = 15.64$

1.4. Вычисление $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2}$

Найдем передаточную матрицу нашей системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}x \\ &\quad \begin{bmatrix} s+6 & -2 \\ -3 & s+5 \end{bmatrix}x = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}u \\ x &= \begin{bmatrix} s+6 & -2 \\ -3 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}u \\ y &= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+6 & -2 \\ -3 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}u = \begin{bmatrix} \frac{29s+127}{s^2+11s+24} \\ \frac{31s+353}{s^2+11s+24} \end{bmatrix}u = W(s)u \end{aligned}$$

По определению:

$$\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(W^*(j\omega)W(j\omega))d\omega}$$

Найдем АЧХ системы:

$$W(j\omega) = \begin{bmatrix} \frac{29j\omega+127}{(j\omega)^2+11j\omega+24} \\ \frac{31j\omega+353}{(j\omega)^2+11j\omega+24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{29j\omega+127}{-\omega^2+11j\omega+24} \\ \frac{31j\omega+353}{-\omega^2+11j\omega+24} \end{bmatrix} \times \frac{-\omega^2-11j\omega+24}{-\omega^2-11j\omega+24} = \begin{bmatrix} \frac{192\omega^2+3048-j(701\omega+28\omega^3)}{\omega^4+73\omega^2+576} \\ \frac{-12\omega^2+8472-j(31\omega^3+3139\omega)}{\omega^4+73\omega^2+576} \end{bmatrix}$$

$$\text{trace} \left(W^*(j\omega)W(j\omega) \right) = \left| \frac{192\omega^2 + 3048 - j(701\omega + 28\omega^3)}{\omega^4 + 73\omega^2 + 576} \right|^2 + \left| \frac{-12\omega^2 + 8472 - j(31\omega^3 + 3139\omega)}{\omega^4 + 73\omega^2 + 576} \right|^2$$

$$\text{trace} \left(W^*(j\omega)W(j\omega) \right) = \frac{1745\omega^6 + 270882\omega^2 + 11311826\omega^2 + 81065088}{(\omega^4 + 73\omega^2 + 576)^2}$$

Программный код:

```
W = {{(29 I ω + 127) / (-ω^2 + 11 I ω + 24)}, {(31 I ω + 353) / (-ω^2 + 11 I ω + 24)}};
d = Expand[(-ω^2 + 11 I ω + 24) (-ω^2 - 11 I ω + 24)];
n1 = Expand[(29 I ω + 127) (-ω^2 - 11 I ω + 24)];
n2 = Expand[(31 I ω + 353) (-ω^2 - 11 I ω + 24)];
```

$$576 + 73\omega^2 + \omega^4$$

$$3048 - 701 i \omega + 192\omega^2 - 29 i \omega^3$$

$$8472 - 3139 i \omega - 12\omega^2 - 31 i \omega^3$$

```
W1amp = ((3048 + 192 ω^2) / (576 + 73 ω^2 + ω^4))^2 + ((-701 ω - 29 ω^3) / (576 + 73 ω^2 + ω^4))^2;
W2amp = ((8472 - 12 ω^2) / (576 + 73 ω^2 + ω^4))^2 + ((-3139 ω - 31 ω^3) / (576 + 73 ω^2 + ω^4))^2;
trace = Simplify[W1amp + W2amp];
res = Sqrt[Integrate[trace, {ω, -Infinity, Infinity}] / (2 Pi)]
```

$$\frac{2 (70369 + 901 \omega^2)}{576 + 73 \omega^2 + \omega^4}$$

$$\sqrt{\frac{8363}{6}} \\ 2$$

$$\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1745\omega^6 + 270882\omega^2 + 11311826\omega^2 + 81065088}{(\omega^4 + 73\omega^2 + 576)^2} d\omega} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8363}{6}} \approx 18.667$$

Вычислим норму $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2}$ матричным способом:

$$\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\text{trace}(B^T Q B)} = \sqrt{\text{trace}(C P C^T)} = 18.667$$

Значения сошлись, значит вычисления верны.

1.5. Вычисление $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_{\infty}}$

По определению:

$$\|W(s)\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(W(j\omega)) = 15.6313$$

Программный код:

```
W = {{(29 I ω + 127) / (-ω^2 + 11 I ω + 24)}, {(31 I ω + 353) / (-ω^2 + 11 I ω + 24)}};
singularValue = SingularValueList[W][[1]];
singularValue = Simplify[Sqrt[(127 + 29 i ω) (127 - 29 i ω) / (24 + 11 i ω - ω^2) (24 - 11 i ω - ω^2) + (353 + 31 i ω) (353 - 31 i ω) / (24 + 11 i ω - ω^2) (24 - 11 i ω - ω^2)]]]
res = N[MaxValue[singularValue, ω]]
```

$$\sqrt{2} \sqrt{\frac{70369 + 901 \omega^2}{576 + 73 \omega^2 + \omega^4}}$$

Вычислим норму $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty}$ с помощью связи с Energy-to-Energy gain-ом:

$$\|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \Gamma_{ee}, \quad \Gamma_{ee} < 15.64$$

Так как найденное по определению $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 15.6313$ удовлетворяет неравенству выше, то вычисления верны.

График зависимости сингулярных чисел передаточной матрицы от частоты:

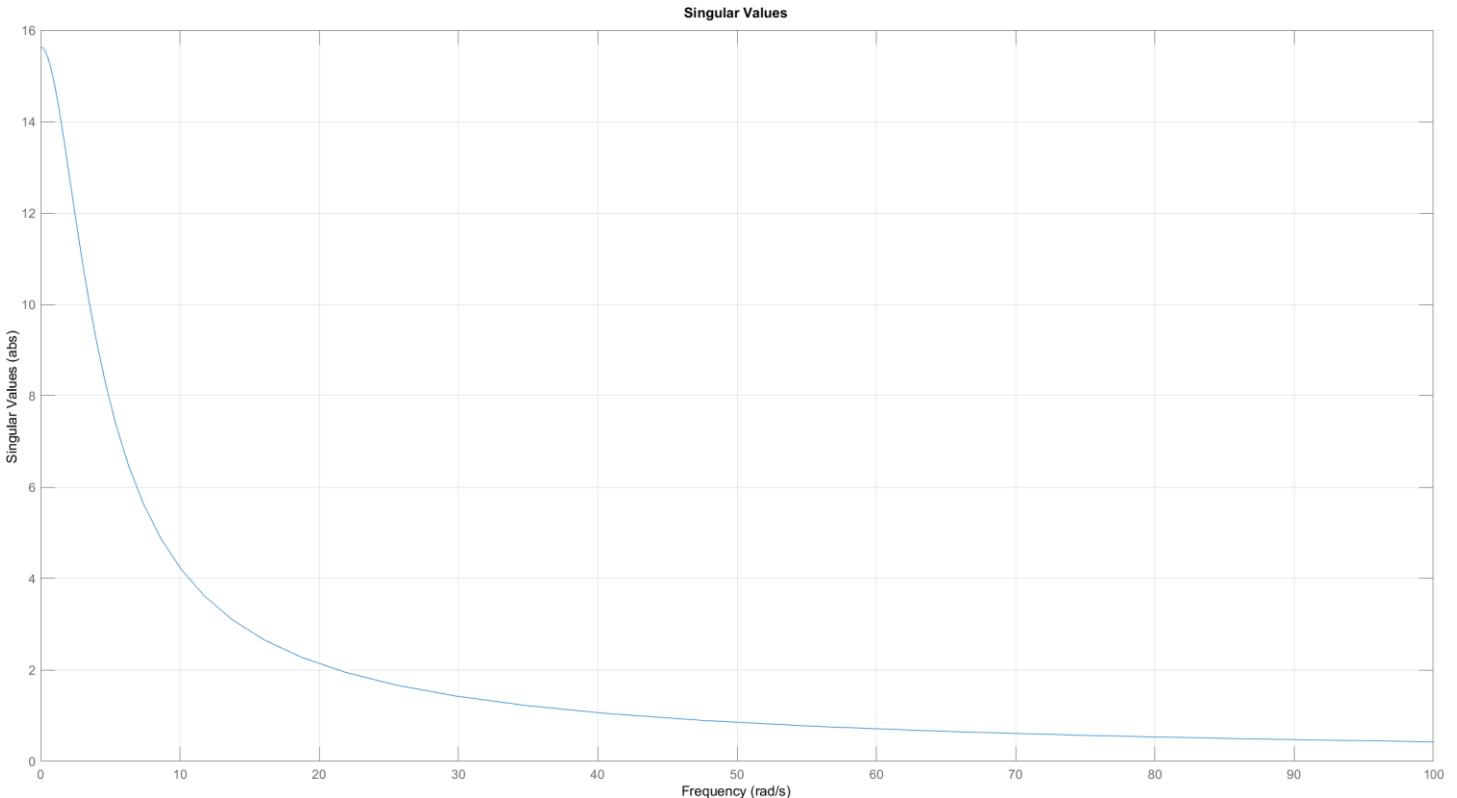


Рисунок 11: сингулярные числа

$\|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty}$ совпадает с максимумом данного графика.

Итак, нормы $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2}$ и $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty}$ непосредственно связаны с понятиями gain системы. По ним можно исследовать то, как система будет себя вести при различных воздействиях, а также сравнивать «размер» усиления систем, который они несет. $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2}$ – представляет средние возмущения системы по всем частотам, а $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty}$ – показывает пиковое значение усиления (наихудший случай).

Вычисление норм проще и быстрее реализовывать через матрицы (для $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2}$ - Грамианы и матрицы B, C , для $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty}$ - LMI). Так как при вычислении по определению, могут получиться громоздкие интегралы (вычисление $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2}$) или могут быть сложности с вычислением супремума (случай $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty}$).

Задание 2. Исследование передаточных матриц

2.1. Передаточные матрицы

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{20}{s+4} & \frac{1}{s^2+3s+1} & \frac{9s^2-10s-8}{s^3+2s^2+s+1} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & \frac{3}{s^3+2s^2+8s+\frac{1}{2}} \\ \frac{10}{s^3+4s^2+7s+24} & \frac{-5s^2-7s+4}{s^3+5s^2+8s+1} & \frac{10s^3-7s^2-3s}{s^4+4s^3+7s^2+10s+5} \\ \frac{s}{s^2+s+24} & \frac{9}{s+1} & \frac{s+3}{6s^2+10s+1} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{s^2+3s}{3s^3+6s^2+10s+1} & \frac{5}{s+5} \end{bmatrix}$$

$$W_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{2s^2+6s+\frac{1}{2}} & \frac{1}{5s+3} & \frac{-3s^2+5}{s^3+7s^2+9s+10} & \frac{10s}{3s^2+s+24} & \frac{s}{4s^2+3s+1} & \frac{5}{s+5} \\ \frac{4}{4s+1} & \frac{8s^2+7s}{s^3+6s^2+10s+1} & \frac{4s+3}{3s^2+10s+1} & 0 & \frac{4s+3}{5s^2+5s+2} & \frac{3}{7s^3+2s^2+8s+\frac{1}{2}} \\ \frac{5s+3}{9s^2+s+24} & \frac{1}{s+10} & 0 & \frac{1}{s^2+3s+1} & \frac{-s^3+3}{s^4+4s^3+10s^2+5s+1} & \frac{1}{s+11} \end{bmatrix}$$

2.2. Амплитудно-частотные характеристики

АЧХ $W_1(s)$:

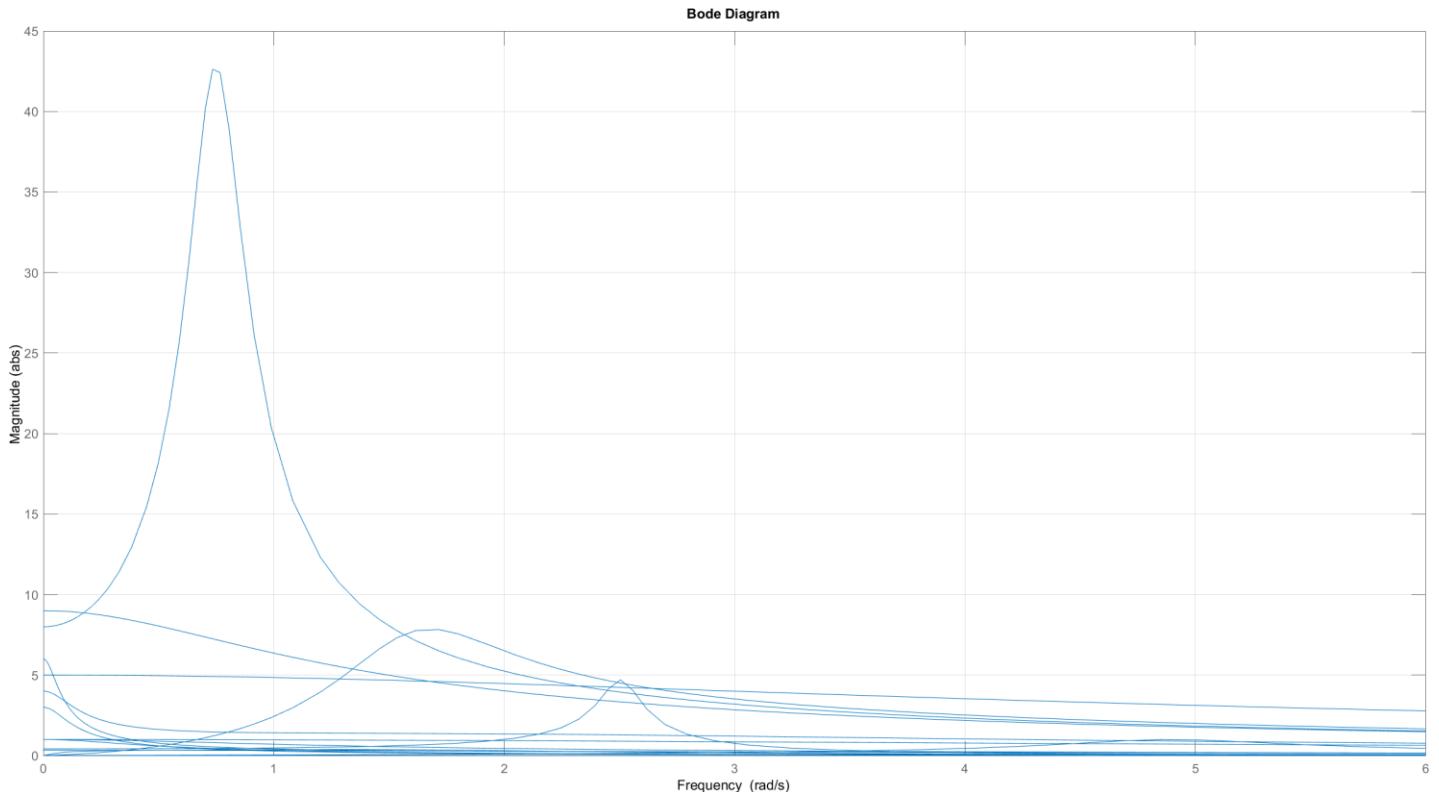


Рисунок 12: АЧХ компонентов матрицы $W_1(s)$

АЧХ $W_2(s)$:

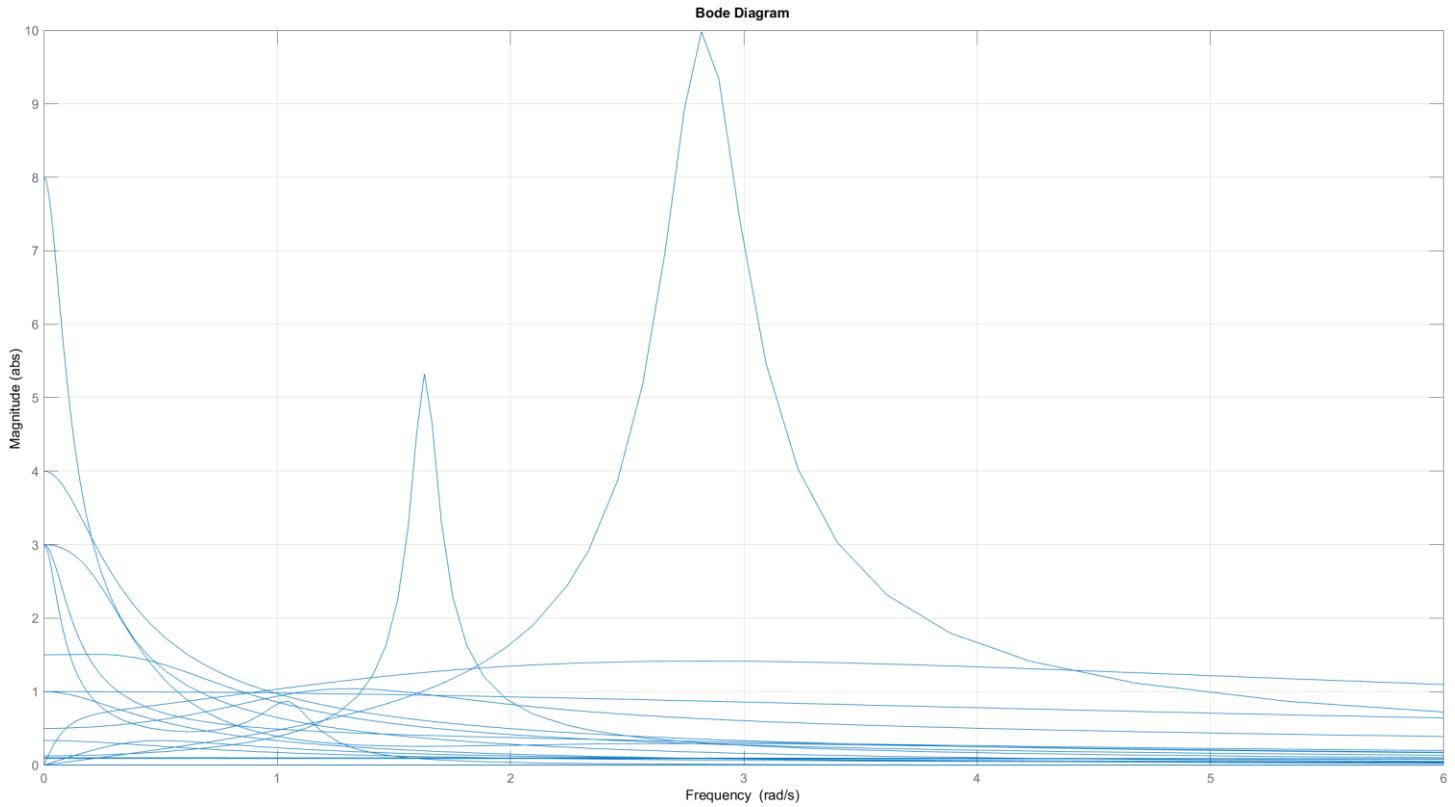


Рисунок 13: АЧХ компонентов матрицы $W_2(s)$

2.3. Сингулярные числа и нормы

$W_1(s)$:

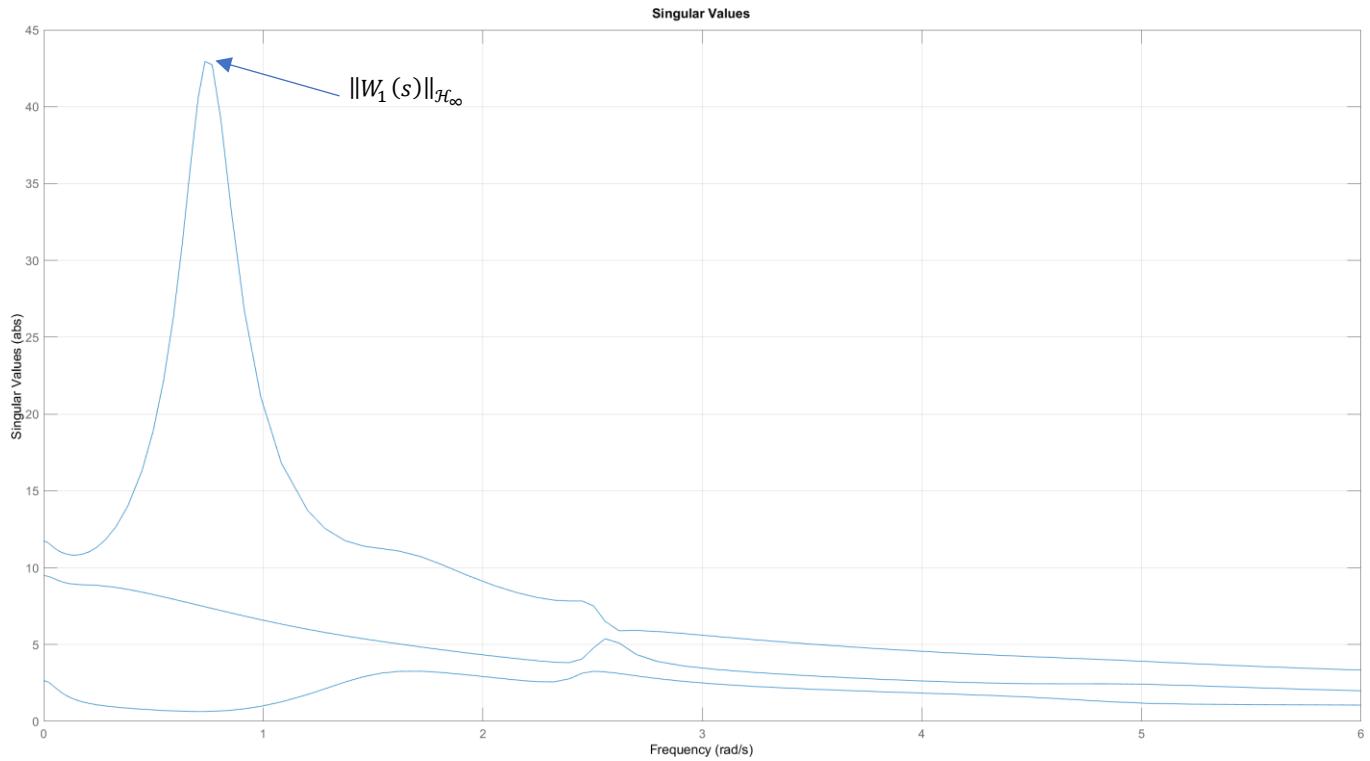


Рисунок 14: графики сингулярных чисел $W_1(s)$

$W_2(s)$:

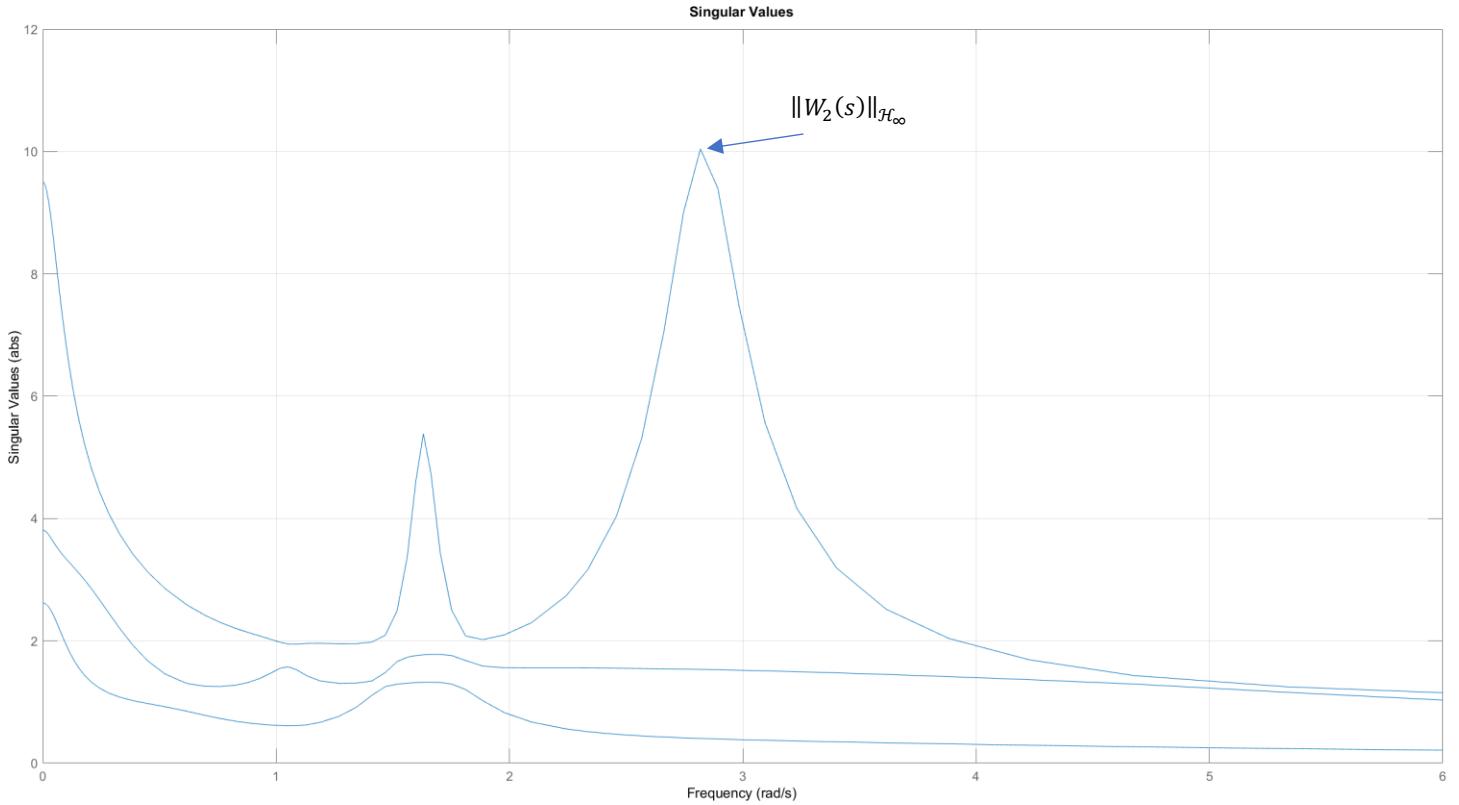


Рисунок 15: графики сингулярных чисел $W_2(s)$

Если система МИМО, то для того, чтобы исследовать степень усиления системы при разных частотах необходимо использовать сингулярные числа передаточной матрицы. Графики сингулярных чисел показывают всё, что содержится в совокупности АЧХ отдельных элементов передаточных матриц. В итоге, по графикам зависимости сингулярных чисел от частоты можно оценивать, насколько большое усиление дает система. А также легко вычислить нормы $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2}$ и $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty}$.

Ведь $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_\omega \sigma_{max}(W)$ – наибольшее усиление, которое может дать система синусоидальному векторному сингалу среди всех частот, то есть наибольшее значение сингулярное число по всем частотам.

Исходя из этого, смотря только на графики можем оценить, что $\|W_1(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \approx 43$ и, $\|W_2(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \approx 10$.

Если же вычислить значения точно, то $\|W_1(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 43.2164$ и $\|W_2(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = 10.0600$.

$\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_1^2(W) + \sigma_2^2(W) + \sigma_3^2(W)) d\omega$, то есть это с точностью до множителя значение площади под графиками от квадрата сингулярных чисел от частоты.

Стоит отметить, что значение $\|W(s)\|_{\mathcal{H}_2}$ удается вычислить, только если система является асимптотически устойчивой, иначе несобственный интеграл будет расходиться.

$$\|W_1(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 18.9738$$

$$\|W_2(s)\|_{\mathcal{H}_2} = 5.9816$$

Итого, первая система больше подвержена возмущениям как в среднем, так и в пиковом случае, так как

$$\|W_1(s)\|_{\mathcal{H}_2} > \|W_2(s)\|_{\mathcal{H}_2} \text{ и } \|W_1(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} > \|W_2(s)\|_{\mathcal{H}_\infty}$$

Программный код:

```
% transfer functions
W1 = [tf([20],[1 4]) tf([1], [1 3 1]) tf([9 -10 -8], [1 2 1 1]);
      0 tf([1],[1 1]) tf([3], [1 2 8 1/2]);
      tf([10], [1 4 7 24]) tf([-5 -7 4], [1 5 8 1]) tf([10 -7 -3 0], [1 4 7 10 5]);
      tf([1 0], [1 1 24]), tf([9], [1 1]) tf([1 3], [6 10 1]);
      tf([1], [1 3]) tf([1 3 0], [3 6 10 1]) tf([5], [1 5]);
W2 = [tf([4],[2 6 1/2]) tf([1],[5 3]) tf([-3 0 5],[1 7 9 10]) tf([10 0],[3 1 24]) tf([1 0],[4 3 1]) tf([5],[1 5]);
      tf([4],[4 1]) tf([8 7 0],[1 6 10 1]) tf([4 3],[3 10 1]) 0 tf([4 3],[5 5 2]) tf([3/2],[7 2 8 1/2]);
      tf([5 3],[9 1 24]) tf([1],[1 10]) 0 tf([1],[1 3 1]) tf([-1 0 0 3],[1 4 10 5 1]) tf([1],[1 11))];

% plot amplitude frequency response
ampW1 = bodeplot(W1);
setoptions(ampW1,'FreqScale','linear','MagUnits','abs','Grid','on','PhaseVisible','off','IOGrouping','all');
xlim([0 6]);
ampW2 = bodeplot(W2);
setoptions(ampW2,'FreqScale','linear','MagUnits','abs','Grid','on','PhaseVisible','off','IOGrouping','all');
xlim([0 6]);

% plot singular values to frequency
sinValW1 = sigmaplot(W1);
setoptions(sinValW1,'FreqScale','linear','MagUnits','abs','Grid','on');
xlim([0 6]);
sinValW2 = sigmaplot(W2);
setoptions(sinValW2,'FreqScale','linear','MagUnits','abs','Grid','on');
xlim([0 6]);

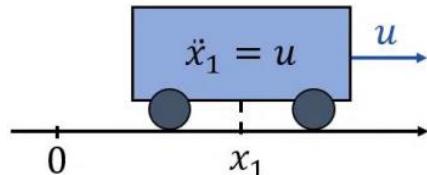
% find h_inf norm
getPeakGain(W1)
getPeakGain(W2)

% find h_2 norm
norm(W1)
norm(W2)
```

Задание 3. Синтез \mathcal{H}_2 -регулятора по состоянию

3.1. Математическая модель системы

Рассмотрим тележку:



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$w(t)$ – внешние возмущения

$u(t)$ – управляющее воздействие

Зададим регулируемый выход $z = C_2 x + D_2 u$, где $(C_2^T D_2 = 0)$ в трех вариантах:

$$z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -2u \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 6x_1 - 4x_2 \\ u \end{bmatrix}$$

$$z_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 7x_1 \\ 3u \end{bmatrix}$$

3.2. Алгоритм синтеза \mathcal{H}_2 -регулятора по состоянию

Суть \mathcal{H}_2 -управления в минимизации $\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2}$.

Алгоритм синтеза в общем виде.

Пусть есть система:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases}, \quad u = Kx$$

Если выполнены следующие условия:

1. $C_2^T D_2 = 0$
2. $D_2^T D_2$ – обратима
3. (A, B_2) – стабилизируема
4. (C_2, A) – обнаруживаема

Тогда существует решение $Q > 0$ уравнения Риккати $A^T Q + Q A + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = 0$

и регулятор $K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q$ делает замкнутую систему устойчивой и минимизирует $\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2}$.

Найдем общий вид передаточной функции $W_{w \rightarrow z}(s)$ системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \quad u = Kx \\ (sI - A - B_2 K)x &= B_1 w \\ x &= (sI - A - B_2 K)^{-1} B_1 w, \quad z = C_2 x + D_2 u, \quad u = Kx \\ z &= C_2 (sI - A - B_2 K)^{-1} B_1 w + D_2 K (sI - A - B_2 K)^{-1} B_1 w \\ &\quad z = (C_2 + D_2 K) (sI - A - B_2 K)^{-1} B_1 w \\ W_{w \rightarrow z}(s) &= (C_2 + D_2 K) (sI - A - B_2 K)^{-1} B_1 \end{aligned}$$

3.3. 1-й случай регулируемого выхода

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -2u \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Найдем \mathcal{H}_2 -регулятор.

Проверим условия:

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$
- $\det \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 4 \neq 0$, значит $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ – обратима
- $(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ – стабилизируема, так как матрица управляемости имеет ранг 2
- $(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$ – обнаруживаема, так как матрица наблюдаемости имеет ранг 2

Найдем матрицу $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 2.2462 & 4 \\ 4 & 8.2462 \end{bmatrix}$$

Матрица регулятора:

$$K = [-1 \quad -2.0616]$$

Передаточная матрица от внешнего возмущения к регулируемому выходу:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1.9384s + 1}{s^2 + 2.0616s + 1} & \frac{14.3696s + 6}{s^2 + 2.0616s + 1} \\ \frac{-2.5s - 1.2464}{s^2 + 2.0616s + 1} & \frac{11s + 7.1232}{s^2 + 2.0616s + 1} \end{bmatrix}$$

Графики АЧХ компонентов передаточной матрицы:

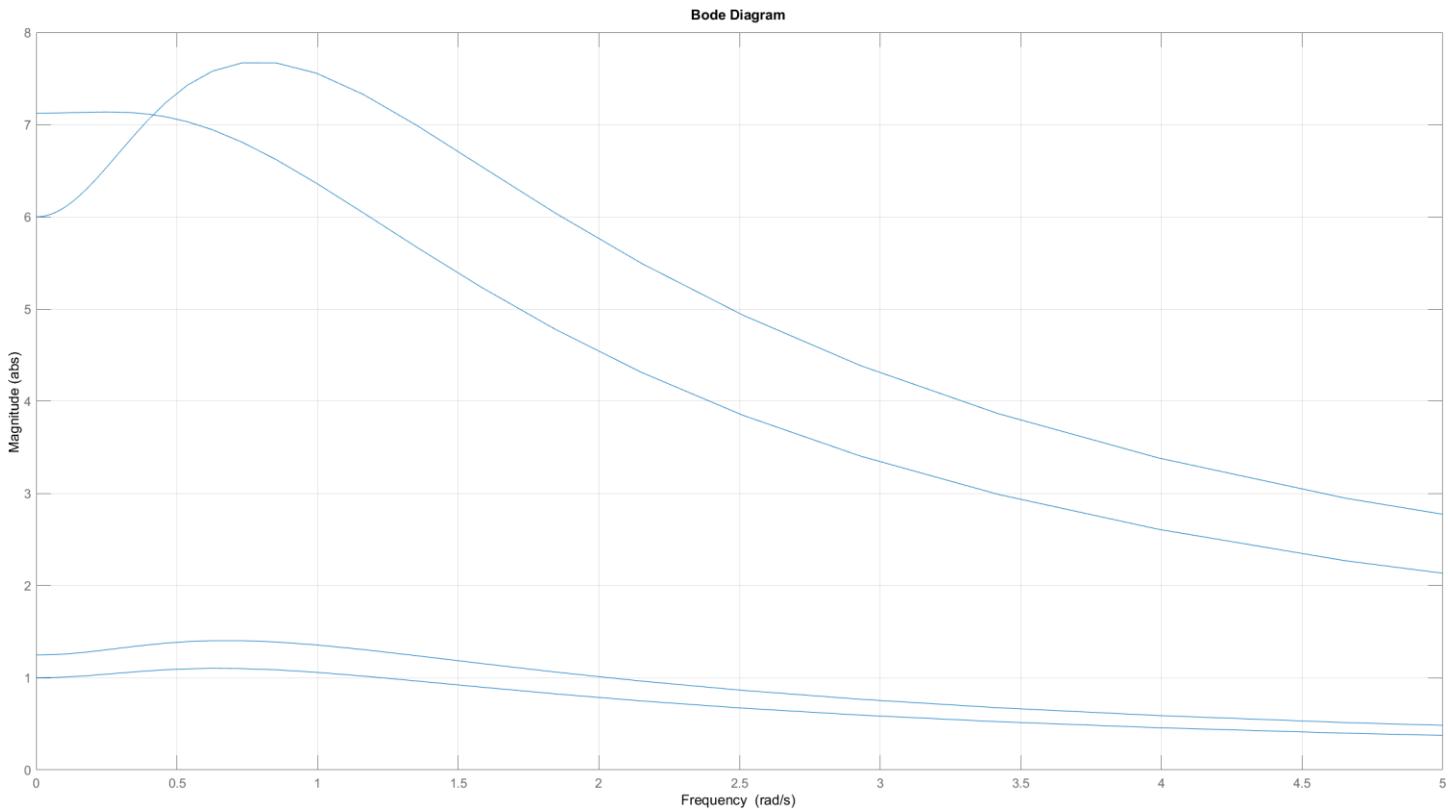


Рисунок 16: графики АЧХ

Графики сингулярных чисел передаточной матрицы:

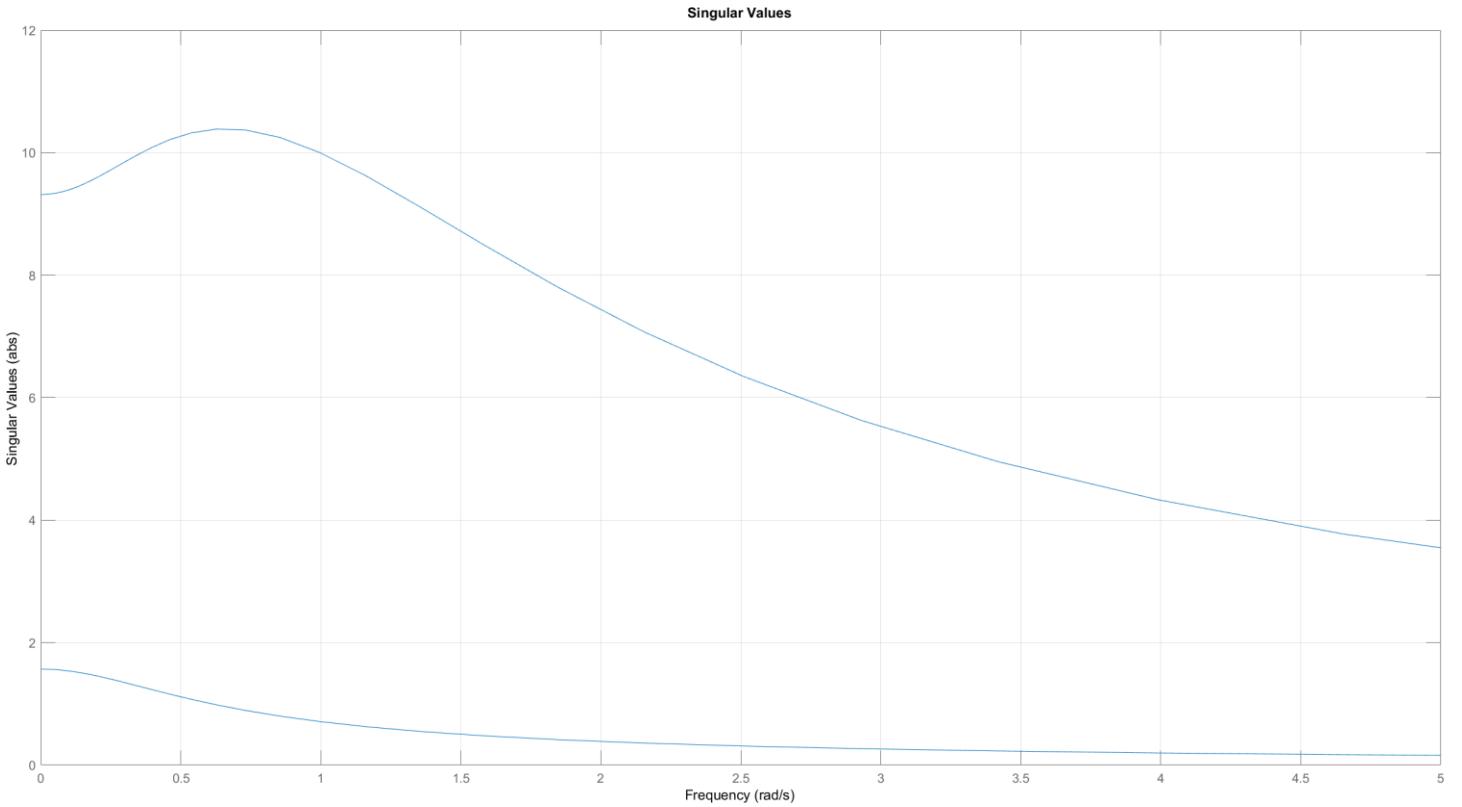


Рисунок 17: зависимость сингулярных чисел от частоты

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 10.1739, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 10.3818$$

Так как мы замкнули систему \mathcal{H}_2 -регулятором, то полученное значение $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2}$ является минимальным для данной системы (регулятор является оптимальным по данному критерию). В результате регулятор уменьшил «площадь» под графиком сингулярных чисел.

По графикам сингулярных чисел видно, что наибольшее усиление система будет давать при частоте $\approx 0.65 \text{ rad/s}$

Смоделируем данную замкнутую систему при внешних возмущениях.

Вначале возьмем такие возмущения, при которых система будет давать наибольшее усиление, т. е. с частотой $\approx 0.65 \text{ rad/s}$

$$w_1(t) = \begin{bmatrix} 3\sin\left(0.65t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \cos(0.65t + \pi) - \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

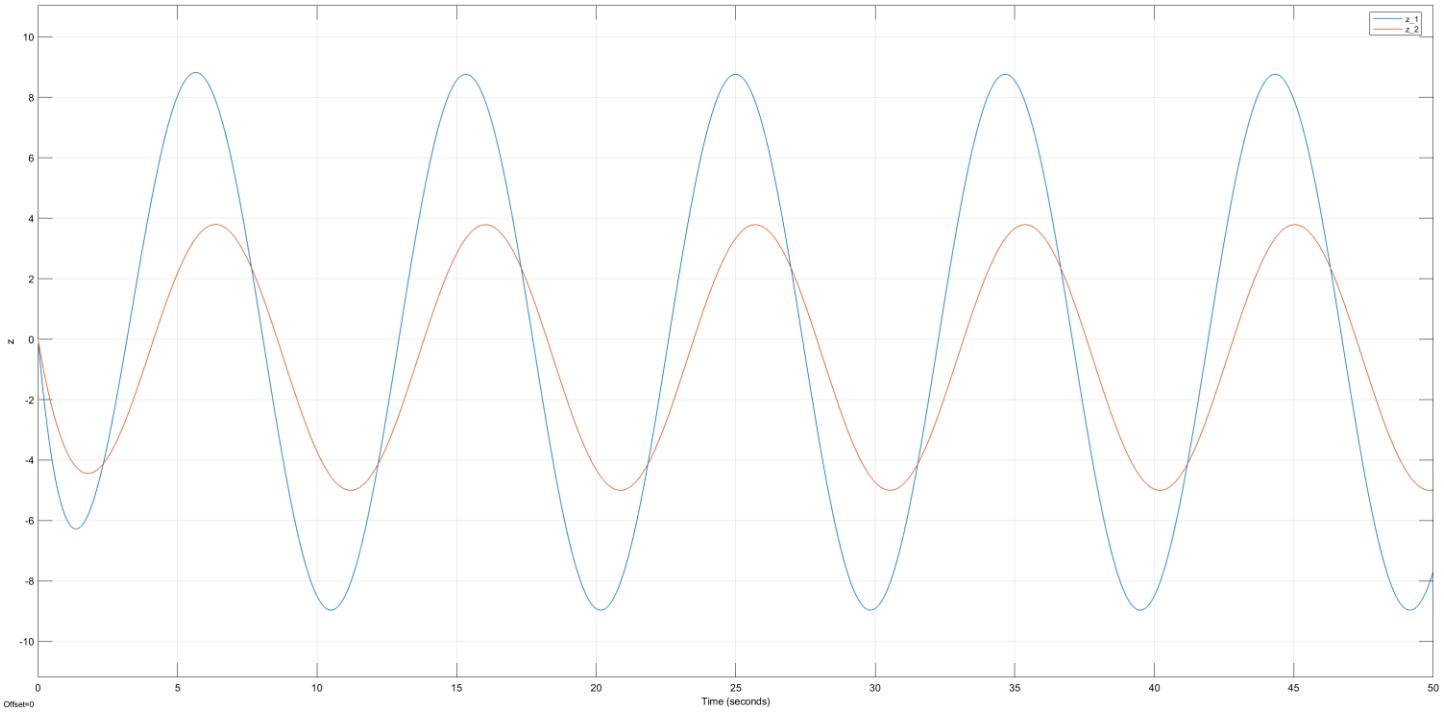


Рисунок 18: наибольшее усиление системы

Теперь возьмем возмущение такой частоты, при которой система даст намного меньшее усиление, например 3 rad/s .

$$w_2(t) = \begin{cases} 3\sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \cos(3t + \pi) - \frac{1}{20} \end{cases}$$

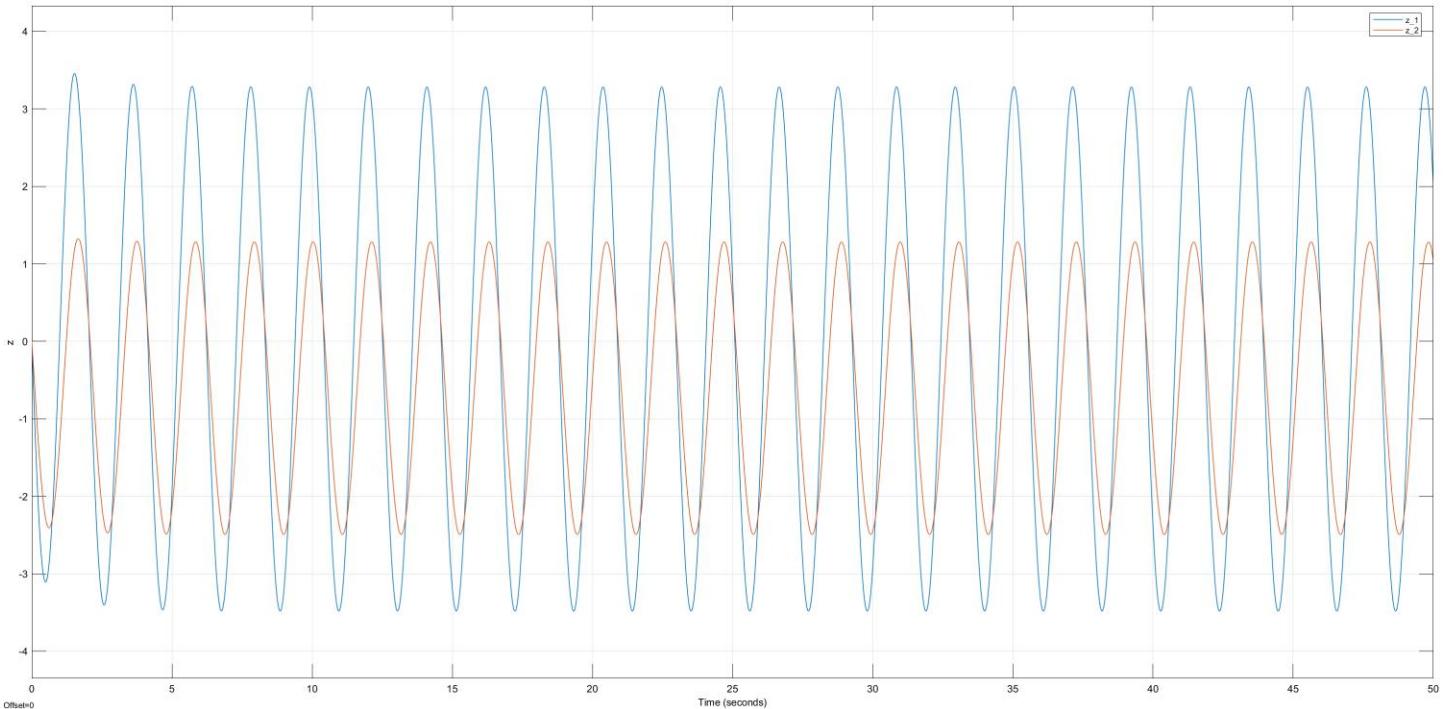


Рисунок 19: выход системы при большей частоте

Как видно, выход системы стал меньше примерно в 2 раза, и это коррелирует с тем, что наибольшее сингулярное число тоже меньше примерно в 2 раза при частоте 3 rad/s, чем при частоте 0.65 rad/s.

3.4. 2-й случай регулируемого выхода

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 6x_1 - 4x_2 \\ u \end{bmatrix} \end{cases}$$

Найдем \mathcal{H}_2 -регулятор.

Проверим условия:

1. $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$
2. $\det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \neq 0$, значит $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ – обратима
3. $(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ – стабилизируема, так как матрица управляемости имеет ранг 2
4. $(\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$ – обнаруживаема, так как матрица наблюдаемости имеет ранг 2

Найдем матрицу $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 55.749 & 6 \\ 6 & 5.2915 \end{bmatrix}$$

Матрица регулятора:

$$K = [-6 \quad -5.2915]$$

Передаточная матрица от внешнего возмущения к регулируемому выходу:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-14s - 108.498}{s^2 + 5.2915s + 6} & \frac{-6s + 73.749}{s^2 + 5.2915s + 6} \\ \frac{9.35425s - 3}{s^2 + 5.2915s + 6} & \frac{-21.8745s - 18}{s^2 + 5.2915s + 6} \end{bmatrix}$$

Графики АЧХ компонентов передаточной матрицы:

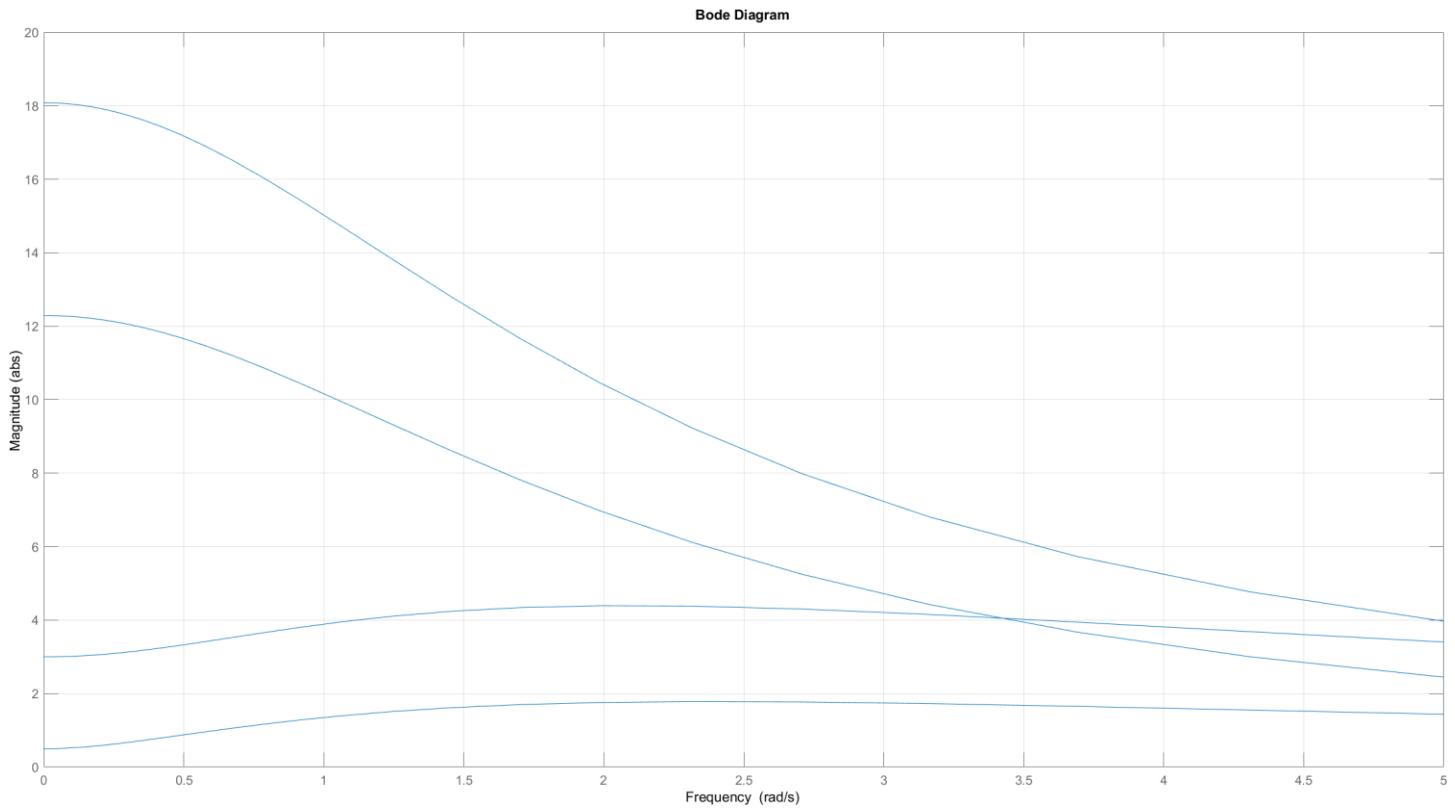


Рисунок 20: графики АЧХ

Графики сингулярных чисел передаточной матрицы:

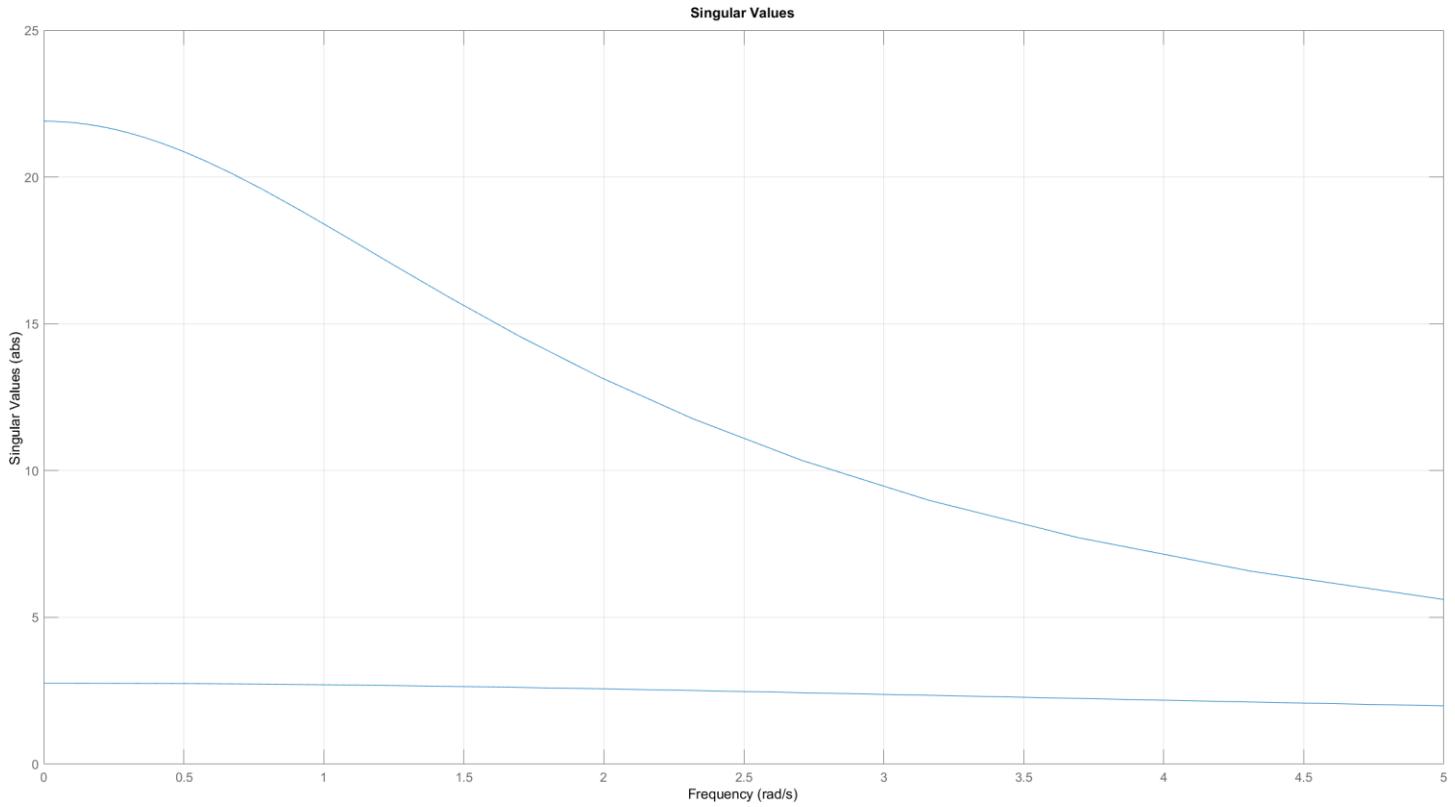


Рисунок 21: зависимость сингулярных чисел от частоты

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 18.7534, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 21.9026$$

Так как мы замкнули систему \mathcal{H}_2 -регулятором, то полученное значение $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2}$ является минимальным для данной системы (регулятор является оптимальным по данному критерию). В результате регулятор уменьшил «площадь» под графиком сингулярных чисел.

По графикам сингулярных чисел видно, что наибольшее усиление система будет давать при частоте $\approx 0 \text{ rad/s}$

Смоделируем данную замкнутую систему при внешних возмущениях.

Вначале возьмем такие возмущения, при которых система будет давать наибольшее усиление, т. е. с частотой $\approx 0.1 \text{ rad/s}$

$$w_1(t) = \begin{bmatrix} 3\sin\left(0.1t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \cos(0.1t + \pi) - \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

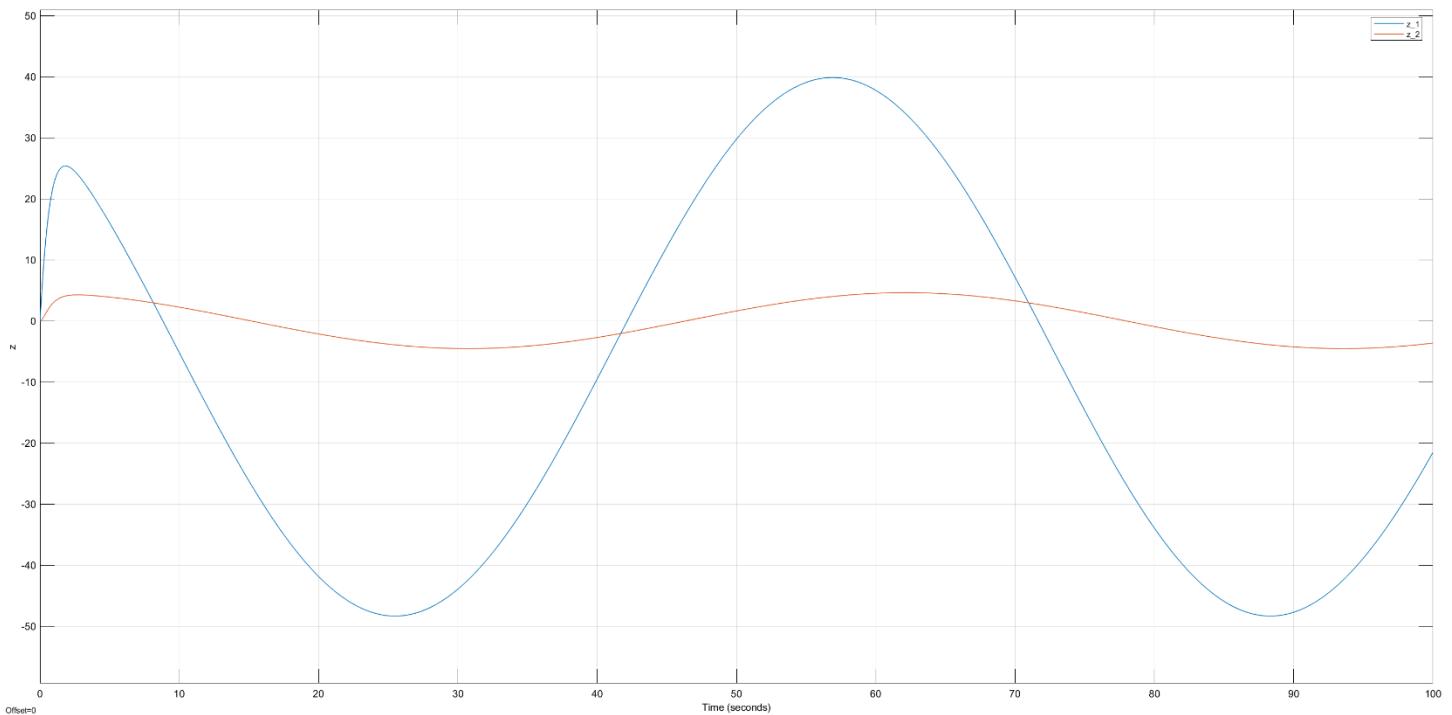


Рисунок 22: наибольшее усиление системы

Теперь возьмем возмущение такой частоты, при которой система даст намного меньшее усиление, например 2 rad/s .

$$w_2(t) = \begin{bmatrix} 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \cos(2t + \pi) - \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

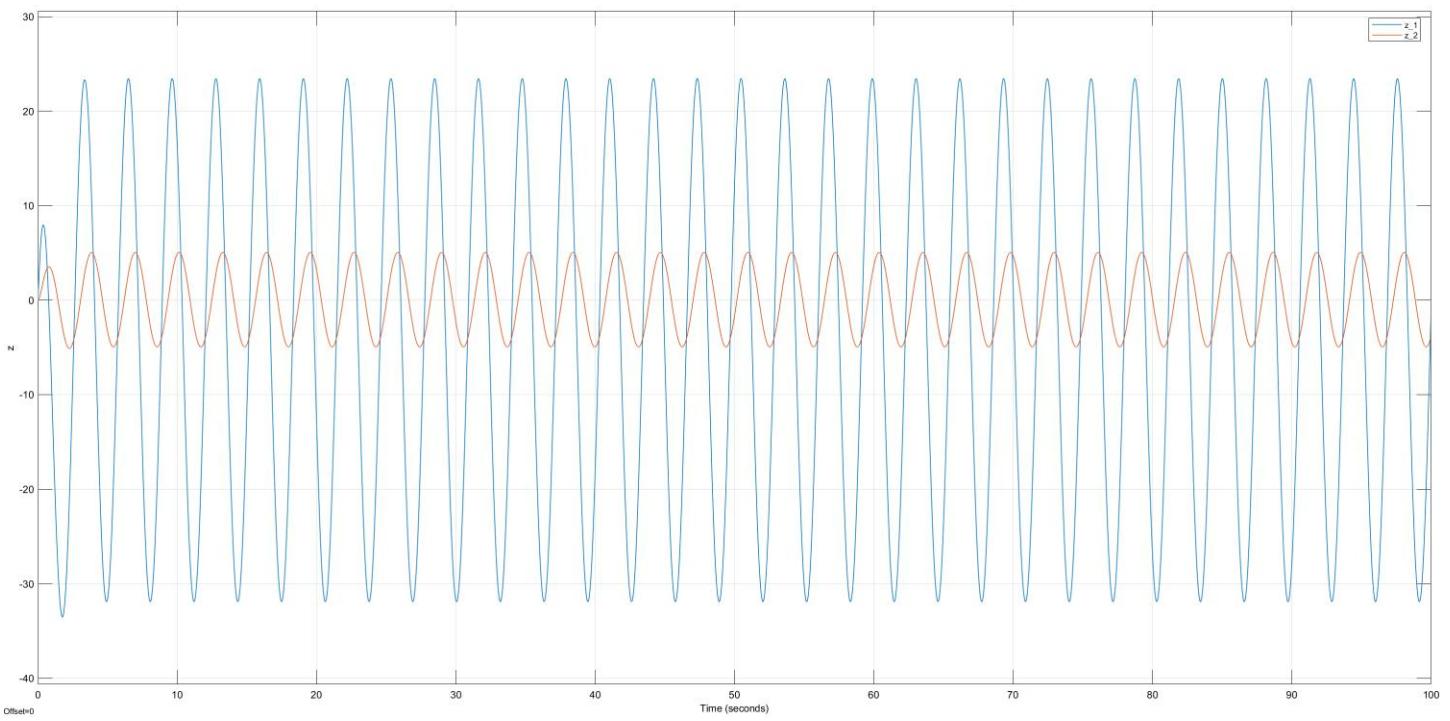


Рисунок 23: выход системы при большей частоте

Как видно, выход системы стал меньше примерно в 1.5 раза, и это коррелирует с тем, что наибольшее сингулярное число тоже меньше примерно в 1.5 раза при частоте 2 rad/s , чем при частоте 0.1 rad/s .

3.5. 3-й случай регулируемого выхода

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 7x_1 \\ 3u \end{bmatrix} \end{cases}$$

Найдем \mathcal{H}_2 -регулятор.

Проверим условия:

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$
2. $\det \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 9 \neq 0$, значит $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ – обратима
3. $(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ – стабилизируема, так как матрица управляемости имеет ранг 2
4. $(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$ – обнаруживаема, так как матрица наблюдаемости имеет ранг 2

Найдем матрицу $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 50.6629 & 21.8403 \\ 21.8403 & 20.0521 \end{bmatrix}$$

Матрица регулятора:

$$K = [-2.4267 \quad -2.2281]$$

Передаточная матрица от внешнего возмущения к регулируемому выходу:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} -4.5s - 12.7658 & -s + 12.8829 \\ \frac{s^2 + 2.2281s + 2.4267}{s^2 + 2.2281s + 2.4267} & \frac{s^2 + 2.2281s + 2.4267}{7s + 36.5967} \\ \frac{-14s - 27.6934}{s^2 + 2.2281s + 2.4267} & \frac{11.218s - 3.64005}{s^2 + 2.2281s + 2.4267} \\ \frac{11.218s - 3.64005}{s^2 + 2.2281s + 2.4267} & \frac{-27.333s - 21.8503}{s^2 + 2.2281s + 2.4267} \end{bmatrix}$$

Графики АЧХ компонентов передаточной матрицы:

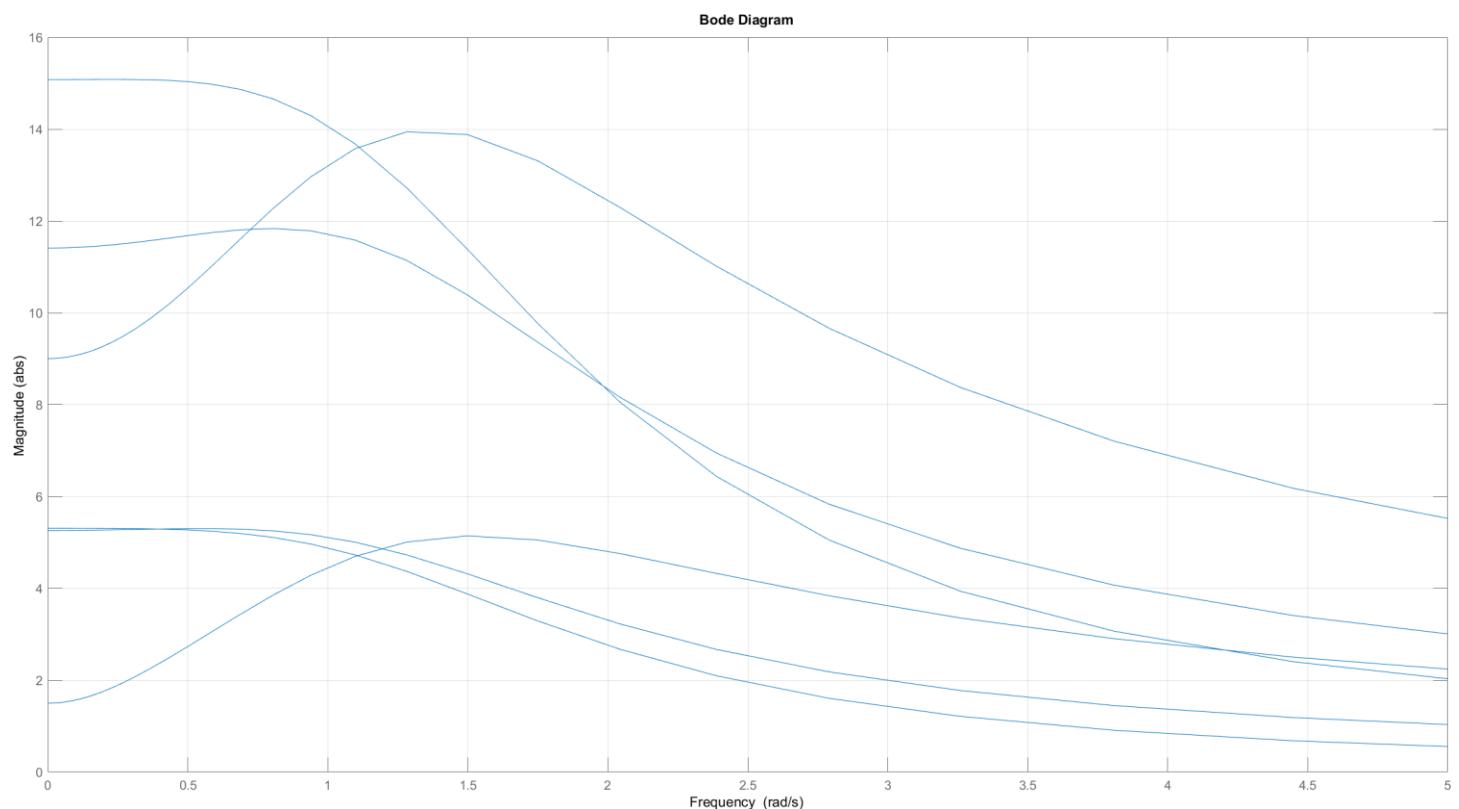


Рисунок 24: графики АЧХ

Графики сингулярных чисел передаточной матрицы:

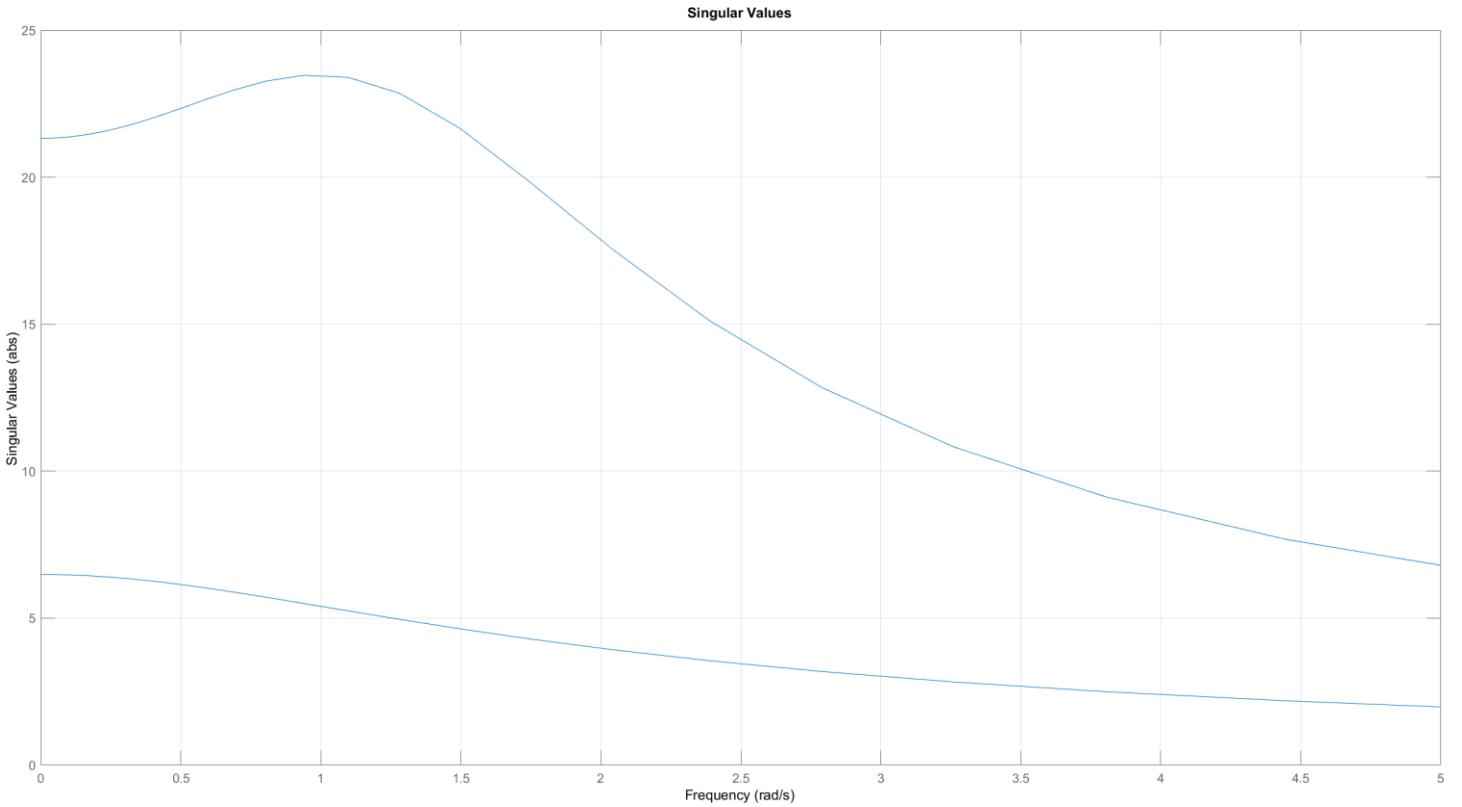


Рисунок 25: зависимость сингулярных чисел от частоты

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 22.9392, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 23.4858$$

Так как мы замкнули систему \mathcal{H}_2 -регулятором, то полученное значение $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2}$ является минимальным для данной системы (регулятор является оптимальным по данному критерию). В результате регулятор уменьшил «площадь» под графиком сингулярных чисел.

По графикам сингулярных чисел видно, что наибольшее усиление система будет давать при частоте $\approx 1 \text{ rad/s}$

Смоделируем данную замкнутую систему при внешних возмущениях.

Вначале возьмем такие возмущения, при которых система будет давать наибольшее усиление, т. е. с частотой $\approx 1 \text{ rad/s}$

$$w_1(t) = \begin{bmatrix} 3\sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \cos(t + \pi) - \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

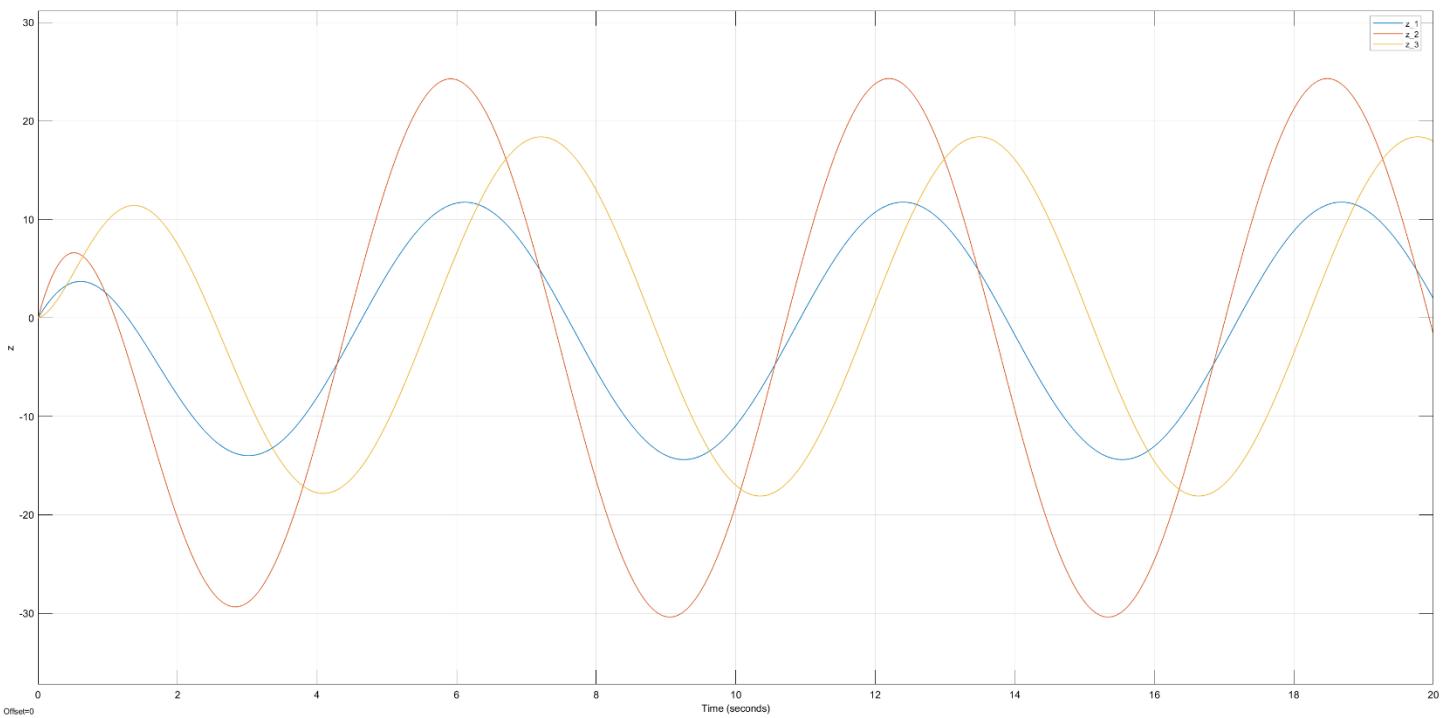


Рисунок 26: наибольшее усиление системы

Теперь возьмем возмущение такой частоты, при которой система даст намного меньшее усиление, например 3 rad/s .

$$w_2(t) = \begin{cases} 3\sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \cos(3t + \pi) - \frac{1}{20} \end{cases}$$

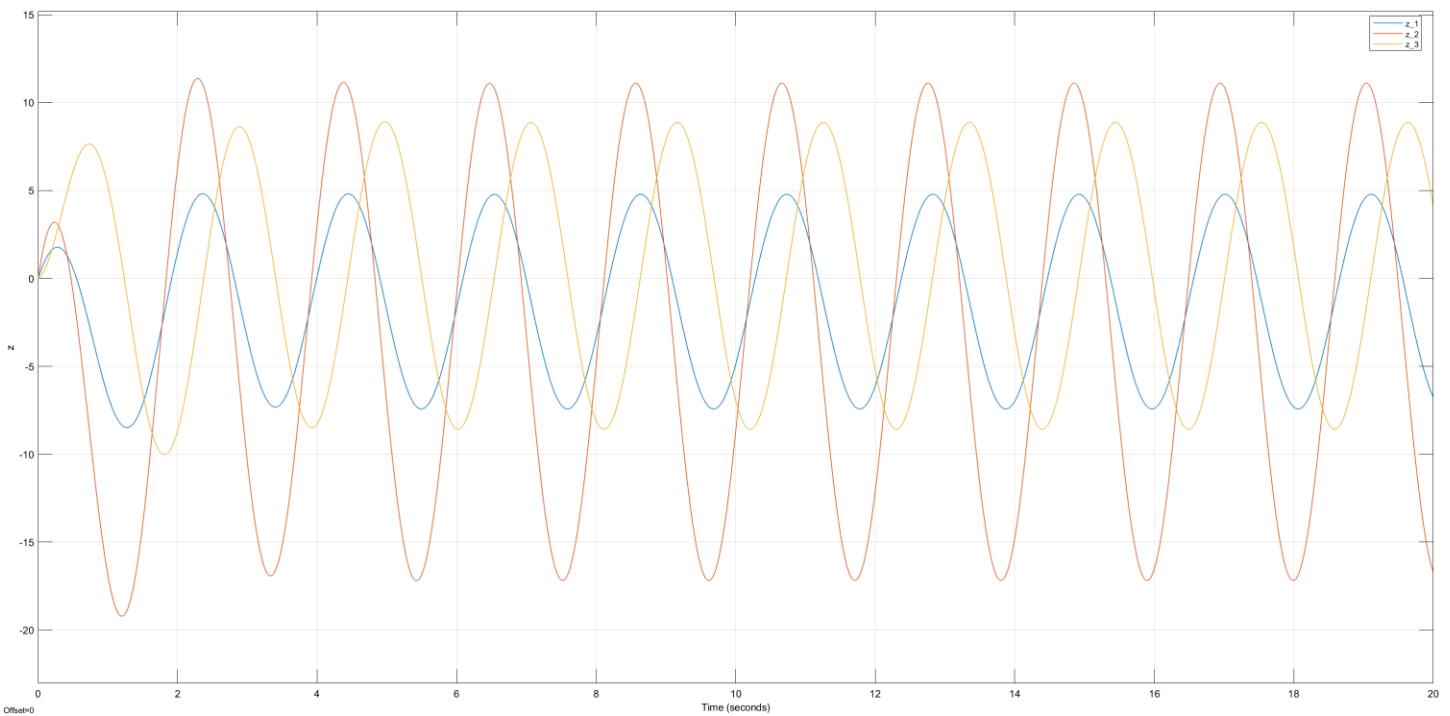


Рисунок 27: выход системы при большей частоте

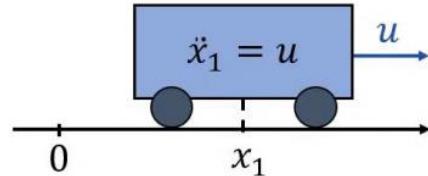
Как видно, выход системы стал меньше примерно в 2 раза, и это коррелирует с тем, что наибольшее сингулярное число тоже меньше примерно в 2 раза при частоте 3 rad/s, чем при частоте 1 rad/s.

Итого, с помощью \mathcal{H}_2 -регулятора можно уменьшать среднестатистическое возмущение системы.

Задание 4. Синтез \mathcal{H}_2 -регулятора по выходу

4.1. Математическая модель системы

Рассмотрим тележку, измеряемым выходом которой является её координата:



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 2] w \end{cases}$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} f_1 - \text{внешние возмущения} \\ f_2 - \text{внешние возмущения} \\ \xi - \text{помехи измерений} \end{bmatrix}, \quad \text{причем } \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} \times [0 \ 0 \ 2]^T = 0$$

$u(t)$ – управляющее воздействие

Зададим регулируемый выход $z = C_2 x + D_2 u$, где $(C_2^T D_2 = 0)$ в трех вариантах:

$$z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -2u \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 6x_1 - 4x_2 \\ u \end{bmatrix}$$

$$z_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 7x_1 \\ 3u \end{bmatrix}$$

4.2. Алгоритм синтеза \mathcal{H}_2 -регулятора по выходу

Суть \mathcal{H}_2 -управления в минимизации $\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2}$.

Алгоритм синтеза в общем виде.

Пусть есть система:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} \\ u = K\hat{x} \end{cases}$$

Так как по сути, \mathcal{H}_2 -регулятор по состоянию – это LQR и \mathcal{H}_2 -наблюдатель – это LQE, то точно также для синтеза \mathcal{H}_2 -регулятора по выходу (LQG) можно воспользоваться тем же правилом разделения (Separation rule) и

рассчитать независимо матрицу K \mathcal{H}_2 -регулятора по состоянию и матрицу L \mathcal{H}_2 -наблюдателя, затем их соединить и получить оптимальную связку, то есть $\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2} \rightarrow \min$.

Итак, синтез \mathcal{H}_2 -регулятора по выходу возможен, если выполнены следующие условия:

- | | |
|--|--|
| 1. $C_2^T D_2 = 0$
2. $D_2^T D_2$ – обратима
3. (A, B_2) – стабилизуемы
4. (C_2, A) – обнаруживаемы
5. $B_1 D_1^T = 0$
6. $D_1 D_1^T$ – обратима
7. (C_1, A) – обнаруживаемы
8. (A, B_1) – стабилизуемы | $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\}$ LQR
$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\}$ LQE |
|--|--|

Тогда существует решение $Q > 0$ уравнения Риккати $A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = 0$

и регулятор $K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q$ делает замкнутую систему устойчивой.

И существует решение $P > 0$ уравнения Риккати $AP + PA^T + B_1 B_1^T - PC_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P = 0$

и наблюдатель $L = -PC_1^T (D_1 D_1^T)^{-1}$ имеет устойчивую динамику ошибки.

В конце концов, система будет иметь минимальную $\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_2}$.

Найдем общий вид передаточной функции $W_{w \rightarrow z}(s)$ системы:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad u = K \hat{x}$$

$$(sI - A)x = B_1 w + B_2 K \hat{x}$$

$$x = (sI - A)^{-1}(B_1 w + B_2 K \hat{x})$$

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B_2 u + L(\hat{y} - y), \quad \hat{y} = C_1 \hat{x}$$

$$\hat{x} = (sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}(-Ly), \quad y = C_1 x + D_1 w$$

$$\hat{x} = (sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}(-L(C_1 x + D_1 w))$$

$$\begin{cases} x = (sI - A)^{-1}(B_1 w + B_2 K \hat{x}) \\ \hat{x} = -(sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}(LC_1 x + LD_1 w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (sI - A)^{-1}(B_1 w - B_2 K(sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}(LC_1 x + LD_1 w)) \\ \hat{x} = -(sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}(LC_1(sI - A)^{-1}(B_1 w + B_2 K \hat{x}) + LD_1 w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (sI - A)^{-1}(B_1 w - B_2 K(sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}LC_1 x - B_2 K(sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}LD_1 w) \\ \hat{x} = -(sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}(LC_1(sI - A)^{-1}B_1 w + LC_1(sI - A)^{-1}B_2 K \hat{x} + LD_1 w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + (sI - A)^{-1}B_2 K(sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}LC_1 x = (sI - A)^{-1}(B_1 - B_2 K(sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}LD_1)w \\ \hat{x} + (sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}LC_1(sI - A)^{-1}B_2 K \hat{x} = -(sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}(LC_1(sI - A)^{-1}B_1 + LD_1)w \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (I + (sI - A)^{-1}B_2 K(sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}LC_1)^{-1}(sI - A)^{-1}(B_1 - B_2 K(sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}LD_1)w \\ \hat{x} = -(I + (sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}LC_1(sI - A)^{-1}B_2 K)^{-1}(sI - A - B_2 K - LC_1)^{-1}(LC_1(sI - A)^{-1}B_1 + LD_1)w \end{cases}$$

$$z = C_2 x + D_2 u, \quad u = K \hat{x}$$

$$z = C_2 x + D_2 K \hat{x}$$

$$z = C_2 x(w) + D_2 K \hat{x}(w) = W_{w \rightarrow z}(s) w$$

4.3. 1-й случай регулируемого выхода

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 2] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \xi \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -2u \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Найдем \mathcal{H}_2 -регулятор по выходу.

Проверим условия:

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$
2. $\det \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 4 \neq 0$, значит $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ – обратима
3. $(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ – стабилизируема, так как матрица управляемости имеет ранг 2
4. $(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$ – обнаруживаема, так как матрица наблюдаемости имеет ранг 2
5. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} \times [0 \ 0 \ 2]^T = 0$
6. $\det([0 \ 0 \ 2] \times [0 \ 0 \ 2]^T) = 4 \neq 0$, значит $[0 \ 0 \ 2] \times [0 \ 0 \ 2]^T$ – обратима
7. $([1 \ 0], \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$ – обнаруживаема, так как матрица наблюдаемости имеет ранг 2
8. $(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix})$ – стабилизируема, так как матрица управляемости имеет ранг 2

Найдем матрицу $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 2.2462 & 4 \\ 4 & 8.2462 \end{bmatrix}$$

Матрица регулятора:

$$K = [-1 \ -2.0616]$$

Найдем матрицу $P > 0$ из уравнения Риккати:

$$P = \begin{bmatrix} 8.2863 & 6.0828 \\ 6.0828 & 10.6008 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдателя:

$$L = \begin{bmatrix} -2.0716 \\ -1.5207 \end{bmatrix}$$

Передаточная матрица от внешнего возмущения к регулируемому выходу:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & W_{13}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & W_{23}(s) \end{bmatrix}$$

$$W_{11}(s) = \frac{-20.8267s^4 - 86.957s^3 - 143.545s^2 + 0.335s + 10.3279}{s^6 + 8.2664s^5 + 30.6664s^4 + 61.348s^3 + 69.1655s^2 + 41.6465s + 10.3279}$$

$$W_{12}(s) = \frac{10.4134s^4 + 77.3219s^3 + 221.539s^2 + 270.535s + 61.9671}{s^6 + 8.2664s^5 + 30.6664s^4 + 61.348s^3 + 69.1655s^2 + 41.6465s + 10.3279}$$

$$W_{13}(s) = \frac{20.8267s^5 + 92.1637s^4 + 166.585s^3 + 41.3114s^2}{s^6 + 8.2664s^5 + 30.6664s^4 + 61.348s^3 + 69.1655s^2 + 41.6465s + 10.3279}$$

$$W_{21}(s) = \frac{-2.5s^3 - 9.333s^2 + 18.3945s + 15.9157}{s^4 + 4.1332s^3 + 6.79151s^2 + 5.20668s + 1.5207}$$

$$W_{22}(s) = \frac{11s^3 + 51.4652s^2 + 83.8858s + 36.187}{s^4 + 4.1332s^3 + 6.79151s^2 + 5.20668s + 1.5207}$$

$$W_{23}(s) = \frac{-31.2401s^2 - 29.9509s + 6.0828}{s^4 + 4.1332s^3 + 6.79151s^2 + 5.20668s + 1.5207}$$

Графики АЧХ компонентов передаточной матрицы:

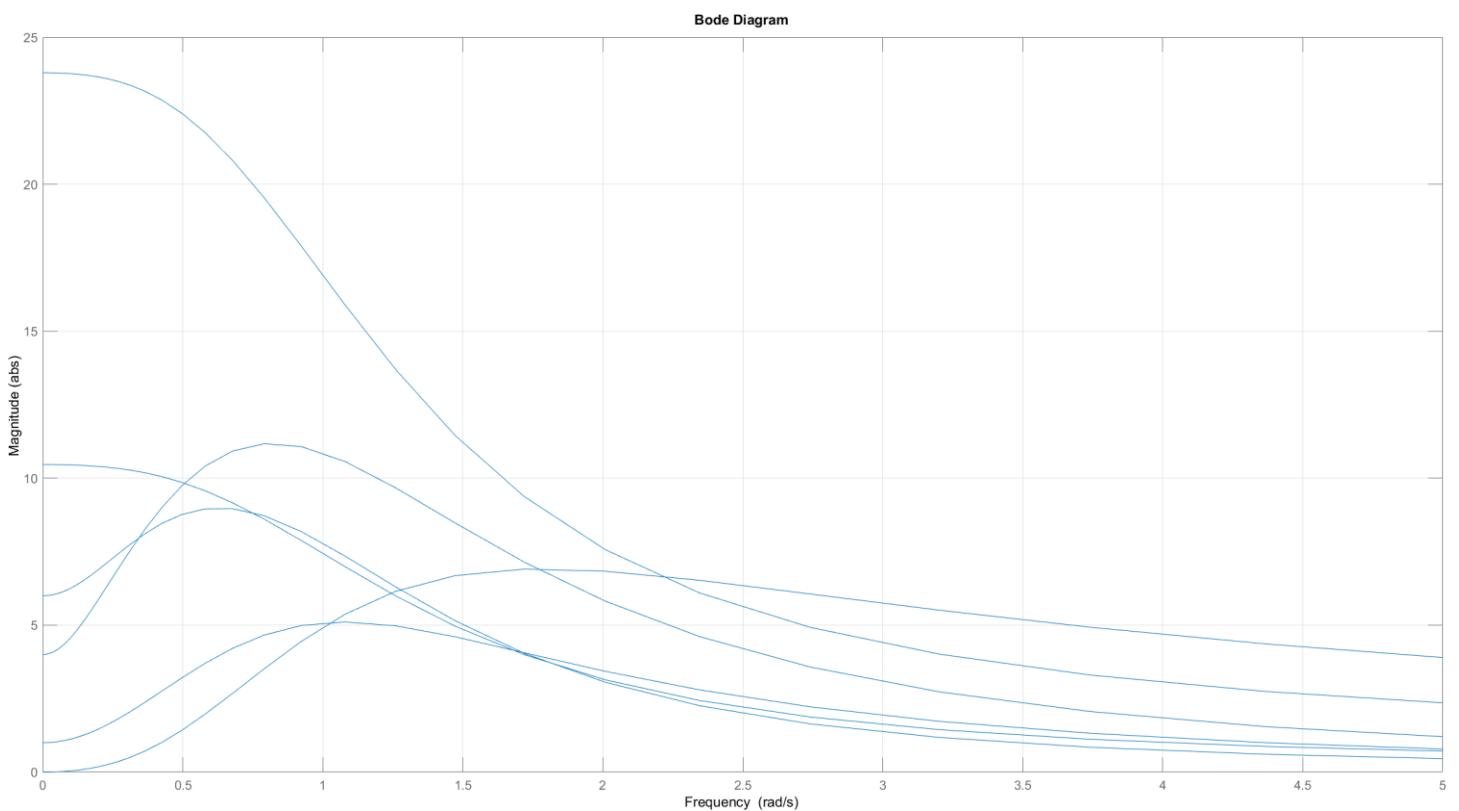


Рисунок 28: графики АЧХ

Графики сингулярных чисел передаточной матрицы:

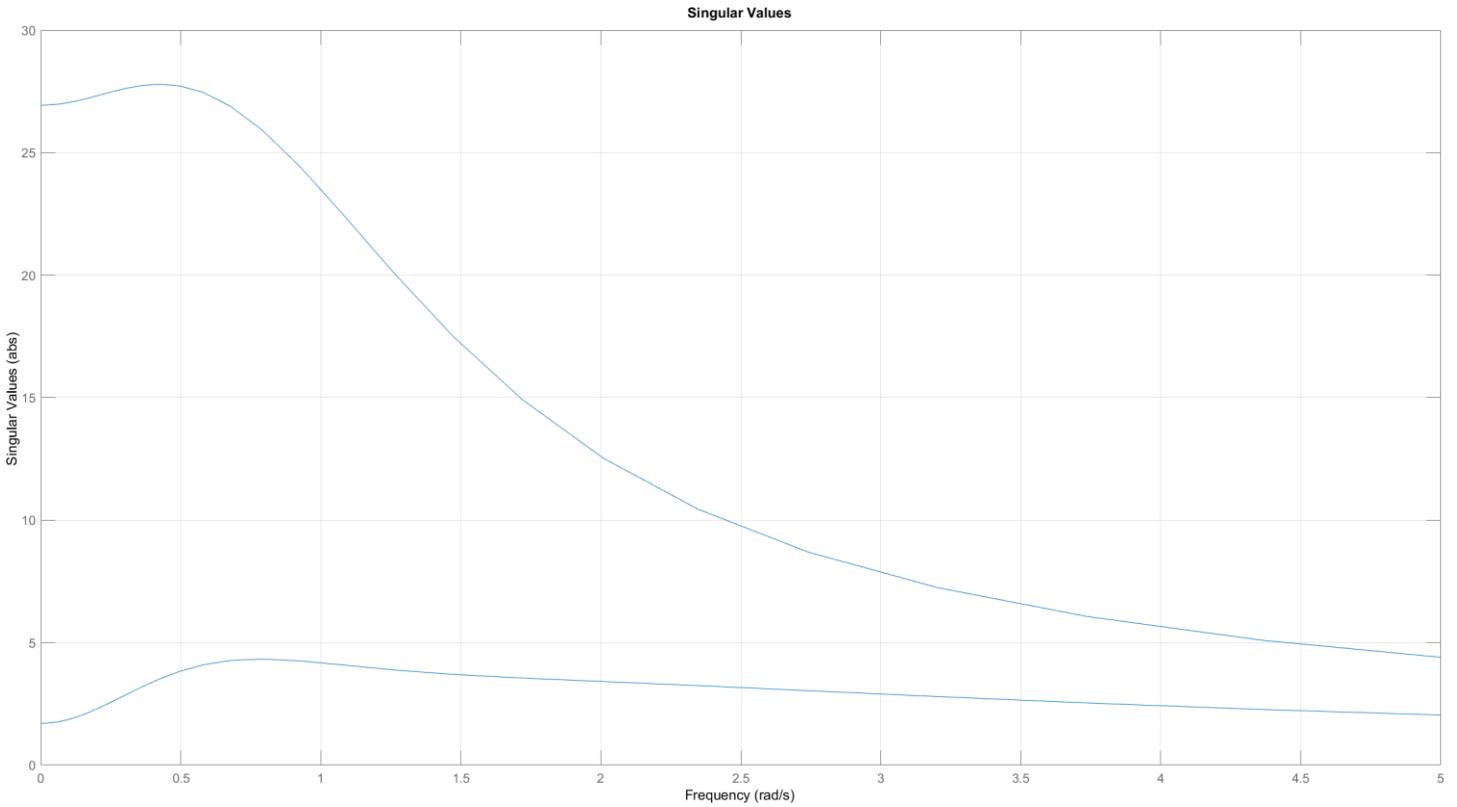


Рисунок 29: зависимость сингулярных чисел от частоты

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 20.8342, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 27.7973$$

Так как мы замкнули систему \mathcal{H}_2 -регулятором по выходу, то полученное значение $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2}$ является минимальным для данной системы (регулятор является оптимальным по данному критерию). В результате регулятор уменьшил «площадь» под графиком сингулярных чисел.

По графикам сингулярных чисел видно, что наибольшее усиление система будет давать при частоте $\approx 0.5 \text{ rad/s}$

Смоделируем данную замкнутую систему при внешних возмущениях и помехах измерения.

Вначале возьмем такие возмущения, при которых система будет давать наибольшее усиление, т. е. с частотой $\approx 0.5 \text{ rad/s}$

$$w_1(t) = \begin{bmatrix} 3\sin\left(0.5t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \cos(0.5t + \pi) - \frac{1}{20} \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 3) \end{bmatrix}$$

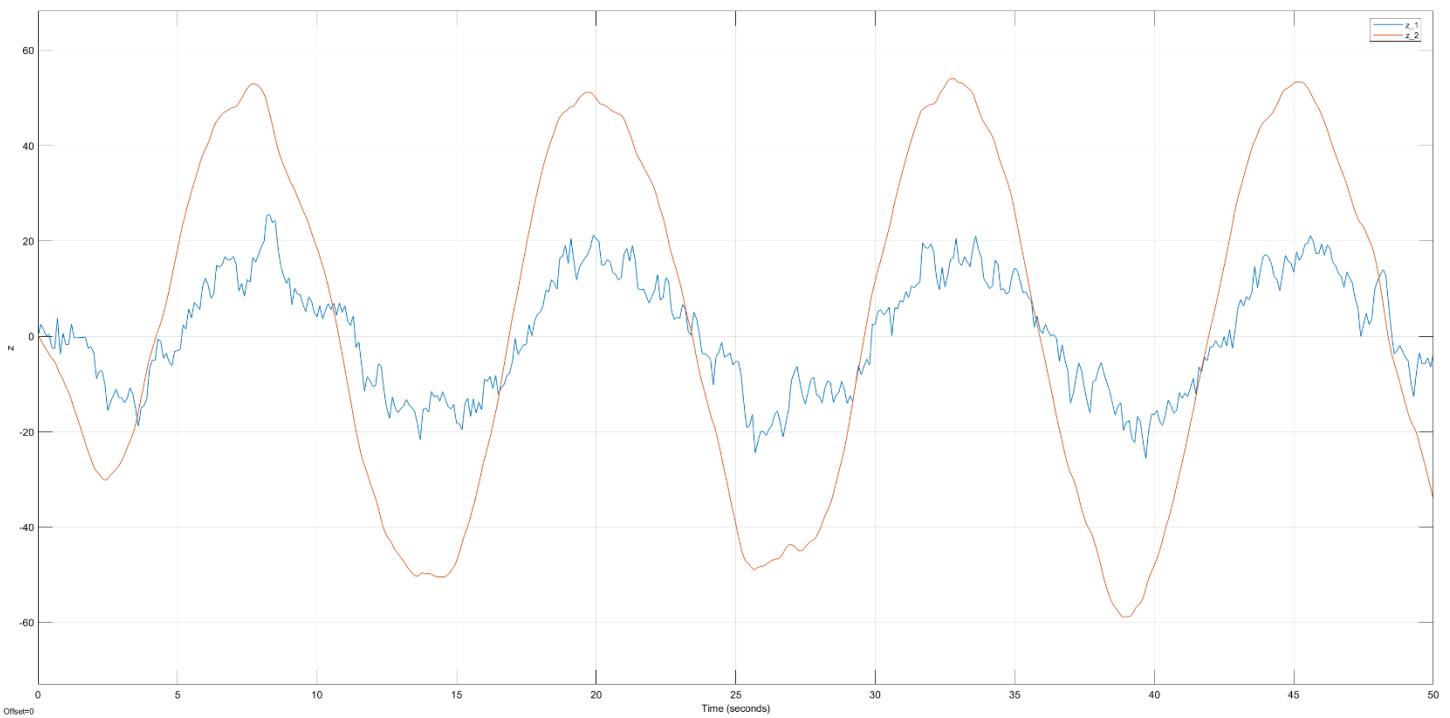


Рисунок 30: наибольшее усиление системы

Теперь возьмем возмущение такой частоты, при которой система даст намного меньшее усиление, например 2 rad/s .

$$w_2(t) = \begin{cases} 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \cos(2t + \pi) - \frac{1}{20} \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 3) \end{cases}$$

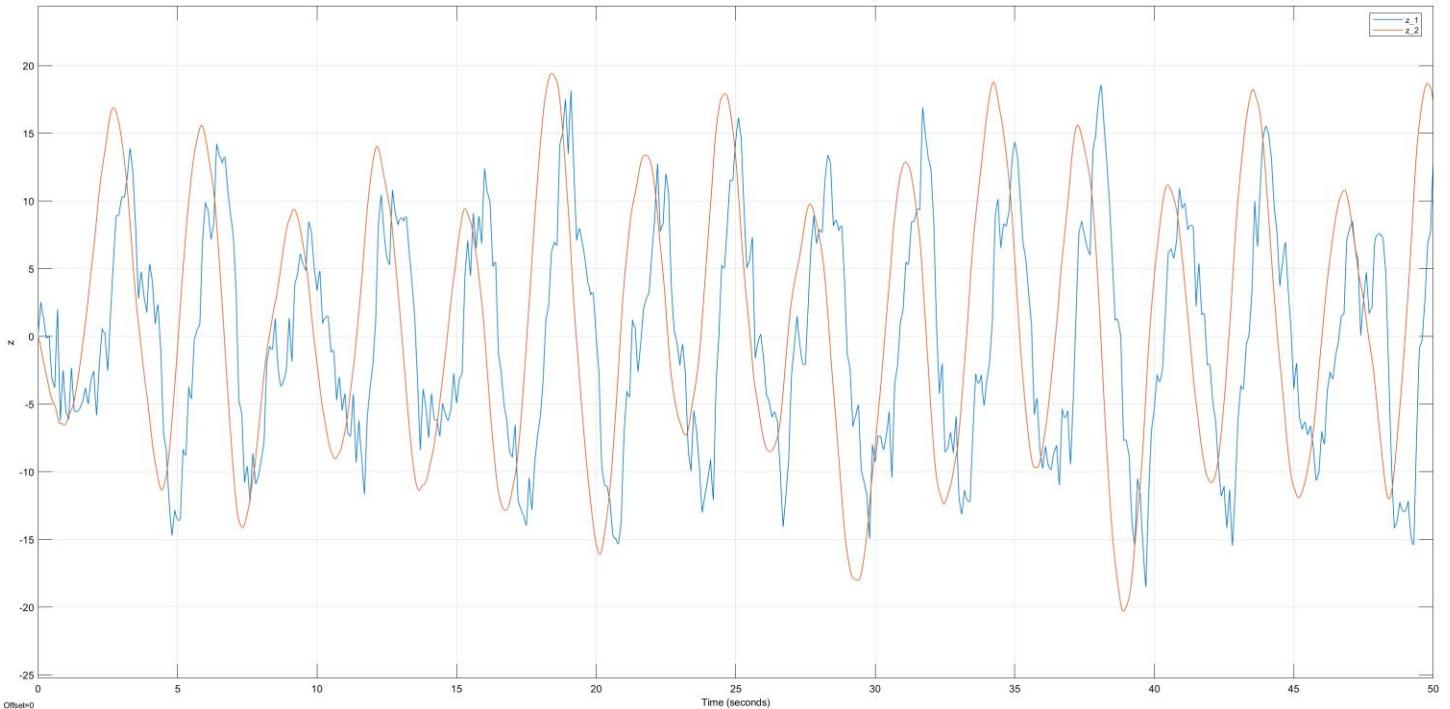


Рисунок 31: выход системы при большей частоте

Как видно, выход системы стал меньше примерно в 2.5 раз, и это коррелирует с тем, что наибольшее сингулярное число тоже меньше примерно в 2.5 раз при частоте 2 rad/s, чем при частоте 0.5 rad/s.

4.4. 2-й случай регулируемого выхода

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 2] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \xi \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 6x_1 - 4x_2 \\ u \end{bmatrix} \end{cases}$$

Найдем \mathcal{H}_2 -регулятор по выходу.

Проверим условия:

1. $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$
2. $\det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \neq 0$, значит $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ – обратима
3. $(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ – стабилизируема, так как матрица управляемости имеет ранг 2
4. $(\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$ – обнаруживаема, так как матрица наблюдаемости имеет ранг 2
5. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} \times [0 \ 0 \ 2]^T = 0$
6. $\det([0 \ 0 \ 2] \times [0 \ 0 \ 2]^T) = 4 \neq 0$, значит $[0 \ 0 \ 2] \times [0 \ 0 \ 2]^T$ – обратима
7. $([1 \ 0], \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$ – обнаруживаема, так как матрица наблюдаемости имеет ранг 2
8. $(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix})$ – стабилизируема, так как матрица управляемости имеет ранг 2

Найдем матрицу $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 55.7490 & 6 \\ 6 & 5.2915 \end{bmatrix}$$

Матрица регулятора:

$$K = [-6 \ -5.2915]$$

Найдем матрицу $P > 0$ из уравнения Риккати:

$$P = \begin{bmatrix} 8.2863 & 6.0828 \\ 6.0828 & 10.6008 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдателя:

$$L = \begin{bmatrix} -2.0716 \\ -1.5207 \end{bmatrix}$$

Передаточная матрица от внешнего возмущения к регулируемому выходу:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & W_{13}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & W_{23}(s) \end{bmatrix}$$

$$W_{11}(s) = \frac{-14s^3 - 100.083s^2 - 400.478s - 17.5459}{s^4 + 7.3631s^3 + 18.4826s^2 + 20.4764s + 9.1242}$$

$$W_{12}(s) = \frac{-6s^3 - 26.1786s^2 + 103.546s + 369.183}{s^4 + 7.3631s^3 + 18.4826s^2 + 20.4764s + 9.1242}$$

$$W_{13}(s) = \frac{163.811s^2 - 172.723s - 109.49}{s^4 + 7.3631s^3 + 18.4826s^2 + 20.4764s + 9.1242}$$

$$W_{21}(s) = \frac{40.9528s^4 + 309.55s^3 + 811.33s^2 + 114.458s - 84.3193}{s^6 + 14.7262s^5 + 91.1804s^4 + 292.654s^3 + 501.499s^2 + 445.639s + 168.639}$$

$$W_{22}(s) = \frac{-20.4764s^4 - 221.323s^3 - 925.32s^2 - 1505.55s - 505.916}{s^6 + 14.7262s^5 + 91.1804s^4 + 292.654s^3 + 501.499s^2 + 445.639s + 168.639}$$

$$W_{23}(s) = \frac{-40.9528s^5 - 319.788s^4 - 891.277s^3 - 337.277s^2}{s^6 + 14.7262s^5 + 91.1804s^4 + 292.654s^3 + 501.499s^2 + 445.639s + 168.639}$$

Графики АЧХ компонентов передаточной матрицы:

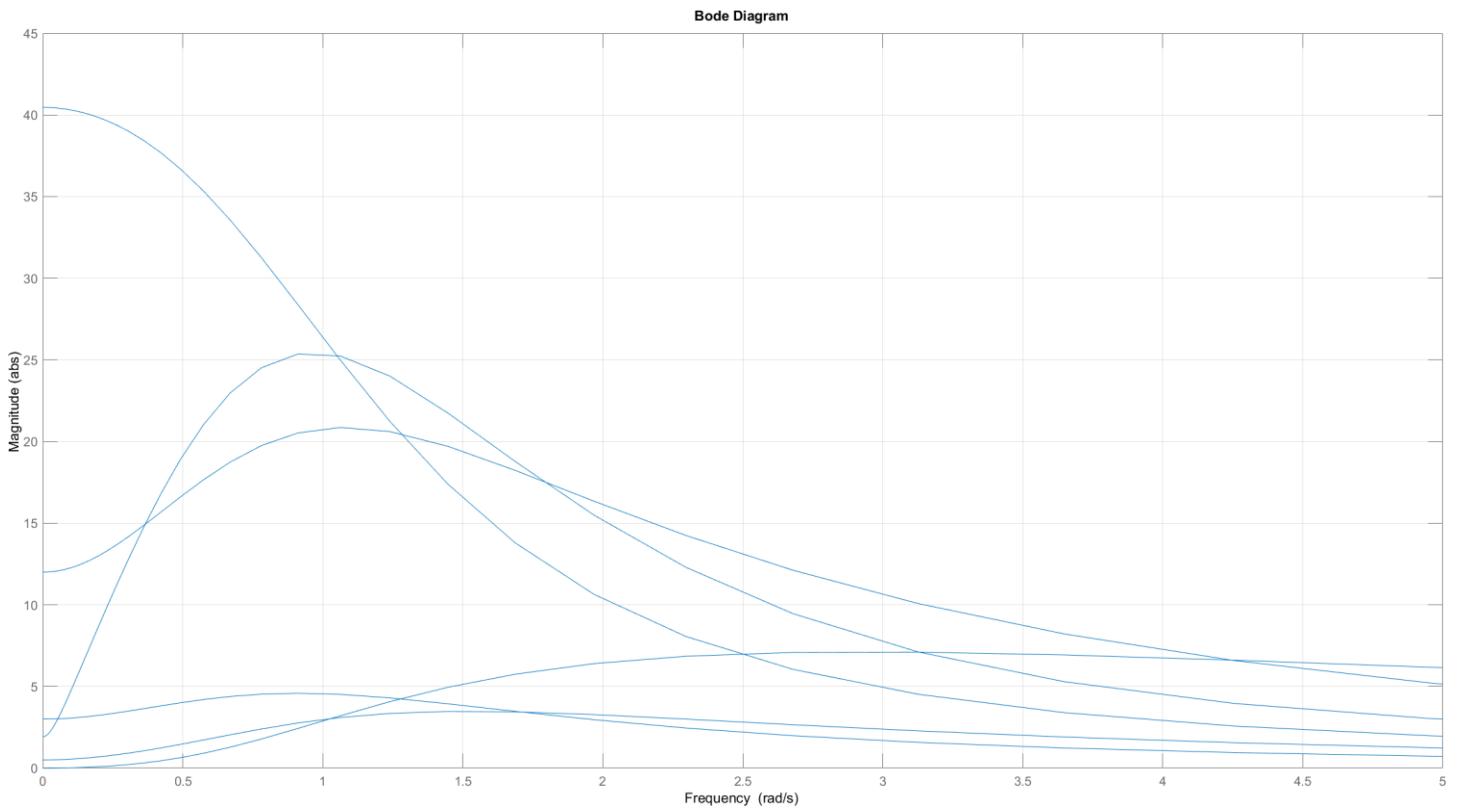


Рисунок 32: графики АЧХ

Графики сингулярных чисел передаточной матрицы:

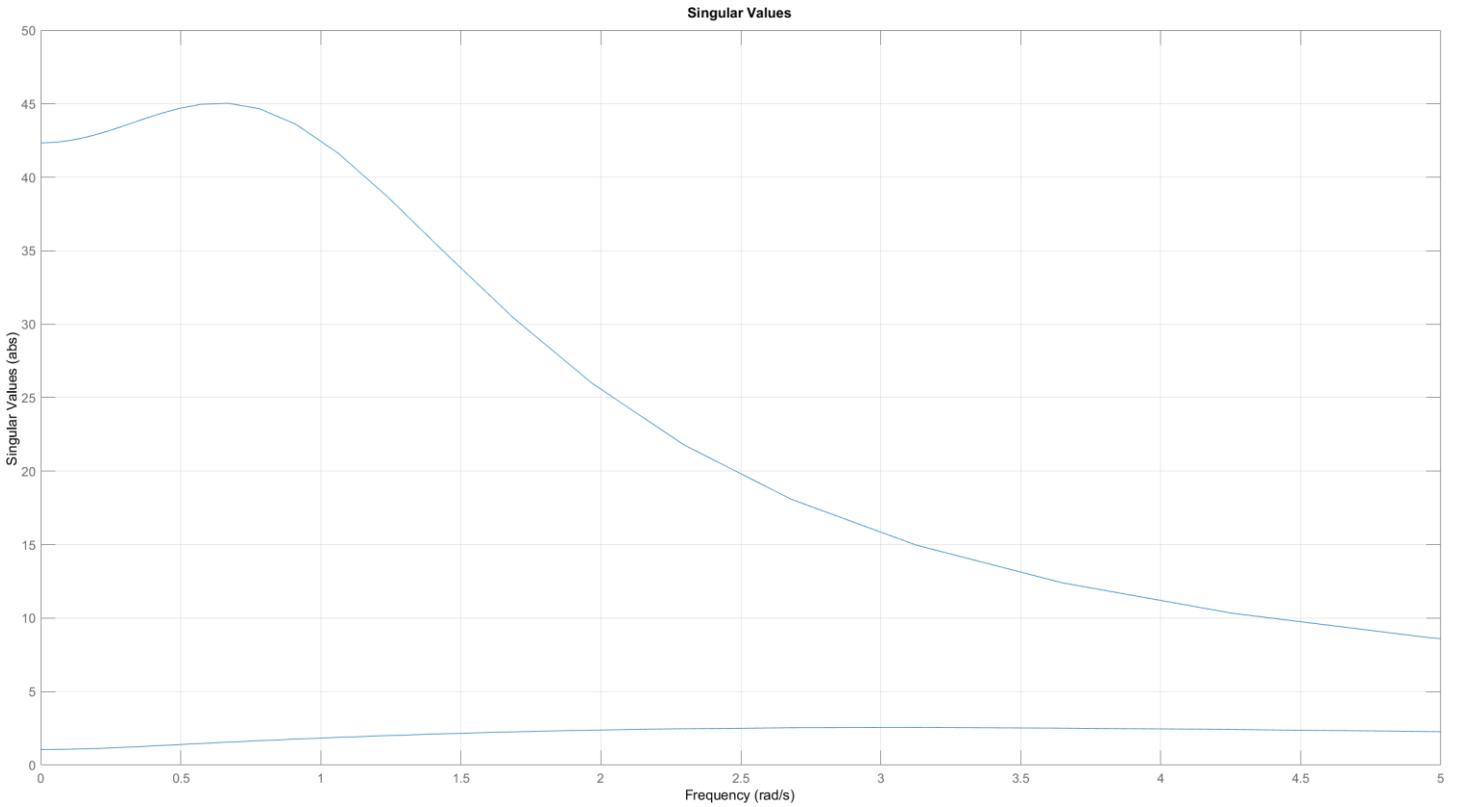


Рисунок 33: зависимость сингулярных чисел от частоты

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 36.5111, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 45.0506$$

Так как мы замкнули систему \mathcal{H}_2 -регулятором по выходу, то полученное значение $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2}$ является минимальным для данной системы (регулятор является оптимальным по данному критерию). В результате регулятор уменьшил «площадь» под графиком сингулярных чисел.

По графикам сингулярных чисел видно, что наибольшее усиление система будет давать при частоте $\approx 0.6 \text{ rad/s}$

Смоделируем данную замкнутую систему при внешних возмущениях и помехах измерения.

Вначале возьмем такие возмущения, при которых система будет давать наибольшее усиление, т. е. с частотой $\approx 0.6 \text{ rad/s}$

$$w_1(t) = \begin{cases} 3\sin\left(0.6t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \cos(0.6t + \pi) - \frac{1}{20} \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 3) \end{cases}$$

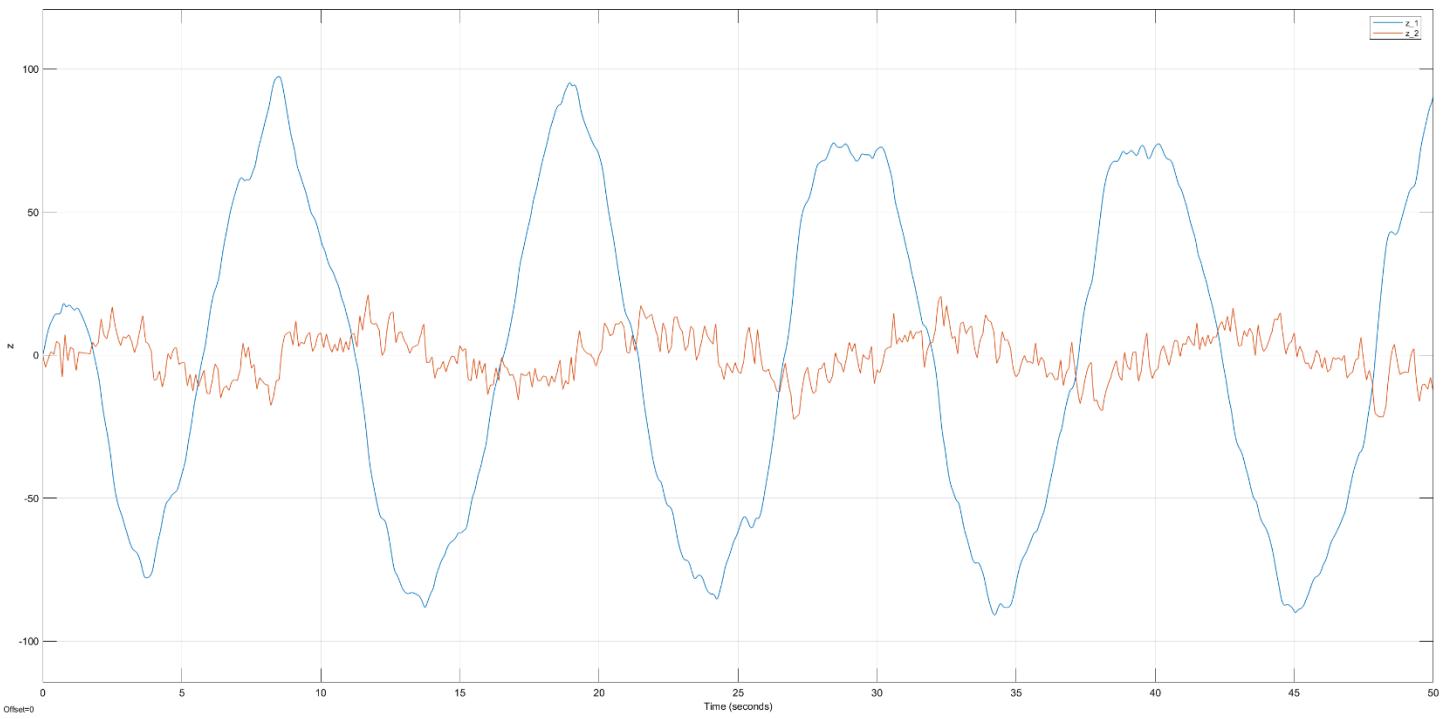


Рисунок 34: наибольшее усиление системы

Теперь возьмем возмущение такой частоты, при которой система даст намного меньшее усиление, например 2 rad/s .

$$w_2(t) = \begin{cases} 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \cos(2t + \pi) - \frac{1}{20} \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 3) \end{cases}$$

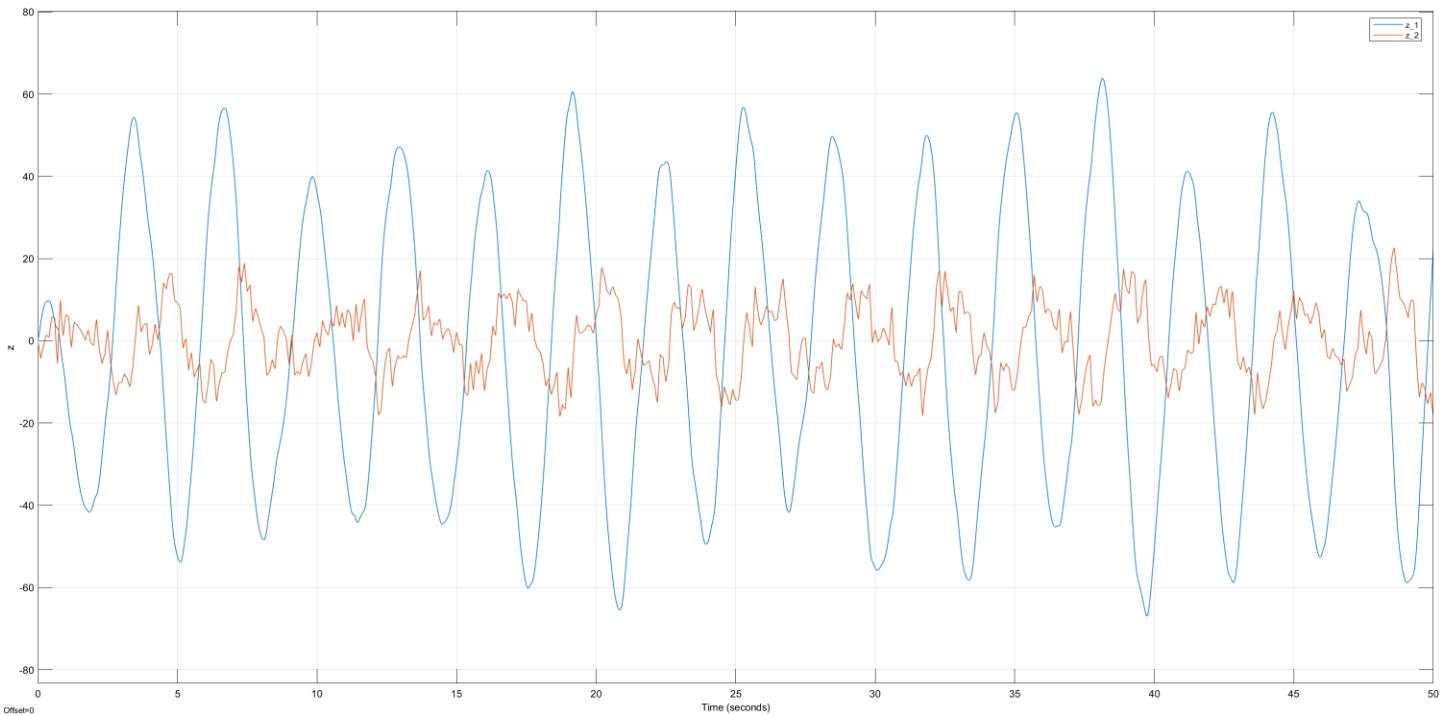


Рисунок 35: выход системы при большей частоте

Как видно, выход системы стал меньше примерно в 2 раза, и это коррелирует с тем, что наибольшее сингулярное число тоже меньше примерно в 2 раза при частоте 2 rad/s, чем при частоте 0.6 rad/s.

4.5. 3-й случай регулируемого выхода

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 2] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \xi \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 7x_1 \\ 3u \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Найдем \mathcal{H}_2 -регулятор по выходу.

Проверим условия:

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$
2. $\det \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 9 \neq 0$, значит $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ – обратима
3. $(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ – стабилизируема, так как матрица управляемости имеет ранг 2
4. $(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$ – обнаруживаема, так как матрица наблюдаемости имеет ранг 2
5. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} \times [0 \ 0 \ 2]^T = 0$
6. $\det([0 \ 0 \ 2] \times [0 \ 0 \ 2]^T) = 4 \neq 0$, значит $[0 \ 0 \ 2] \times [0 \ 0 \ 2]^T$ – обратима
7. $([1 \ 0], \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$ – обнаруживаема, так как матрица наблюдаемости имеет ранг 2
8. $(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix})$ – стабилизируема, так как матрица управляемости имеет ранг 2

Найдем матрицу $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 50.6629 & 21.8403 \\ 21.8403 & 20.0531 \end{bmatrix}$$

Матрица регулятора:

$$K = [-2.4267 \quad -2.2281]$$

Найдем матрицу $P > 0$ из уравнения Риккати:

$$P = \begin{bmatrix} 8.2863 & 6.0828 \\ 6.0828 & 10.6008 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдателя:

$$L = \begin{bmatrix} -2.0716 \\ -1.5207 \end{bmatrix}$$

Передаточная матрица от внешнего возмущения к регулируемому выходу:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & W_{13}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & W_{23}(s) \\ W_{31}(s) & W_{32}(s) & W_{33}(s) \end{bmatrix}$$

$$W_{11}(s) = \frac{-4.5s^3 - 18.3487s^2 - 51.0652s + 1.18257}{s^4 + 4.2997s^3 + 8.56313s^2 + 8.41542s + 3.69028}$$

$$W_{12}(s) = \frac{55.069 + 25.65s + 1.7s^2 - s^3}{3.69 + 8.4s + 8.563s^2 + 4.2997s^3 + s^4}$$

$$W_{13}(s) = \frac{-14.76113 - 26.281s + 16.83s^2}{3.690 + 8.415s + 8.563s^2 + 4.2997s^3 + s^4}$$

$$W_{21}(s) = \frac{29.97 - 104.835s - 56.696s^2 - 14s^3}{3.69 + 8.415s + 8.563s^2 + 4.2997s^3 + s^4}$$

$$W_{22}(s) = \frac{179.8258 + 150.2356s + 51.0979s^2 + 7s^3}{3.69 + 8.415s + 8.563s^2 + 4.2997s^3 + s^4}$$

$$W_{23}(s) = \frac{-51.663958 - 117.8159s}{3.690 + 8.415s + 8.563s^2 + 4.2997s^3 + s^4}$$

$$W_{31}(s) = \frac{-47.4 + 57.708s + 467.76582s^2 + 226.62133675489795s^3 + 50.49s^4}{31.60 + 87.9295s + 113.20s^2 + 82.05s^3 + 35.61s^4 + 8.59s^5 + s^6}$$

$$W_{32}(s) = \frac{-284.40 - 886.166s - 622.65s^2 - 195.36s^3 - 25.240s^4}{31.600 + 87.92s + 113.20s^2 + 82.05s^3 + 35.61s^4 + 8.59s^5 + s^6}$$

$$W_{33}(s) = -\frac{50.49s^2(3.75 + 10.44s + 4.73s^2 + s^3)}{31.60 + 87.92s + 113.20s^2 + 82s^3 + 35.613s^4 + 8.59s^5 + s^6}$$

Графики АЧХ компонентов передаточной матрицы:

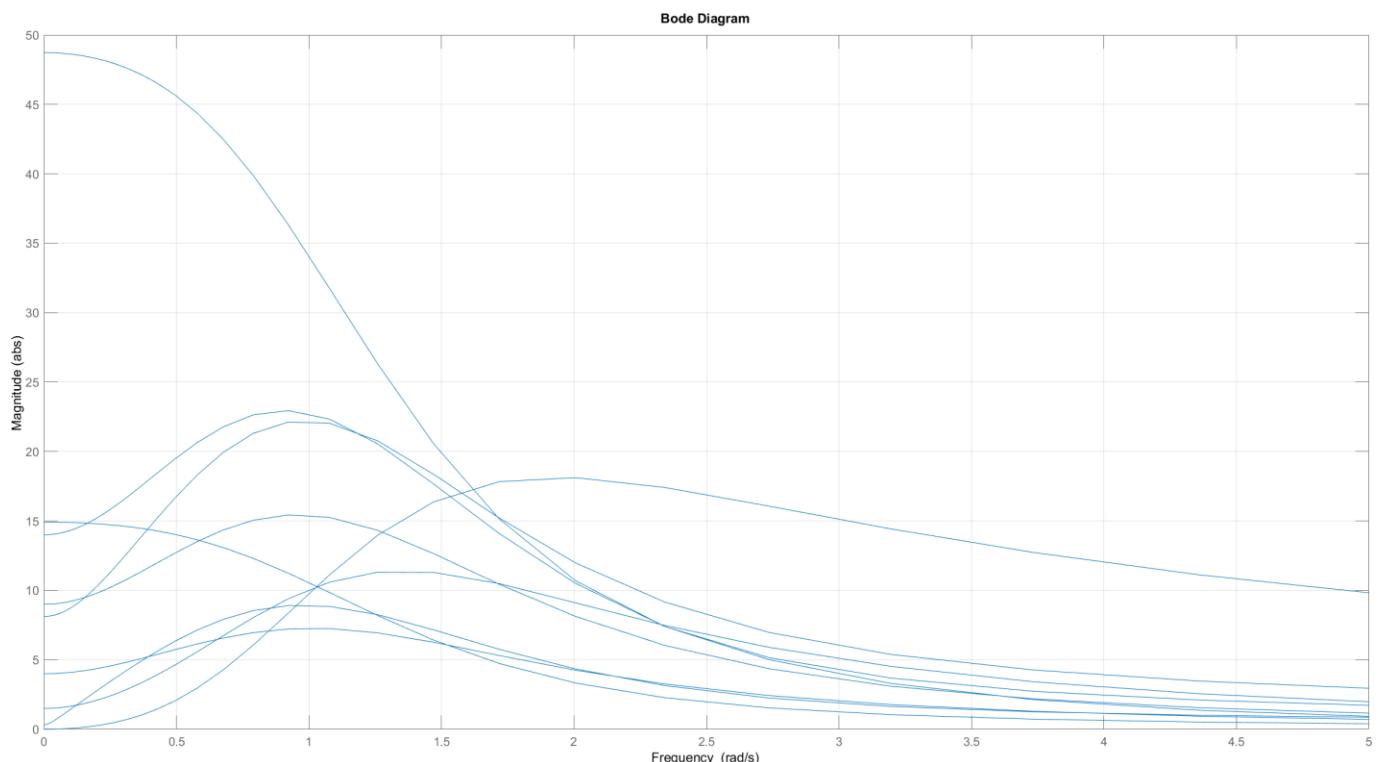


Рисунок 36: графики АЧХ

Графики сингулярных чисел передаточной матрицы:

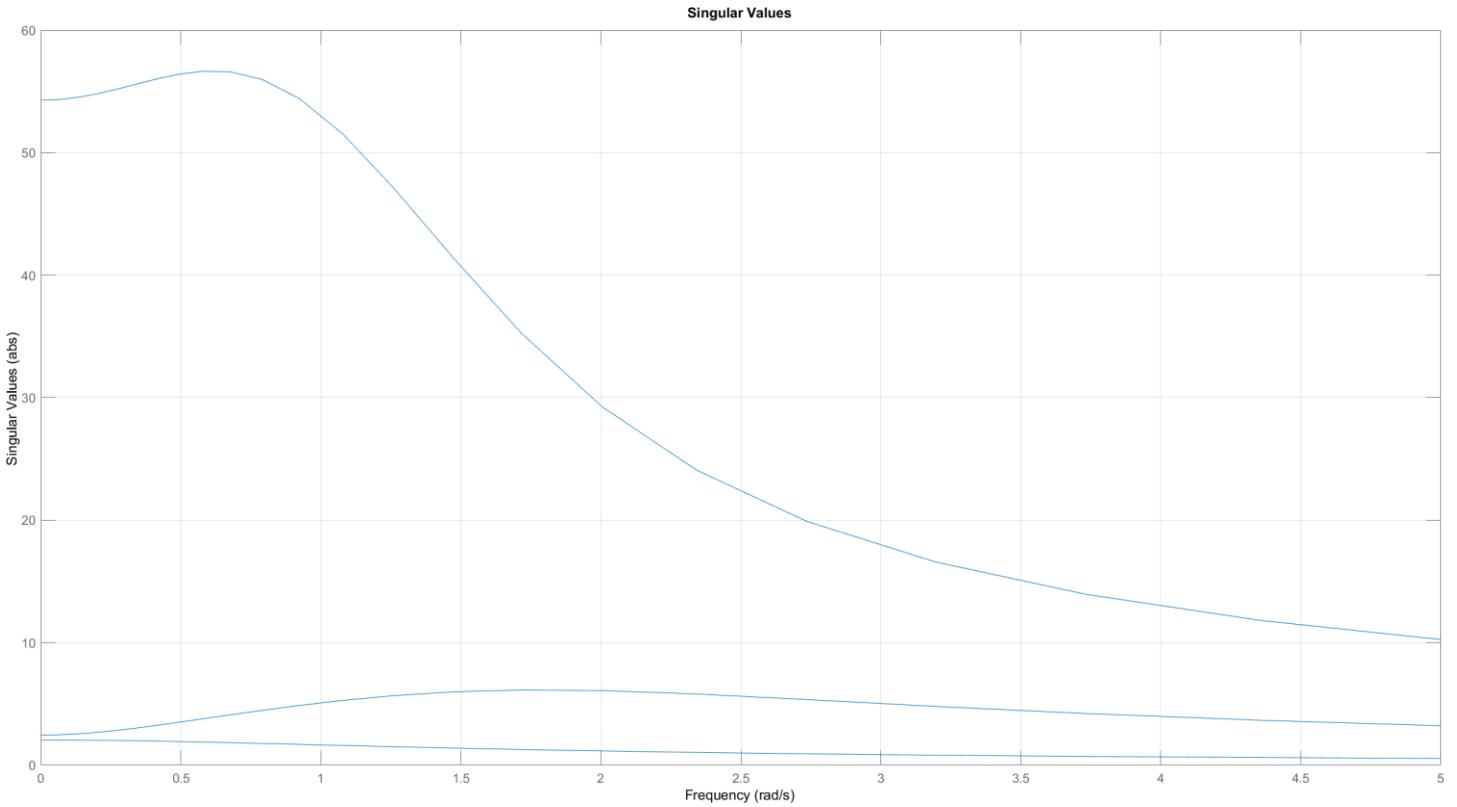


Рисунок 37: зависимость сингулярных чисел от частоты

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 45.0667, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 56.6836$$

Так как мы замкнули систему \mathcal{H}_2 -регулятором по выходу, то полученное значение $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2}$ является минимальным для данной системы (регулятор является оптимальным по данному критерию). В результате регулятор уменьшил «площадь» под графиком сингулярных чисел.

По графикам сингулярных чисел видно, что наибольшее усиление система будет давать при частоте $\approx 0.6 \text{ rad/s}$

Смоделируем данную замкнутую систему при внешних возмущениях и помехах измерения.

Вначале возьмем такие возмущения, при которых система будет давать наибольшее усиление, т. е. с частотой $\approx 0.6 \text{ rad/s}$

$$w_1(t) = \begin{bmatrix} 3\sin\left(0.6t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \cos(0.6t + \pi) - \frac{1}{20} \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 3) \end{bmatrix}$$

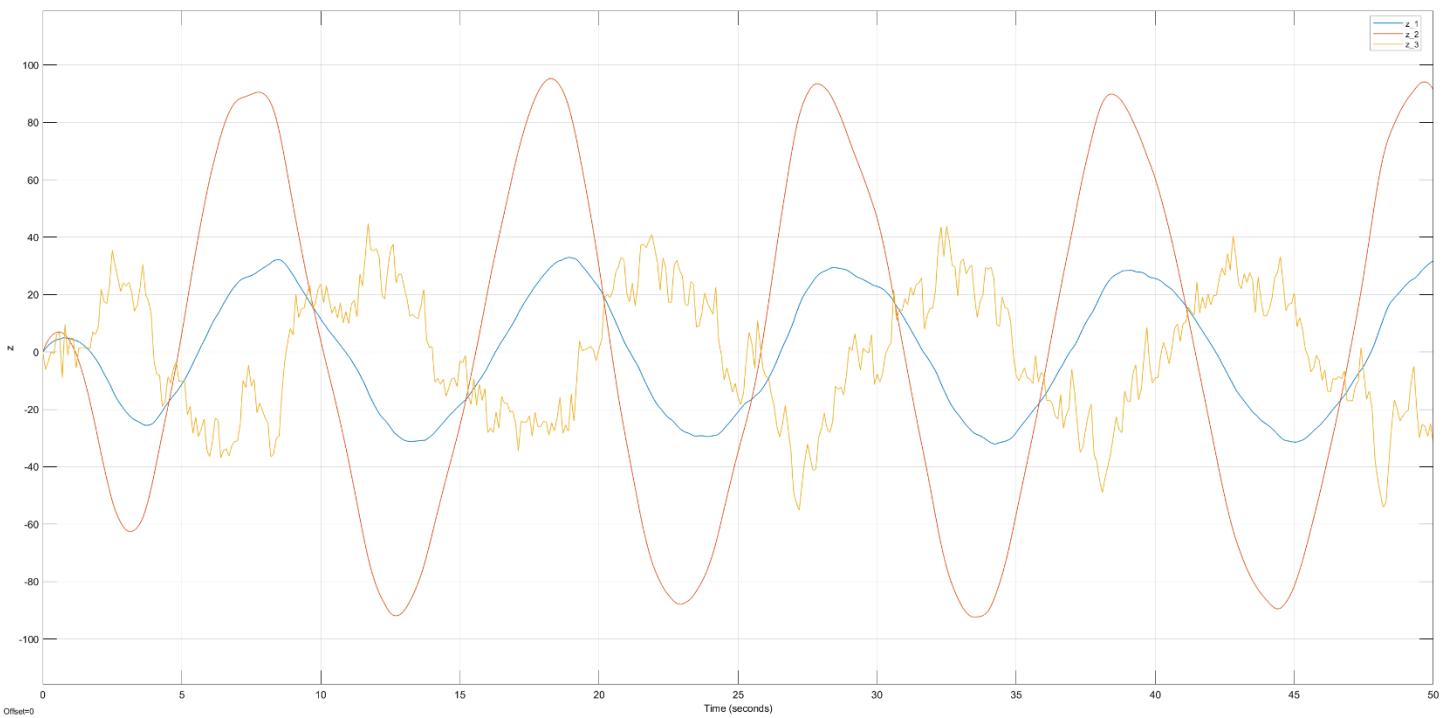


Рисунок 38: наибольшее усиление системы

Теперь возьмем возмущение такой частоты, при которой система даст намного меньшее усиление, например 2 rad/s .

$$w_2(t) = \begin{cases} 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \cos(2t + \pi) - \frac{1}{20} \\ N(\mu = 0, \sigma^2 = 3) \end{cases}$$

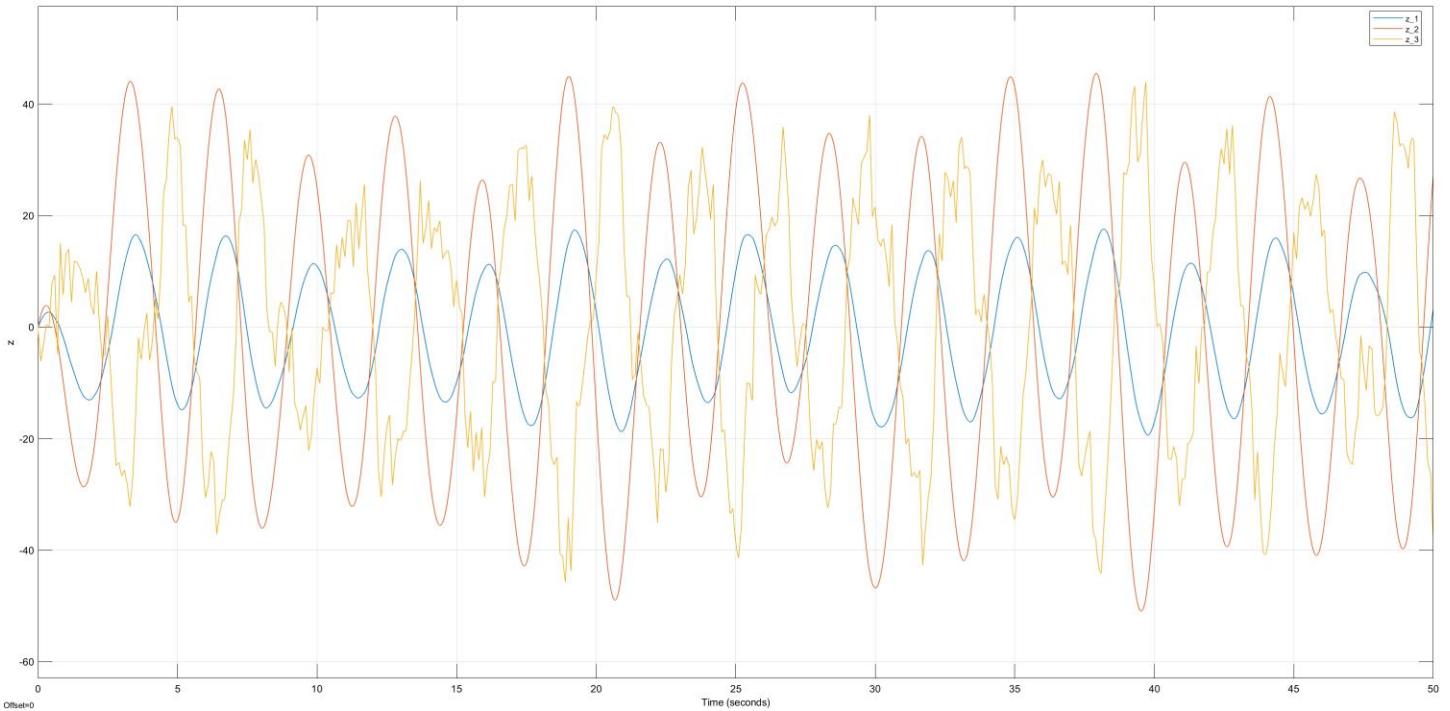


Рисунок 39: выход системы при большей частоте

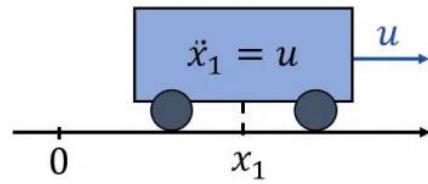
Как видно, выход системы стал меньше примерно в 2 раза, и это коррелирует с тем, что наибольшее сингулярное число тоже меньше примерно в 2 раза при частоте 2 rad/s, чем при частоте 0.6 rad/s.

Итого, \mathcal{H}_2 -регулятор по выходу представляет собой оптимальную связь между \mathcal{H}_2 -регулятором по состоянию и \mathcal{H}_2 -наблюдателем. Он позволяет нам минимизировать среднечастотное усиление системы, однако на определенных (резонансных) частотах система всё равно будет сильно усиливать входное воздействие.

Задание 5. Синтез \mathcal{H}_∞ -регулятора по состоянию

5.1. Математическая модель системы

Рассмотрим тележку:



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$w(t)$ – внешние возмущения

$u(t)$ – управляющее воздействие

Зададим регулируемый выход $z = C_2 x + D_2 u$, где $(C_2^T D_2 = 0)$:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 7x_1 \\ 3u \end{bmatrix}$$

Выберем 4 значения ограничивающего значения:

$$\gamma_1 = 100, \quad \gamma_2 = 20, \quad \gamma_3 = 15, \quad \gamma_4 = 14.49$$

5.2. Алгоритм синтеза \mathcal{H}_∞ -регулятора по состоянию

Суть \mathcal{H}_∞ -управления в минимизации $\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty}$.

Алгоритм синтеза в общем виде.

Пусть есть система:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases}, \quad u = Kx$$

Если выполнены следующие условия:

1. $C_2^T D_2 = 0$
2. $D_2^T D_2$ – обратима
3. (A, B_2) – стабилизуемо
4. (C_2, A) – обнаруживаемо

И если при $\gamma > 0$ существует решение $Q > 0$ уравнения Риккати

$$A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2(D_2^T D_2)^{-1}B_2^T Q + \gamma^{-2}QB_1B_1^T Q = 0$$

, то регулятор $K = -(D_2^T D_2)^{-1}B_2^T Q$ делает замкнутую систему устойчивой и ограничивает сверху

$$\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \gamma.$$

Найдем общий вид передаточной функции $W_{w \rightarrow z}(s)$ системы:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, & u &= Kx \\ (sI - A - B_2 K)x &= B_1 w \\ x &= (sI - A - B_2 K)^{-1}B_1 w, & z &= C_2 x + D_2 u, & u &= Kx \\ z &= C_2(sI - A - B_2 K)^{-1}B_1 w + D_2 K(sI - A - B_2 K)^{-1}B_1 w \\ z &= (C_2 + D_2 K)(sI - A - B_2 K)^{-1}B_1 w \\ W_{w \rightarrow z}(s) &= (C_2 + D_2 K)(sI - A - B_2 K)^{-1}B_1\end{aligned}$$

5.3. 1-е значение γ

Пусть ограничивающее значение $\gamma = 100$

Необходимые условия для синтеза регулятора уже были проверены выше.

Найдем матрицу $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 51.3272 & 22.2960 \\ 22.2960 & 20.4373 \end{bmatrix}$$

Тогда матрица регулятора:

$$K = [-2.4773 \quad -2.2708]$$

Передаточная матрица:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} -13.0378 - 4.5s & 13.0189 - 1.s \\ \frac{2.4773 + 2.2708s + s^2}{-28.2912 - 14.s} & \frac{2.4773 + 2.2708s + s^2}{36.8956 + 7.s} \\ \frac{2.4773 + 2.2708s + s^2}{-3.71 + 11.4s} & \frac{2.4773 + 2.2708s + s^2}{-22.29 - 27.86s} \\ \frac{2.4773 + 2.2708s + s^2}{2.4773 + 2.2708s + s^2} & \frac{2.4773 + 2.2708s + s^2}{2.4773 + 2.2708s + s^2} \end{bmatrix}$$

Графики АЧХ:

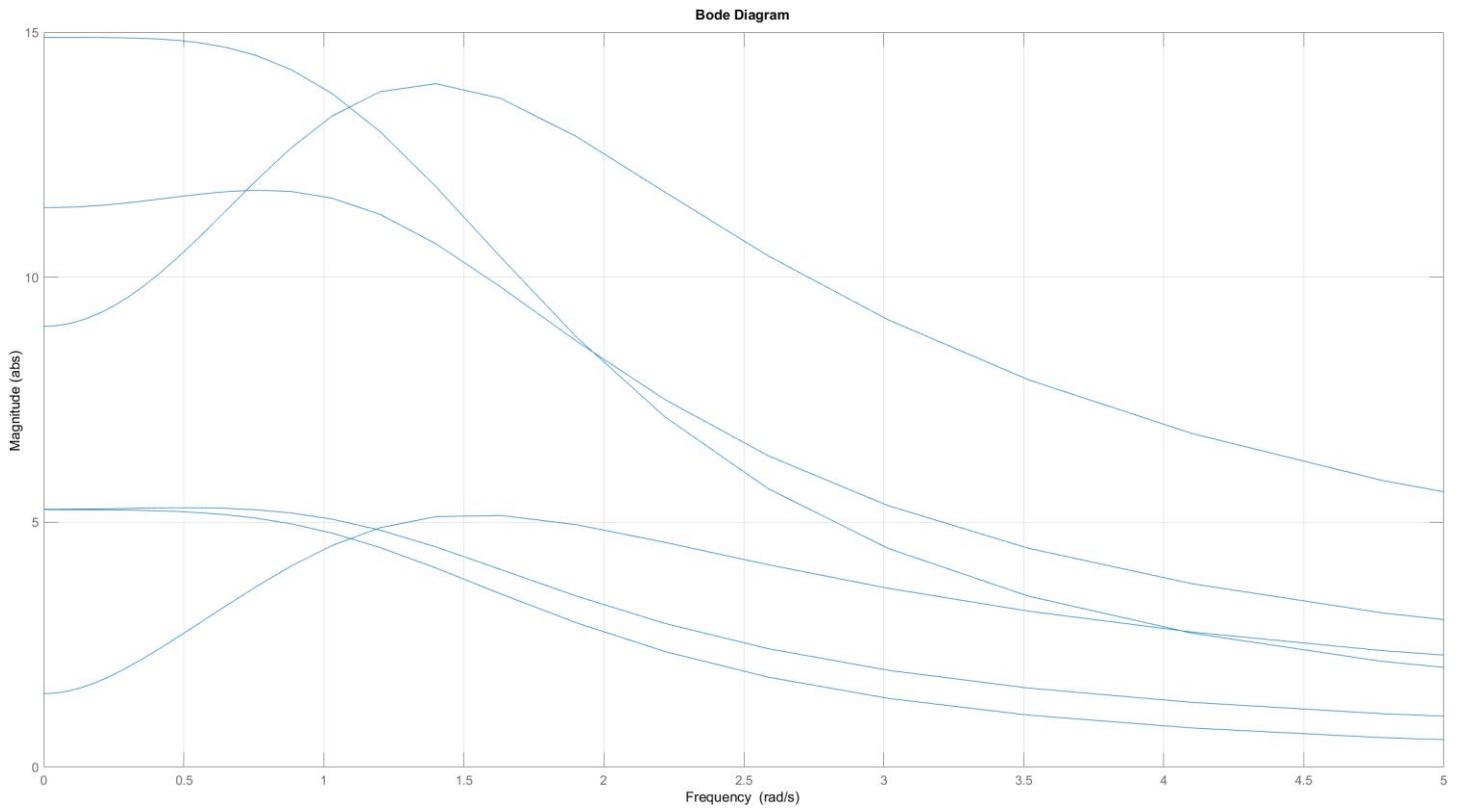


Рисунок 40: графики АЧХ компонентов передаточной матрицы

График сингулярных чисел:

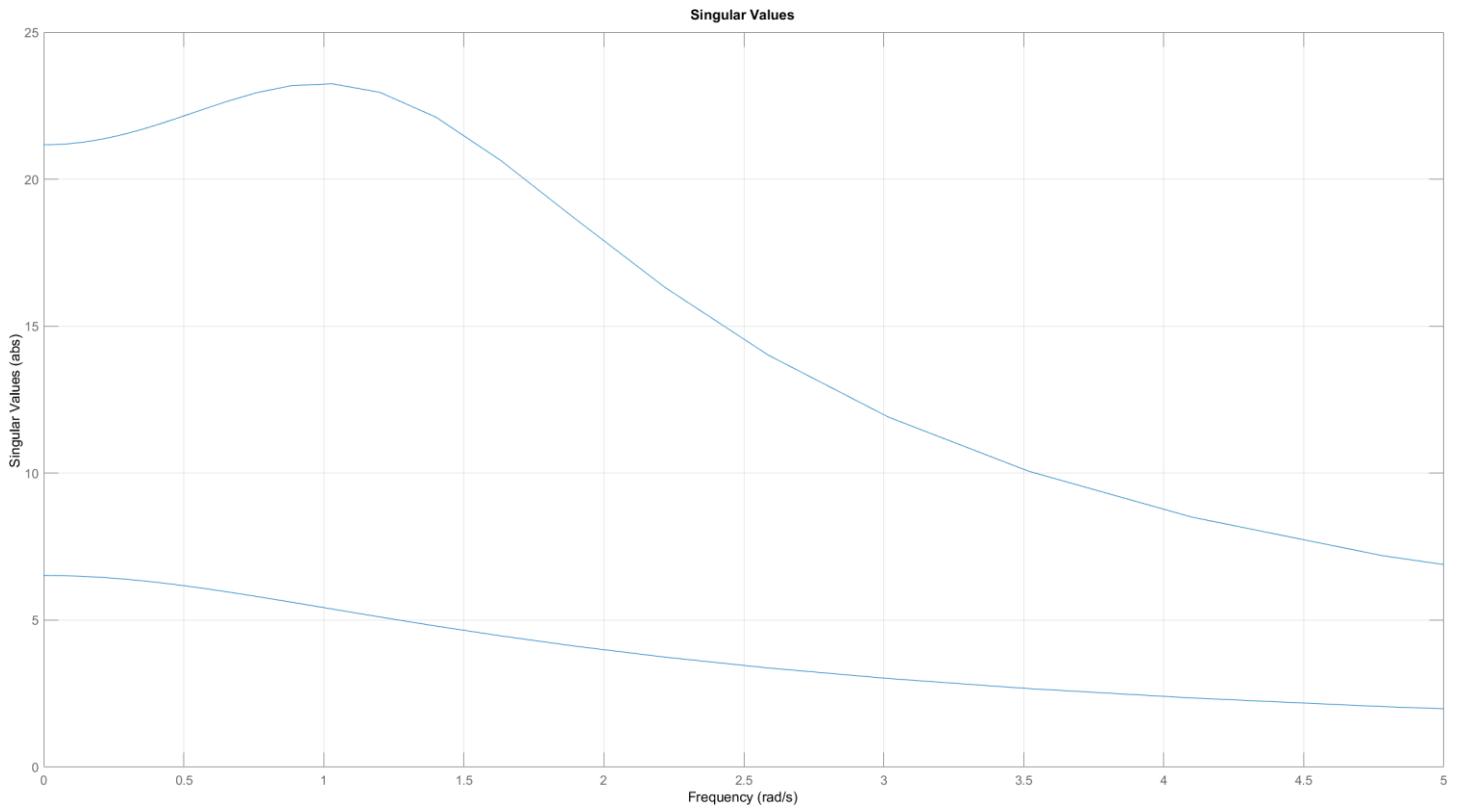


Рисунок 41: сингулярные числа системы

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 22.9404, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 23.2592$$

Введенное нами ограничение на $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} \leq 100$ выполняется. Данный регулятор уменьшил пиковое значение усиления системы.

Если сравнивать с \mathcal{H}_2 -регулятором аналогичной системы, то там значения были равны $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 22.9392$, $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 23.4858$. Разница невелика, так как введенное ограничение слишком большое.

5.4. 2-е значение γ

Пусть ограничивающее значение $\gamma = 20$

Необходимые условия для синтеза регулятора уже были проверены выше.

Найдем матрицу $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 81.6553 & 44.2780 \\ 44.2780 & 38.6092 \end{bmatrix}$$

Тогда матрица регулятора:

$$K = [-4.9198 \quad -4.2899]$$

Передаточная матрица:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} -25.999 - 4.5s & 19.4996 - 1.s \\ \frac{4.9198 + 4.2899s + s^2}{-56.5586 - 14.s} & \frac{4.9198 + 4.2899s + s^2}{51.0293 + 7.s} \\ \frac{4.9198 + 4.2899s + s^2}{-7.379 + 23.08395s} & \frac{4.9198 + 4.2899s + s^2}{-44.2782 - 53.3685s} \\ \frac{4.9198 + 4.2899s + s^2}{4.9198 + 4.2899s + s^2} & \frac{4.9198 + 4.2899s + s^2}{4.9198 + 4.2899s + s^2} \end{bmatrix}$$

Графики АЧХ:

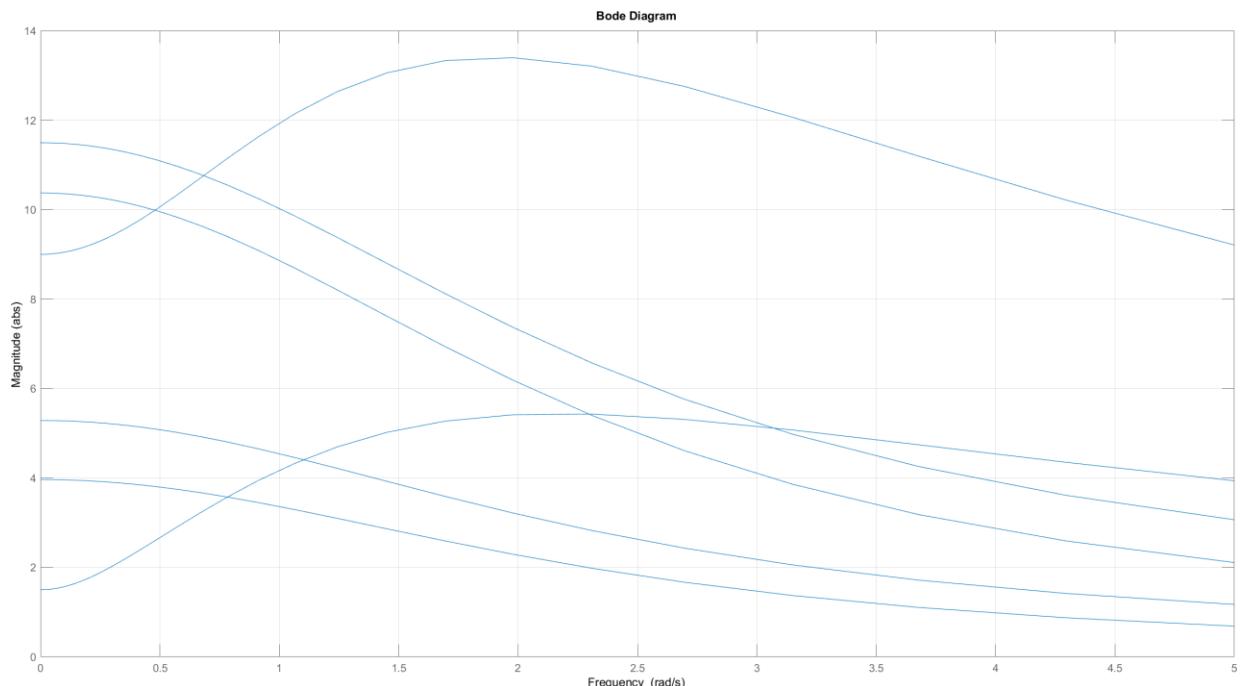


Рисунок 42: графики АЧХ компонентов передаточной матрицы

График сингулярных чисел:

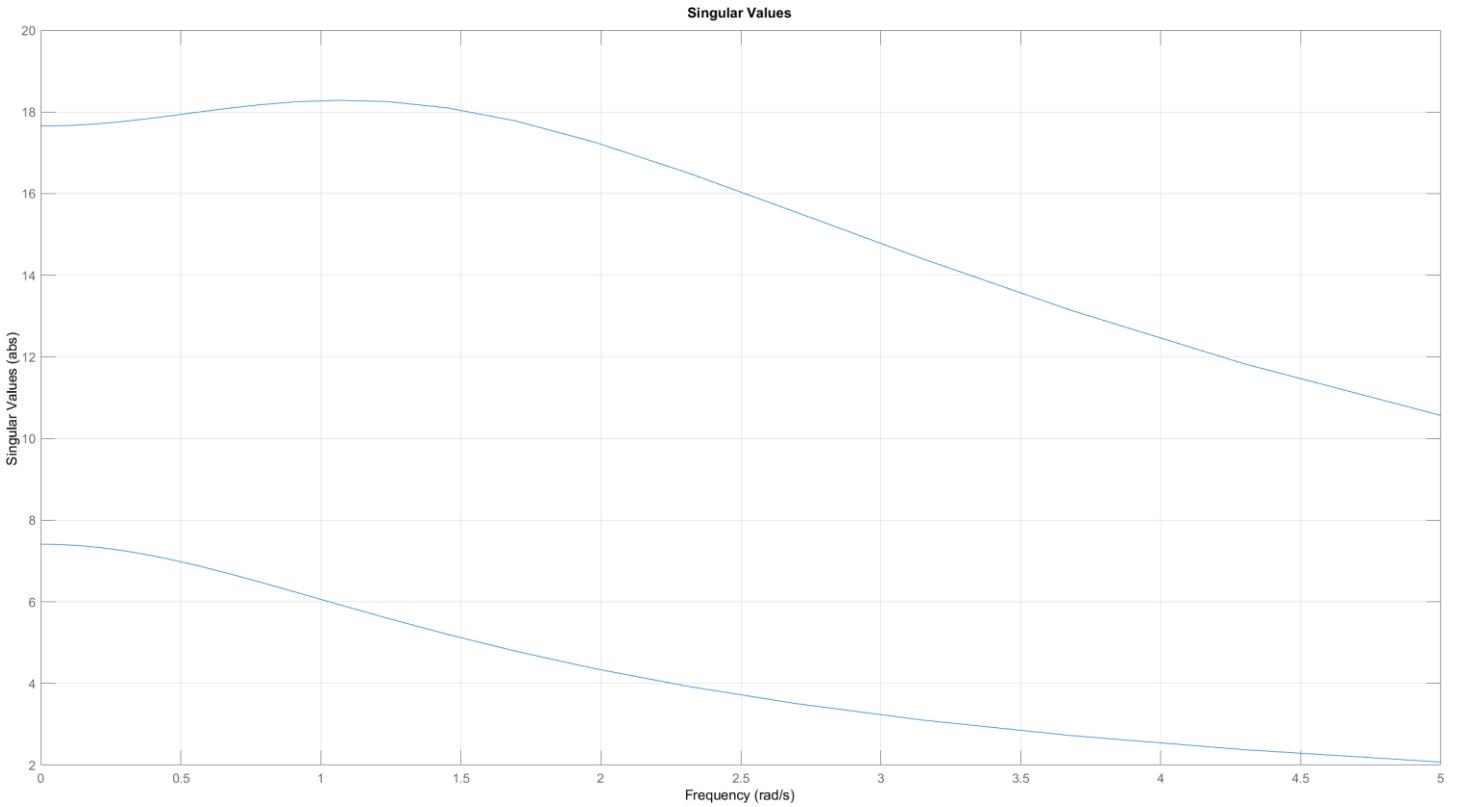


Рисунок 43: сингулярные числа системы

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 25.2059, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 18.2869$$

Введенное нами ограничение на $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} \leq 20$ выполняется. Данный регулятор уменьшил пиковое значение усиления системы, но при этом увеличилось среднечастотное усиление.

Если сравнивать с \mathcal{H}_2 -регулятором аналогичной системы, то там значения были равны $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 22.9392$, $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 23.4858$. Тут уже более отчетливо видна разница в работе регуляторов.

5.5. 3-е значение γ

Пусть ограничивающее значение $\gamma = 15$

Необходимые условия для синтеза регулятора уже были проверены выше.

Найдем матрицу $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 283.1751 & 201.8102 \\ 201.8102 & 164.7897 \end{bmatrix}$$

Тогда матрица регулятора:

$$K = [-22.4234 \quad -18.3100]$$

Передаточная матрица:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-117.0868 - 4.5s}{22.4234 + 18.31s + s^2} & \frac{65.0434 - s}{22.4234 + 18.31s + s^2} \\ \frac{-252.84 - 14s}{22.4234 + 18.31s + s^2} & \frac{149.17 + 7s}{22.4234 + 18.31s + s^2} \\ \frac{-33.6351 + 107.0754s}{22.4234 + 18.31s + s^2} & \frac{-201.81 - 232.06s}{22.4234 + 18.31s + s^2} \end{bmatrix}$$

Графики АЧХ:

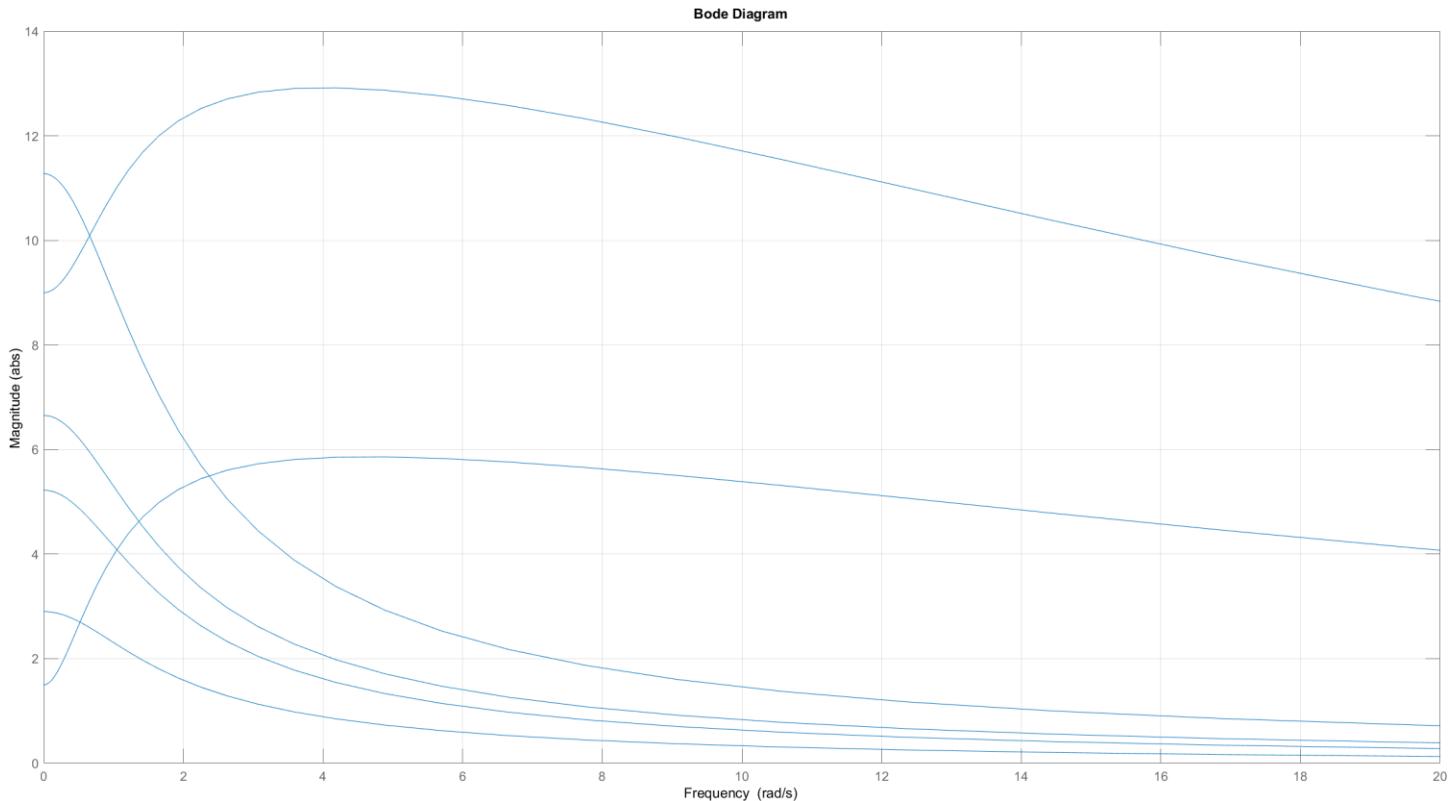


Рисунок 44: графики АЧХ компонентов передаточной матрицы

График сингулярных чисел:

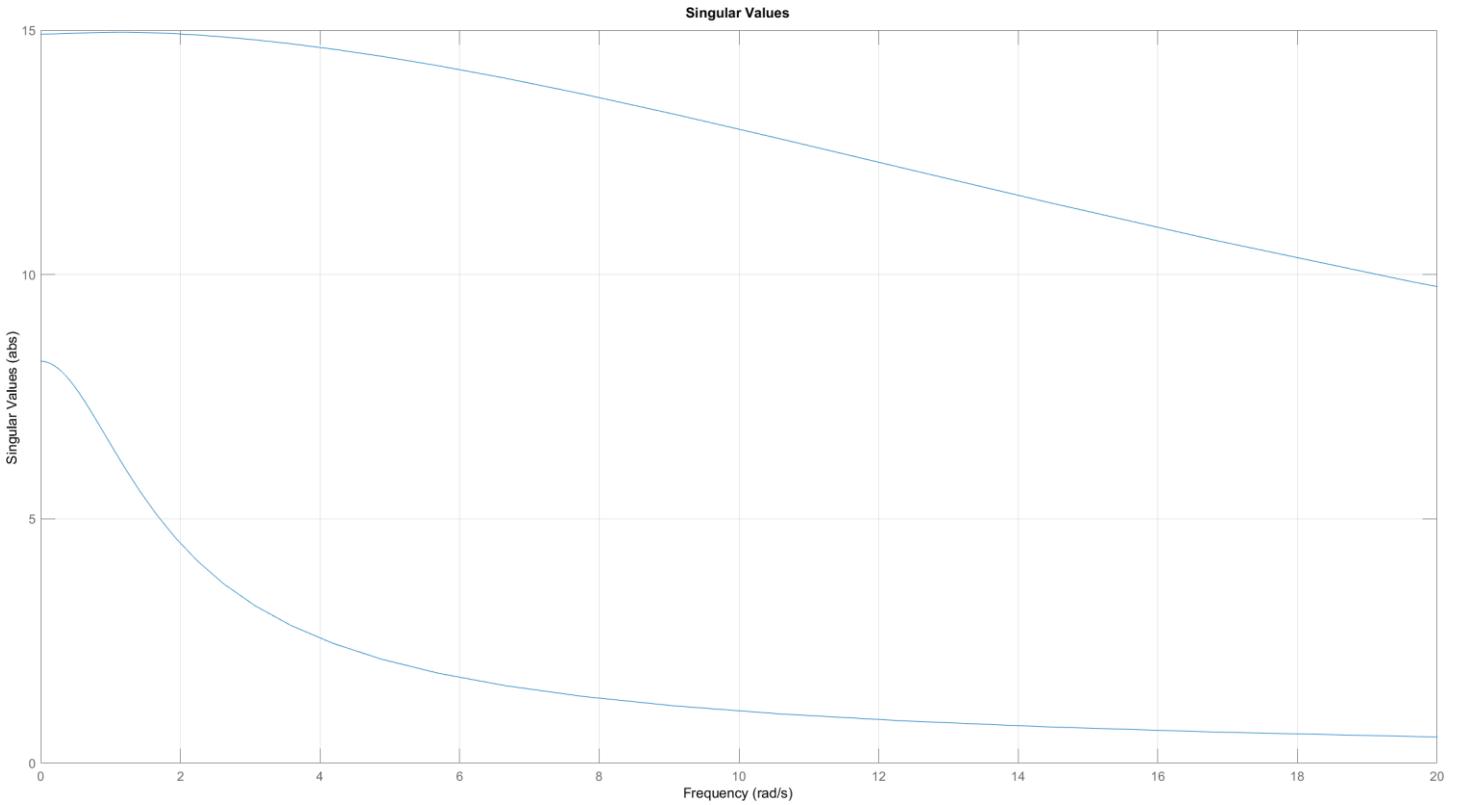


Рисунок 45: сингулярные числа системы

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 44.3699, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 14.9582$$

Введенное нами ограничение на $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} \leq 15$ выполняется. Данный регулятор уменьшил пиковое значение усиления системы, но при этом увеличилось среднечастотное усиление.

Если сравнивать с \mathcal{H}_2 -регулятором аналогичной системы, то там значения были равны $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 22.9392$, $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 23.4858$. Тут уже более отчетливо видна разница в работе регуляторов.

5.6. 4-е значение γ

Пусть ограничивающее значение $\gamma = 14.49$

Необходимые условия для синтеза регулятора уже были проверены выше.

Найдем матрицу $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 621.2751 & 469.9079 \\ 469.9079 & 378.0516 \end{bmatrix}$$

Тогда матрица регулятора:

$$K = [-52.2120 \quad -42.0057]$$

Передаточная матрица:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} -271.4468 - 4.5s & 142.2234 - 1.s \\ \hline 52.212 + 42.0057s + s^2 & 52.212 + 42.0057s + s^2 \\ -584.5798 - 14.s & 315.0399 + 7.s \\ \hline 52.212 + 42.0057s + s^2 & 52.212 + 42.0057s + s^2 \\ -78.318 + 250.2634s & -469.9 - 534.6873s \\ \hline 52.212 + 42.0057s + s^2 & 52.212 + 42.0057s + s^2 \end{bmatrix}$$

Графики АЧХ:

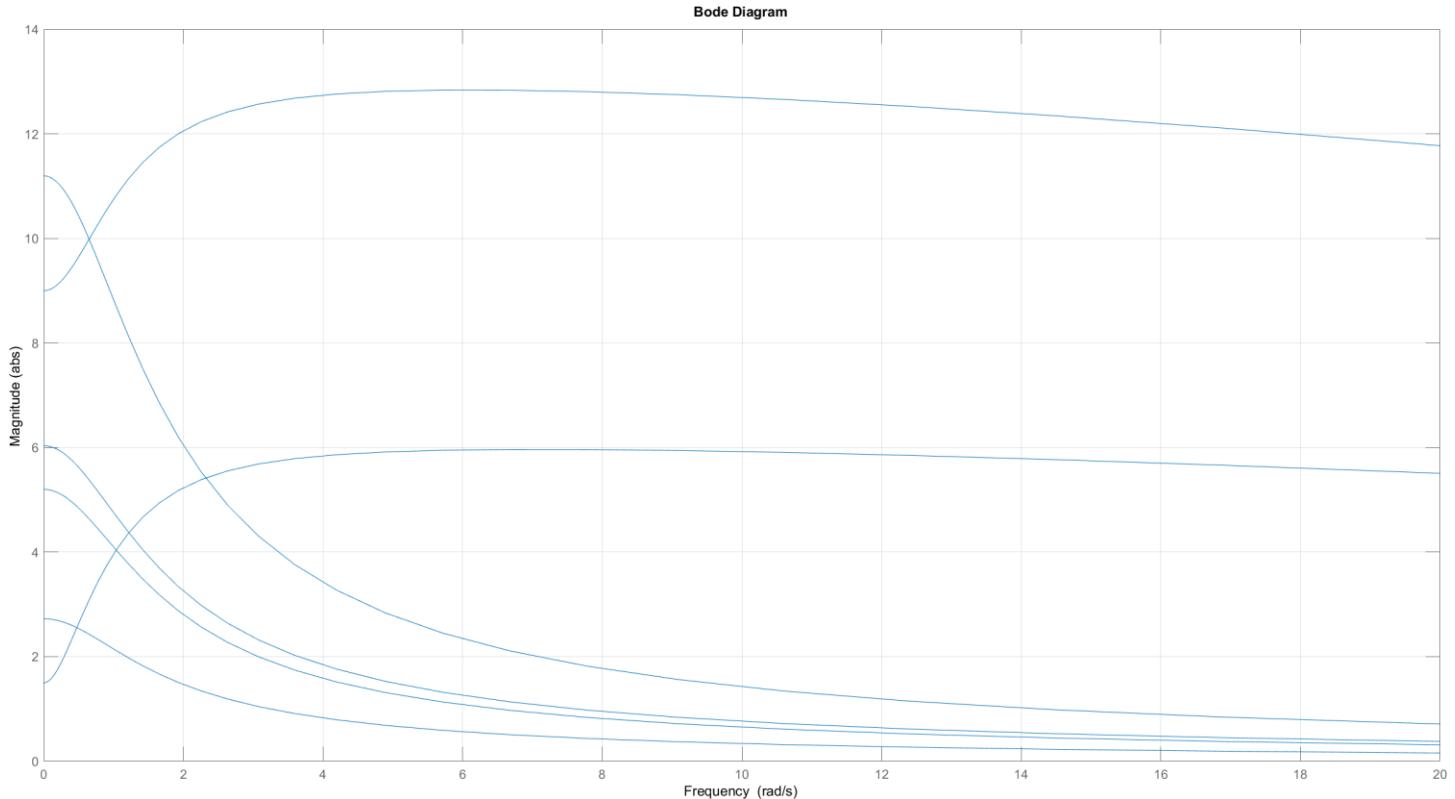


Рисунок 46: графики АЧХ компонентов передаточной матрицы

График сингулярных чисел:

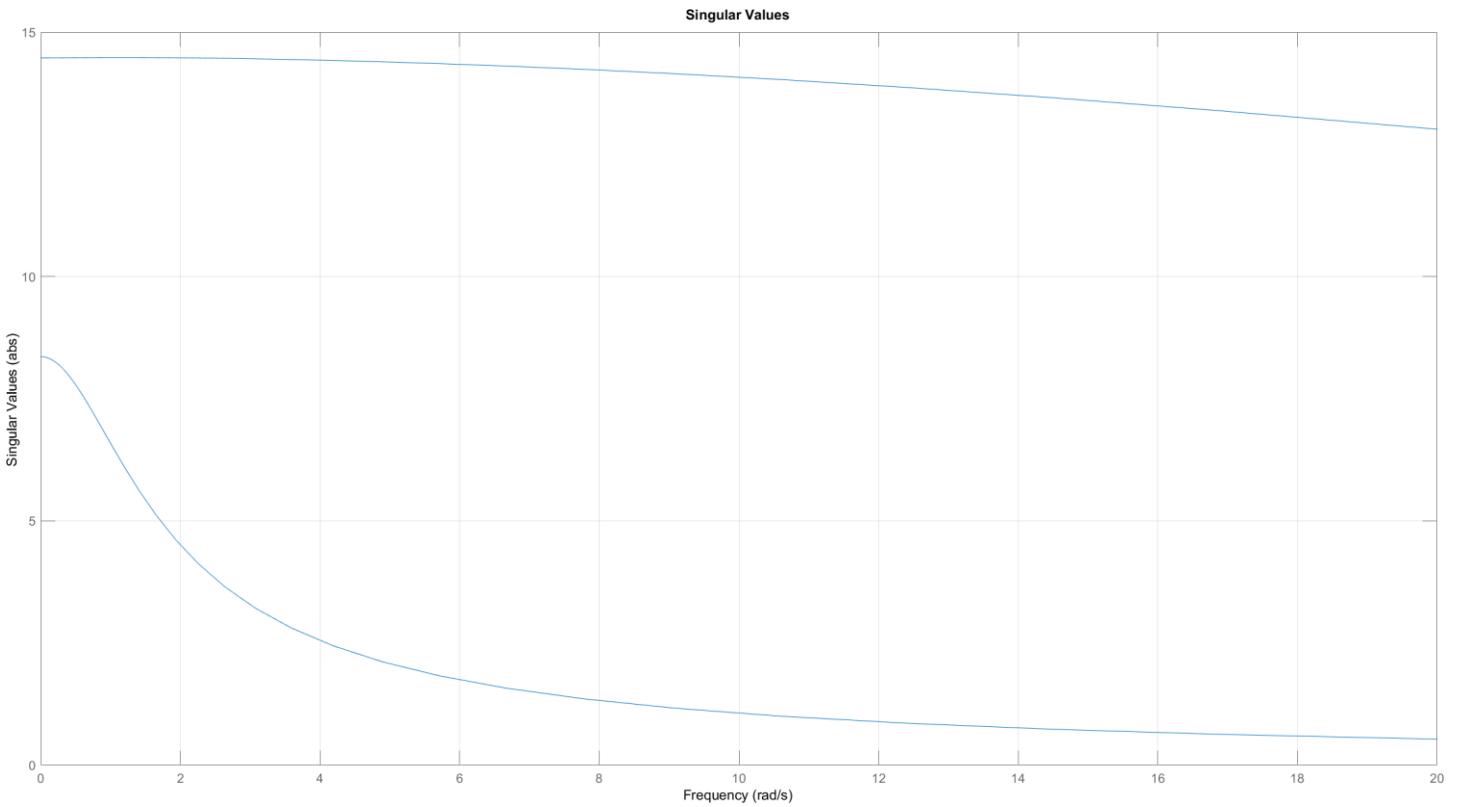


Рисунок 47: сингулярные числа системы

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 65.7674, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 14.4832$$

Введенное нами ограничение на $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} \leq 14.49$ выполняется.

Минимальное значение $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}}$ находится около 14.49 – это наименьшее значение, при котором решением уравнения Риккати является положительно определенная матрица.

Сравнивая с \mathcal{H}_2 -регулятором аналогичной системы, значения норм которого были равны $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 22.9392$, $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 23.4858$. Наглядно видна суть регулятора \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_{∞} . Первый борется против среднестатистического возмущения (уменьшает «площадь» под графиком сингулярных чисел), а второй борется против самого большого возмущения (сглаживает все «пики» графика сингулярных чисел).

5.7. Моделирование системы с $\gamma = 14.49$

Проведем моделирование данной системы при синусоидальных воздействиях различной частоты.

Как видно по графику сингулярных чисел усиление системы с при частотах от 0 до 20 rad/s очень медленно, но постепенно уменьшается.

Рассмотрим систему при возмущениях с частотами 1 rad/s и 10 rad/s.

Первый случай – частота 1 rad/s :

$$w_1(t) = \begin{bmatrix} 3\sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \sin(t + \pi) - \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

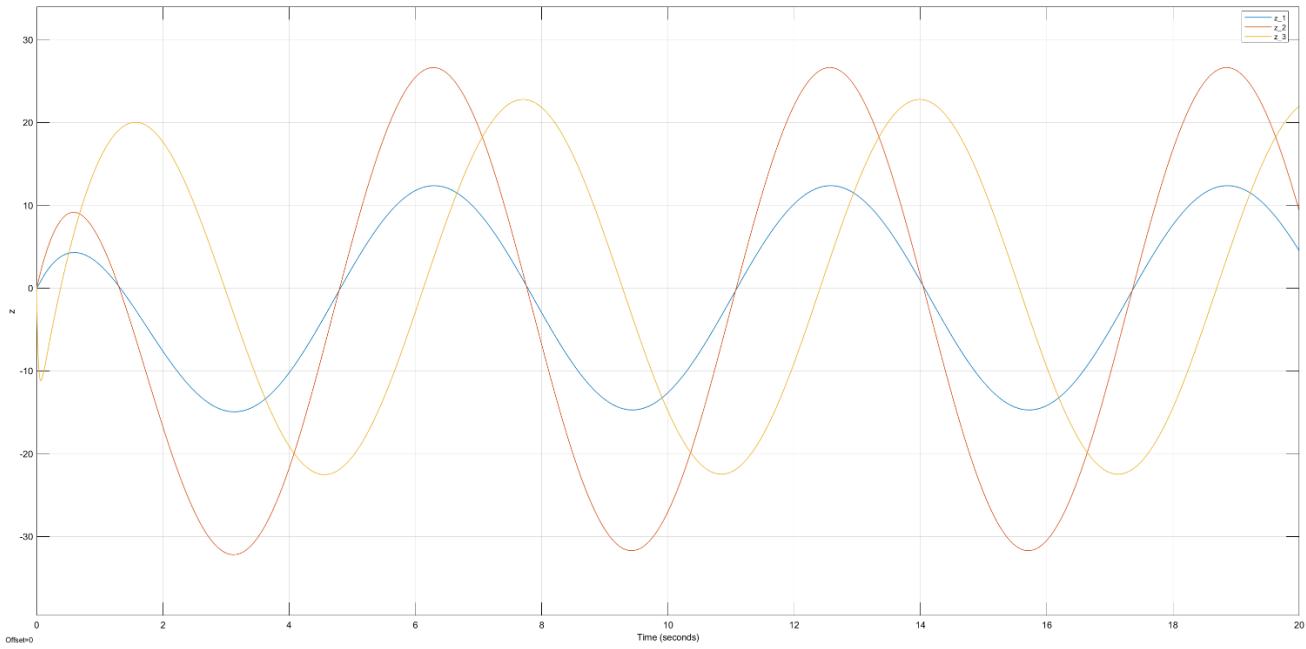


Рисунок 48: наибольшее усиление системы

Теперь рассмотрим второй случай: 10 rad/s .

$$w_2(t) = \begin{bmatrix} 3\sin\left(10t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \\ \sin(10t + \pi) - \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

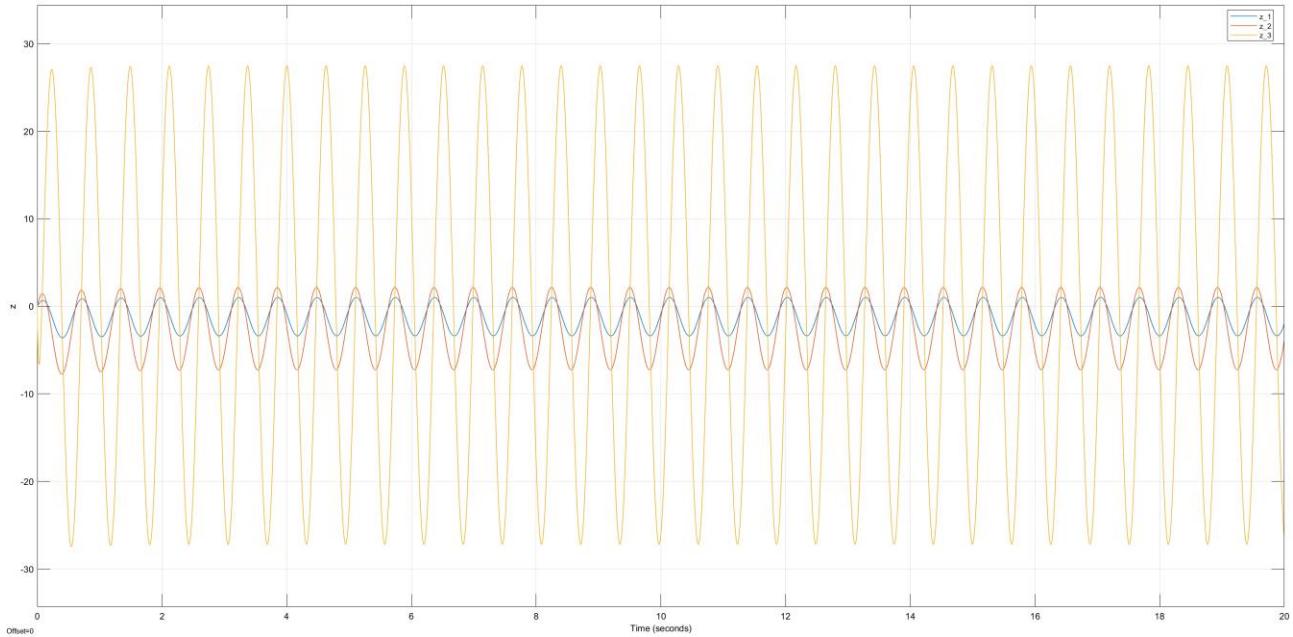


Рисунок 49: выход системы при большей частоте

Как видно, каждая компонента выхода системы стала меньше в различных пропорциях при большей частоте, что и ожидалось.

В итоге использование \mathcal{H}_∞ -регулятора оправдано в том случае, если мы хотим, чтобы наша система не реагировала сильным усилением на определенных частотах. За счет увеличения среднестатистического возмущения, усиление системы на различные резонансы будет значительно меньше. Однако найти такой регулятор, который может точно минимизировать значение $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_\infty}$ сложно, но возможно итерационно, ограничивая сверху эту норму достичь (или не достичь) желаемого результата.

Задание 6. Синтез \mathcal{H}_∞ -регулятора по выходу

6.1. Математическая модель системы

Рассмотрим модель с тележкой из 4 задания:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 2] w \\ z = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 7x_1 \\ 3u \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} f_1 - \text{внешние возмущения} \\ f_2 - \text{внешние возмущения} \\ \xi - \text{помехи измерений} \end{bmatrix}, \quad \text{причем } \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} \times [0 \ 0 \ 2]^T = 0$$

$u(t)$ – управляющее воздействие

6.2. Алгоритм синтеза \mathcal{H}_∞ -регулятора по выходу

Суть \mathcal{H}_∞ -управления в минимизации $\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty}$.

Алгоритм синтеза в общем виде.

Пусть есть система:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1 \hat{w} + B_2 u + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} + D_1 \hat{w} \\ \hat{w} = \gamma^{-2} B_1^T Q \hat{x} \end{cases}, \quad u = K\hat{x}$$

Наблюдатель исходит в своей оценке из наихудшего возможного возмущения $w_{worst} = \gamma^{-2} B_1^T Q x$.

При такой постановке задачи *Separation Principle* не выполняется, а значит получить минимизировать $\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty}$ не получится, однако действует Условие согласованности ($\lambda_{max}(PQ) \leq \gamma^2$) и из него следует, то что возможно ограничить сверху $\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \gamma$.

Будем исследовать систему с различными ограничениями:

$$\gamma_1 = 50, \quad \gamma_2 = 40, \quad \gamma_3 = 35, \quad \gamma_4 = 33.7$$

Итак, синтез \mathcal{H}_∞ -регулятора по выходу возможен, если выполнены следующие условия:

1. $C_2^T D_2 = 0$
2. $D_2^T D_2$ – обратима
3. (A, B_2) – стабилизируема
4. (C_2, A) – обнаруживаема
5. $B_1 D_1^T = 0$
6. $D_1 D_1^T$ – обратима
7. (C_1, A) – обнаруживаема
8. (A, B_1) – стабилизируема
9. Для $\gamma > 0$ существует решение $P > 0$ уравнения Риккати:

$$AP + PA^T + B_1 B_1^T - PC_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P + \gamma^{-2} P C_2^T C_2 P = 0$$

10. Для $\gamma > 0$ существует решение $Q > 0$ уравнения Риккати:

$$A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} QB_1 B_1^T Q = 0$$

11. $\lambda_{max}(PQ) \leq \gamma^2$

То, наблюдатель $L = -P(I - \gamma^{-2}QP)^{-1}(C_1 + \gamma^{-2}D_1B_1^TQ)^T(D_1D_1^T)^{-1}$ имеет устойчивую динамику ошибки и регулятор $K = -(D_2^T D_2)^{-1}B_2^T Q$ делает замкнутую систему устойчивой.

В итоге $\|W_{w \rightarrow z}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \gamma$.

Найдем общий вид передаточной функции $W_{w \rightarrow z}(s)$ системы:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad u = K \hat{x}$$

$$(sI - A)x = B_1 w + B_2 K \hat{x}$$

$$x = (sI - A)^{-1}(B_1 w + B_2 K \hat{x})$$

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B_1 \hat{w} + B_2 u + L(\hat{y} - y), \quad \hat{y} = C_1 \hat{x}, \quad \hat{w} = \gamma^{-2} B_1^T Q \hat{x}$$

$$\hat{x} = (sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}(-Ly), \quad y = C_1 x + D_1 w$$

$$\hat{x} = (sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}(-L(C_1 x + D_1 w))$$

$$\begin{cases} x = (sI - A)^{-1}(B_1 w + B_2 K \hat{x}) \\ \hat{x} = -(sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}(LC_1 x + LD_1 w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (sI - A)^{-1}(B_1 w - B_2 K(sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}(LC_1 x + LD_1 w)) \\ \hat{x} = -(sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}(LC_1(sI - A)^{-1}(B_1 w + B_2 K \hat{x}) + LD_1 w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (sI - A)^{-1}(B_1 w - B_2 K(sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}LC_1 x - B_2 K(sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}LD_1 w) \\ \hat{x} = -(sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}(LC_1(sI - A)^{-1}B_1 w + LC_1(sI - A)^{-1}B_2 K \hat{x} + LD_1 w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + (sI - A)^{-1}B_2 K(sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}LC_1 x = (sI - A)^{-1}(B_1 - B_2 K(sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}LD_1)w \\ \hat{x} + (sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}LC_1(sI - A)^{-1}B_2 K \hat{x} = -(sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}(LC_1(sI - A)^{-1}B_1 + LD_1)w \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (I + (sI - A)^{-1}B_2 K(sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}LC_1)^{-1}(sI - A)^{-1}(B_1 - B_2 K(sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}LD_1)w \\ \hat{x} = -(I + (sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}LC_1(sI - A)^{-1}B_2 K)^{-1}(sI - A - B_1 \gamma^{-2} B_1^T Q - B_2 K - LC_1)^{-1}(LC_1(sI - A)^{-1}B_1 + LD_1)w \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
z &= C_2 x + D_2 u, \quad u = K \hat{x} \\
z &= C_2 x + D_2 K \hat{x} \\
z &= C_2 x(w) + D_2 K \hat{x}(w) = W_{w \rightarrow z}(s) w
\end{aligned}$$

6.3. 1-е значение γ

Пусть $\gamma = 50$.

Стандартные условия синтеза \mathcal{H}_∞ -регулятора по выходу были проверены выше.

Вычислим $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 53.4789 & 23.7830 \\ 23.7830 & 21.6879 \end{bmatrix}$$

Матрица регулятора:

$$K = [-2.6426 \quad -2.4098]$$

Вычислим $P > 0$ из уравнения Риккати:

$$P = \begin{bmatrix} 8.7707 & 6.3367 \\ 6.3367 & 10.7966 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдателя:

$$L = \begin{bmatrix} -3.4382 \\ -2.8407 \end{bmatrix}$$

Условие согласованности:

$$\lambda_{max}(PQ) \leq \gamma^2: 971.2465 \leq 2500 - \text{верно}$$

Передаточная матрица:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & W_{13}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & W_{23}(s) \\ W_{31}(s) & W_{32}(s) & W_{33}(s) \end{bmatrix}$$

$$W_{11}(s) = \frac{-1.27 - 86.32s - 24.30s^2 - 4.5s^3}{7.313 + 15.93s + 13.35s^2 + 5.62s^3 + s^4}$$

$$W_{12}(s) = \frac{87.43 + 36.314s + 0.37s^2 - s^3}{7.313 + 15.93s + 13.35s^2 + 5.62s^3 + s^4}$$

$$W_{13}(s) = \frac{-29.25 - 49.098s + 31.86s^2}{7.313 + 15.93s + 13.35s^2 + 5.62s^3 + s^4}$$

$$W_{21}(s) = \frac{46.73 - 167.26s - 75.21s^2 - 14s^3}{7.313 + 15.93s + 13.35s^2 + 5.62s^3 + s^4}$$

$$W_{22}(s) = \frac{280.41 + 211.548s + 60.35s^2 + 7s^3}{7.313 + 15.93s + 13.35s^2 + 5.62s^3 + s^4}$$

$$W_{23}(s) = \frac{-102.38 - 223.03s}{7.313 + 15.93s + 13.35s^2 + 5.62s^3 + s^4}$$

$$W_{31}(s) = \frac{-146.48 + 205.15s + 1377.76s^2 + 557.44s^3 + 95.58s^4}{97.65 + 253.85s + 275.19s^2 + 166.09s^3 + 58.32s^4 + 11.24s^5 + s^6}$$

$$W_{32}(s) = \frac{-878.89 - 2577.62s - 1633.57s^2 - 434.05s^3 - 47.79s^4}{97.65 + 253.85s + 275.19s^2 + 166.09s^3 + 58.32s^4 + 11.24s^5 + s^6}$$

$$W_{33}(s) = \frac{-585.92s^2 - 1523.10s^3 - 581.345s^4 - 95.58s^5}{97.65 + 253.85s + 275.19s^2 + 166.09s^3 + 58.32s^4 + 11.24s^5 + s^6}$$

График АЧХ:

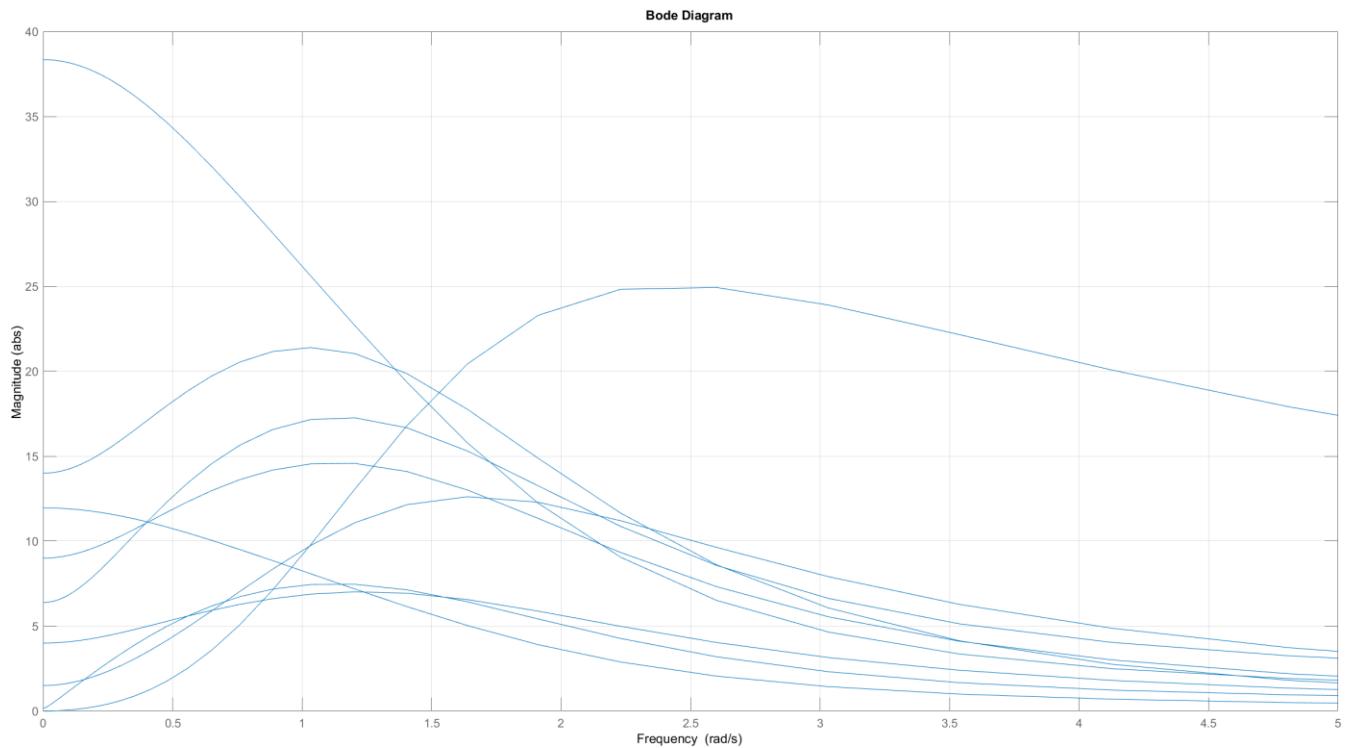


Рисунок 50: графики АЧХ компонентов передаточной матрицы системы

График сингулярных чисел:

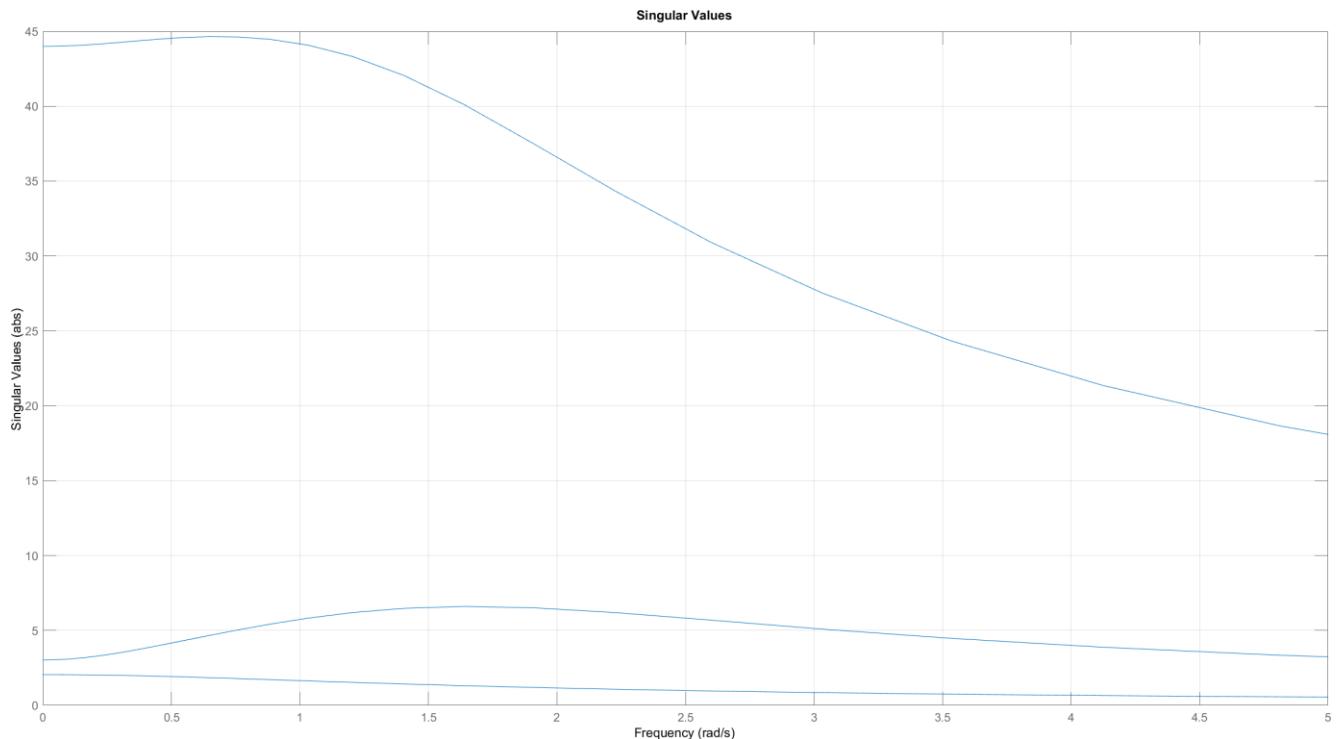


Рисунок 51: сингулярные числа системы

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 49.2741, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 44.6462$$

Введенное нами ограничение на $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} \leq 50$ выполняется.

Сравнивая с \mathcal{H}_2 -регулятором аналогичной системы, значения норм которого были равны $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 45.0667$, $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 56.6836$. Наглядно видна суть регулятора \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_{∞} . Первый борется против среднестатистического возмущения (уменьшает «площадь» под графиком сингулярных чисел), а второй борется против самого большого возмущения (сглаживает все «пики» графика сингулярных чисел).

6.4. 2-е значение γ

Пусть $\gamma = 40$.

Стандартные условия синтеза \mathcal{H}_{∞} -регулятора по выходу были проверены выше.

Вычислим $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 55.2706 & 25.0331 \\ 25.0331 & 22.7359 \end{bmatrix}$$

Матрица регулятора:

$$K = [-2.7815 \quad -2.5262]$$

Вычислим $P > 0$ из уравнения Риккати:

$$P = \begin{bmatrix} 9.0768 & 6.4944 \\ 6.4944 & 10.9167 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдателя:

$$L = \begin{bmatrix} -6.0419 \\ -5.3965 \end{bmatrix}$$

Условие согласованности:

$$\lambda_{max}(PQ) \leq \gamma^2: 1040 \leq 1600 - \text{верно}$$

Передаточная матрица:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & W_{13}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & W_{23}(s) \\ W_{31}(s) & W_{32}(s) & W_{33}(s) \end{bmatrix}$$

$$W_{11}(s) = \frac{-6.1 - 154.42s - 35.90s^2 - 4.5s^3}{14.35 + 30.4s + 22.61s^2 + 8.20s^3 + s^4}$$

$$W_{12}(s) = \frac{150.02 + 57.03s - 2.2s^2 - s^3}{14.35 + 30.4s + 22.61s^2 + 8.20s^3 + s^4}$$

$$W_{13}(s) = \frac{-57.434 - 93.03s + 60.8s^2}{14.35 + 30.4s + 22.61s^2 + 8.20s^3 + s^4}$$

$$W_{21}(s) = \frac{79.139 - 287.852s - 111.31s^2 - 14s^3}{14.35 + 30.4s + 22.61s^2 + 8.20s^3 + s^4}$$

$$W_{22}(s) = \frac{474.835 + 330.5s + 78.4s^2 + 7s^3}{14.35 + 30.4s + 22.61s^2 + 8.20s^3 + s^4}$$

$$W_{23}(s) = \frac{-201.019 - 426.13s}{14.35 + 30.4s + 22.61s^2 + 8.20s^3 + s^4}$$

$$W_{31}(s) = \frac{-486.99 + 738.98s + 4440s^2 + 1538.3s^3 + 182.629s^4}{324.66 + 806s + 775.259s^2 + 401.323s^3 + 112.484s^4 + 16.4s^5 + s^6}$$

$$W_{32}(s) = \frac{-2921.979 - 8228.027s - 4793.947s^2 - 1065.92s^3 - 91.314s^4}{324.66 + 806s + 775.259s^2 + 401.323s^3 + 112.484s^4 + 16.4s^5 + s^6}$$

$$W_{33}(s) = \frac{-1947.986s^2 - 4836.022s^3 - 1583.95s^4 - 182.629s^5}{324.66 + 806s + 775.259s^2 + 401.323s^3 + 112.484s^4 + 16.4s^5 + s^6}$$

График АЧХ:

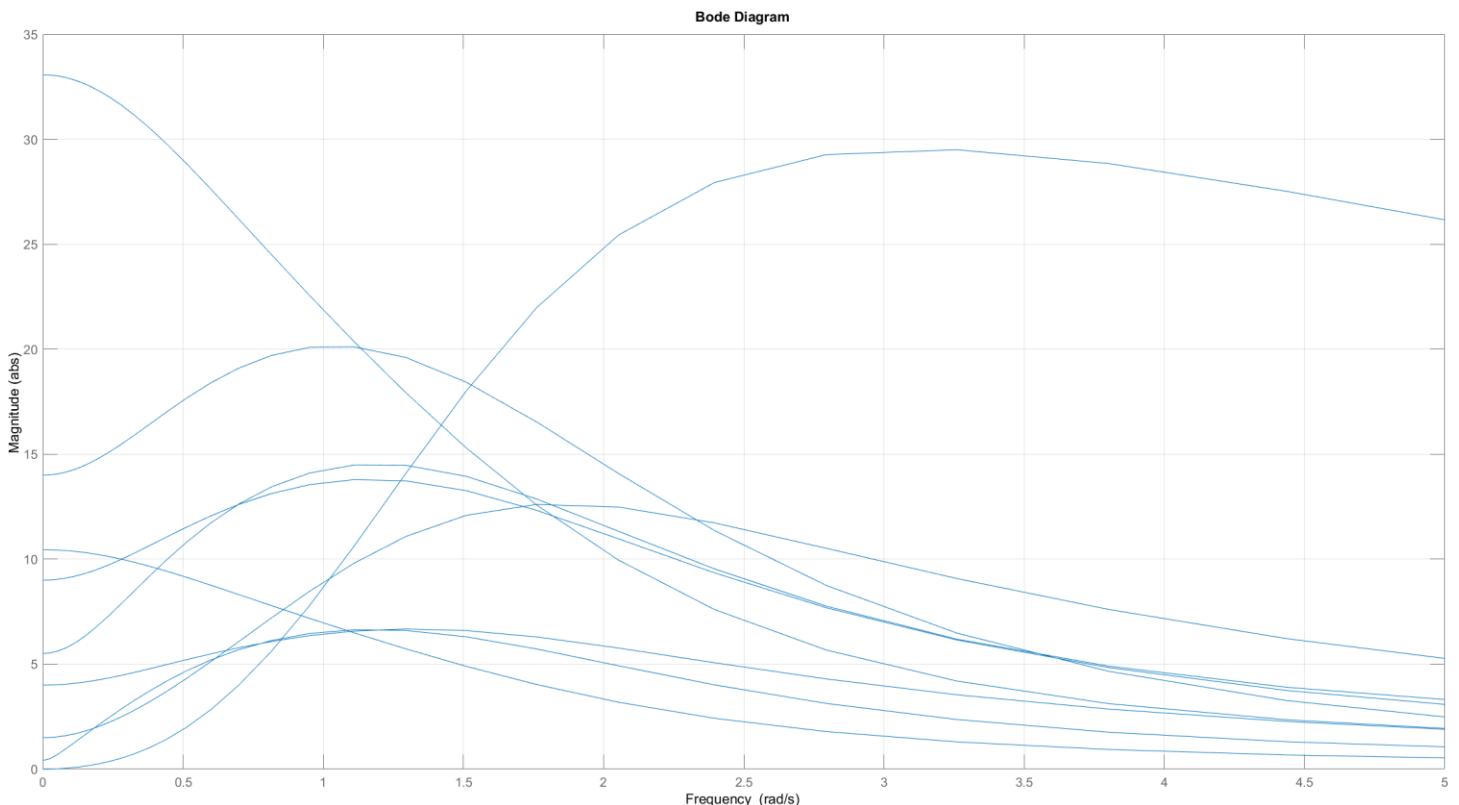


Рисунок 52: графики АЧХ компонентов передаточной матрицы системы

График сингулярных чисел:

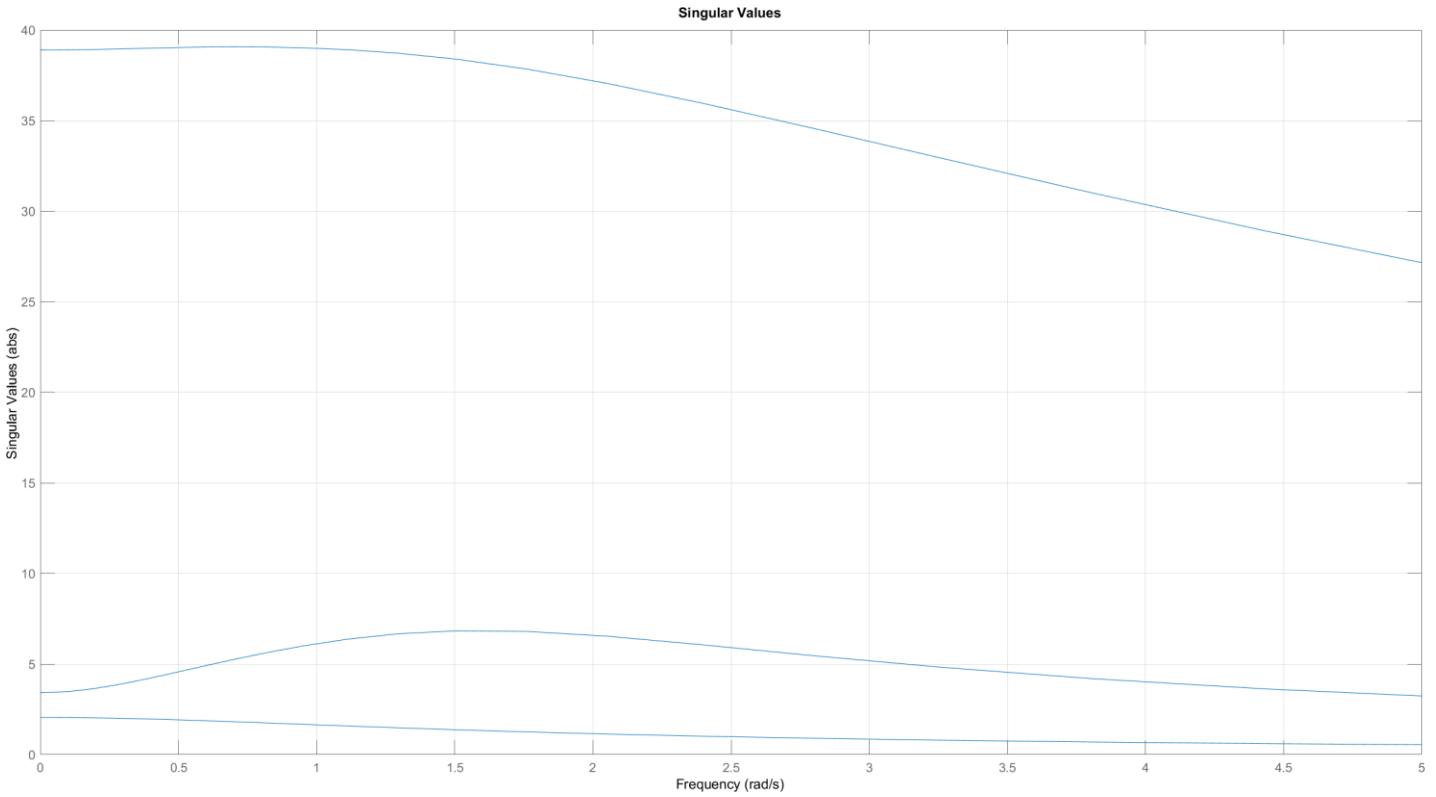


Рисунок 53: сингулярные числа системы

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 61.1127, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 39.0656$$

Введенное нами ограничение на $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} \leq 40$ выполняется.

Как видно, при меньшем ограничении увеличивается $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2}$, так как сингулярные числа становятся менее различны по всем частотам, уменьшается наибольшее значение по всем сингулярным числам за счет увеличения «площади» под графиком.

6.5. 3-е значение γ

Пусть $\gamma = 35$.

Стандартные условия синтеза \mathcal{H}_{∞} -регулятора по выходу были проверены выше.

Вычислим $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 56.9341 & 26.2026 \\ 26.2026 & 23.7138 \end{bmatrix}$$

Матрица регулятора:

$$K = [-2.9114 \quad -2.6349]$$

Вычислим $P > 0$ из уравнения Риккати:

$$P = \begin{bmatrix} 9.3594 & 6.6383 \\ 6.6383 & 11.0253 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдателя:

$$L = \begin{bmatrix} -21.9109 \\ -21.0789 \end{bmatrix}$$

Условие согласованности:

$$\lambda_{max}(PQ) \leq \gamma^2: 1106 \leq 1225 - \text{верно}$$

Передаточная матрица:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & W_{13}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & W_{23}(s) \\ W_{31}(s) & W_{32}(s) & W_{33}(s) \end{bmatrix}$$

$$W_{11}(s) = \frac{-35.966 - 571.73s - 107.21s^2 - 4.5s^3}{57.663 + 119.332s + 79.359s^2 + 24.04s^3 + s^4}$$

$$W_{12}(s) = \frac{533.823 + 184.264s - 18.048s^2 - s^3}{57.663 + 119.332s + 79.359s^2 + 24.04s^3 + s^4}$$

$$W_{13}(s) = \frac{-230.6 - 362.0s + 238.66s^2}{57.663 + 119.332s + 79.359s^2 + 24.04s^3 + s^4}$$

$$W_{21}(s) = \frac{277.759 - 1026.868s - 333.18s^2 - 14s^3}{57.663 + 119.332s + 79.359s^2 + 24.04s^3 + s^4}$$

$$W_{22}(s) = \frac{1666.55 + 1060.54s + 189.34s^2 + 7s^3}{57.663 + 119.332s + 79.359s^2 + 24.04s^3 + s^4}$$

$$W_{23}(s) = \frac{-807.28 - 1670.650s}{57.663 + 119.332s + 79.359s^2 + 24.04s^3 + s^4}$$

$$W_{31}(s) = \frac{-6864.239 + 11171.56s + 60750.396s^2 + 17385.7522s^3 + 715.993s^4}{4576.15 + 10856.93s + 9225.46s^2 + 3936.35s^3 + 737.06s^4 + 48.09s^5 + s^6}$$

$$W_{32}(s) = \frac{-41185.434 - 111440.855s - 58917.91s^2 - 9856.36s^3 - 357.996s^4}{4576.15 + 10856.93s + 9225.46s^2 + 3936.35s^3 + 737.06s^4 + 48.09s^5 + s^6}$$

$$W_{33}(s) = \frac{-27456.956s^2 - 65141.58s^3 - 17564.75s^4 - 715.99s^5}{4576.15 + 10856.93s + 9225.46s^2 + 3936.35s^3 + 737.06s^4 + 48.09s^5 + s^6}$$

График АЧХ:

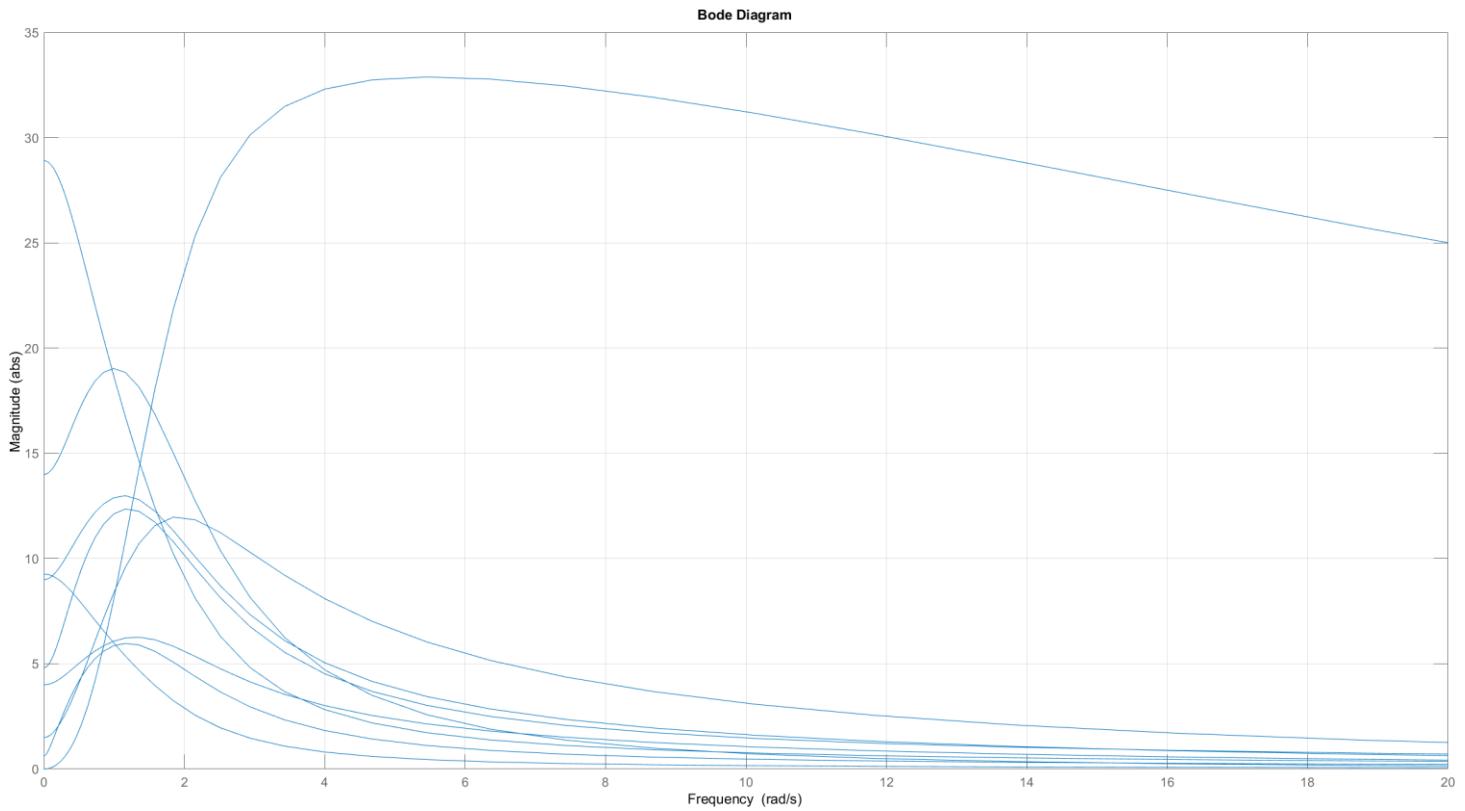


Рисунок 54: графики АЧХ компонентов передаточной матрицы системы

График сингулярных чисел:

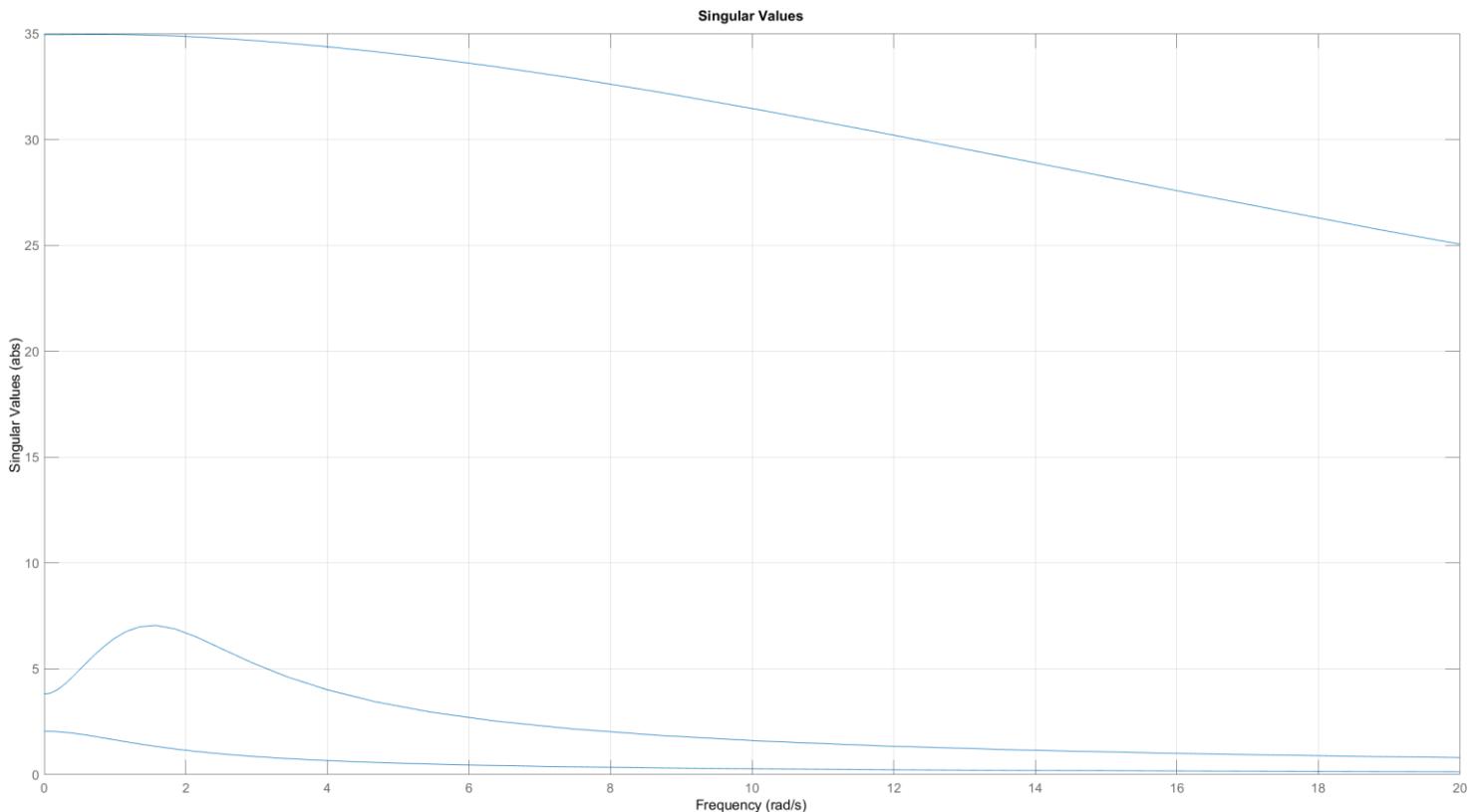


Рисунок 55: сингулярные числа системы

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 112.2553, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 34.9550$$

Введенное нами ограничение на $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} \leq 35$ выполняется.

Как видно, при меньшем ограничении увеличивается $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2}$, так как сингулярные числа становятся менее различны по всем частотам, уменьшается наибольшее значение по всем сингулярным числам за счет увеличения «площади» под графиком.

6.5. 4-е значение γ

Пусть $\gamma = 33.7$.

Стандартные условия синтеза \mathcal{H}_{∞} -регулятора по выходу были проверены выше.

Вычислим $Q > 0$ из уравнения Риккати:

$$Q = \begin{bmatrix} 57.5244 & 26.6195 \\ 26.6195 & 24.0619 \end{bmatrix}$$

Матрица регулятора:

$$K = [-2.9577 \quad -2.6735]$$

Вычислим $P > 0$ из уравнения Риккати:

$$P = \begin{bmatrix} 9.4594 & 6.6888 \\ 6.6888 & 11.0632 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдателя:

$$L = \begin{bmatrix} -477.0633 \\ -471.4135 \end{bmatrix}$$

Условие согласованности:

$$\lambda_{max}(PQ) \leq \gamma^2: 1130.7 \leq 1135.7 - \text{верно}$$

Передаточная матрица:

$$W_{w \rightarrow z}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & W_{13}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & W_{23}(s) \\ W_{31}(s) & W_{32}(s) & W_{33}(s) \end{bmatrix}$$

$$W_{11}(s) = \frac{-894.61 - 12551.89s - 2155.372s^2 - 4.5s^3}{1301.575 + 2671.334s + 1708.53s^2 + 479.19s^3 + s^4}$$

$$W_{12}(s) = \frac{11552.80 + 3837.959s - 473.193s^2 - s^3}{1301.575 + 2671.334s + 1708.53s^2 + 479.19s^3 + s^4}$$

$$W_{13}(s) = \frac{-5206.303 - 8082.184s + 5342.668s^2}{1301.575 + 2671.334s + 1708.53s^2 + 479.19s^3 + s^4}$$

$$W_{21}(s) = \frac{5979.882 - 22242.352s - 6705.213s^2 - 14s^3}{1301.575 + 2671.334s + 1708.53s^2 + 479.19s^3 + s^4}$$

$$W_{22}(s) = \frac{35879.296 + 22022.835s + 3375.3566s^2 + 7s^3}{1301.575 + 2671.334s + 1708.53s^2 + 479.19s^3 + s^4}$$

$$W_{23}(s) = \frac{-18222.061 - 37398.677s}{1301.575 + 2671.334s + 1708.53s^2 + 479.19s^3 + s^4}$$

$$W_{31}(s) = \frac{-3335687.51 + 5561075.97s + 2.920461377 \times 10^7 s^2 + 7684323.02s^3 + 16028.004s^4}{2223791.67 + 5187782.713s + 4200490.16s^2 + 1640112.91s^3 + 233043.77s^4 + 958.38s^5 + s^6}$$

$$W_{32}(s) = \frac{-2.00141250 \times 10^7 - 5.336141944 \times 10^7 s - 2.709584318 \times 10^7 s^2 - 3868207.021s^3 - 8014.002s^4}{2223791.67 + 5187782.713s + 4200490.16s^2 + 1640112.91s^3 + 233043.77s^4 + 958.38s^5 + s^6}$$

$$W_{33}(s) = \frac{-1.33427500 \times 10^7 s^2 - 3.11266962 \times 10^7 s^3 - 7688330.0279 - 16028s^5}{2223791.67 + 5187782.713s + 4200490.16s^2 + 1640112.91s^3 + 233043.77s^4 + 958.38s^5 + s^6}$$

График АЧХ:

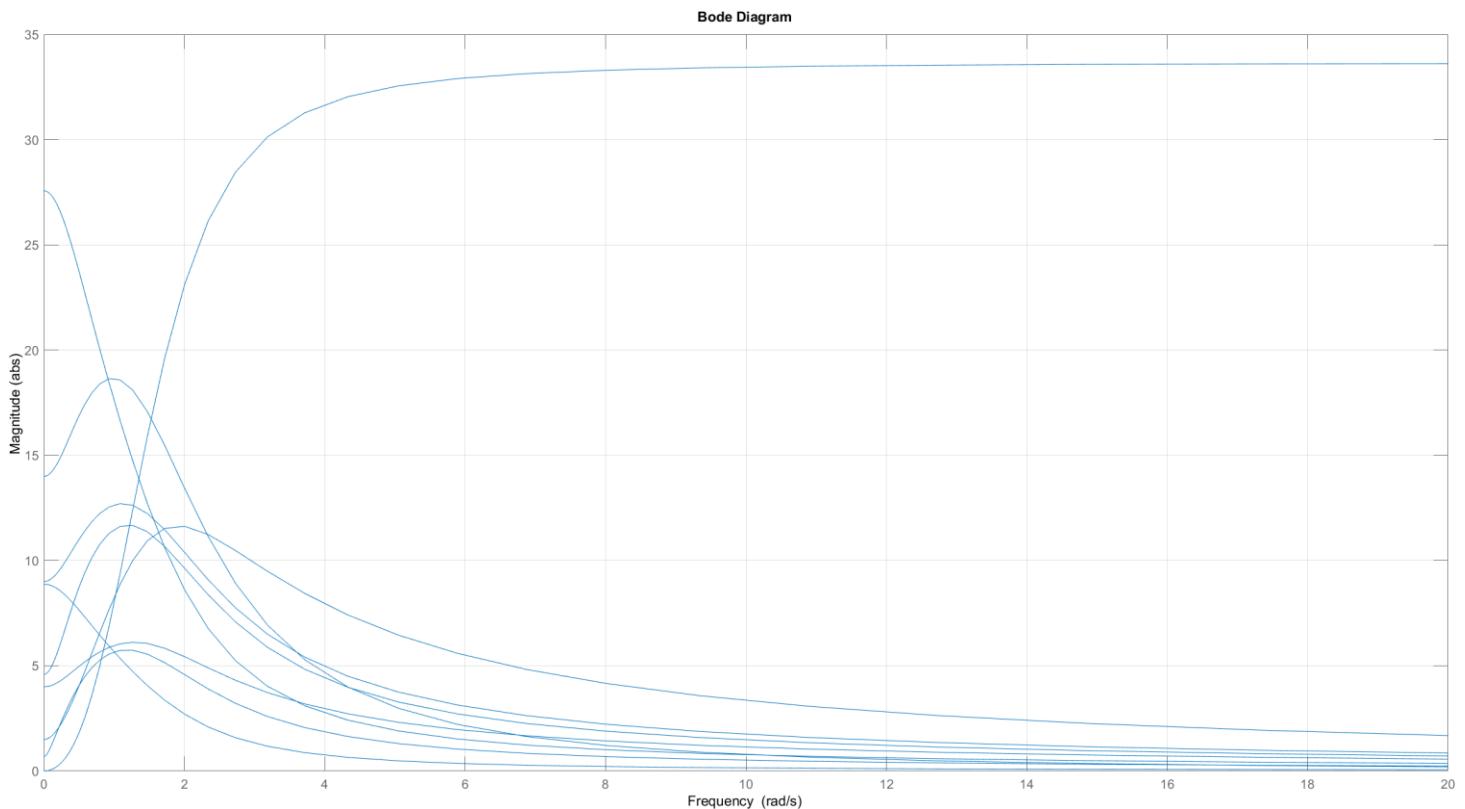


Рисунок 56: графики АЧХ компонентов передаточной матрицы системы

Построим больший диапазон частоты, чтобы убедится, что система является устойчивой.

График АЧХ при большем диапазоне:

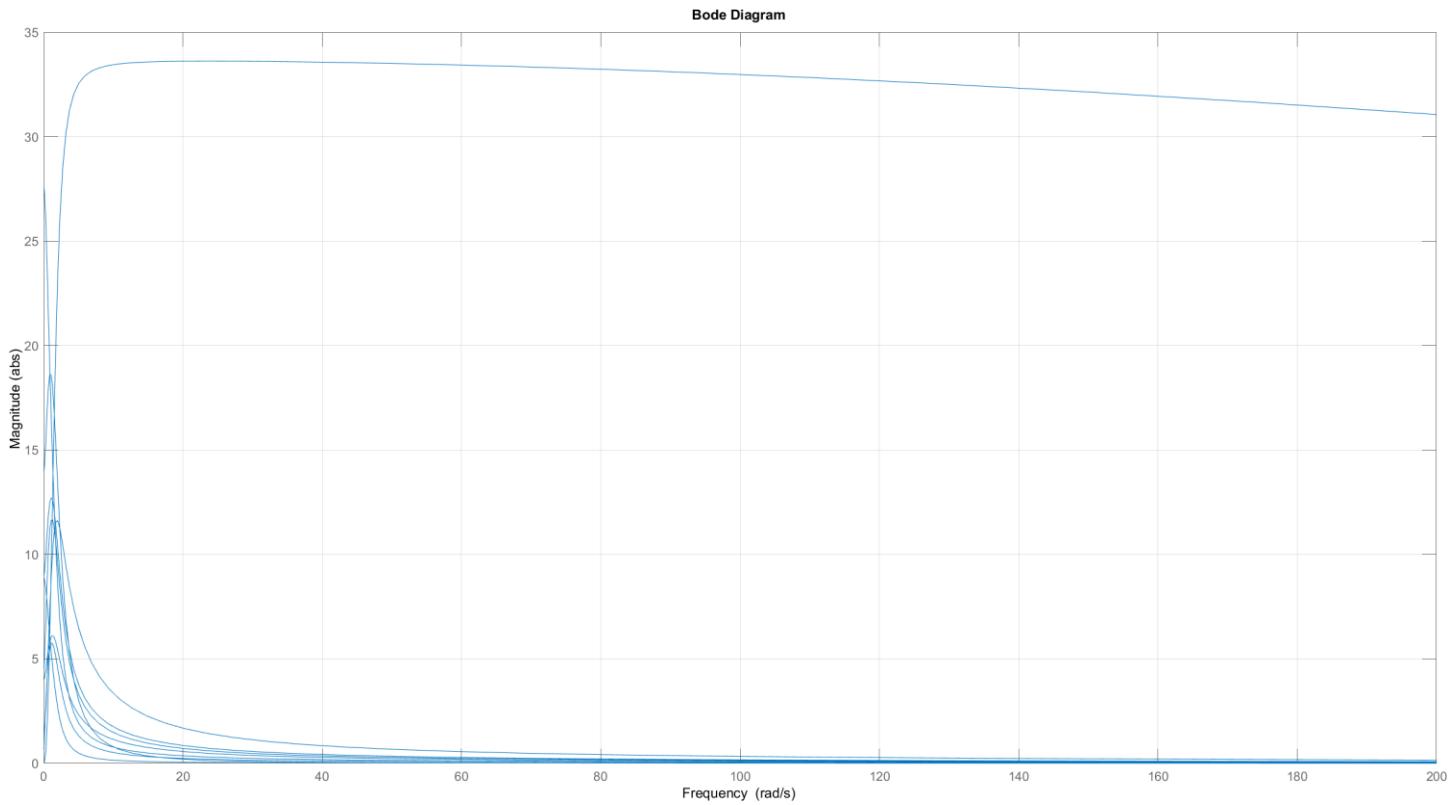


Рисунок 57: АЧХ компонентов передаточной матрицы системы при большем диапазоне частот

График сингулярных чисел:

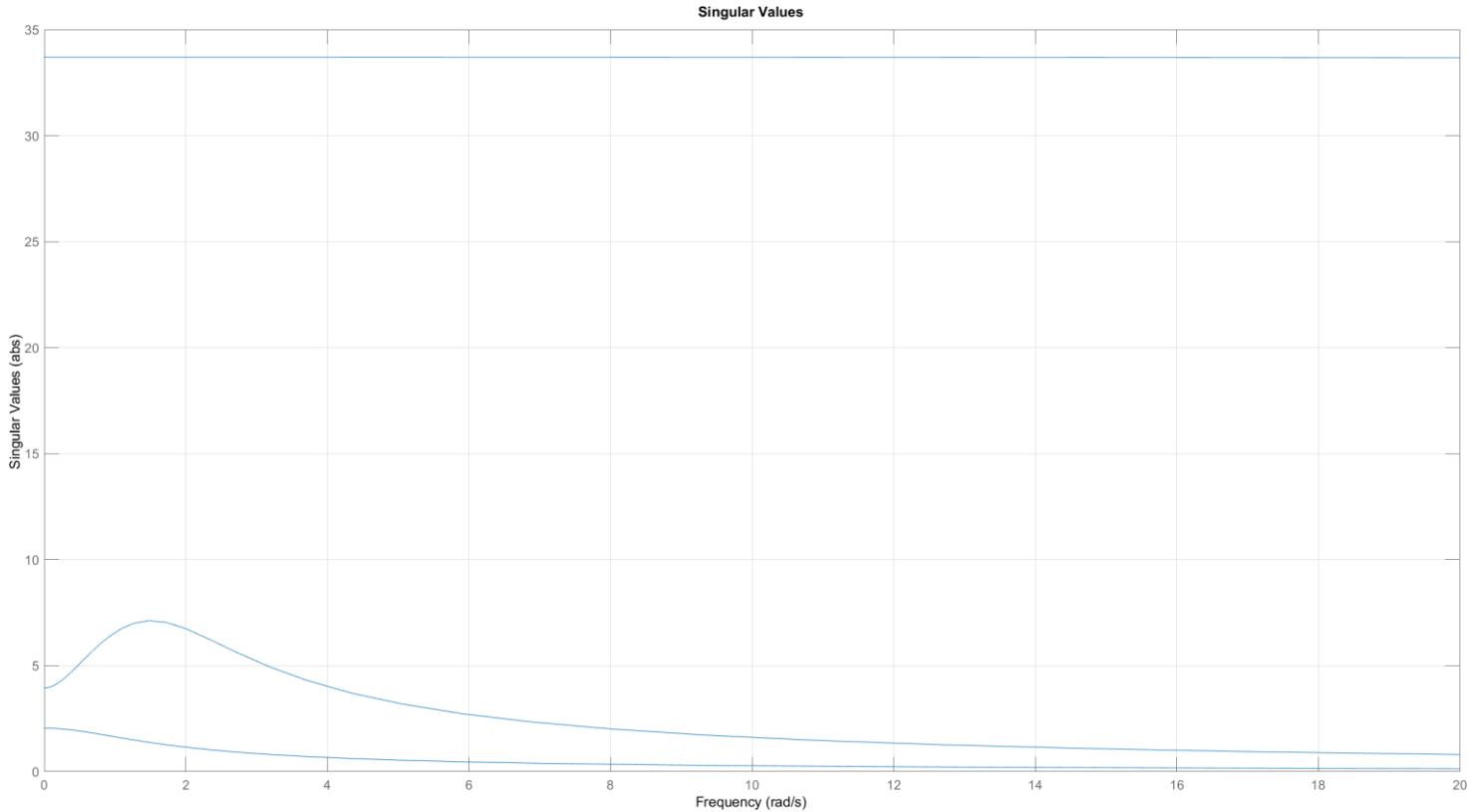


Рисунок 58: сингулярные числа системы

Сингулярные числа при большем диапазоне частот:

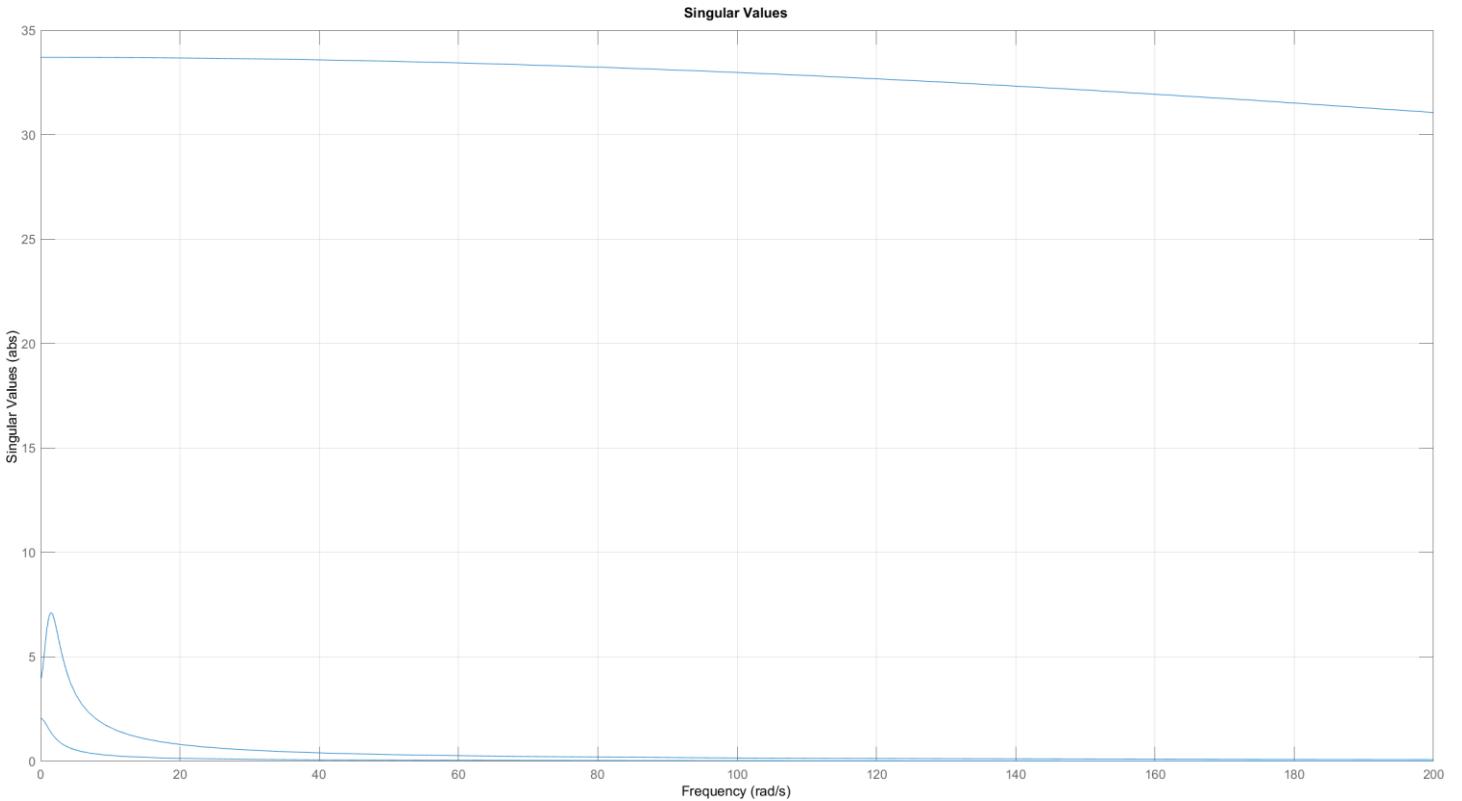


Рисунок 59: сингулярные числа системы при большем диапазоне частот

Нормы системы:

$$\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_2} = 519.7447, \quad \|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = 33.7$$

Введенное нами ограничение на $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}} \leq 33.7$ выполняется.

Истинное минимальное значение $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}}$ находится в окрестности 33.7, так как при уменьшении ограничения хотя бы на 0.01 хоть положительно определенные матрицы P, Q находятся решением уравнения Рикатти, но так как *Separation Principle* не выполняется, то необходимо проверять условие согласованности $\lambda_{max}(PQ) \leq \gamma^2$, которое и будет нарушаться.

В итоге мы получили регулятор, который является «почти» оптимальным по критерию минимизации $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\mathcal{H}_{\infty}}$ нормы системы. Как видно по графикам сингулярных чисел усиление системы на всех частотах примерно равное (очень медленно убывает), это значит, что мы победили все резонансы системы и она будет вести себя почти одинаково при всех внешних воздействиях равных частот.

Выводы

В данной лабораторной работе был исследован геометрический Грамианов наблюдаемости и управляемости систем, построены изображения различных эллипсоидов и продемонстрирован их смысл. Также были исследованы зависимости сингулярных чисел передаточных матриц от АЧХ их компонентов.

Основной задачей данной ЛР было построение и исследование \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_{∞} регуляторов, суть их работы, по каким критериям они являются оптимальными, связь с *LQR*, *LQE*, *LQG*. А также проведено моделирование данных систем при различных внешних воздействиях и частотах.