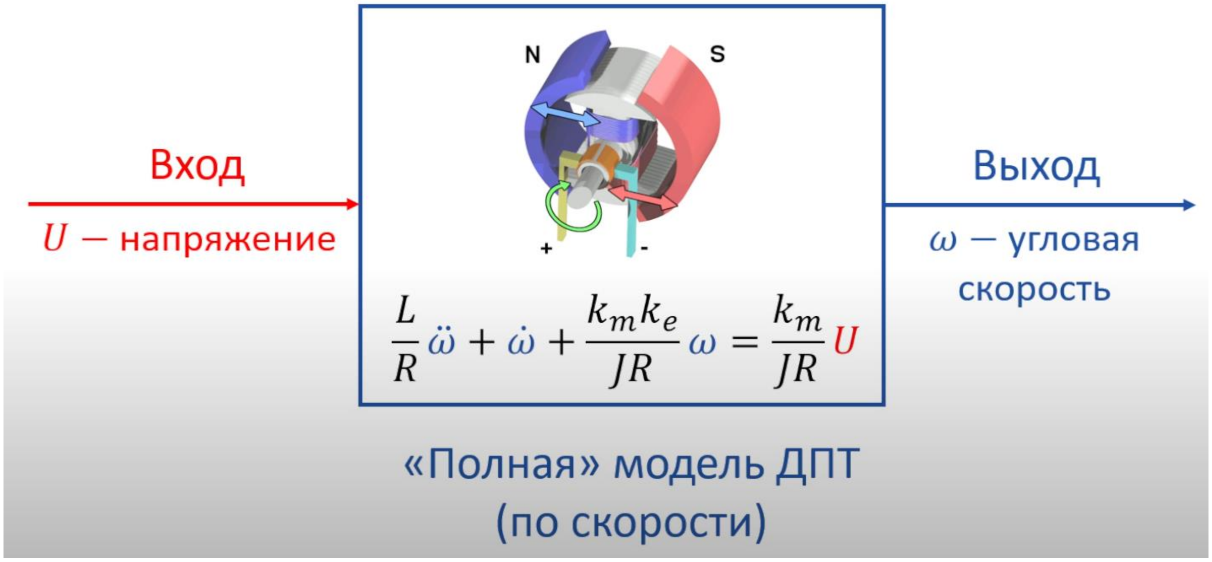
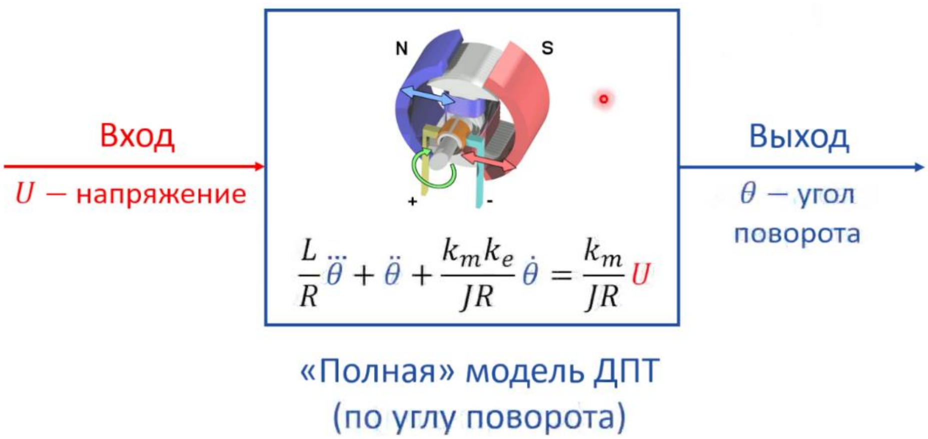
Формы представления линейных систем

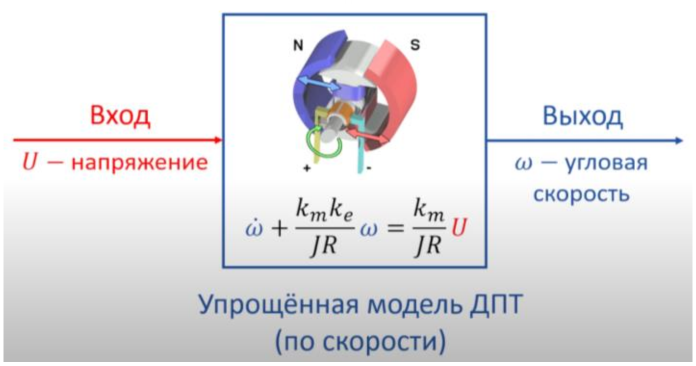
Примеры линейных систем

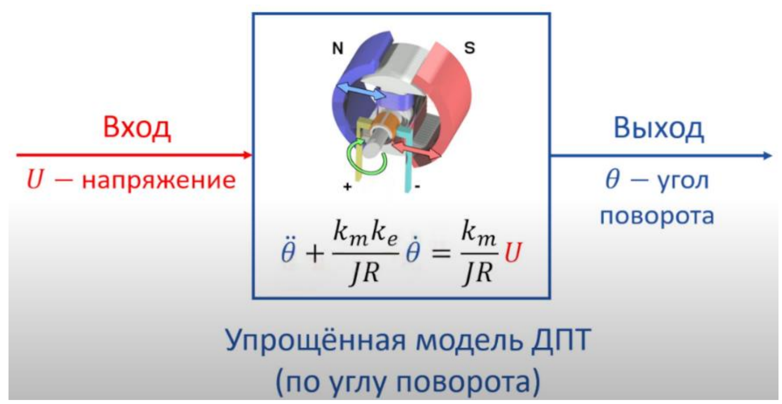
Двигатель постоянного тока





Можно упростить это уравнение, так как индуктивность часто мала L~0. Заменяем L на ноль

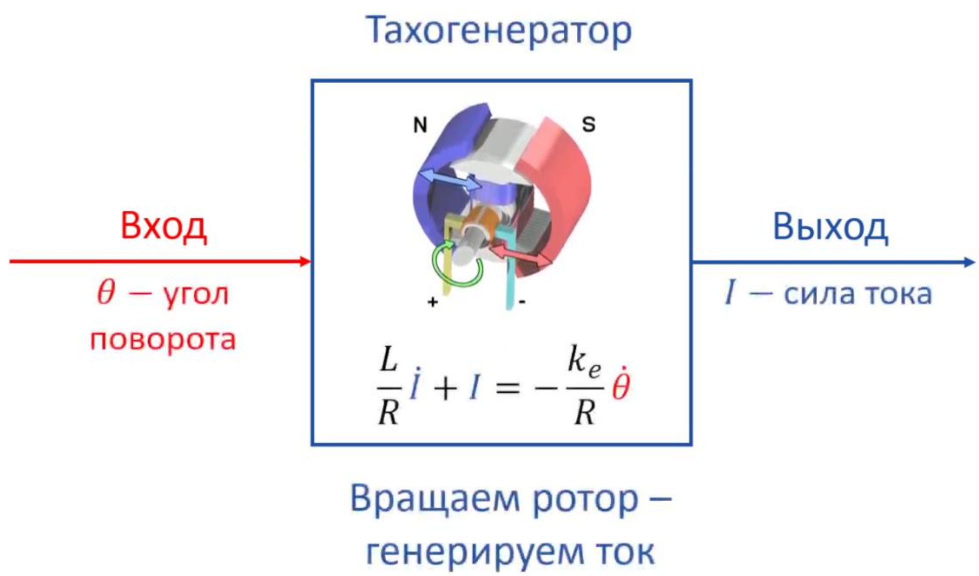




Тахогенератор

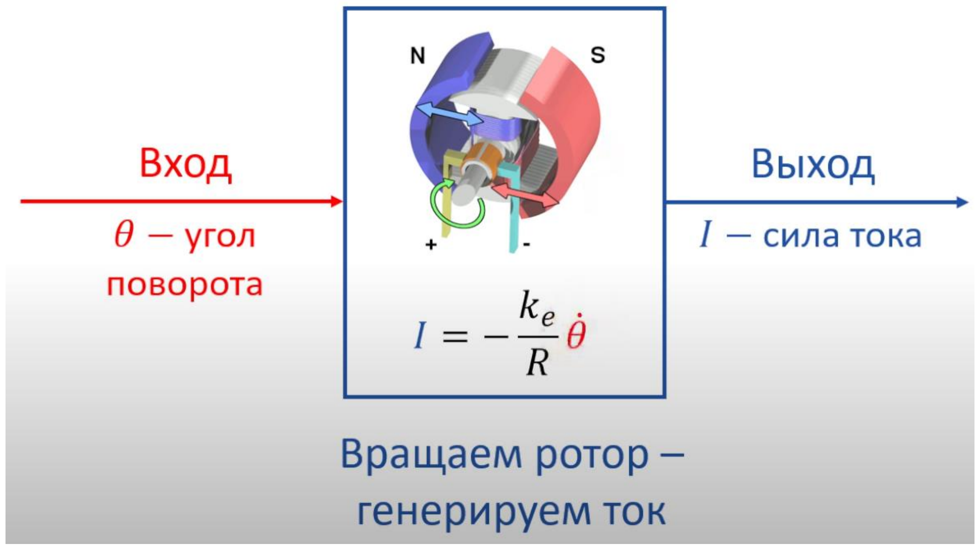
Обратный двигатель постоянного тока. Не подаём напряжение, а крутим ротор и появляется сила тока. Чем быстрее вращаем, тем больше сила тока.

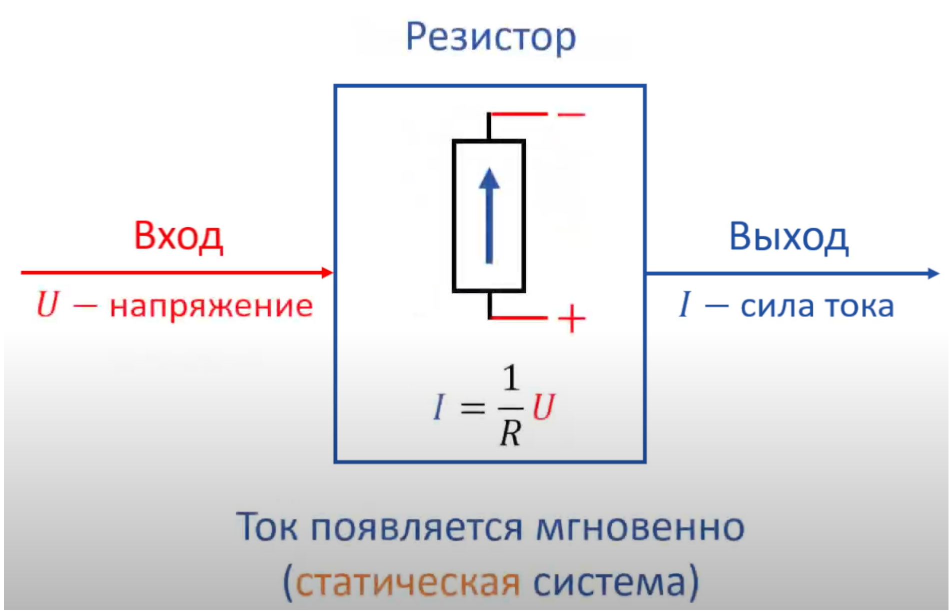
Индуктивность тоже часто мала. Можем отбросить первое слагаемое

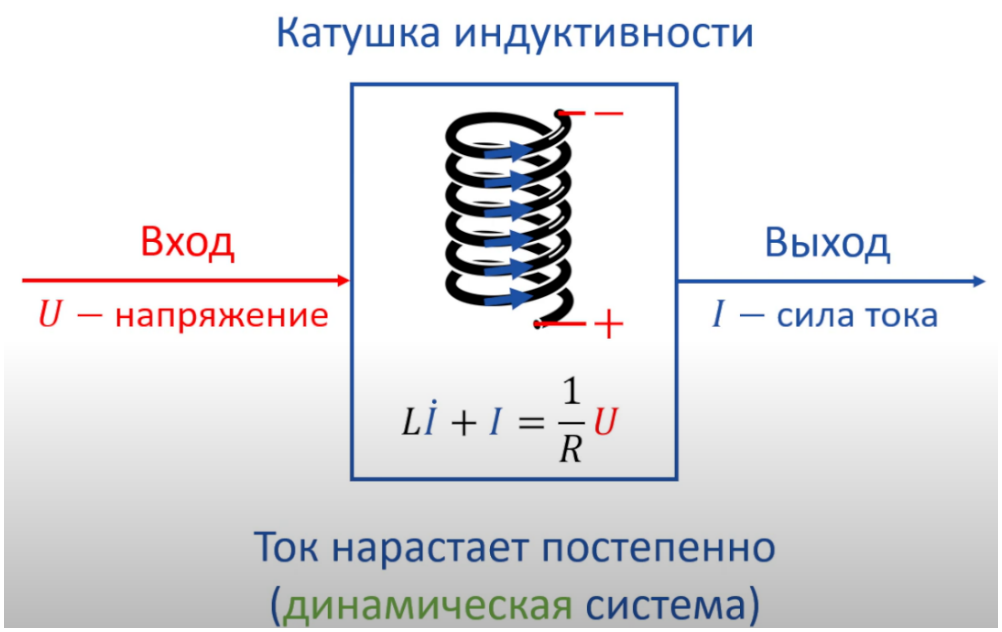


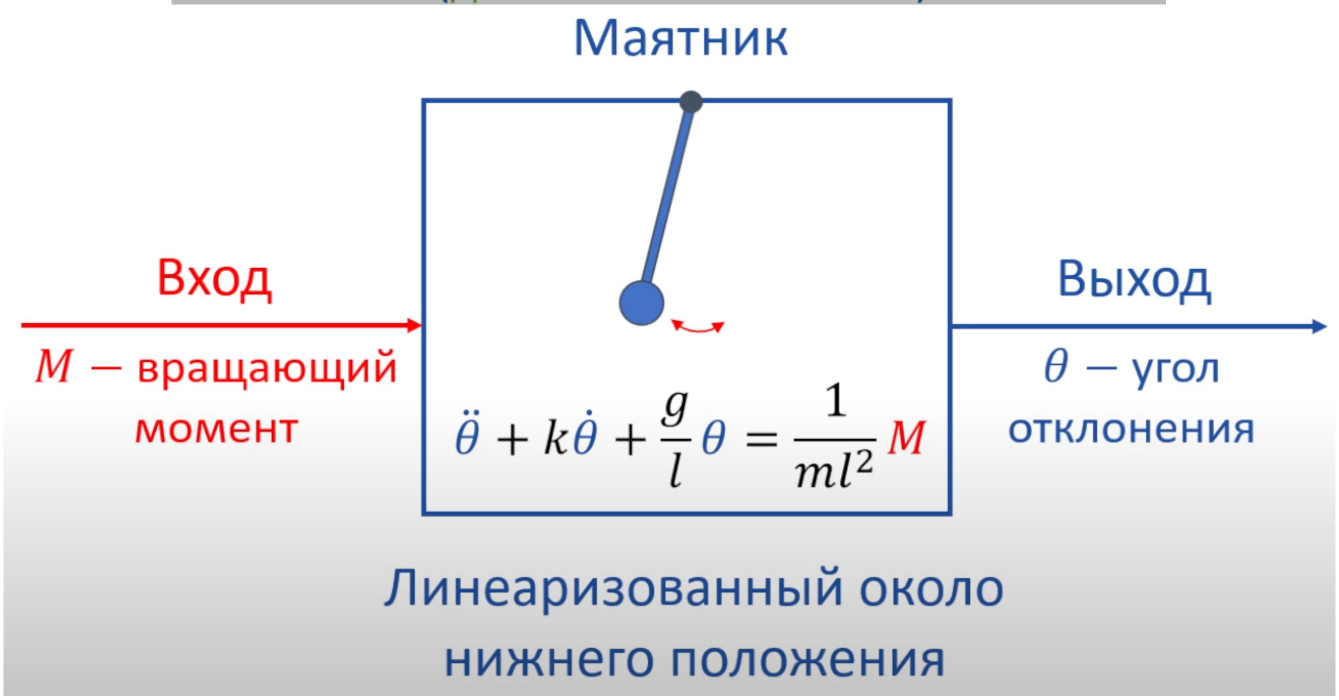
Прямо пропорциональная система. Чем быстрее вращаем, тем больше сила тока

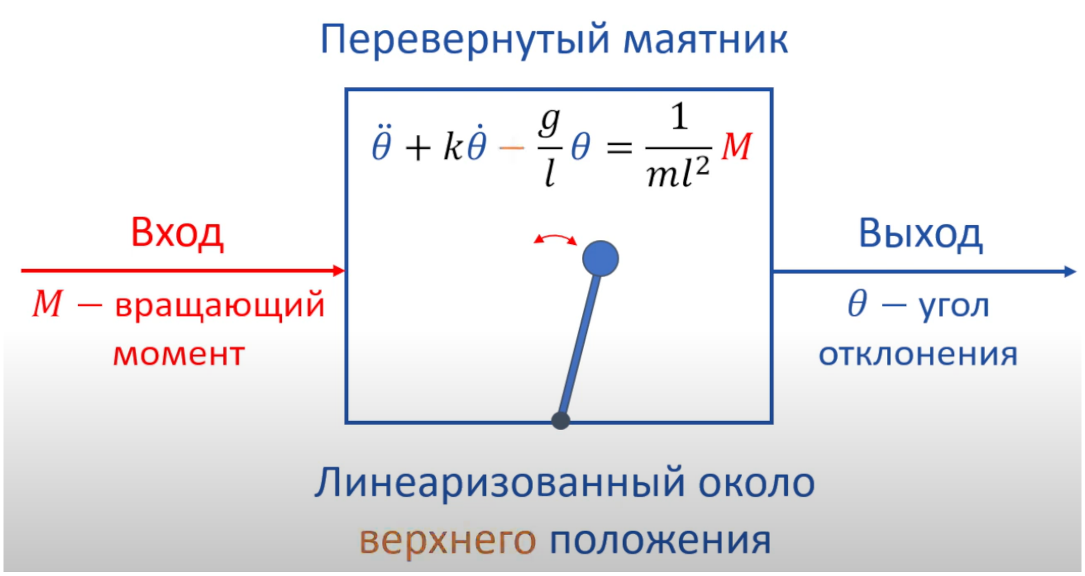
Из-за наличия дифференциальных слагаемых ток нарастает постепенно

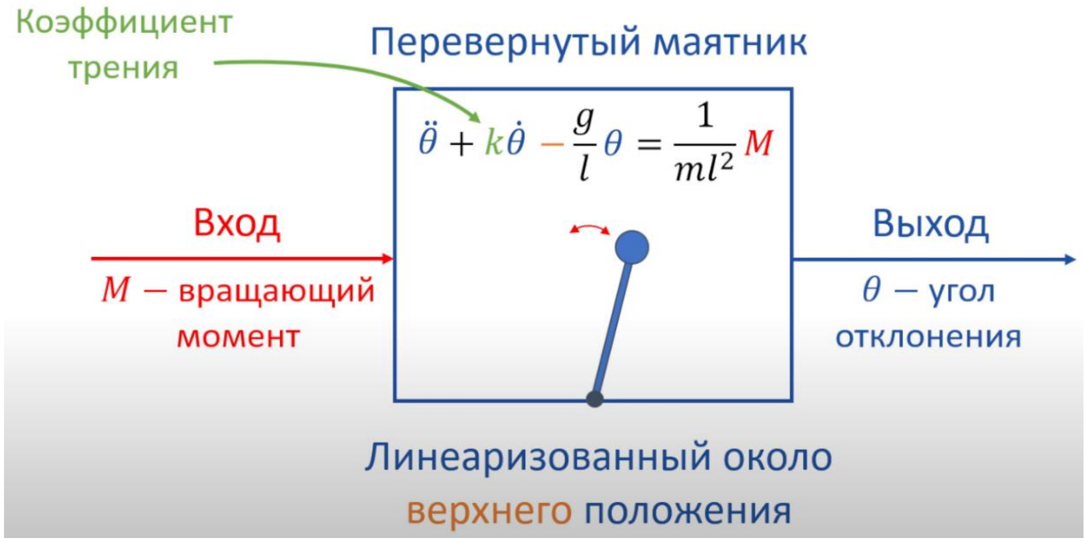




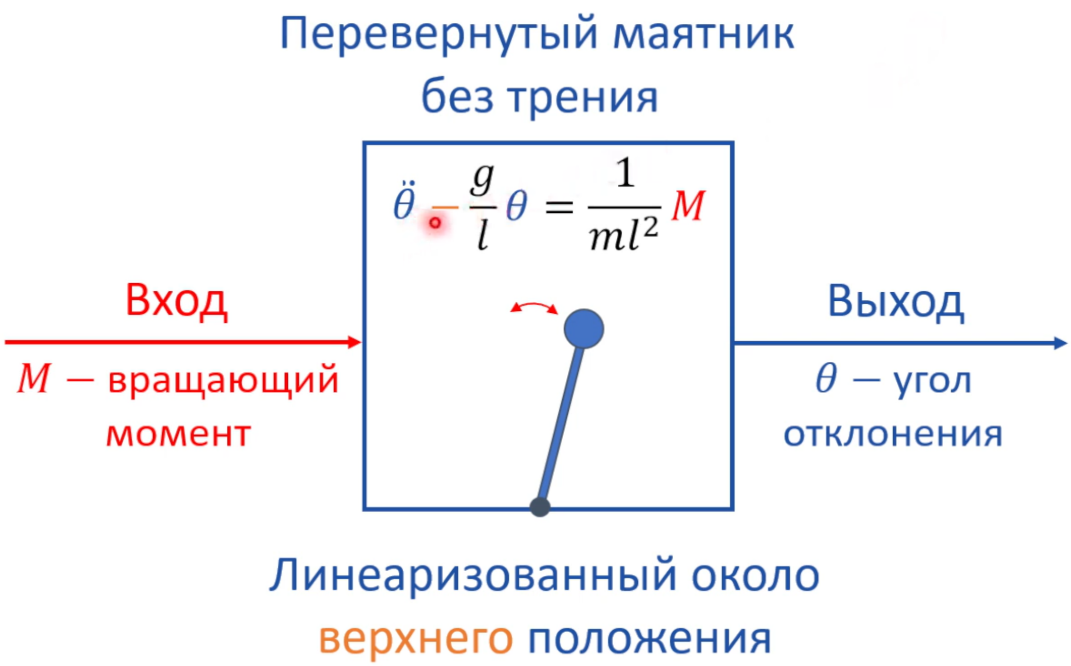

Катушка индуктивности
Вход
U – напряжение
Выход
I – сила тока
$L\dot{I} + I = \frac{1}{R}U$
Ток нарастает постепенно
(динамическая система)

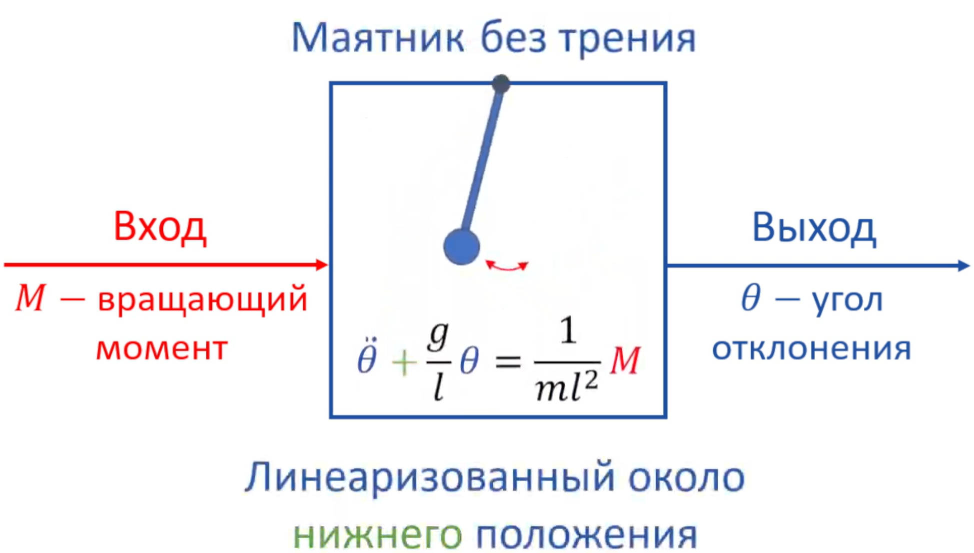

Маятник
Вход
M – вращающий момент
Выход
θ – угол отклонения
$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}M$
Линеаризованный около нижнего положения


Перевернутый маятник
$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} - \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}M$
Вход
M – вращающий момент
Выход
θ – угол отклонения
Линеаризованный около верхнего положения



Если трение мало, то





Тело

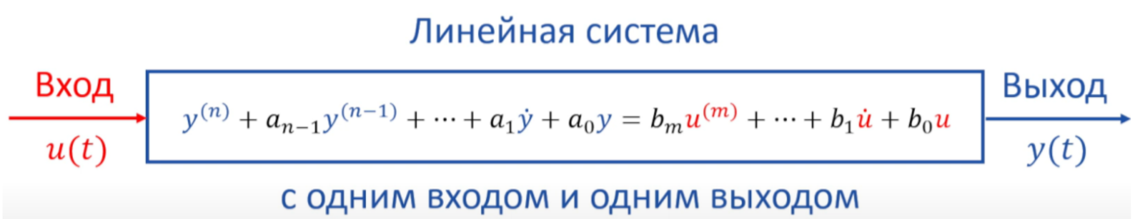

Вход
F — сила
$a = \frac{1}{m} F$
Выход
a — ускорение
Относительно ускорения
модель статическая

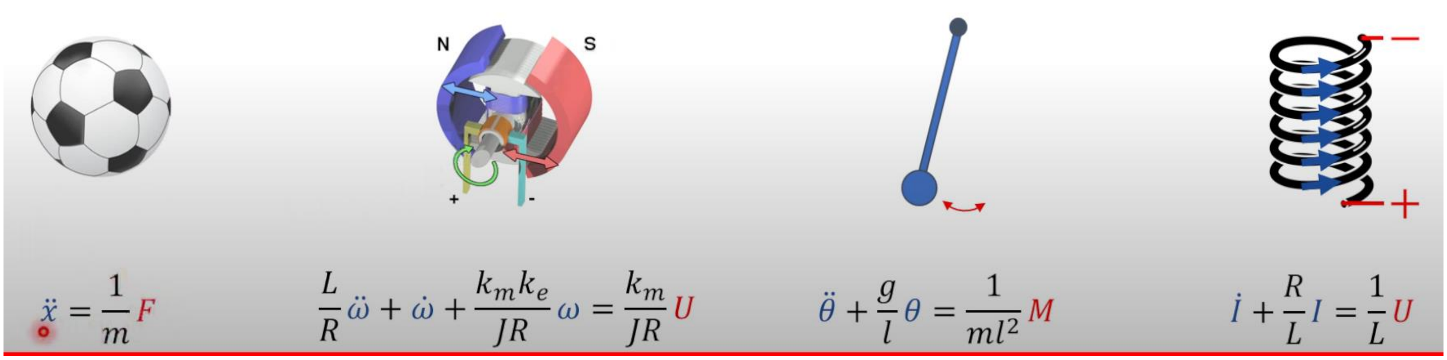

Вход
F — сила
$\ddot{x} = \frac{1}{m} F$
Выход
x — координата
Относительно координаты
модель динамическая
(второго порядка)

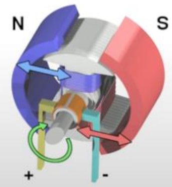

Вход
F — сила
$\dot{v} = \frac{1}{m} F$
Выход
v — скорость
Относительно скорости
модель динамическая
(первого порядка)

Тело в вязкой среде

Общее уравнение Вход-выход







$\ddot{x} + k\dot{x} = \frac{1}{m}F$ $\qquad$ $\frac{L}{R}\dot{I} + I = -\frac{k_e}{R}\dot{\theta}$ $\qquad$ $\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}M$ $\qquad$ $I = \frac{1}{R}U$

Все рассмотренные выше модели соответствуют этой структуре

Дифференциально-интегральные операторы

Оператор дифференцирования

Действует на функцию f и возвращает производную

$$\boxed{p[f] = \frac{df}{dt}}$$

Просто берёт производную

$$p[\,5\sin t\,] = 5\cos t$$

Его можно рассмотреть в линейной комбинации

Линейные дифференциальные операторы

$$\boxed{(c_n p^n + \cdots + c_1 p + c_0)[f] = c_n \frac{d^n f}{dt^n} + \cdots + c_1 \frac{df}{dt} + c_0 f}$$

Примеры

$(2p+3)[f] = 2\dot{f} + 3f$ $\qquad$ $(p^3 + 3p^2 + 1)[f] = \dddot{f} + 3\ddot{f} + f$

Оператор интегрирования

1/p просто символ, не обозначает деление

$$\boxed{\frac{1}{p}[f] = \int_0^t f(x)dx}$$

Возвращает первообразную, равную нулю при $t = 0$

$$\frac{1}{p}[2t+5] = t^2 + 5t$$

$$\frac{1}{p}\left[\ e^{-t}\ \right] = 1 - e^{-t}$$

Используя эти операторы мы можем переписывать уравнения

Дифференциальное уравнение	Операторная форма #1	Операторная форма #2
$\dot{y} = u$	$p[y] = u$	$y = \frac{1}{p}[u]$

Однако 1 и 2 это не одно и то же

Дифференциальное уравнение	Операторная форма #1	Операторная форма #2
$\dot{y} = u$	$p[y] = u$	$y = \frac{1}{p}[u] + c$

Одно и то же   Одно и то же

Дифференциальное уравнение	Операторная форма #1	Операторная форма #2
$\dot{y} = u$	$p[y] = u$	$y = \frac{1}{p}[u] + c$

Дифференциальное уравнение	Операторная форма #1	Операторная форма #2
$\ddot{y} = u$	$p^2[y] = u$	$y = \frac{1}{p^2}[u]$

Одно и то же   Не одно и то же

Дифференциальное уравнение	Операторная форма #1	Операторная форма #2
$\ddot{y} = u$	$p^2[y] = u$	$y = \frac{1}{p^2}[u] + c_1 t + c_2$

Одно и то же   Одно и то же

Дифференциально-интегральный оператор

$$y = \left(\frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}\right)[u]$$

$$\Updownarrow$$

Формальное определение

$y(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u$$

при начальных условиях $y(0) = 0$ и $\dot{y}(0) = 0$

В общем случае

Дифференциально-интегральный оператор

$$y = \left(\frac{b_m p^m + \cdots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}\right)[u]$$

$$\Updownarrow$$

Формальное определение

$y(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

при начальных условиях $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$

Есть линейная система, можем записать её в операторной форме , однако не всё получится одно и то же

Линейная система

Одно и то же

$$\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u$$

Операторная форма (дифференциальная)

Не одно и то же

$$(p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0)[y] = (b_2p^2 + b_1p + b_0)[u]$$

Операторная форма (дифференциально-интегральная)

$$y = \left(\frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0}\right)[u]$$

Линейная система

Одно и то же

$$\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u$$

Операторная форма (дифференциальная)

Одно и то же

$$(p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0)[y] = (b_2p^2 + b_1p + b_0)[u]$$

Операторная форма (дифференциально-интегральная)

$$y = \left(\frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0}\right)[u] + \left(\begin{matrix}\text{Общее решение уравнения}\\ \dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0\end{matrix}\right)$$

Операторная форма (дифференциально-интегральная)

$$y = \left(\frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0}\right)[u] + \left(\begin{matrix}\text{Общее решение уравнения}\\ \dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0\end{matrix}\right)$$

Общее решение ЛНДУ

Частное решение ЛНДУ (вынужденная составляющая движения)

Общее решение ЛОДУ (свободная составляющая движения)

Операторная форма (дифференциально-интегральная)

$$y = \left(\frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}\right)[u] + \left(\begin{matrix}\text{Общее решение уравнения} \\ \dddot{y} + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0\end{matrix}\right)$$

Если начальные условия равны нулю, то этого куска нет

То есть маятник смотрит вниз, двигатель изначально не крутится, тока через резистор изначально нет. То есть изначально система стоит.

Операторная форма (дифференциально-интегральная)

$$y = \left(\frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}\right)[u]$$

При нулевых начальных условиях эта запись верна

Операторная форма (дифференциально-интегральная)

$$y = \underbrace{\left(\frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}\right)}_{W(p)}[u]$$

(Операторная) передаточная функция

(Операторная) передаточная функция

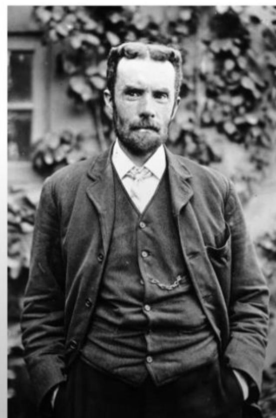
$$y = \underbrace{\left(\frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}\right)}_{W(p)} [u]$$

Формально, это просто символ

Можно ли воспринимать его как функцию переменной p?

Можно ли складывать, умножать, делить такие выражения?

Имеют ли какой-то смысл корни числителя и знаменателя?



Да, можете обращаться с такими операторами как с функциями

$\Downarrow$

«Операционное исчисление»

Оливер Хевисайд, 1893

Но это было не строго, однако давали правильные результаты

Оливер был прав! Это можно доказать с помощью преобразования Лапласа…

Динамический порядок и инерционность

Дифференциальное уравнение

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

(Операторная) передаточная функция

$$W(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + \cancel{b_2} p^2 + a_1 p + a_0}$$

a_2

Посмотрим на оператор как на дробь

Динамический порядок – наибольший из степеней полиномов $\max(m, n)$

Относительный динамический порядок

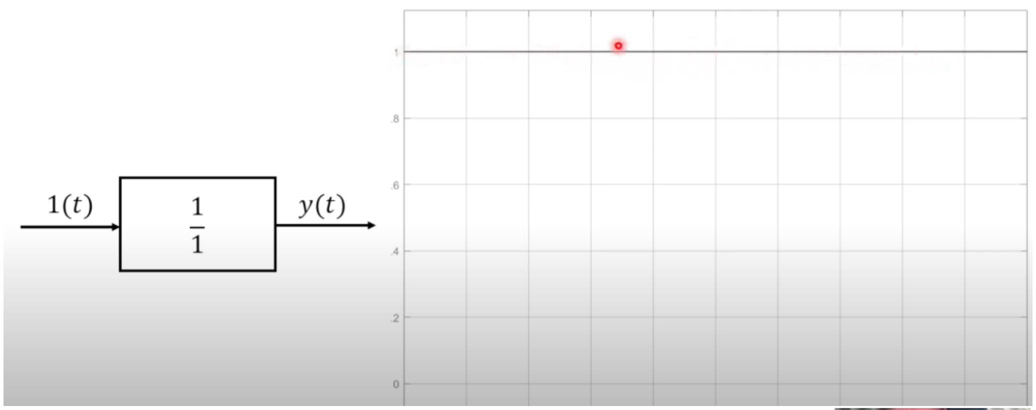
$$n - m$$

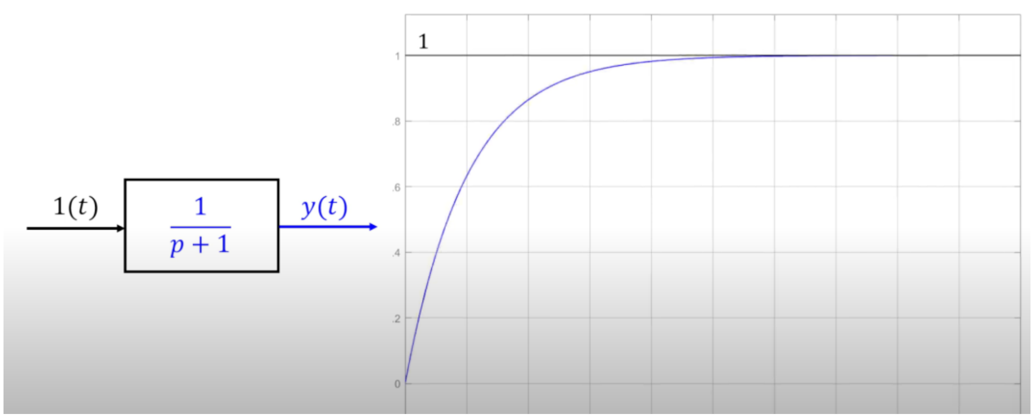
Условие физической реализуемости

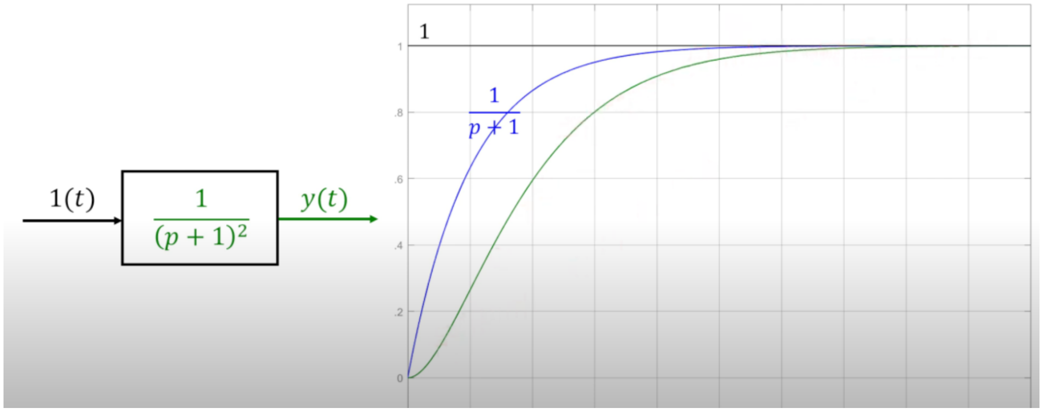
$$n \geq m$$

Система физически реализуема, если порядок производной y больше или равна чем степень полинома сверху.

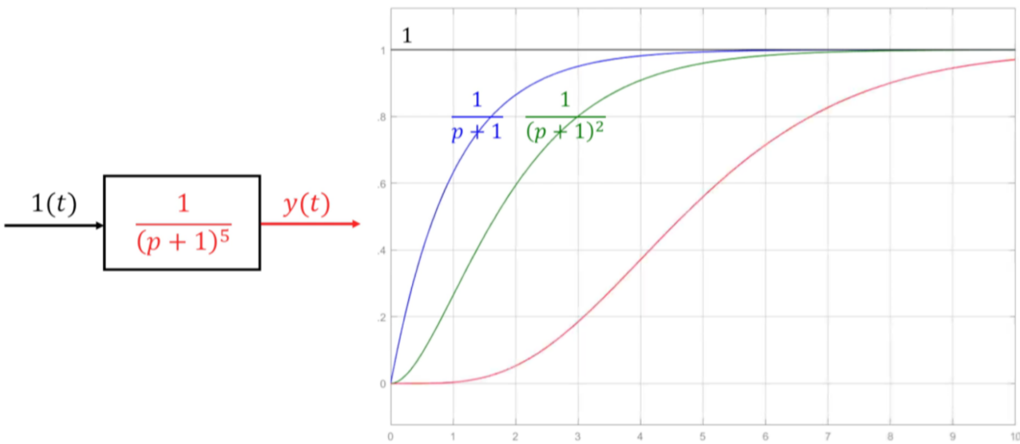
	Порядок	Относительный порядок	Реализуема?
$W(p) = \dfrac{p^2 + 1}{p^3 + 2p + 5}$	3	1	Да
$W(p) = \dfrac{p^2 - p}{p^2 + 2}$	2	0	Да
$W(p) = \dfrac{p^3 + 2p^2 + 7}{p^{10}}$	10	7	Да
$W(p) = \dfrac{p^4 + 5}{p^2 + p + 1}$	4	-2	Нет

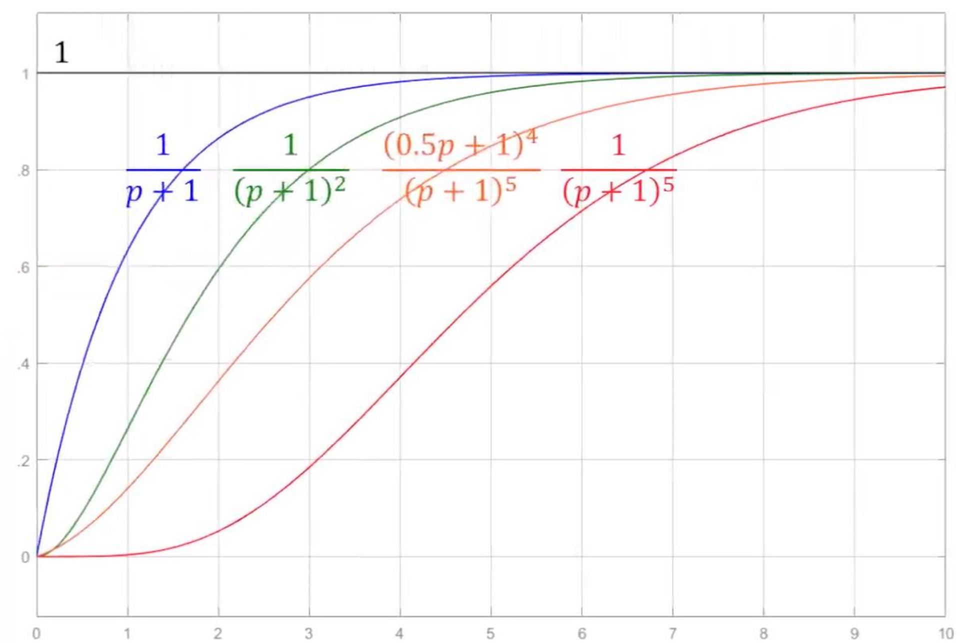




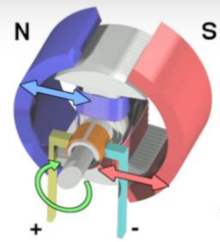


Процесс будет более инерционным





Чем больше динамический порядок,
тем более «инерционной» является система



Упрощённая модель
$(L = 0)$

«Полная» модель

$$\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR}\omega = \frac{k_m}{JR}U$$

$$\frac{L}{R}\ddot{\omega} + \dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR}\omega = \frac{k_m}{JR}U$$

$U \xrightarrow{\text{мгновенно}} I$

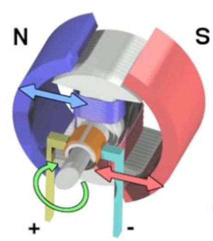
$I \xrightarrow{\text{мгновенно}} M$

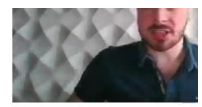
$M \xrightarrow{\text{постепенно}} \omega$

$U \xrightarrow{\text{постепенно}} I$

$I \xrightarrow{\text{мгновенно}} M$

$M \xrightarrow{\text{постепенно}} \omega$





Сверхупрощённая модель
$(L = 0$ и $J = 0)$

Упрощённая модель
$(L = 0)$

$$\omega = \frac{1}{k_e}U$$

$$\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR}\omega = \frac{k_m}{JR}U$$

$U \xrightarrow{\text{мгновенно}} I$

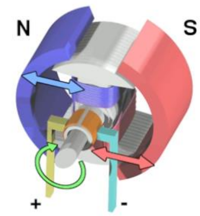
$I \xrightarrow{\text{мгновенно}} M$

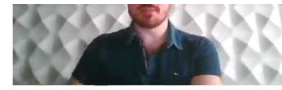
$M \xrightarrow{\text{мгновенно}} \omega$

$U \xrightarrow{\text{мгновенно}} I$

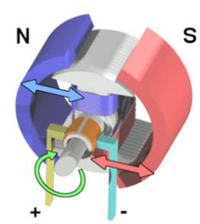
$I \xrightarrow{\text{мгновенно}} M$

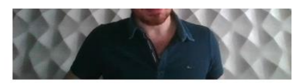
$M \xrightarrow{\text{постепенно}} \omega$





Сверхупрощённая модель ($L = 0$ и $J = 0$)	Упрощённая модель ($L = 0$)	«Полная» модель
$\omega = \frac{1}{k_e} U$	$\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR}\omega = \frac{k_m}{JR} U$	$\frac{L}{R}\ddot{\omega} + \dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR}\omega = \frac{k_m}{JR} U$
Без учёта инерции	С учётом механической инерции (масса)	С учётом инерции механической (масса) и электромагнитной (индуктивность)





Сверхупрощённая модель ($L = 0$ и $J = 0$)	Упрощённая модель ($L = 0$)	«Полная» модель
$\omega = \frac{1}{k_e} U$	$\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR}\omega = \frac{k_m}{JR} U$	$\frac{L}{R}\ddot{\omega} + \dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR}\omega = \frac{k_m}{JR} U$
$W(p) = \frac{1}{k_e}$	$W(p) = \dfrac{\frac{k_m}{JR}}{p + \frac{k_m k_e}{JR}}$	$W(p) = \dfrac{\frac{k_m}{JR}}{\left(\frac{L}{R}\right)p^2 + p + \frac{k_m k_e}{JR}}$

Если условие физической реализуемости нарушается

$$W(p) = \frac{p^4 + 5}{p^2 + p + 1} \qquad 4 > 2$$

то такая система *как бы* имеет «анти-инерцию»:
выход системы *как бы* зависит от будущих значений входа

Форма В-В

Вход u → $\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u$ → Выход y

(одно уравнение n-го порядка)

↓ Добавили переменные

Форма В-С-В

Вход u → Выход y

Состояния: x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 u \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 u \end{cases}$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

(n уравнений первого порядка)

Матричная запись

Вход u → Выход y

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

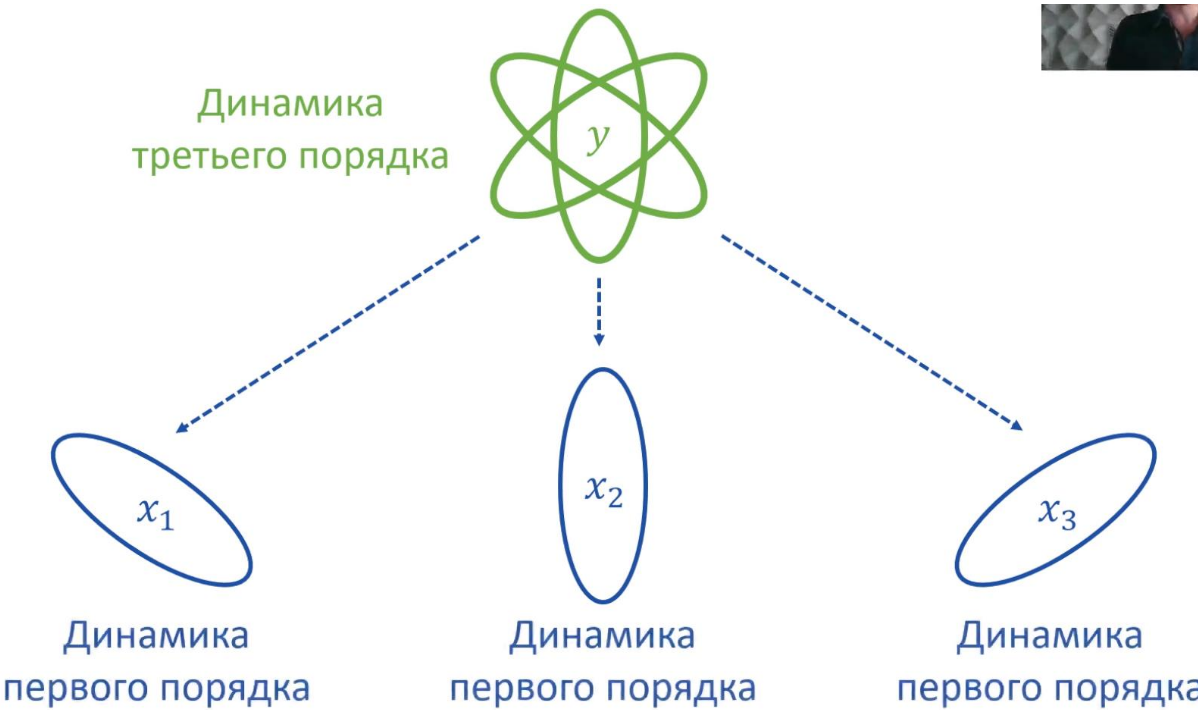
Компактная матричная запись

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ — вектор состояния

Вход u → Выход y

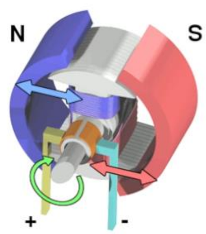
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Можно свести любое движение к изучению матрицы A, B, C.



Пример:

«Полная» модель ДПТ



Форма В-В

Вход: U — напряжение

$$\frac{L}{R}\dddot{\theta} + \ddot{\theta} + \frac{k_m k_e}{JR}\dot{\theta} = \frac{k_m}{JR}U$$

Выход: θ — угол поворота

Форма В-С-В

Вход: U — напряжение

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \dfrac{k_m}{J} I \\ \dot{I} = -\dfrac{k_e}{L}\omega - \dfrac{R}{L} I + \dfrac{1}{L} U \end{cases} \qquad y = \theta$$

Выход: θ — угол поворота

Состояния: θ, ω, I

(угол поворота, угловая скорость, сила тока)

Вход

U — напряжение

Матричная запись

$$\begin{bmatrix}\dot\theta\\ \dot\omega\\ \dot I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k_m/J\\ 0 & -k_e/L & -R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1/L\end{bmatrix}U$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ I\end{bmatrix}$$

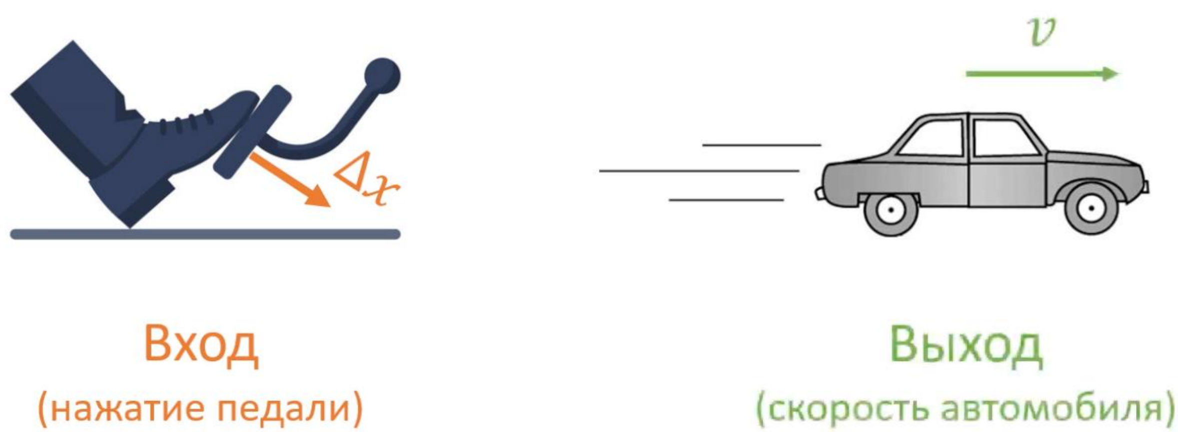
Выход

θ — угол поворота

Компактная матричная запись

$$\begin{cases}\dot x = Ax + Bu\\ y = Cx\end{cases} \quad x = \begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ I\end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k_m/J\\ 0 & -k_e/L & -R/L\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1/L\end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Пример вход-выход



Пример ВСВ:

Одну и ту же систему можно представить в форме В-С-В бесконечным числом способов

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 7\dot{u} + 10u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}10 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}u$$

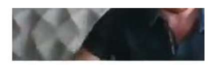
$$y = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}10\\ 7\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

... ...

Дело в том, что можно по-разному выбрать переменные x_1 и x_2 через которые будут записаны уравнения



Исходная система

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu\\ y = Cx\end{cases}$$

Замена базиса

$$\hat{x} = P^{-1}x$$

Новый базис

Координаты вектора в новом базисе

$$\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}| & | & |\\ v_1 & v_2 & v_3\\ | & | & |\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Координаты вектора в стандартном базисе

Исходная система
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Замена базиса
$$\hat{x} = P^{-1}x$$

Подставили $x = P\hat{x}$ в исходную систему
$$\begin{cases} P\dot{\hat{x}} = AP\hat{x} + Bu \\ \quad y = CP\hat{x} \end{cases}$$

Перенесли матрицу P в правую часть
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \\ y = CP\hat{x} \end{cases}$$

Получили ту же систему, но в новом базисе
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \hat{A} = P^{-1}AP, \quad \hat{B} = P^{-1}B, \quad \hat{C} = CP$$

Вход и выход u и y остались неизменны, поменялось только состояние x.

Подобные системы
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \cong \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

Существует P такая, что
$$\hat{A} = P^{-1}AP \qquad \hat{B} = P^{-1}B \qquad \hat{C} = CP$$

Подобные матрицы

Двигатель постоянного тока в разных базисах

$$\begin{bmatrix}\dot\theta\\ \dot\omega\\ \dot I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k_m/J\\ 0 & -k_e/L & -R/L\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ I\end{bmatrix}}_{\text{Угол поворота, угловая скорость, сила тока}} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1/L\end{bmatrix}U \qquad \theta = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ I\end{bmatrix}$$

$$\cong$$

$$\begin{bmatrix}\dot\theta\\ \dot M\\ \dot\varepsilon_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -1/k_e\\ 0 & -R/L & k_m/L\\ 0 & -k_e/J & 0\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\theta\\ M\\ \varepsilon_i\end{bmatrix}}_{\text{Угол поворота, вращающий момент, ЭДС индукции}} + \begin{bmatrix}0\\ k_m/L\\ 0\end{bmatrix}U \qquad \theta = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ M\\ \varepsilon_i\end{bmatrix}$$

Переход от В-В к В-С-В через канонические формы

$$\dddot y + a_2\ddot y + a_1\dot y + a_0 y = b_2\ddot u + b_1\dot u + b_0 u$$

Каноническая управляемая форма

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}b_0 & b_1 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Каноническая наблюдаемая форма

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$\dddot y + a_2\ddot y + a_1\dot y + a_0 y = b_2\ddot u + b_1\dot u + b_0 u$$

Фробениусова форма матрицы

$$W(p) = \frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0} = \frac{\beta_1\gamma_1}{p-\lambda_1} + \frac{\beta_2\gamma_2}{p-\lambda_2} + \frac{\beta_3\gamma_3}{p-\lambda_3}$$

Диагональная форма

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Переход от В-С-В к В-В

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Запишем с помощью оператора дифференцирования:

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & p - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & p - a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & p - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & p - a_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{1 \times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & p - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & p - a_{33} \end{bmatrix}^{-1}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{3 \times 1} u$$

$$y = \underbrace{W(p)}_{1 \times 1} u$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

$$(pI)x = Ax + Bu$$

$$(pI - A)x = Bu$$

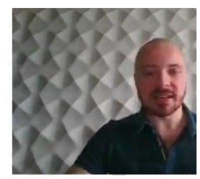
$$x = (pI - A)^{-1}Bu$$

$$y = C(pI - A)^{-1}Bu$$

$$y = W(p)u$$

$$\boxed{W(p) = C(pI - A)^{-1}B}$$

Пример переходов между формами



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; W(p) = C(pI - A)^{-1}B$$

$$W(p) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p-1 & -2 \\ 3 & p+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \det \begin{bmatrix} p-1 & -2 \\ 3 & p+4 \end{bmatrix} = p^2 + 3p + 2$$

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p+4 & 2 \\ -3 & p-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} \cdot (7p + 10)$$

$$W(p) = \frac{7p + 10}{p^2 + 3p + 2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 7\dot{u} + 10u$$

Пример переходов между формами

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 7\dot{u} + 10u \qquad W(p) = \frac{7p + 10}{p^2 + 3p + 2}$$

Каноническая управляемая

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Каноническая наблюдаемая

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{7p + 10}{p^2 + 3p + 2} = \frac{3}{p+1} + \frac{4}{p+2} \quad \Rightarrow$$

Диагональная

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Proper и Strictly Proper

Proper ($m \le n$)

$$W(p) = \frac{b_3p^3 + b_2p^2 + b_1p + b_0}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0}$$

Strictly Proper ($m < n$)

$$W(p) = \frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0}$$

Proper ($m \le n$)

$$W(p) = \frac{b_3p^3 + b_2p^2 + b_1p + b_0}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0}$$

($d = b_3$)

Целая часть

Остаток

$$W(p) = d + \underbrace{\frac{\boxed{b'_2p^2 + b'_1p + b'_0}}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0}}_{\text{Strictly proper}}$$

Strictly Proper $(m < n)$

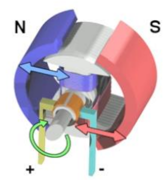
$$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \xrightarrow{\text{В-С-В}} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Proper $(m \leq n)$

$$W(p) = \frac{b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \xrightarrow{\text{В-С-В}} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$D = [d]_{1\times 1}$$

Физический пример



Вращаем выключенный двигатель руками → В нём возникает ток и противодействующий нашему усилию момент силы → На ротор действует суммарный момент силы

Физические уравнения

$$\xrightarrow[\text{Приложенный вращающий момент}]{M} \boxed{\begin{cases} M + M_{el} = J\dot{\omega} \\ M_{el} = k_m I \\ I = \dfrac{-k_e\omega - L\dot{I}}{R} \end{cases} \quad y = M + M_{el}} \xrightarrow[\text{Суммарный вращающий момент}]{M + M_{el}}$$

Форма Вход-Состояние-Выход

$$\xrightarrow[\text{Приложенный вращающий момент}]{M} \boxed{\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{I} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & k_m/J \\ -k_e/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/J \\ 0 \end{bmatrix} M \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & k_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + [1] M \end{aligned}} \xrightarrow[\text{Суммарный вращающий момент}]{M + M_{el}}$$

Форма Вход-Состояние-Выход

$$\begin{bmatrix}\dot{\omega}\\ \dot{I}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & k_m/J\\ -k_e/L & -R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/J\\ 0\end{bmatrix}M$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & k_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ I\end{bmatrix} + [1]M$$

Компактная запись

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu\\ y = Cx + Du\end{cases}$$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{p^2 + \frac{R}{L}p}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{k_m k_e}{JL}} = 1 - \frac{\frac{k_m k_e}{JL}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{k_m k_e}{JL}}$$

Многоканальные системы

Одноканальная система

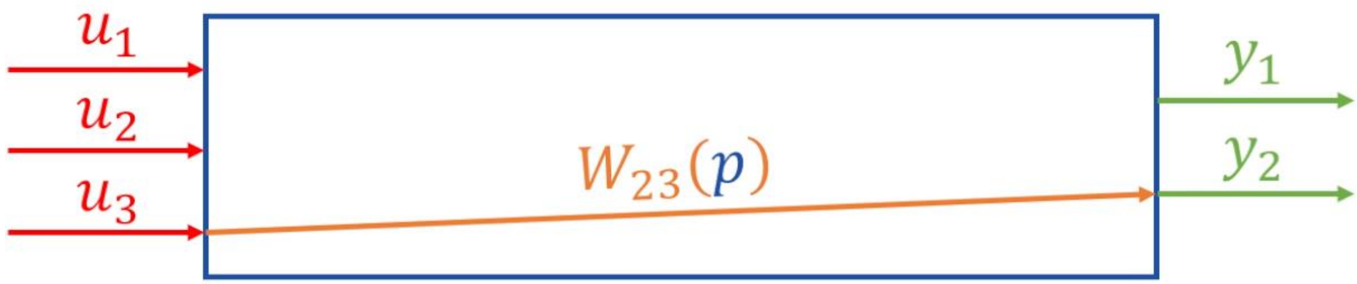
Многоканальная система

Вместо передаточной функции мы получим передаточную матрицу

Передаточная матрица

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}W_{11}(p) & W_{12}(p) & W_{13}(p)\\ W_{21}(p) & W_{22}(p) & W_{23}(p)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}$$

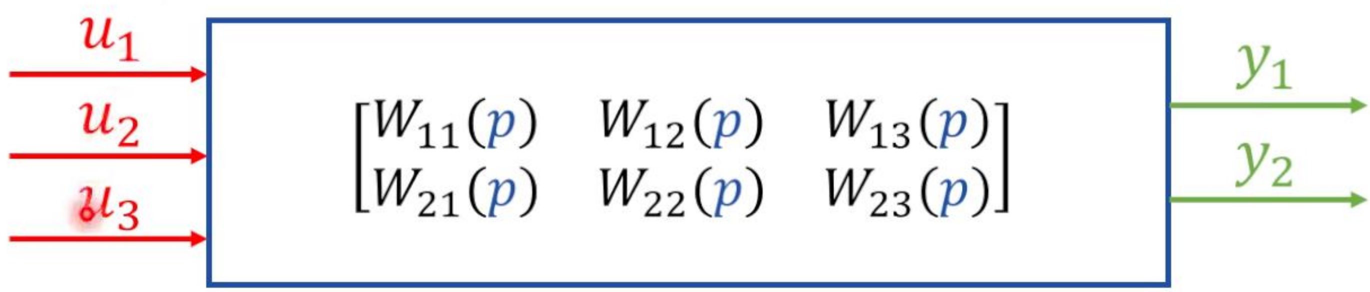
Каждый элемент передаточной матрицы отвечает за свою связь



Передаточная матрица

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) & W_{13}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) & W_{23}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Форма В-В для многоканальной системы



Форма В-С-В для многоканальной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Вектор входов

Вектор выходов

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Форма В-С-В для многоканальной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Число состояний} & \text{Число входов} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Число состояний} \\ \\ \text{Число выходов} \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_{41} & b_{42} & b_{43} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & d_{21} & d_{22} & d_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

Почти все реальные системы - многоканальные