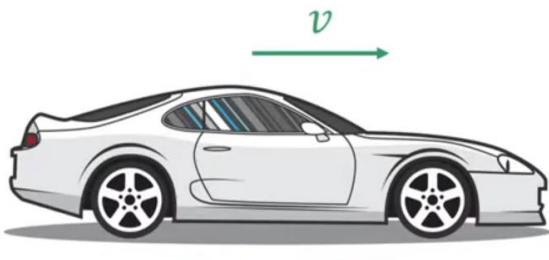


Критерий Найквиста и системы с запаздыванием

Мотивирующий пример



Ведомый



Ведущий

Ведущий задаёт эталонную скорость

Ведомый управляет собой с помощью ускорения

$$\dot{v} = u$$

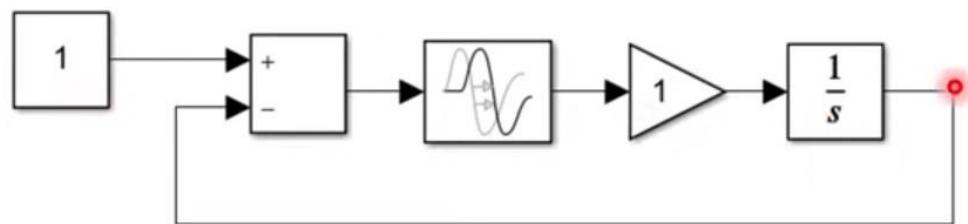
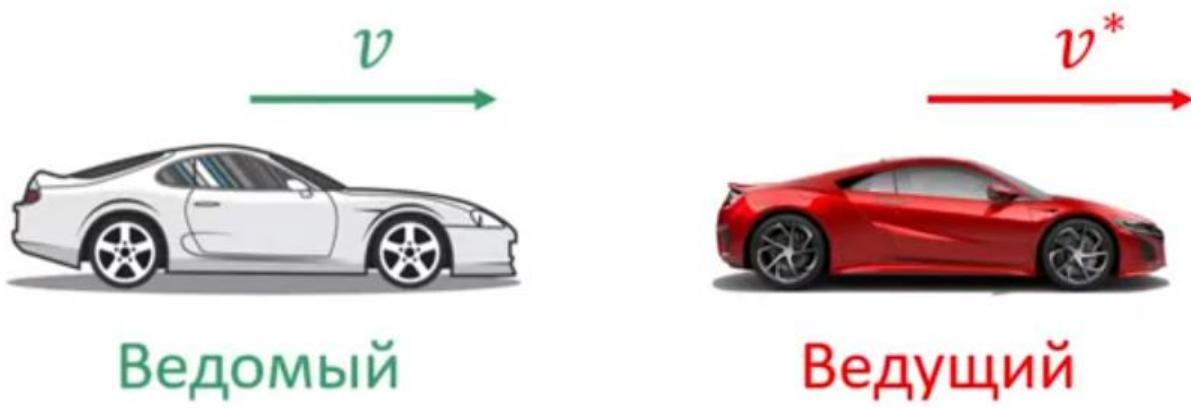
Цель ведомого: ехать с той же скоростью, что и ведущий

$$v \rightarrow v^*$$

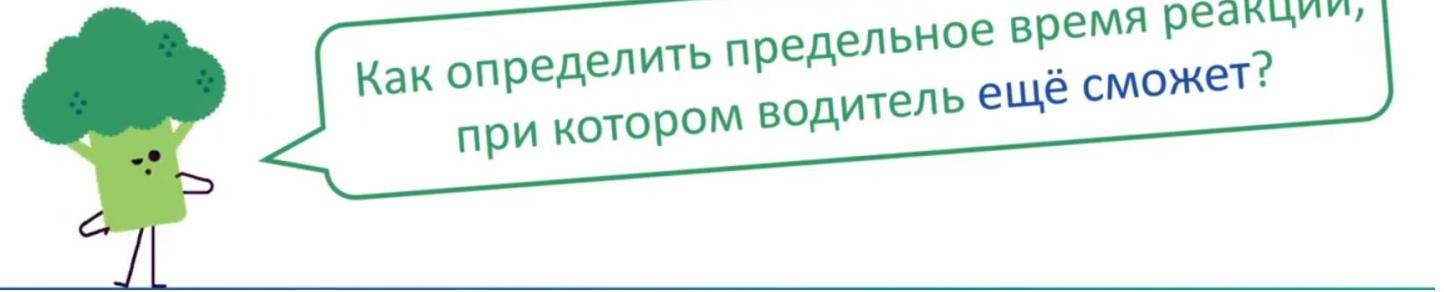
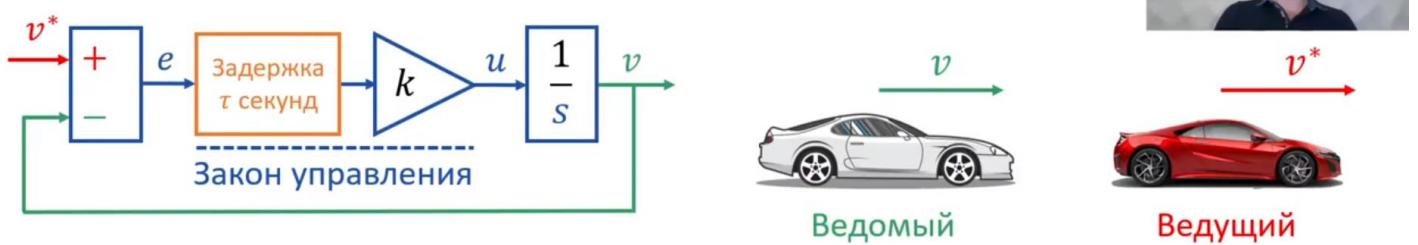
Ведомый использует пропорциональный закон управления

$$u = k(v^* - v)$$

Ведомый не может реагировать мгновенно,
время реакции: τ



Вы легко можете замоделировать
это самостоятельно!



Годограф Найквиста

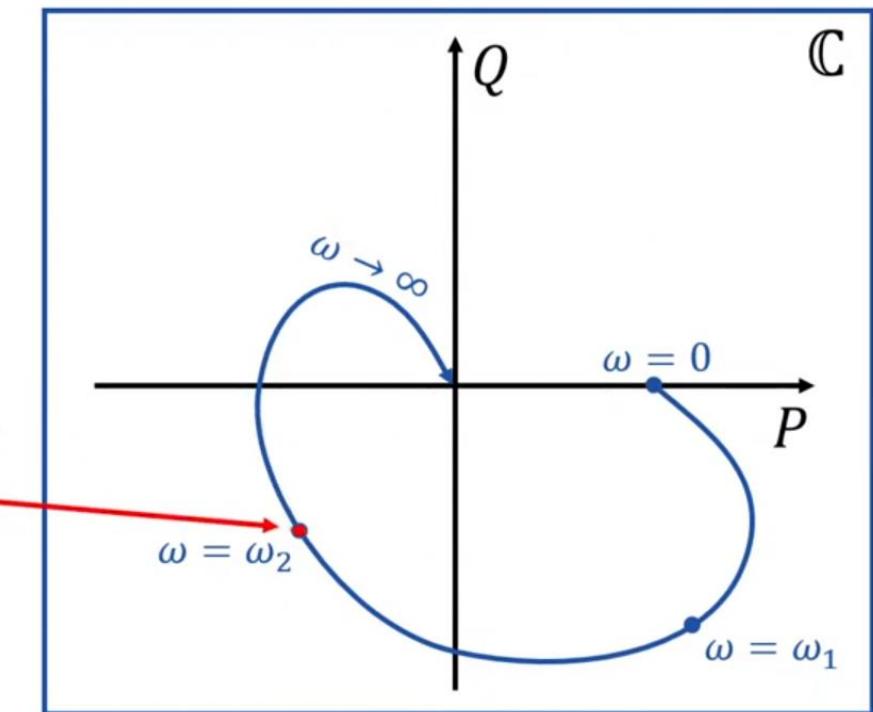
Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Параметрический
график

Точка с координатами

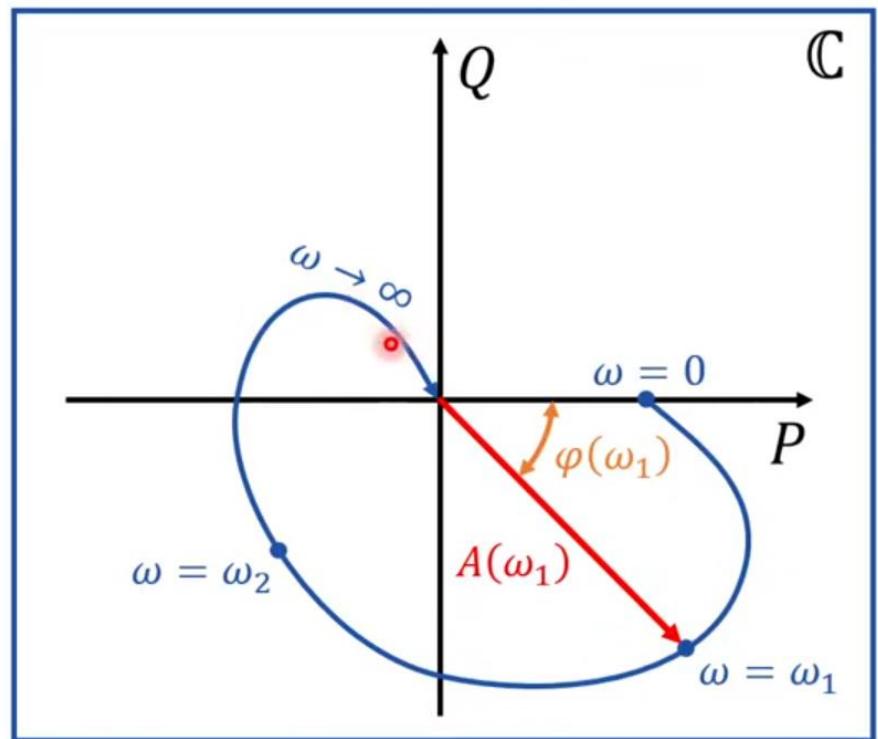
$$P(\omega_2) \text{ и } Q(\omega_2)$$



Частотная передаточная функция

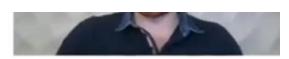
Параметрический график

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

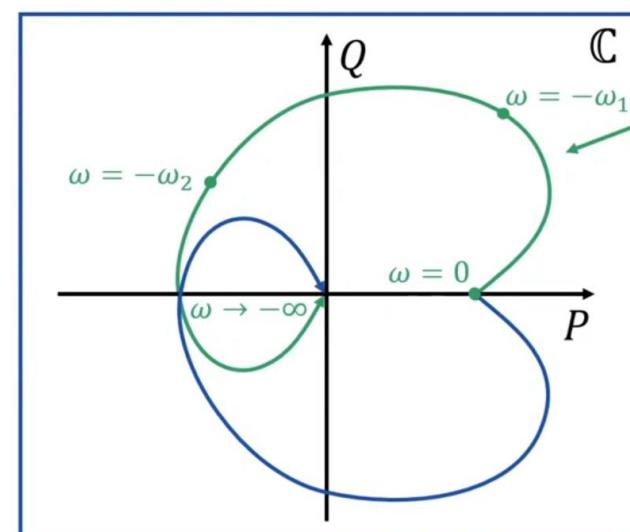


Параметрический график

Частотная передаточная функция



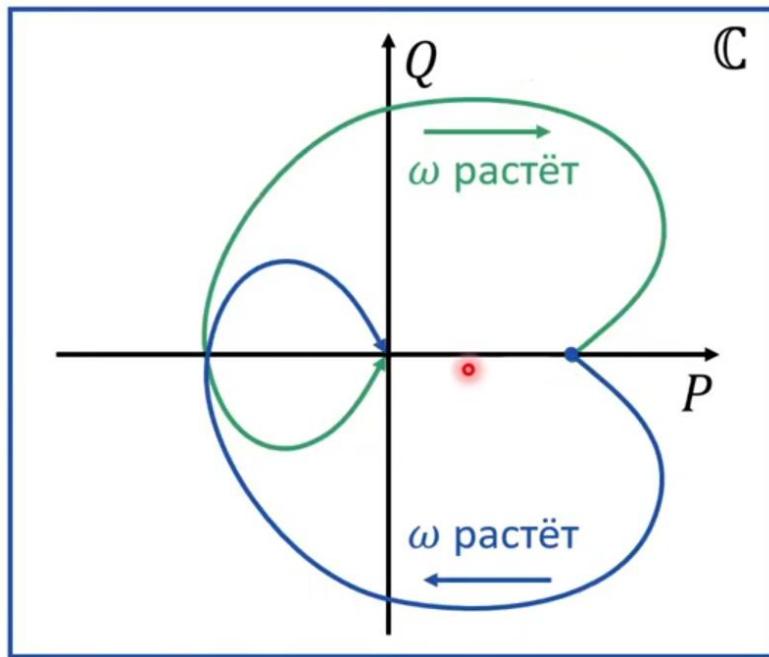
$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$



$$A(-\omega) = A(\omega)$$

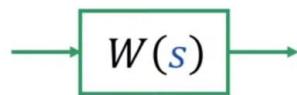
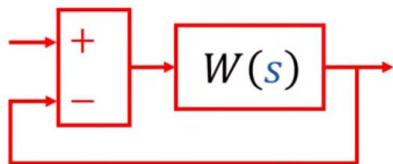
$$\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

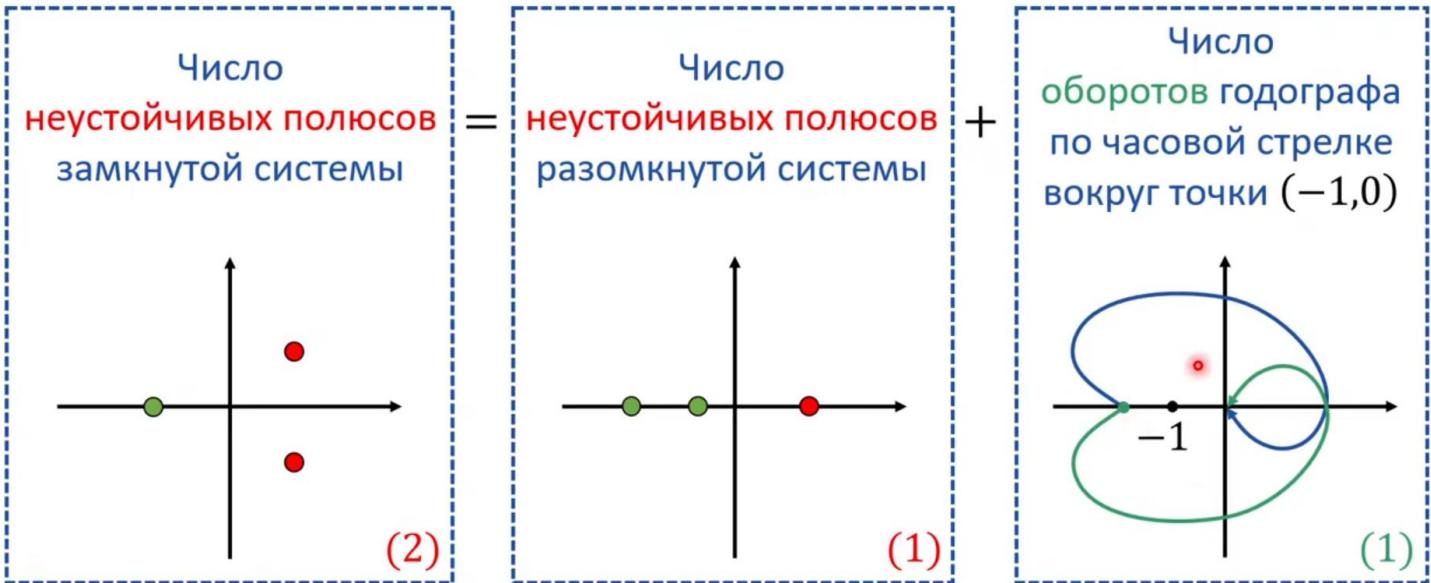
Поэтому
симметрично!



Критерий Найквиста: полная формулировка

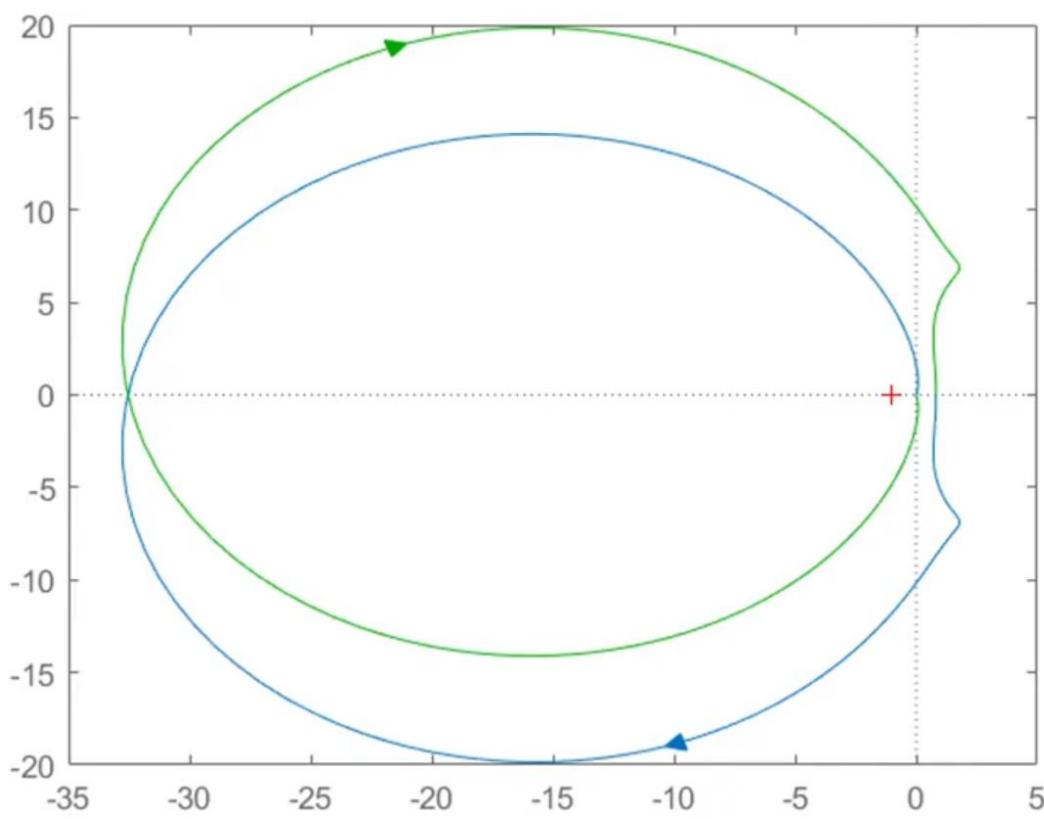
$$\text{Число неустойчивых полюсов замкнутой системы} = \text{Число неустойчивых полюсов разомкнутой системы} + \text{Число оборотов годографа по часовой стрелке вокруг точки } (-1,0)$$



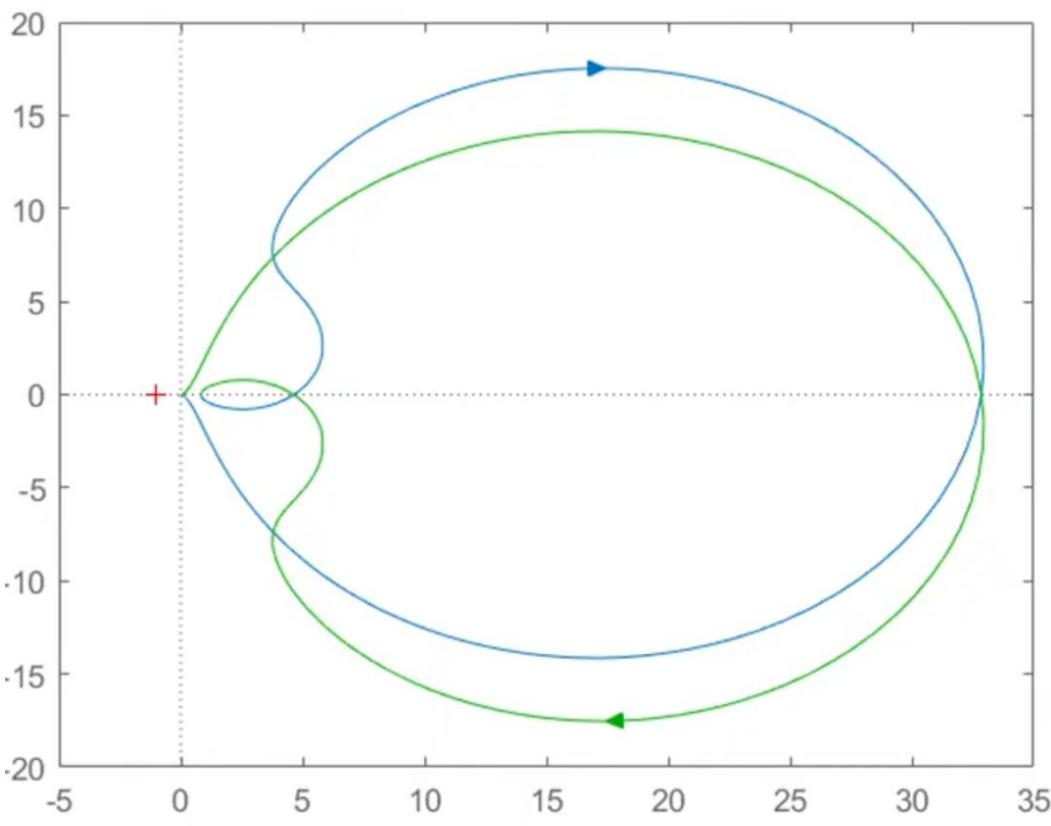


Как посчитать количество оборотов?

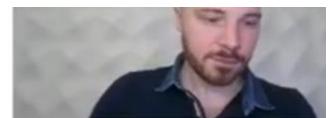
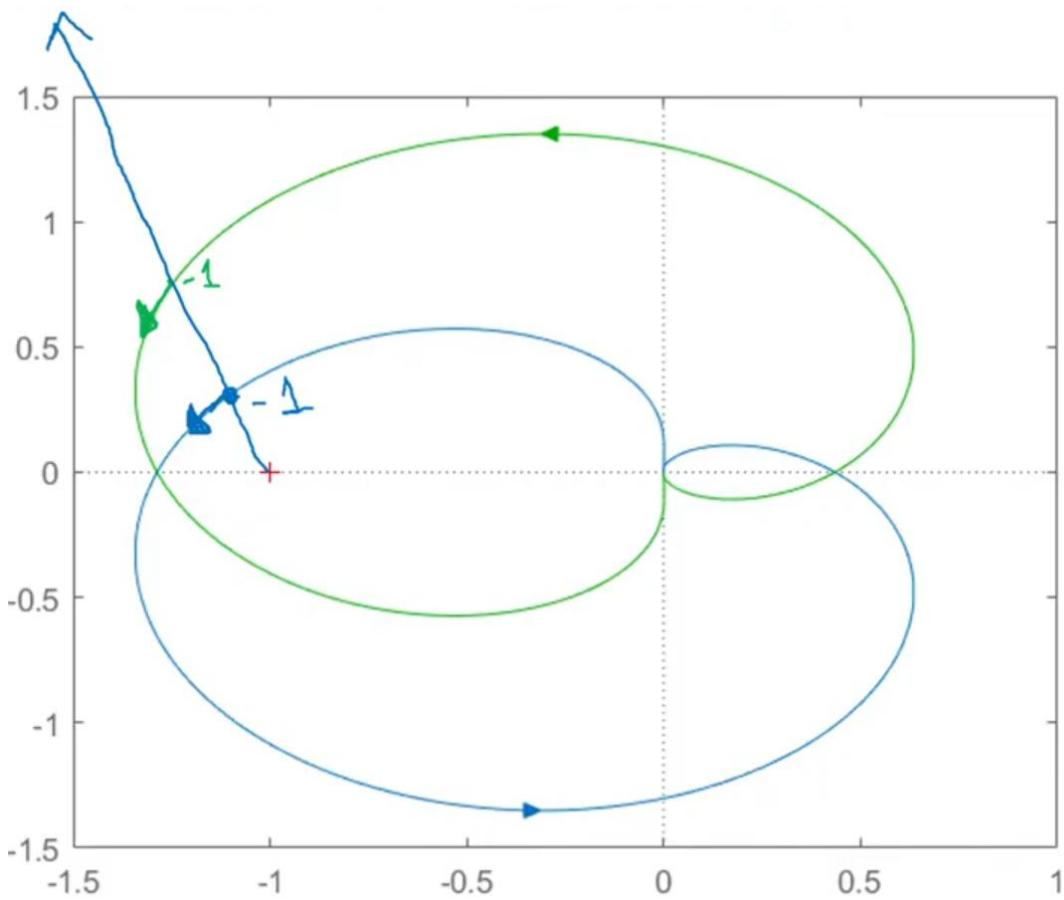
Сколько здесь оборотов по часовой стрелке?



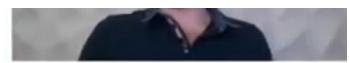
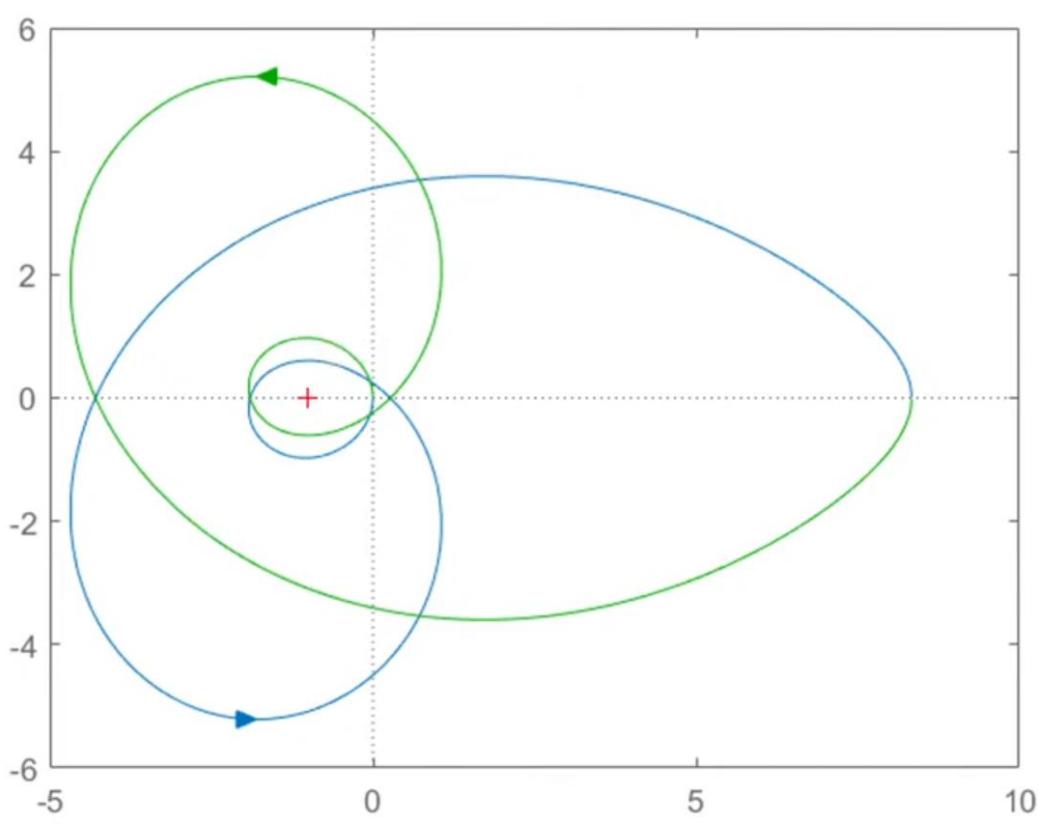
2



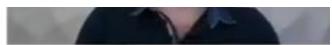
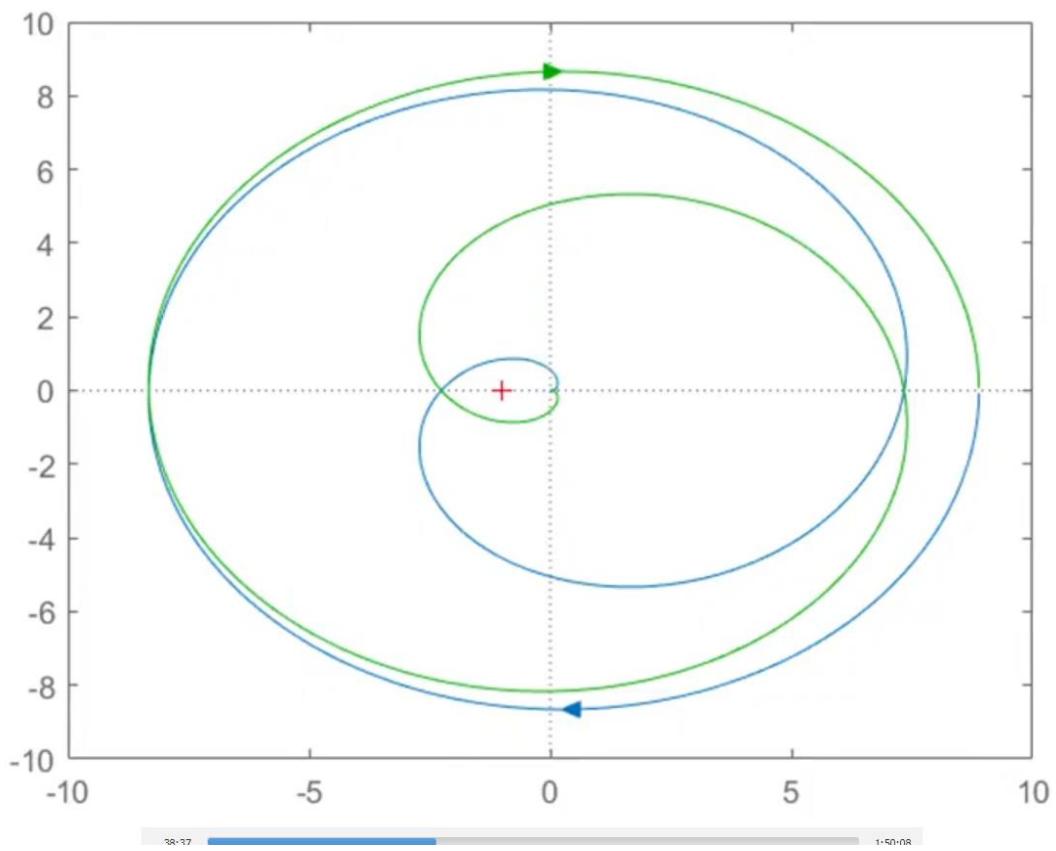
0



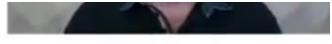
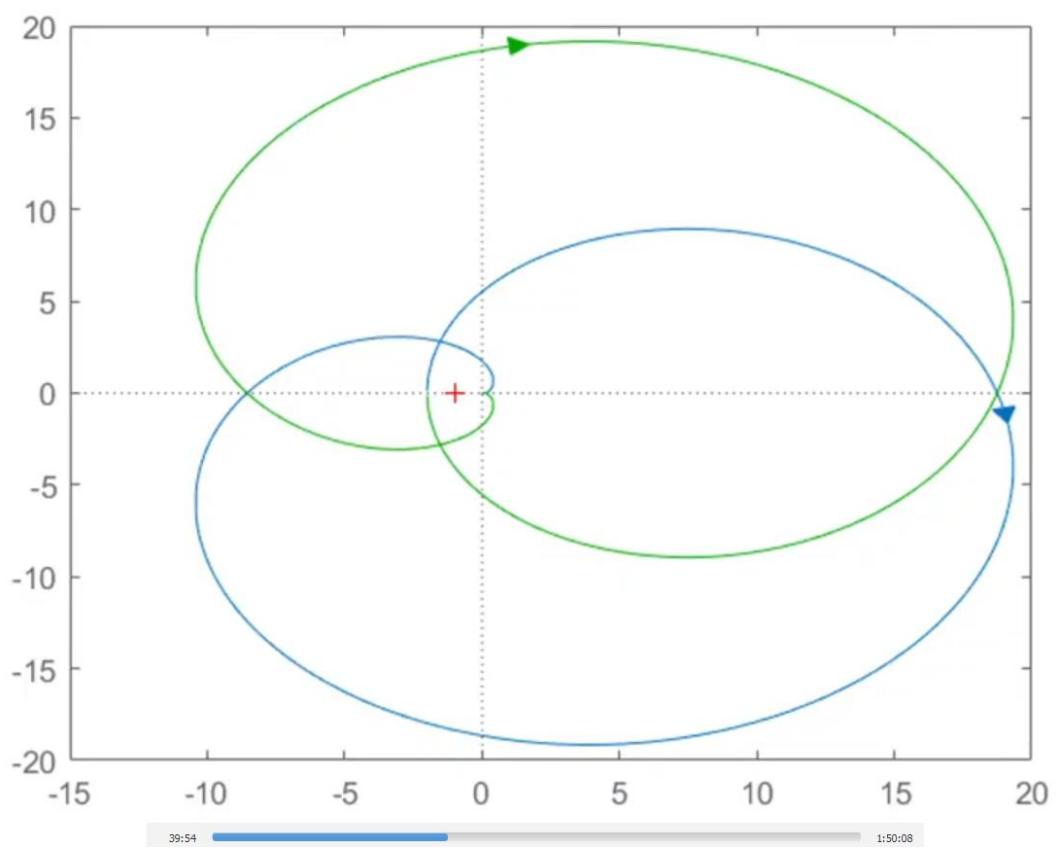
-2



-4

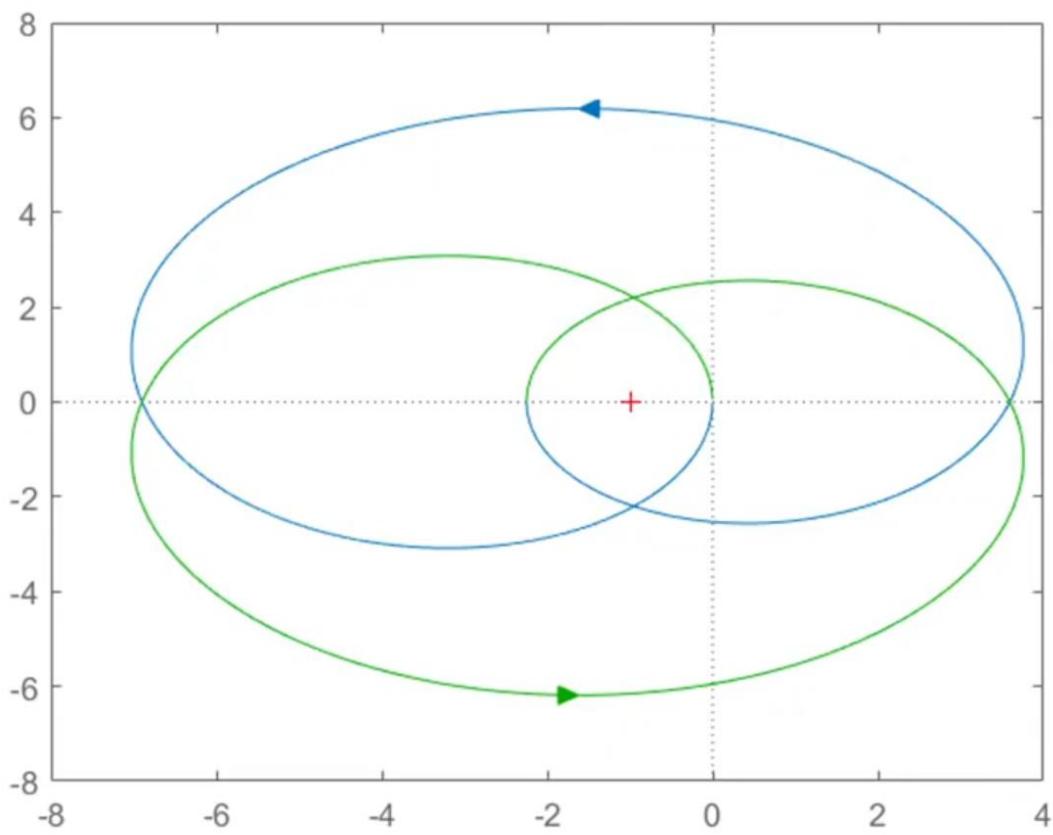


4

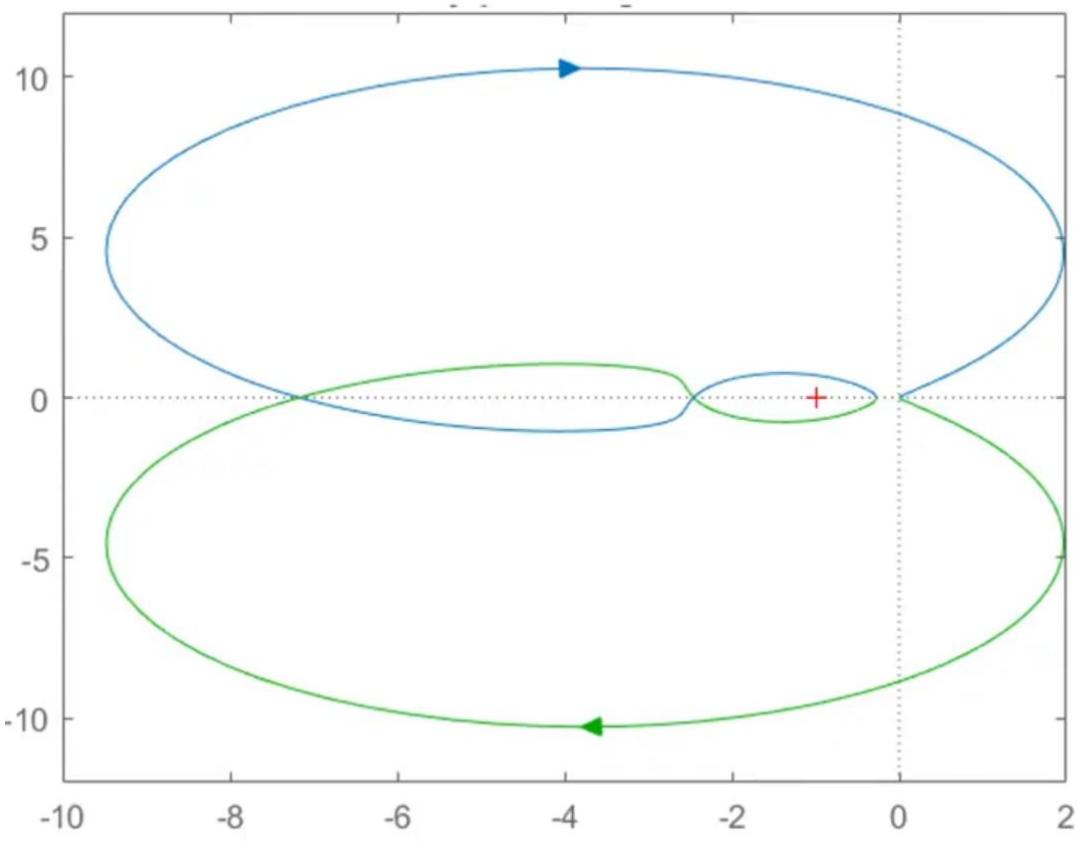


3

39:54 1:50:08

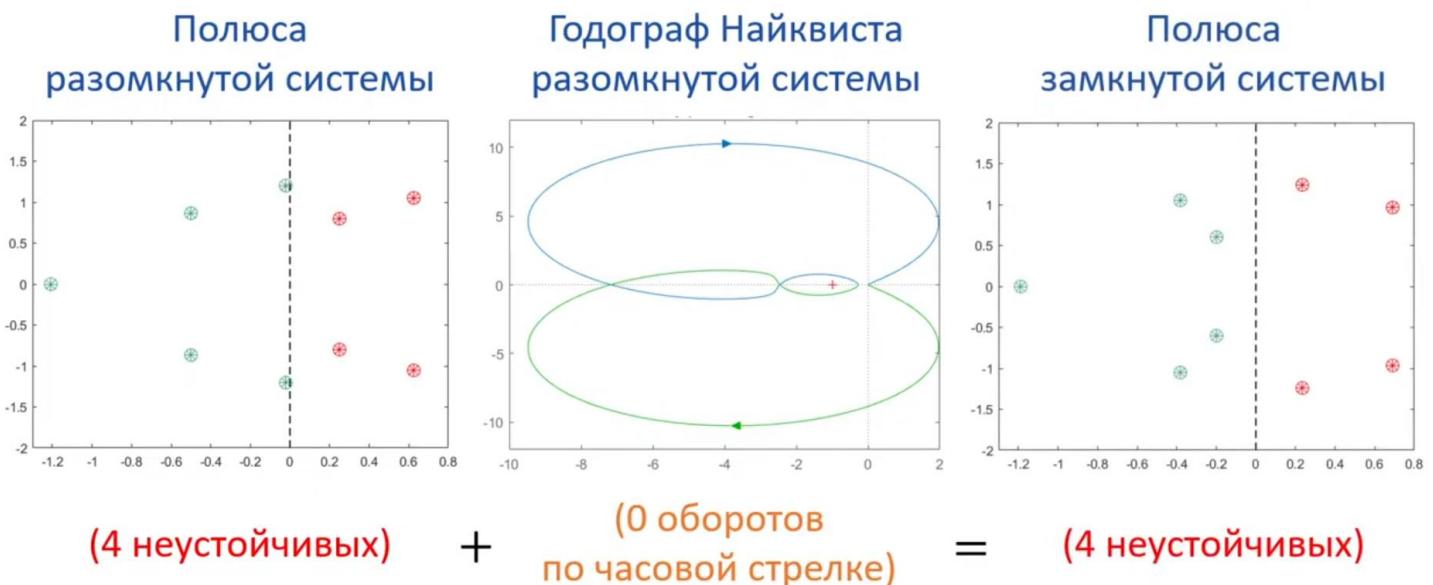
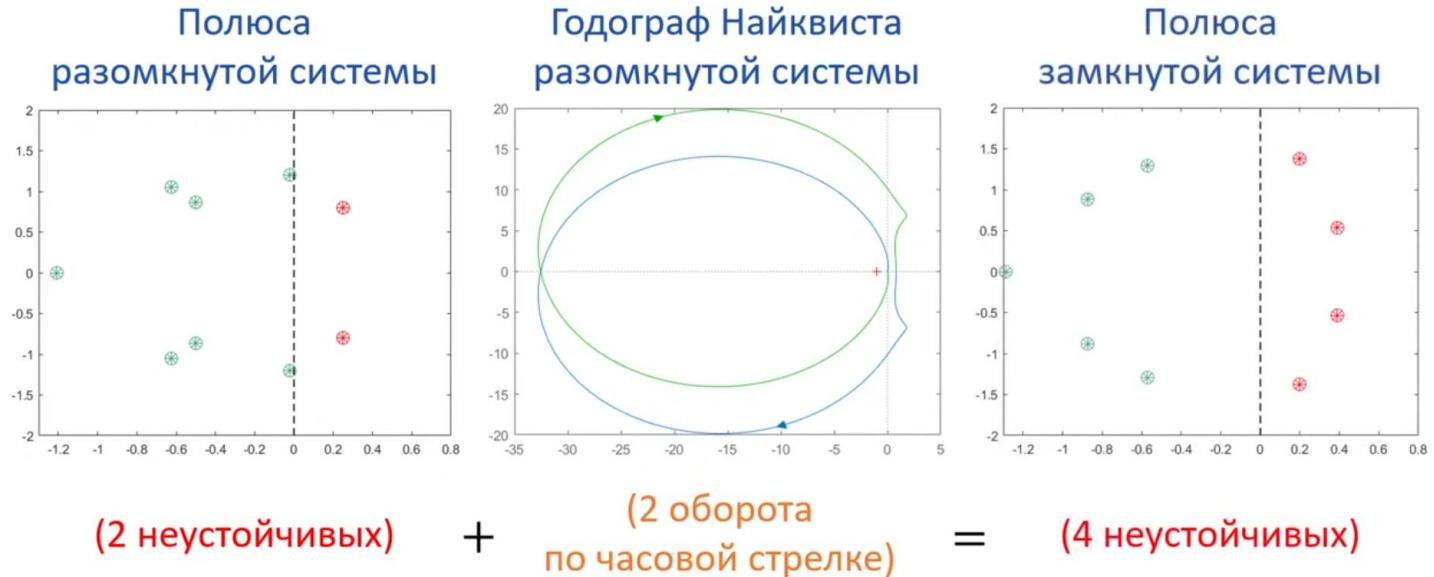


-3

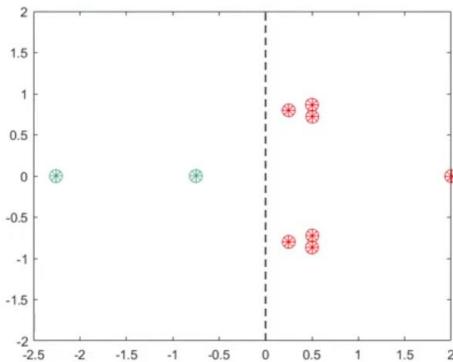


0

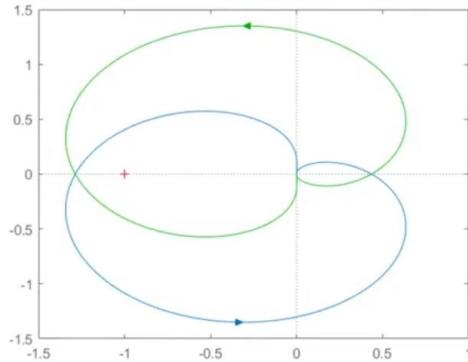
Критерий Найквиста: графические примеры



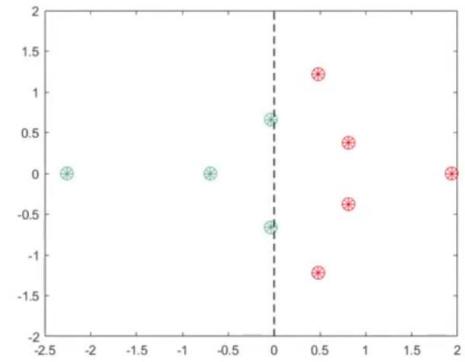
Полюса
разомкнутой системы



Годограф Найквиста
разомкнутой системы



Полюса
замкнутой системы



(7 неустойчивых)

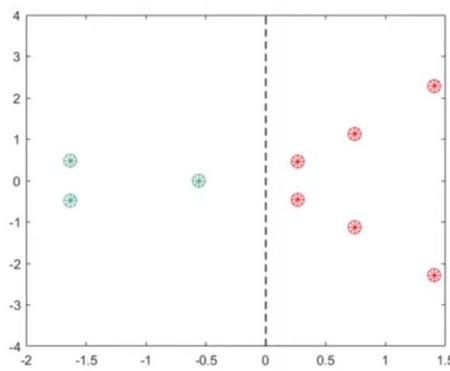
+

(-2 оборота
по часовой стрелке)

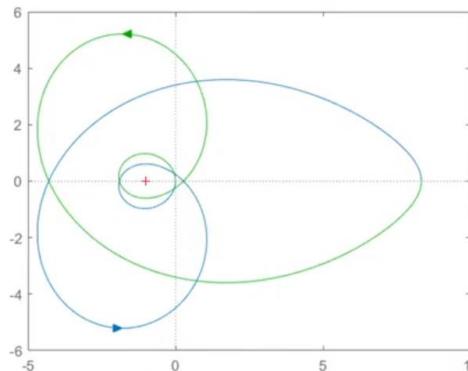
=

(5 неустойчивых)

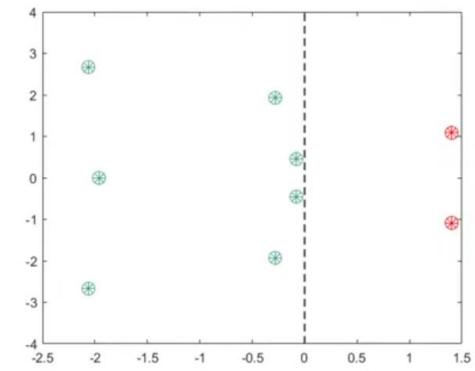
Полюса
разомкнутой системы



Годограф Найквиста
разомкнутой системы



Полюса
замкнутой системы



(6 неустойчивых)

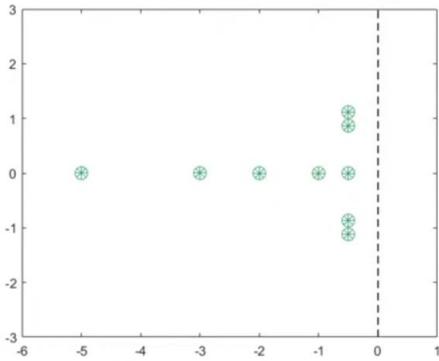
+

(-4 оборота
по часовой стрелке)

=

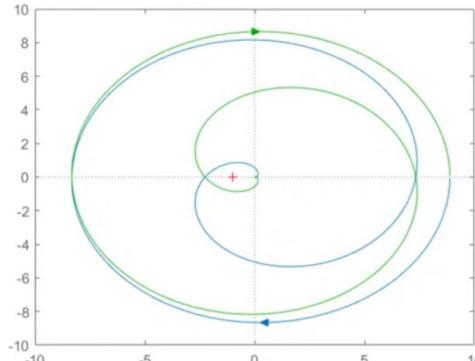
(2 неустойчивых)

Полюса
разомкнутой системы



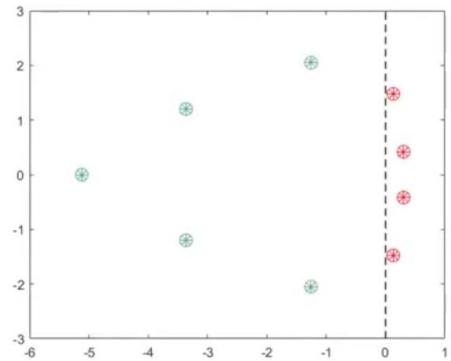
(все устойчивы)

Годограф Найквиста
разомкнутой системы



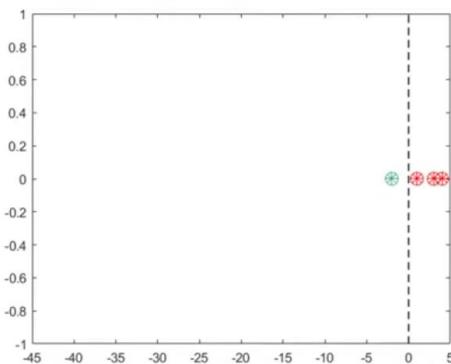
(4 оборота
по часовой стрелке)

Полюса
замкнутой системы



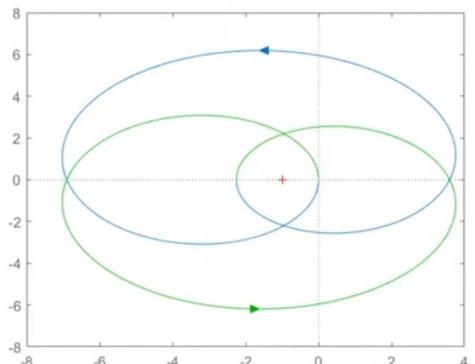
(4 неустойчивых)

Полюса
разомкнутой системы



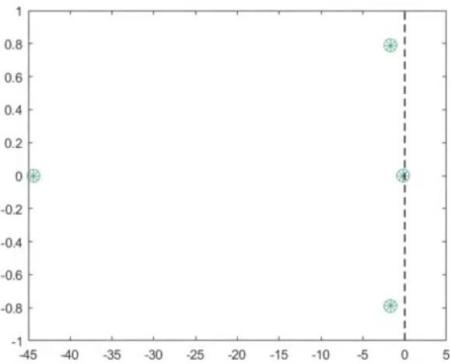
(3 неустойчивых)

Годограф Найквиста
разомкнутой системы



(-3 оборота
по часовой стрелке)

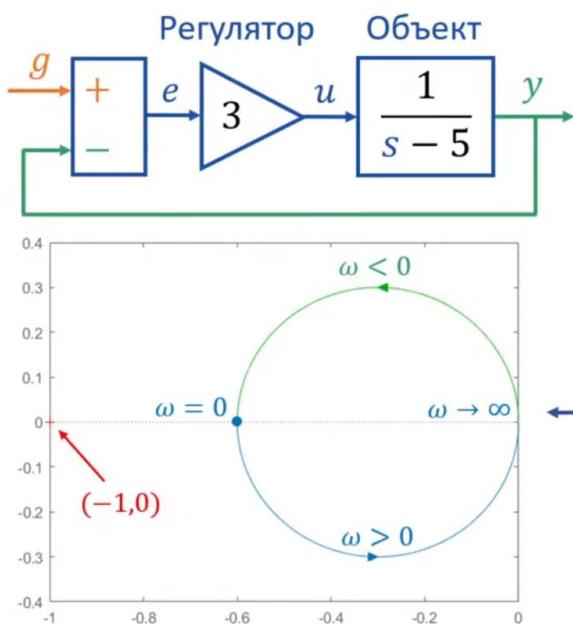
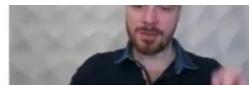
Полюса
замкнутой системы



(все устойчивы)

Четыре простых примера

1. Разомкнутая неустойчива, замкнутая неустойчива

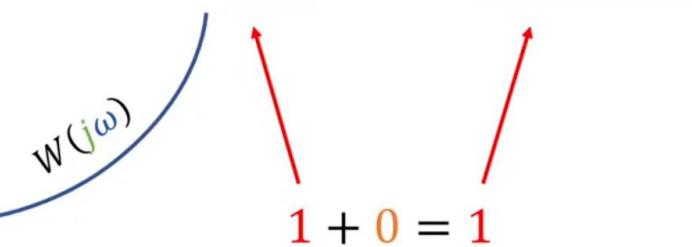
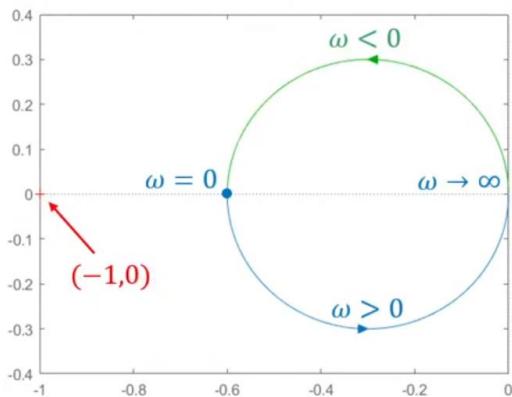


Разомкнутая

$$W(s) = \frac{3}{s - 5}$$

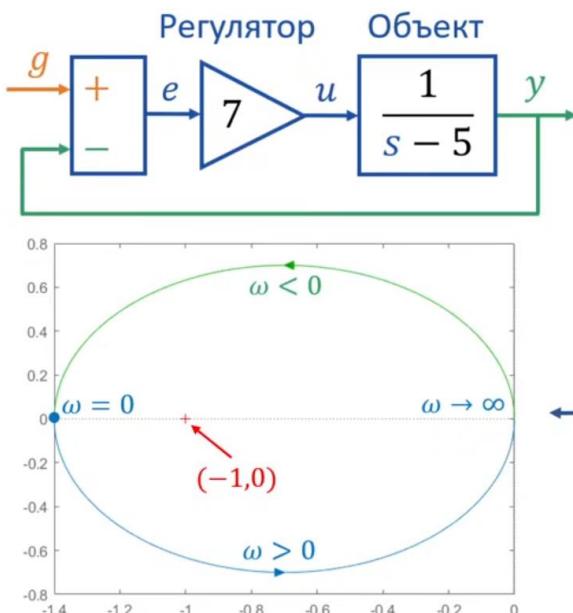
Замкнутая

$$W(s)_{g \rightarrow y} = \frac{3}{s - 2}$$



Годограф не охватывает критическую точку, следовательно число неустойчивых полюсов у разомкнутой и замкнутой систем одинаково

2. Разомкнутая неустойчива, замкнутая устойчива

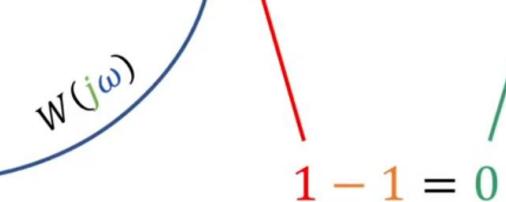
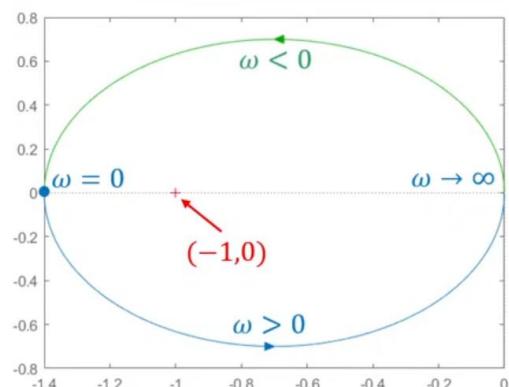


Разомкнутая

$$W(s) = \frac{7}{s - 5}$$

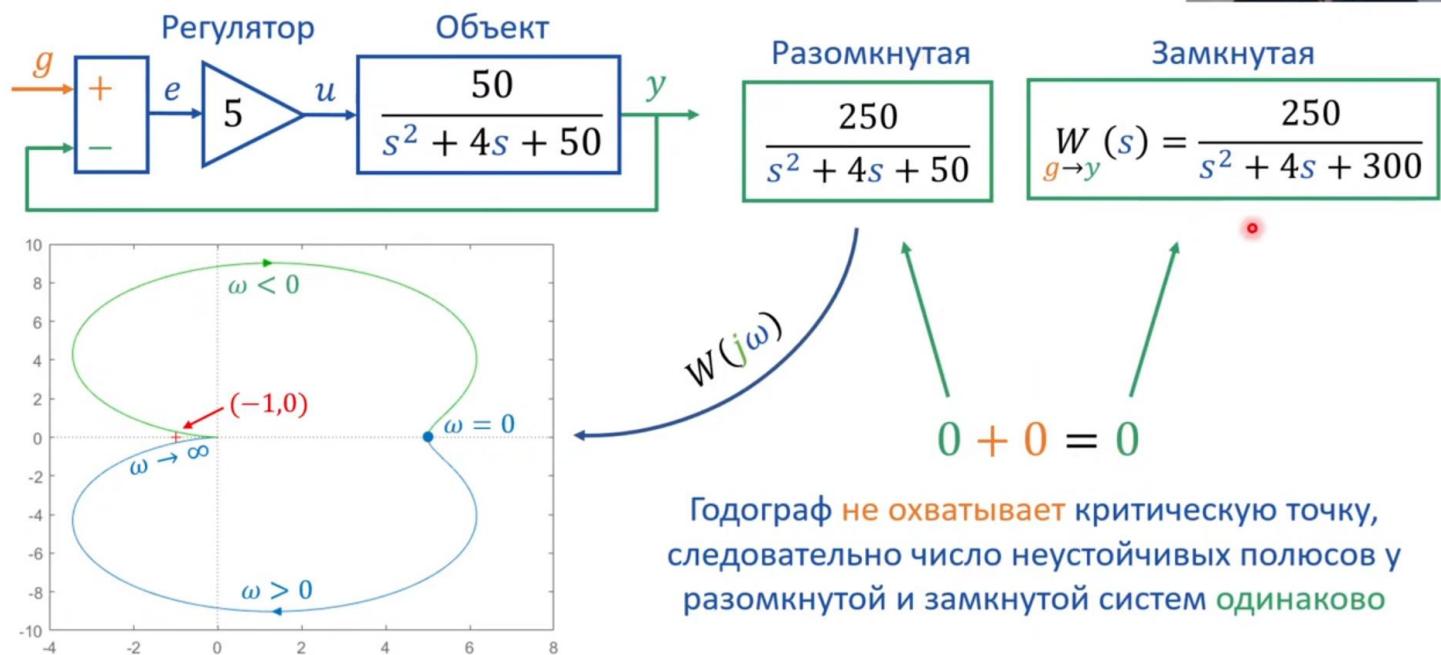
Замкнутая

$$W(s)_{g \rightarrow y} = \frac{7}{s + 2}$$

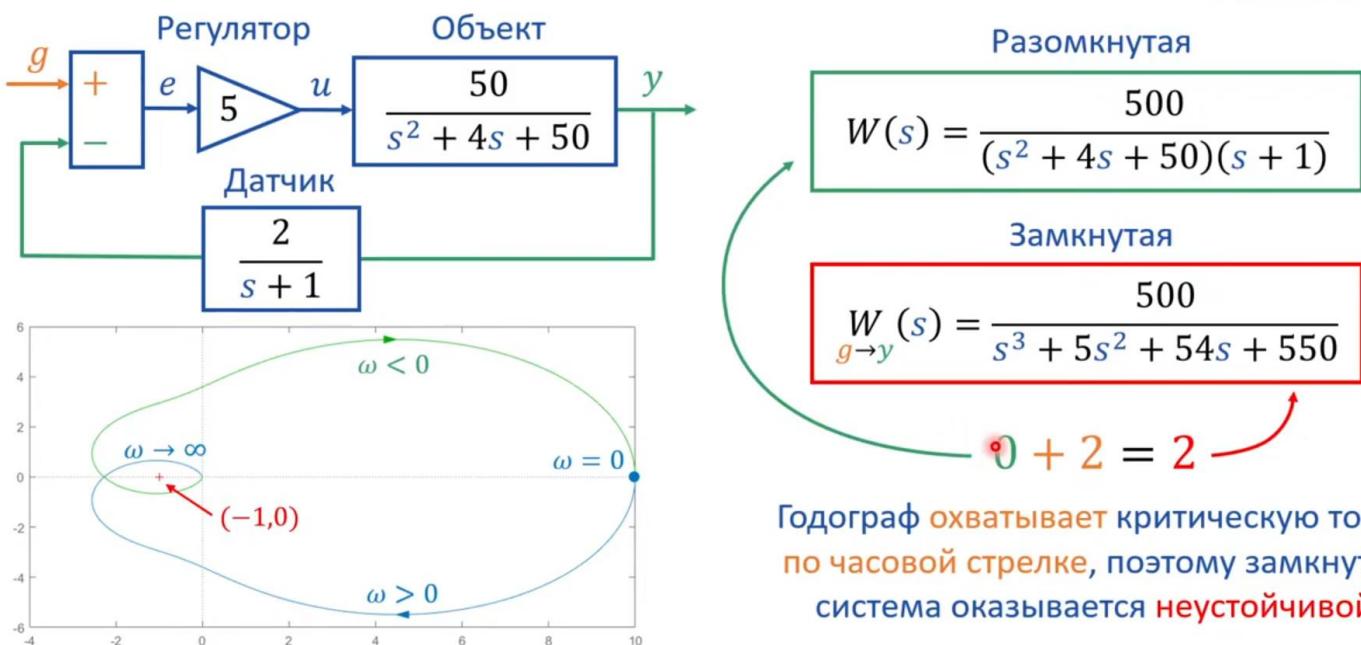
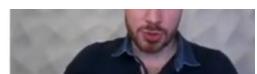


Годограф охватывает критическую точку против часовой стрелки, поэтому замкнутая система первого порядка оказывается устойчивой

3. Разомкнутая устойчива, замкнутая устойчива



4. Разомкнутая устойчива, замкнутая неустойчива



Критерий Найквиста: упрощенная формулировка

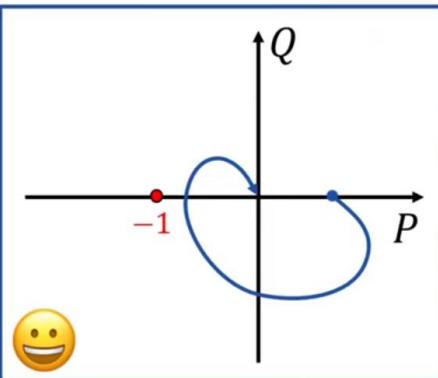
Если разомкнутая система асимптотически устойчива, то охватывание годографом критической точки (-1, 0) происходит только по часовой стрелке.

Простой вариант критерия Найквиста для случая,
когда разомкнутая система асимптотически устойчива

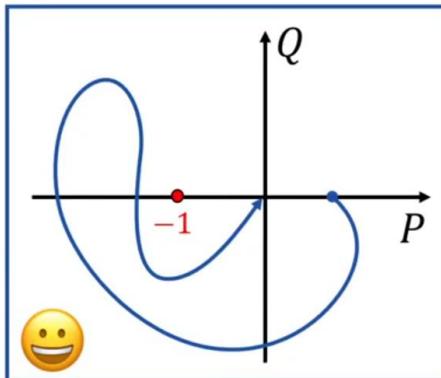
Годограф
не охватывает точку $(-1,0)$ \Rightarrow Замкнутая система
асимптотически устойчива

Годограф
охватывает точку $(-1,0)$ \Rightarrow Замкнутая система
неустойчива

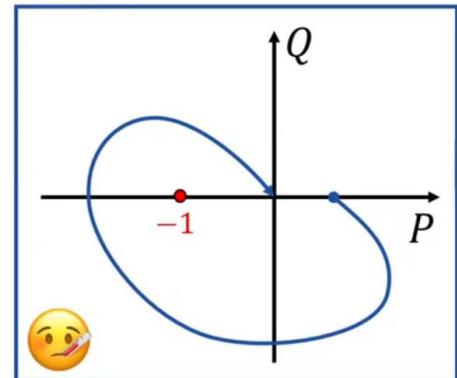
Простой вариант критерия Найквиста для случая,
когда разомкнутая система асимптотически устойчива



Замкнутая система
будет **устойчивой**

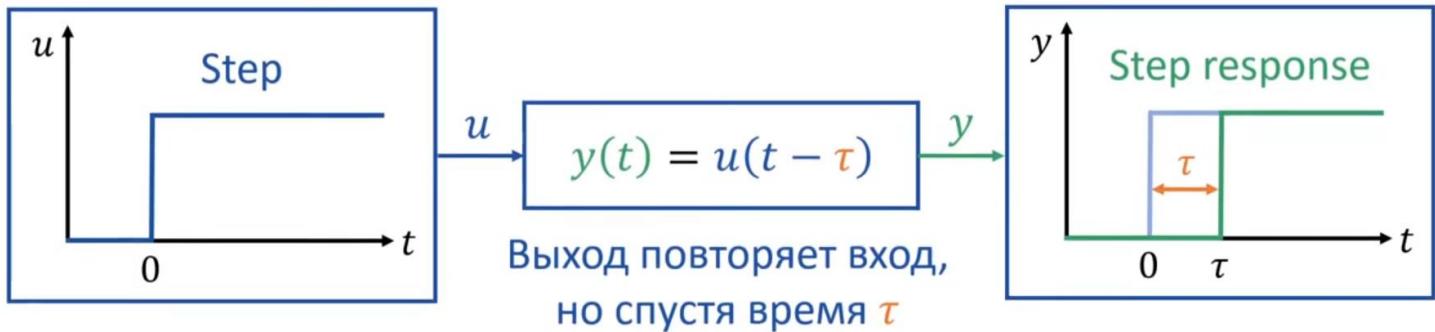


Замкнутая система
будет **устойчивой**



Замкнутая система
будет **неустойчивой**

Звено чистого запаздывания



Передаточная функция звена чистого запаздывания: $W(s) = e^{-\tau s}$

Передаточная функция

$$W(s) = e^{-\tau s}$$

$$\downarrow \\ s = j\omega$$

Частотная передаточная функция

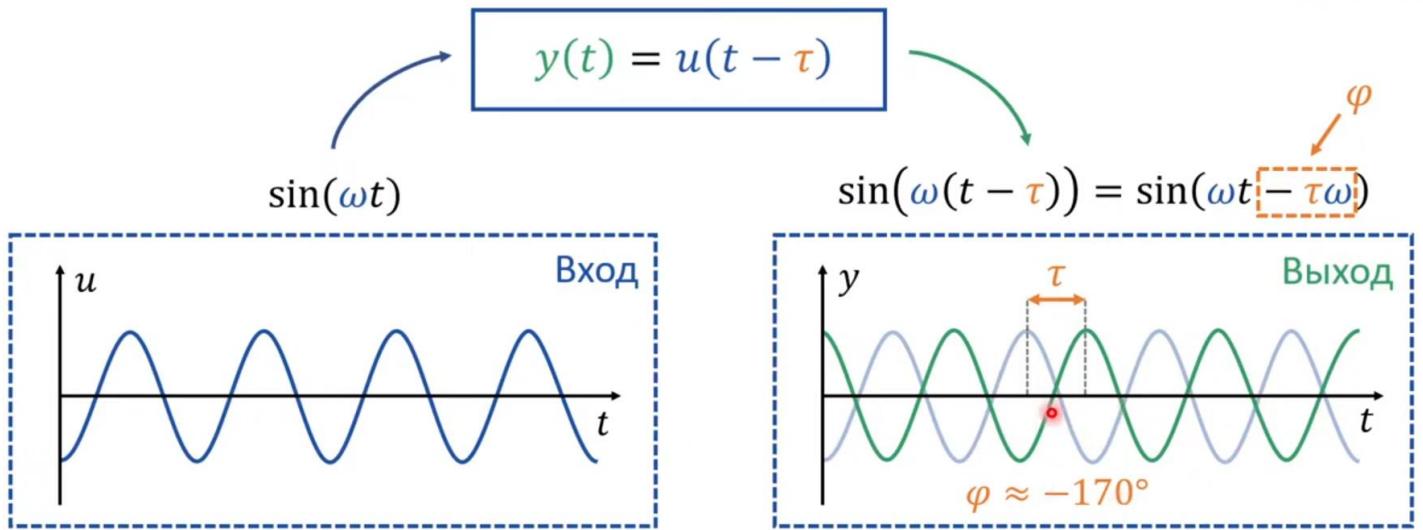
$$W(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$

Амплитудно-частотная характеристика

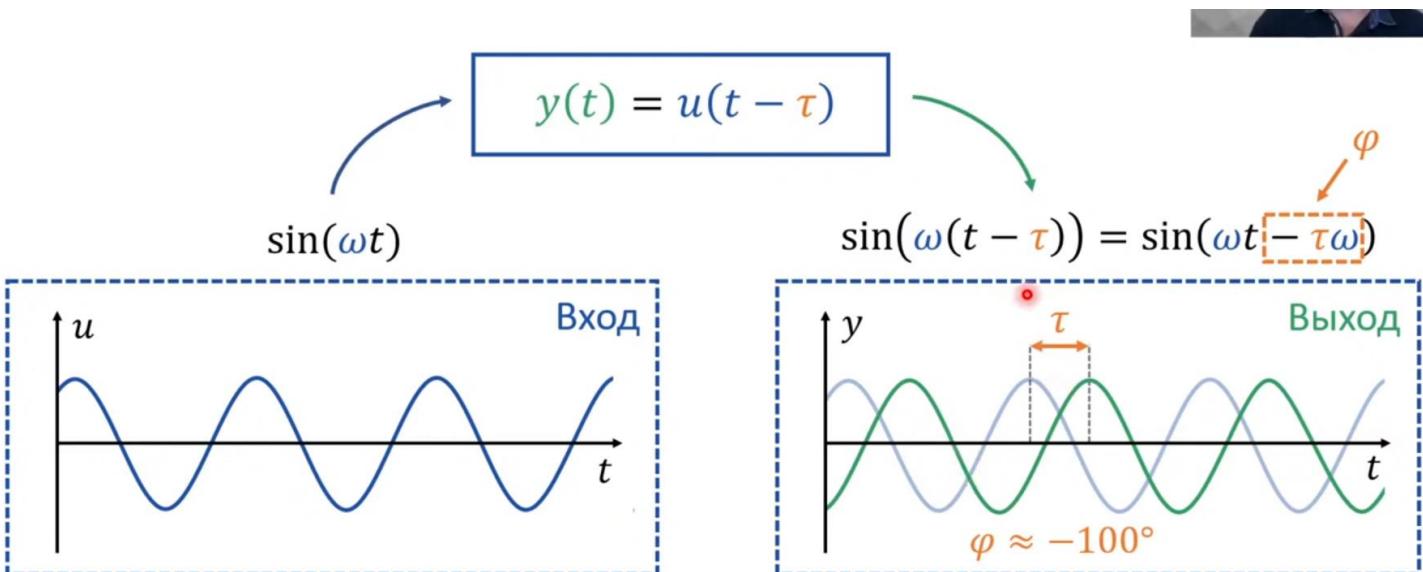
$$A(\omega) = 1$$

Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = -\tau\omega$$

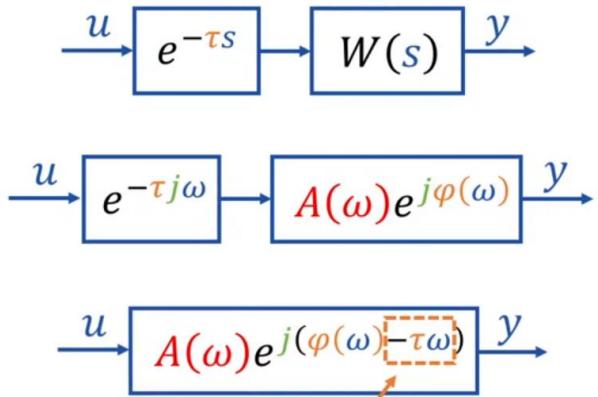


Для различных частот одна и та же временная задержка τ
будет соответствовать различным сдвигам фазы φ

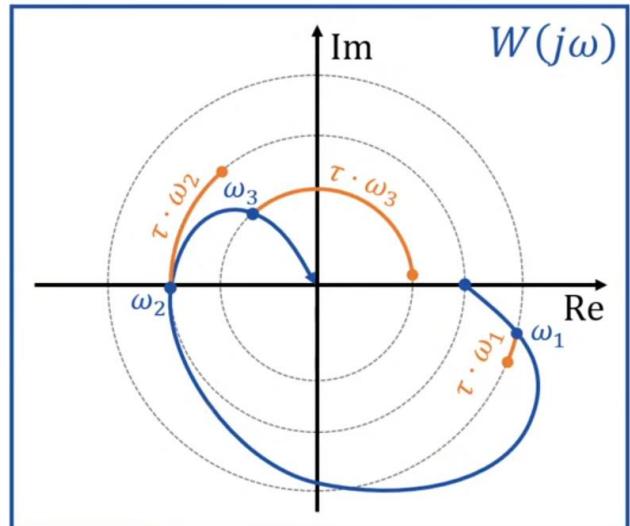


Для различных частот одна и та же временная задержка τ
будет соответствовать различным сдвигам фазы φ

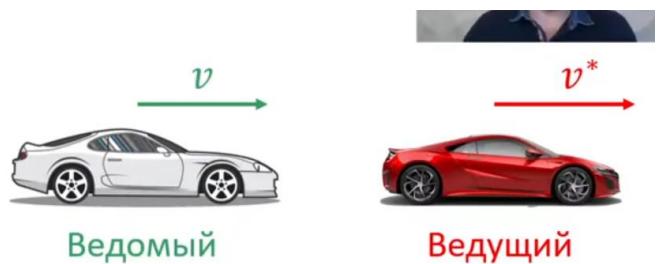
Запаздывание закручивает годограф



Дополнительный сдвиг фазы закручивает годограф на высоких частотах



Решаем пример с машинками

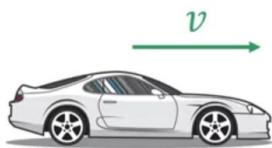


Сначала рассмотрим случай $\tau = 0$

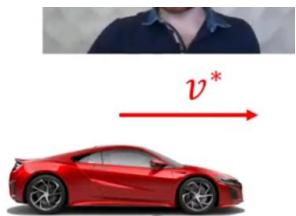
$$W(s) = \frac{k}{s} \quad W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = \frac{0}{j\omega} \text{ (red circle)} \quad \text{atan } \frac{\text{Im}}{\text{Re}}$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{\omega} e^{j \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{При } \omega > 0$$

$$\text{atan} \left(-\frac{\omega}{0} \right) = \text{atan} (-\infty)$$



Ведомый



Ведущий

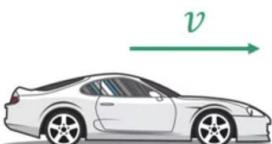
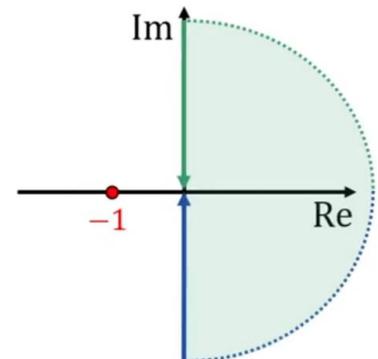
Сначала рассмотрим случай $\tau = 0$

$$W(s) = \frac{k}{s} \quad W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = 0 - j \frac{k}{\omega}$$

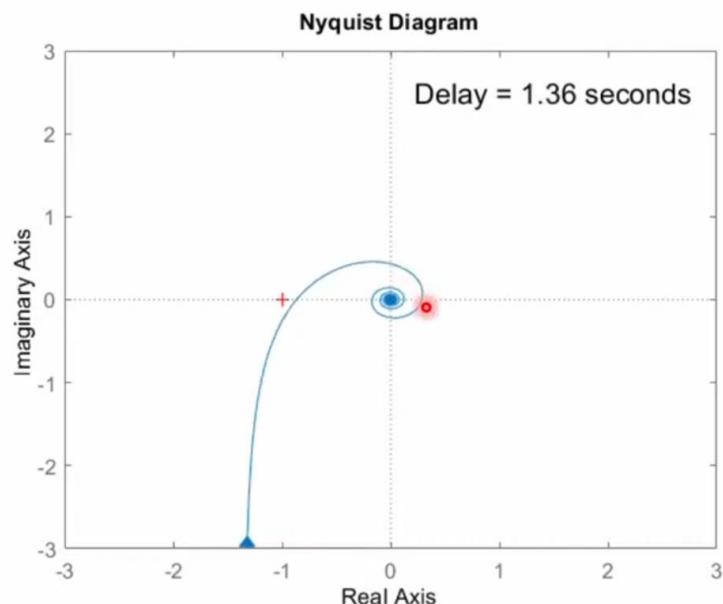
$$W(j\omega) = \frac{k}{\omega} e^{j \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)} \quad \leftarrow \text{При } \omega > 0$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{\omega} e^{j \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad \leftarrow \text{При } \omega < 0$$

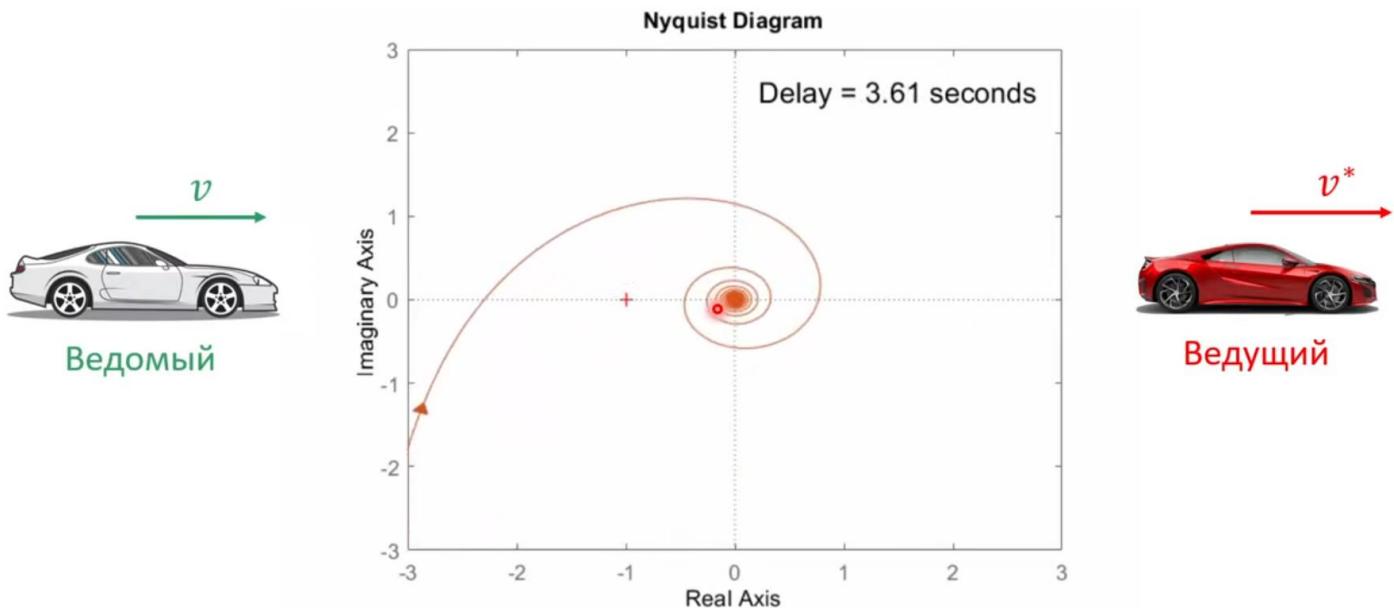
При отсутствии
запаздывания
система устойчива



Ведомый



Ведущий



Возле центра график сильно закручивается, так как возле центра обозначены значения при высоких частотах, при которых график сильнее всего закручивается при наличии запаздывания. В начале (при малых значениях запаздывания) система устойчива, но в какой-то момент годограф захватывает критическую точку, и система становится неустойчивой.



Найдём **критическое запаздывание**:

$$W(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{s} \quad W(j\omega) = \frac{ke^{-j\tau\omega}}{j\omega}$$

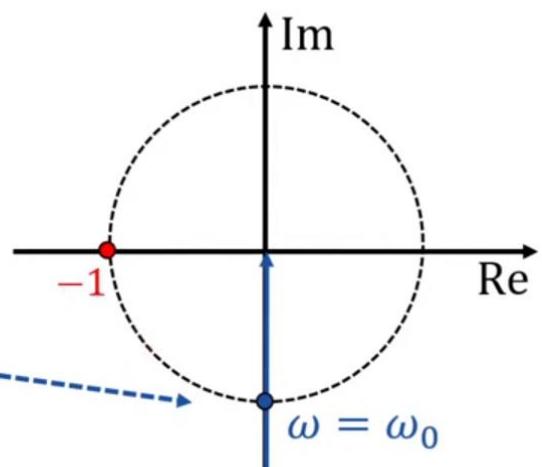
$$W(j\omega) = \frac{k}{\omega} e^{j \cdot \left(-\frac{\pi}{2} - \tau\omega \right)}$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega$$

Найдём критическое запаздывание:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega$$

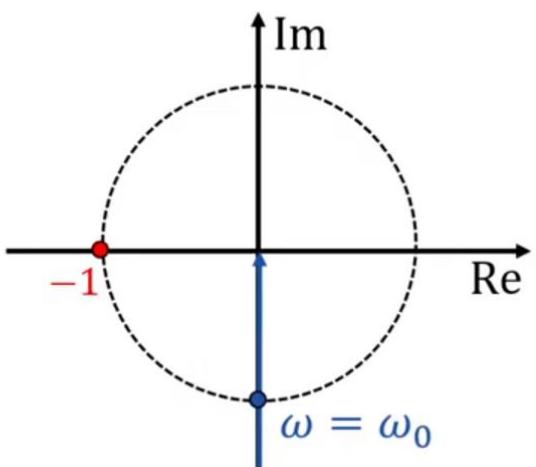
Найдём такую частоту,
которая соответствует точке
на единичной окружности



Найдём критическое запаздывание:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega$$

$$A(\omega_0) = 1 \Rightarrow \omega_0 = ?$$

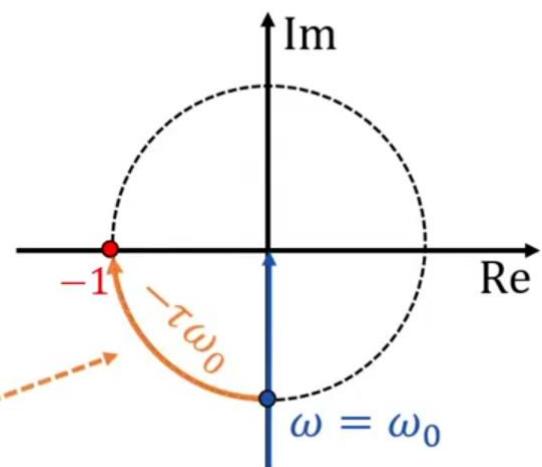


Найдём критическое запаздывание:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega$$

$$A(\omega_0) = 1 \Rightarrow \omega_0 = k$$

Точке осталось повернуться ещё на $-\frac{\pi}{2}$,
какому запаздыванию это соответствует?

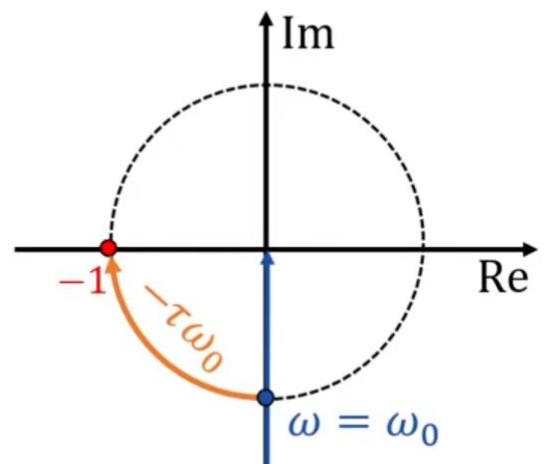


Найдём критическое запаздывание:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \boxed{-\tau\omega}$$

$$A(\omega_0) = 1 \Rightarrow \omega_0 = k$$

$$\varphi(\omega_0) = -\pi \Rightarrow \boxed{-\tau\omega_0 = -\frac{\pi}{2}}$$

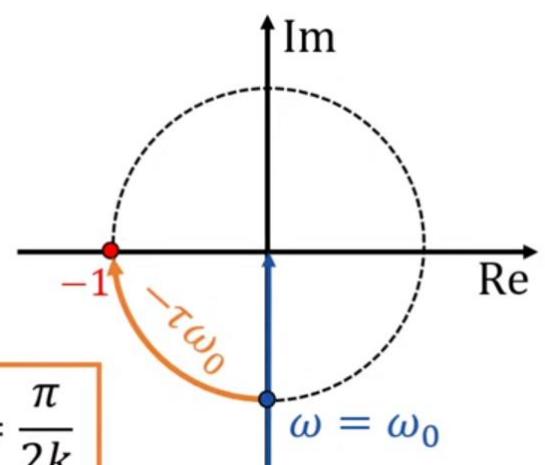


Найдём критическое запаздывание:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \boxed{-\tau\omega}$$

$$A(\omega_0) = 1 \Rightarrow \omega_0 = k$$

$$\varphi(\omega_0) = -\pi \Rightarrow \boxed{-\tau\omega_0 = -\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{\tau_{kp} = \frac{\pi}{2k}}$$

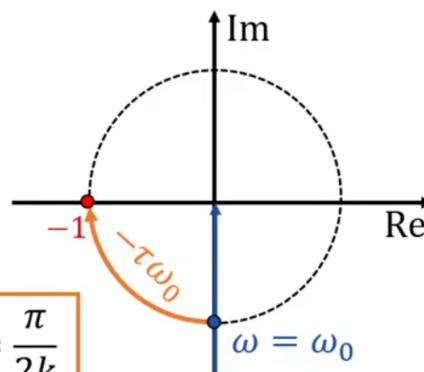


Найдём критическое запаздывание:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \boxed{-\tau\omega}$$

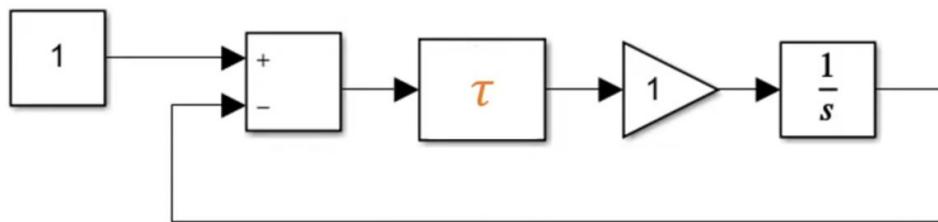
$$A(\omega_0) = 1 \Rightarrow \omega_0 = k$$

$$\varphi(\omega_0) = -\pi \Rightarrow \boxed{-\tau\omega_0 = -\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{\tau_{kp} = \frac{\pi}{2k}}$$



При $k = 1$
 $\tau_{kp} = \frac{\pi}{2}$

Время удивляться!



При $\tau < \frac{\pi}{2}$ система устойчива

При $\tau > \frac{\pi}{2}$ система неустойчива

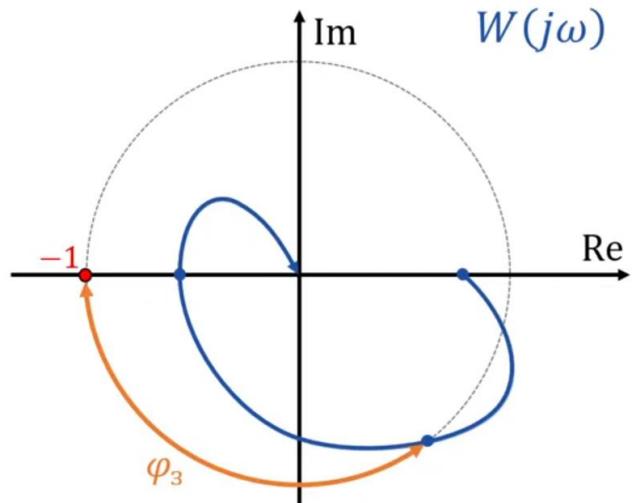
Запасы устойчивости

φ_3

Запас устойчивости по фазе:
на какой угол надо повернуть годограф,
чтобы он коснулся критической точки?

A_3

Запас устойчивости по амплитуде:
во сколько раз нужно растянуть годограф,
чтобы он коснулся критической точки?

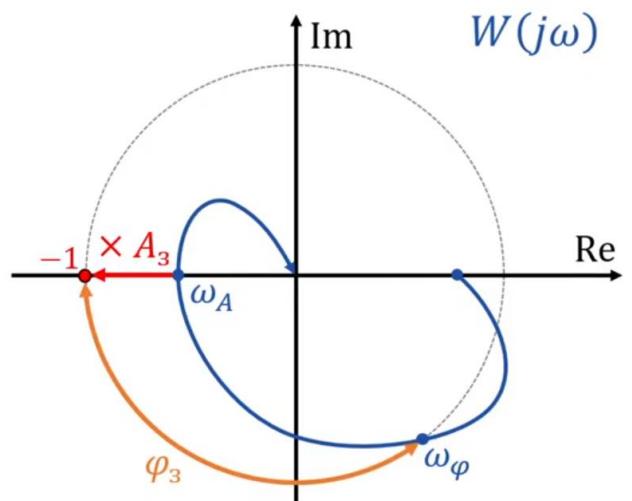
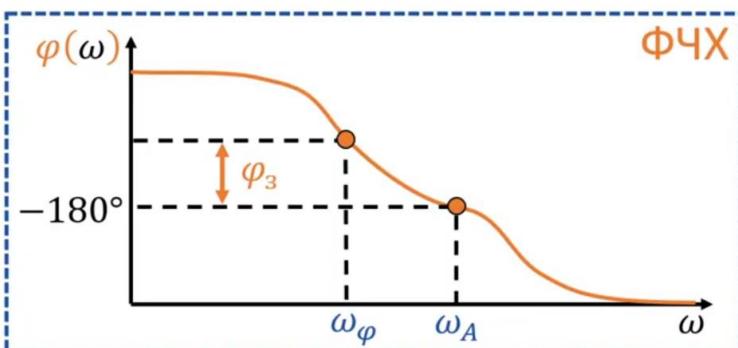
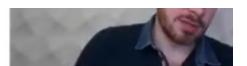
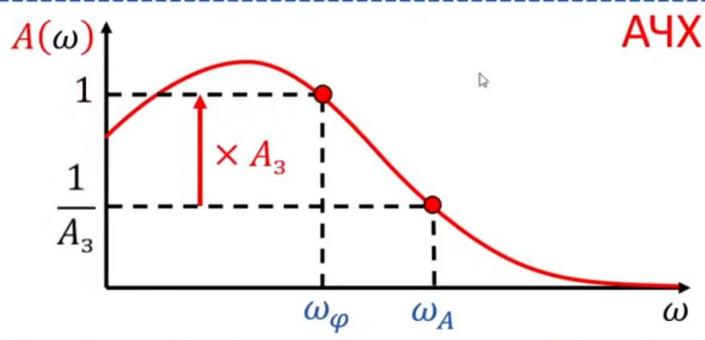
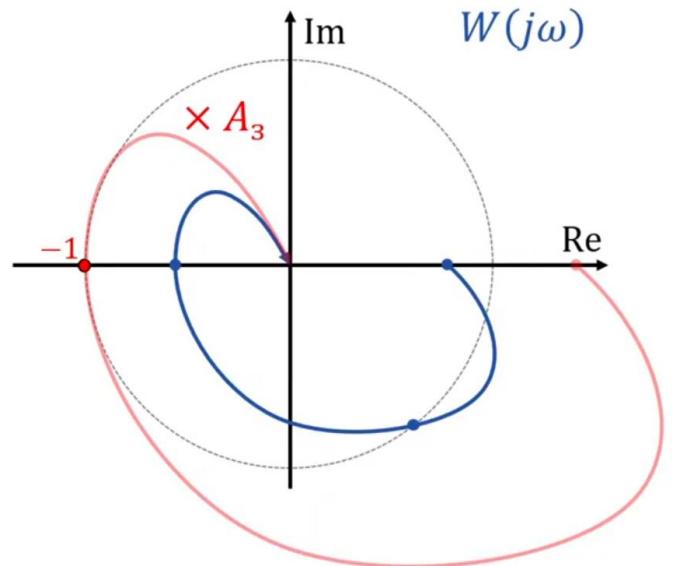


φ_3

Запас устойчивости по фазе:
на какой угол надо повернуть годограф,
чтобы он коснулся критической точки?

A_3

Запас устойчивости по амплитуде:
во сколько раз нужно растянуть годограф,
чтобы он коснулся критической точки?

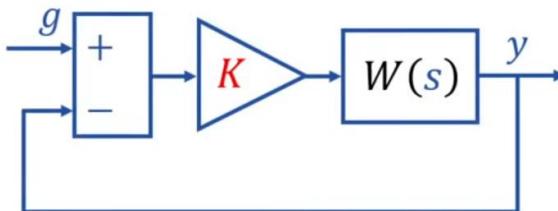




$$W(s)$$

Запас по амплитуде

$$\varphi(\omega_A) = -180^\circ \quad A_3 = \frac{1}{A(\omega_A)}$$

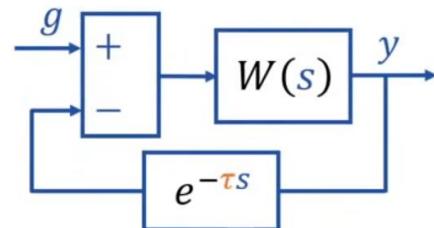


Критический допустимый
коэффициент П-регулятора

$$K_{\max} = ?$$

Запас по фазе

$$A(\omega_\varphi) = 1 \quad \varphi_3 = 180^\circ + \varphi(\omega_\varphi)$$

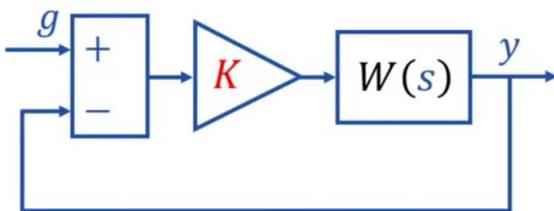


Критическое допустимое
время запаздывания

$$\tau_{\max} = ?$$

Запас по амплитуде

$$\varphi(\omega_A) = -180^\circ \quad A_3 = \frac{1}{A(\omega_A)}$$

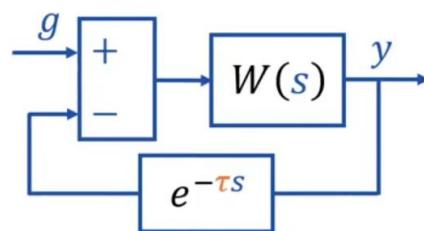


Критический допустимый
коэффициент П-регулятора

$$K_{\max} = A_3$$

Запас по фазе

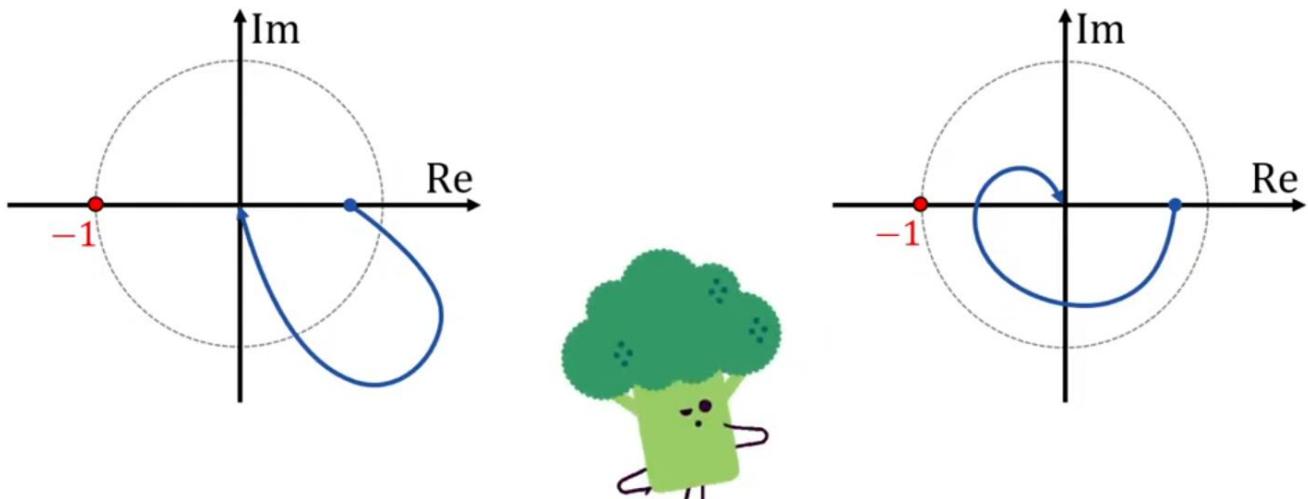
$$A(\omega_\varphi) = 1 \quad \varphi_3 = 180^\circ + \varphi(\omega_\varphi)$$



Критическое допустимое
время запаздывания

$$\tau_{\max} = \frac{\varphi_3}{\omega_\varphi}$$

Могут ли запасы устойчивости быть бесконечными?



В каких случаях неустойчивая система – это хорошо?

Сложные проценты

$$x(k+1) = x(k) + p \cdot x(k)$$



$$x(k+1) = x(k) + p \cdot x(k)$$

A diagram illustrating the components of the equation. It shows three terms: 'Сумма вклада «завтра»' (Sum of deposit tomorrow), 'Сумма вклада «сейчас»' (Sum of deposit now), and 'Начисляемый процент' (Accrued interest). Arrows point from each term to its corresponding part in the equation: a green diagonal arrow from the first term to the first '+', a green vertical arrow from the second term to the second '+', and a red diagonal arrow from the third term to the 'p · x(k)' part.

$$x(k+1) = \underbrace{p \cdot x(k)}_{\text{Прибавка к вкладу за единицу времени}}$$

A diagram illustrating the components of the equation. It shows the term 'p · x(k)' underlined with a dashed line, with a green arrow pointing up to it from the text 'Прибавка к вкладу за единицу времени' (Addition to the deposit over one unit of time).

Непрерывная модель

$$\dot{x} = \underbrace{p \cdot x}_{\text{Скорость роста общей суммы}}$$

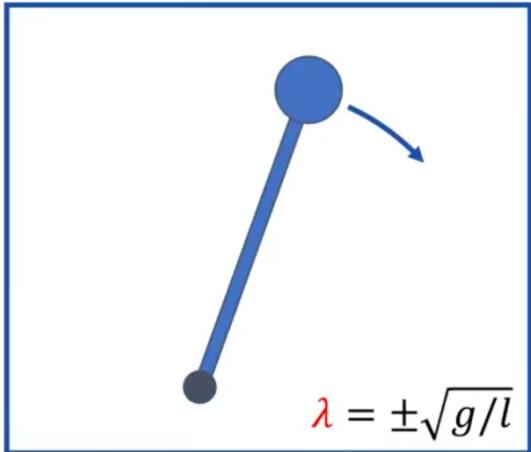
A diagram illustrating the components of the equation. It shows the term 'p · x' underlined with a dashed line, with a green arrow pointing up to it from the text 'Скорость роста общей суммы' (Rate of growth of total sum).

Собственное число

$$p > 0$$

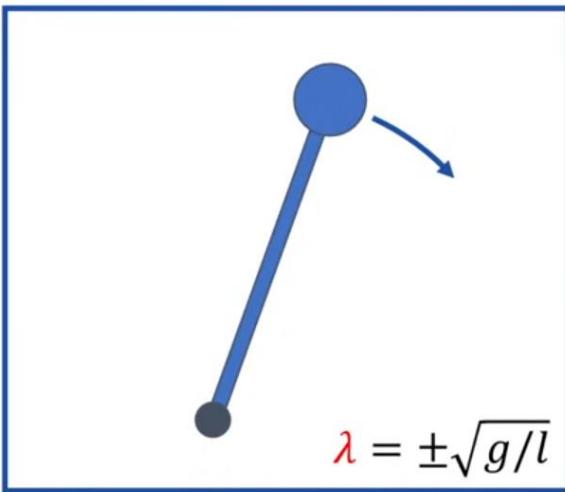
Будем экспоненциальный рост

Перевёрнутый маятник

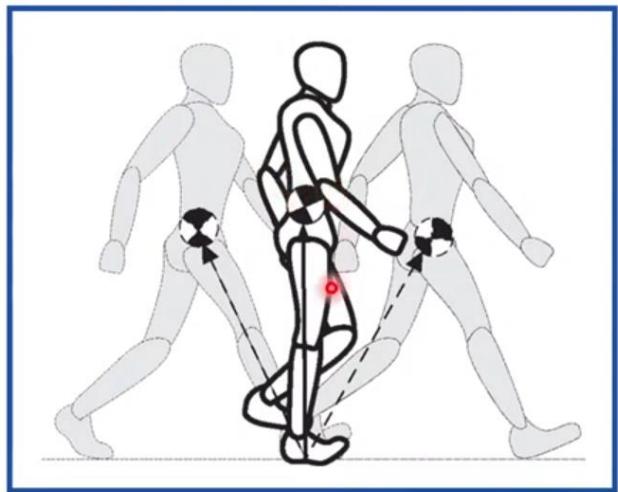


С каким примером
перевёрнутого маятника
вы сталкиваетесь **каждый день?**

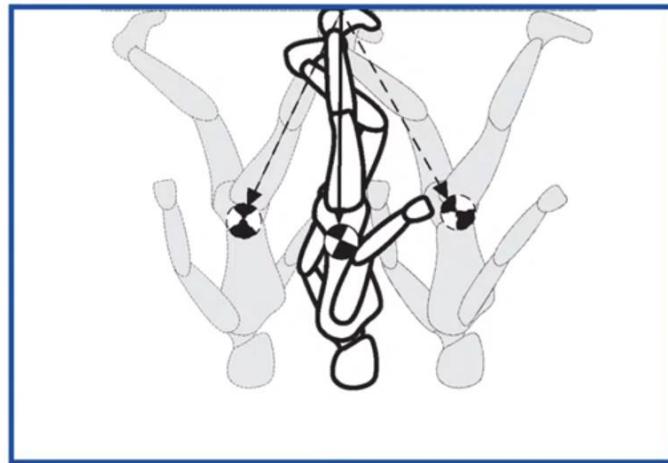
Перевёрнутый маятник



Человек при ходьбе



Ходить по потолку было бы **сложно**
даже в специальных ботинках



“Никто не должен относиться плохо к чему бы то ни было, пока не убедится, что предполагаемый недостаток действительно являются недостатком, а не скрытым благом!”

– Кот Платон