Преобразование Лапласа и вынужденное движение

Каковы наши желания?

$$\begin{tikzcd}
f(t) \arrow[r, mapsto, "\text{Дифференцирование}"] \arrow[d, mapsto, dashed, "?"'] & \dot{f}(t) \arrow[d, mapsto, dashed, "?"'] \\
F(s) \arrow[r, mapsto, "\text{Умножение на } s"] & sF(s)
\end{tikzcd}$$

Хотим найти такое преобразование,
которое сделает эту диаграмму коммутативной

Дифференциальное
хотим превращать
в алгебраическое

$$\begin{tikzcd}
u(t) \arrow[r, mapsto, "\text{Оператор } \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0}"] \arrow[d, mapsto, dashed, "?"'] & y(t) \arrow[d, mapsto, dashed, "?"'] \\
U(s) \arrow[r, mapsto, "\text{Умножение на } \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}"] & Y(s)
\end{tikzcd}$$

Формула для преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа

$$\boxed{F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st}\, dt}$$

Бегущая переменная t исчезает при интегрировании,
остаётся только переменная s

Превращает функцию $f(t)$ в новую функцию $F(s)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

Оригинал
($t \in \mathbb{R}$)

Изображение
($s \in \mathbb{C}$)

Оригинал

$$f(t) = 1$$

(если $\mathrm{Re}(s) > 0$)

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} 1 \cdot e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0^-}^{+\infty} = \underbrace{\cancel{\left(-\frac{1}{s} e^{-s\cdot\infty}\right)}}_{0} - \left(-\frac{1}{s} \cdot 1\right)$$

Изображение Лапласа

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

(определено при $\mathrm{Re}(s) > 0$)

$$f(t) = 1 \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s}$$

Оригинал

$$f(t) = e^{at}$$

(если $\mathrm{Re}(s) > a$)

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{(a-s)t}\, dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_{0^-}^{+\infty} = \underbrace{\cancel{\left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)\cdot\infty}\right)}}_{0} - \left(\frac{1}{a-s} \cdot 1\right)$$

Изображение Лапласа

$$F(s) = \frac{1}{s-a}$$

(определено при $\mathrm{Re}(s) > a$)

$$f(t) = e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s-a}$$

Оригинал

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

(если $\mathrm{Re}(s) > 0$)

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-st}\, dt = -\frac{s\sin(\omega t) + \omega\cos(\omega t)}{s^2+\omega^2} e^{-st}\Big|_{0^-}^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{s\cdot 0 + \omega \cdot 1}{s^2+\omega^2}\right)$$

Вот такая первообразная 🙈

Изображение Лапласа

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

(определено при $\mathrm{Re}(s) > 0$)

$$f(t) = \sin(\omega t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Образ Лапласа матричной экспоненты

Числовой геометрический ряд

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

при $|x| < 1$

Матричный геометрический ряд

$$I + A + A^2 + A^3 + \cdots = (I - A)^{-1}$$

при $\|A\| < 1$

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots$$

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \frac{A^3}{s^4} + \cdots$$

$$s \cdot \mathcal{L}\{e^{At}\} = I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \frac{A^3}{s^3} + \cdots$$

$$s \cdot \mathcal{L}\{e^{At}\} = \left(I - \frac{A}{s}\right)^{-1}$$

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = \frac{1}{s}\left(I - \frac{A}{s}\right)^{-1}$$

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$$

Обычная	Матричная
$e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a}$	$e^{At} \xrightarrow{\mathcal{L}} (sI - A)^{-1}$

Вычисление матричной экспоненты с помощью преобразования Лапласа

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = ?$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{-1}{s^2+1} \\ \frac{1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{-1}{s^2+1} \\ \frac{1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$F(s)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$f(t)$	$\sin(\omega t)$	$\cos(\omega t)$

$$\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

ВСВ

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

$\mathcal{L}$

$$(sI)X - x(0) = AX + BU$$

$$(sI - A)X = x(0) + BU$$

$$X = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU$$

$$Y = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}BU$$

$$Y = \underbrace{C(sI - A)^{-1}x(0)}_{\text{Свободная составляющая}} + \underbrace{C(sI - A)^{-1}BU}_{\text{Вынужденная составляющая}}$$

Передаточная функция

$$Y = C(sI - A)^{-1}x(0) + \boxed{C(sI - A)^{-1}B}U$$

$$y_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0) \qquad y_{\text{вын}}(t) = Ce^{At}B * u(t)$$

Полное движение линейной системы

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x(0)}_{\text{Свободное движение}} + \underbrace{Ce^{At}B}_{\text{Реакция системы на единичный импульс}} * \underbrace{u(t)}_{\text{Входное воздействие}}$$

Два слова про аналитическое продолжение

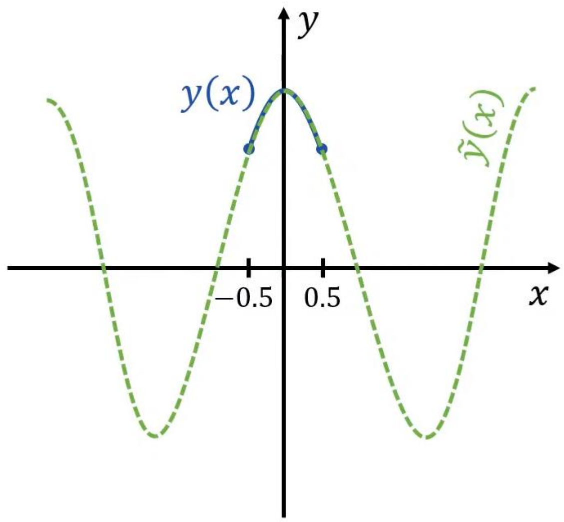
$$f(t) = 1 \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s}$$ (определена при $\mathrm{Re}(s) > 0$)

$$f(t) = e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s - a}$$ (определена при $\mathrm{Re}(s) > a$)

$$f(t) = \sin(\omega t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$ (определена при $\mathrm{Re}(s) > 0$)

Что с этим делать?

Пример из математического анализа



Функция

$y(x) = \cos(x)$ при $x \in [-0.5; 0.5]$

$y(x)$ не определена при $|x| > 0.5$

Её ряд Тейлора в точке $x = 0$

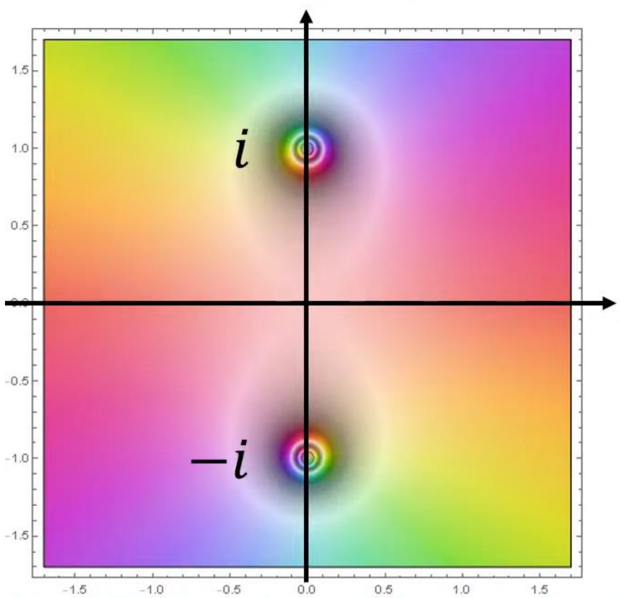
$$\tilde{y}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Ряд сходится при всех x, и при $x \in [-0.5; 0.5]$ совпадает с самой функцией

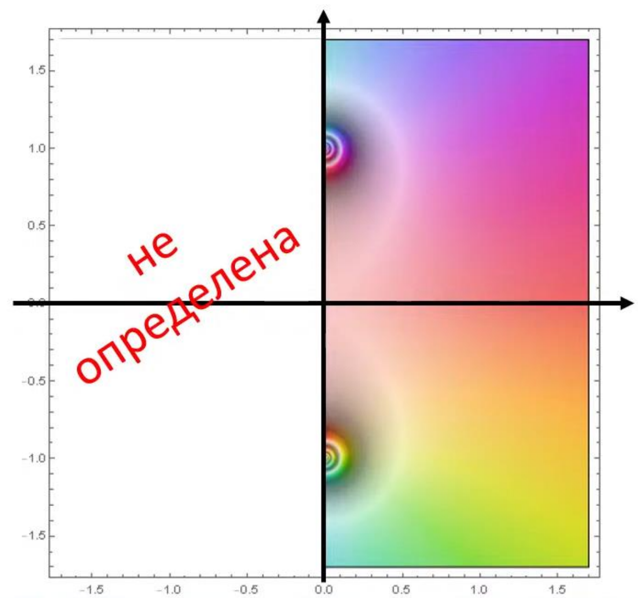
Функция $\tilde{y}(x) = \cos(x)$ является аналитическим продолжением функции $y(x)$

Комплексные графики

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$



$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (\text{при } \mathrm{Re}(s) > 0)$$



Комплексные графики

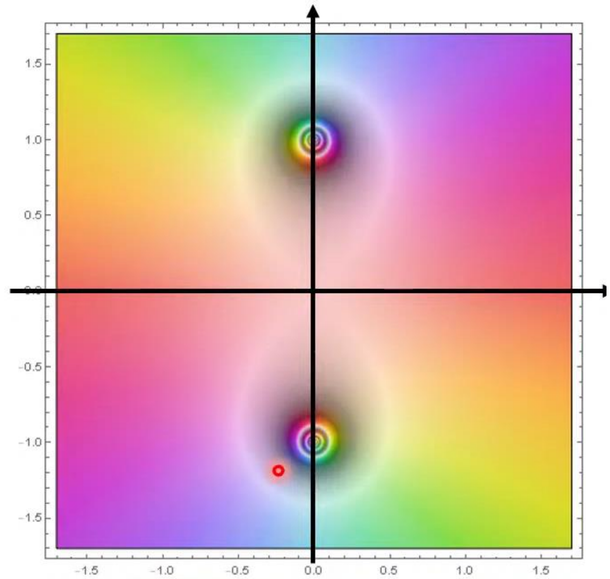
$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{(при } \mathrm{Re}(s) > 0\text{)}$$

Если мы захотим доопределить эту функцию…

То у нас будет ровно один способ сделать это так, чтобы получившаяся функция была аналитической (голоморфной)

И результат будет совпадать с функцией

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$



Если простыми словами, то

С помощью комплексного анализа можно показать, что функция…

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{(при } \mathrm{Re}(s) > 0\text{)}$$

…может быть аналитически продолжена до функции

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{(при всех } s\text{)}$$

Это значит, что исходные ограничения не имеют существенного значения

Поэтому на них можно забить, и мы больше не будем про них говорить

Таблица всех интересных нам изображений Лапласа

$f(t)$ Временная область	$F(s)$ S-область
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{(s-a)}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$f(t)$ Временная область	$F(s)$ S-область
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{s\cdot\sin(\varphi)+\omega\cdot\cos(\varphi)}{s^2+\omega^2}$

Свойства преобразования Лапласа

Линейность

$$\boxed{c_1 f(t)+c_2 g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} c_1 F(s)+c_2 G(s)}$$

Связь с дифференцированием

$$\mathcal{L}\{\dot f(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st}\dot f(t)\,dt = e^{-st}f(t)\Big|_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\cdot(-s)e^{-st}\,dt$$

Производная превратилась в умножение на s

$$= 0 - f(0^-) + s\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$= sF(s) - f(0^-)$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

Если начальные условия равны нулю…

$$\dot f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0^-)$$

$$\ddot f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2F(s) - sf(0^-) - \dot f(0^-)$$

$$\dddot f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^3F(s) - s^2f(0^-) - s\dot f(0^-) - \ddot f(0^-)$$

$$\vdots$$

Связь с интегрированием

Можно показать, что

$$\int_0^t f(x)dx \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}F(s)$$

Иными словами:

Оператор интегрирования

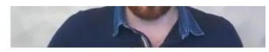
ПРОСТО СИМВОЛ

$$\frac{1}{p}[f] \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}F(s)$$

Деление на переменную s

РЕАЛЬНАЯ ДРОБЬ

Решаем дифференциальное уравнение



Уравнение	Начальные условия
$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2 + 3t$	$y(0^-) = 5, \quad \dot{y}(0^-) = 1$

Взяли Лапласа с обеих сторон: $\mathcal{L}\{\ddot{y} + 2\dot{y} + y\} = \mathcal{L}\{2 + 3t\}$

По свойству линейности: $\mathcal{L}\{\ddot{y}\} + 2\mathcal{L}\{\dot{y}\} + \mathcal{L}\{y\} = 2\mathcal{L}\{1\} + 3\mathcal{L}\{t\}$

По таблице изображений: $\mathcal{L}\{\ddot{y}\} + 2\mathcal{L}\{\dot{y}\} + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}$

По свойству производной: $s^2Y - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) + 2(sY - y(0^-)) + Y = \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}$

Подставили начальные условия: $s^2Y - 5s - 1 + 2(sY - 5) + Y = \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}$

Перегруппировали слагаемые: $(s^2 + 2s + 1) \cdot Y = 11 + 5s + \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}$

Переписали правую часть: $(s^2 + 2s + 1) \cdot Y = \frac{5s^3 + 11s^2 + 2s + 3}{s^2}$

Выразили $Y(s)$: $Y(s) = \frac{5s^3 + 11s^2 + 2s + 3}{s^2(s^2 + 2s + 1)}$

Через простейшие дроби: $Y(s) = \dfrac{-4}{s} + \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{9}{s+1} + \dfrac{7}{(s+1)^2}$

Вспомнили таблицу:

$F(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{1}{(s+1)^2}$
$f(t)$	1	t	e^{-t}	te^{-t}

Получили ответ: $y(t) = -4 + 3t + 9e^{-t} + 7te^{-t}$

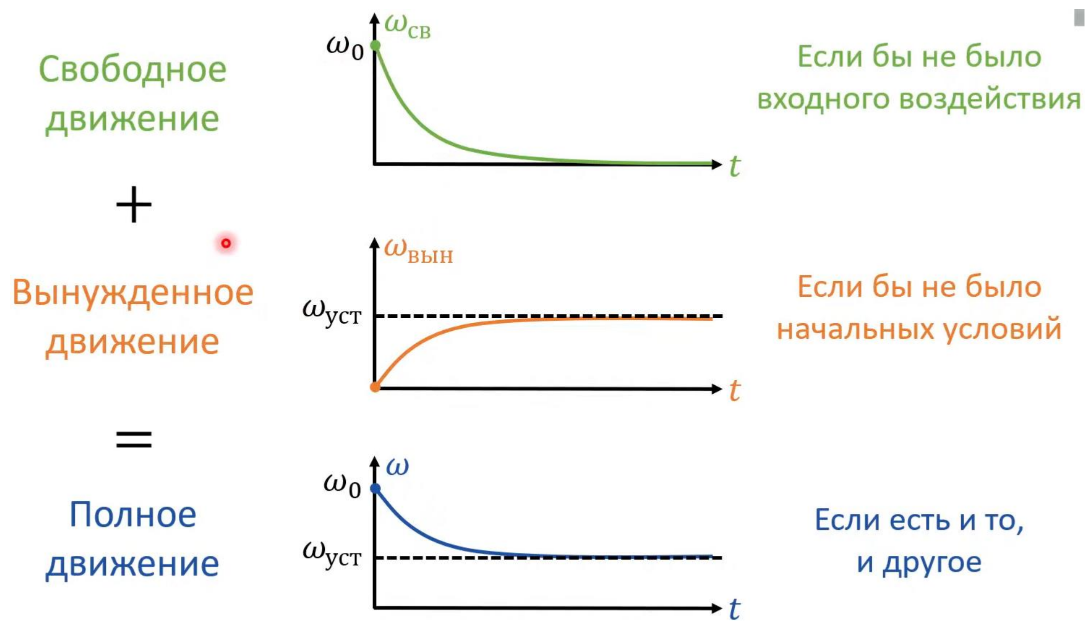
Свободное и вынужденное движение

Свободное движение – движение системы, вызванное наличием начальных условий при отсутствии внешних воздействий.

Вынужденное движение – движение системы, вызванное наличием внешнего воздействия при отсутствии начальных условий.

Полное движение – движение системы, вызванное наличием начальных условий и внешнего воздействия.

ДПТ



Свободное движение + вынужденное движение = полное движение (только в случае линейной системы)

Линейная система

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = bu$$

$$\mathcal{L}\downarrow$$

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) + a_1sY(s) - a_1y(0^-) + a_0Y(s) = bU(s)$$

$$(s^2 + a_1s + a_0)Y(s) = sy(0^-) + \dot{y}(0^-) + a_1y(0^-) + bU(s)$$

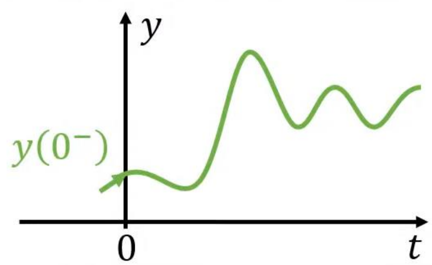
$$Y(s) = \underbrace{\boxed{\frac{sy(0^-) + \dot{y}(0^-) + a_1y(0^-)}{s^2 + a_1s + a_0}}}_{\mathcal{L}\{y_{\text{св}}(t)\}} + \underbrace{\boxed{\frac{bU(s)}{s^2 + a_1s + a_0}}}_{\mathcal{L}\{y_{\text{вын}}(t)\}}$$

Свободная составляющая (зависит только от начальных условий)

Вынужденная составляющая (зависит только от входного воздействия)

Начальные условия входа считаются равными нулю

Выход системы



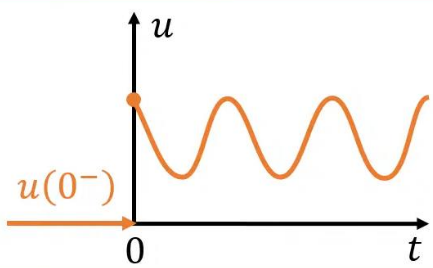
$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0^-)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-)$$

$$\vdots$$

Вход системы



$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$$

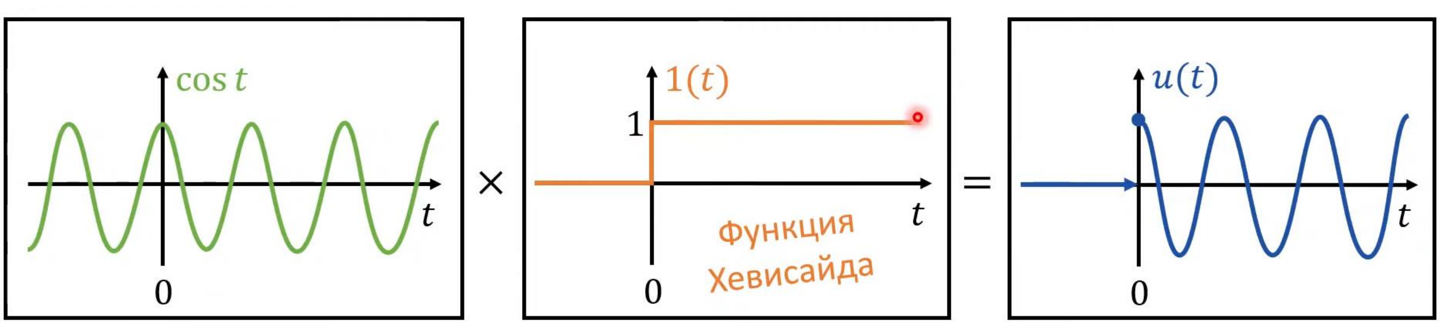
$$\mathcal{L}\{\dot{u}(t)\} = sU(s)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{u}(t)\} = s^2U(s)$$

$$\vdots$$

Считается, что при $t < 0$ входа не было

Пишем $u(t) = \cos t$ $\xrightarrow{\text{Но!}}$ **Подразумеваем** $u(t) = \cos t \cdot 1(t)$



Линейная система

$$\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$s^3Y - s^2y(0^-) - s\dot{y}(0^-) - \ddot{y}(0^-) + a_2\big(s^2Y - sy(0^-) - \dot{y}(0^-)\big) + a_1\big(sY - y(0^-)\big) + a_0Y$$
$$= b_2\big(s^2U - su(0^-) - \dot{u}(0^-)\big) + b_1\big(sU - u(0^-)\big) + b_0U$$

Но начальные условия входа считаются нулевыми!

$$s^3Y - s^2y(0^-) - s\dot{y}(0^-) - \ddot{y}(0^-) + a_2\big(s^2Y - sy(0^-) - \dot{y}(0^-)\big) + a_1\big(sY - y(0^-)\big) + a_0Y$$
$$= b_2s^2U + b_1sU + b_0U$$

$$\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

Слева страдаем

Справа отдыхаем

$$s^3Y - *** + a_2(s^2Y - ***) + a_1(sY - ***) + a_0Y = b_2s^2U + b_1sU + b_0U$$

Переносим страдание в правую часть

$$(s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)\,Y(s) = (***) + (b_2s^2 + b_1s + b_0)U(s)$$

Делим на скобку

$$Y(s) = \frac{(***)}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} + \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}U(s)$$

Передаточная функция

Линейная система

$$\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u$$

$$Y(s) = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{Полином от } s\text{, коэффициенты} \\ \text{которого зависят от начальных условий}\end{array}\right)}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} + \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} U(s)$$

$$Y(s) = Y_{\text{св}}(s) + W(s)U(s)$$

Передаточная функция

Операторная передаточная функция

$$\frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

Формальный символ, соответствующий оператору

Передаточная функция

$$\frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Дробно-рациональная функция от комплексной переменной s

Определение передаточной функции

Отношение изображения Лапласа вынужденной составляющей выходного сигнала к изображению Лапласа входного сигнала

$$Y_{\text{вын}}(s) = W(s)U(s) \quad \Rightarrow \quad W(s) = \frac{Y_{\text{вын}}(s)}{U(s)}$$

Определение передаточной функции

Отношение изображения Лапласа выходного сигнала к изображению Лапласа входного сигнала при нулевых начальных условиях

$$Y(s) = \underbrace{Y_{\text{св}}(s)}_{=0} + W(s)U(s) \quad \Rightarrow \quad W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Передаточная функция и устойчивость

Линейная система

$$\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u$$

Характеристический полином

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Передаточная функция

$$W(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Одно и то же

Корни характеристического полинома	=	Полюса передаточной функции

Корневой критерий устойчивости

Система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все полюса передаточной функции лежат в левой комплексной полуплоскости

Пример вычисления полного движения

Начальные условия	Система	Входное воздействие
$y(0^-) = 5,\ \dot{y}(0^-) = 1$	$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2\ddot{u} + 3\dot{u}$	$u(t) = 0.5t^2$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$s^2Y(s) - 5s - 1 + 2sY(s) - 2\cdot 5 + Y(s) = 2s^2U(s) + 3sU(s)$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = 5s + 11 + (2s^2 + 3s)\cdot\frac{1}{s^3}$$

$$Y(s) = \frac{5s + 11}{(s^2 + 2s + 1)} + \frac{2s^2 + 3s}{(s^2 + 2s + 1)}\cdot\frac{1}{s^3}$$

Образ Лапласа свободного движения

Передаточная функция

Образ Лапласа входного воздействия

$$Y(s) = \frac{5s+11}{(s^2+2s+1)} + \frac{2s^2+3s}{(s^2+2s+1)} \cdot \frac{1}{s^3}$$

Свободное движение

Вынужденное движение

$$\mathcal{L}^{-1} \downarrow$$

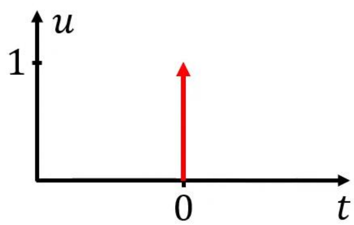
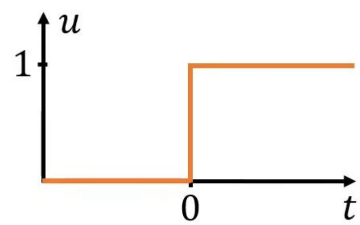
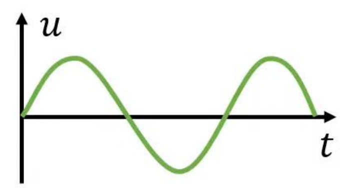
$$y(t) = 5e^{-t} + 6te^{-t} - 4 + 3t + 4e^{-t} + te^{-t}$$

(линейная комбинация мод)

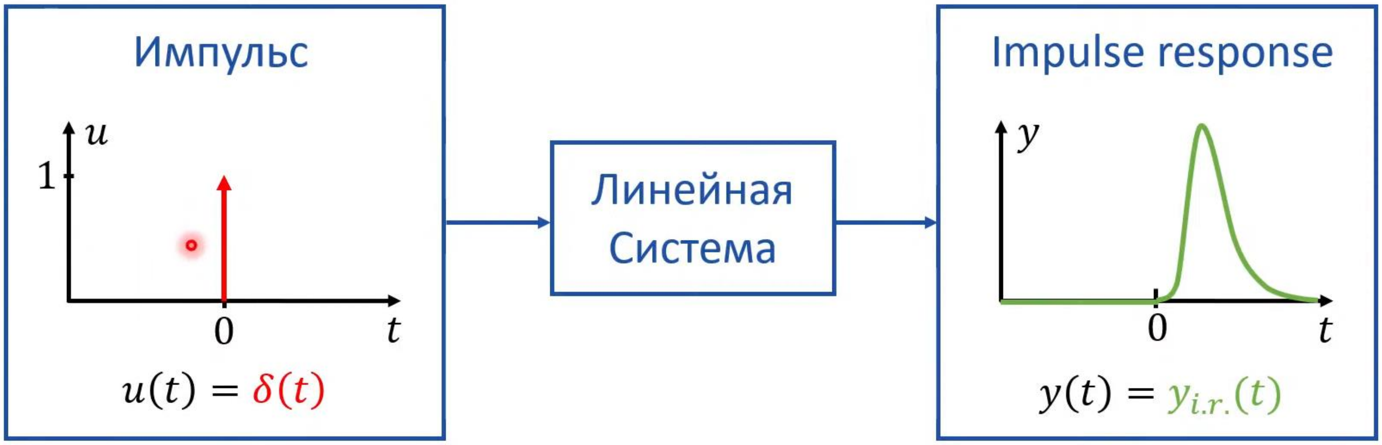
(другая линейная комбинация мод + что-то ещё)

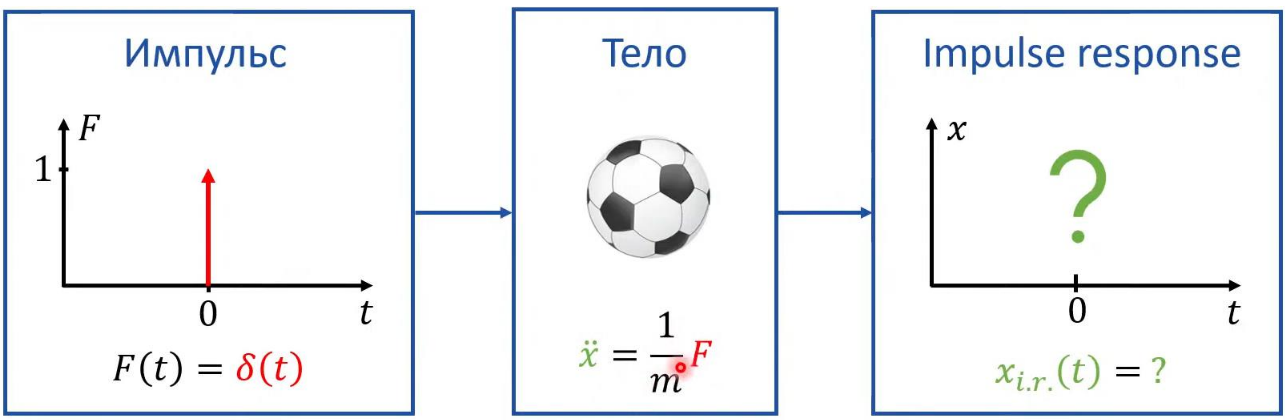
$$y(t) = -4 + 3t + 9e^{-t} + 7te^{-t}$$

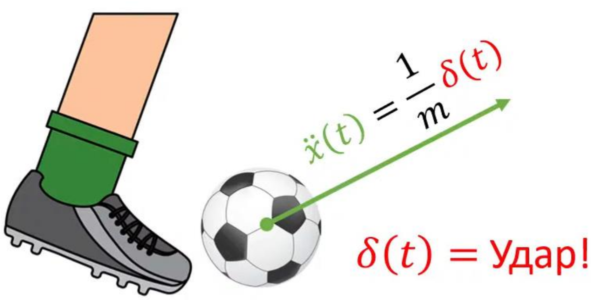
Три важнейших входных воздействия

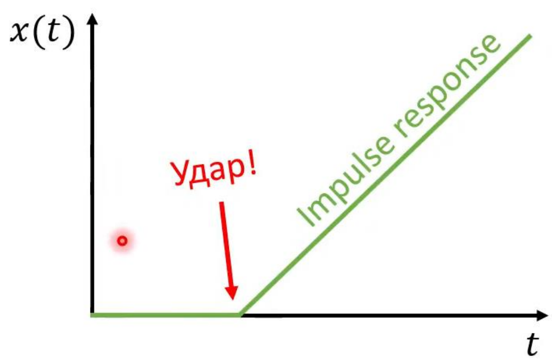
Импульс	Ступенька	Гармоника
		
$u(t) = \delta(t)$	$u(t) = 1(t)$	$u(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$
Дельта-функция Дирака	Функция Хевисайда	Синусоида
$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$ $\int_{-0.1}^{0.1} \delta(t)\, dt = 1$	$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ $\frac{d}{dt} 1(t) = \delta(t)$	Тут всё понятно
Систему можно пнуть	На систему можно надавить	Систему можно пошатать
$\Downarrow$ $y_{i.r.}(t)$	$\Downarrow$ $y_{s.r.}(t)$	$\Downarrow$ $y(t)$ не имеет названия
Выход системы: весовая функция (Impulse response)	Выход системы: переходная функция (Step response)	Частотные характеристики (Frequency response)

Вынужденное движение системы, вызванное единичным импульсом

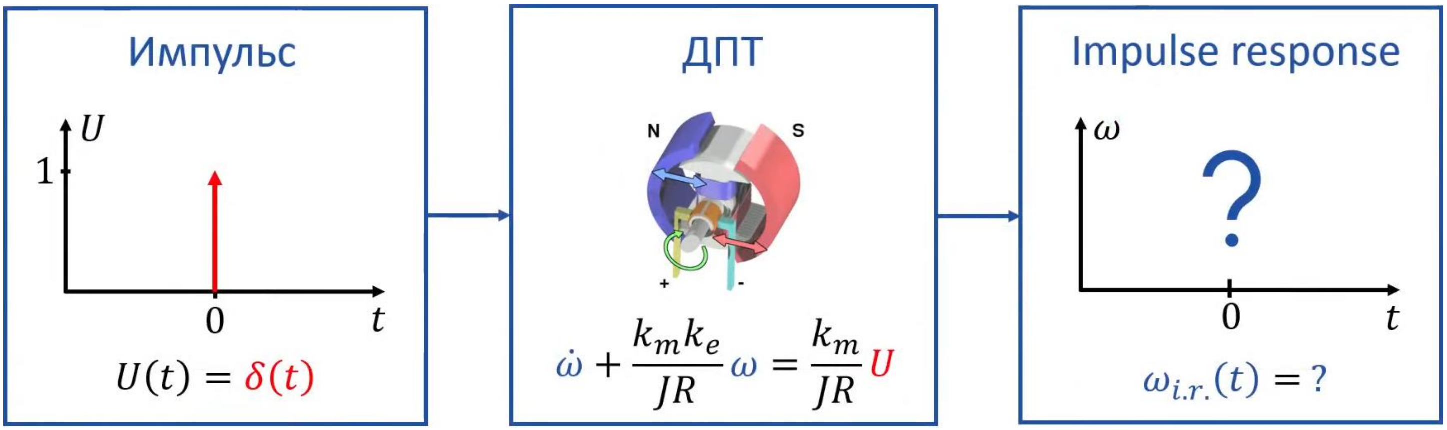




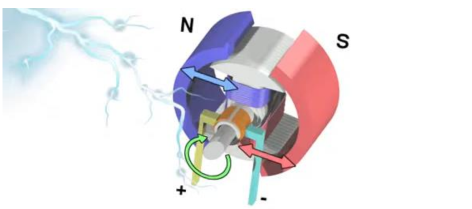




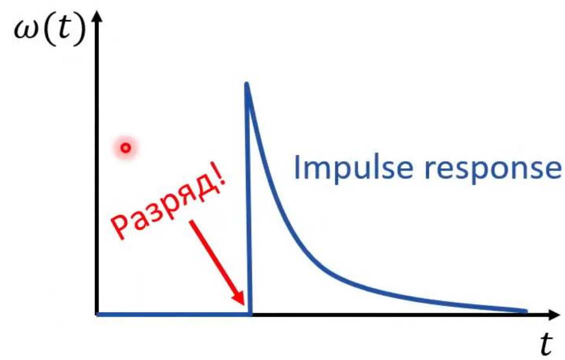
$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m}\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2X(s) = \frac{1}{m}\cdot 1 \longrightarrow X(s) = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x_{i.r.}(t) = \frac{1}{m}\cdot t$$



Нужно мгновенно подать бесконечное количество вольт



$\delta(t)$ = Разряд молнии!



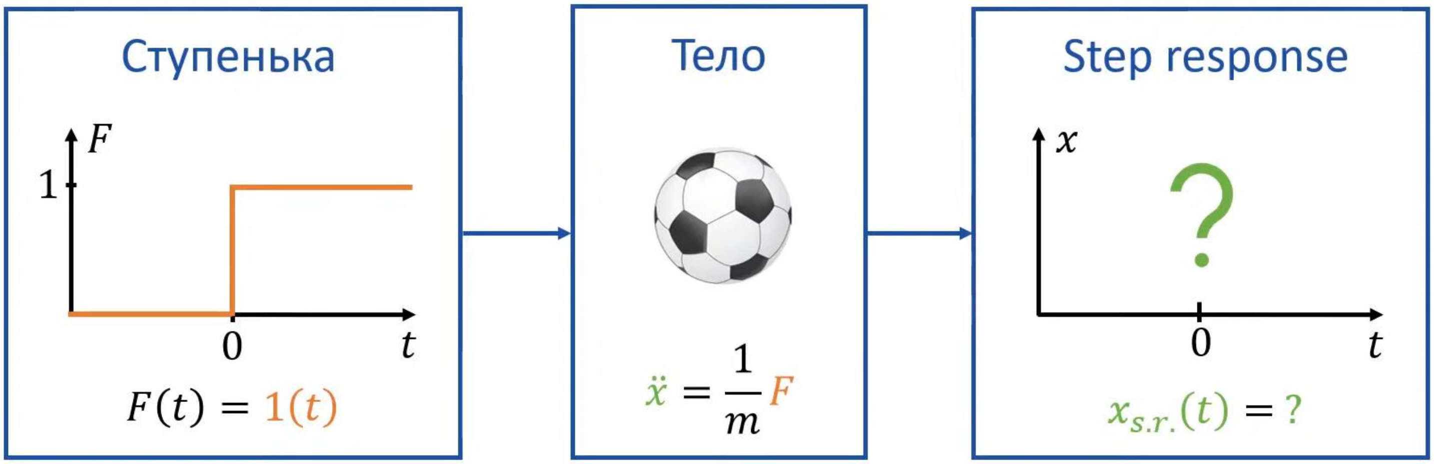
$$\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR}\omega = \frac{k_m}{JR}\delta(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$s\Omega(s) + \frac{k_m k_e}{JR}\Omega(s) = \frac{k_m}{JR}\cdot 1 \longrightarrow \Omega(s) = \frac{\frac{k_m}{JR}}{s + \frac{k_m k_e}{JR}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \omega(t) = \frac{k_m}{JR}e^{-\frac{k_m k_e}{JR}\cdot t}$$

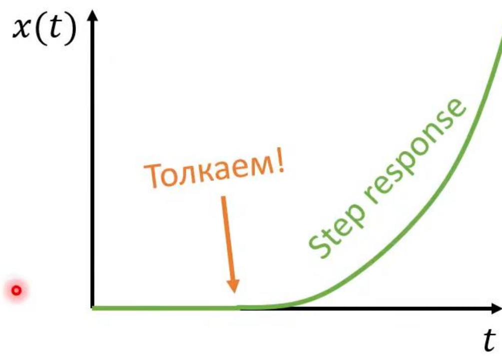
Step response

Вынужденное движение системы, вызванное единичной ступенькой

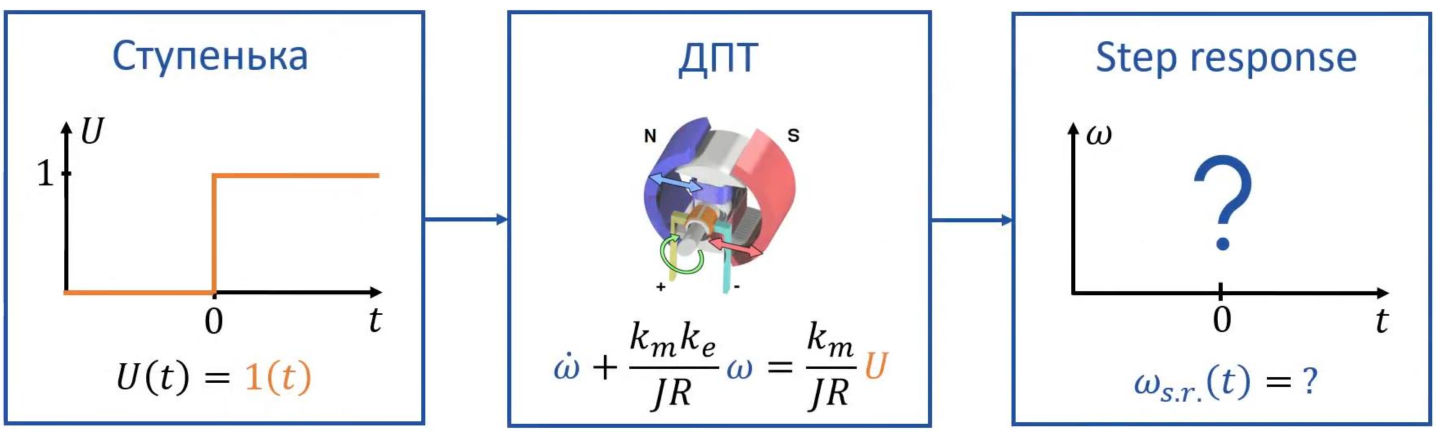


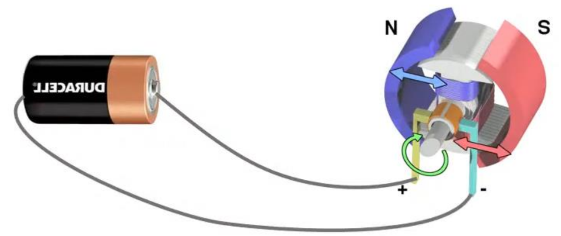
$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} \cdot 1(t)$$

$1(t) =$ Толкаем!
(с постоянной силой)



$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} \cdot 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 X(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s} \longrightarrow X(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x_{s.r.}(t) = \frac{1}{m} \cdot \frac{t^2}{2}$$





$1(t)$ = Подключили батарейку!

$$\boxed{\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR}\omega = \frac{k_m}{JR}\cdot 1(t)}$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$\boxed{s\Omega(s) + \frac{k_m k_e}{JR}\Omega(s) = \frac{k_m}{JR}\cdot\frac{1}{s}} \longrightarrow \boxed{\Omega(s) = \frac{\frac{k_m}{JR}}{s\cdot\left(s+\frac{k_m k_e}{JR}\right)}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{\omega(t) = \frac{1}{k_e} - \frac{1}{k_e}e^{-\frac{k_m k_e}{JR}\cdot t}}$$

Передаточная функция

Изображением Лапласа чего
является передаточная функция?

$$\mathcal{L}\{\,?\,\} = W(s)$$

Вынужденное движение

$$Y_{\text{вын}}(s) = W(s)\cdot U(s)$$

$$u(t) = \delta(t)$$
$$U(s) = 1$$

Impulse response (весовая функция)

$$Y_{i.r.}(s) = W(s)\cdot 1$$

Образ Лапласа весовой функции

$$\boxed{\mathcal{L}\{y_{i.r.}(t)\} = W(s)}$$

Весовая функция
также обозначается $w(t)$

Буква W происходит от
слова “weight”

Связь между весовой и передаточной функцией

Изображение Лапласа переходной функции

$$\mathcal{L}\{y_{s.r.}(t)\} = W(s)\cdot\frac{1}{s}$$

Изображение Лапласа весовой функции

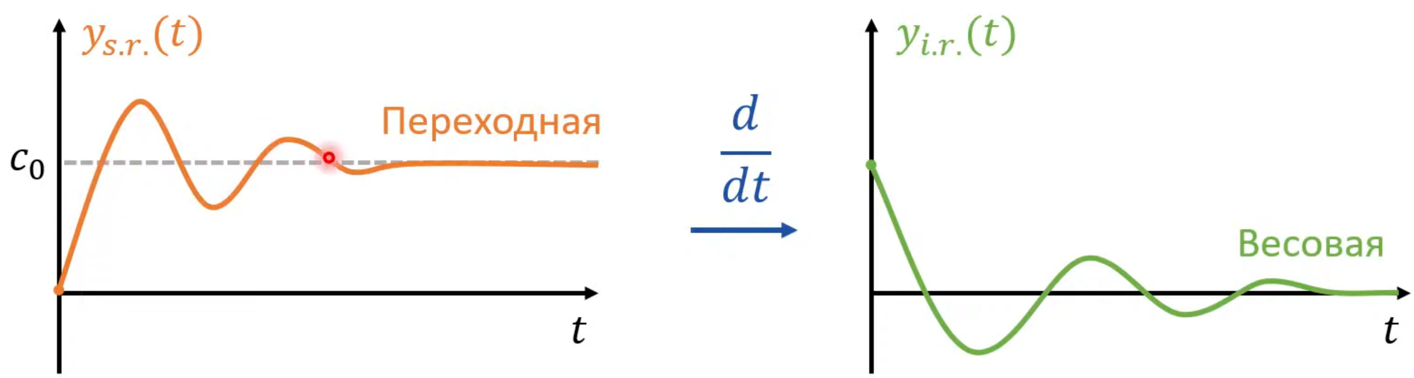
$$\mathcal{L}\{y_{i.r.}(t)\} = W(s)$$

Умножение на s

Весовая функция является производной от переходной функции

$$\frac{dy_{s.r.}(t)}{dt} = y_{i.r.}(t)$$

Обычно выглядят как-то так



$$y_{s.r.}(t) = c_0 + c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \cdots$$

$$y_{i.r.}(t) = d_1e^{\lambda_1 t} + d_2e^{\lambda_2 t} + \cdots$$

Все моды одинаковые, только тут дополнительная константа

Свёртка + Лаплас

Свёртка (convolution)

$$f * g = h$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Свёртка (convolution)

$$f * g = h$$

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

(если $f(\tau)$ и $g(\tau)$ равны нулю при $\tau < 0$)

Преобразование Лапласа превращает свёртку функций в произведение их изображений

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$$

Любое произведение изображений Лапласа…

$$F(s) \cdot G(s)$$

…соответствует свёртке оригиналов

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Вынужденное движение как свёртка

$$Y(s) = Y_{\text{св}}(s) + W(s) \cdot U(s)$$

$$Y(s) = Y_{\text{св}}(s) + Y_{i.r.}(s) \cdot U(s)$$

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{i.r.}(t) * u(t)$$

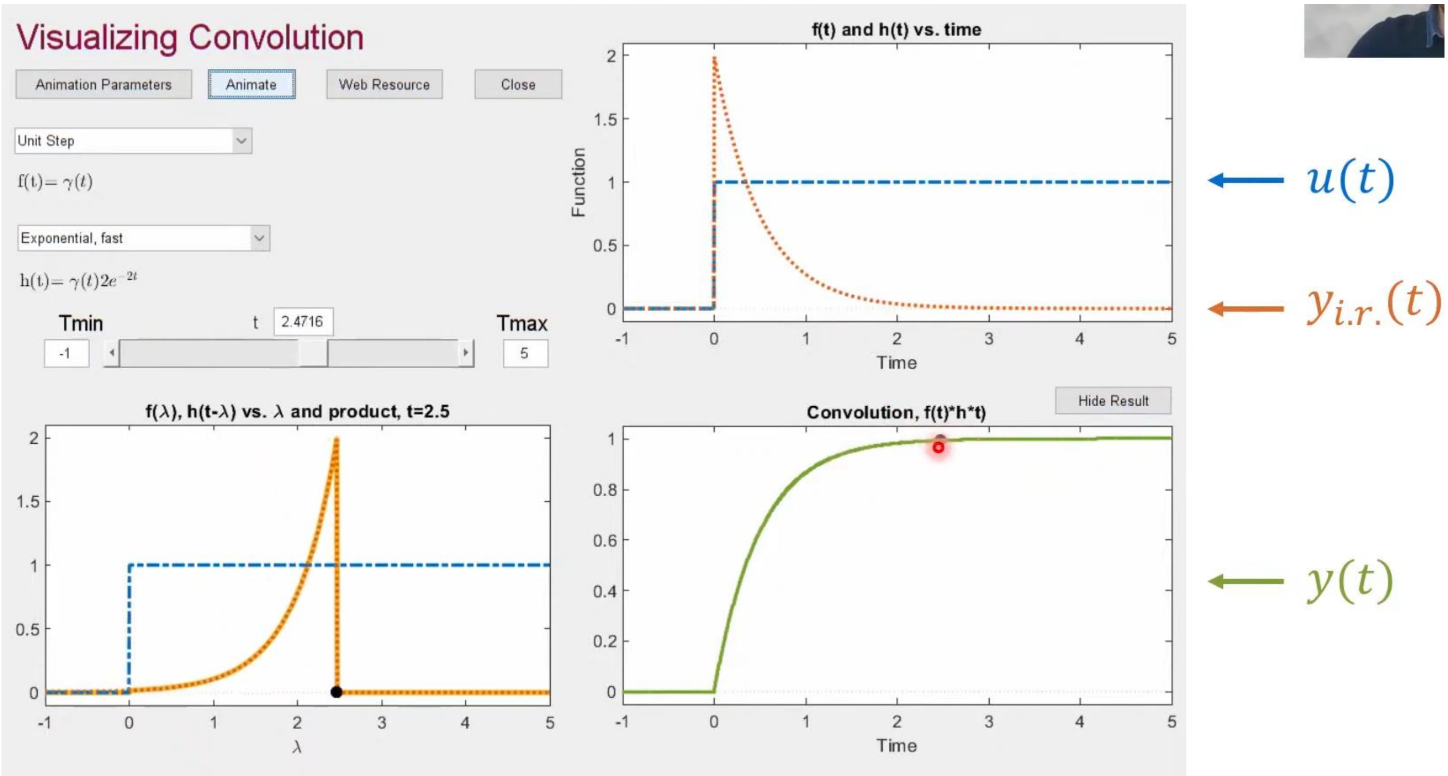
$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + \int_0^t y_{i.r.}(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

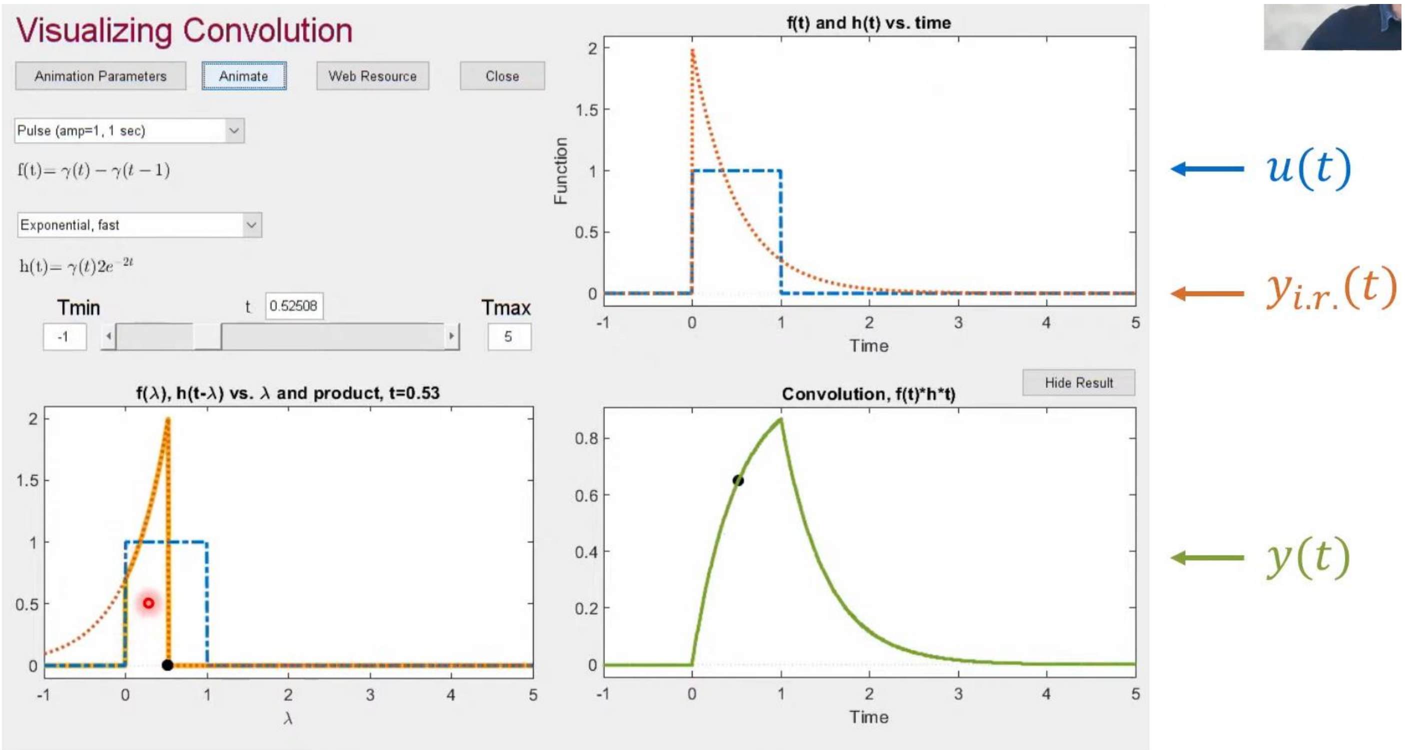
Выход системы → $\boxed{y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{i.r.}(t) * u(t)}$

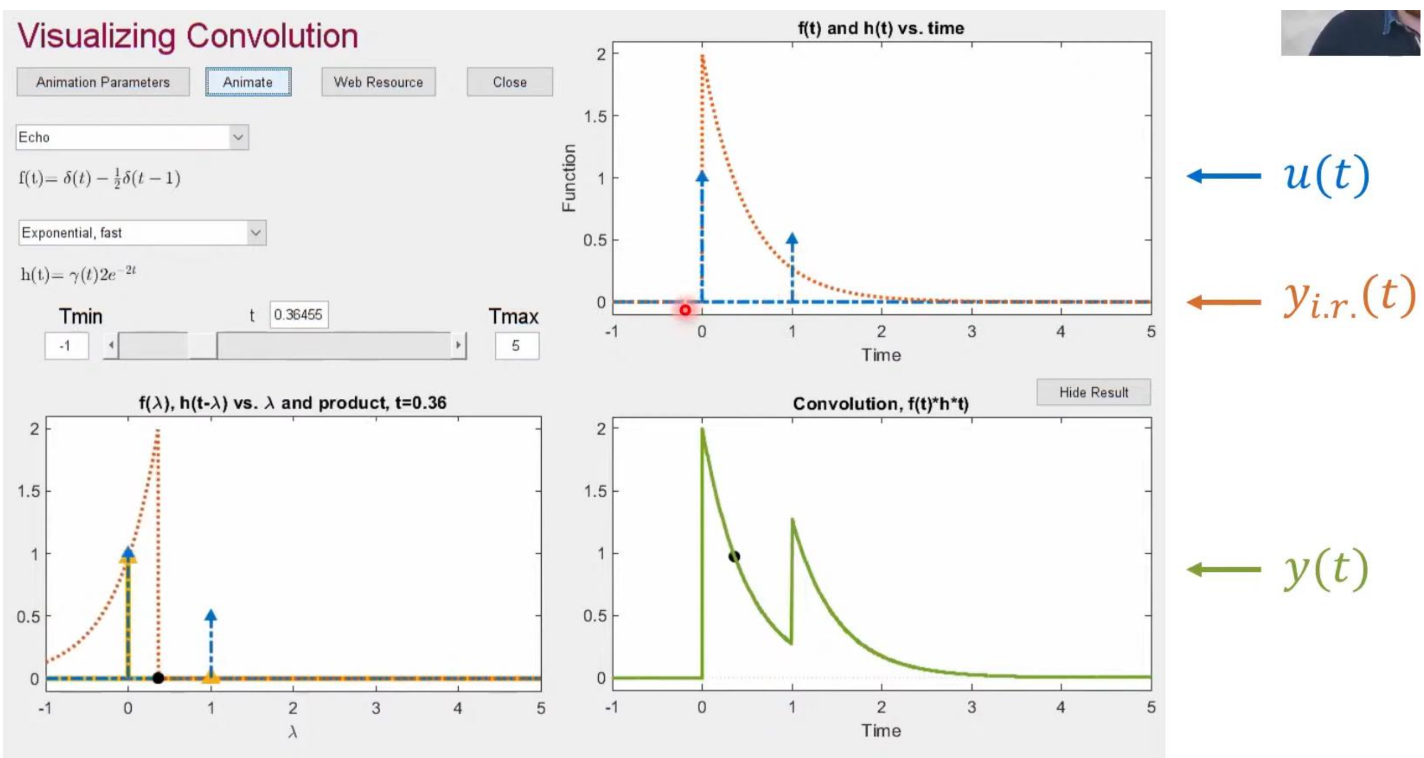
Свободное движение

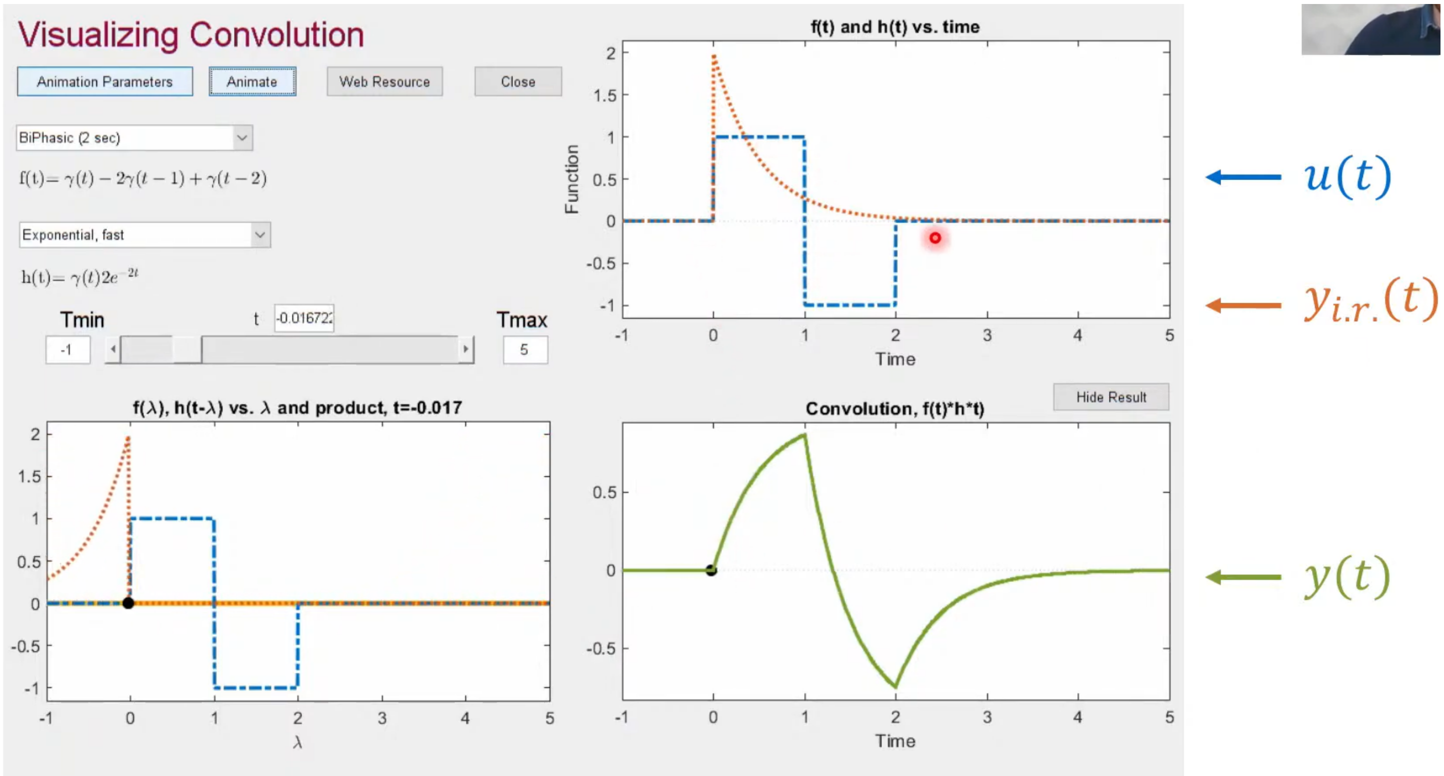
Реакция системы на единичный импульс

Входное воздействие

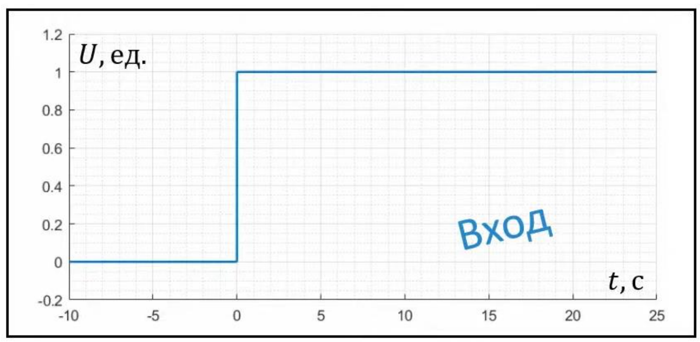


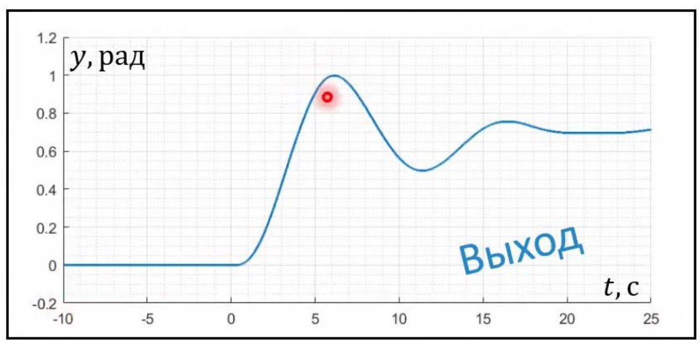

Visualizing Convolution
Animation Parameters
Animate
Web Resource
Close
Pulse (amp=1, 1 sec)
f(t)= γ(t) − γ(t − 1)
Exponential, fast
h(t)= γ(t)2e^{−2t}
Tmin
t
0.52508
Tmax
-1
5
f(λ), h(t-λ) vs. λ and product, t=0.53
λ
f(t) and h(t) vs. time
Function
Time
Hide Result
Convolution, f(t)*h*t)
Time
u(t)
y_{i.r.}(t)
y(t)

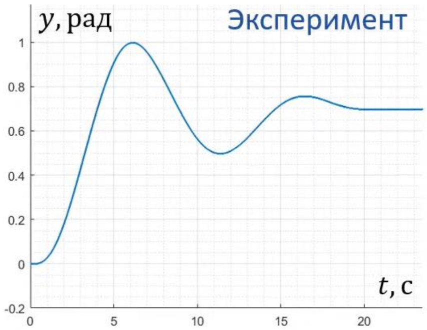

Visualizing Convolution
Animation Parameters
Animate
Web Resource
Close
Echo
f(t)= δ(t) − ½δ(t − 1)
Exponential, fast
h(t)= γ(t)2e^{−2t}
Tmin
t
0.36455
Tmax
-1
5
f(λ), h(t-λ) vs. λ and product, t=0.36
λ
f(t) and h(t) vs. time
Function
Time
Hide Result
Convolution, f(t)*h*t)
Time
u(t)
y_{i.r.}(t)
y(t)

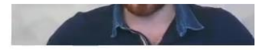


Экспериментальная переходная функция









$$y_{s.r.}(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t + c_3 e^{\lambda t} + c_4$$

Колебательные моды (потому что маятник)

Апериодическая мода (потому что ДПТ)

Константа (потому что step)

По МНК

$$c_1 = -0.520 \qquad c_2 = -0.465 \qquad c_3 = -0.235$$
$$\alpha = -0.131 \qquad \beta = 0.609 \qquad \lambda = -1.089 \qquad c_4 = 0.7$$

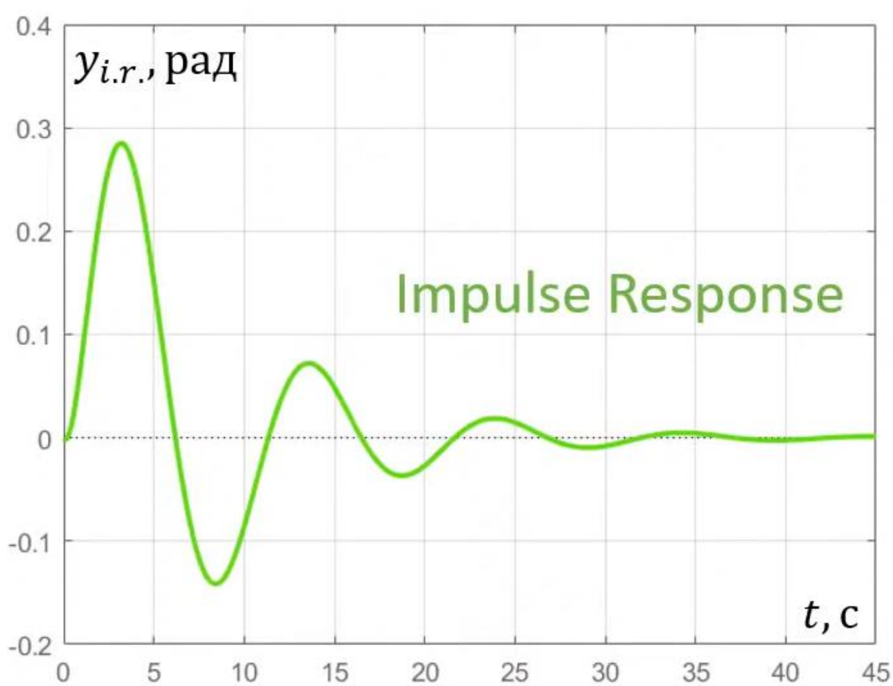
$$Y_{s.r.}(s) = \frac{c_1(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{c_2\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{c_3}{s-\lambda} + \frac{c_4}{s}$$

$$W(s) = s \cdot Y_{s.r.}(s)$$

$$W(s) = s \cdot Y_{s.r.}(s) = \frac{-0.032s + 0.296}{s^3 + 1.35s^2 + 0.673s + 0.423}$$

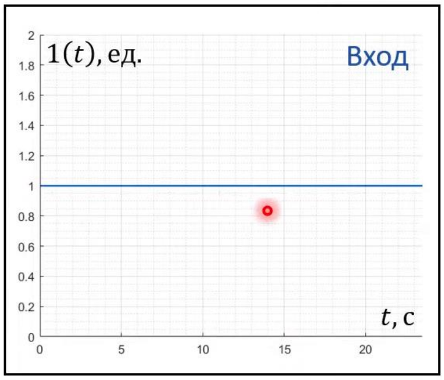
$$W(s) = \frac{-0.032s + 0.296}{s^3 + 1.35s^2 + 0.673s + 0.423}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

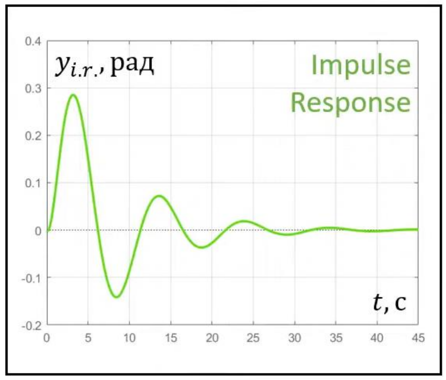


Экспериментально узнали переходную функцию, вычислили весовую…

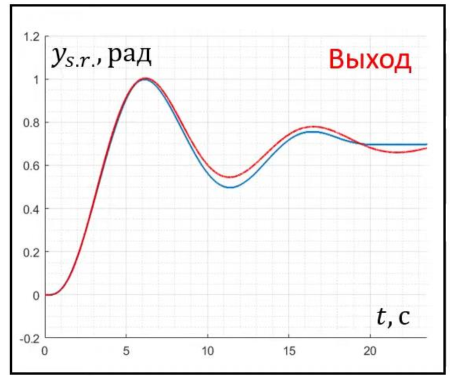
Функция Хевисайда | **Весовая функция** | **Переходная функция**



*

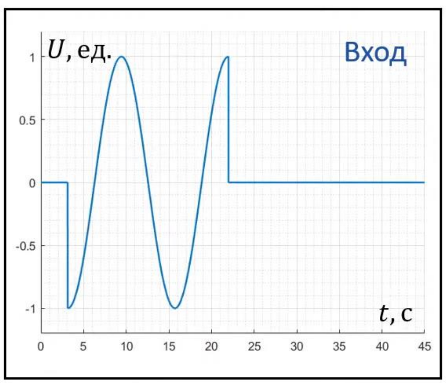


=

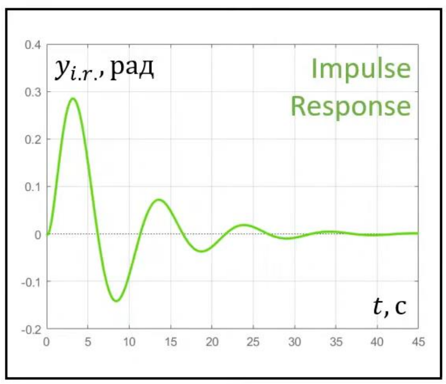


Теперь можем предсказывать вынужденное движение при любом входном воздействии!

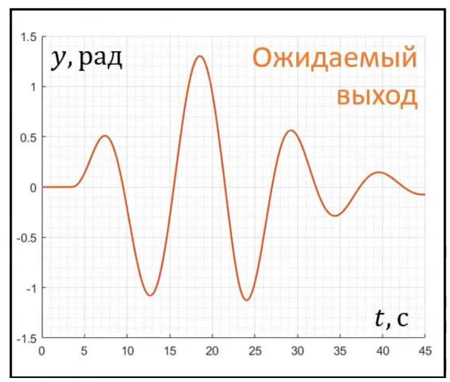
Произвольная функция | **Весовая функция** | **Вынужденное движение**

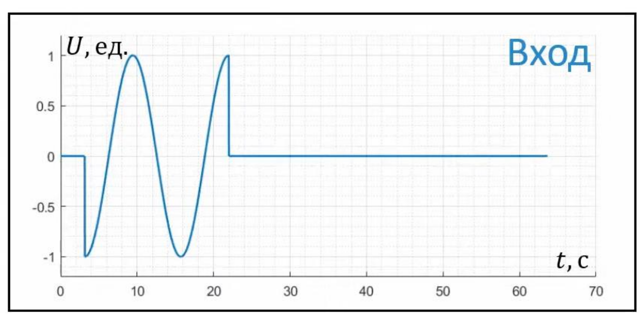


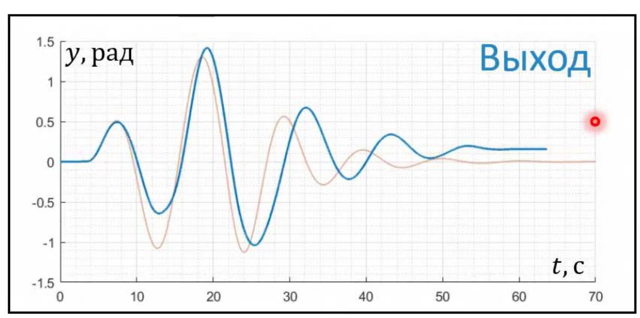
*



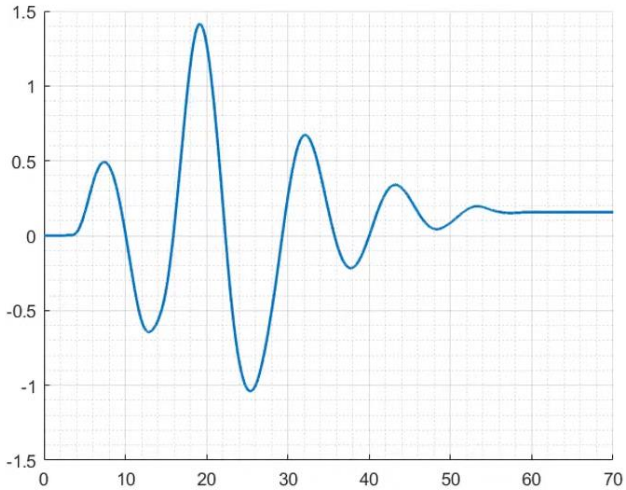
=







Реальный выход



Предсказанный выход