

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Цель работы. Исследование точностных свойств систем управления.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны получить от преподавателя вариант задания. К занятию допускаются студенты, получившие аналитическое выражение для установившейся ошибки из п.4.2 (см. порядок выполнения работы). Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

Теоретические сведения. Точность работы любой системы управления наиболее полно характеризуется мгновенным значением ошибки слежения, равной разности между требуемым и действительным значениями регулируемой переменной $e(t) = g(t) - y(t)$. Однако в большинстве задач управления реальными объектами задающие и возмущающие воздействия заранее точно неизвестны и, следовательно, определить *заранее* величину $e(t)$ для всех моментов времени не представляется возможным. Поэтому точностные свойства системы, как правило, оцениваются при типовых входных воздействиях — постоянном, линейно или квадратично нарастающем. Для характеристики точностных свойств системы управления используется понятие *установившейся ошибки слежения*, а также *предельного значения установившейся ошибки слежения*. Установившаяся ошибка $e_y(t)$ представляет собой функцию времени, удовлетворяющую условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) - e_y(t)) = 0 \quad (7.1)$$

для любых начальных условий $e(0)$ и заданного входного воздействия $g(t)$. Другими словами, она характеризует ошибку слежения, установившуюся после завершения переходного процесса. Предельное значение установившейся ошибки ε определяется выражением

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (7.2)$$

(при условии, что предел (7.2) существует).

Величина предельного значения установившейся ошибки при типовом задающем воздействии может быть достаточно просто рассчитана по передаточной функции системы. Пусть образы Лапласа ошибки слежения $E(s) = L\{e(t)\}$ и сигнала задания $G(s) = L\{g(t)\}$ связаны соотношением

$$E(s) = \Phi_e(s) G(s), \quad (7.3)$$

где $\Phi_e(s)$ — известная *передаточная функция замкнутой системы по ошибке слежения* (относительно задающего воздействия). Например, для систем с единичной отрицательной обратной связью (см. рис.7.1) имеем

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + W(s)},$$

где $W(s)$ — *передаточная функция разомкнутой системы*, включающая в себя пере-

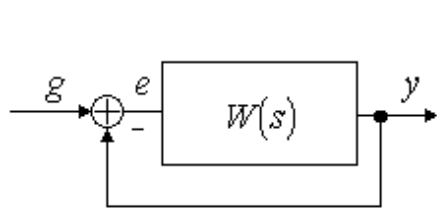


Рис 7.1. Система с единичной отрицательной обратной связью

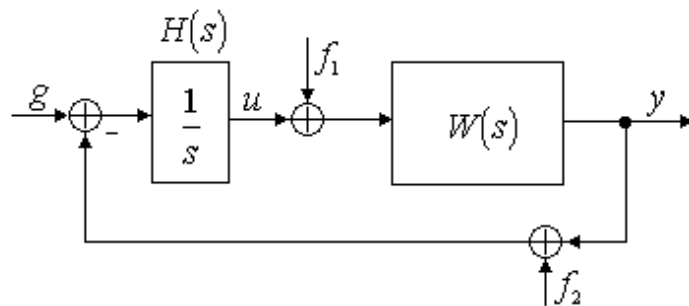


Рис. 7.2. Возмущённая система управления (f_1 — возмущение по управлению, f_2 — ошибка измерительного устройства).

дательные функции регулятора и объекта управления. Тогда, в соответствии с теоремой о предельном переходе во временной области, имеем

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) G(s).$$

Образы Лапласа типовых задающих воздействий приведены в таблице 7.1.

Для приближенной оценки установившейся ошибки слежения $e_y(t)$ при произвольном (но достаточно гладком) входном воздействии $g(t)$ можно воспользоваться следующей методикой. Разложим $\Phi_e(s)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $s = 0$

$$\Phi_e(s) = c_0 + c_1 s + \frac{c_2}{2!} s^2 + \frac{c_3}{3!} s^3 + \dots, \quad (7.4)$$

где $c_i = \left[\frac{d^i}{ds^i} \Phi_e(s) \right]_{s=0}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Тогда, подставляя (7.4) в (7.3) и переходя во временную область, получаем выражение установившейся ошибки при произвольном входном воздействии

$$e_y(t) = c_0 g(t) + c_1 \frac{d}{dt} g(t) + \frac{c_2}{2!} \frac{d^2}{dt^2} g(t) + \frac{c_3}{3!} \frac{d^3}{dt^3} g(t) + \dots, \quad (7.5)$$

где постоянные c_i носят название *коэффициентов ошибок*. Если $g(t)$ изменяется дос-

Таблица 7.1

Образы Лапласа типовых задающих воздействий

Типовое воздействие	Постоянное $g(t) = A$	Линейно возрастающее $g(t) = Vt$	Квадратично возрастающее $g(t) = \frac{at^2}{2}$
Образ Лапласа $G(s)$	$\frac{A}{s}$	$\frac{V}{s^2}$	$\frac{a}{s^3}$

точно медленно, то для приближенной оценки $e_y(t)$ можно использовать конечное число членов ряда (7.5).

Замечание. Так как $\Phi_e(s)$ является дробно-рациональной функцией, то коэффициенты ошибок можно получить делением числителя $\Phi_e(s)$ на знаменатель и сравнением получающегося ряда с выражением (7.4).

В качестве универсальной характеристики точностных свойств систем управления используется понятие *порядка астатизма* (по отношению к входному воздействию). Система называется *статической* (или — с *нулевым порядком астатизма*), если в выражении (7.5) $c_0 \neq 0$. Говорят, что система имеет k -й *порядок астатизма*, если в выражении (7.5) $c_i = 0$ для всех $0 \leq i < k$ и $c_k \neq 0$.

Для систем с единичной отрицательной обратной связью (см. рис. 7.1) порядок астатизма может быть достаточно просто определен на основе анализа структурных свойств системы. Так, система на рис. 7.1 является *статической* (т.е. с *нулевым порядком астатизма*), если

$$\lim_{s \rightarrow 0} W(s) = k < \infty,$$

где k — *общий коэффициент усиления разомкнутой системы*. Для статической системы при постоянном входном воздействии $g(t) = A$ имеем

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+W(s)} \frac{A}{s} = \frac{A}{1+k}.$$

Последнее выражение означает, что постоянное входное воздействие отрабатывается с ненулевой установившейся ошибкой (с так называемой, *статической ошибкой*). При линейно нарастающем входном воздействии $g(t) = Vt$ имеем

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+W(s)} \frac{V}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+k} \frac{V}{s} = \infty,$$

откуда следует, что линейно возрастающее задающее воздействие отрабатывается статической системой с неограниченно растущей ошибкой.

Система на рис. 7.1 является *астатической*, если

$$\lim_{s \rightarrow 0} W(s) = \infty$$

и передаточная функция разомкнутой системы $W(s)$ может быть представлена в виде

$$W(s) = \frac{1}{s^r} W^*(s),$$

где $W^*(s)$ — передаточная функция статической системы (т.е. $\lim_{s \rightarrow 0} W^*(s) = k < \infty$, где k — добротность системы по соответствующей производной выходной переменной: по скорости, ускорению и т. д.). При этом число r соответствует порядку астатизма.

Для системы с первым порядком астатизма при постоянном входном воздействии $g(t) = A$ имеем

Таблица 7.2

Соответствие порядка астатизма предельному значению установившейся ошибки слежения

Порядок астатизма	Предельное значение установившейся ошибки ε при различных видах задающего воздействия		
	Постоянное $g(t) = A$	Линейно возрастающее $g(t) = Vt$	Квадратично возрастающее $g(t) = \frac{at^2}{2}$
0	$\frac{A}{1+k}$	∞	∞
1	0	$\frac{V}{k}$	∞
2	0	0	$\frac{a}{k}$

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+W(s)} \frac{A}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+\frac{W^*(s)}{s}} A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+k} A = 0,$$

а при линейно нарастающем воздействии $g(t) = Vt$

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+W(s)} \frac{V}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+k} \frac{V}{s} = \frac{V}{k}.$$

Таблица 7.2 демонстрирует соответствие между порядком астатизма и предельным значением установившейся ошибки слежения.

Аналогичным образом может быть введено понятие *порядка астатизма по возмущающему воздействию*. Особо отметим, что порядок астатизма по задающему воздействию, в общем случае, не соответствует порядку астатизма по возмущению. В качестве примера рассмотрим задачу стабилизации ($g(t) \equiv 0$) системы, представленной на рис.7.2, где $H(s) = 1/s$ — передаточная функция регулятора, $W(s)$ — передаточная функция объекта управления ($\lim_{s \rightarrow 0} W(s) = k$), $f_1(t)$ — возмущение по управлению, $f_2(t)$ — ошибка измерительного устройства, рассматриваемая в качестве возмущения по выходу. Очевидно, что замкнутая система по задающему воздействию обладает порядком астатизма, равным единице.

На основе анализа структурной схемы системы можно записать

$$e = g - y = -y = -W(s) \left(f_1 - \frac{1}{s} (f_2 + y) \right) = -W(s) \left(f_1 - \frac{1}{s} (f_2 - e) \right)$$

или

$$(1 + \frac{1}{s} W(s)) e = -W(s) f_1 + \frac{1}{s} W(s) f_2.$$

После элементарных преобразований окончательно получаем

$$e = -\frac{W(s)}{1 + \frac{1}{s}W(s)} f_1 + \frac{\frac{1}{s}W(s)}{1 + \frac{1}{s}W(s)} f_2 = -\frac{sW(s)}{s + W(s)} f_1 + \frac{W(s)}{s + W(s)} f_2.$$

Пусть возмущения $f_1(t) = F_1$ и $f_2(t) = F_2$ являются постоянными. Тогда

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} \left[-s \frac{sW(s)}{s + W(s)} \frac{F_1}{s} + s \frac{W(s)}{s + W(s)} \frac{F_2}{s} \right] = F_2.$$

Таким образом, возмущение f_2 дает статическую ошибку (величина которой не зависит от параметров системы управления), а влияние возмущения f_1 полностью компенсировано. В общем случае, факт наличия или отсутствия установившейся ошибки должен быть определен для каждого действующего на систему возмущения на основе анализа соответствующих передаточных функций от возмущения к ошибке, вне зависимости от порядка астатизма системы по задающему воздействию.

Порядок выполнения работы.

1. Исследование системы с астатизмом нулевого порядка. Структура системы представлена на рис.7.3, где $H(s) = k$. Варианты передаточной функции объекта управления $W(s)$, а также характеристики задающего воздействия $g(t)$ приведены в табл.7.3.

1.1. Исследование стационарного режима работы: $g(t) = A$. Получить переходные процессы для трех различных значений коэффициента k и определить предельное

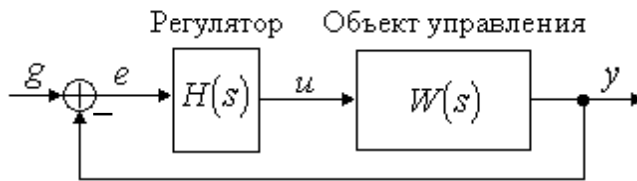


Рис. 7.3. Структурная схема моделируемой системы

значение установившейся ошибки ε . Значения коэффициента k (здесь и во всех последующих пунктах): 1, 5, 10.

1.2. Исследование режима движения с постоянной скоростью: $g(t) = Vt$. Получить переходные процессы для различных значений коэффициента k . Интервал наблюдения — 30 секунд.

2. Исследование системы с астатизмом первого порядка. Структура системы представлена на рис.7.3, где $H(s) = k/s$. Варианты передаточной функции объекта управления $W(s)$, а также характеристики квадратично нарастающего задающего воздействия $g(t) = at^2/2$ приведены в табл.7.4. Характеристики постоянного и линейно нарастающего задающих воздействий взять из табл.7.3.

2.1. Исследование стационарного режима работы: $g(t) = A$. Получить переходные процессы для различных значений коэффициента k и определить предельное значение установившейся ошибки ε .

2.2. Исследование режима движения с постоянной скоростью: $g(t) = Vt$. Получить переходные процессы для различных значений коэффициента k и определить предельное значение установившейся ошибки ε . Интервал наблюдения — 30 секунд.

2.3. Исследование режима движения с постоянным ускорением: $g(t) = at^2 / 2$. Получить переходные процессы для различных значений коэффициента k . Интервал наблюдения — 30 секунд.

3. Исследование влияния внешних возмущений.

3.1. В соответствии с вариантом задания (см. табл.7.5 и рис.7.4) собрать схему моделирования возмущенной системы. При этом вид передаточной функции $W(s)$ взять из табл.7.3.

3.2. Полагая $f_2(t) \equiv 0$ и $g(t) = 1(t)$, получить переходной процесс и определить предельное значение установившейся ошибки ε .

3.3. Полагая $f_1(t) \equiv 0$ и $g(t) = 1(t)$, получить переходной процесс и определить предельное значение установившейся ошибки ε .

4. Исследование установившейся ошибки при произвольном входном воздействии. Структура системы представлена на рис.7.3, где $H(s) = 1$. Варианты передаточной функции $W(s)$ взять из табл.7.3, а вид задающего воздействия $g(t)$ из табл. 7.6.

4.1. Получить переходной процесс в замкнутой системе и определить (по графику) установившуюся ошибку слежения $e_y(t)$.

4.2. Получить приближенное аналитическое выражение для $e_y(t)$, сохранив в ряде Тейлора (7.5) три первых члена. Построить график $e_y(t)$ в соответствии с полученным аналитическим выражением (использовать для этого блок нелинейных функций Fnc).

Содержание отчета.

1. Структурные схемы моделируемых систем и графики переходных процессов.
2. Графики экспериментально полученных зависимостей предельных значений установившейся ошибки ε от коэффициента k (пункты 1.1, 2.1 и 2.2 порядка выполнения работы). Аналитическое подтверждение полученных результатов.
3. Аналитический расчет установившихся ошибок в возмущенной системе.
4. Аналитический расчет и графики расчетной и экспериментально определенной установившейся ошибки слежения при произвольном входном воздействии (см. пункт 4.2 порядка выполнения работы).
5. Выводы.

Вопросы к защите лабораторной работы.

1. Можно ли использовать конечное число членов ряда (7.5) для приближенной оценки установившейся ошибки слежения за задающим воздействием вида $g(t) = 3\sin 3t$?
2. Пусть k — общий коэффициент усиления разомкнутой системы с нулевым порядком астатизма. Чему равен коэффициент c_0 в формуле (7.5)?
3. Можно ли компенсировать ошибку измерительного устройства f_2 (см. рис.7.2), повысив порядок астатизма системы по задающему воздействию?
4. Определить предельное значение установившейся ошибки в системе, представленной на рис.7.2, если $g(t) = 1(t)$, $f_1(t) = 2t$ а $f_2(t) \equiv 0$.

Таблица 7.3

Варианты параметров систем с нулевым порядком астатизма

Вариант	$W(s)$	Параметры сигнала задания		Вариант	$W(s)$	Параметры сигнала задания	
		$g = A$	$g = Vt$			$g = A$	$g = Vt$
1	$\frac{2}{3s+1}$	1	$0,5t$	7	$\frac{1}{2s^2+3s+1}$	1	$1,5t$
2	$\frac{3}{2,5s+1}$	2	$2t$	8	$\frac{2}{0,5s^2+2s+1}$	1	$2t$
3	$\frac{1,5}{0,5s+1}$	2	$4t$	9	$\frac{2}{0,5s^2+s+2}$	2	$2t$
4	$\frac{1,5}{s^2+2s+1}$	1	t	10	$\frac{8}{0,5s^2+2s+8}$	2	t
5	$\frac{1}{s^2+s+2}$	2	$2t$	11	$\frac{1}{0,5s^2+1s+1}$	2	$2t$
6	$\frac{5}{s^2+5s+6}$	1	t	12	$\frac{1}{0,1s^2+0,7s+1}$	4	$2t$

Таблица 7.4

Варианты параметров систем с первым порядком астатизма

Вариант	$W(s)$	$g = at^2 / 2$	Вариант	$W(s)$	$g = at^2 / 2$
1	$\frac{2}{3s+1}$	$0,25t^2$	7	$\frac{s+1}{2s^2+3s+1}$	$0,25t^2$
2	$\frac{3}{2,5s+1}$	$0,5t^2$	8	$\frac{s+2}{0,5s^2+2s+1}$	$0,2t^2$
3	$\frac{1,5}{0,5s+1}$	$0,2t^2$	9	$\frac{s+2}{0,5s^2+s+2}$	$0,5t^2$
4	$\frac{s+1,5}{s^2+2s+1}$	$0,4t^2$	10	$\frac{1,5s+8}{0,5s^2+2s+8}$	$0,3t^2$
5	$\frac{s+1}{s^2+s+2}$	$0,3t^2$	11	$\frac{s+1}{0,5s^2+1s+1}$	$0,45t^2$
6	$\frac{s+5}{s^2+5s+6}$	$0,45t^2$	12	$\frac{s+1}{0,1s^2+0,7s+1}$	$0,4t^2$

Таблица 7.5

Варианты возмущенных систем

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Структура системы (см. рис. 7.4)	а)	а)	а)	б)	б)	б)	в)	в)	в)	г)	г)	г)
f_1	1	0,5	-0,5	2	-0,5	-1	-0,25	-0,5	2	1,5	-0,5	0,5
f_2	-0,5	0,5	1	1	0,25	0,5	1	-0,5	0,5	-0,5	0,25	-0,4

Таблица 7.6

Варианты сигнала задания

Вариант	Сигнал задания	Вариант	Сигнал задания	Вариант	Сигнал задания
1	$2 + 3\sin 0,5t$	5	$t + 0,5\cos 0,5t$	9	$2 + 0,1t^2$
2	$0,2t^2 + \sin 0,5t$	6	$0,6t + 0,2t^2$	10	$5 + t$
3	$0,5t + 2\cos 0,1t$	7	$3 + 0,6\sin 0,4t$	11	$0,3t + 2\sin 0,8t$
4	$0,4t + 0,2t^2$	8	$2 + 0,5t$	12	$2 + \cos 0,5t$

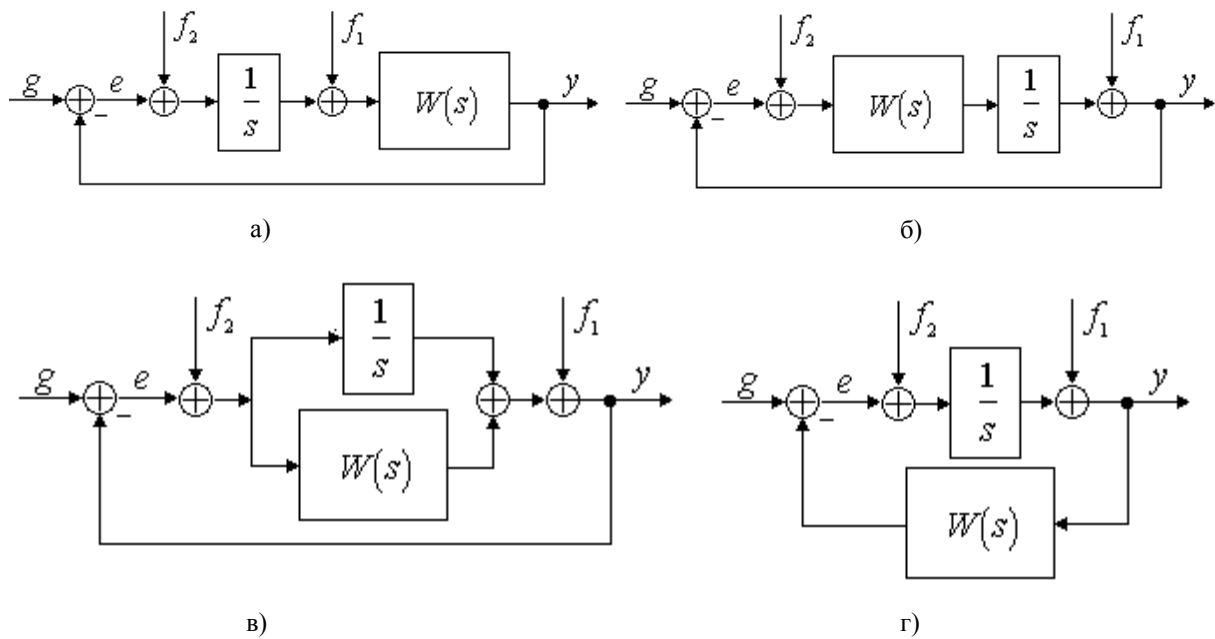


Рис. 7.4. Структурные схемы возмущённых систем.