Работа № 6. Устойчивость систем с запаздыванием

Цель работы. Анализ устойчивости замкнутых линейных систем с запаздыванием.

Теоретические сведения. Линейными системами с запаздыванием называются такие системы, которые в одном или нескольких из своих звеньев имеют запаздывание во времени начала изменения выходной величины (после начала изменения входной) на величину τ, называемую временем запаздывания, причем это время запаздывания остается постоянным и во всем последующем ходе процесса. Например, если обыкновенное линейное звено описывается уравнением

$$T\dot{y} + y = Ku \tag{16}$$

(апериодическое звено первого порядка), то уравнение соответствующего линейного звена с запаздыванием будет иметь вид

$$T\dot{y} + y = Ku(t - \tau) \tag{17}$$

(апериодическое звено первого порядка с запаздыванием). Такого вида уравнения называются уравнениями с запаздывающим аргументом или дифференциально-разностными уравнениями. Обозначим $u^*(t) = u(t - \tau)$. Тогда уравнение (17) запишется в обыкновенном виде:

$$T\dot{y} + y = Ku^*(t). \tag{18}$$

Если входная величина u изменяется скачком от нуля до единицы, то величина $u^*(t) = u(t - \tau)$ изменяется скачком от нуля до единицы на τ секунд позже. Используя переходную характеристику обыкновенного апериодического звена в применении к уравнению (18), получаем изменение выходной величины y (переходную характеристику апериодического звена первого порядка с запаздыванием) в виде графика на рис. 11.

В общем случае уравнение динамики любого линейного звена с запаздыванием можно разбить на два:

$$y(t) = \frac{b(s)}{a(s)} u^*(t), \qquad u^*(t) = u(t - \tau) \tag{19}$$

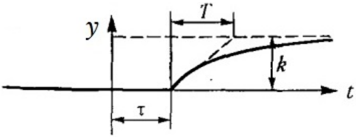

Рис. 11. Переходная характеристика системы (17)

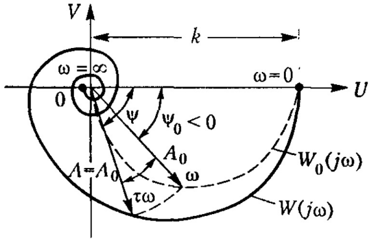

Рис. 12. АФХ системы (17)

что соответствует условной разбивке линейного звена с запаздыванием на два: обыкновенное линейное звено того же порядка и с теми же коэффициентами и предшествующий ему элемент запаздывания. Временная характеристика любого звена с запаздыванием будет, следовательно, такая же, как у соответствующего обыкновенного звена, но только сдвинута по оси времени вправо на величину τ.

Представим второе из соотношений (19) для элемента запаздывания в операторном виде. Разложив правую часть его в ряд Тейлора, получим

$$u(t-\tau) = u(t) + \frac{\dot{u}(t)}{1!}(-\tau) + \frac{\ddot{u}(t)}{2!}(-\tau)^2 + \dots + \frac{u^{(n)}(t)}{n!}(-\tau)^n + \dots$$

или, в операторной записи

$$u(t-\tau) = \left[1 + \frac{-\tau s}{1!} + \frac{(-\tau s)^2}{2!} + \dots + \frac{(-\tau s)^n}{n!} + \dots\right] u(t) = e^{-\tau s} u(t).$$

Таким образом, для звена чистого запаздывания получаем передаточную функцию в виде

$$W_\tau(s) = e^{-\tau s}.$$

Уравнение любого линейного звена с запаздыванием (19) будем теперь записывать в виде

$$y(t) = \frac{b(s)}{a(s)} e^{-\tau s} u(t)$$

Передаточная функция линейного звена с запаздыванием будет иметь вид

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} e^{-\tau s} = W_0(s) e^{-\tau s}, \tag{20}$$

где $W_0(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$ — передаточная функция соответствующего обыкновенного линейного звена без запаздывания. Частотная передаточная функция получается из (20) подстановкой $s = j\omega$:

$$W(j\omega) = W_0(j\omega) e^{-j\omega\tau} \tag{21}$$

Для построения амплитудно-фазовой характеристики любого линейного звена с запаздыванием нужно взять характеристику соответствующего обыкновенного линейного звена и каждую ее точку сдвинуть вдоль окружности по часовой стрелке на угол $\tau\omega$, где ω — значение частоты колебаний в данной точке характеристики (рис. 12). Так как в начале амплитудно-фазовой характеристики $\omega = 0$, а в конце $\omega = \infty$, то начальная точка остается без изменения, а конец характеристики асимптотически навивается на начало координат (если степень операторного многочлена $b(s)$ меньше, чем многочлена $a(s)$).

Если имеется разомкнутая система с передаточной функцией (20), то передаточная функция замкнутой системы будет описываться как

$$\overline{W}(s) = \frac{b(s) e^{-\tau s}}{a(s) + b(s) e^{-\tau s}} \tag{22}$$

Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни знаменателя передаточной функции (22), т.е. трансцендентного характеристического уравнения

$$a(s) + b(s) e^{-\tau s} = 0,$$

имели отрицательные вещественные части. Но в отличие от обыкновенного алгебраического уравнения здесь вследствие наличия множителя $e^{-\tau s}$ уравнение может иметь бесконечное количество корней.

К указанным системам применим критерий устойчивости Найквиста. Построение амплитудно-фазовой характеристики и исследование устойчивости по критерию Найквиста лучше всего производить, если исходная и частотная передаточные функции разомкнутой системы представлены в виде (20) и (21) соответственно.

Частотную передаточную функцию системы без запаздывания можно представить в виде

$$W_0(j\omega) = A_0(\omega)e^{j\psi_0(\omega)}, \tag{23}$$

где $A_0(\omega)$ и $\psi_0(\omega)$ — модуль и фаза частотной передаточной функции звена без запаздывания соответственно. Модуль второго сомножителя (21) равен единице, а его аргумент равен $\Delta\psi = \omega\tau$. Поэтому, представив выражение (21) в виде

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\psi(\omega)}$$

получаем значение модуля результирующей частотной передаточной функции

$$|W(j\omega)| = A(\omega) = A_0(\omega)$$

и фазы

$$\psi(\omega) = \psi_0(\omega) - \omega\tau. \tag{24}$$

Таким образом, наличие звена с запаздыванием не меняет модуля и вносит только дополнительный фазовый сдвиг.

На рис. 13 изображена амплитудно-фазовая характеристика, соответствующая (23). Сплошной линией показана исходная характеристика при $\tau = 0$, а пунктиром — характеристика, которая получается при наличии постоянного запаздывания $\tau \neq 0$. Из этих характеристик видно, что наличие дополнительного фазового сдвига $\Delta\psi = \omega\tau$ «закручивает» годограф, особенно в высокочастотной части, по часовой стрелке. Это снижает запас устойчивости, так как вся кривая приближается к точке $(-1, j0)$. По имеющемуся годографу $W_0(jw)$ можно определить критическое значение времени запаздывания $\tau = \tau_{cr}$, при котором система оказывается на границе колебательной устойчивости.

Для этой цели на годографе $W_0(jw)$ отыскивается точка, для которой модуль равен единице (рис. 13). Частоту, соответствующую этой точке, обозначим ω_1, а фазу — ψ_1. При введении постоянного запаздывания $\tau = \tau_{cr}$. условие совпадения этой точки с точкой

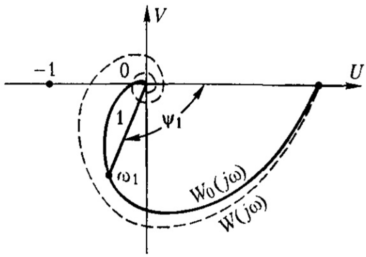

Рис. 13. АФХ системы (23)

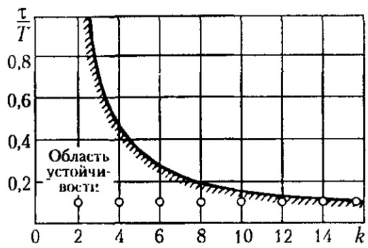

Рис. 14. Область устойчивости замкнутого апериодического звена первого порядка с запаздыванием

$(-1, j0)$ запишется следующим образом:

$$\psi_1 - \omega_1 \tau_{cr} = -\pi,$$

откуда критическое значение запаздывания

$$\tau_{cr} = \frac{\pi + \psi_1}{\omega_1}. \tag{25}$$

Если подобных «опасных» точек будет несколько, то необходимо сделать расчеты для всех точек и взять наименьшее значение τ_{cr}.

Заметим, что частота ω_1 равна частоте среза ЛАХ, $\omega_1 = \omega_{cp}$. Поэтому нахождение ω_1 и ψ_1 удобно делать при наличии построенных ЛАХ и ЛФХ. ЛАХ системы с запаздыванием совпадает с ЛАХ исходной системы без запаздывания. Дополнительный фазовый сдвиг, который надо учесть при построении ЛФХ системы с запаздыванием, определяется (24). В некоторых случаях могут использоваться аналитические расчеты. Рассмотрим систему с апериодическим звеном первого порядка (16). Частотная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_0(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}.$$

Приравняем модуль единице:

$$\frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = 1$$

Отсюда находится частота, соответствующая опасной точке:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{K^2-1}}{T} = 1$$

Фазовый сдвиг на этой частоте

$$\psi_1 = -\mathrm{arctg}(\omega_1 T) = -\mathrm{arctg}\sqrt{K^2-1}$$

По формуле (25) находим критическое запаздывание:

$$\tau_{cr} = \frac{\pi - \mathrm{arctg}\sqrt{K^2-1}}{\omega_1} = T\frac{\pi - \mathrm{arctg}\sqrt{K^2-1}}{\sqrt{K^2-1}}.$$

По этому выражению на рис. 14 построена область устойчивости в координатах «общий коэффициент усиления — относительное запаздывание».

Порядок выполнения работы.

1. Расчет критических значений запаздывания в замкнутой системе

1.1. В соответствии с вариантом задания сформировать передаточную функцию разомкнутой системы без запаздывания. Построить передаточную функцию замкнутой системы.

1.2. Построить амплитудно-фазовую частотную, фазовую частотную, амплитудно-частотную и логарифмическую амплитудно-фазовую частотную характеристики разомкнутой системы для трех различных значений коэффициента усиления k: 1, 5, 10.

1.3. Определить запас устойчивости по амплитуде и запас устойчивости по фазе при различных значениях k.

1.4. Определить критические значения запаздывания для различных значений k.

1.5. Построить графики переходных характеристик замкнутой системы для различных k при соответствующих вычисленных критических запаздываний.

2. Расчет критических значений коэффициента усиления в замкнутой системе

2.1. В соответствии с вариантом задания сформировать передаточную функцию разомкнутой системы с запаздыванием. Построить передаточную функцию замкнутой системы.

2.2. Построить амплитудно-фазовую частотную, фазовую частотную, амплитудно-частотную и логарифмическую амплитудно-фазовую частотную характеристики разомкнутой системы для трех различных значений запаздывания τ: 1, 5, 10.

2.3. Определить запас устойчивости по амплитуде и запас устойчивости по фазе при различных значениях τ.

2.4. Определить критические значения коэффициента усиления для различных значений τ.

2.5. Построить графики переходных характеристик замкнутой системы для различных τ при соответствующих вычисленных коэффициентов усиления.

3. Зависимость критических значений запаздывания и коэффициента усиления для замкнутой системы

3.1. Вывести аналитически зависимость критического запаздывания от коэффициента усиления для заданной системы.

3.2. Построить график зависимости критического запаздывания от коэффициента усиления и определить область устойчивости.

Содержание отчета.

1. Схема замкнутой системы.

2. Графики АЧХ, ФЧХ, АФЧХ, ЛАФЧХ и переходных характеристик заданной системы для различных k и τ.

3. Таблицы значений запаса устойчивости по амплитуде и запаса устойчивости по фазе при различных значениях k и τ.

4. Таблицы критических значений k и τ для заданных τ и k соответственно.

5. Аналитический расчет критических значений τ для заданной системы.

6. График зависимости критического запаздывания от коэффициента усиления и определить область устойчивости.

7. Листинги для полученных графических и аналитических результатов.

Вопросы.

1. Возможно ли применение критерия Гурвица при анализе устойчивости замкнутых систем с запаздыванием?

2. Возможно ли применение корневого критерия при анализе устойчивости замкнутых систем с запаздыванием?

3. Может ли замкнутая система со звеном (16) в контуре быть

устойчивой при произвольном конечном постоянном запаздывании?

4. Для каких значений τ передаточная функция (20) устойчива, если полином $a(s)$ гурвицев?

5. Какие частотные характеристики системы меняются при возникновении запаздывания в контуре?

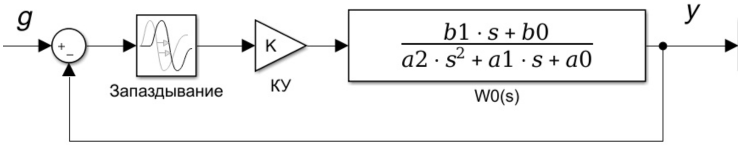

Рис. 15. Схема замкнутой системы с запаздыванием

Таблица 11. Варианты задания

№	a_2	a_1	a_0	b_1	b_0
1	1	1	1	1	1
2	1	3	1	2	0
3	2	0	1	1	2
4	1	7	0	1	3
5	1	5	4	1	4
6	1	4	5	1	0
7	1	2	6	1	3
8	1	6	7	1	1
9	1	3	9	9	2
10	1	1	8	1	9
11	1	9	3	1	3
12	1	8	2	1	4
13	1	6	5	1	2
14	1	7	4	1	3
15	1	1	6	1	0
16	1	2	3	1	1