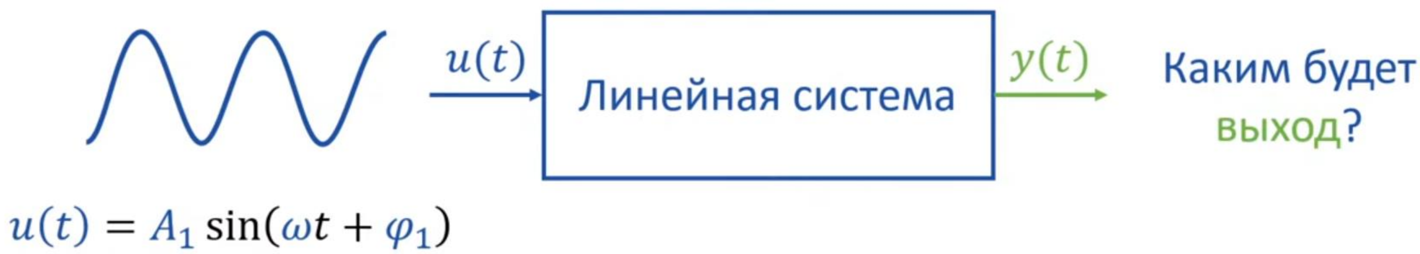
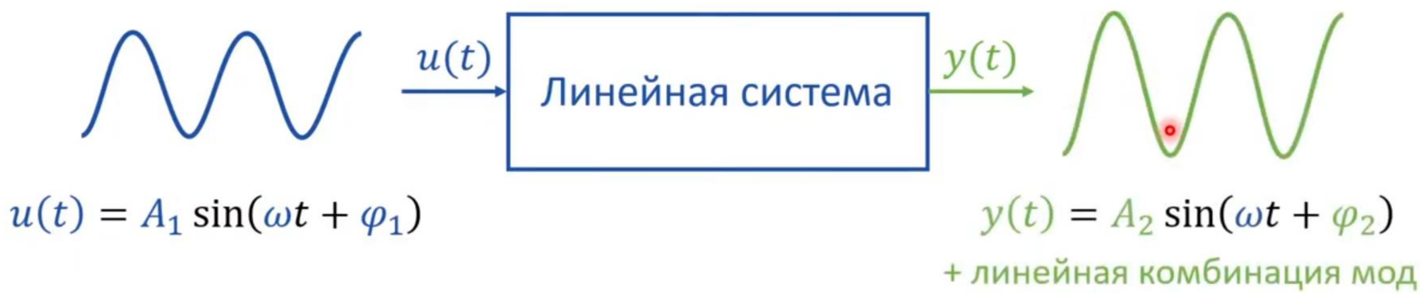
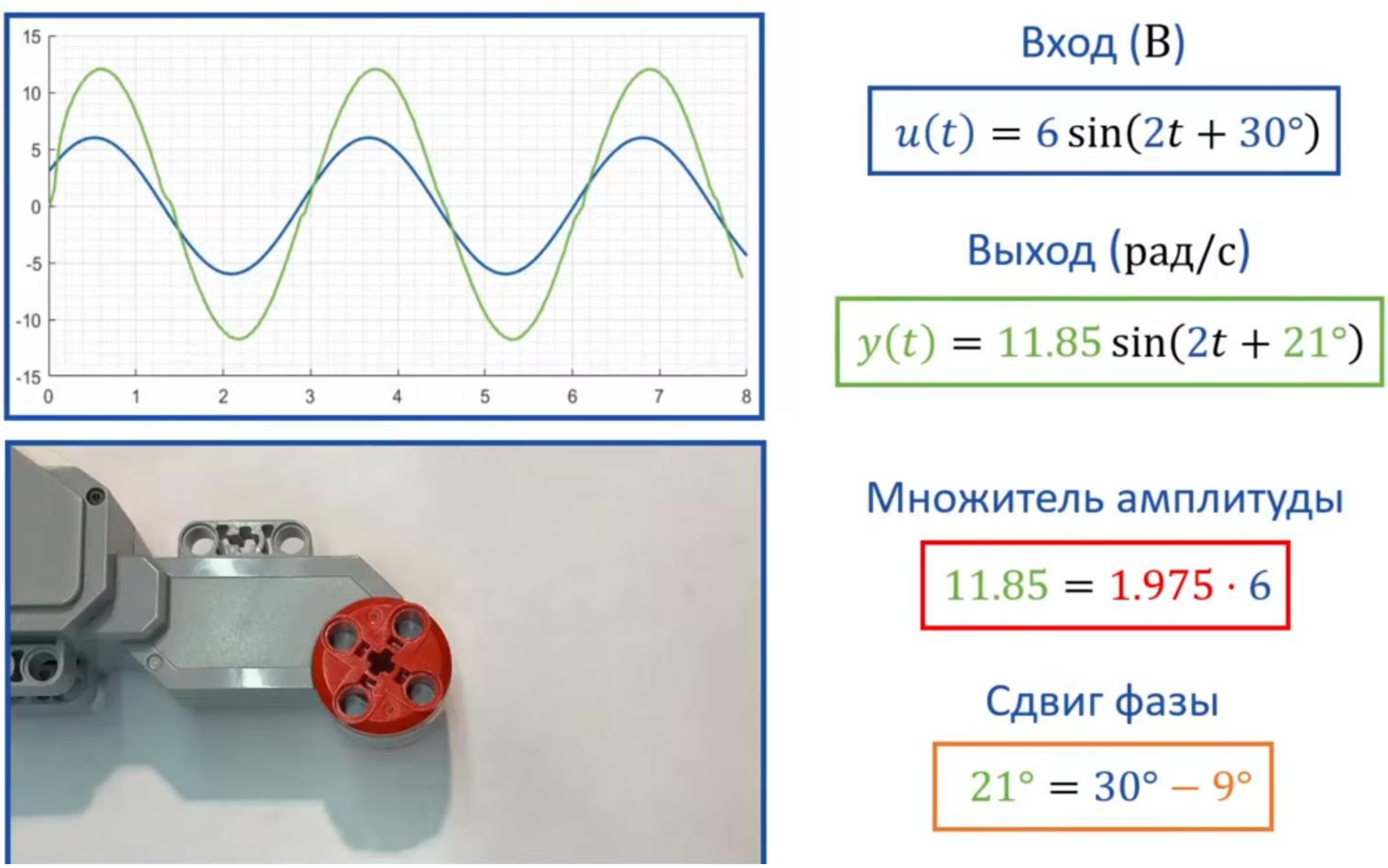
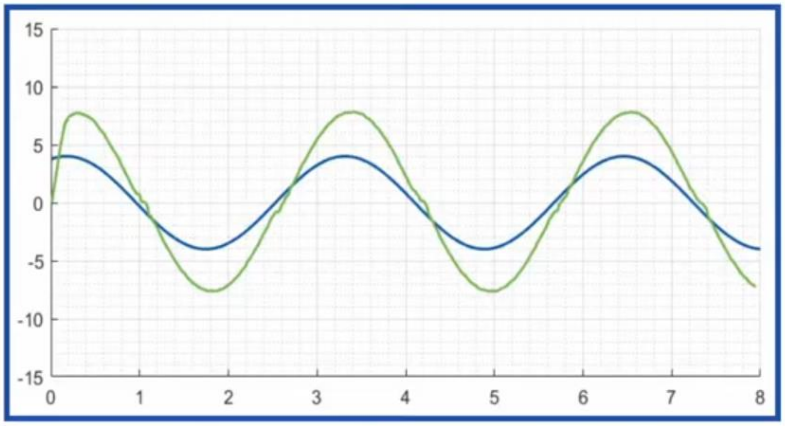
Частотные характеристики

Колеблем систему









Вход (В)

$$u(t) = 4\sin(2t + 70°)$$

Выход (рад/с)

$$y(t) = 7.90\sin(2t + 61°)$$

Множитель амплитуды

$$7.90 = 1.975 \cdot 4$$

Сдвиг фазы

$$61° = 70° - 9°$$

Вход (В)

$$u(t) = 6\sin(2t + 30°)$$

Вход (В)

$$u(t) = 4\sin(2t + 70°)$$

Амплитуда умножилась на 1.975

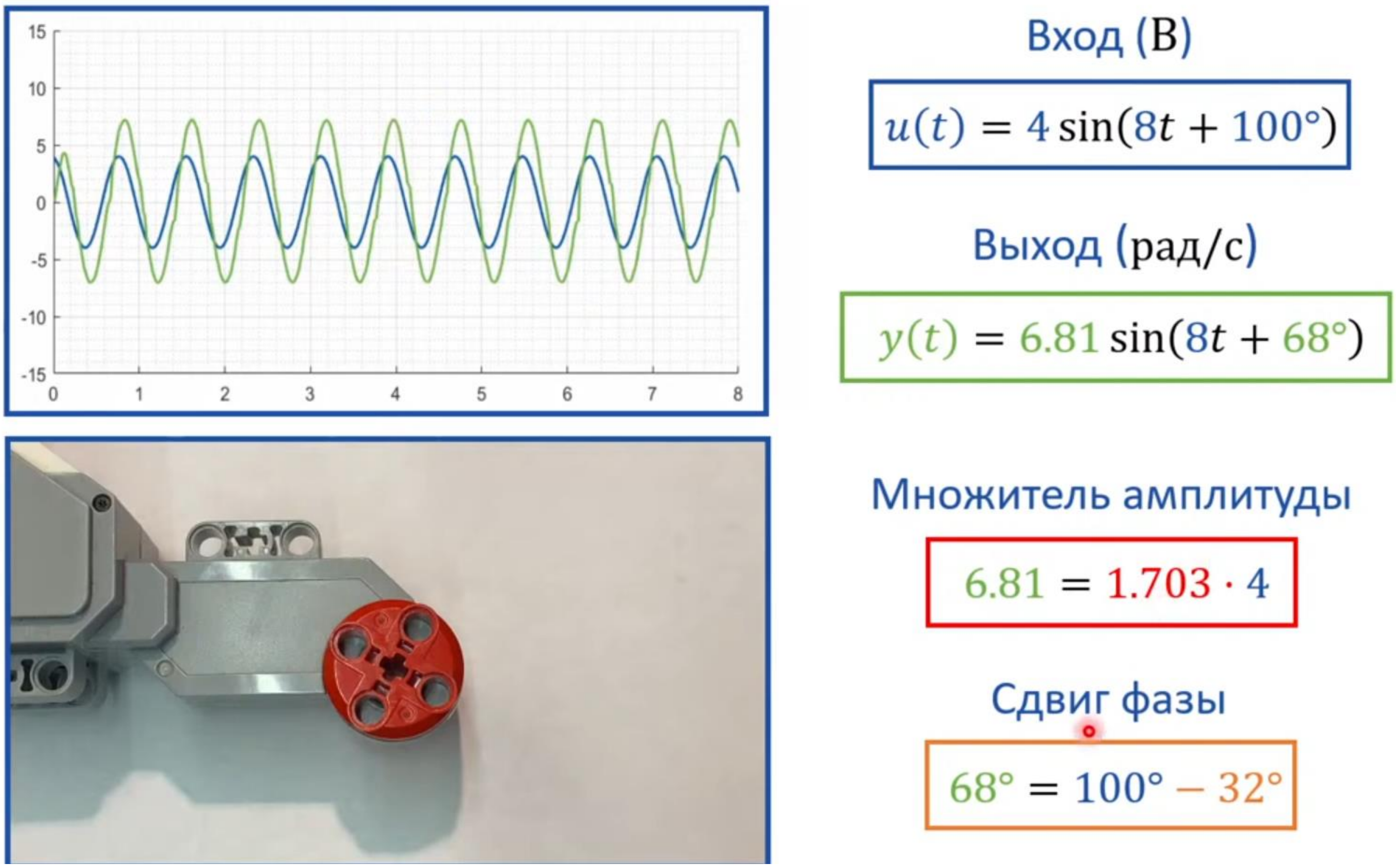
Фаза сдвинулась на $-9°$

Выход (рад/с)

$$y(t) = 11.85\sin(2t + 21°)$$

Выход (рад/с)

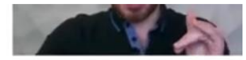
$$y(t) = 7.90\sin(2t + 61°)$$



Дисклеймер

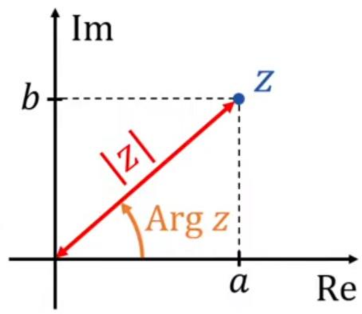
Будем обозначать мнимую единицу буквой j вместо i

Показательная форма комплексного числа



Комплексное число

$$z = a + jb$$



Модуль комплексного числа

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Аргумент комплексного числа

$$\mathrm{Arg}\, z = \mathrm{atan2}(b, a)$$

$$\in (-\pi; \pi)$$

Если z лежит в правой полуплоскости, то можно считать

$$\mathrm{Arg}\, z = \mathrm{atan}(b/a)$$

$$\in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Показательная форма

$$z = |z| e^{j \cdot \mathrm{Arg}\, z}$$

Модуль комплексного числа

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

«Амплитуда»

Аргумент комплексного числа

$$\varphi = \mathrm{atan2}(b, a)$$

«фаза»

Показательная форма

$$z = A e^{j\varphi}$$

Колебания есть сумма двух вращений

Формула Эйлера

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

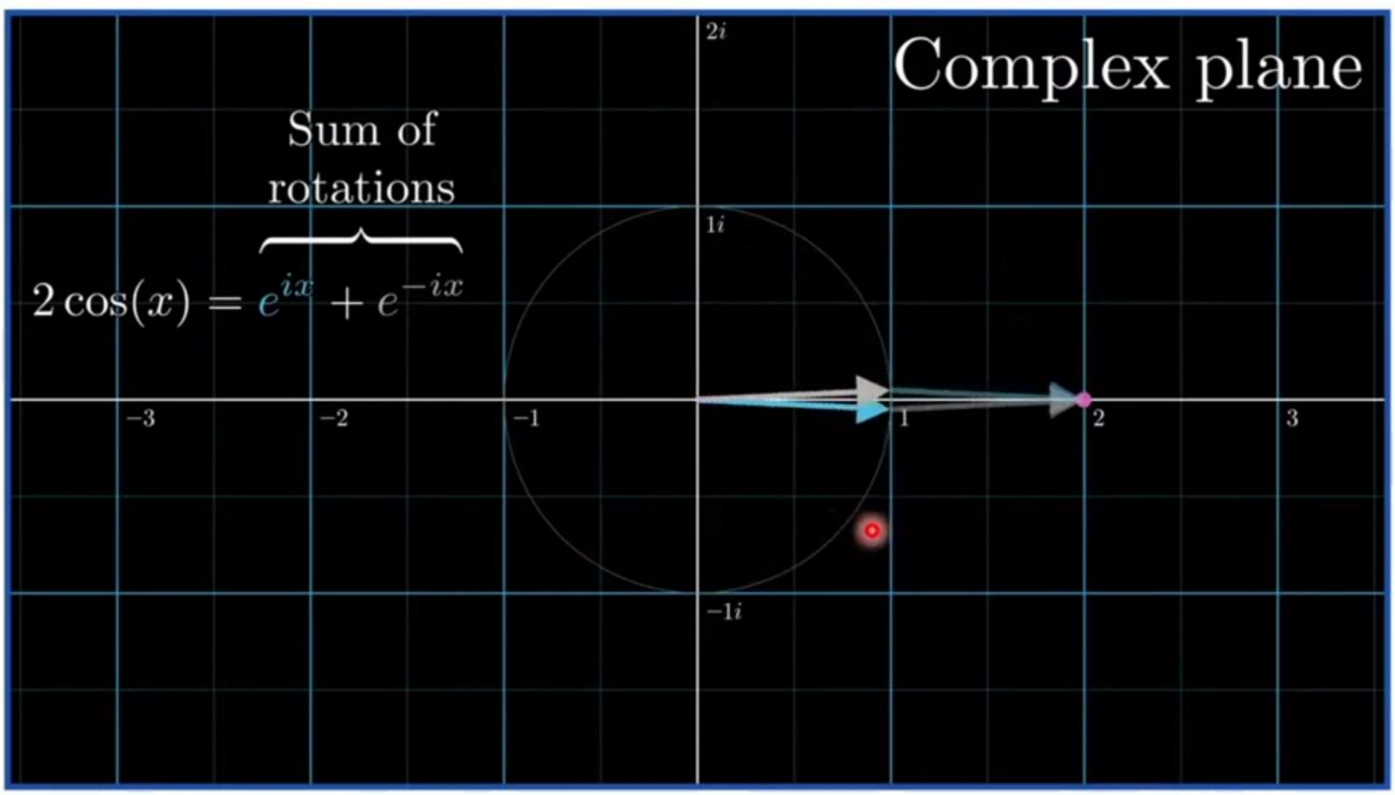
Синус и косинус как сумма экспонент

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

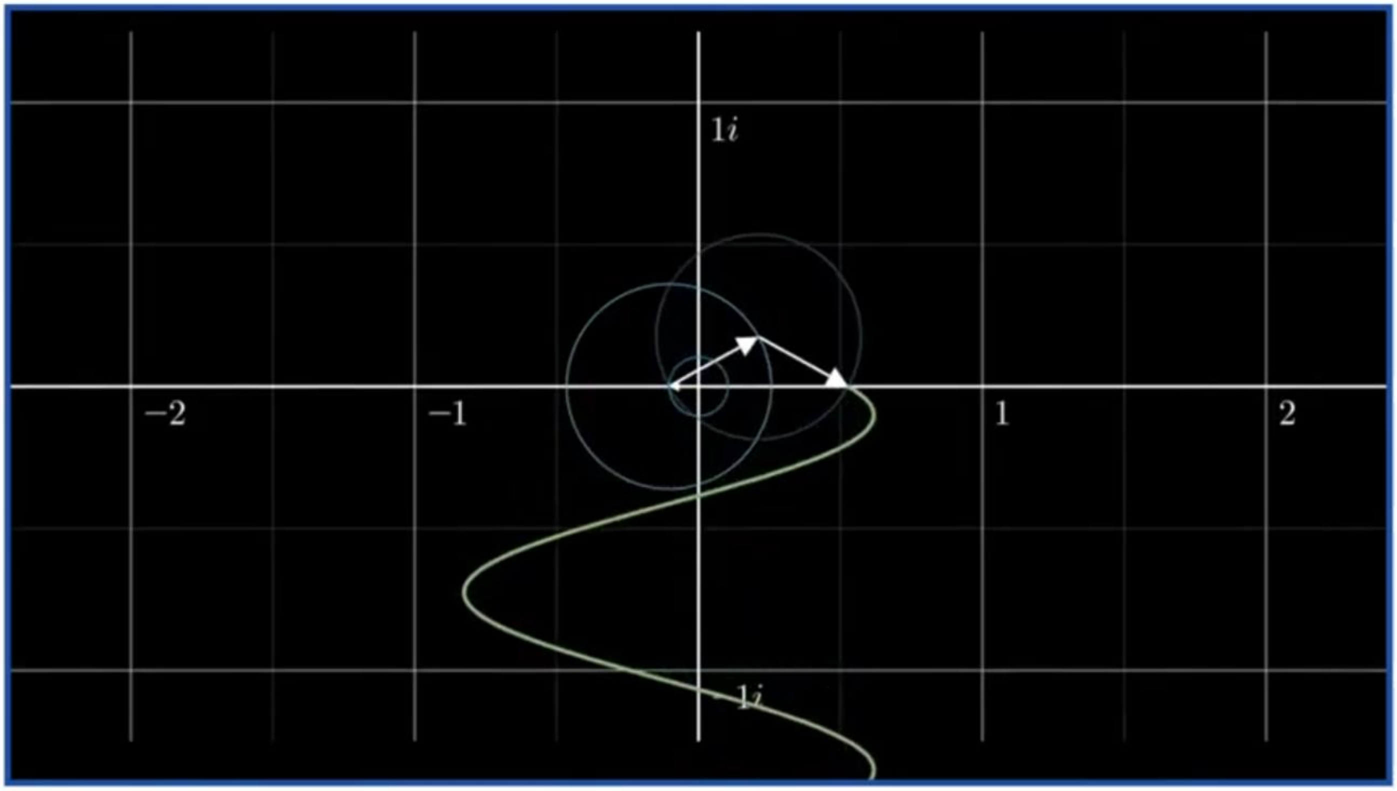
$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Говорить про экспоненты часто удобнее,
чем про синусы и косинусы

Фрагмент из видео с канала 3Blue1Brown



Фрагмент из видео с канала 3Blue1Brown



Вращение происходит через операторы

Оператор дифференцирования

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{p} \longrightarrow j\omega \cdot e^{j\omega t}$$

Дифференциальный оператор

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{p^2 + 2p + 3} \longrightarrow \boxed{\left((j\omega)^2 + 2(j\omega) + 3\right)} \cdot e^{j\omega t}$$

Комплексное число, зависящее от ω

Дифференциально-интегральный оператор

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{\frac{p^2 + 2p + 3}{p^3 + 5p + 7}} \longrightarrow \frac{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 3}{(j\omega)^3 + 5(j\omega) + 7} \cdot e^{j\omega t}$$

Комплексное число, зависящее от ω

Дифференциально-интегральный оператор

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{\frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}} \longrightarrow \frac{b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0} \cdot e^{j\omega t}$$

Комплексное число, зависящее от ω

Дифференциально-интегральный оператор

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{\frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}} \longrightarrow \frac{b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0} \cdot e^{j\omega t}$$

Операторная передаточная функция

Частотная передаточная функция

Операторная передаточная функция

$$\frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0}$$

Формальный символ, соответствующий оператору

Частотная передаточная функция

$$\frac{b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0}$$

Комплексное число, зависящее от частоты ω входного сигнала

Частотная передаточная функция в показательной форме

$$W(j\omega) = \frac{b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0}$$

Если постараться, то можно выделить вещественную и мнимую части

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Вещественная часть комплексного числа $W(j\omega)$

Мнимая часть комплексного числа $W(j\omega)$

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Если приложить ещё немного усилий, то можно перейти к показательной форме

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

Модуль

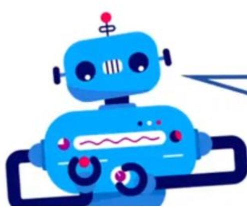
Аргумент

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} \qquad \varphi(\omega) = \text{atan2}\big(Q(\omega), P(\omega)\big)$$

Вращение проходит через линейную систему

Линейная динамическая система

$$e^{j\omega t} \rightarrow \boxed{\text{Система с передаточной функцией } W(p)} \rightarrow W(j\omega)\cdot e^{j\omega t} + \underbrace{\cancel{\left(\text{Линейная комбинация мод системы}\right)}}_{\to 0}$$



ЕСЛИ СИСТЕМА АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВА, ТО МОДЫ СТРЕМЯТСЯ К НУЛЮ

Линейная динамическая система

$$e^{j\omega t} \rightarrow \boxed{\text{Система с передаточной функцией } W(p)} \rightarrow \boxed{A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}}\cdot e^{j\omega t}$$

Представим в показательной форме

$e^{j\omega t}$ → Система с передаточной функцией $W(p)$ → $A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \cdot e^{j\omega t}$

Перемножим!

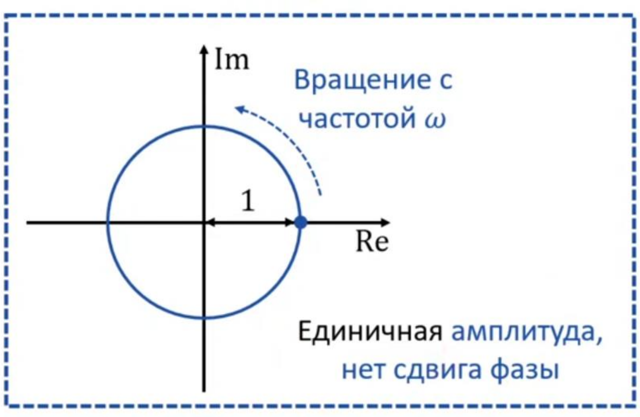
Линейная динамическая система

$e^{j\omega t}$ → Система с передаточной функцией $W(p)$ → $A(\omega)e^{j(\omega t+\varphi(\omega))}$

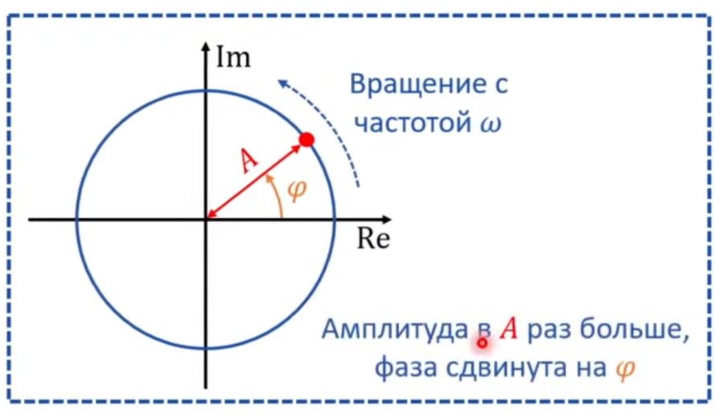
Перемножим!

Система с передаточной функцией $W(p)$

Вход $e^{j\omega t}$



Выход $A(\omega)e^{j(\omega t+\varphi(\omega))}$



Колебания проходят через линейную систему

Косинус как сумма вращений

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

Вращение в одну сторону

$$\frac{e^{j\omega t}}{2} \xrightarrow{\cdot W(j\omega)} \frac{A(\omega)e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2}$$

Вращение в другую сторону

$$\frac{e^{-j\omega t}}{2} \xrightarrow{\cdot W(-j\omega)} \frac{A(-\omega)e^{j(-\omega t + \varphi(-\omega))}}{2}$$

Каждое вращение проходит сквозь систему, умножаясь на частотную передаточную функцию со своей частотой

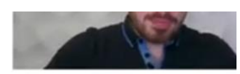
Можно показать, что…

Эта чётная

$$A(-\omega) = A(\omega)$$

Эта нечётная

$$\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$



Косинус как сумма вращений

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

Вращение в одну сторону

$$\frac{e^{j\omega t}}{2} \xrightarrow{\cdot W(j\omega)} \frac{A(\omega)e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2}$$

Вращение в другую сторону

$$\frac{e^{-j\omega t}}{2} \xrightarrow{\cdot W(-j\omega)} \frac{A(\omega)e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2}$$

Косинус проходит через систему

$$\cos(\omega t) \rightarrow \boxed{W(p)} \rightarrow \frac{A(\omega)e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2} + \frac{A(\omega)e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2}$$

Косинус проходит через систему

$$\cos(\omega t) \rightarrow \boxed{W(p)} \rightarrow \frac{A(\omega)e^{j(\omega t+\varphi(\omega))} + A(\omega)e^{-j(\omega t+\varphi(\omega))}}{2}$$

$$\cos(\omega t) \rightarrow \boxed{W(p)} \rightarrow A(\omega)\cos\big(\omega t + \varphi(\omega)\big)$$

Косинус проходит через систему

$$\cos(\omega t) \rightarrow \boxed{W(p)} \rightarrow A(\omega)\cos\big(\omega t + \varphi(\omega)\big)$$

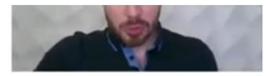
Аналогично

Синус проходит через систему

$$\sin(\omega t) \rightarrow \boxed{W(p)} \rightarrow A(\omega)\sin\big(\omega t + \varphi(\omega)\big)$$

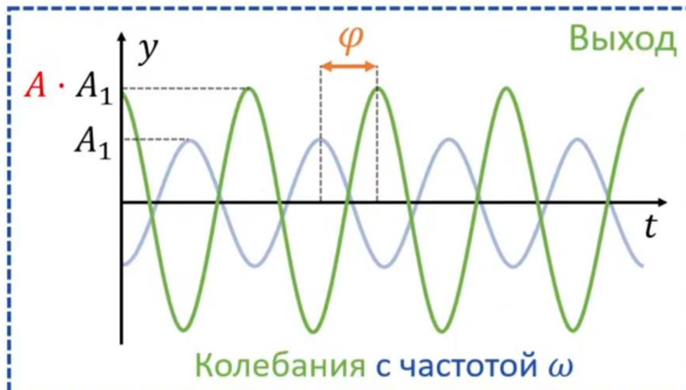
Гармоника общего вида проходит через систему

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \longrightarrow \boxed{W(p)} \longrightarrow \underbrace{\boxed{A(\omega)A_1}}_{A_2} \sin\Big(\omega t + \underbrace{\boxed{\varphi_1 + \varphi(\omega)}}_{\varphi_2}\Big)$$



Система с передаточной функцией $W(p)$

$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ $\qquad$ $A \cdot A_1 \sin(\omega t + \varphi_1 + \varphi)$



Здесь показан случай $A > 1$ и $\varphi < 0$

A и φ зависят от частоты:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{Arg} W(j\omega) = \operatorname{atan2}\big(Q(\omega), P(\omega)\big)$$

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}$$

Фазо-частотная характеристика

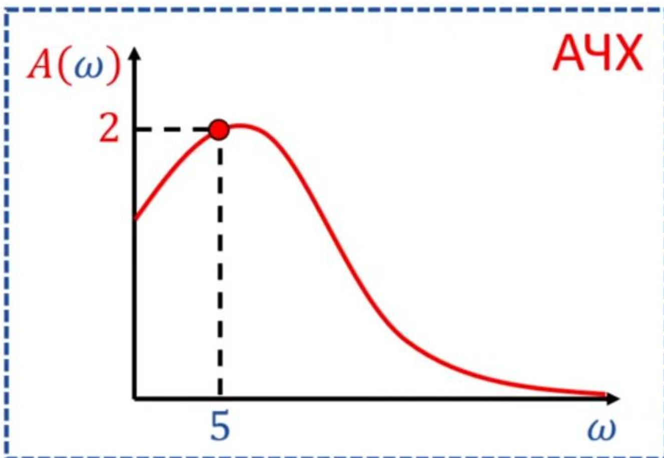
$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2}\big(Q(\omega), P(\omega)\big)$$

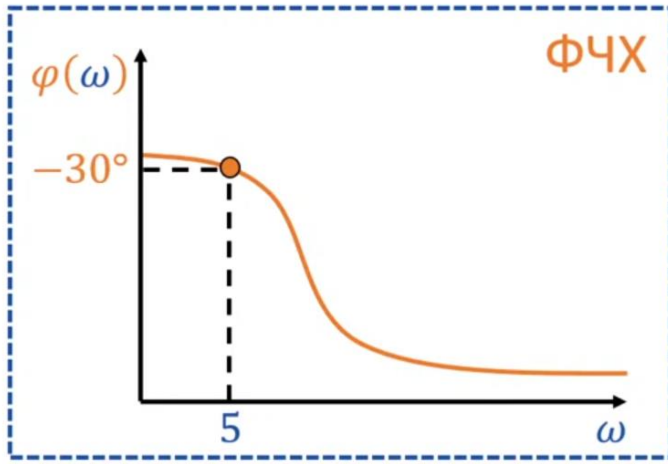
$6\sin(5t + 10°)$ → Линейная система →

$???\sin(5t + ???)$

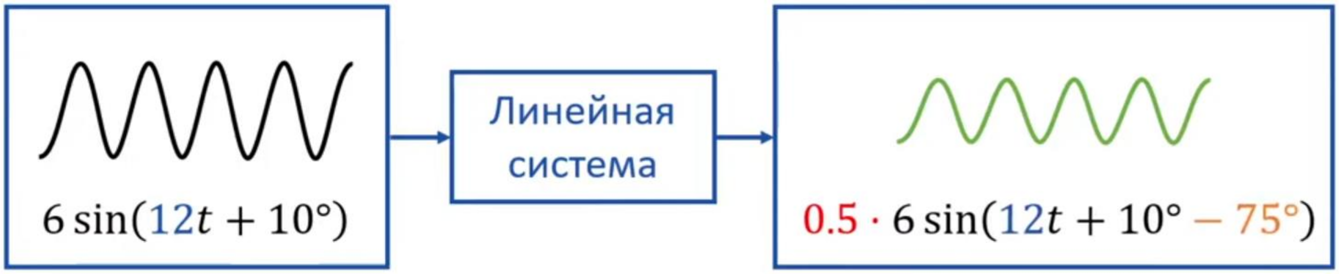
$6\sin(5t + 10°)$ → Линейная система →

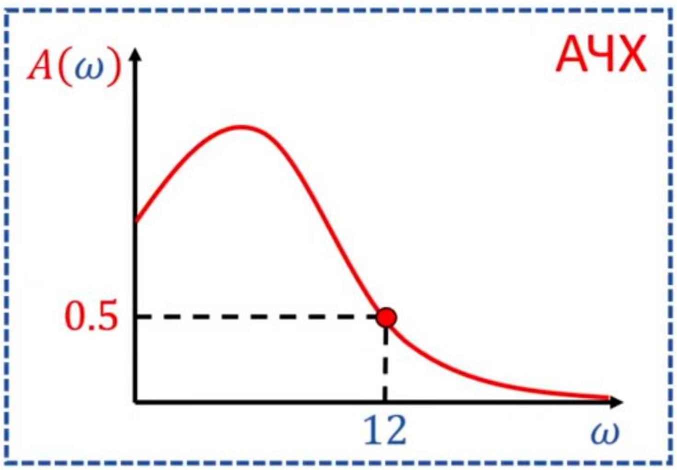
$A \cdot 6\sin(5t + 10° + \varphi)$

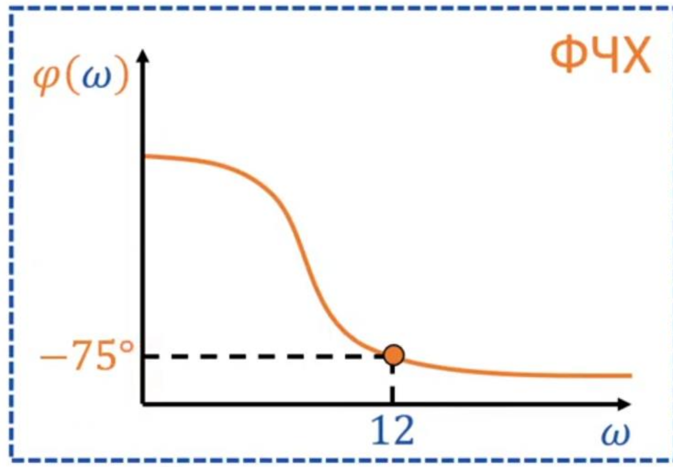




Подадим сигнал
другой частоты

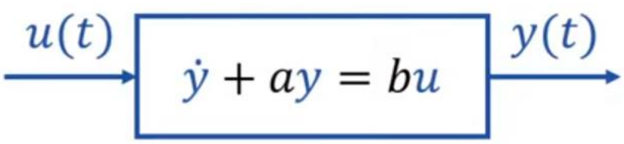






АЧХ и ФЧХ апериодического звена первого порядка

Предполагаем, что $b \geq 0$



Частотная передаточная функция

$$W(p) = \frac{b}{p + a} \xrightarrow{p = j\omega} W(j\omega) = \frac{b}{j\omega + a}$$

Выделяем вещественную и мнимую части

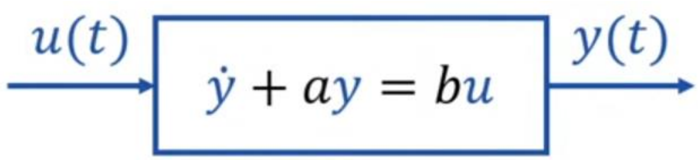
$$W(j\omega) = \frac{b}{a + j\omega} = \frac{b(a - j\omega)}{(a + j\omega)(a - j\omega)}$$

Домножаем на сопряжённое, чтобы избавиться от j в знаменателе

$$W(j\omega) = \frac{b}{a + j\omega} = \frac{b(a - j\omega)}{(a + j\omega)(a - j\omega)} = \frac{ba - jb\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Избавились!

$$W(j\omega) = \frac{b}{a + j\omega} = \frac{b(a - j\omega)}{(a + j\omega)(a - j\omega)} = \underbrace{\boxed{\frac{ab}{a^2 + \omega^2}}}_{P(\omega)} + j\underbrace{\boxed{\frac{(-b\omega)}{a^2 + \omega^2}}}_{Q(\omega)}$$



Частотная передаточная функция

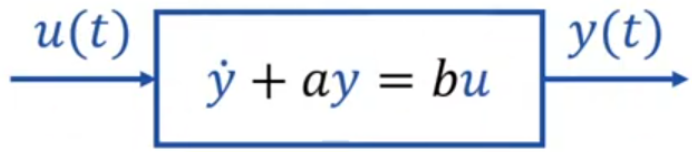
$$W(j\omega) = \frac{ab}{a^2 + \omega^2} + j\,\frac{(-b\omega)}{a^2 + \omega^2}$$

Находим модуль и аргумент

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} \qquad \varphi(\omega) = \operatorname{atan2}\big(Q(\omega), P(\omega)\big)$$

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{ab}{a^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-b\omega}{a^2 + \omega^2}\right)^2} \qquad \varphi(\omega) = \operatorname{atan2}\left(\frac{-b\omega}{a^2 + \omega^2}, \frac{ab}{a^2 + \omega^2}\right)$$

$$A(\omega) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \qquad \varphi(\omega) = \operatorname{atan}\left(-\frac{\omega}{a}\right)$$



Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

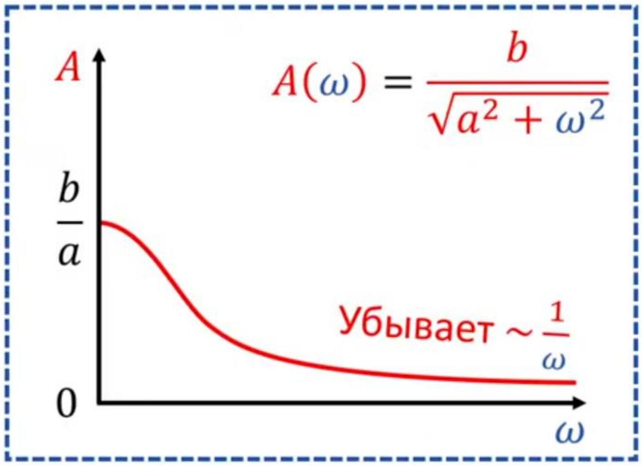
Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan}\left(-\frac{\omega}{a}\right)$$

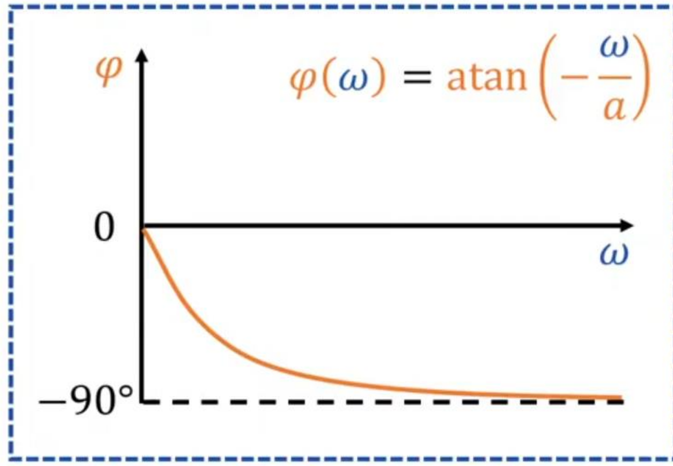
Частотная передаточная функция в показательной форме

$$W(j\omega) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{j \operatorname{atan}\left(-\frac{\omega}{a}\right)}$$

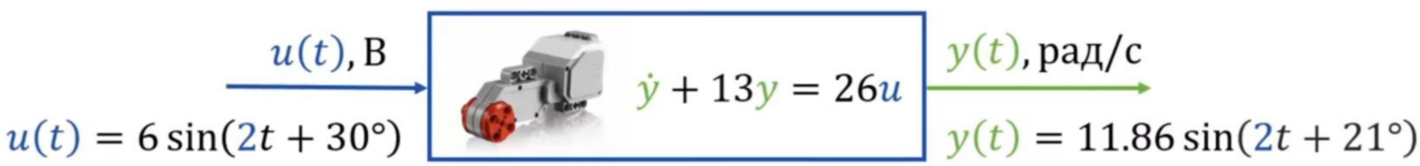
Амплитудно-частотная характеристика



Фазо-частотная характеристика



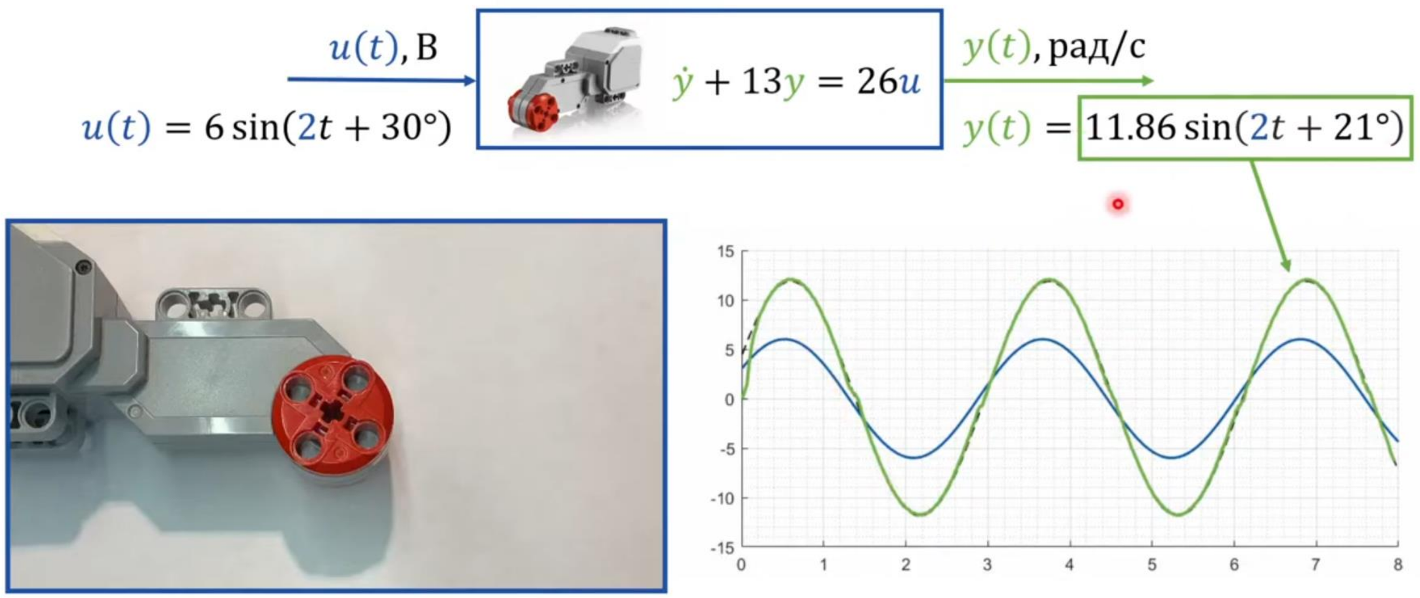
Предскажем установившееся движение двигателя



Вычисление на основе частотных характеристик

$$A(2) = \frac{26}{\sqrt{13^2 + 2^2}} \approx 1.977 \qquad 1.977 \cdot 6 \approx 11.86$$

$$\varphi(2) = \operatorname{atan}(-2/13) \approx -9° \qquad 30° - 9° \approx 21°$$



Мини-классификация систем второго порядка

$$u(t) \rightarrow \boxed{\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = bu} \rightarrow y(t)$$

(Пусть $a_0 > 0$ и $a_1 \geq 0$)

Какие корни характеристического уравнения?

Вещественные	Комплексные	Чисто мнимые
$a_1^2 - 4a_0 \geq 0$	$a_1^2 - 4a_0 < 0$	$a_1 = 0$
Апериодическое звено (второго порядка)	Колебательное звено	Консервативное звено

АЧХ и ФЧХ апериодического звена второго порядка

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = bu} \longrightarrow y(t)$$

Если $D = a_1^2 - 4a_0 \geq 0$, то эта система может быть представлена как две последовательных системы первого порядка

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\frac{b}{p^2 + a_1 p + a_0}} \longrightarrow y(t) \quad \cong \quad u(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{(p+\lambda_1)}} \longrightarrow \boxed{\frac{b}{(p+\lambda_2)}} \longrightarrow y(t)$$

Апериодическое звено второго порядка

Два апериодических звена первого порядка

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \lambda_1} \cdot \boxed{\frac{b}{j\omega + \lambda_2}}$$

От каждого звена первого порядка в отдельности

Показательная форма

$$W(j\omega) = A_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot \boxed{A_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}}$$

Показательная форма

$$W(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \omega^2}} e^{j\,\mathrm{atan}\left(-\frac{\omega}{\lambda_1}\right)} \cdot \frac{b}{\sqrt{\lambda_2^2 + \omega^2}} e^{j\,\mathrm{atan}\left(-\frac{\omega}{\lambda_2}\right)}$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \omega^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{\lambda_2^2 + \omega^2}} e^{j\left(\operatorname{atan}\left(-\frac{\omega}{\lambda_1}\right) + \operatorname{atan}\left(-\frac{\omega}{\lambda_2}\right)\right)}$$

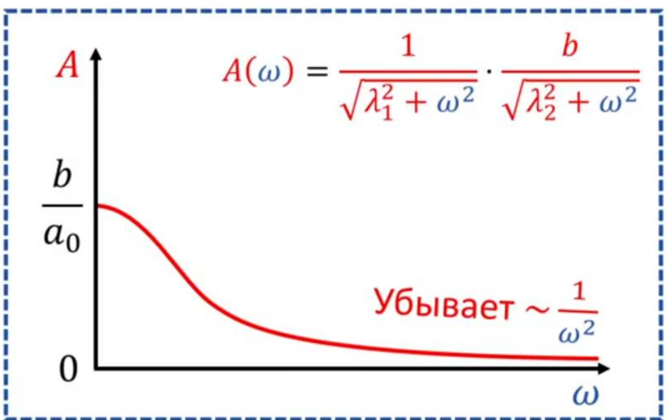
АЧХ (произведение)

$$A(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega)$$

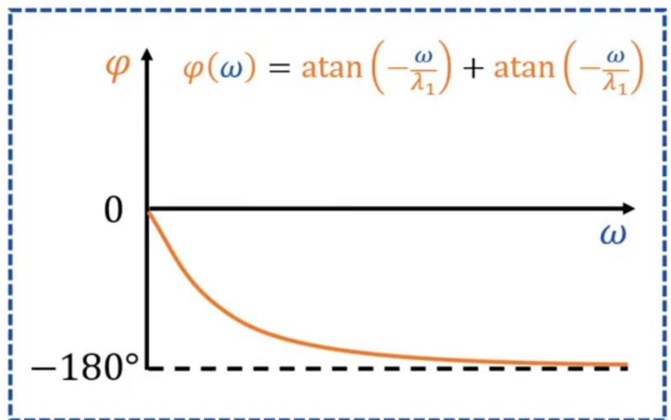
ФЧХ (сумма)

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$

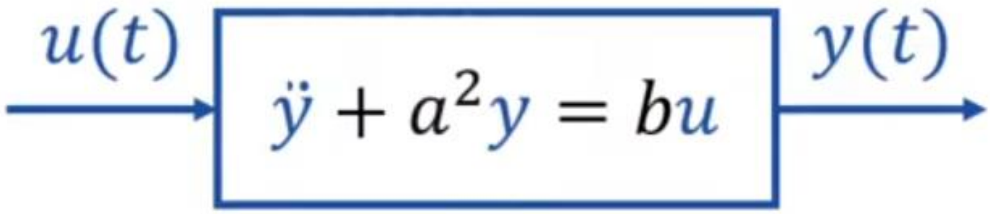
Амплитудно-частотная характеристика



Фазо-частотная характеристика



АЧХ консервативного звена



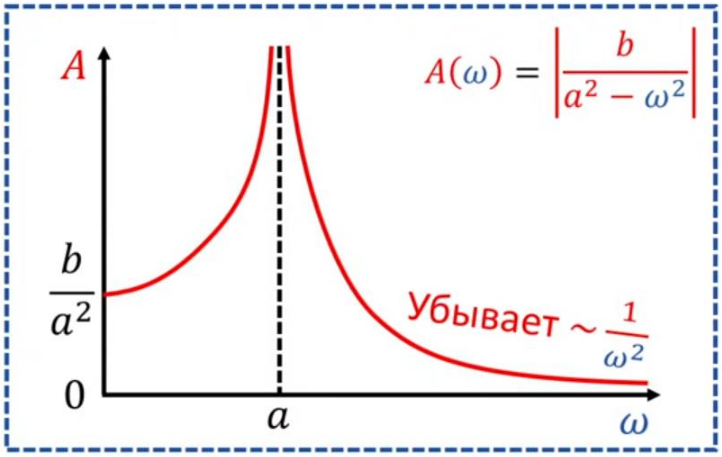
Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = \frac{b}{(j\omega)^2 + a^2} = \frac{b}{a^2 - \omega^2}$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = \left| \frac{b}{a^2 - \omega^2} \right|$$

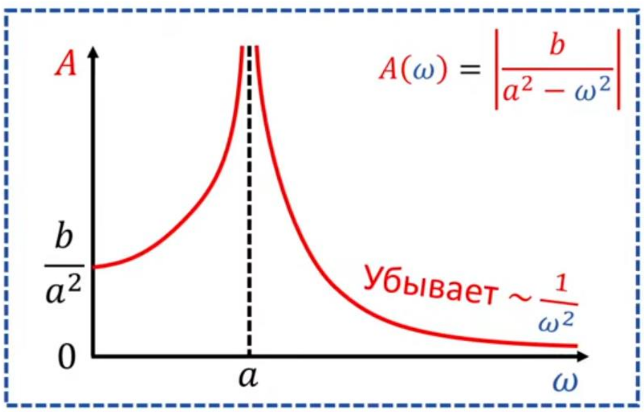
Амплитудно-частотная характеристика



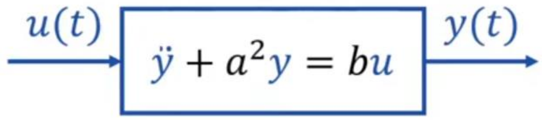
АЧХ имеет разрыв!

Как это понять?

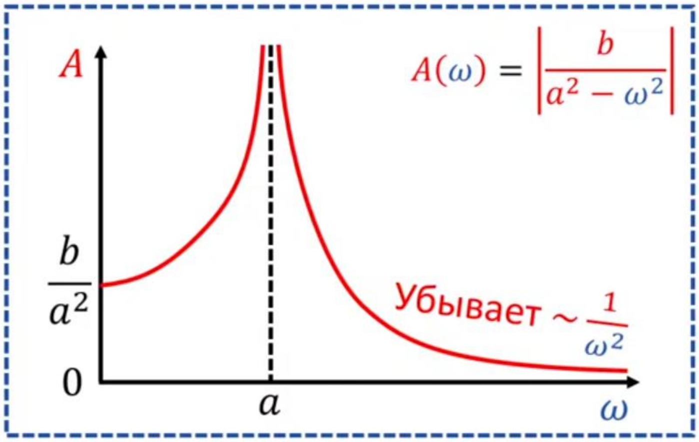
Амплитудно-частотная характеристика



При $u(t) = \sin(at)$ амплитуда выхода будет бесконечной?



Амплитудно-частотная характеристика



$$u(t) = \sin(at)$$

$$y(t) = y_{\text{i.r.}}(t) * u(t)$$

$$y(t) = \frac{b}{a}\sin(at) * \sin(at)$$

$$y(t) \sim t\sin(at)$$

$$y(t) \sim t\sin(at)$$

Это почти то же самое, что мода, вызванная кратным корнем!

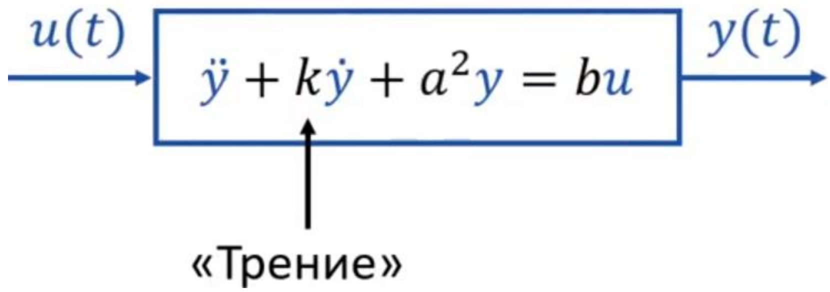
Это резонанс!

В жизни не бывает консервативных звеньев

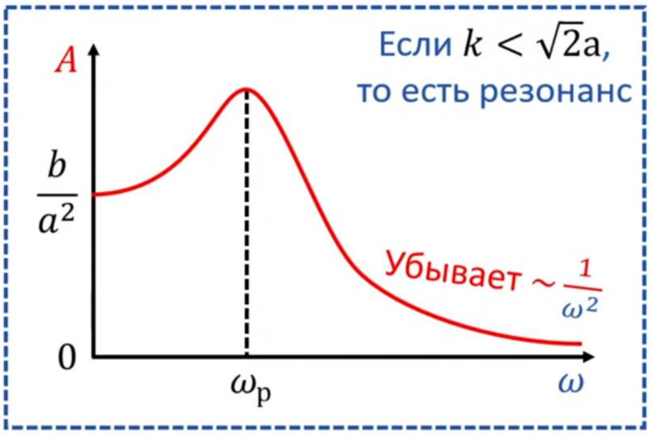
Потому что никакая система не может иметь чисто мнимые корни. Так как чисто мнимые корни означают, что энергия механическая всегда остается механической и никогда не переходит в тепло. В реальной жизни любые колебания затухают. Механическая энергия становится тепловой, энтропия растет и т.д…

Но бывают колебательные

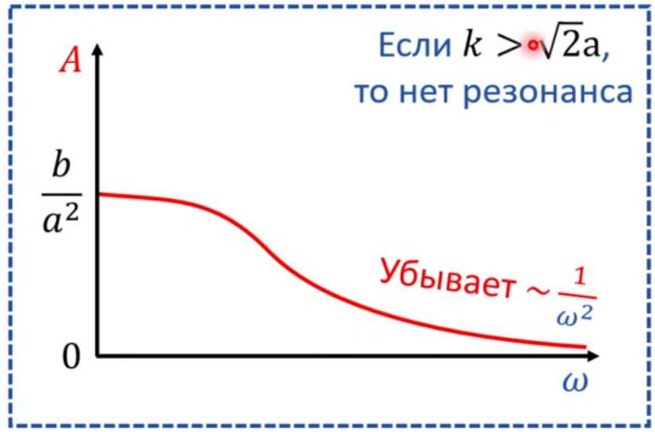
АЧХ колебательного звена



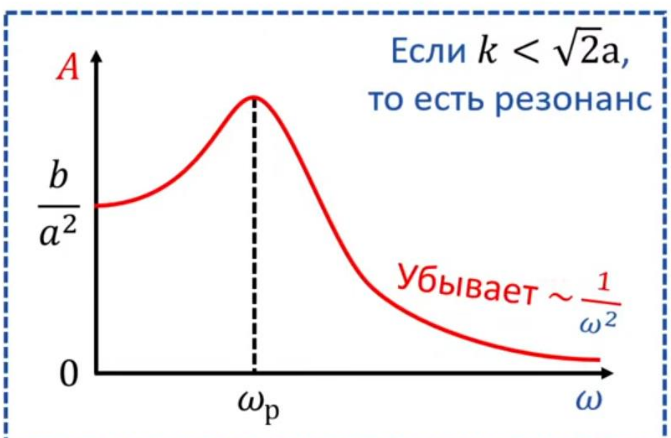
Почти консервативная АЧХ



Почти апериодическая АЧХ



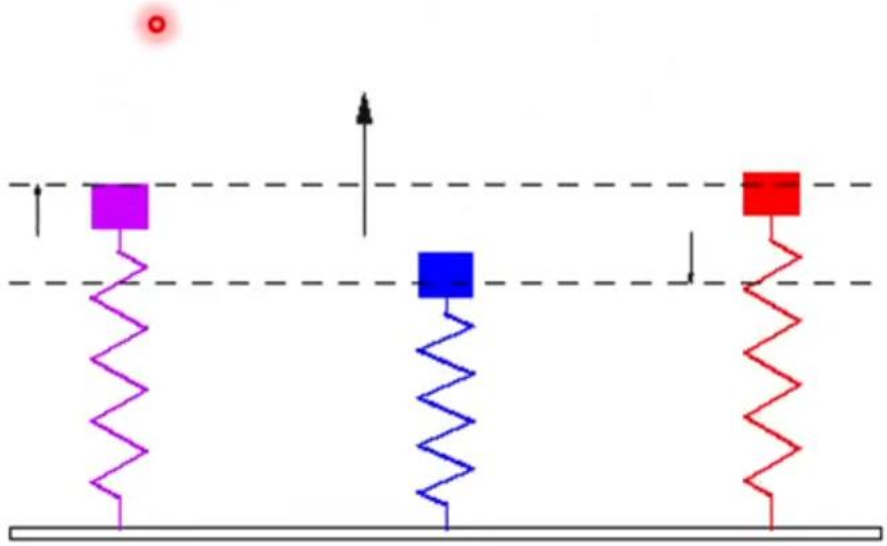
Почти консервативная АЧХ



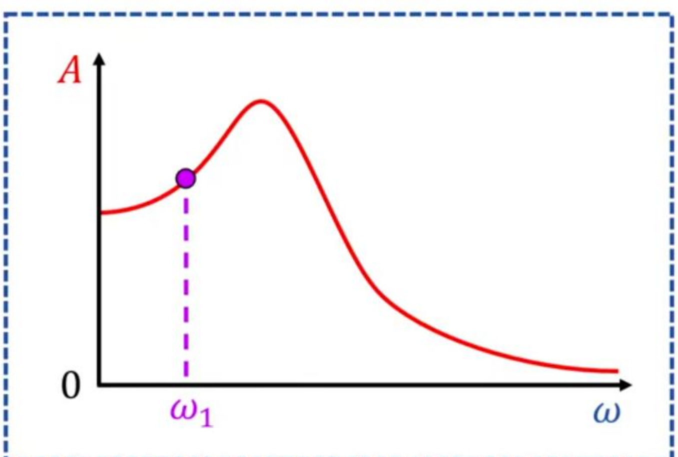
Именно этот вариант является самым интересным

$u(t)$ меняется

Медленно Средне Быстро

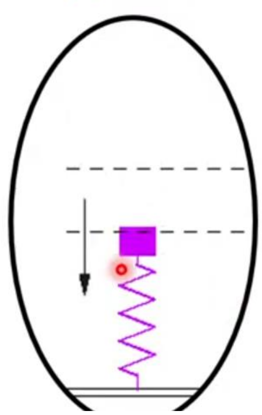


АЧХ колебательного (почти консервативного) звена

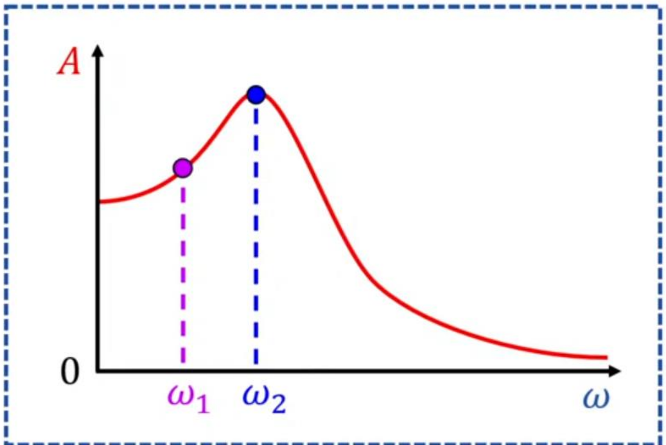


$u(t)$ меняется

Медленно Средне Быстро

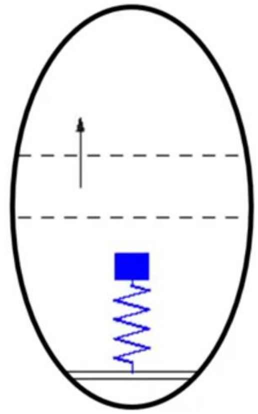


АЧХ колебательного
(почти консервативного) звена

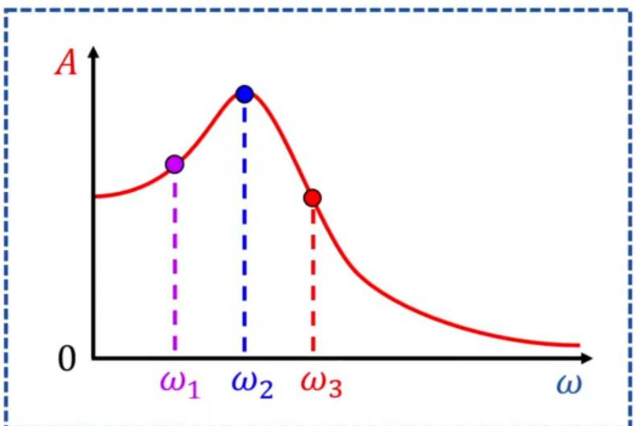


$u(t)$ меняется

Медленно Средне Быстро

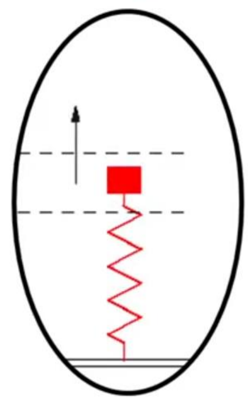


АЧХ колебательного
(почти консервативного) звена

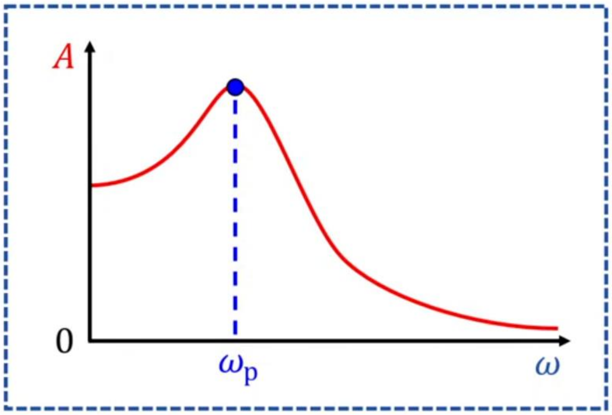


$u(t)$ меняется

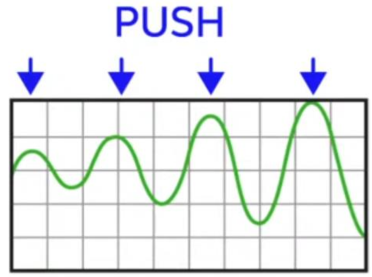
Медленно Средне Быстро



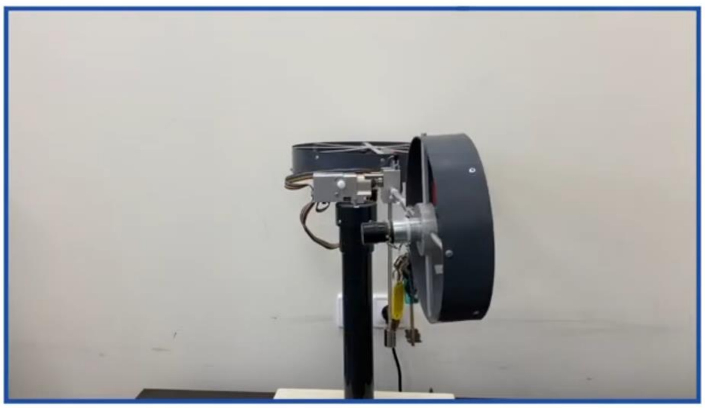
АЧХ колебательного
(почти консервативного) звена

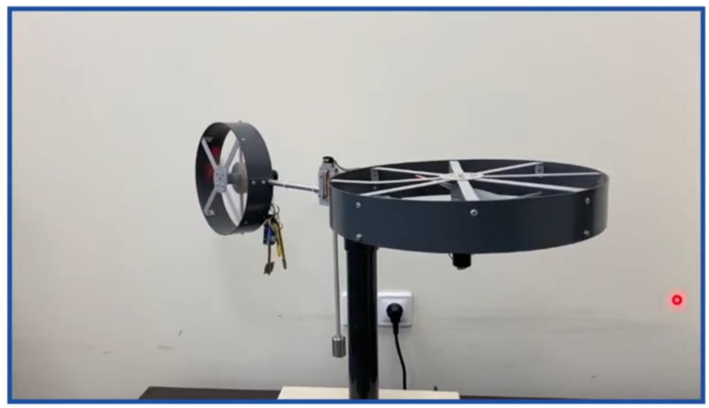


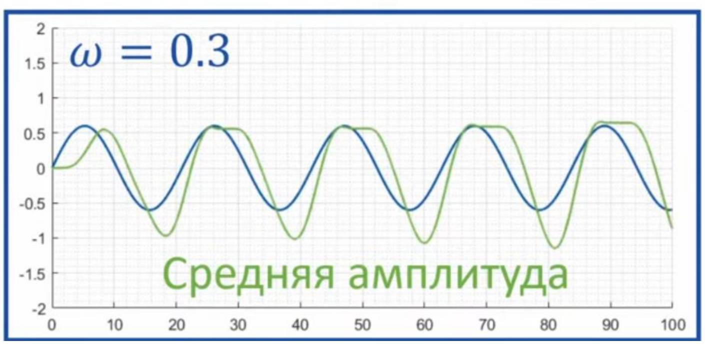
Качели надо качать в такт самим качелям!
(на частоте их impulse response’а)

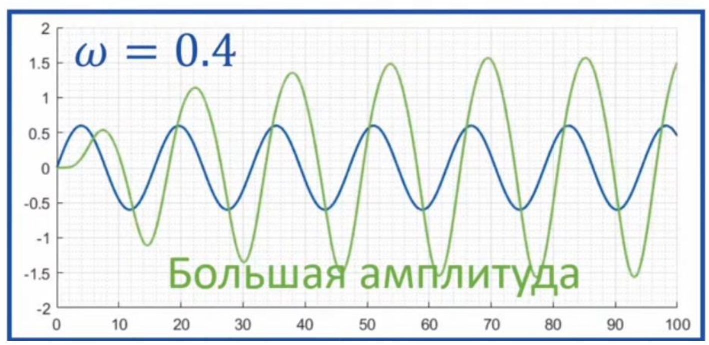


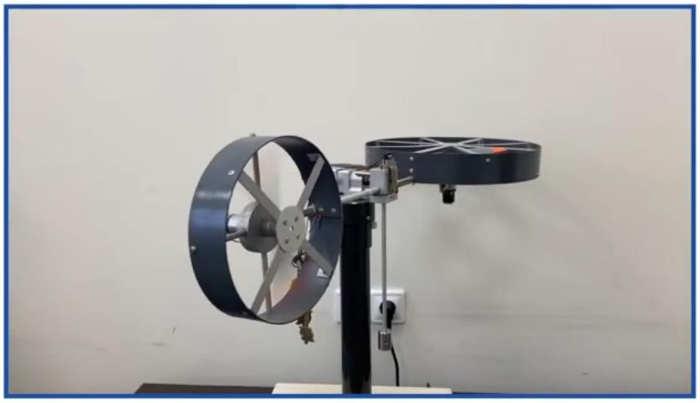
Прикосновение к реальности

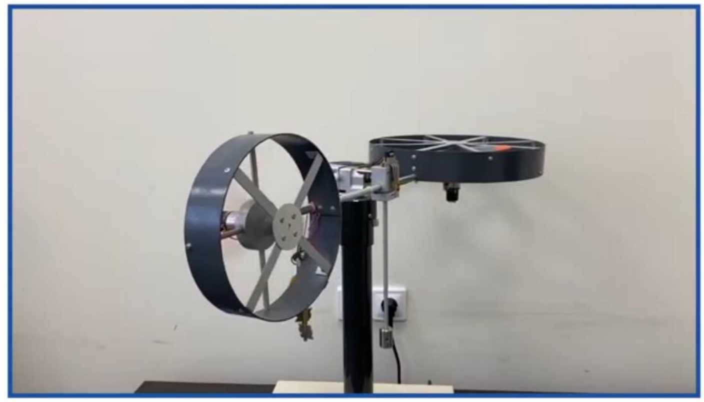


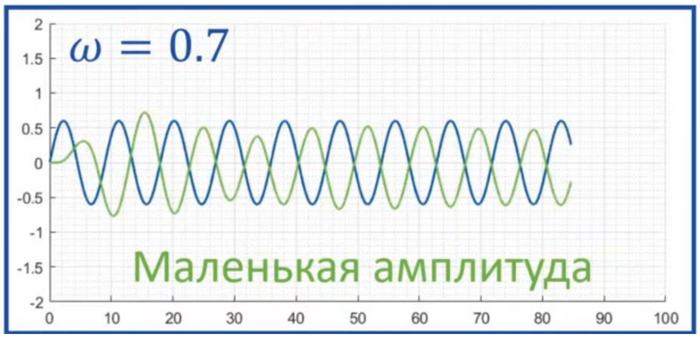


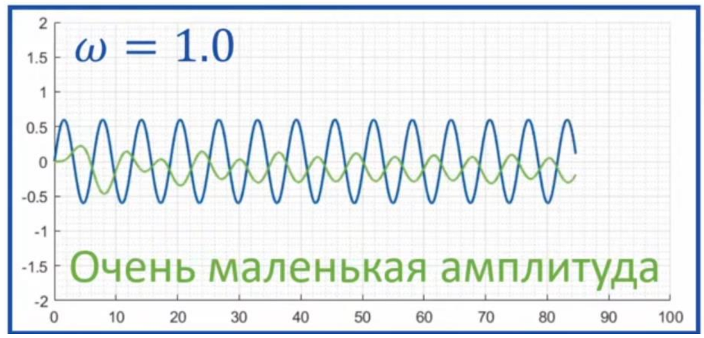


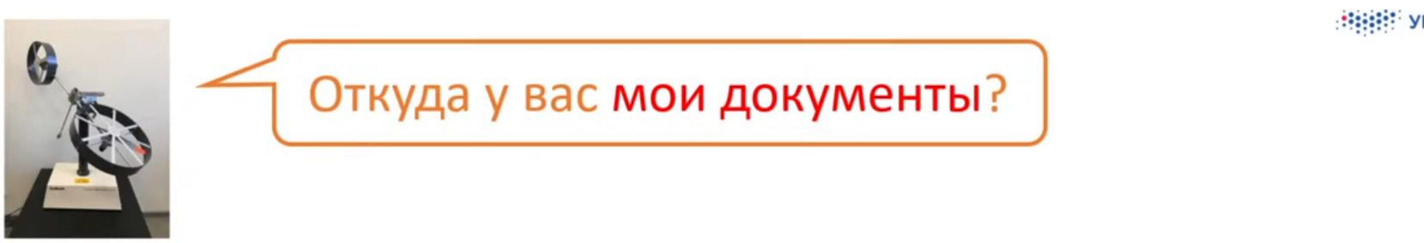




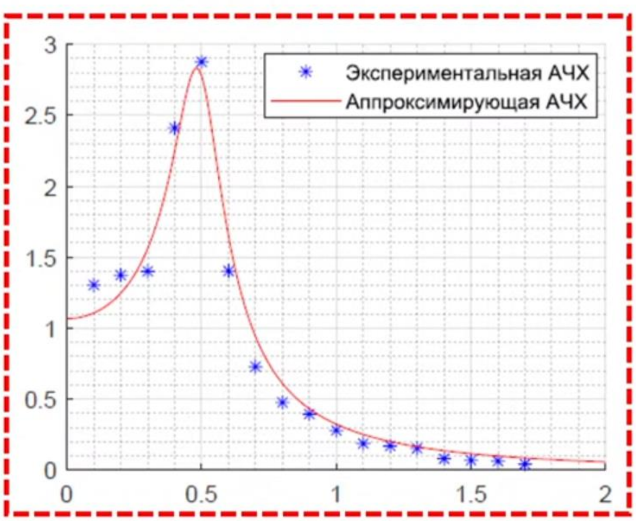


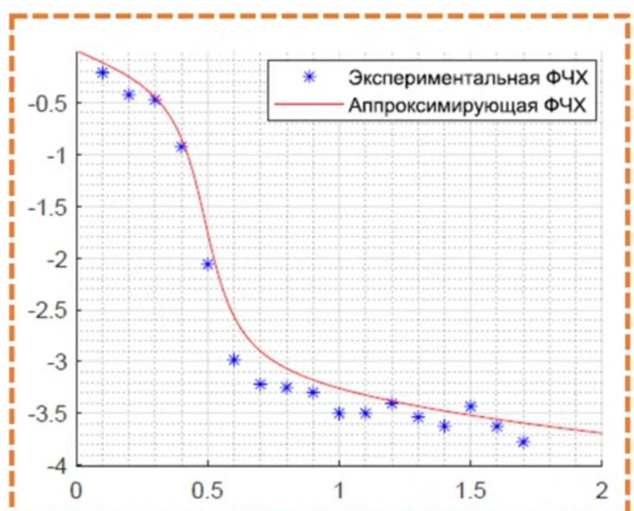






Экспериментальные частотные характеристики





Вычисление частотных характеристик сложного звена

$$W(s) = \frac{2 \cdot (s+3) \cdot (s^2 + s + 1)}{(s^2 + 4s + 7) \cdot (s^2 + 9)}$$

Переходим к частотной ПФ $\Big\downarrow$ $s = j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{2 \cdot (3 + j\omega) \cdot (1 - \omega^2 + j\omega)}{\big(7 - \omega^2 + j(4\omega)\big) \cdot (9 - \omega^2)}$$

Каждый сомножитель переводим в показательную форму $\Big\downarrow$ $P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2}\, e^{j\,\mathrm{atan2}(Q,P)}$

$$W(j\omega) = \frac{2 \cdot \sqrt{3^2 + \omega^2}\, e^{j\,\mathrm{atan}\left(\frac{\omega}{3}\right)} \cdot \sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}\, e^{j\,\mathrm{atan2}(\omega, 1-\omega^2)}}{\sqrt{(7-\omega^2)^2 + (4\omega)^2}\, e^{j\,\mathrm{atan2}(4\omega, 7-\omega^2)} \cdot |9 - \omega^2|\, e^{j\,\mathrm{atan2}(0, 9-\omega^2)}}$$

$$W(j\omega) = \frac{2 \cdot (3 + j\omega) \cdot (1 - \omega^2 + j\omega)}{\big(7 - \omega^2 + j(4\omega)\big) \cdot (9 - \omega^2)}$$

Каждый сомножитель переводим в показательную форму $\Big\downarrow$

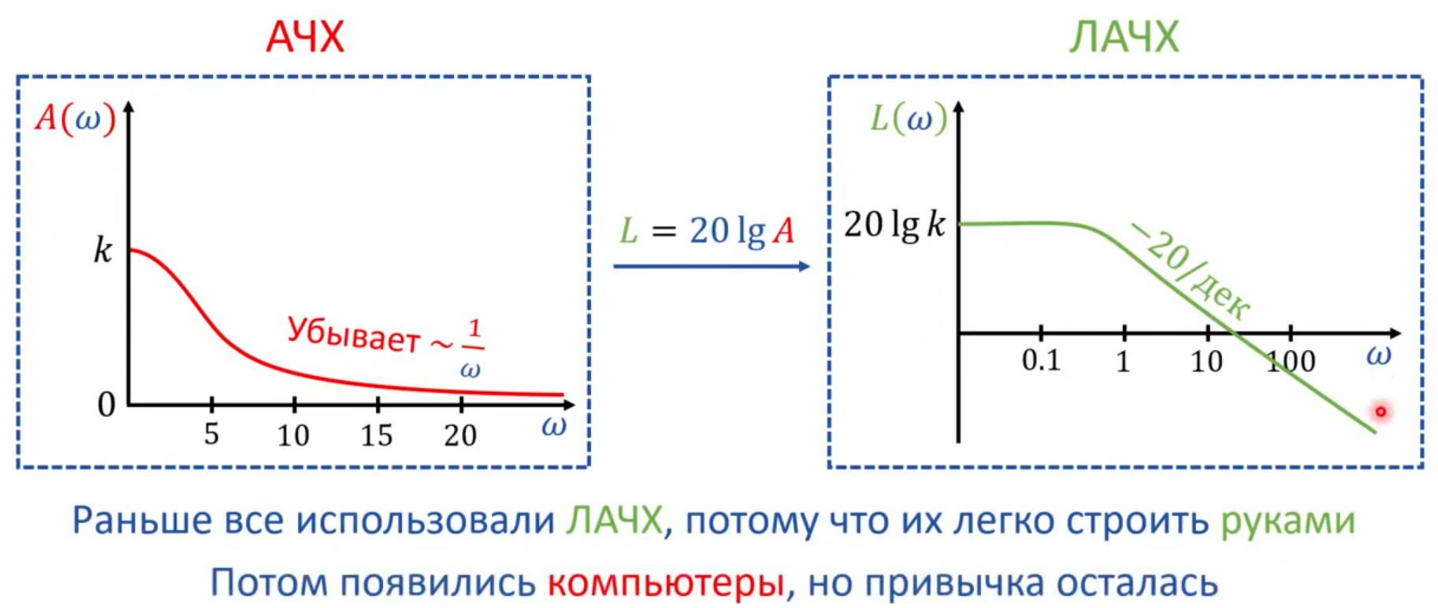
$$W(j\omega) = \frac{2 \cdot \sqrt{3^2 + \omega^2}\, e^{j\,\mathrm{atan}\left(\frac{\omega}{3}\right)} \cdot \sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}\, e^{j\,\mathrm{atan2}(\omega, 1-\omega^2)}}{\sqrt{(7-\omega^2)^2 + (4\omega)^2}\, e^{j\,\mathrm{atan2}(4\omega, 7-\omega^2)} \cdot |9 - \omega^2|\, e^{j\,\mathrm{atan2}(0, 9-\omega^2)}}$$

Перемножаем показательные формы

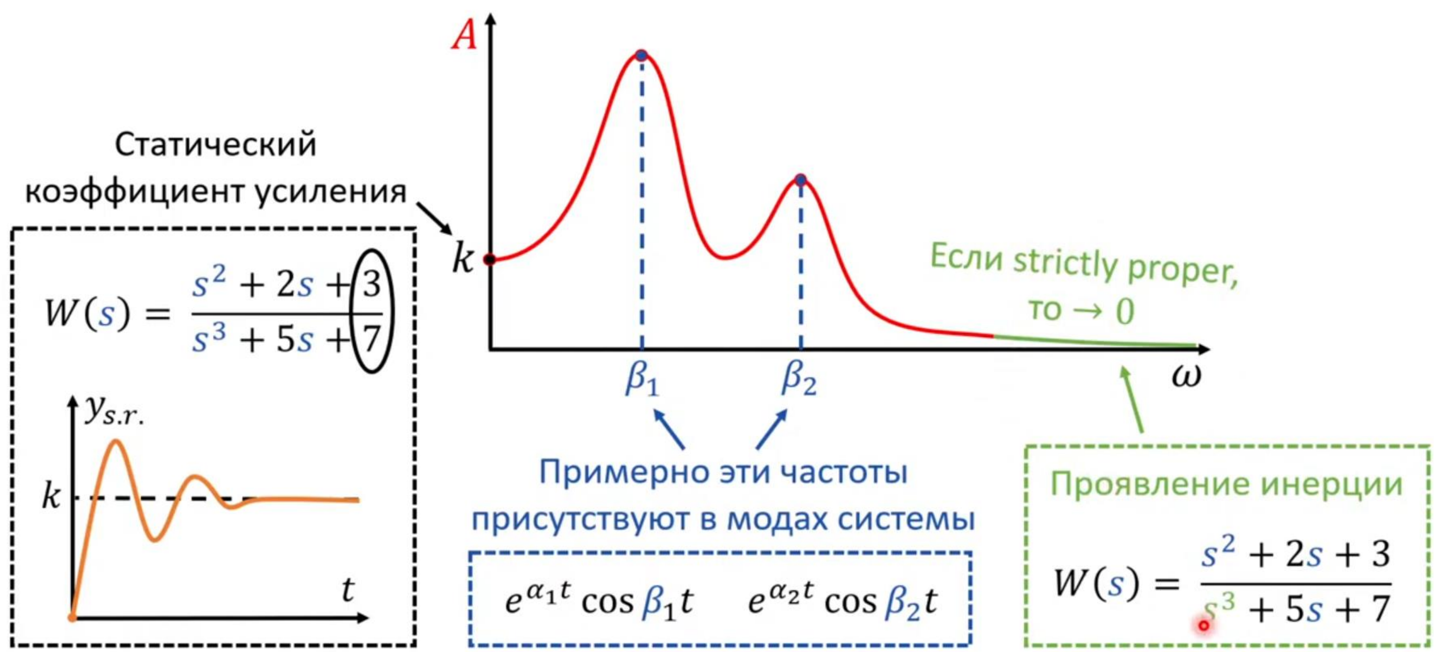
$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\boxed{A(\omega) = \frac{2 \cdot \sqrt{3^2 + \omega^2} \cdot \sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}}{\sqrt{(7-\omega^2)^2 + (4\omega)^2} \cdot |9 - \omega^2|}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(\omega) = \mathrm{atan}\left(\frac{\omega}{3}\right) + \mathrm{atan2}(\omega, 1 - \omega^2) \\ -\mathrm{atan2}(4\omega, 7 - \omega^2) - \mathrm{atan2}(0{,}9 - \omega^2) \end{aligned}}$$

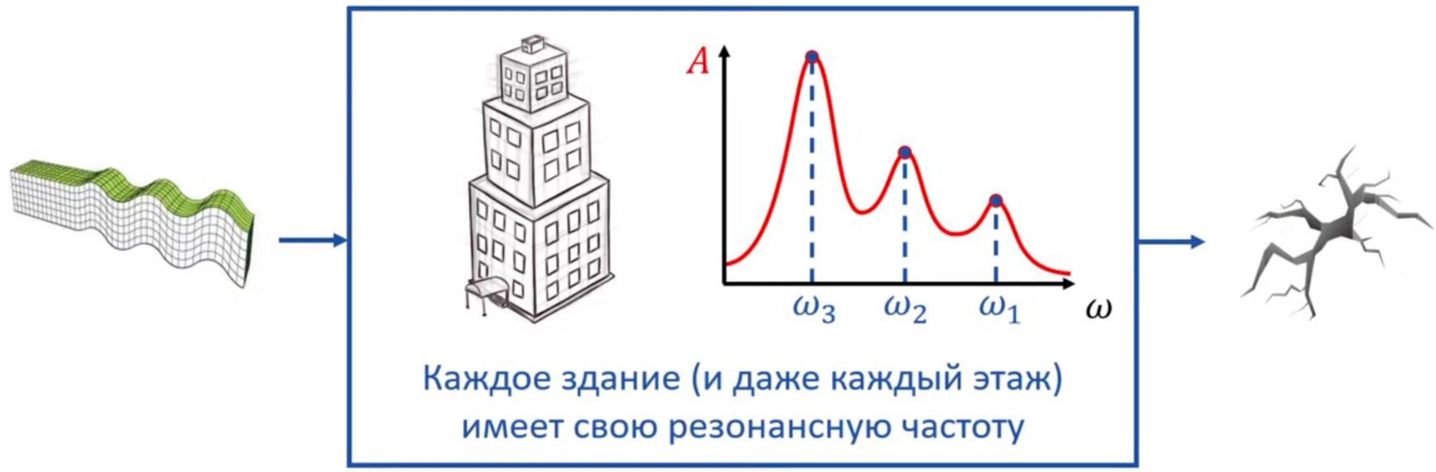


Базовое понимание частотных характеристик



Резонанс — это хорошо или плохо?

Здания



Радиоприёмник

А неустойчивая система – это хорошо или плохо?

To be continued…

Поразмышляйте над этим!