Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №8
«Модальные регуляторы и наблюдатели»
по дисциплине «Теория автоматического управления»

Выполнил: студент гр. R3238,
Кирбаба Д.Д.
Преподаватель: Перегудин А.А.,
ассистент фак. СУиР

Санкт-Петербург, 2022

Цель работы

Построение модальных регуляторов и наблюдателей в линейной динамической системе

Начальные данные

3 вариант

Исходные данные для задания 1:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma(A + BK) = \begin{matrix} \{-3, -3, -3, -3\} \\ \{-3, -30, -300, -300\} \\ \{-3, -5, 3i, -3i\} \\ \{-3, -5, -5 + 3i, -5 - 3i\} \end{matrix}$$

Исходные данные для задания 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma(A + LC) = \begin{matrix} \{-3, -3, -3, -3\} \\ \{-3, -30, -300, -300\} \\ \{-3, -5, 3i, -3i\} \\ \{-3, -5, -5 + 3i, -5 - 3i\} \end{matrix}$$

Исходные данные для задания 3:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & 5 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Выполнение работы

Задание 1.

1.1. Управляемость и стабилизируемость системы

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = 3 + 3i, \qquad \lambda_2 = 3 - 3i, \qquad \lambda_3 = -3, \qquad \lambda_4 = 3$$

Так как система уже представлено в жордановой форме, то для определения управляемости собственных чисел будет использовать соответствующий способ.

$\lambda_{1,2,4}$ – управляемы

λ_3 – неуправляема

Так как не все собственные числа управляемы, то система не является полностью управляемой. Но система стабилизируема, так как мода соответствующая λ_3 устойчива.

1.2. Схема моделирования системы с регулятором

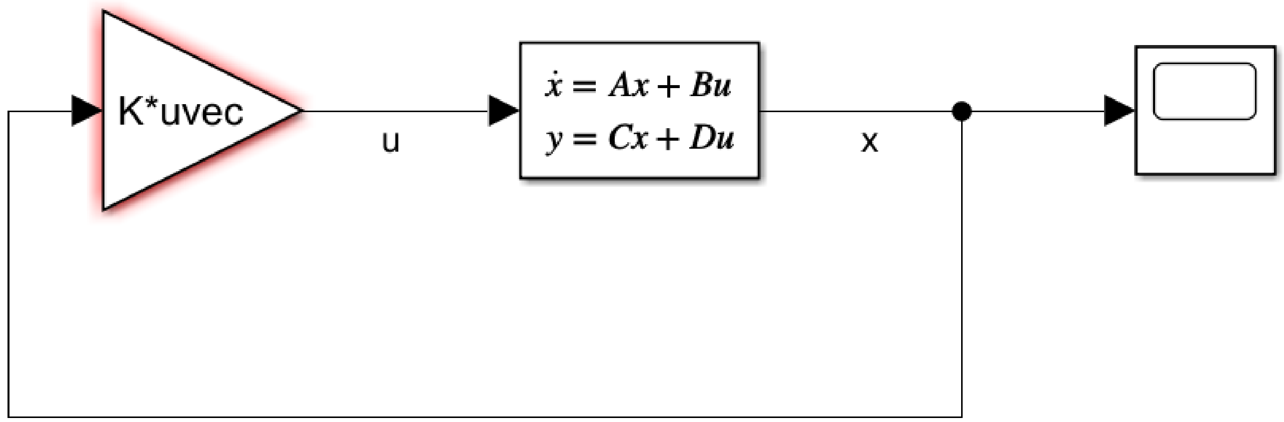

Рисунок 1: схема моделирования системы с регулятором $u = Kx$

1.3. Модальное управление

Программный код:

```
(* plant parameters *)
a = {{-3, 0, 0, 0}, {0, 3, 0, 0}, {0, 0, 3, 3}, {0, 0, -3, 3}};
b = {{0}, {7}, {0}, {1}};

(* controllability of eigen values *)
eVal = Eigenvalues[a];
c = Join[b, a.b, a.a.b, a.a.a.b, 2];
MatrixRank[c];

(* controller matrix *)
g = {{-3, 1, 0, 0}, {0, -3, 1, 0}, {0, 0, -3, 1}, {0, 0, 0, -3}};
y = {{1, 1, 1, 1}};
p = {{p11, p12, p13, p14}, {p21, p22, p23, p24}, {p31, p32, p33, p34}, {p41, p42, p43, p44}};
Solve[a.p - p.g == b.y, {p11, p12, p13, p14, p21, p22, p23, p24, p31, p32, p33, p34, p41, p42, p43, p44}];
p = {{0, 0, 0, 1}, {7 / 6, 49 / 36, 301 / 216, 1813 / 1296}, {-1 / 15, -19 / 225, -296 / 3375, -496 / 5625},
   {2 / 15, 11 / 75, 497 / 3375, 7448 / 50 625}};
k = -y.Inverse[p];
```

$\boldsymbol{\sigma(\Gamma) = \sigma(A + BK) = \{-3, -3, -3, -3\}}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Выберем матрицу Y, так чтобы пара (Y, Γ) была наблюдаема:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу подобия P:

$$AP - P\Gamma = BY, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 1.1666 & 1.3611 & 1.3935 & 1.3989 \\ -0.066667 & -0.084445 & -0.087704 & -0.088178 \\ 0.13333 & 0.14666 & 0.14726 & 0.14712 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу регулятора K:

$$K = -YP^{-1} = [0.0037037 \quad -3.4285 \quad -33.0 \quad 6.0]$$

Моделирование замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$:

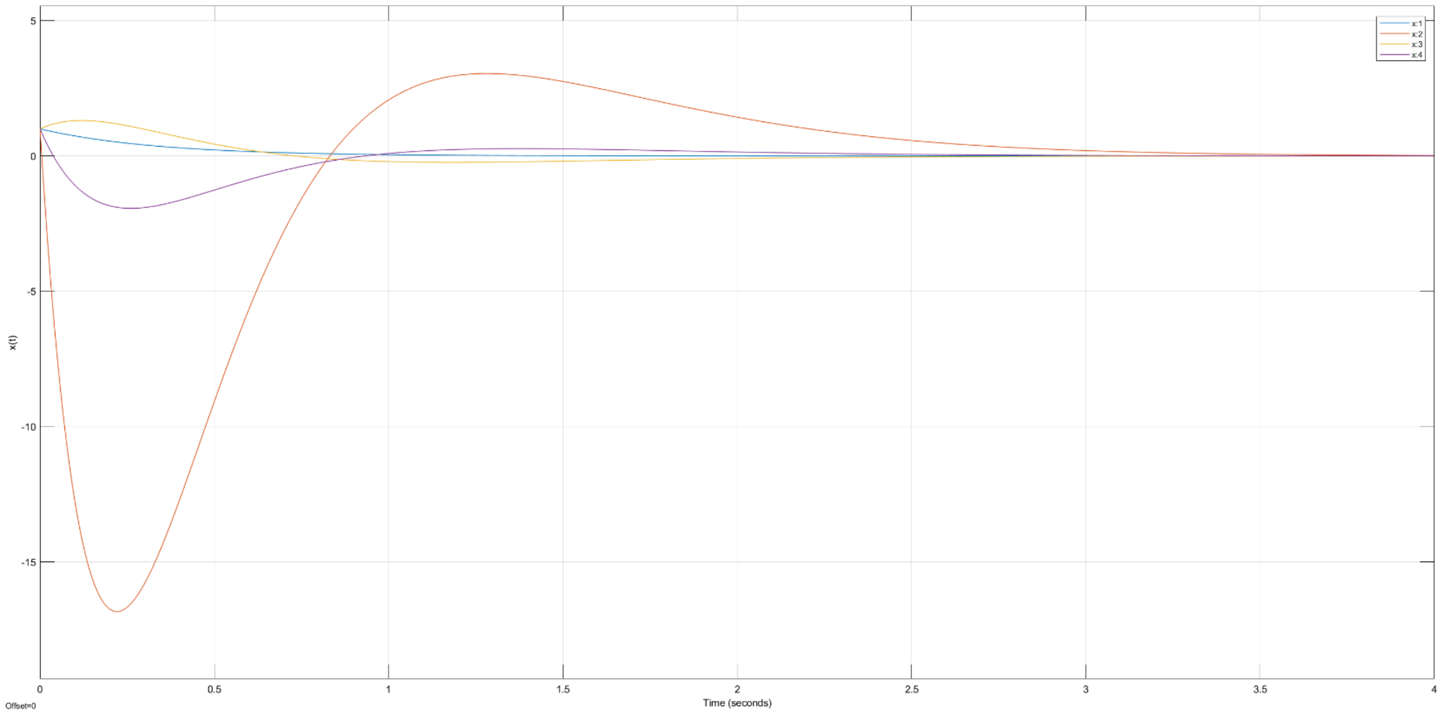

Рисунок 2: графики $x(t)$

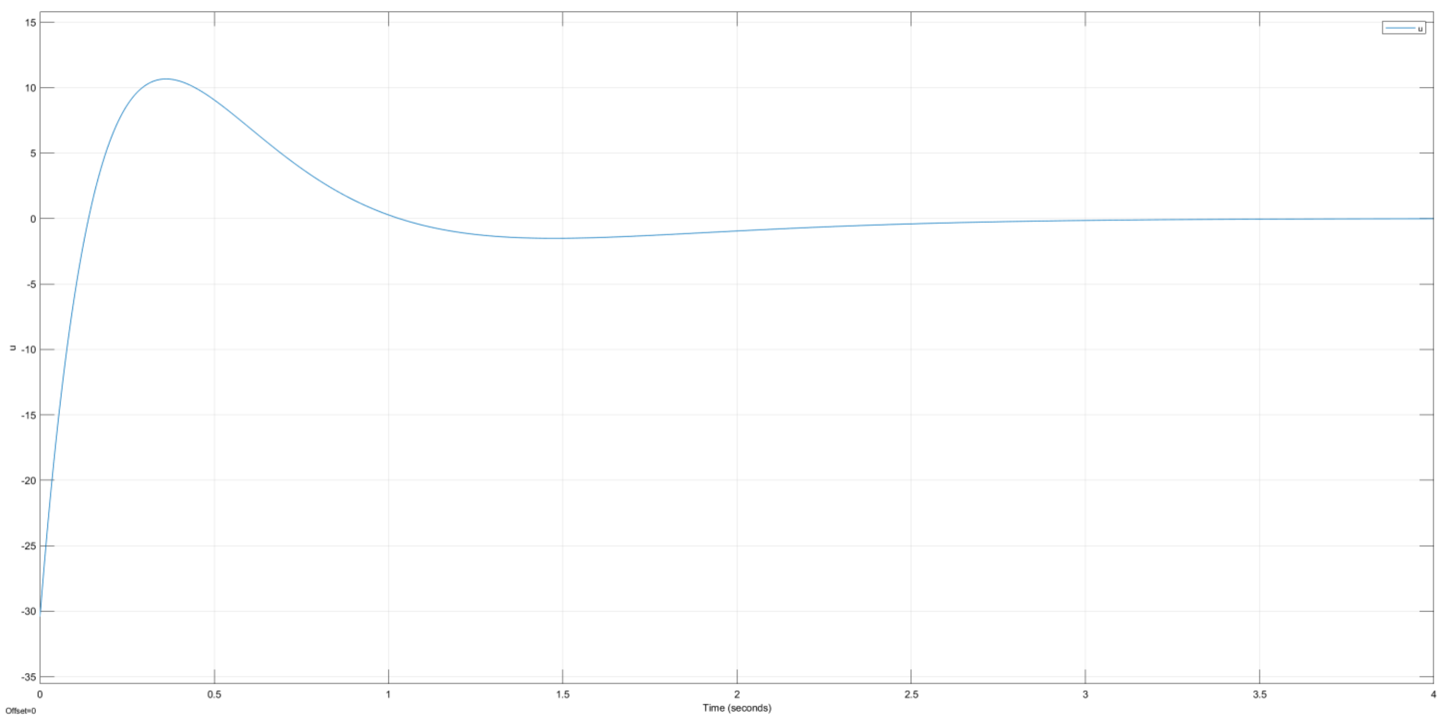

Рисунок 3: график $u(t)$

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\Gamma}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}) = \{\mathbf{-3}, \mathbf{-30}, \mathbf{-300}, \mathbf{-300}\}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -300 \end{bmatrix}$$

Выберем матрицу Y, так чтобы пара (Y, Γ) была наблюдаема:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу подобия P:

$$AP - P\Gamma = BY, \qquad P = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1666 & 0.21212 & 0.023102 & 0.023178 \\ -0.066667 & -0.0027322 & -0.000032673 & -0.000032889 \\ 0.13333 & 0.030054 & 0.0033 & 0.0033109 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу регулятора K:

$$K = -YP^{-1} = \begin{bmatrix} 8820.9 & -48090. & -37266. & 335990 \end{bmatrix}$$

Моделирование замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$:

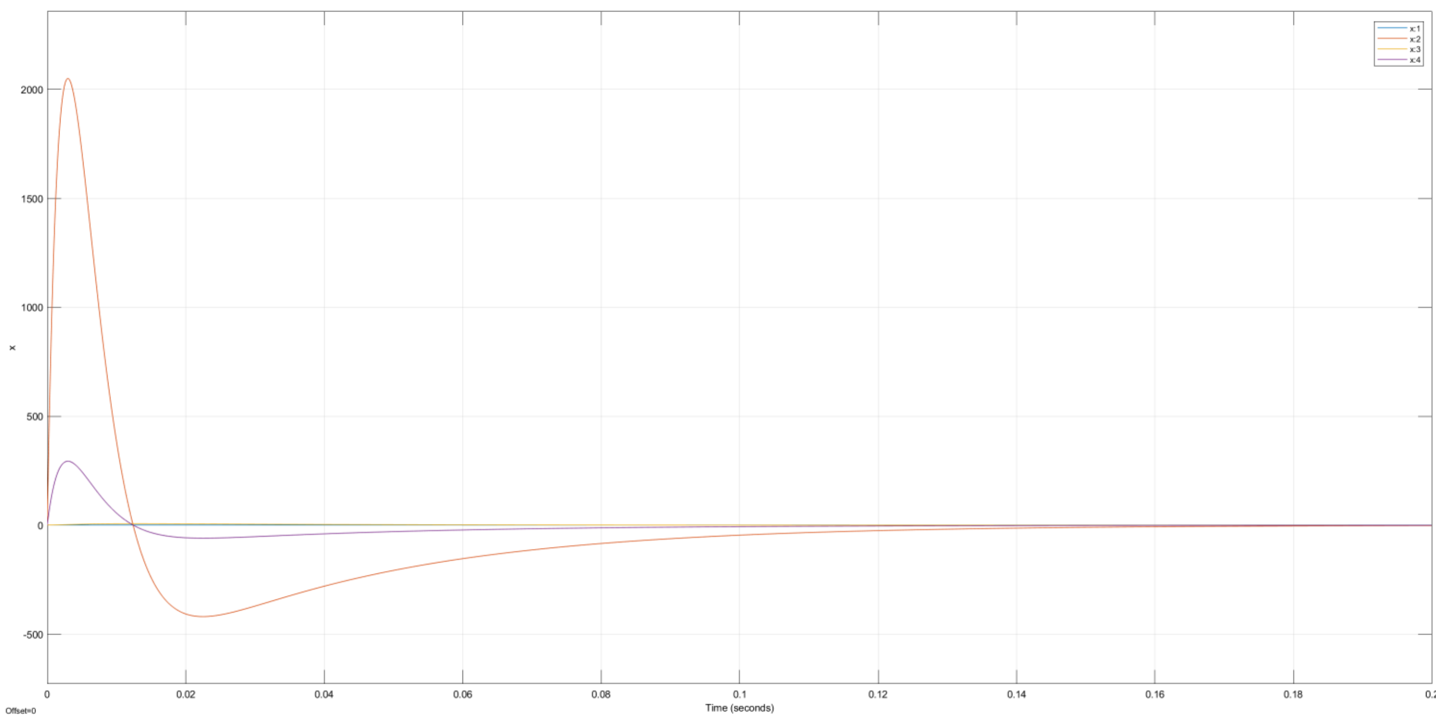

Рисунок 4: график $x(t)$

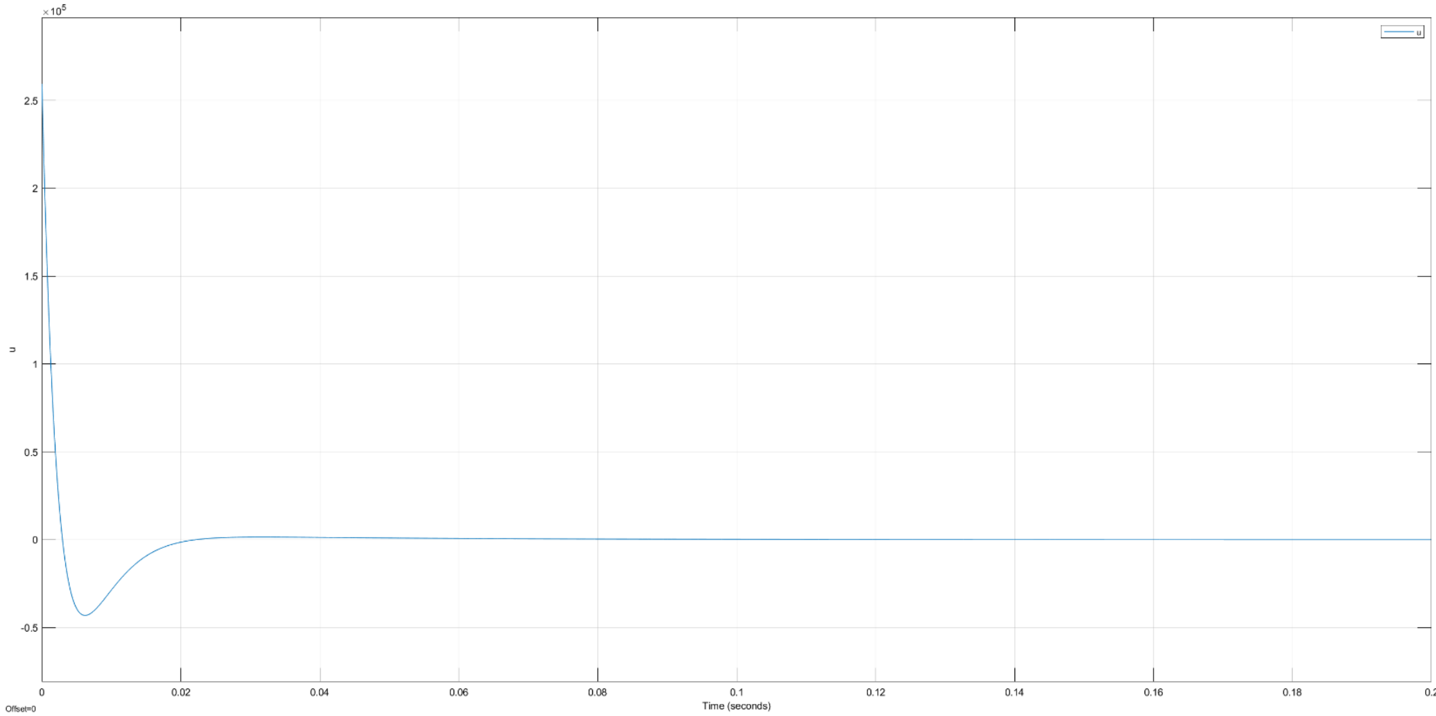

Рисунок 5: график $u(t)$

$\boldsymbol{\sigma(\Gamma) = \sigma(A + BK) = \{-3, -5, 3i, -3i\}}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Выберем матрицу Y, так чтобы пара (Y, Γ) была наблюдаема:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу подобия P:

$$AP - P\Gamma = BY, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{6} & \frac{7}{8} & 0 & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{3}{73} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{15} & \frac{8}{73} & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

Находим матрицу регулятора K:

$$K = -YP^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{16}{7} & -19 & 2 \end{bmatrix}$$

Моделирование замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$:

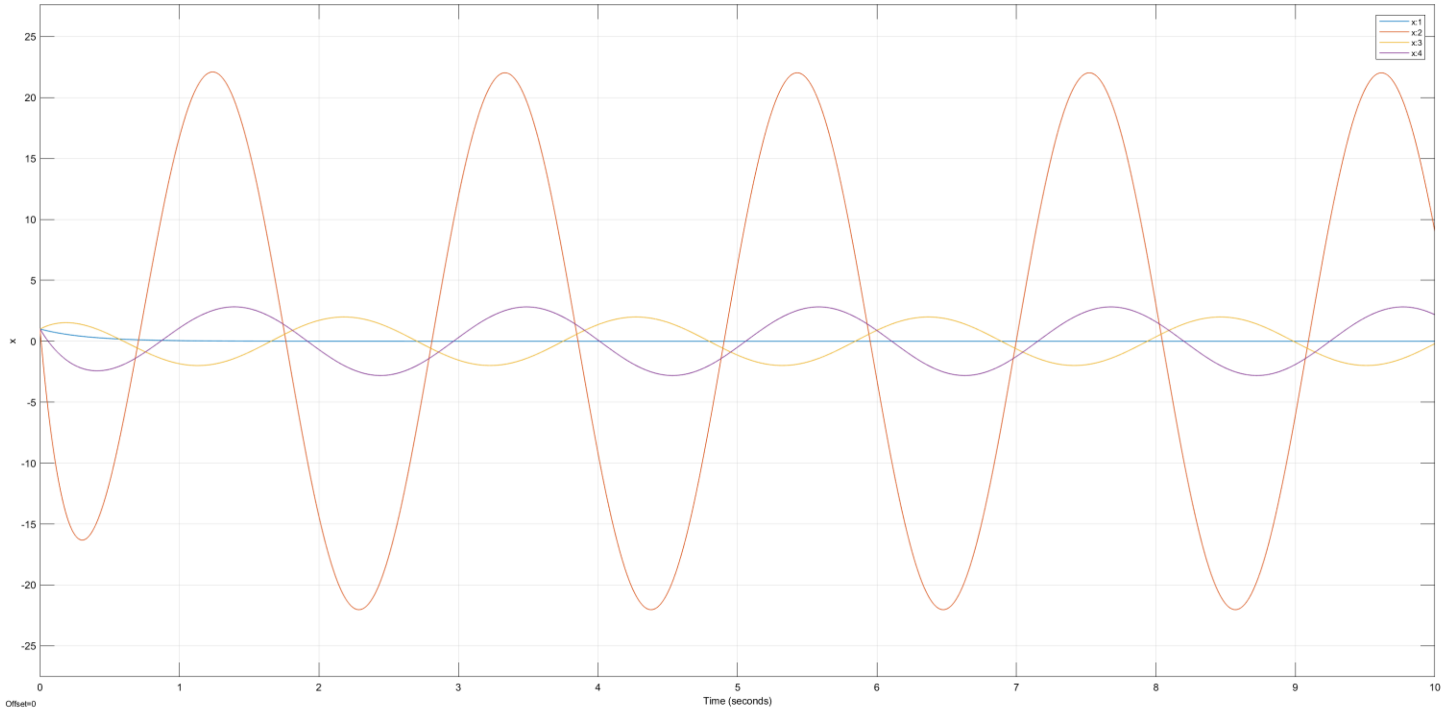

Рисунок 6: график $x(t)$

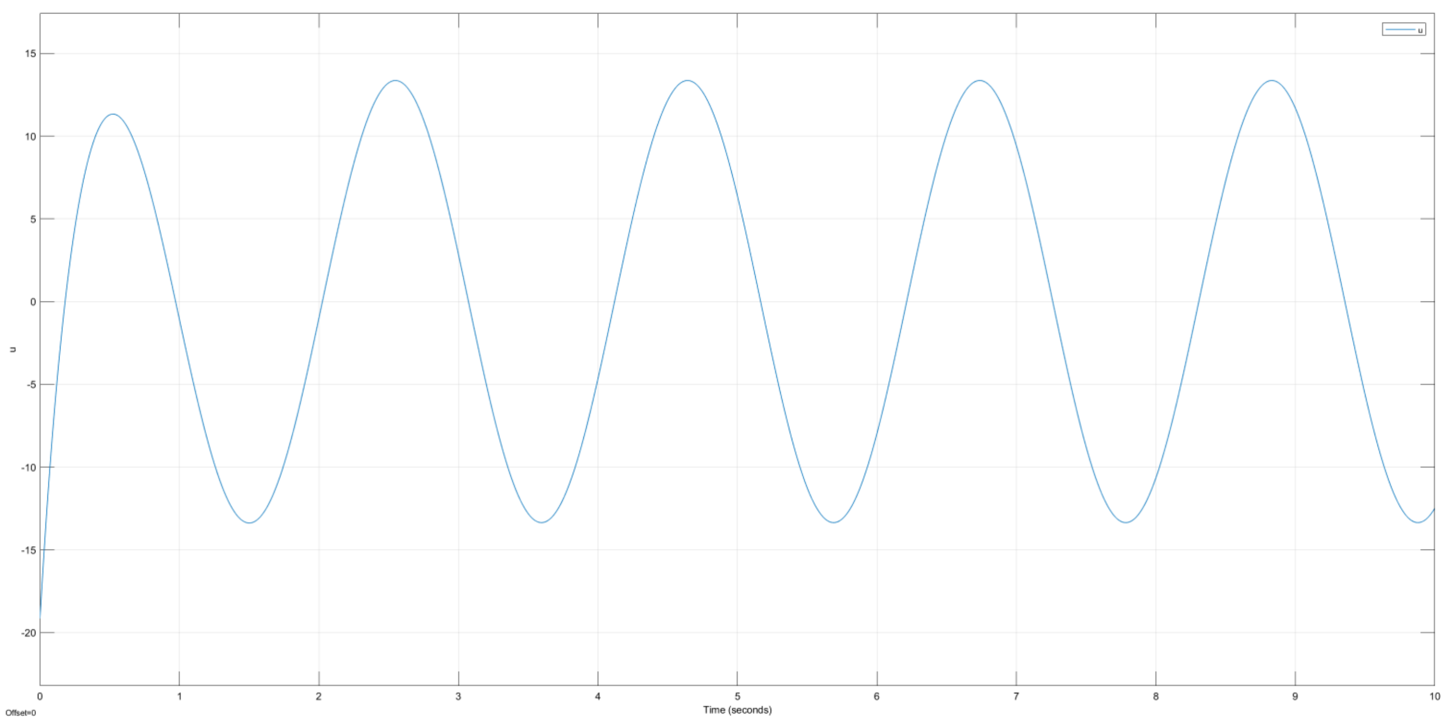

Рисунок 7: график $u(t)$

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\Gamma}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}) = \{-\mathbf{3}, -\mathbf{5}, -\mathbf{5} + \mathbf{3}\boldsymbol{i}, -\mathbf{5} - \mathbf{3}\boldsymbol{i}\}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Выберем матрицу Y, так чтобы пара (Y, Γ) была наблюдаема:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу подобия P:

$$AP - P\Gamma = BY, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{6} & \frac{7}{8} & \frac{35}{73} & \frac{77}{73} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{3}{73} & -\frac{3}{400} & -\frac{21}{400} \\ \frac{2}{15} & \frac{8}{73} & \frac{29}{400} & \frac{53}{400} \end{bmatrix}$$

Находим матрицу регулятора K:

$$K = -YP^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{135} & -\frac{584}{63} & -64 & \frac{368}{9} \end{bmatrix}$$

Моделирование замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$:

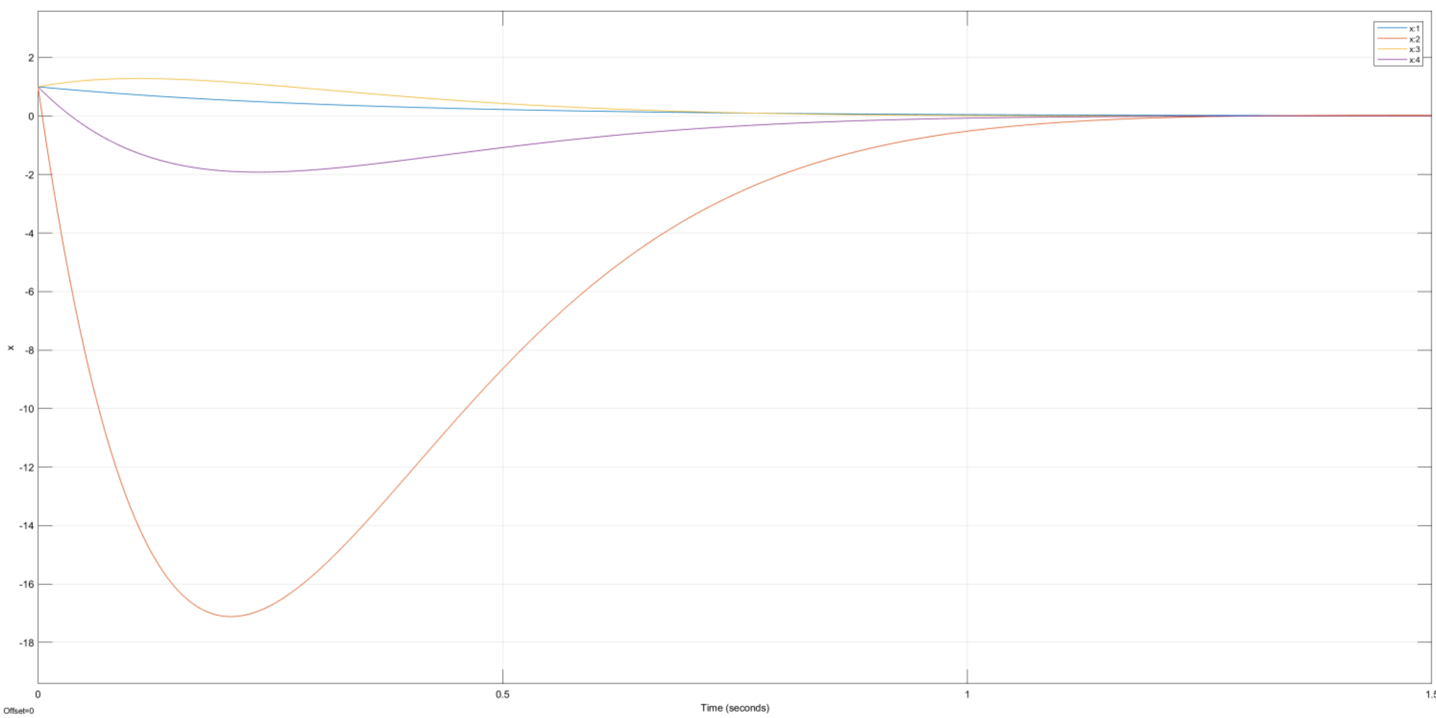

Рисунок 8: график $x(t)$

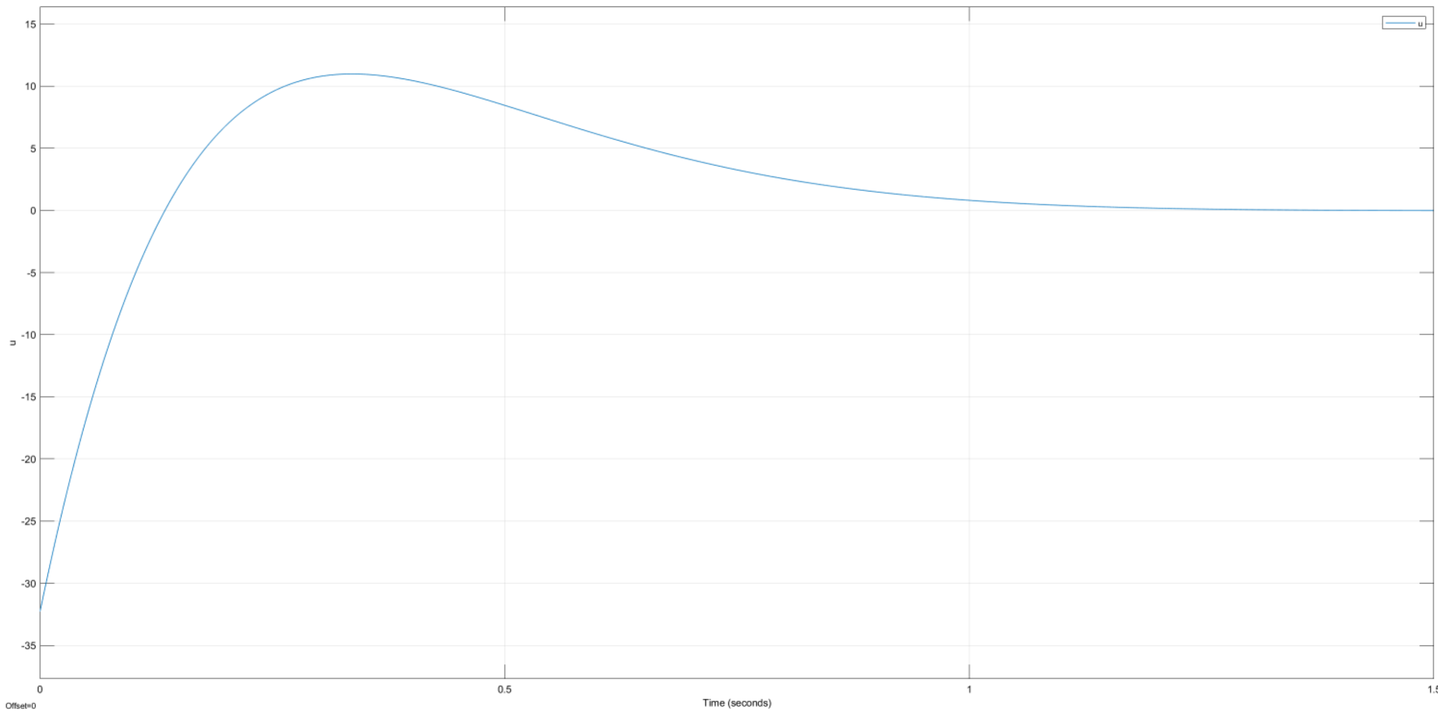

Рисунок 9: график $u(t)$

Так как система является стабилизируемой, то возможно было выбрать такое модальное управление, в результате которого все моды системы будут устойчивы, а значит и замкнутая система будет асимптотически устойчивой.

Возможно изменить любые моды системы, кроме той, которая соответствует собственному числу $\lambda_3 = -3$, так как данное собственное число не является управляемым.

Задание 2.

2.1. Наблюдаемость и обнаруживаемость системы

Рассматриваемая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = 5i, \qquad \lambda_2 = -5i, \qquad \lambda_3 = i, \qquad \lambda_4 = -i$$

Так как система уже представлено в жордановой форме, то для определения наблюдаемости собственных чисел будет использовать соответствующий способ.

$\lambda_{1,2,3,4}$ — наблюдаемы

Так как все собственные числа наблюдаемы, то система является полностью наблюдаемой и, тем более, она является обнаруживаемой.

2.2. Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

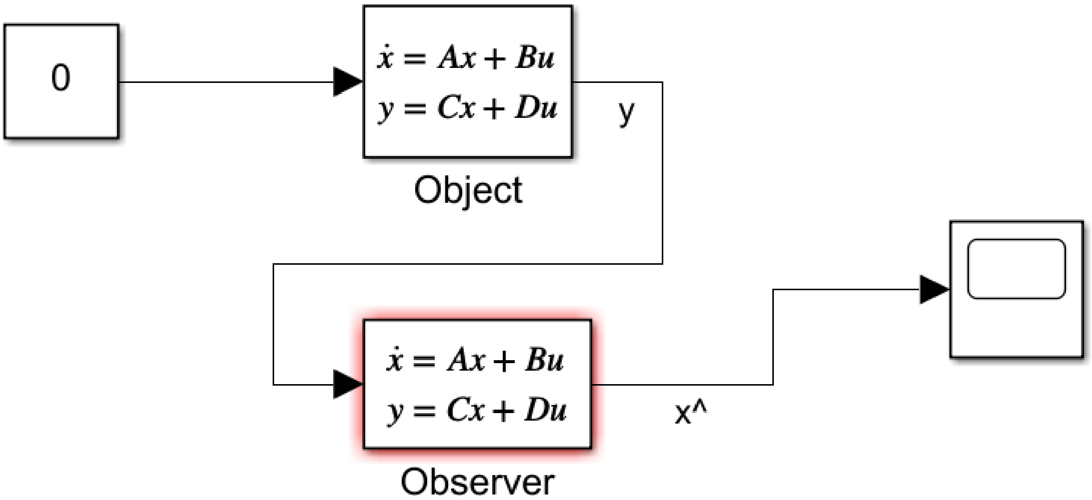

Рисунок 10: схема моделирования системы с наблюдателем состояния

2.3. Наблюдатель состояния

Программный код:

```
(* plant parameters *)
a = {{0, 5, 0, 0}, {-5, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, -1, 0}};
c = {{0, 9, 1, 0}};

(* observability of eigen values *)
eVal = Eigenvalues[a];
o = Join[c, c.a, c.a.a, c.a.a.a];
MatrixRank[o];
MatrixRank[Join[a - ev[[2]] * IdentityMatrix[4], c]];
MatrixRank[Join[a - ev[[3]] * IdentityMatrix[4], c]];
MatrixRank[Join[a - ev[[4]] * IdentityMatrix[4], c]];

(* observer matrix *)
g = {{-3, 1, 0, 0}, {0, -3, 1, 0}, {0, 0, -3, 1}, {0, 0, 0, -3}};
y = {{1}, {1}, {1}, {1}};
p = {{p11, p12, p13, p14}, {p21, p22, p23, p24}, {p31, p32, p33, p34}, {p41, p42, p43, p44}};
Solve[g.p - p.a == y.c, {p11, p12, p13, p14, p21, p22, p23, p24, p31, p32, p33, p34, p41, p42, p43, p44}];
p = {{-518805/334084, -103545/167042, -501/1250, 489/2500}, {-30645/19652, -12267/19652, -199/500, 93/500}, {-450/289, -387/578, -19/50, 4/25}, {-45/34, -27/34, -3/10, 1/10}};
l = Inverse[p].y;
```

$\boldsymbol{\sigma(\Gamma)} = \boldsymbol{\sigma(A + LC)} = \{\mathbf{-3, -3, -3, -3}\}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Выберем матрицу Y, так чтобы пара (Γ, Y) была управляема:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу подобия Q:

$$\Gamma Q - QA = YC, \qquad Q = \begin{bmatrix} -1.5529 & -0.61987 & -0.4008 & 0.1956 \\ -1.5593 & -0.62421 & -0.398 & 0.186 \\ -1.5571 & -0.66955 & -0.38 & 0.16 \\ -1.3235 & -0.79412 & -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу наблюдателя L:

$$L = Q^{-1}Y = \begin{bmatrix} \frac{161}{270} \\ -\frac{8}{9} \\ -4 \\ -\frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

Моделирование замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$ и $\hat{x}(0) = [2 \quad 0 \quad 0 \quad -1]^T$.

Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$:

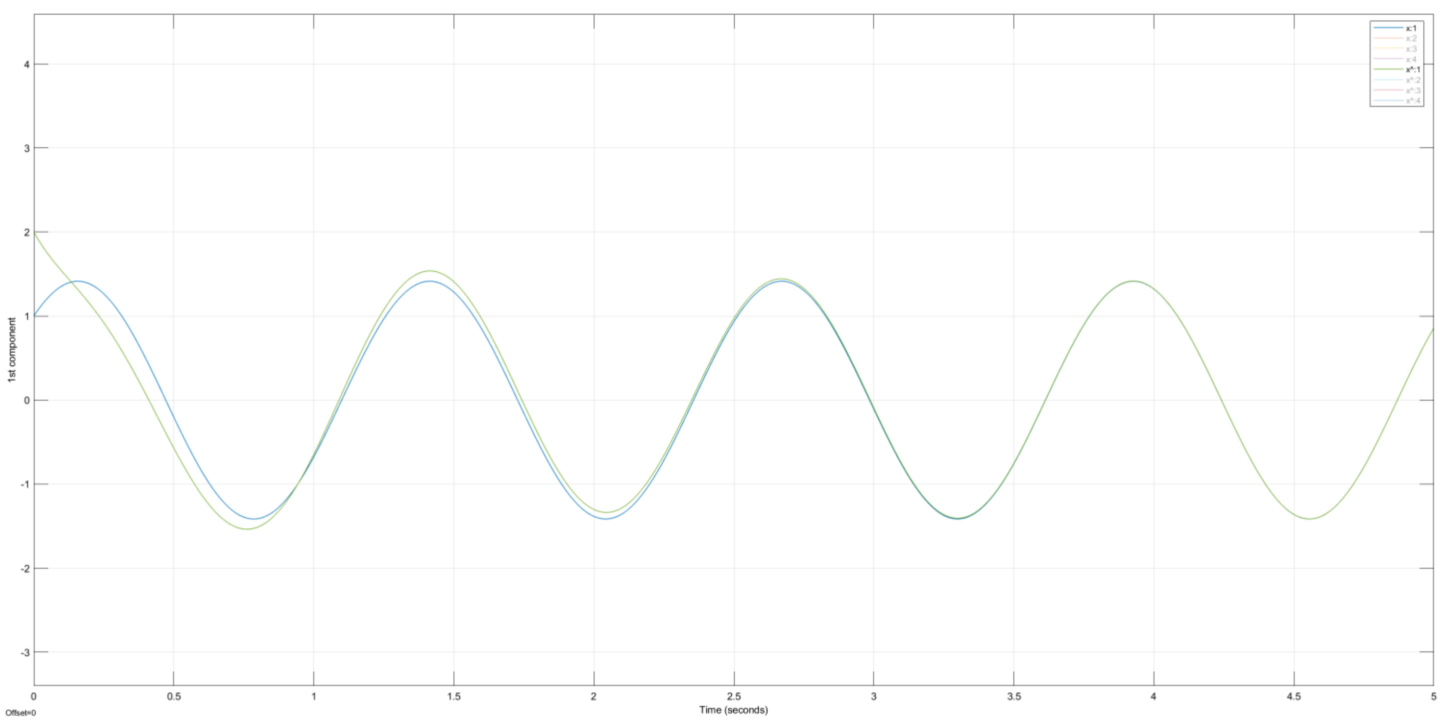

Рисунок 11: графики первых компонент

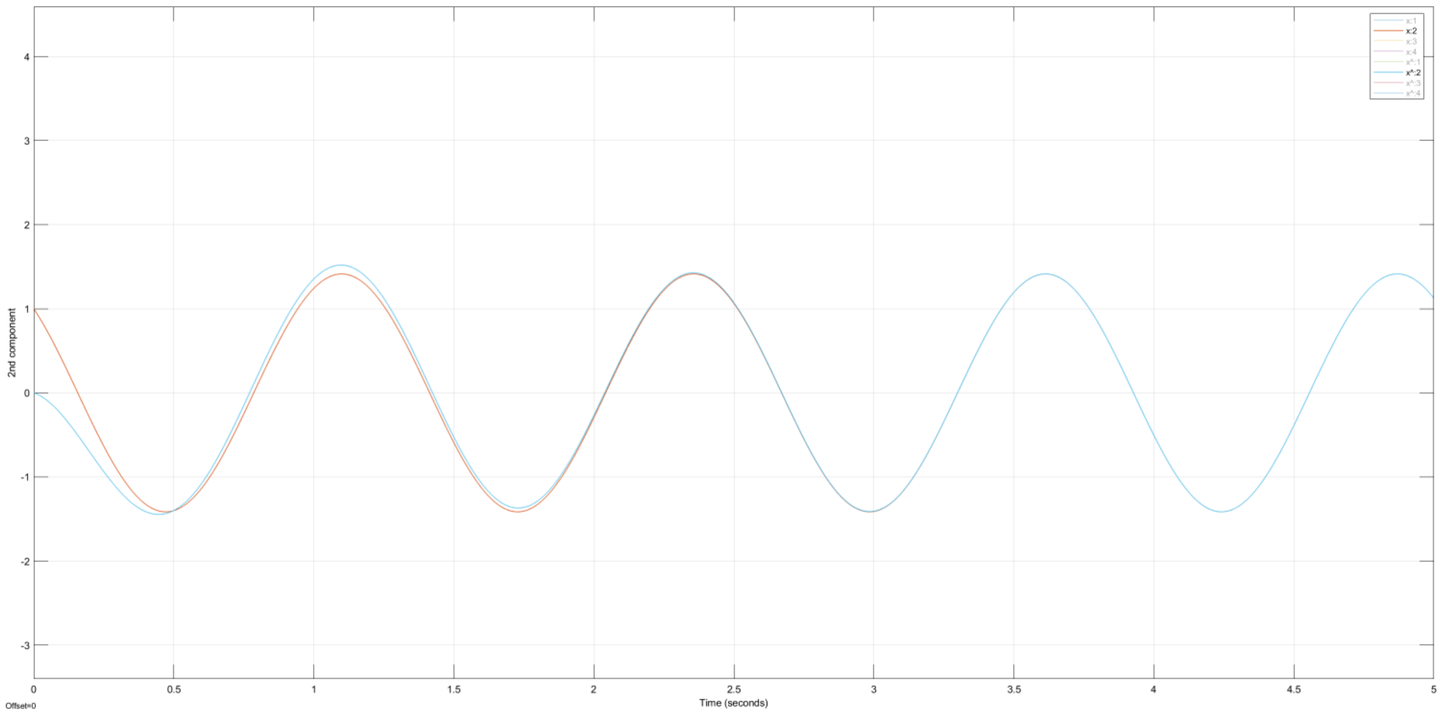

Рисунок 12: графики вторых компонент

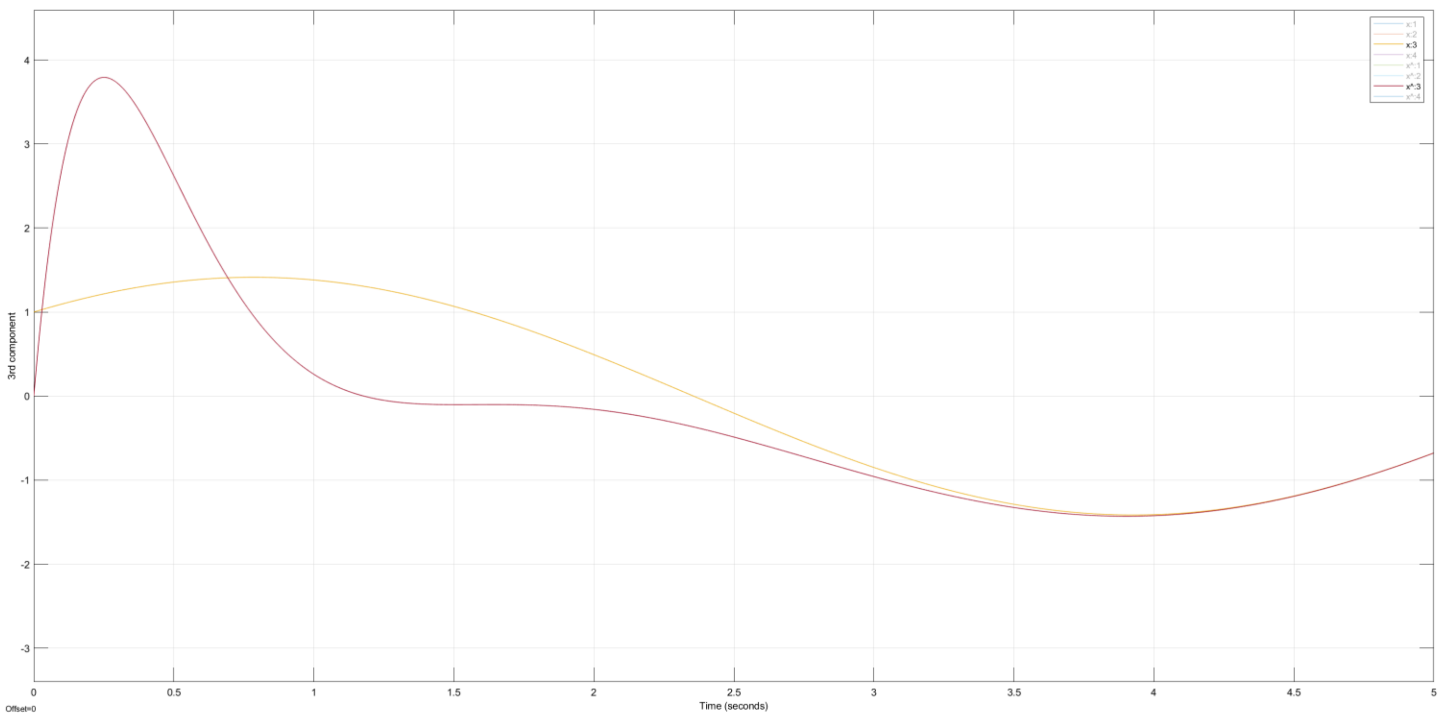

Рисунок 13: графики третьих компонент

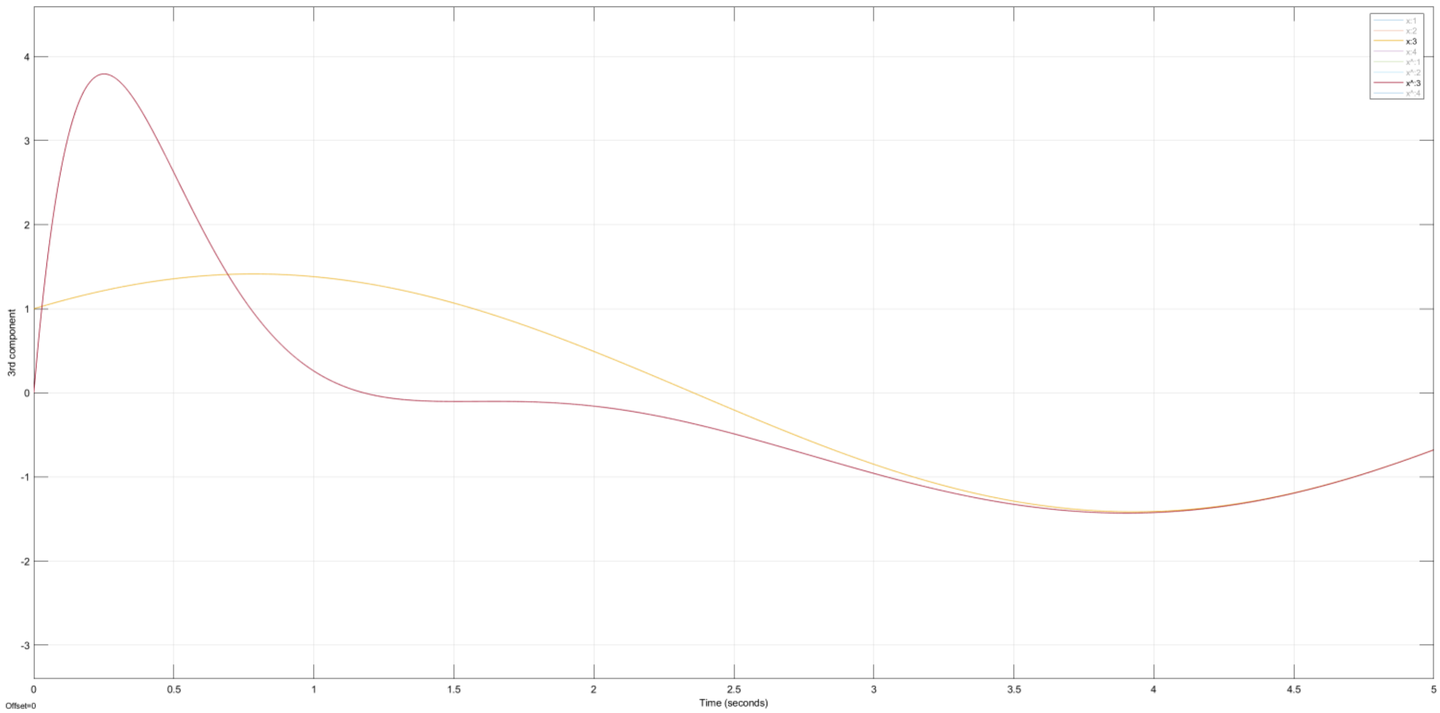

Рисунок 14: графики четвертых компонент

Ошибка наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$:

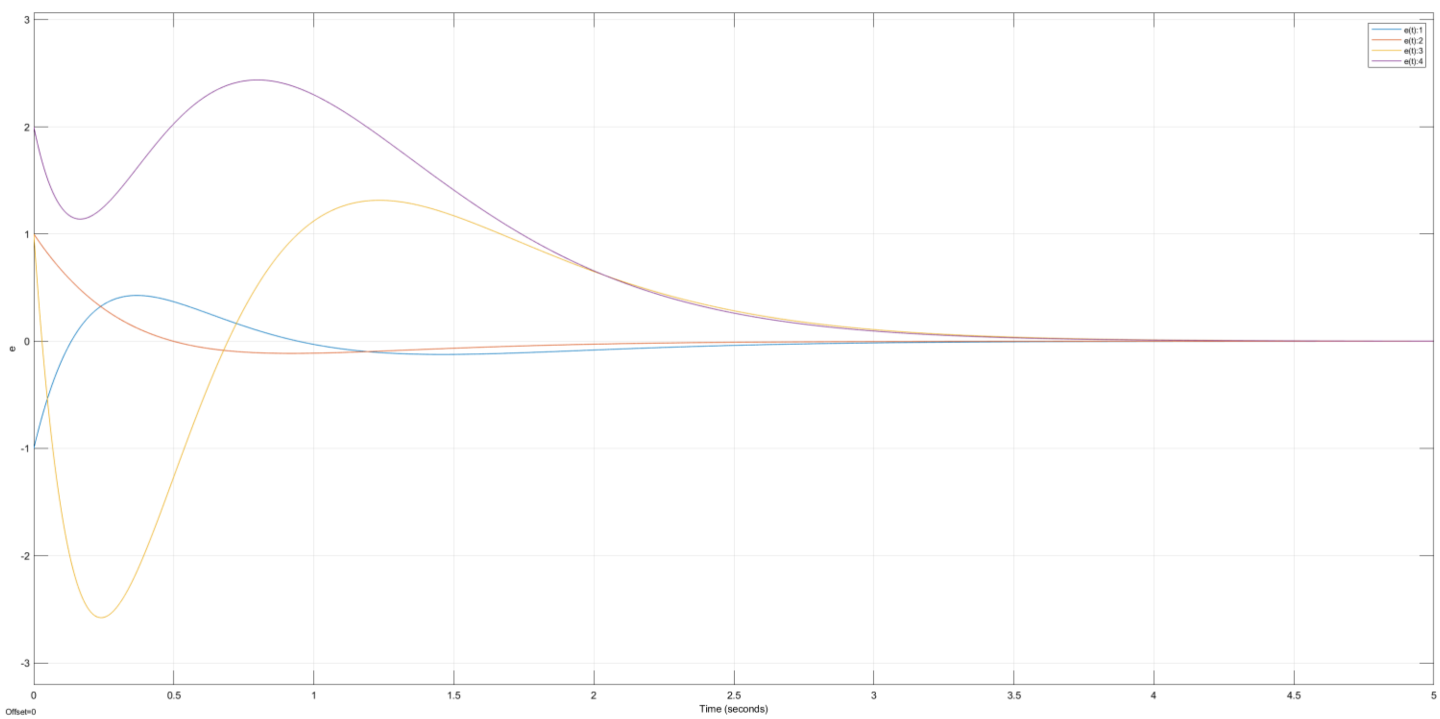

Рисунок 15: графики ошибки наблюдателя

$\boldsymbol{\sigma(\Gamma) = \sigma(A + LC) = \{-3, -30, -300, -300\}}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -300 \end{bmatrix}$$

Выберем матрицу Y, так чтобы пара (Γ, Y) была управляема:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу подобия Q:

$$\Gamma Q - QA = YC, \qquad Q = \begin{bmatrix} -1.3235 & -0.79412 & -0.3 & 0.1 \\ -0.048648 & -0.29189 & -0.033296 & 0.0011098 \\ -0.00050319 & -0.030091 & -0.0033444 & 0.000011185 \\ -0.00049986 & -0.029991 & -0.0033333 & 0.000011111 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу наблюдателя L:

$$L = Q^{-1}Y = \begin{bmatrix} -4956.8 \\ 13926 \\ -125970 \\ -332920 \end{bmatrix}$$

Моделирование замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$ и $\hat{x}(0) = [2 \quad 0 \quad 0 \quad -1]^T$.

Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$:

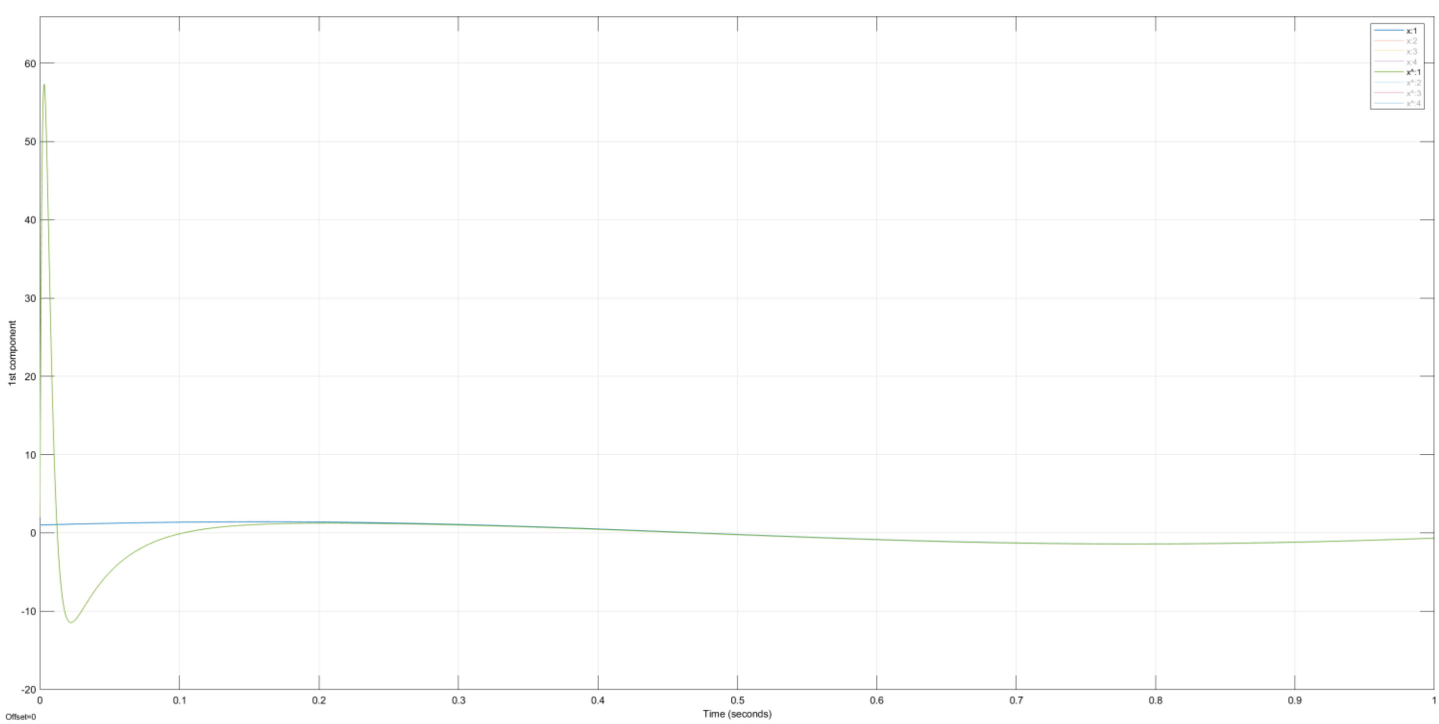

Рисунок 16: графики первых компонент

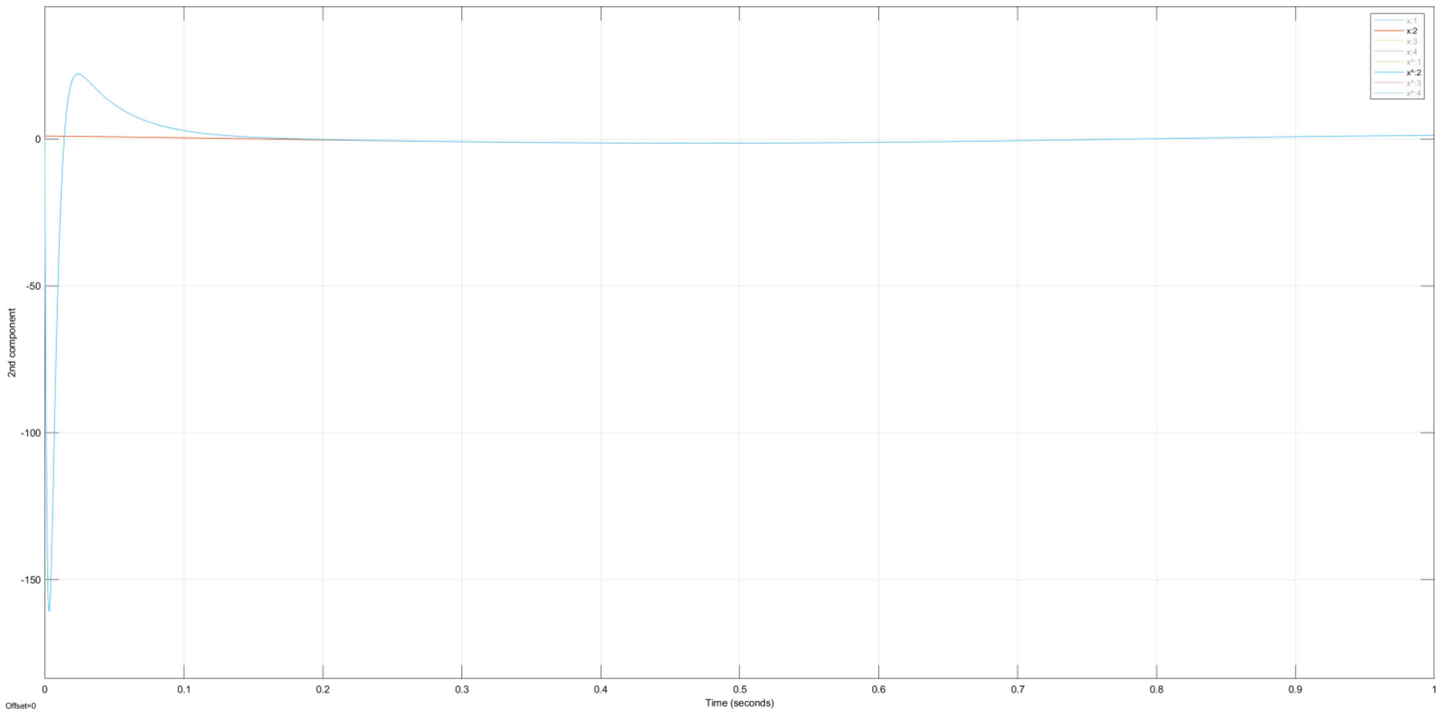

Рисунок 17: графики вторых компонент

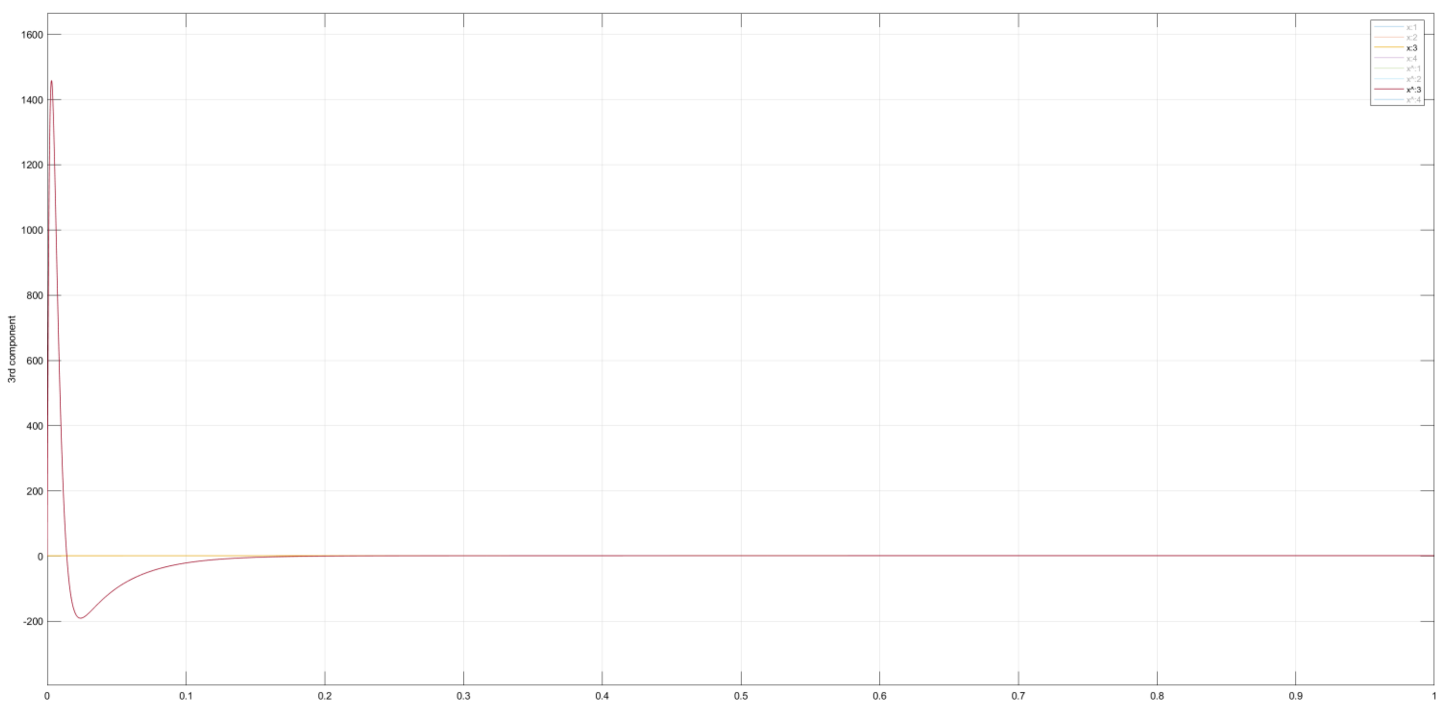

Рисунок 18: графики третьих компонент

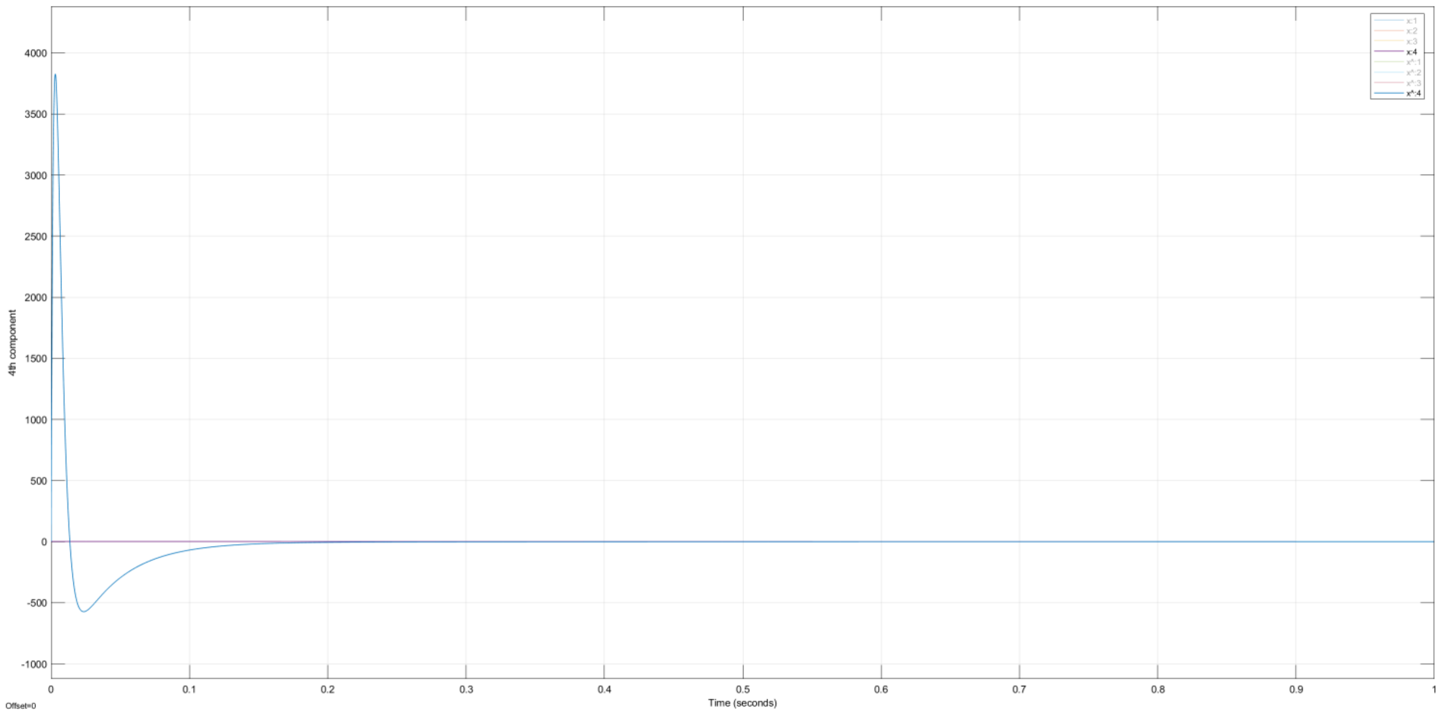

Рисунок 19: графики четвертых компонент

Ошибка наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$:

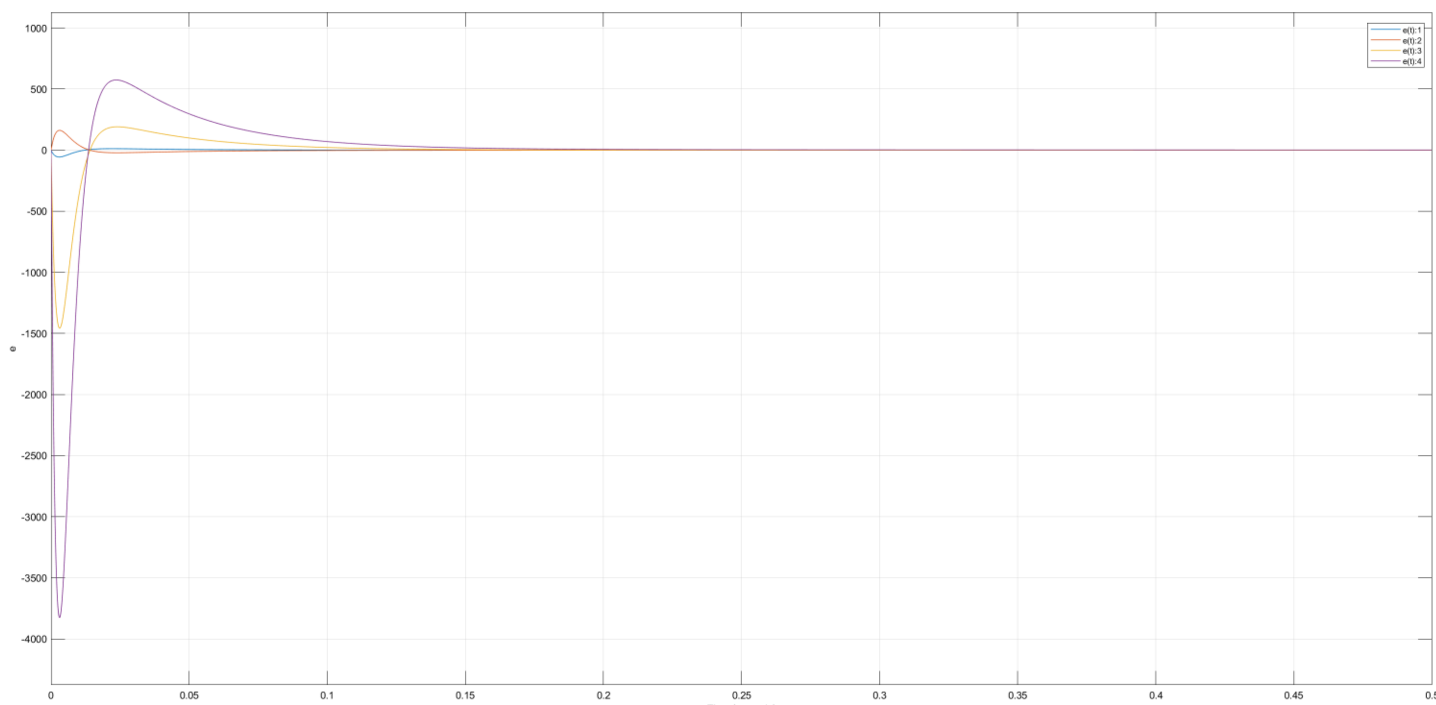

Рисунок 20: графики ошибки наблюдателя

$\boldsymbol{\sigma(\Gamma) = \sigma(A + LC) = \{-3, -5, 3i, -3i\}}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Выберем матрицу Y, так чтобы пара (Γ, Y) была управляема:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу подобия Q:

$$\Gamma Q - QA = YC, \qquad Q = \begin{bmatrix} -1.3235 & -0.79412 & -0.3 & 0.1 \\ -0.9 & -0.9 & -0.1923 & 0.038461 \\ -2.8125 & 1.6875 & -0.375 & -0.125 \\ -2.8125 & -1.6875 & 0.375 & -0.125 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу наблюдателя L:

$$L = Q^{-1}Y = \begin{bmatrix} -0.14814 \\ -0.59259 \\ -2.6666 \\ -4.6666 \end{bmatrix}$$

Моделирование замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$ и $\hat{x}(0) = [2 \quad 0 \quad 0 \quad -1]^T$.

Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$:

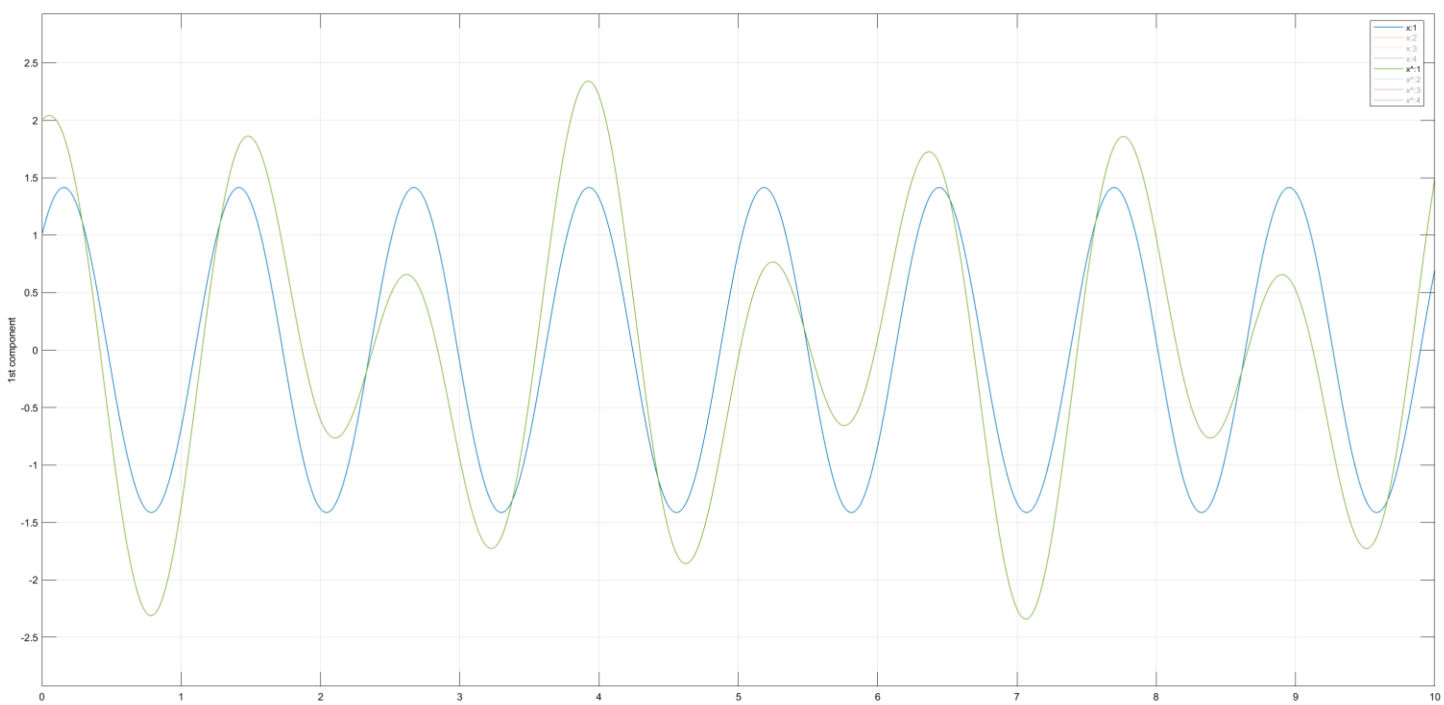

Рисунок 21: графики первых компонент

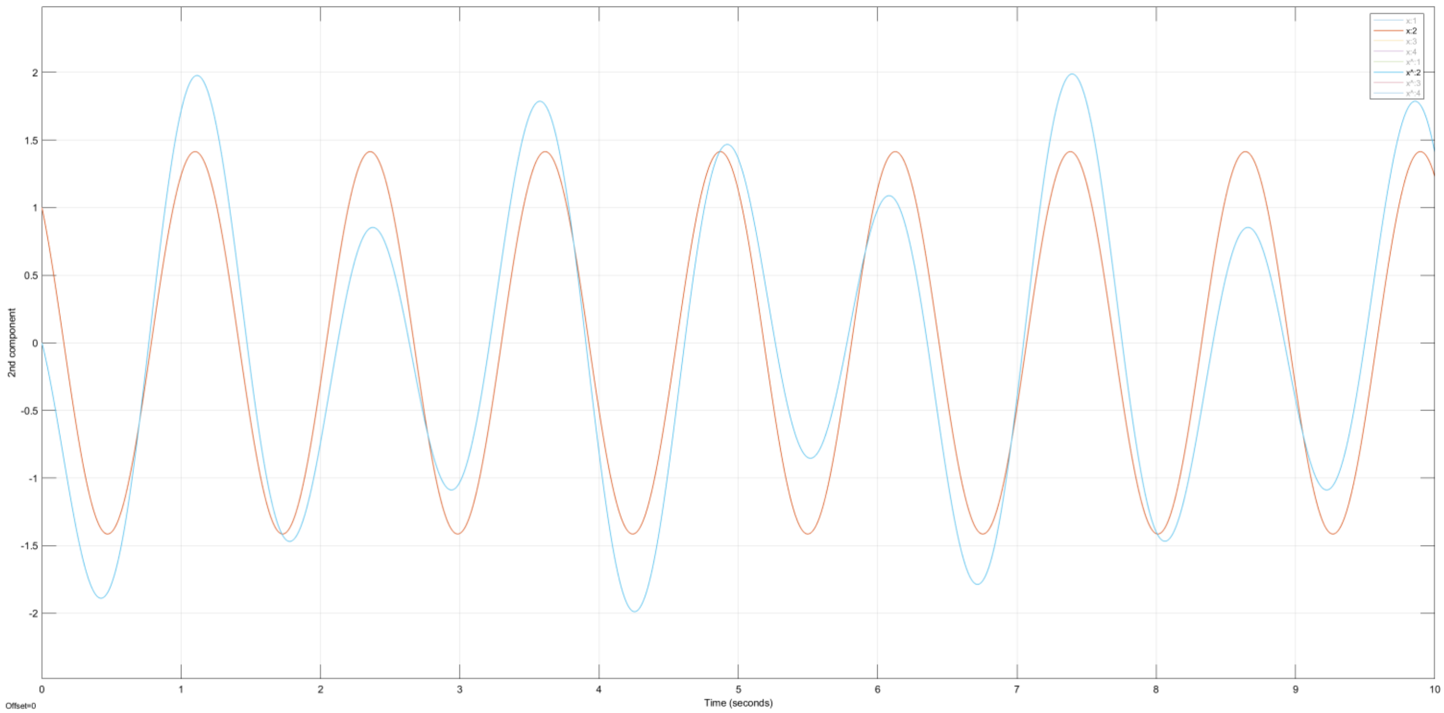

Рисунок 22: графики вторых компонент

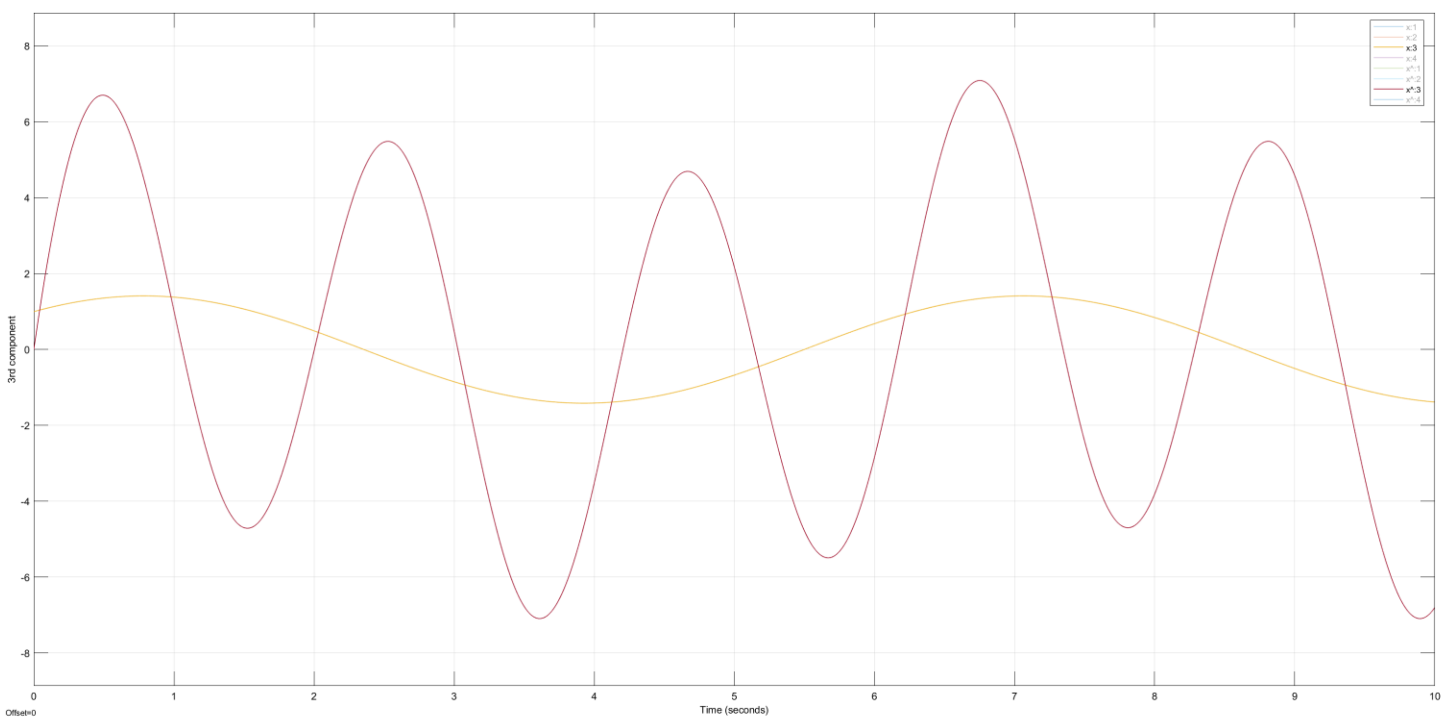

Рисунок 23: графики третьих компонент

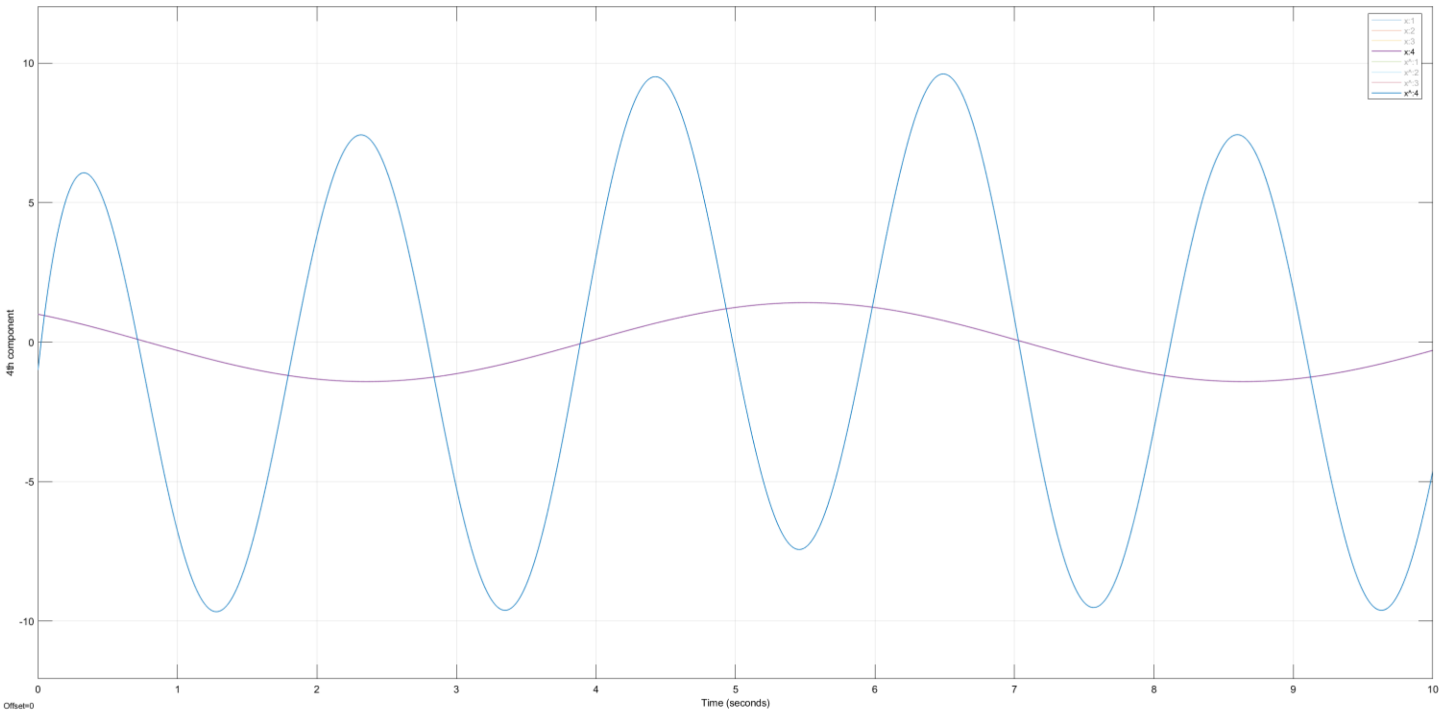

Рисунок 24: графики четвертых компонент

Ошибка наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$:

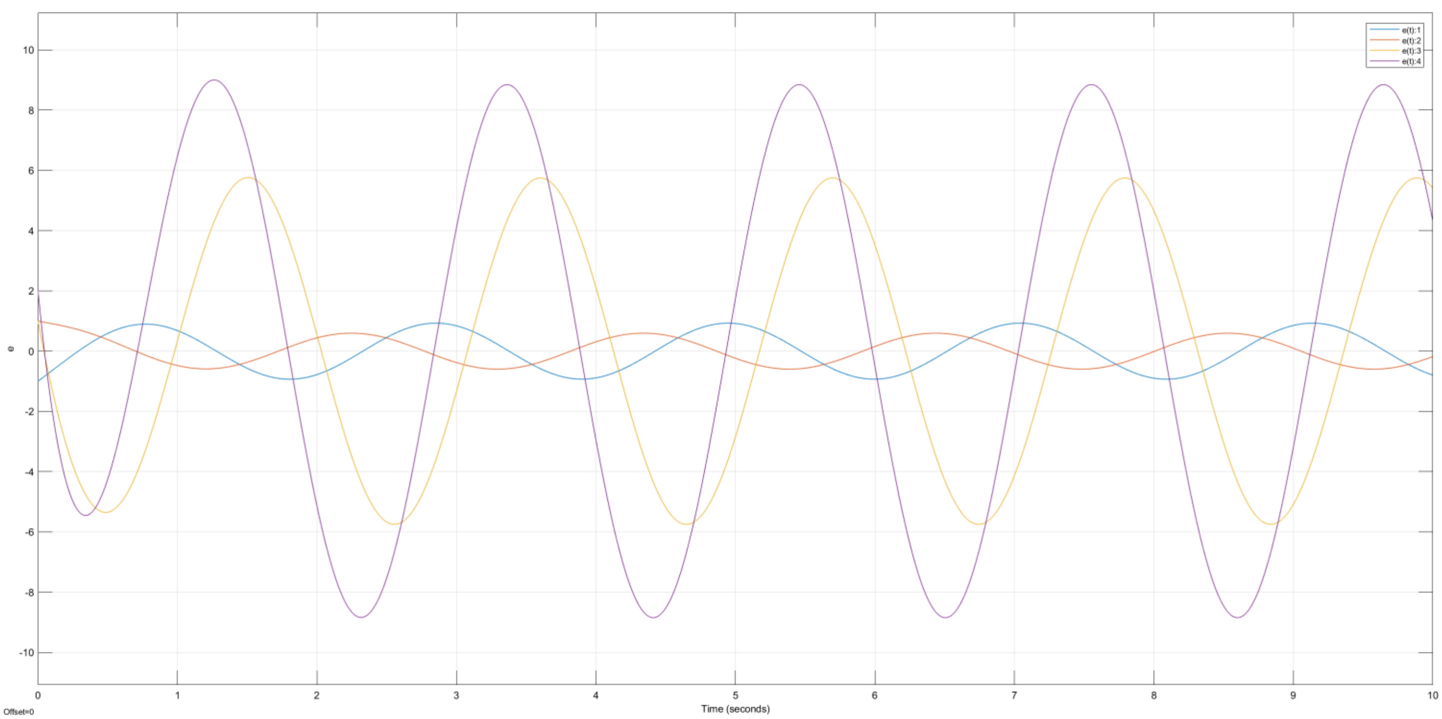

Рисунок 25: графики ошибки наблюдателя

$\boldsymbol{\sigma(\Gamma) = \sigma(A + LC) = \{-3, -5, -5 + 3i, -5 - 3i\}}$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Выберем матрицу Y, так чтобы пара (Γ, Y) была управляема:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу подобия Q:

$$\Gamma Q - QA = YC, \qquad Q = \begin{bmatrix} -1.3235 & -0.79412 & -0.3 & 0.1 \\ -0.9 & -0.9 & -0.1923 & 0.038461 \\ -1.2379 & -1.1228 & -0.23044 & 0.039529 \\ -0.19178 & -0.93452 & -0.063919 & -0.010933 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу наблюдателя L:

$$L = Q^{-1}Y = \begin{bmatrix} 1.9351 \\ -0.12963 \\ -16.833 \\ -15.916 \end{bmatrix}$$

Моделирование замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$ и $\hat{x}(0) = [2 \quad 0 \quad 0 \quad -1]^T$.

Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$:

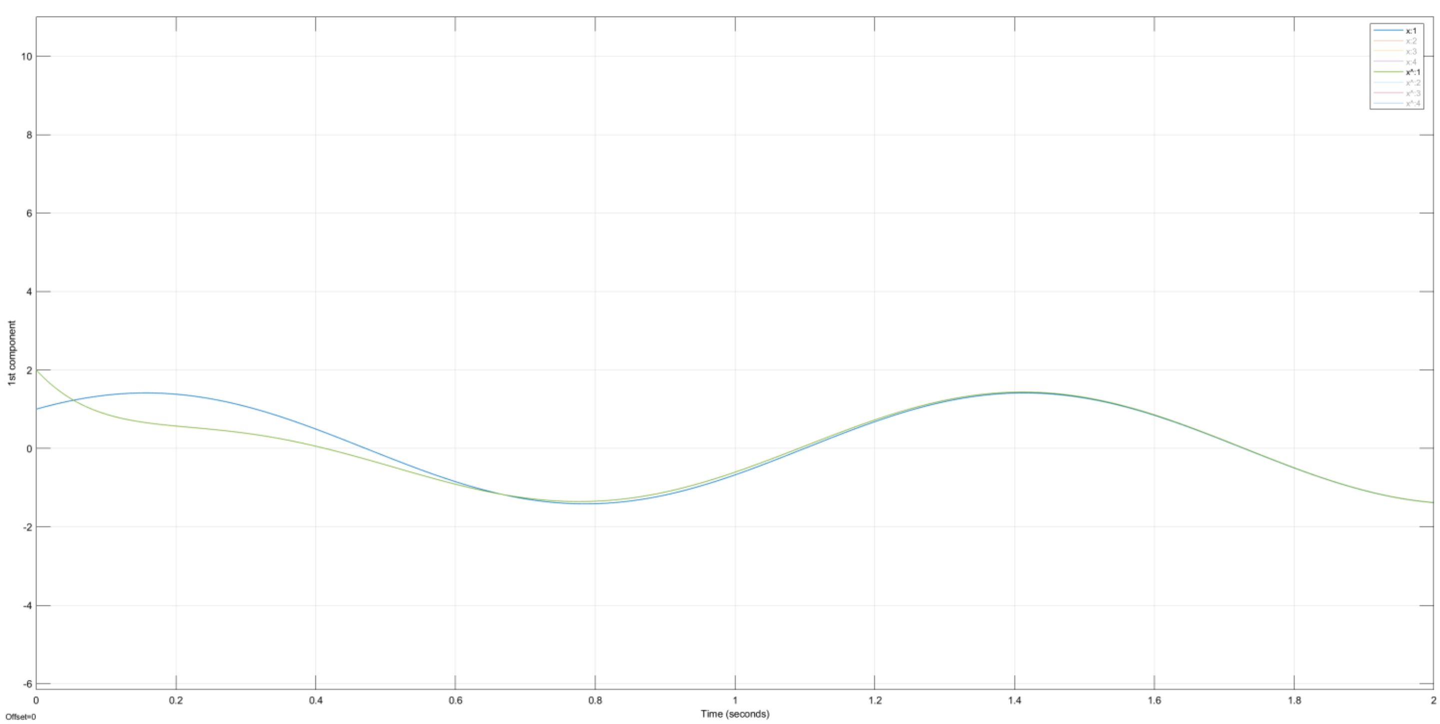

Рисунок 26: графики первых компонент

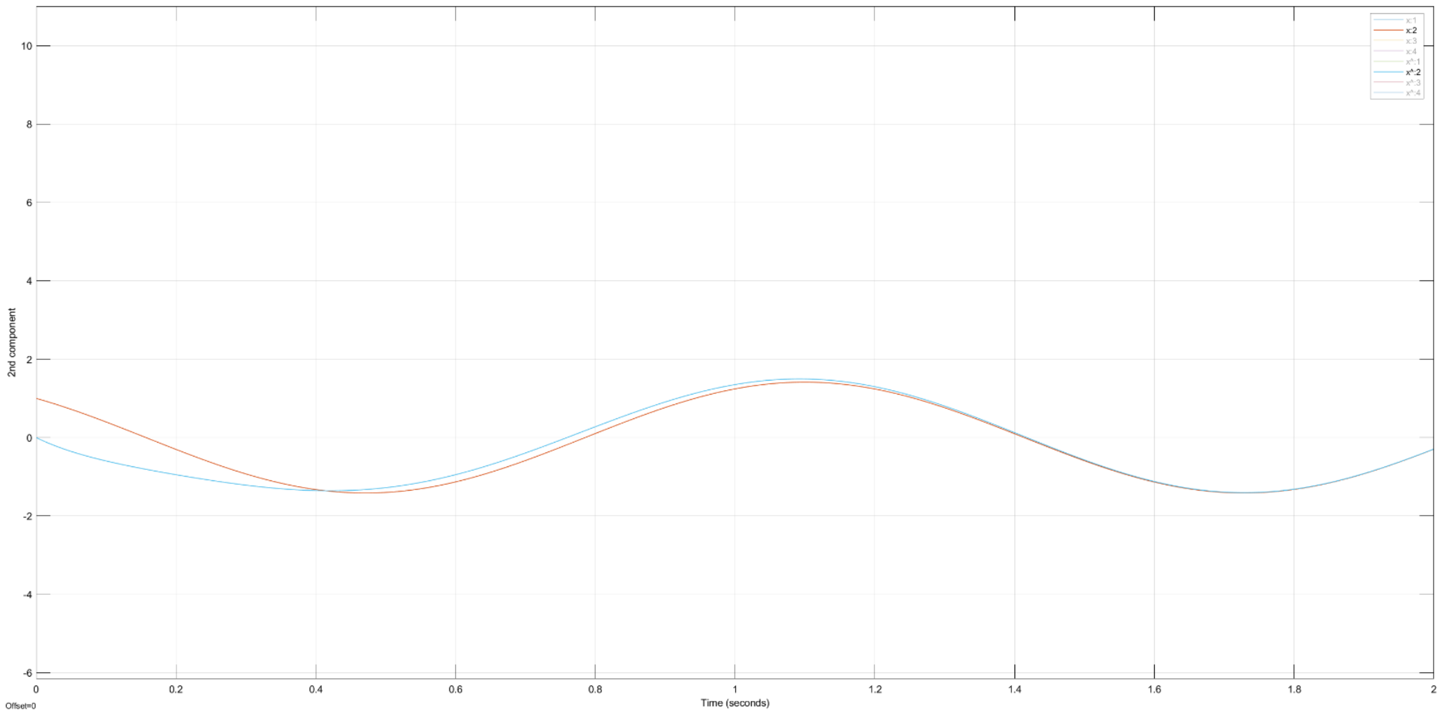

Рисунок 27: графики вторых компонент

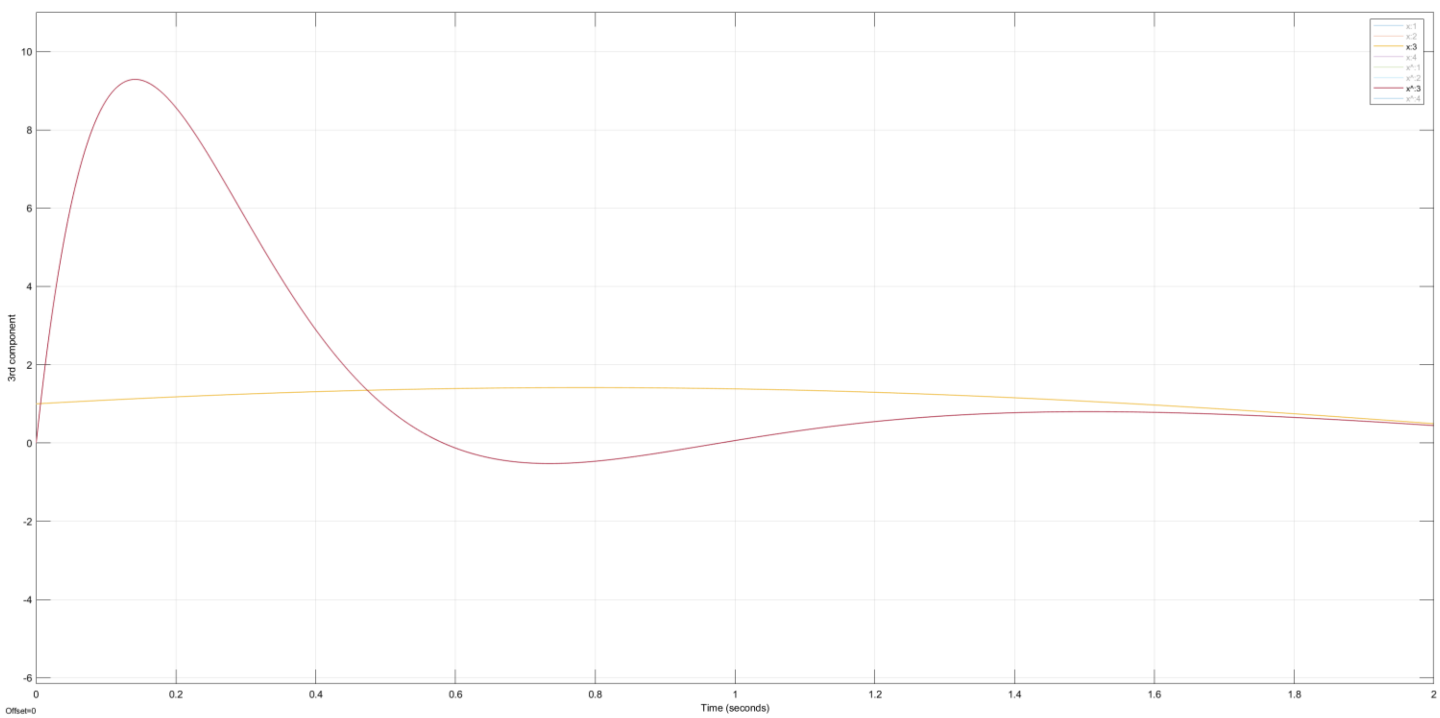

Рисунок 28: графики третьих компонент

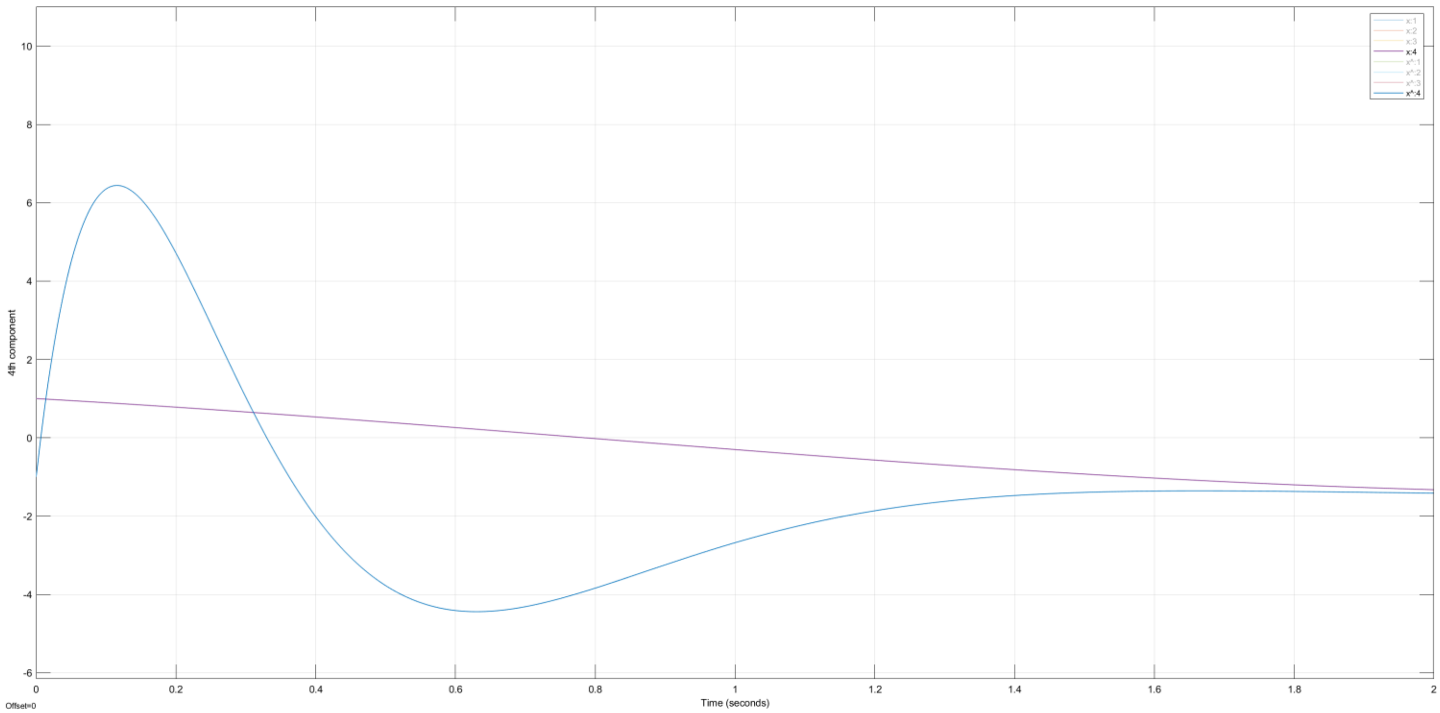

Рисунок 29: графики четвертых компонент

Ошибка наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$:

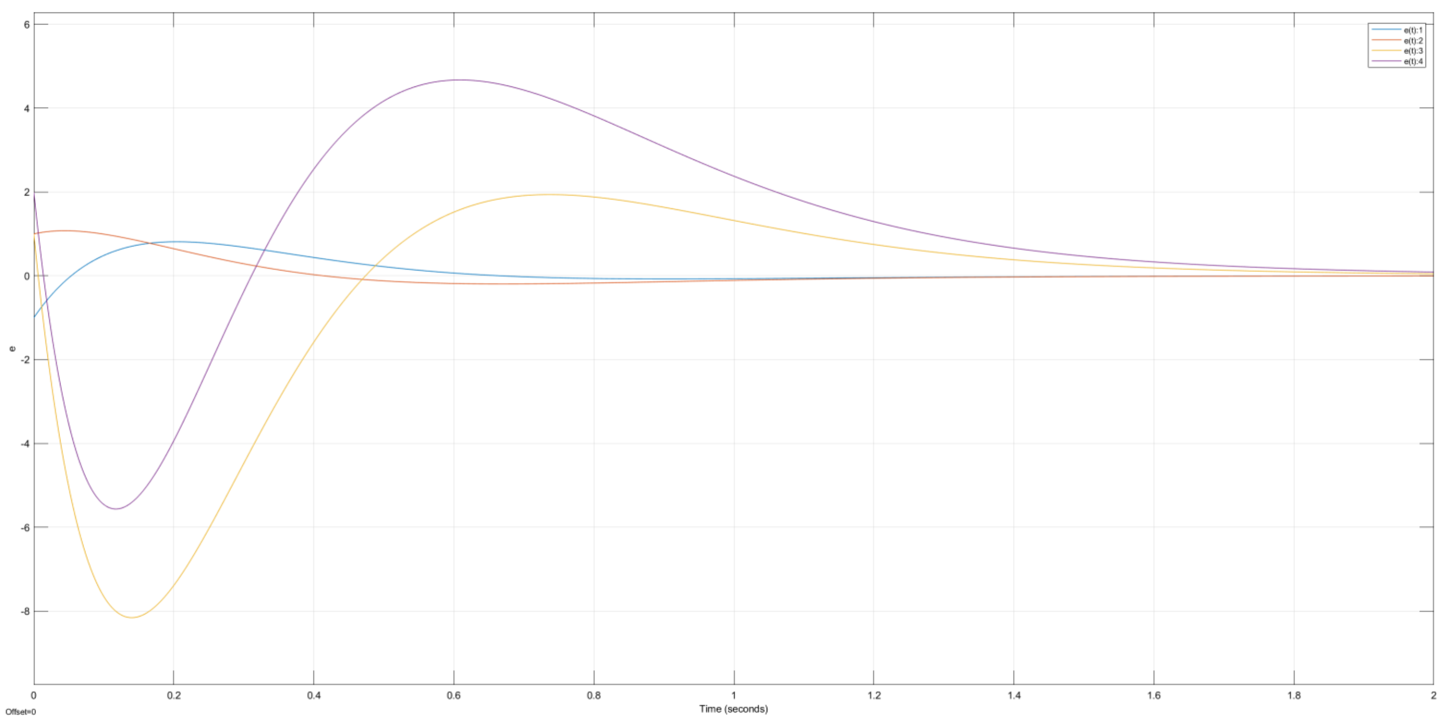

Рисунок 30: графики ошибки наблюдателя

Исследуемая система является полностью наблюдаемой, значит возможно реализовать наблюдатель состояния $\hat{x}$ такой, что ошибка наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ будет сходиться к нулю. Таким образом после некоторого момента времени наблюдатель будет показывать реальную величину x.

Это наблюдалось при всех исследуемых спектрах матрицы $A + LC$, кроме $\{-3, -5, 3i, -3i\}$ – данном случае матрица $A + LC$ не будет асимптотически устойчива, так как моды соответствующие собственным числам $\pm 3i$ с течением времени не уменьшаются и ошибка наблюдателя будет соответствовать закону $sin3t + cos3t$.

Задание 3.

3.1. Стабилизируемость и обнаруживаемость системы

Рассматриваемая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & 5 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = 16, \qquad \lambda_2 = -8, \qquad \lambda_3 = 8, \qquad \lambda_4 = 4$$

Для определения управляемости и наблюдаемости собственных чисел будем использовать метод на основе матрицы Хаутуса.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 16}$:

$$rank \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} -11 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & -11 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & -11 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 4 = n$$

$$rank[A - \lambda_1 I \quad B] = rank \begin{bmatrix} -11 & -7 & -5 & 1 & 5 \\ -7 & -11 & -1 & 5 & 7 \\ -5 & -1 & -11 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & -11 & 9 \end{bmatrix} = 4 = n$$

Собственное число управляемо и наблюдаемо.

$\boldsymbol{\lambda_2 = -8}$:

$$rank \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 13 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & 13 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & 13 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \neq n$$

$$rank[A - \lambda_2 I \quad B] = rank \begin{bmatrix} 13 & -7 & -5 & 1 & 5 \\ -7 & 13 & -1 & 5 & 7 \\ -5 & -1 & 13 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & 13 & 9 \end{bmatrix} = 4 = n$$

Собственное число управляемо и ненаблюдаемо.

$\boldsymbol{\lambda_3 = 8}$:

$$rank\begin{bmatrix} A-\lambda_3 I \\ C \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & -3 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & -3 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 4 = n$$

$$rank[A-\lambda_3 I \quad B] = rank\begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 & 1 & 5 \\ -7 & -3 & -1 & 5 & 7 \\ -5 & -1 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & -3 & 9 \end{bmatrix} = 4 = n$$

Собственное число управляемо и наблюдаемо.

$\boldsymbol{\lambda_4 = 4}$:

$$rank\begin{bmatrix} A-\lambda_4 I \\ C \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & 1 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 4 = n$$

$$rank[A-\lambda_4 I \quad B] = rank\begin{bmatrix} 1 & -7 & -5 & 1 & 5 \\ -7 & 1 & -1 & 5 & 7 \\ -5 & -1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & 1 & 9 \end{bmatrix} = 4 = n$$

Собственное число управляемо и наблюдаемо.

Система является полностью управляемой и, следовательно, стабилизируемой. В то же время она не полностью наблюдаема, однако обнаруживаемая.

3.2. Схема моделирования системы с регулятором, состоящим из наблюдателя и закона управления

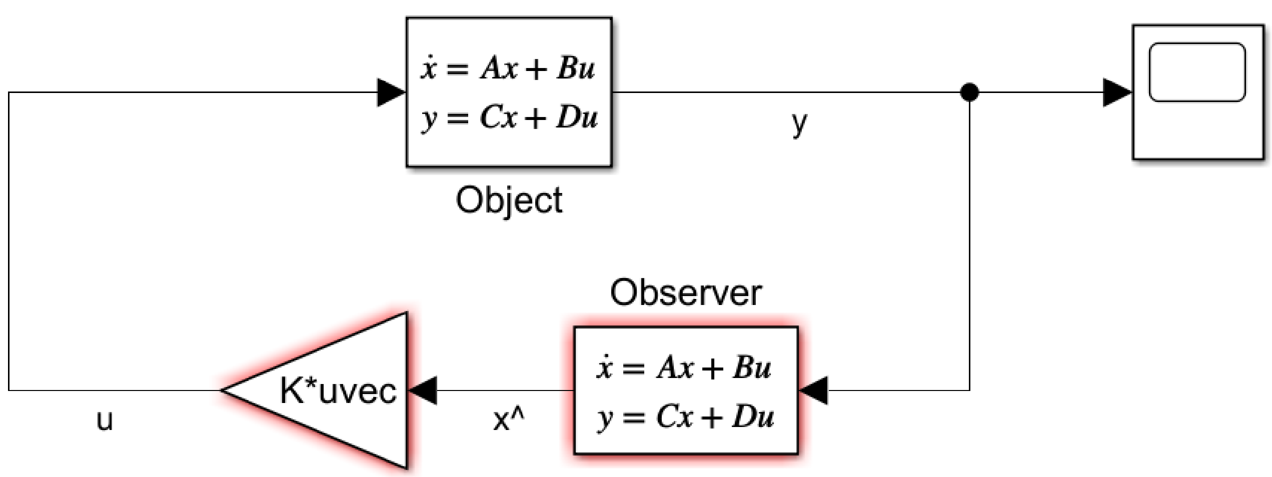

Рисунок 31: схема моделирования замкнутой системы

3.3. Модальное управление и наблюдатель

Программный код:

```
(* plant parameters *)
a = {{5, -7, -5, 1}, {-7, 5, -1, 5}, {-5, -1, 5, 7}, {1, 5, 7, 5}};
b = {{5}, {7}, {1}, {9}};
c = {{0, 0, 2, 2}, {1, 1, -1, 1}};

(* observability and controllability of eigen values *)
eVal = Eigenvalues[a];
MatrixRank[Join[a - eVal[[1]] * IdentityMatrix[4], b, 2]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[2]] * IdentityMatrix[4], b, 2]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[3]] * IdentityMatrix[4], b, 2]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[4]] * IdentityMatrix[4], b, 2]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[1]] * IdentityMatrix[4], c]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[2]] * IdentityMatrix[4], c]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[3]] * IdentityMatrix[4], c]];
MatrixRank[Join[a - eVal[[4]] * IdentityMatrix[4], c]];

(* controller matrix *)
gReg = {{-1, 0, 0, 0}, {0, -5, 0, 0}, {0, 0, -6, 0}, {0, 0, 0, -10}};
yReg = {{1, 1, 1, 1}};
pReg = {{p11, p12, p13, p14}, {p21, p22, p23, p24}, {p31, p32, p33, p34}, {p41, p42, p43, p44}};
eqsReg = Solve[a.pReg - pReg.gReg == b.yReg, {p11, p12, p13, p14, p21, p22, p23, p24, p31, p32, p33, p34, p41, p42, p43, p44}];
pReg = Array[value, Length[eqsReg[[1]]]];
For[i = 1, i ≤ Length[eqsReg[[1]]], i++, pReg[[i]] = eqsReg[[1, i, 2]]];
pReg  = ArrayReshape[pReg, {4, 4}];
k = -yReg.Inverse[pReg];

(* observer matrix *)
gObs = {{-1, 0, 0, 0}, {0, -4, 1, 0}, {0, 0, -4, 0}, {0, 0, 0, -8}};
yObs = {{1, 1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, 1}};
pObs = {{p11, p12, p13, p14}, {p21, p22, p23, p24}, {p31, p32, p33, p34}, {p41, p42, p43, p44}};
eqsObs = Solve[gObs.pObs - pObs.a == yObs.c, {p11, p12, p13, p14, p21, p22, p23, p24, p31, p32, p33, p34, p41, p42, p43, p44}];
pObs = {{-193/765, -113/765, 23/765, -283/765}, {-2569/14400, -1481/14400, -31/14400, -4081/14400}, {-19/120, -11/120, -1/120, -31/120}, {1, 25/24, 13/12, -31/24}};
l = Inverse[pObs].yObs;

(* transmission func *)
sI = {{s, 0, 0, 0}, {0, s, 0, 0}, {0, 0, s, 0}, {0, 0, 0, s}};
Simplify[-k.Inverse[sI - (a + l.c + b.k)].l];
```

Поиск матрицы регулятора K

Пусть $\sigma(\Gamma) = \sigma(A + BK) = \{-1, -3, -4, -6\}$

Тогда

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Выберем матрицу Y, так чтобы пара (Y, Γ) была наблюдаема:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу подобия P:

$$AP - P\Gamma = BY, \qquad P = \begin{bmatrix} 0.9029 & 0.53821 & 0.39166 & 0.0064935 \\ 0.81139 & 0.49036 & 0.35833 & -0.0064935 \\ -0.74416 & -0.57457 & -0.55833 & -0.72078 \\ 1.5415 & 1.254 & 1.1916 & 1.2792 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу регулятора K:

$$K = -YP^{-1} = [8.973 \quad -9.4288 \quad -0.82154 \quad -1.338]$$

Поиск матрицы наблюдателя L

Так как собственное число $\lambda = -8$ – не является наблюдаемым, то оно должно входить в спектр $A + LC$.

Итак, $\sigma(\Gamma) = \sigma(A + LC) = \{-1, -4, -4, -8\}$

Тогда

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Выберем матрицу Y, так чтобы пара (Γ, Y) была управляема:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу подобия Q:

$$\Gamma Q - QA = YC, \qquad Q = \begin{bmatrix} -0.25228 & -0.14771 & 0.030065 & -0.36993 \\ -0.1784 & -0.10284 & -0.0021527 & -0.2834 \\ -0.15833 & -0.091667 & -0.0083333 & -0.25833 \\ 1.0 & 1.0416 & 1.0833 & -1.2916 \end{bmatrix}$$

Находим матрицу наблюдателя L:

$$L = Q^{-1}Y = \begin{bmatrix} 26.172 & 26.172 \\ -29.494 & -29.494 \\ -5.9112 & -5.9112 \\ -9.2555 & -9.2555 \end{bmatrix}$$

3.3. Моделирование системы

Начальные условия: $x(0) = \begin{bmatrix} 28 \\ -14 \\ 2 \\ -19 \end{bmatrix}$, $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 32 \\ 7 \end{bmatrix}$

Сравнительные графики $x(t)$, $\hat{x}(t)$

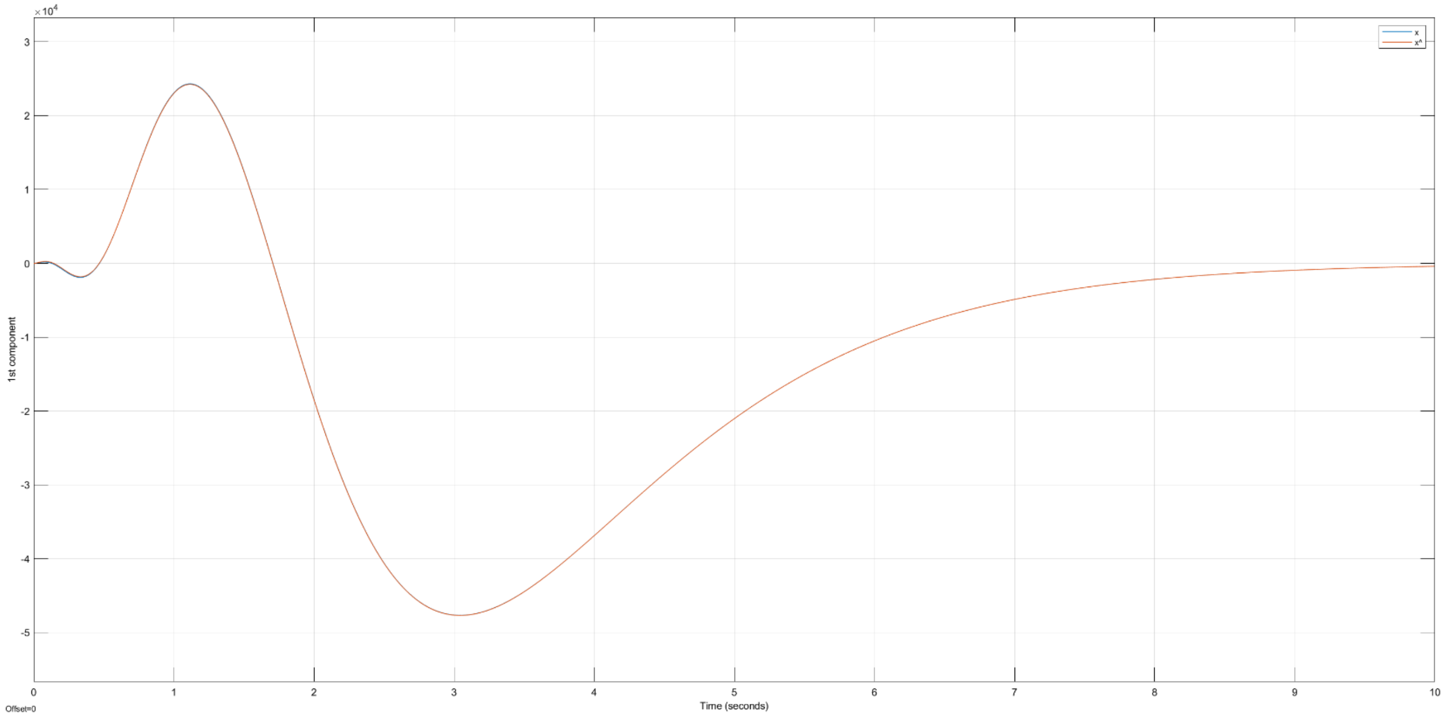

Рисунок 32: графики первых компонент

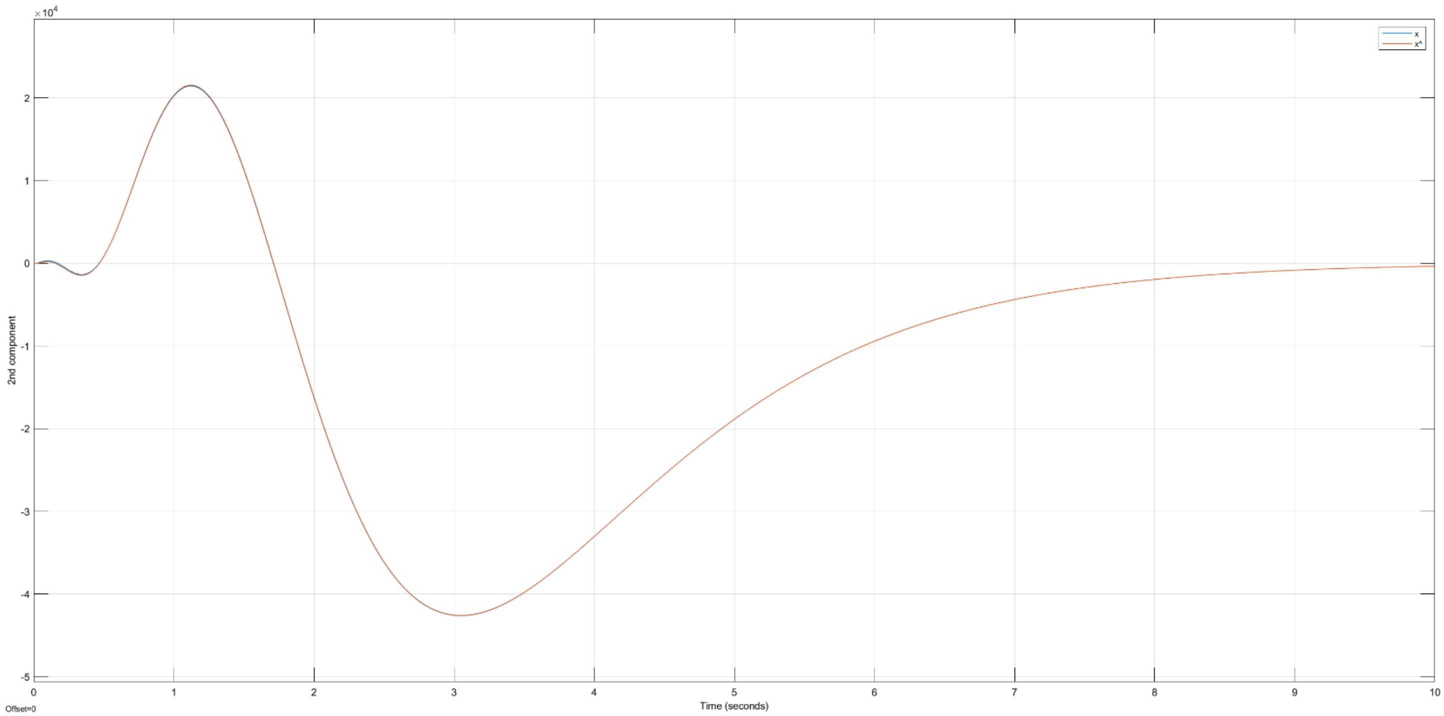

Рисунок 33: графики вторых компонент

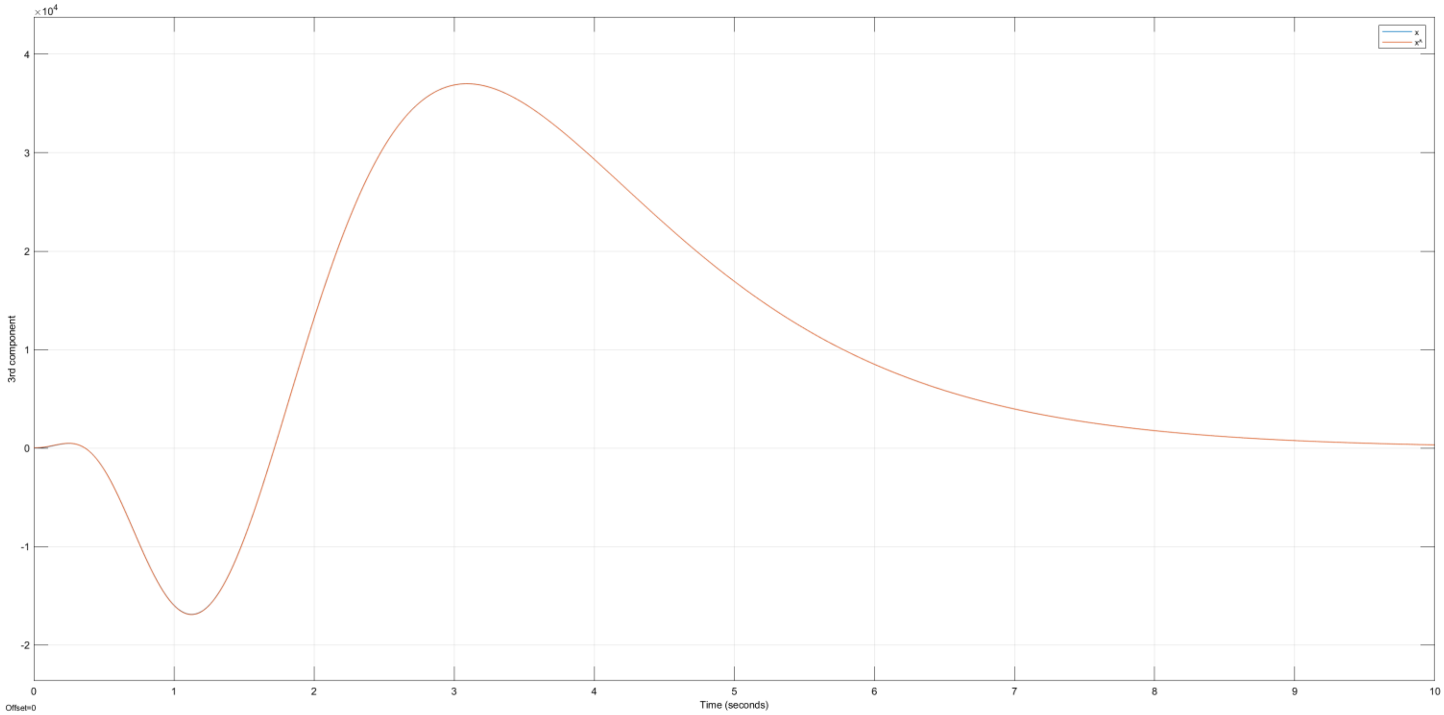

Рисунок 34: графики третьих компонент

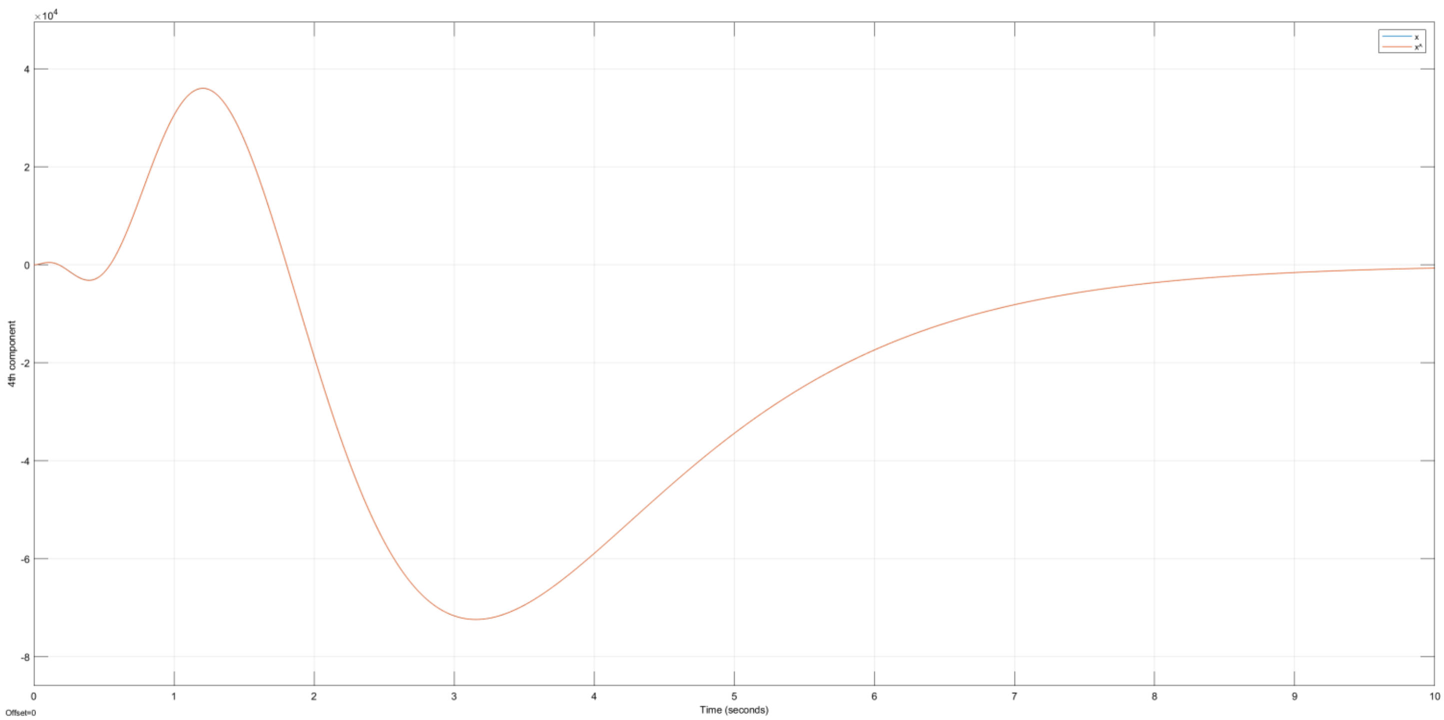

Рисунок 35: графики четвертых компонент

Графики $y(t), \hat{y}(t)$

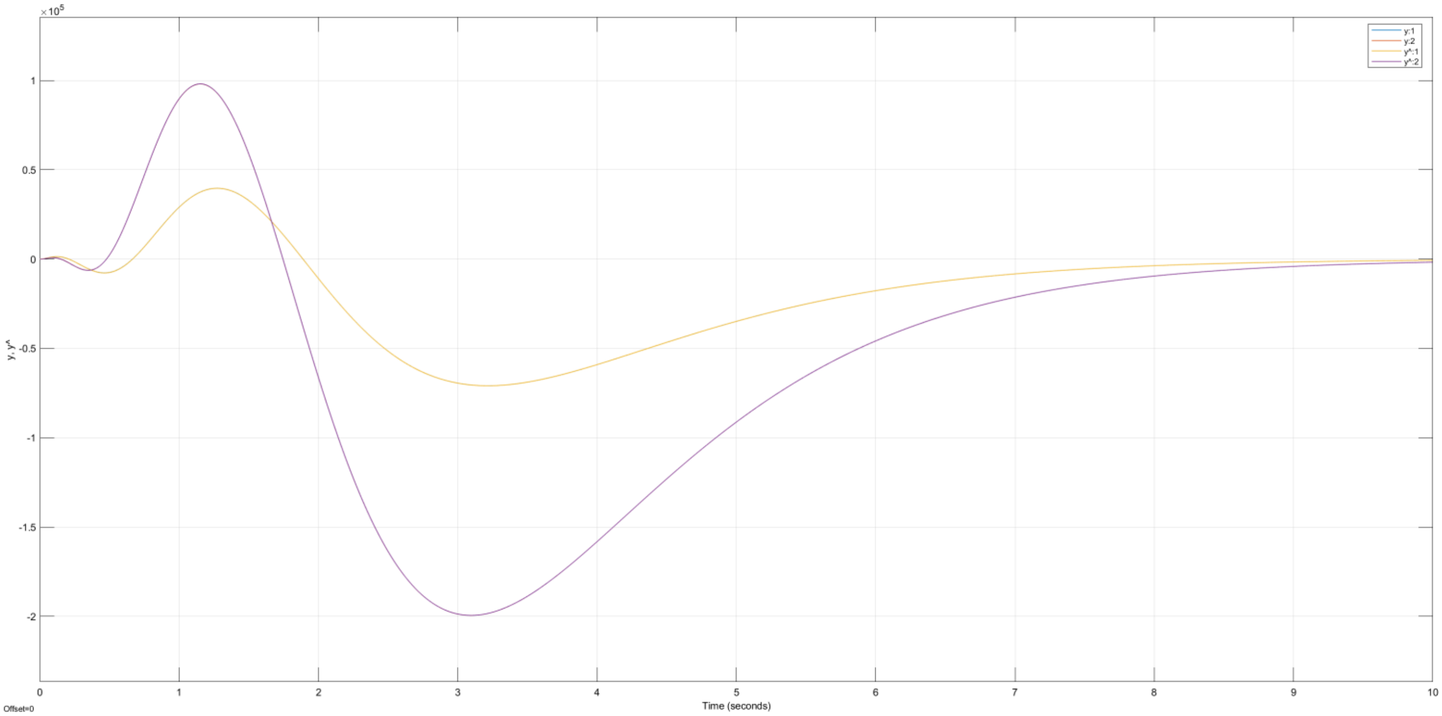

Рисунок 36: графики выходов

График $u(t)$

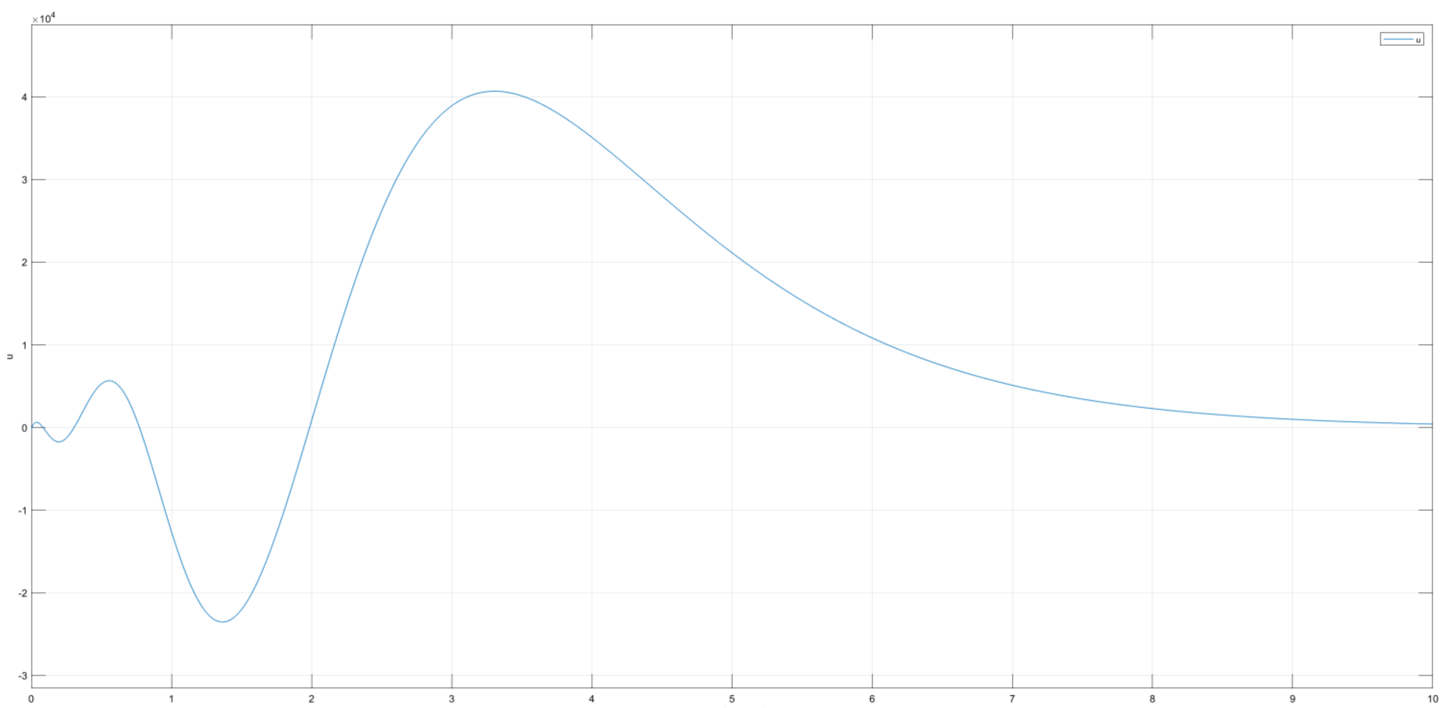

Рисунок 37: график входного воздействия

График ошибки наблюдателя $e(t)$

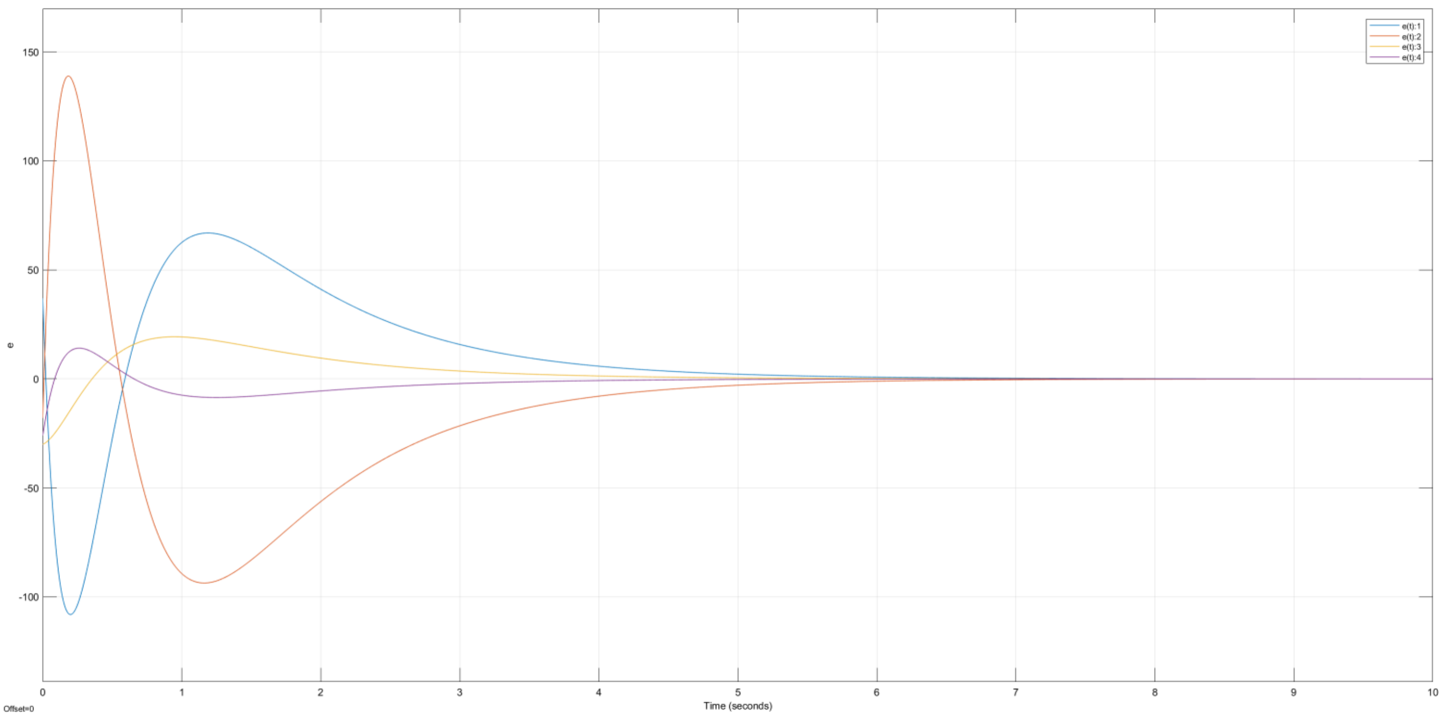

Рисунок 38: график ошибки

3.4. Передаточные функции

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) = (A + BK + LC)\hat{x} - Ly$$

$$sI\hat{x} = (A + BK + LC)\hat{x} - Ly$$

$$(sI - (A + BK + LC))\hat{x} = -Ly$$

$$\hat{x} = -\big(sI - (A + BK + LC)\big)^{-1} Ly$$

$$u = K\hat{x} = -K\big(sI - (A + BK + LC)\big)^{-1} Ly = W_{y\to u}(s)y$$

$$W_{y\to u}(s) = -K\big(sI - (A + BK + LC)\big)^{-1} L$$

$$W_{y_1\to u}(s) = -\frac{7(120127321600 - 25833028576s - 2365205020s^2 + 342613741s^3)}{8(709498558800 - 3132735322s - 11328046439s^2 + 21613824s^3 + 366336s^4)}$$

$$W_{y_2\to u}(s) = -\frac{7(120127321600 - 25833028576s - 2365205020s^2 + 342613741s^3)}{8(709498558800 - 3132735322s - 11328046439s^2 + 21613824s^3 + 366336s^4)}$$

Схема моделирования:

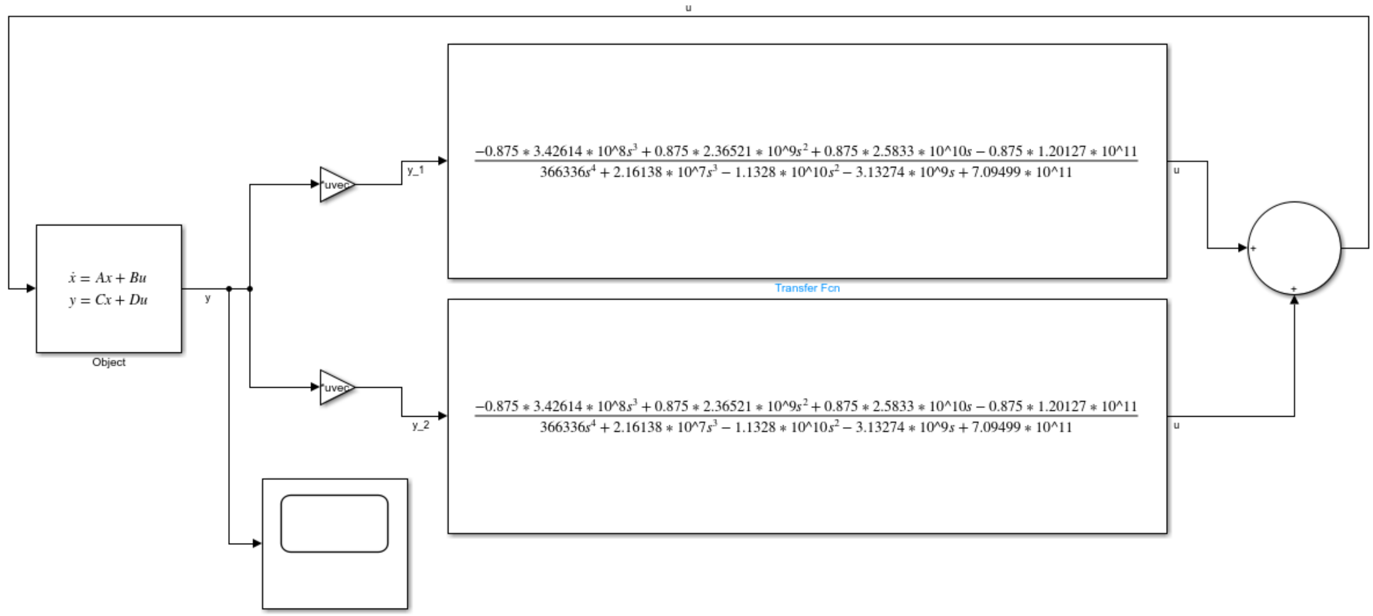

Рисунок 39: схема моделирования с передаточными функциями

Из-за слишком больших коэффициентов моделирование не выполняется в среде Simulink.

Выводы

В данной лабораторной работе были реализованы модальные регуляторы и наблюдатели, а также их композиция. Модальное управление стабилизирует систему, если у незамкнутой системы есть неустойчивые управляемые моды, а с помощью наблюдателя можно сформировать оценку вектора состояния системы и сделать так, чтобы данная оценка сходилась к реальному вектору состояния (это возможно при обнаруживаемости системы). Комбинация данных методов позволяет использовать в регуляторе оценку вектора состояния для стабилизации системы.