Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №6

«Устойчивость систем с запаздыванием»

по дисциплине «Теория автоматического управления»

Выполнил: студент гр. R3238,
Кирбаба Д.Д.

Преподаватель: Перегудин А.А.,
ассистент фак. СУиР

Санкт-Петербург 2021

Цель работы

Анализ устойчивости замкнутых линейных систем с запаздыванием

Начальные данные

8 вариант

Параметры:

$$a_2 = 1, a_1 = 6, a_0 = 7, b_1 = 1, b_0 = 1$$

Выполнение работы

1. *Расчет критических значений запаздывания в замкнутой системе*
1.1.

Передаточная функция разомкнутой системы без запаздывания:

$$W_{open}(s) = \frac{k(s+1)}{s^2 + 6s + 7}$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_{closed}(s) = \frac{W_{open}(s)W_\tau(s)}{1 + W_{open}(s)W_\tau(s)} = \frac{k(s+1)e^{-\tau s}}{s^2 + 6s + 7 + k(s+1)e^{-\tau s}}$$

1.2. Частотные характеристики разомкнутой системы

Частотная передаточная функция:

$$W_{open}(j\omega) = \frac{k(j\omega + 1)}{-\omega^2 + 6j\omega + 7} \cdot \frac{6j\omega - (7-\omega^2)}{6j\omega - (7-\omega^2)} = \frac{k(6j\omega - 7 + \omega^2 - 6\omega^2 - 7j\omega + j\omega^3)}{-36\omega^2 - (7-\omega^2)^2} =$$

$$= \frac{k(5\omega^2 + 7)}{\omega^4 + 22\omega^2 + 49} + \frac{k(-\omega^3 + \omega)}{\omega^4 + 22\omega^2 + 49} j = U(\omega) + V(\omega)j$$

АЧХ:

$$A_{open}(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{k\sqrt{\omega^6 + 23\omega^4 + 71\omega^2 + 49}}{\omega^4 + 22\omega^2 + 49}$$

ФЧХ:

$$\Psi_{open}(\omega) = atan2\big(V(\omega), U(\omega)\big) = \operatorname{atan}\left(\frac{-\omega^3 + \omega}{5\omega^2 + 7}\right)$$

ФЧХ не зависит от коэффициента усиления k

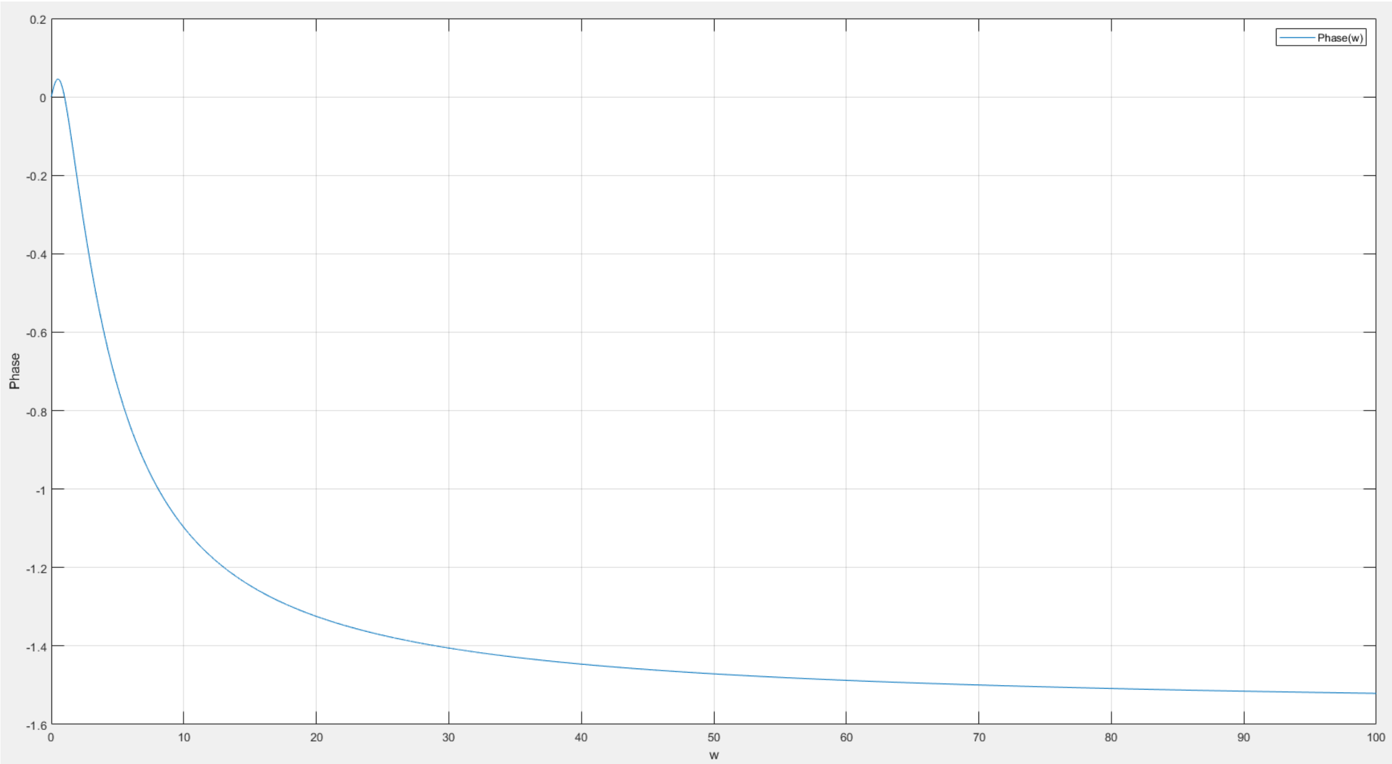

Рисунок 1: график ФЧХ разомкнутой системы

$\underline{k = 1}$

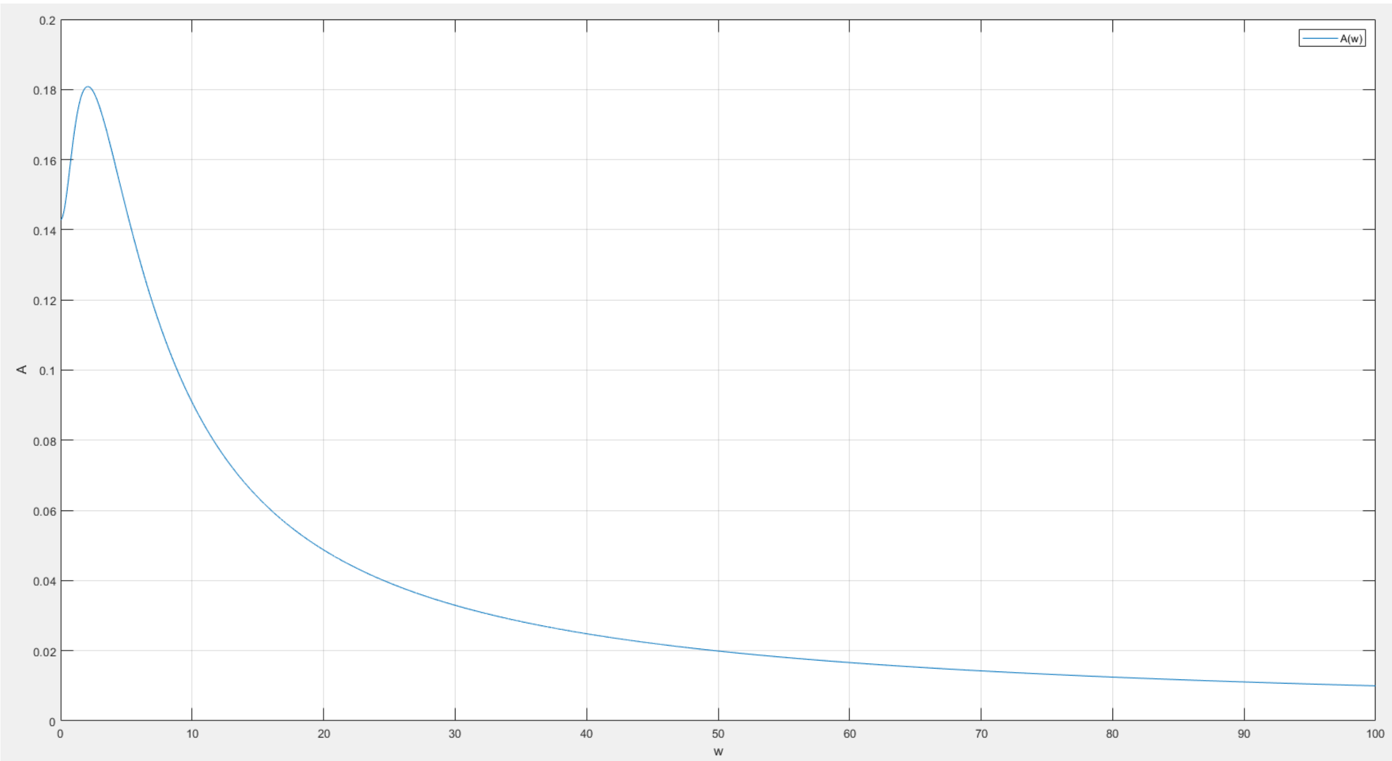

Рисунок 2: график АЧХ разомкнутой системы при k=1

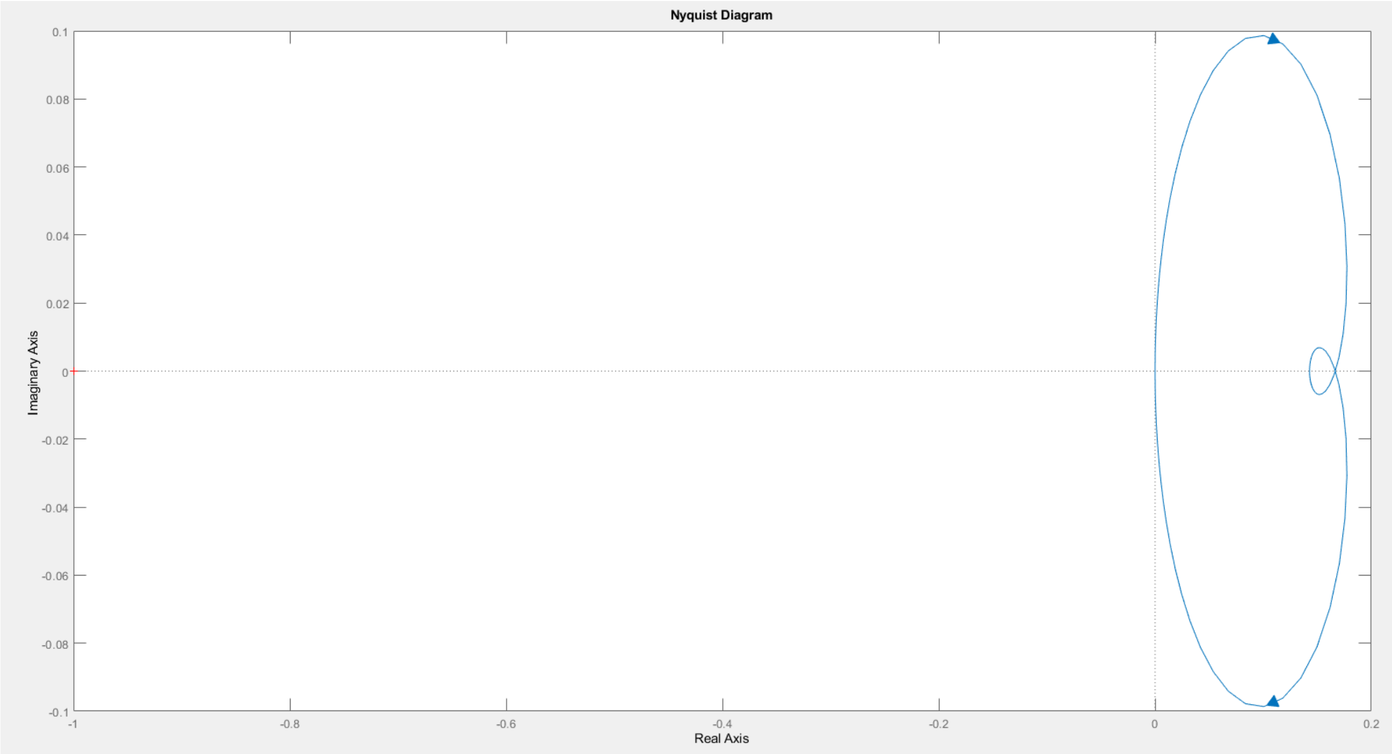

Рисунок 3: график АФЧХ разомкнутой системы при k=1

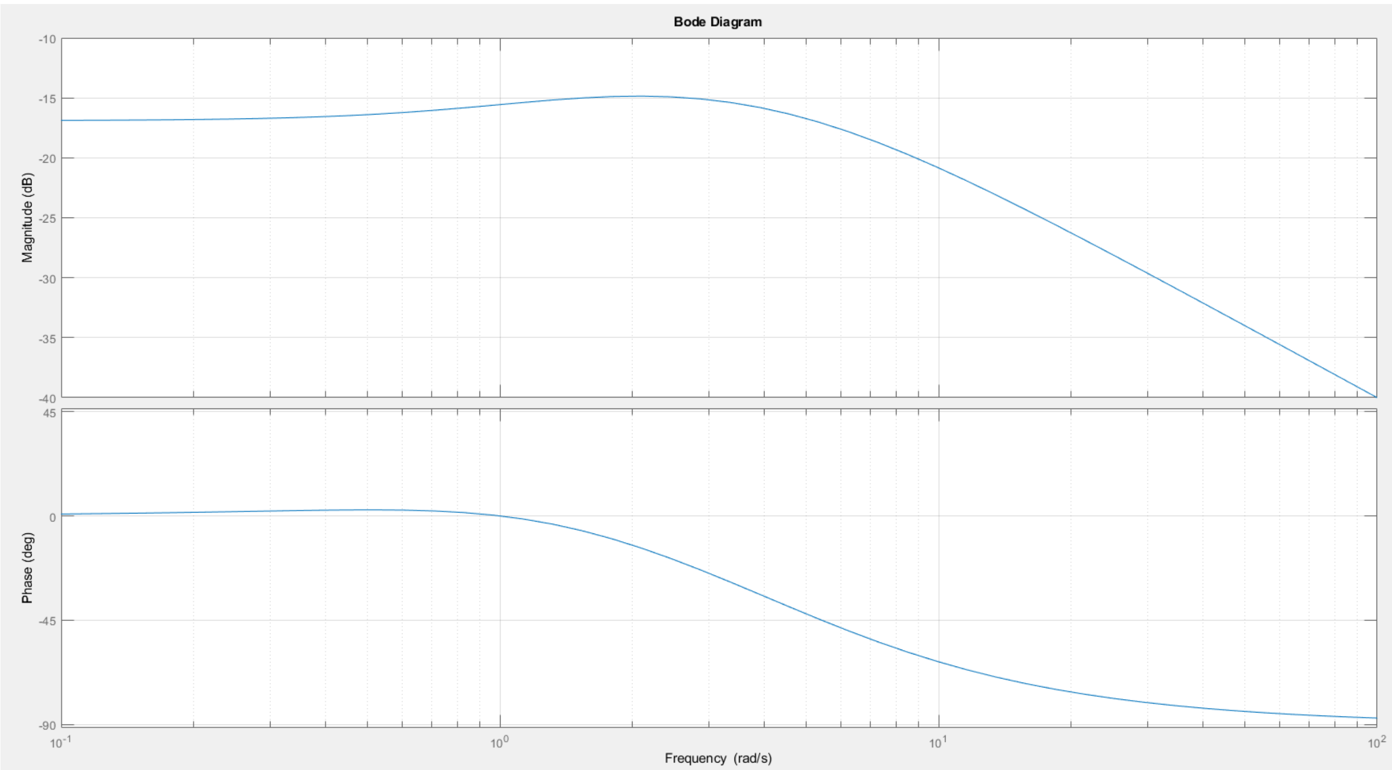

Рисунок 4: графики ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы при k=1

$\underline{k = 5}$

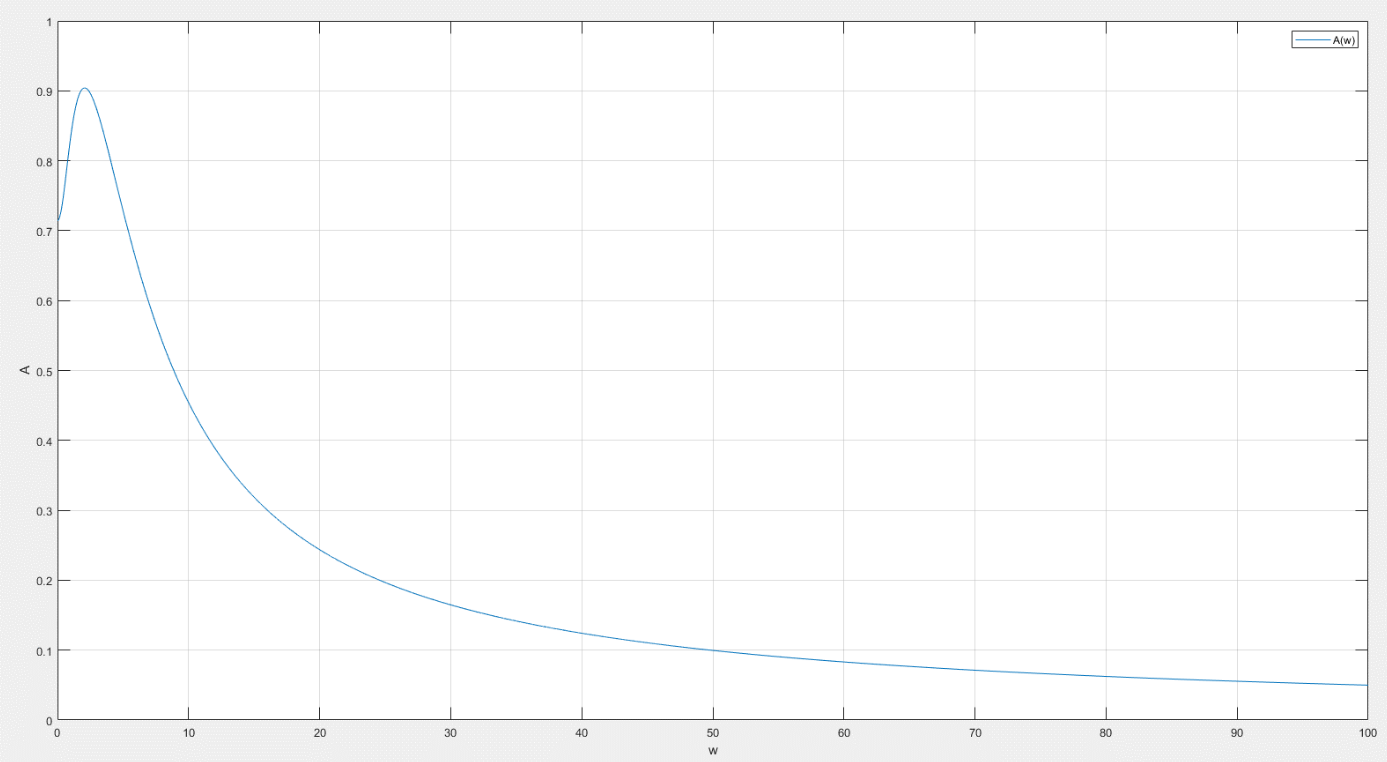

Рисунок 5: график АЧХ разомкнутой системы при k=5

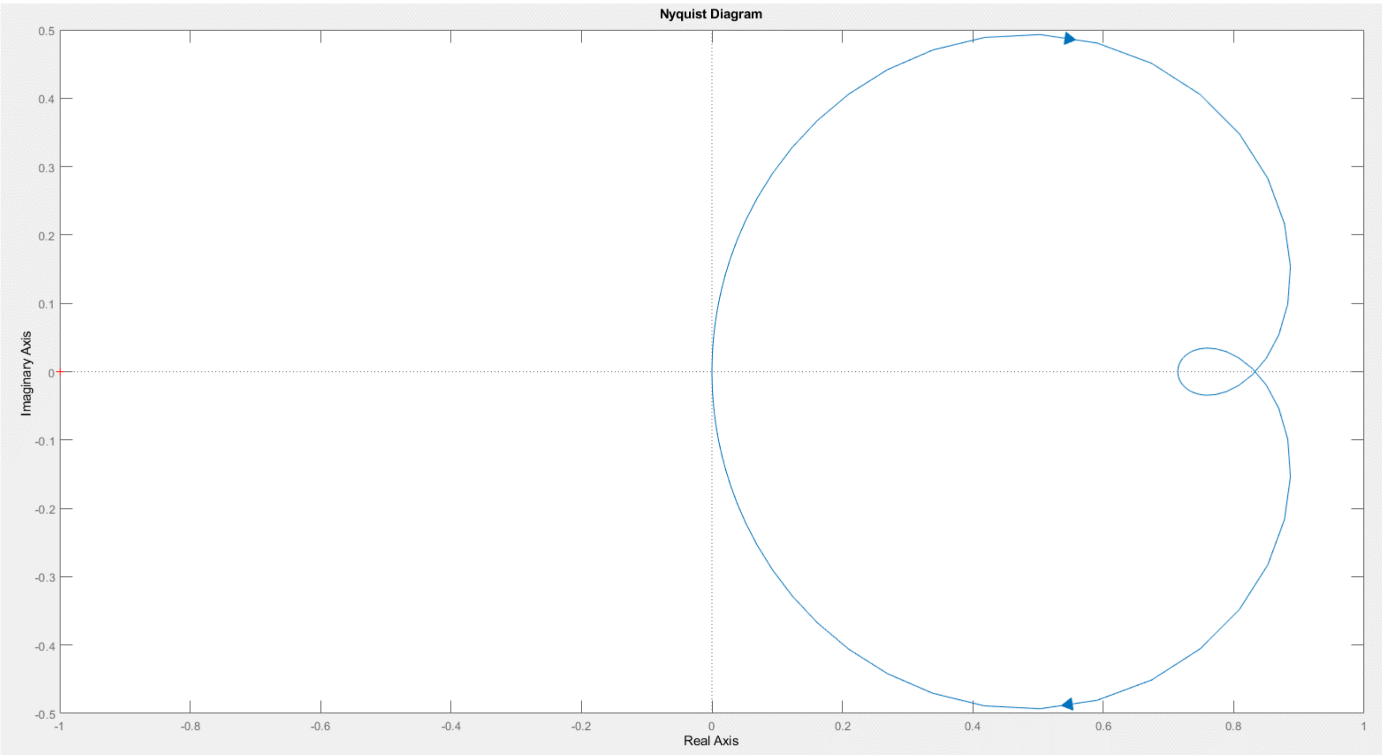

Рисунок 6: график АФЧХ разомкнутой системы при k=5

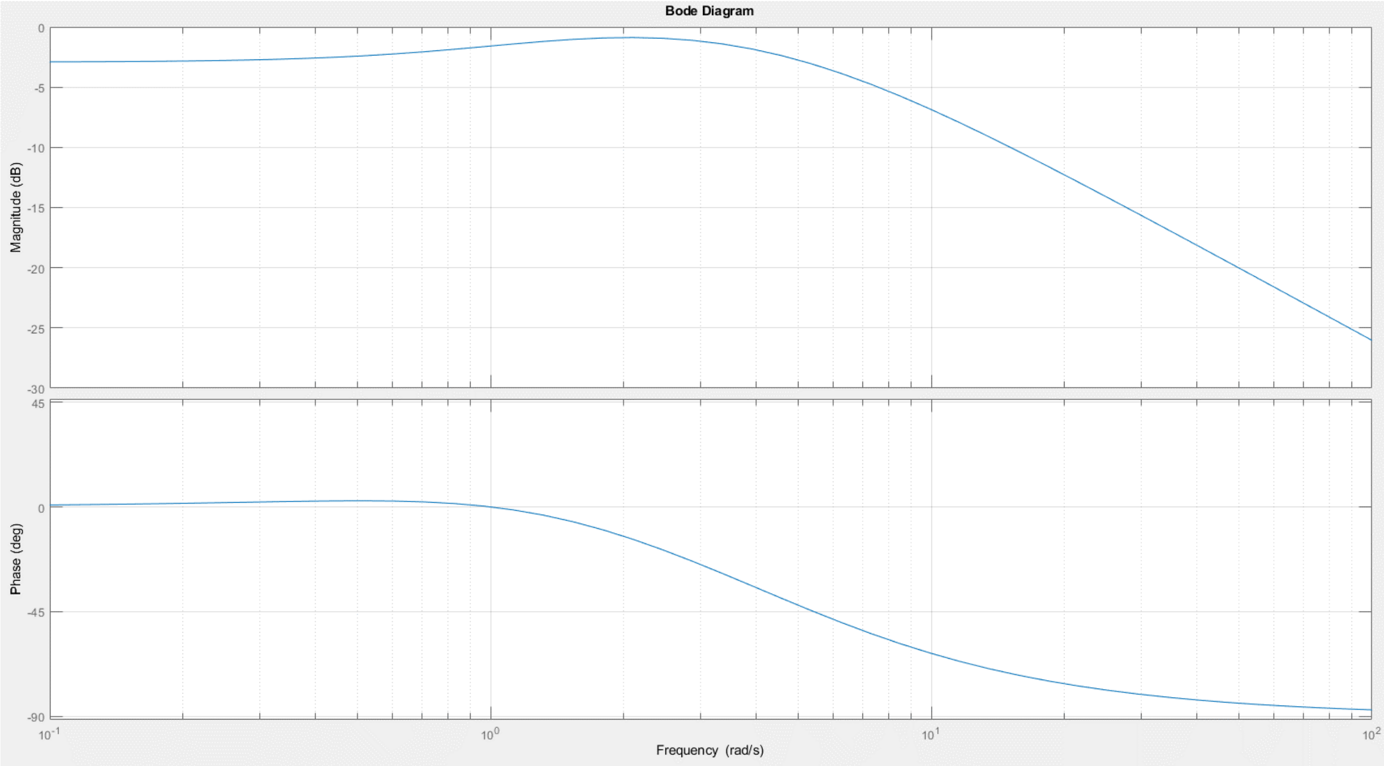

Рисунок 7: графики ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы при $k = 5$

$\underline{k = 10}$

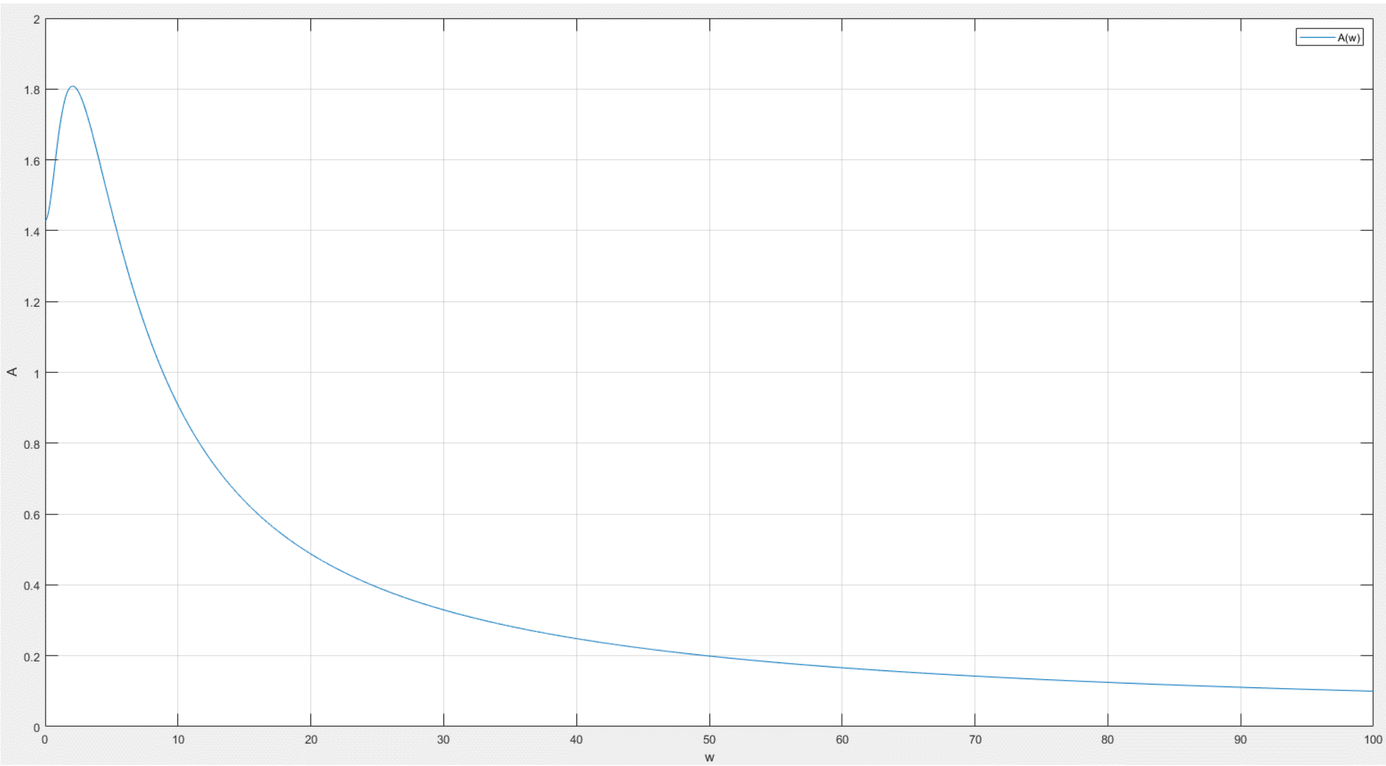

Рисунок 8: график АЧХ разомкнутой системы при k=10

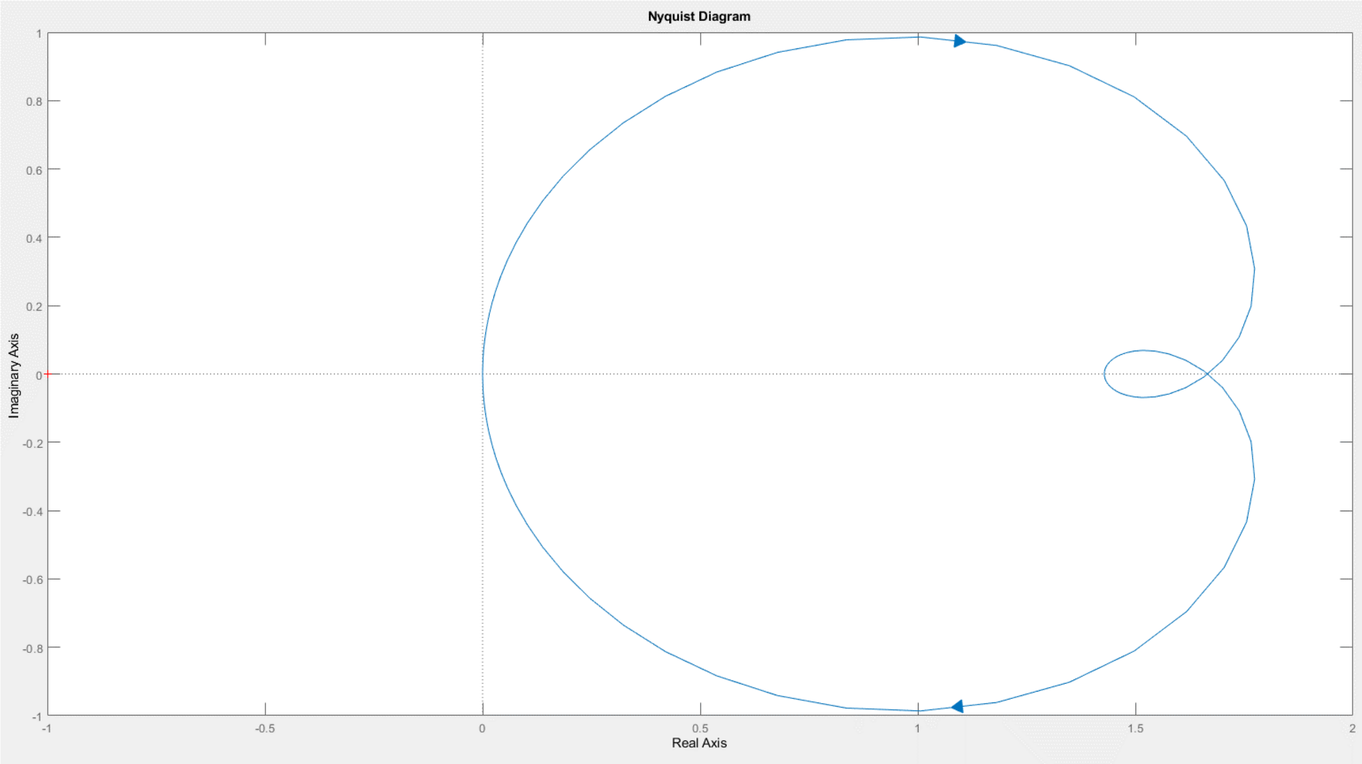

Рисунок 9: график АФЧХ разомкнутой системы при k=10

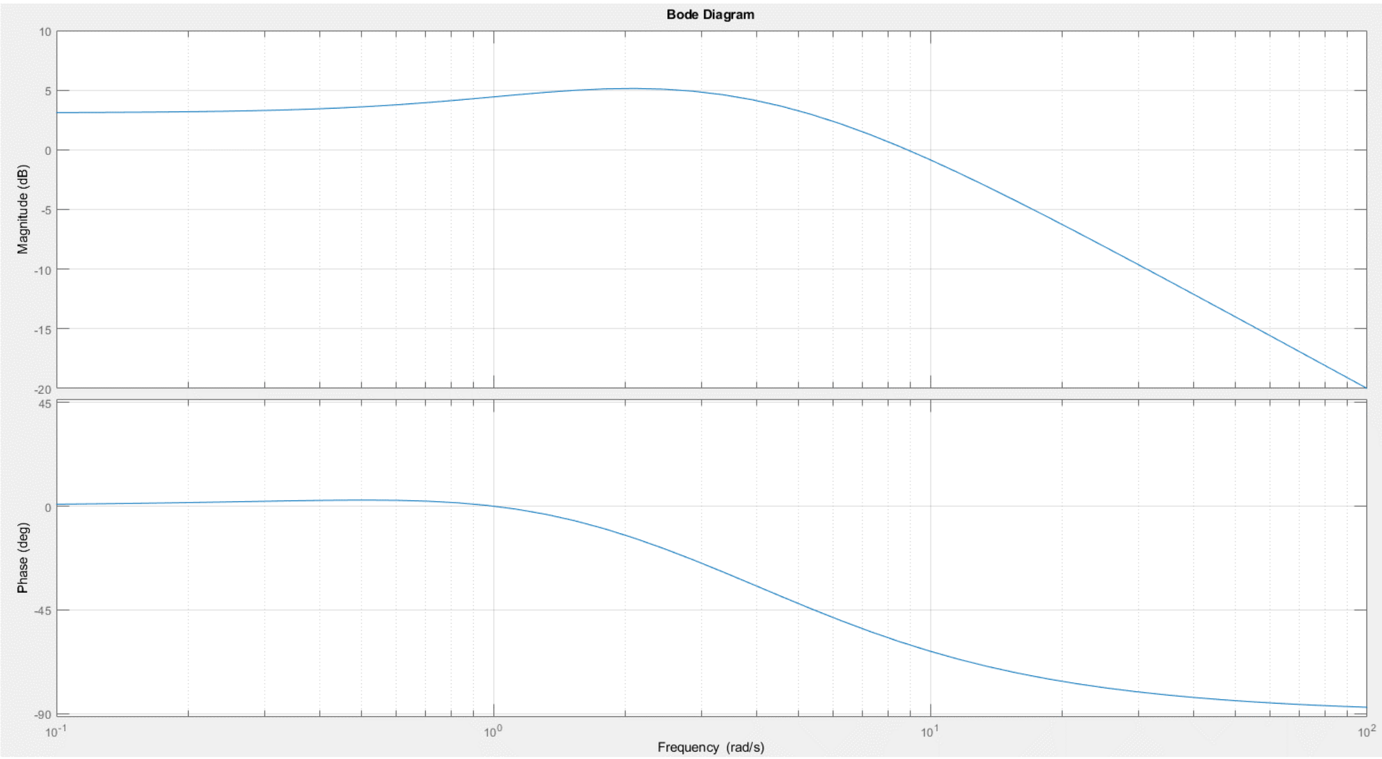

Рисунок 10: графики ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы при $k = 10$

1.3.

1.3.1. Запас устойчивости по амплитуде

Так как $U(\omega) = \frac{k(5\omega^2+7)}{\omega^4+22\,\omega^2+49} > 0,$ если $k > 0,$ то годограф Найквиста лежит в правой полуплоскости, а значит невозможно растянуть граф чтобы он коснулся критической точки (-1,1), следовательно запас устойчивости по амплитуде для всех k равен бесконечности

1.3.2. Запас устойчивости по фазе

$\underline{k = 1,5}$

Графики АЧХ при данных значениях k не достигают значения амплитуды равной 1. А следовательно, годограф не коснется критической точки при любом сдвиге по фазе. Значит запас устойчивости по фазе равен бесконечности

$\underline{k = 10}$

Найдем ω_φ при котором значение амплитуды $A(\omega_\varphi) = 1$ (можно искать как аналитически, так и по пересечению ЛАЧХ с осью абсцисс)

$$A(\omega_\varphi) = \frac{10\sqrt{\omega_\varphi^6 + 23\omega_\varphi^4 + 71\omega_\varphi^2 + 49}}{\omega_\varphi^4 + 22\omega_\varphi^2 + 49} = 1$$

$$\omega_\varphi = \sqrt{39 + 2\sqrt{393}} \approx 8.868$$

Тогда запас устойчивости по фазе $\varphi_з = 180^o + \Psi(\omega_\varphi)$

$$\Psi(\omega_\varphi) = \mathrm{atan}\left(\frac{-\omega_\varphi{}^3 + \omega_\varphi}{5\omega_\varphi{}^2 + 7}\right) = -1.044\, rad = -59.834\, grad$$

$$\varphi_з = \pi - 1.044 = 2.098$$

1.4. Определение критического значения запаздывания для различных значений k

$\underline{k = 1,5}$

Графики АЧХ при данных значениях k не достигают значения амплитуды равное 1, следовательно критическое значение запаздывания равно бесконечности (годограф может закручиваться бесконечно, не достигая критической точки)

$\underline{k = 10}$

$$\tau_{cr} = \frac{\pi + \varphi}{\omega_\varphi} = \frac{\varphi_з}{\omega_\varphi} = \frac{2.098}{8.868} = 0.236566$$

1.5.

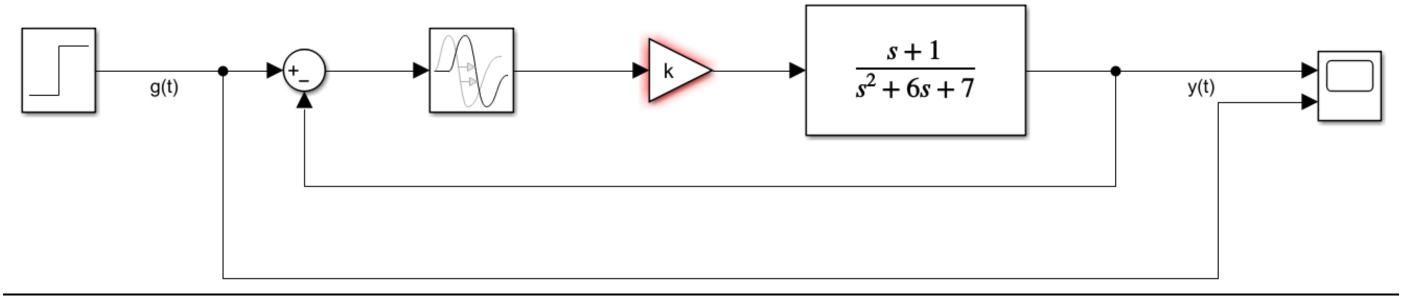

Рисунок 11: Схема моделирования системы

При $k = 1, k = 5$ значение критического запаздывания равно бесконечности, а значит число неустойчивых полюсов у разомкнутой и замкнутой систем одинаково

<u>$k = 1$</u>

$$\tau_{cr} = \infty$$

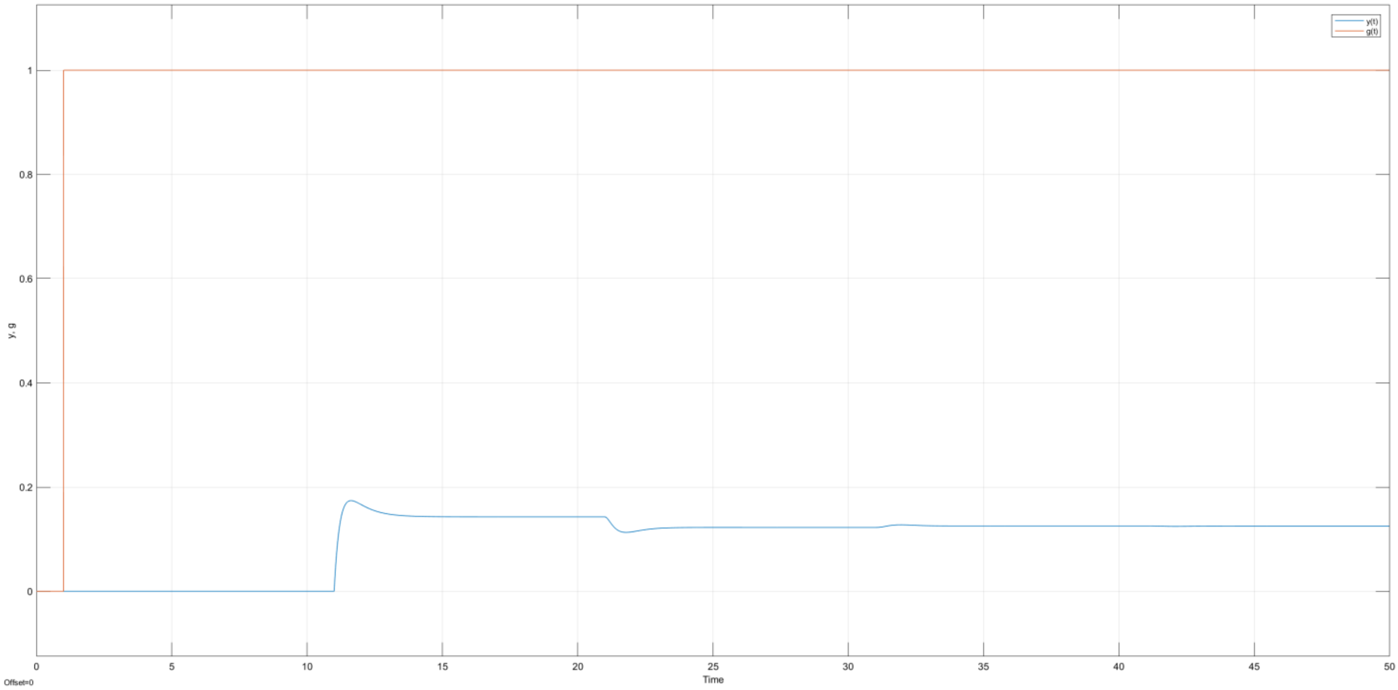

Рисунок 12: переходная характеристика системы при $k = 1, \tau_{cr} = 10, t \in [0, 50]$

<u>$k = 5$</u>

$$\tau_{cr} = \infty$$

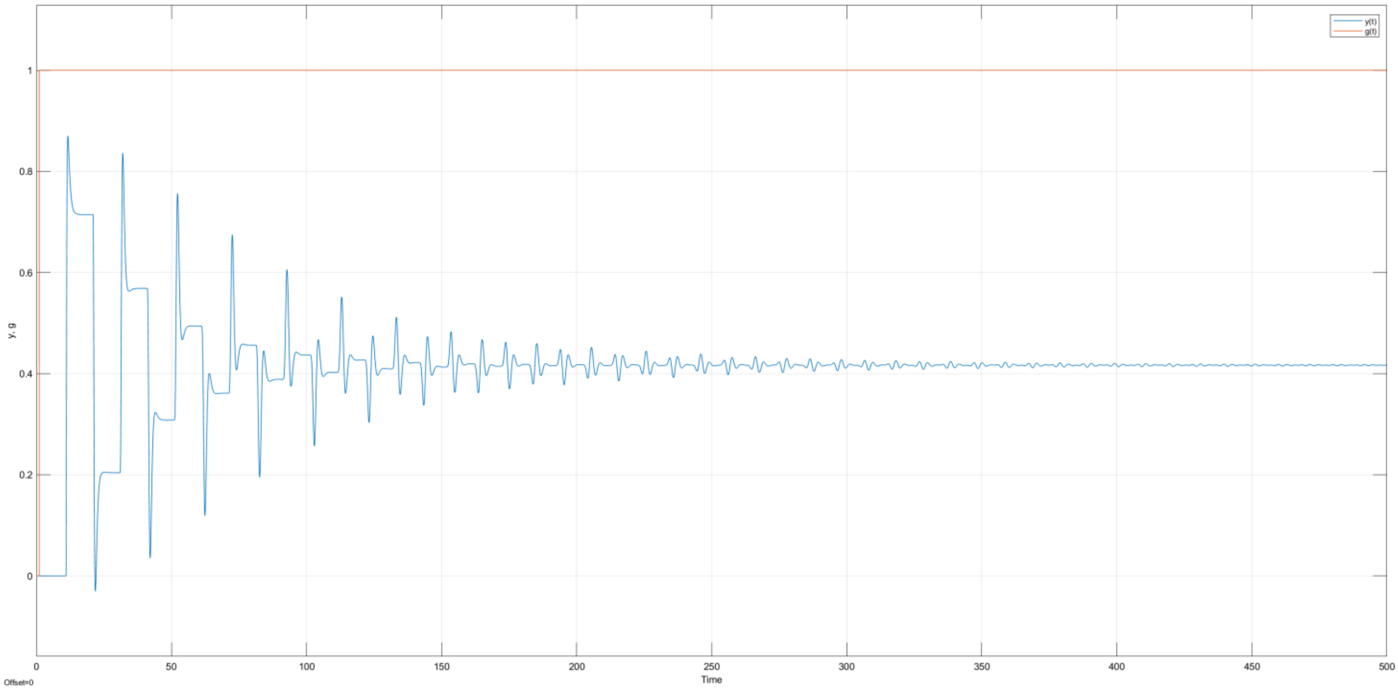

Рисунок 13: переходная характеристика системы при $k = 5, \tau_{cr} = 10, t \in [0, 500]$

$\underline{k = 10}$

$$\tau_{cr} = 0.236566$$

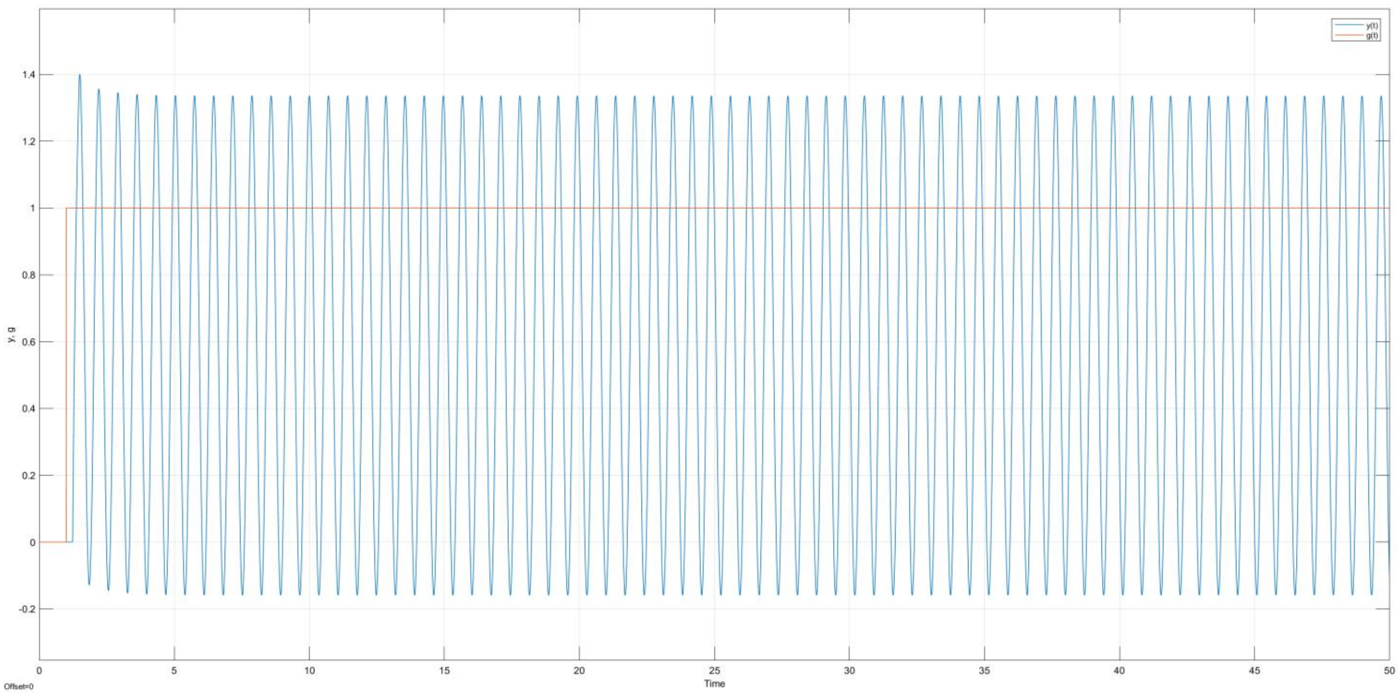

Рисунок 14: переходная характеристика системы при $k = 10, \tau_{cr} = 0.236566, t \in [0, 50]$

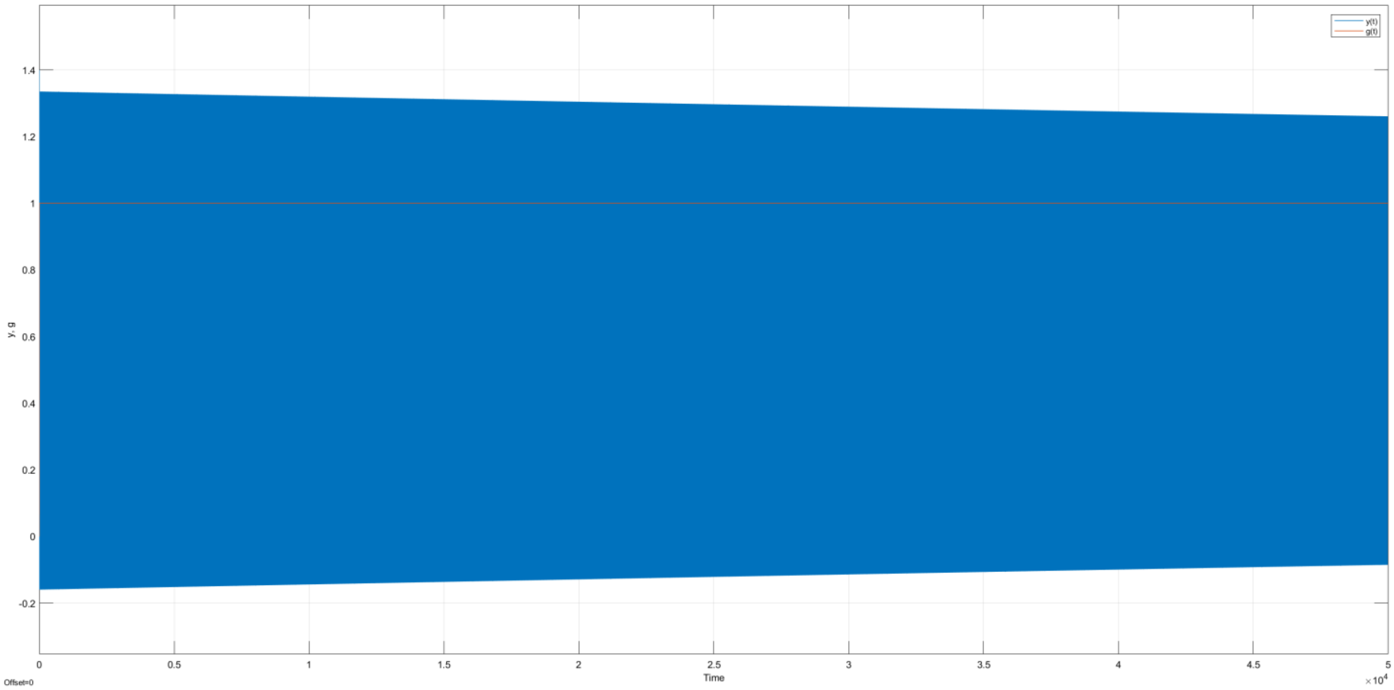

Рисунок 15: переходная характеристика системы при $k = 10,\ \tau_{cr} = 0.236566, t \in [0, 50000]$

При данном значении запаздывания наблюдаем затухающие колебания, которые удалось определить таковыми только при увеличении времени моделирования. Естественно значение $\tau_{cr} = 0.236566$ можно вычислить с большей точностью.

Рассмотрим переходную характеристику системы со значением большим критического запаздывания. Рассмотрим сразу при $t \in [0, 50000]$, так как отследить тип колебаний при таких значениях запаздывания можно только при большом времени моделирования

$$\tau = 0.236567$$

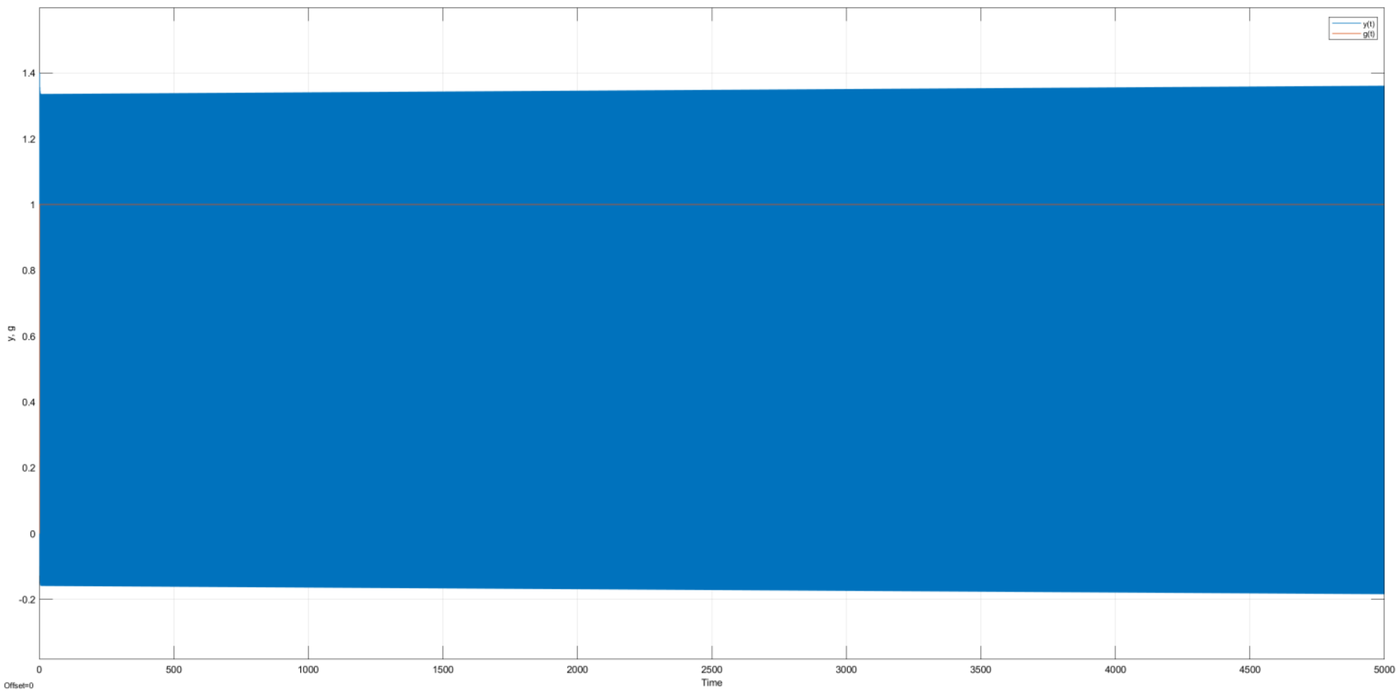

Рисунок 16: переходная характеристика системы при $k = 10,\ \tau_{cr} = 0.236567, t \in [0, 50000]$

Как и ожидалось мы увидели расходящиеся колебания, так как годограф охватил критическую точку и к системе добавился неустойчивый полюс

2. *Расчет критических значений коэффициента усиления в замкнутой системе*

2.1.

Передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием:

$$W_{open}(s) = \frac{s+1}{s^2+6s+7}e^{-\tau s}$$

Передаточная функция замкнутой системы с запаздыванием:

$$W_{closed}(s) = \frac{W_{open}(s)}{1+W_{open}(s)} = \frac{k(s+1)e^{-\tau s}}{s^2+6s+7+k(s+1)e^{-\tau s}}$$

2.2.

Частотная передаточная функция:

$$W_{open}(j\omega) = \frac{j\omega+1}{-\omega^2+6j\omega+7}e^{-\tau j\omega} = \frac{\sqrt{\omega^6+23\omega^4+71\omega^2+49}}{\omega^4+22\omega^2+49}e^{j\,\mathrm{atan}\left(\frac{-\omega^3+\omega}{5\omega^2+7}\right)}e^{-\tau j\omega} =$$

$$= \frac{\sqrt{\omega^6+23\omega^4+71\omega^2+49}}{\omega^4+22\omega^2+49}e^{j\left(\mathrm{atan}\left(\frac{-\omega^3+\omega}{5\omega^2+7}\right)-\tau\omega\right)}$$

АЧХ:

$$A_{open}(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^6+23\omega^4+71\omega^2+49}}{\omega^4+22\omega^2+49}$$

АЧХ не зависит от величины запаздывания. График представлен на Рисунке 2.

ФЧХ:

$$\Psi_{open}(\omega) = \mathrm{atan}\left(\frac{-\omega^3+\omega}{5\omega^2+7}\right)-\tau\omega$$

<u>τ = 1</u>

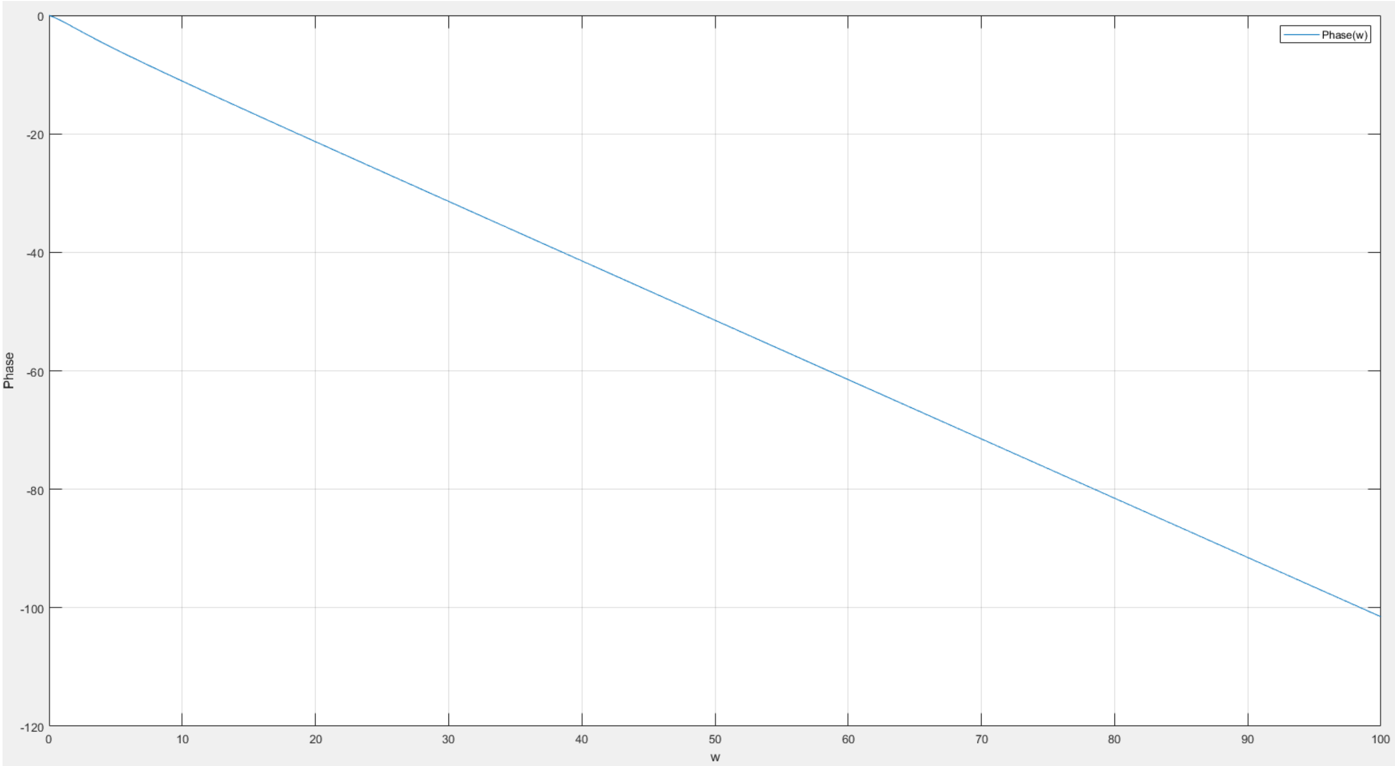

Рисунок 17: ФЧХ разомкнутой системы с запаздыванием $\tau = 1$

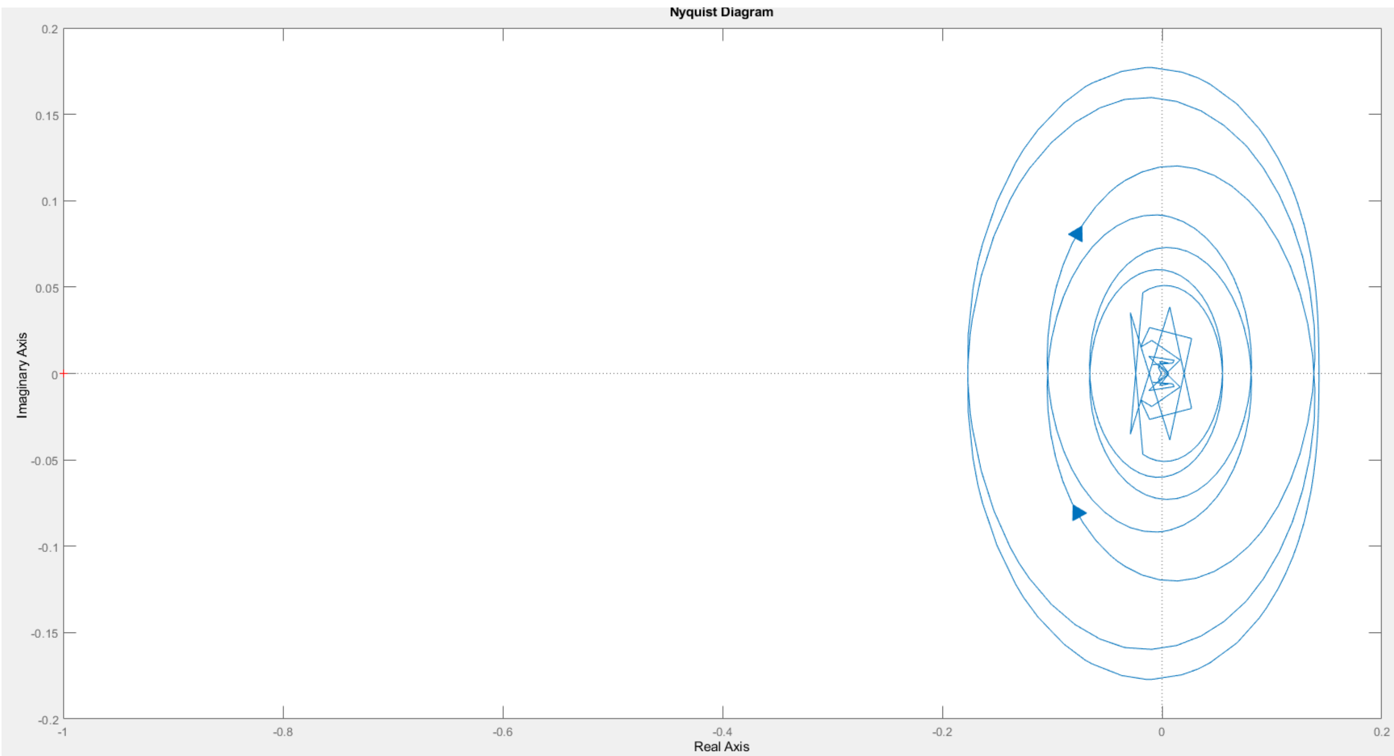

Рисунок 18: АФЧХ разомкнутой системы с запаздыванием $\tau = 1$

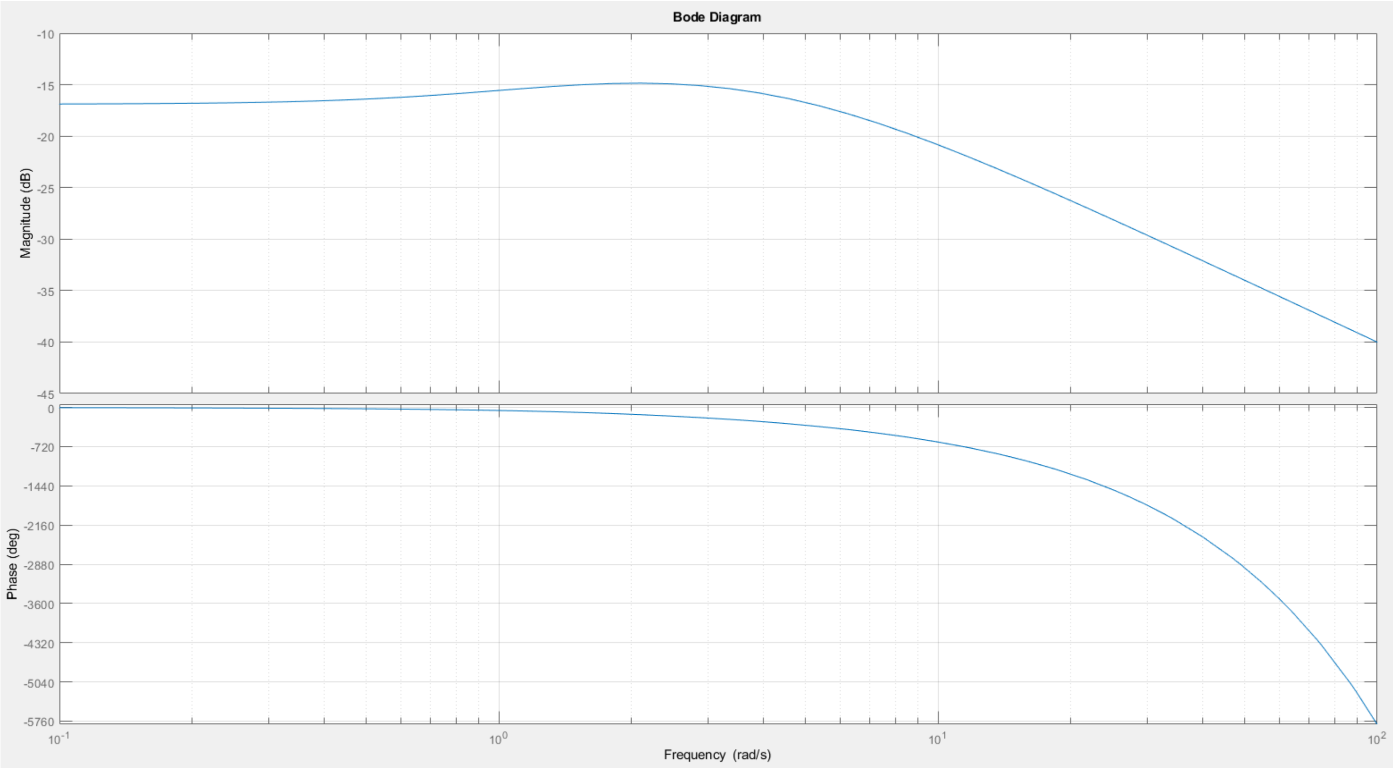

Рисунок 19: ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы при $\tau = 1$

<u>$\tau = 5$</u>

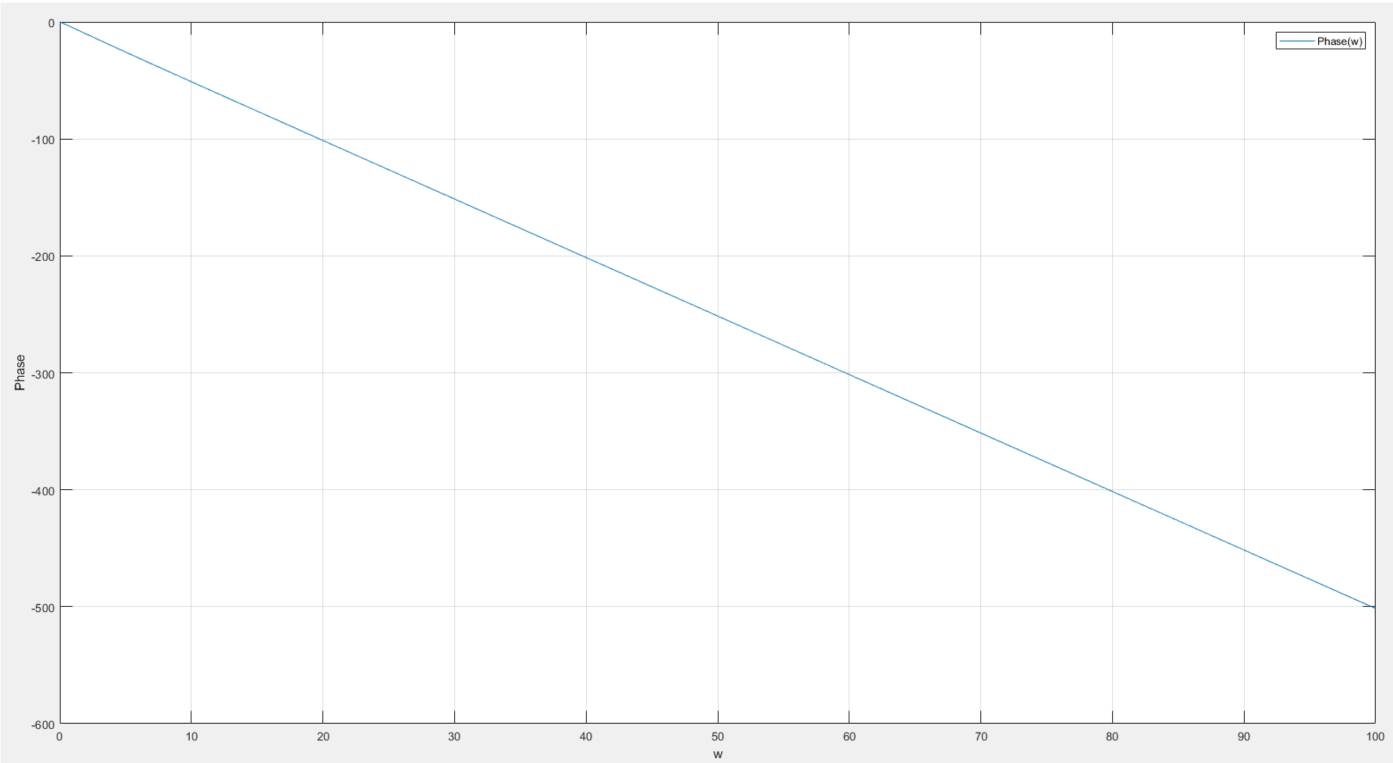

Рисунок 20: ФЧХ разомкнутой системы с запаздыванием $\tau = 5$

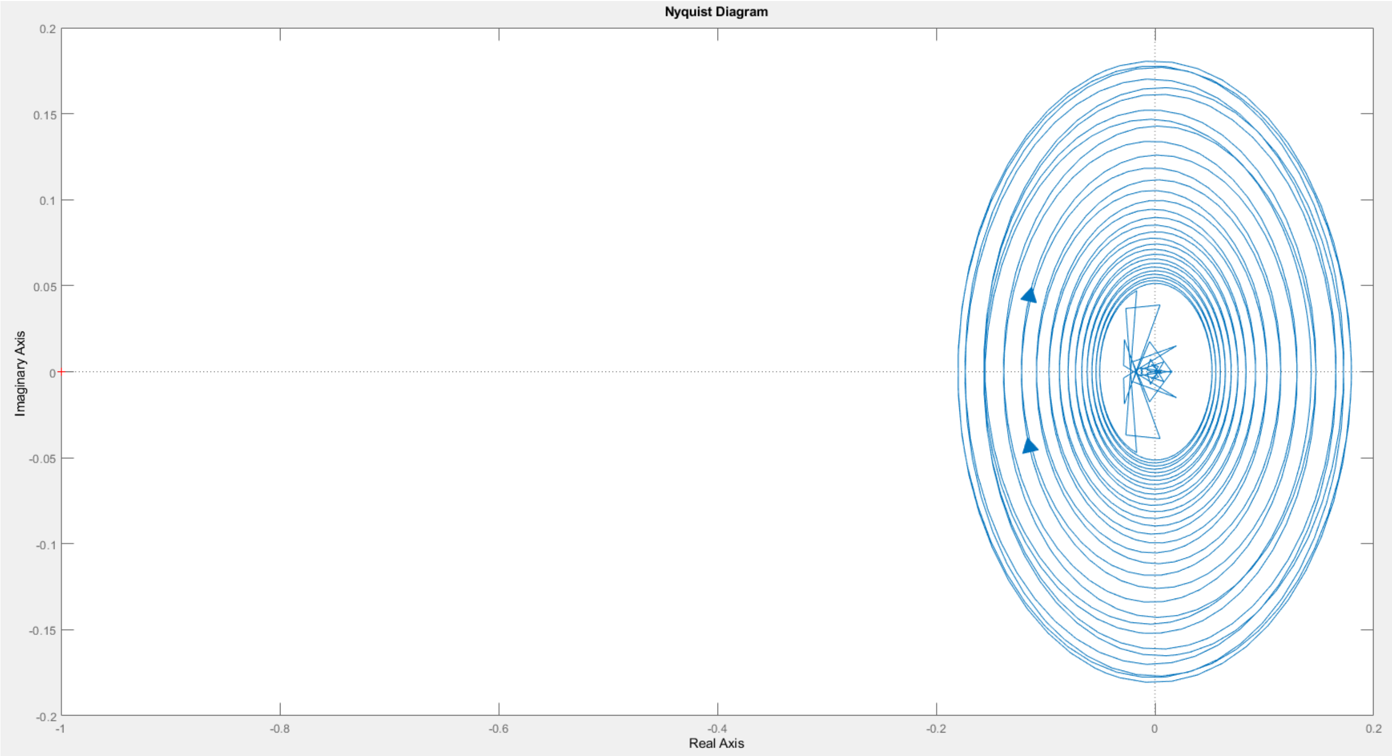

Рисунок 21: АФЧХ разомкнутой системы с запаздыванием $\tau = 5$

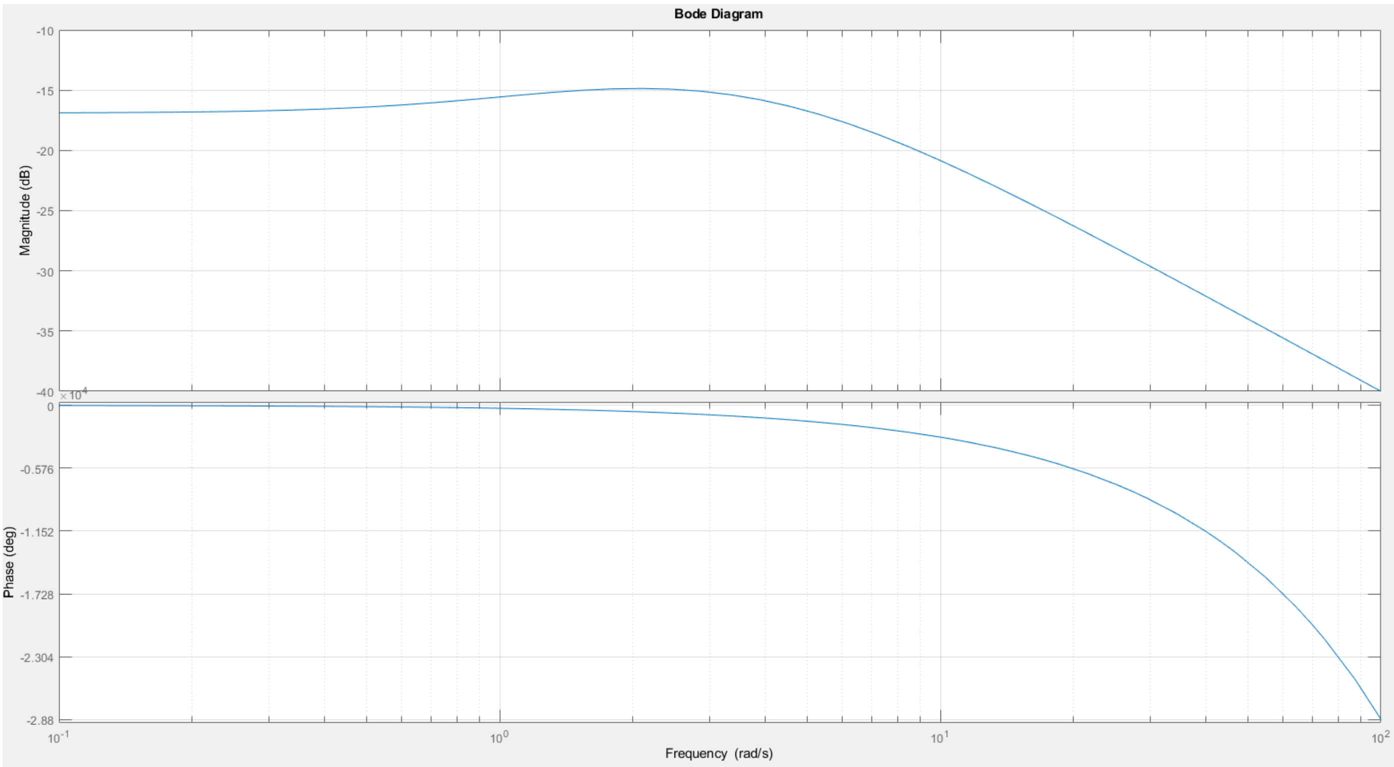

Рисунок 22: ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы при $\tau = 5$

<u>$\tau = 10$</u>

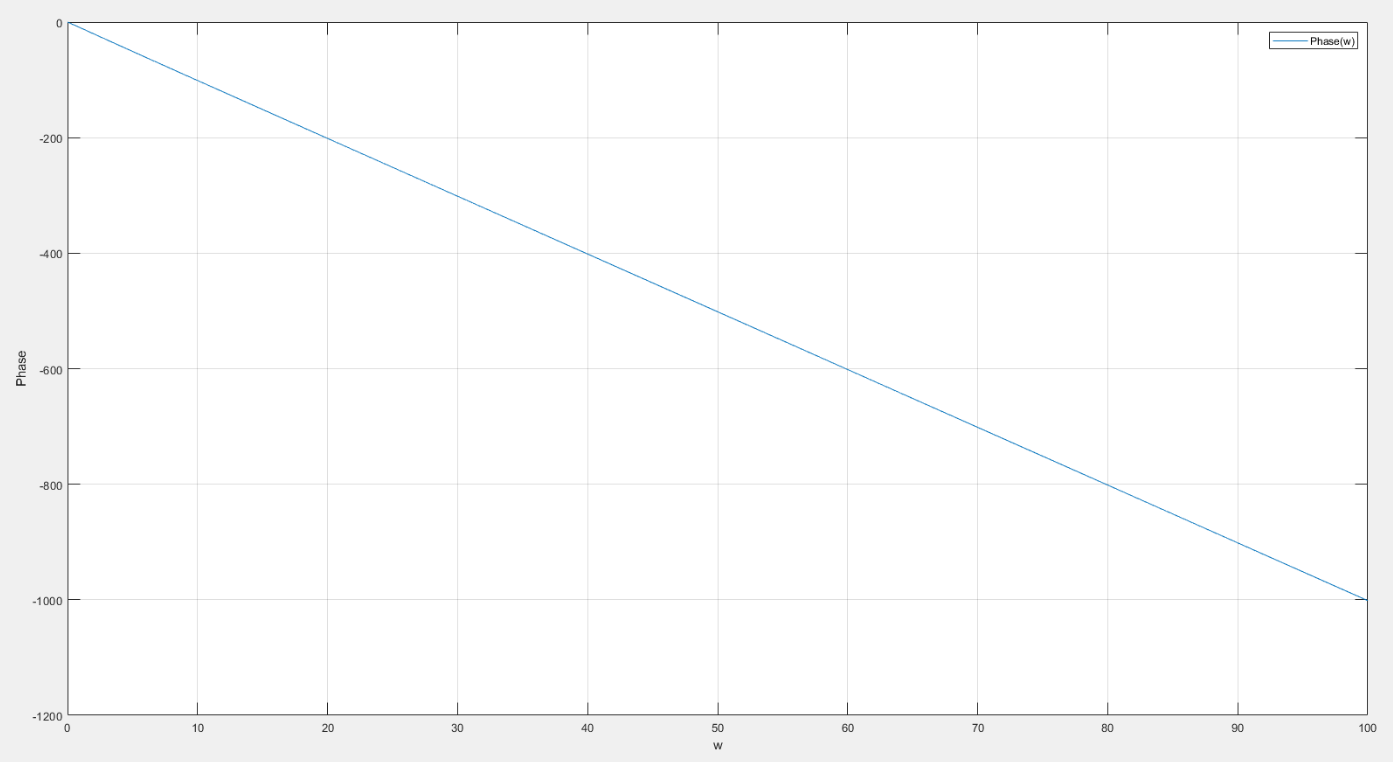

Рисунок 23: ФЧХ разомкнутой системы с запаздыванием $\tau = 10$

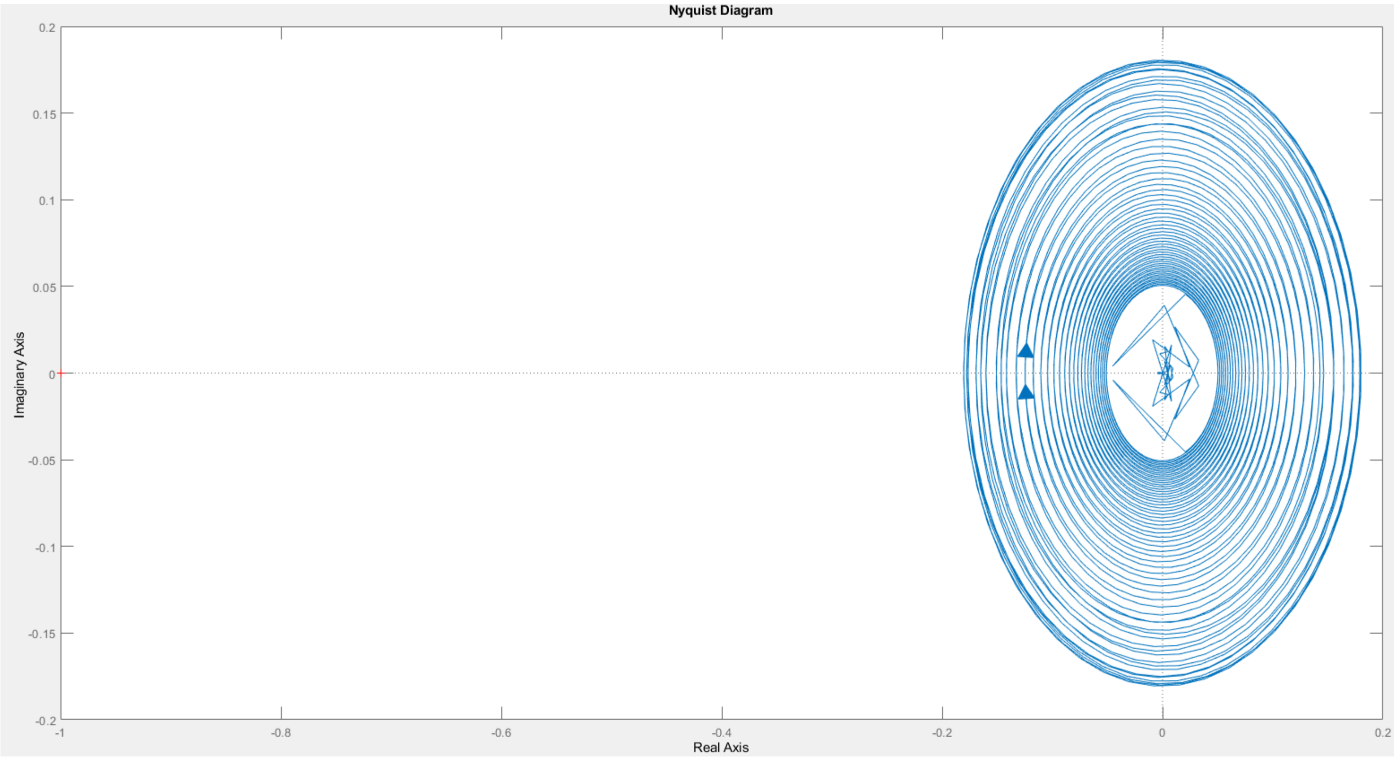

Рисунок 24: АФЧХ разомкнутой системы с запаздыванием $\tau = 10$

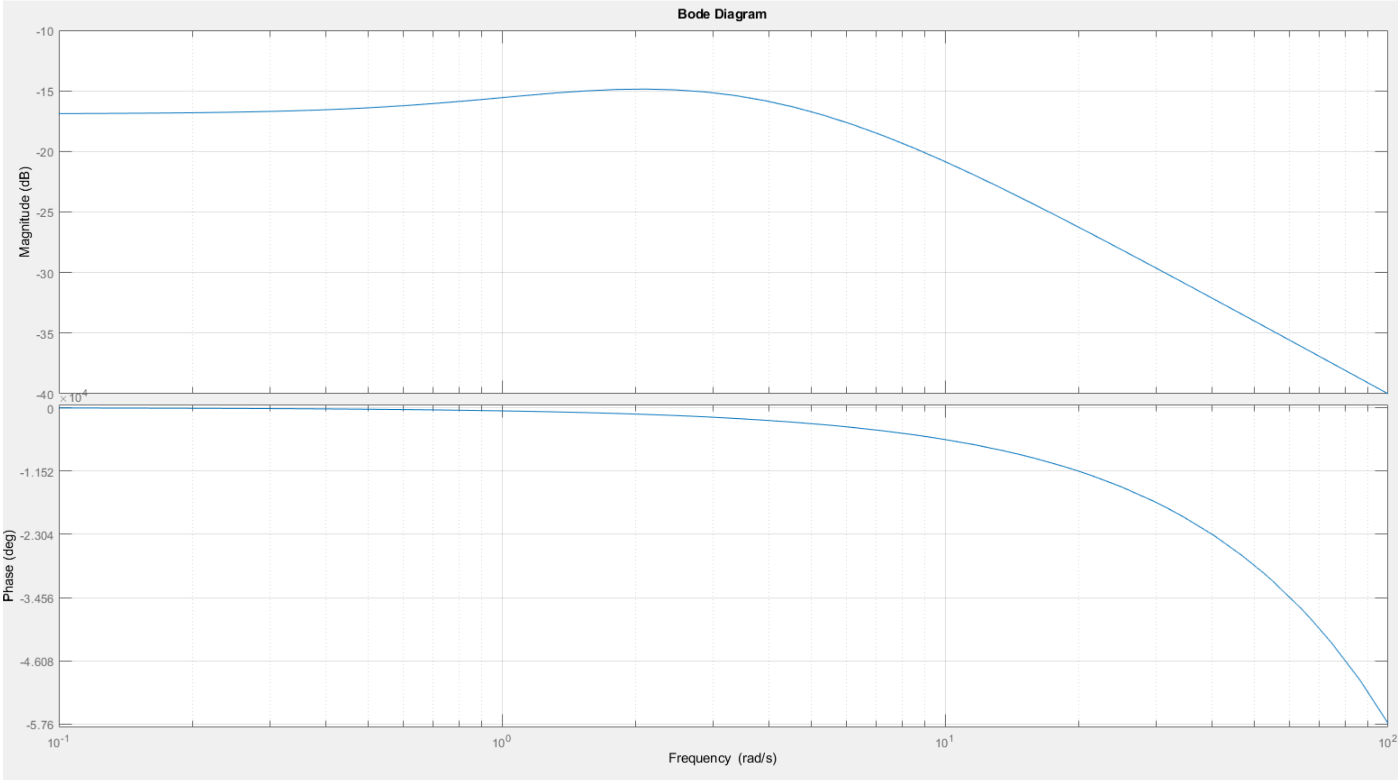

Рисунок 25: ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы при $\tau = 10$

2.3.

2.3.1. Запас устойчивости по амплитуде

Найдем ω_A при котором значение фазы $\Psi_{open}(\omega_A) = -\pi - 2\pi n,\ n = 1,2,3 \ldots$

$$\Psi_{open}(\omega_A) = \operatorname{atan}\left(\frac{-\omega_A{}^3 + \omega_A}{5\omega_A{}^2 + 7}\right) - \tau\omega_A = -\pi$$

Тогда запас по амплитуде будет

$$A_з = \frac{1}{A(\omega_A)}$$

<u>τ = 1</u>

$$\omega_A = 2.757, \qquad A(\omega_A) = 0.1772$$

$$A_з = \frac{1}{0.1772} = 5.6433$$

<u>τ = 5</u>

$$\omega_{A_1} = 0.636701, \qquad \omega_{A_2} = 1.84828, \quad A(\omega_{A_1}) = 0.1556, \qquad A(\omega_{A_2}) = 0.1803$$

$$A_{з_1} = \frac{1}{0.1556} = 6.4267, \qquad A_{з_2} = \frac{1}{0.1803} = 5.5457$$

<u>τ = 10</u>

$$\omega_{A_1} = 0.318, \omega_{A_2} = 0.94338, \omega_{A_3} = 1.5592, \omega_{A_4} = 2.17328$$

$$A(\omega_{A_1}) = 0.1466, A(\omega_{A_2}) = \ 0.1651, A(\omega_{A_3}) = \ 0.1779, A(\omega_{A_4}) = \ 0.1807$$

$$A_з = \frac{1}{0.1466} = 6.8213, A_{з_2} \ = \frac{1}{0.1651} = 6.0569, A_{з_2} \ = \frac{1}{0.1807} = 5.5330$$

2.3.2. Запас устойчивости по фазе

Графики АЧХ при данных значениях τ не достигают значения амплитуды равной 1. А следовательно, годограф не коснется критической точки при любом сдвиге по фазе. Значит запас устойчивости по фазе равен бесконечности

2.4.

Критическое значение для коэффициента усиления равен минимальному запасу устойчивости по амплитуде

$$\tau = 1, K_{max} \ = 5.6433$$

$$\tau = 5, K_{max} \ = 5.5457$$

$$\tau = 10, K_{max} \ = 5.5330$$

2.5.

Схема моделирования системы представлена на Рисунке 11

<u>τ = 1</u>

$$k \ = K_{max} \ = 5.6433$$

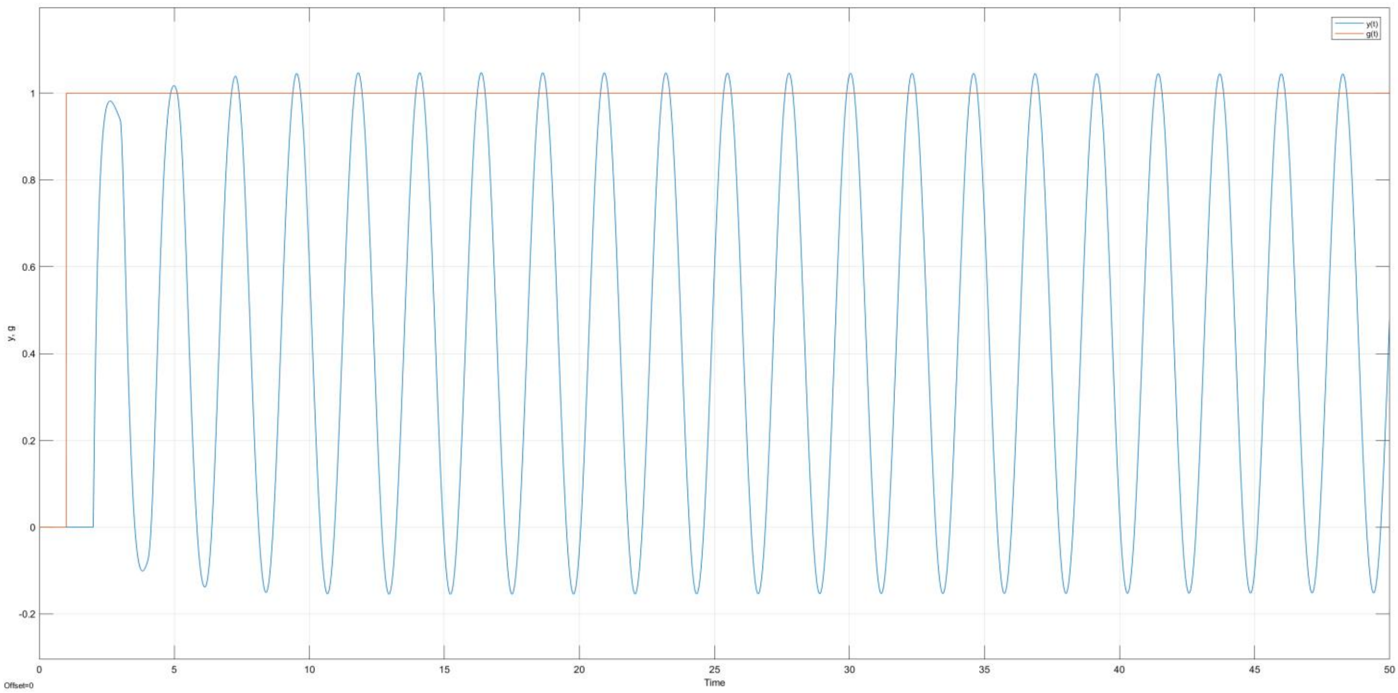

Рисунок 26: переходная характеристика замкнутой системы при $\tau = 1, k\ = 5.6433, t\ \in [0,50]$

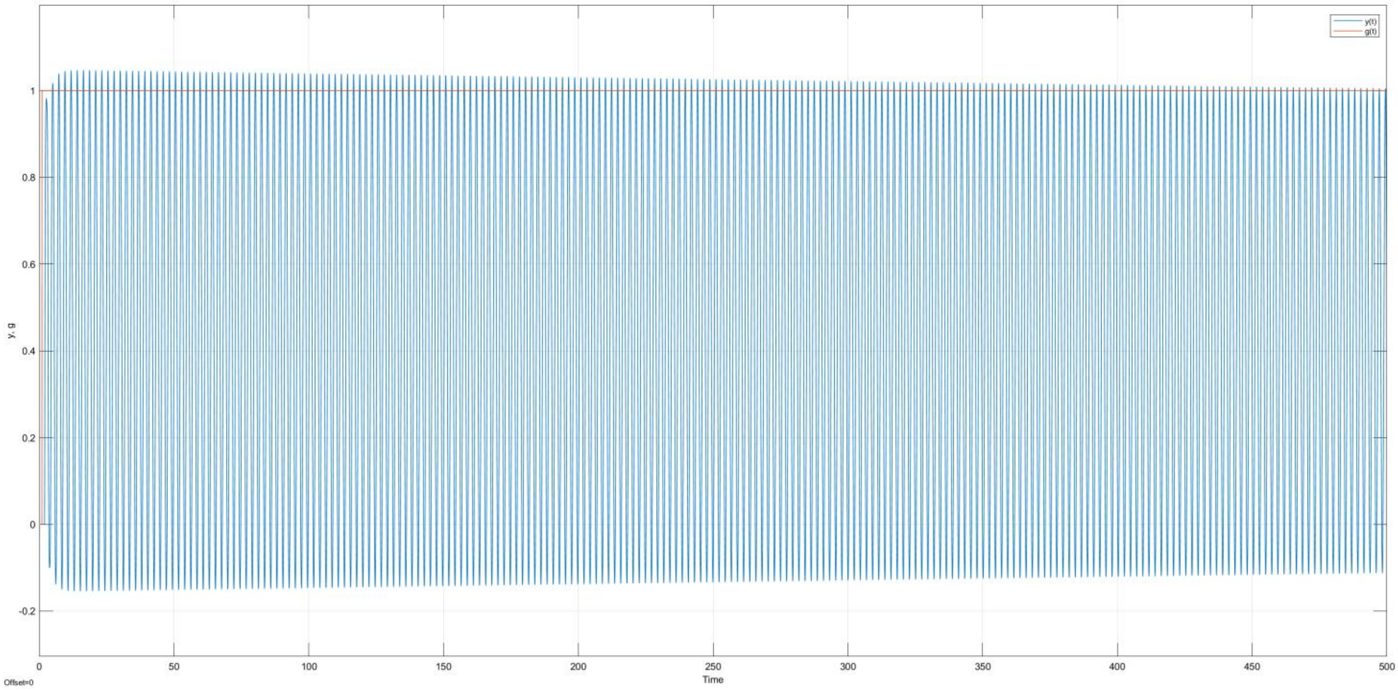

Рисунок 27: переходная характеристика замкнутой системы при $\tau = 1, k = 5.6433, t \in [0, 500]$

При критическом коэффициенте усиления наблюдаем затухающие колебания, рассмотрим коэффициент усиления больший критического

$$k = 5.6445$$

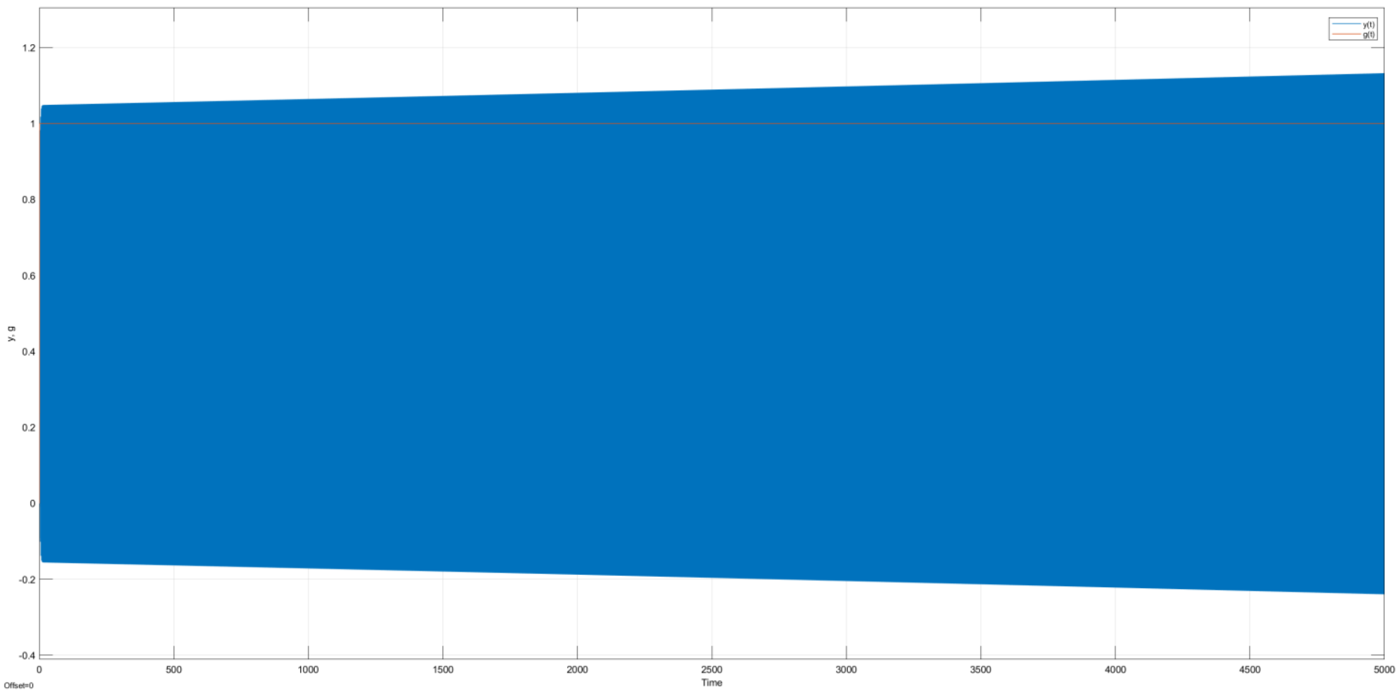

Рисунок 28: переходная характеристика замкнутой системы при $\tau = 1, k = 5.6445, t \in [0, 5000]$

Так как годограф захватил критическую точку, то по критерию Найквиста у замкнутой системы появился неустойчивый полюс, следовательно колебания стали расходящимися.

<u>τ = 5</u>

$$k = K_{max} = 5.5457$$

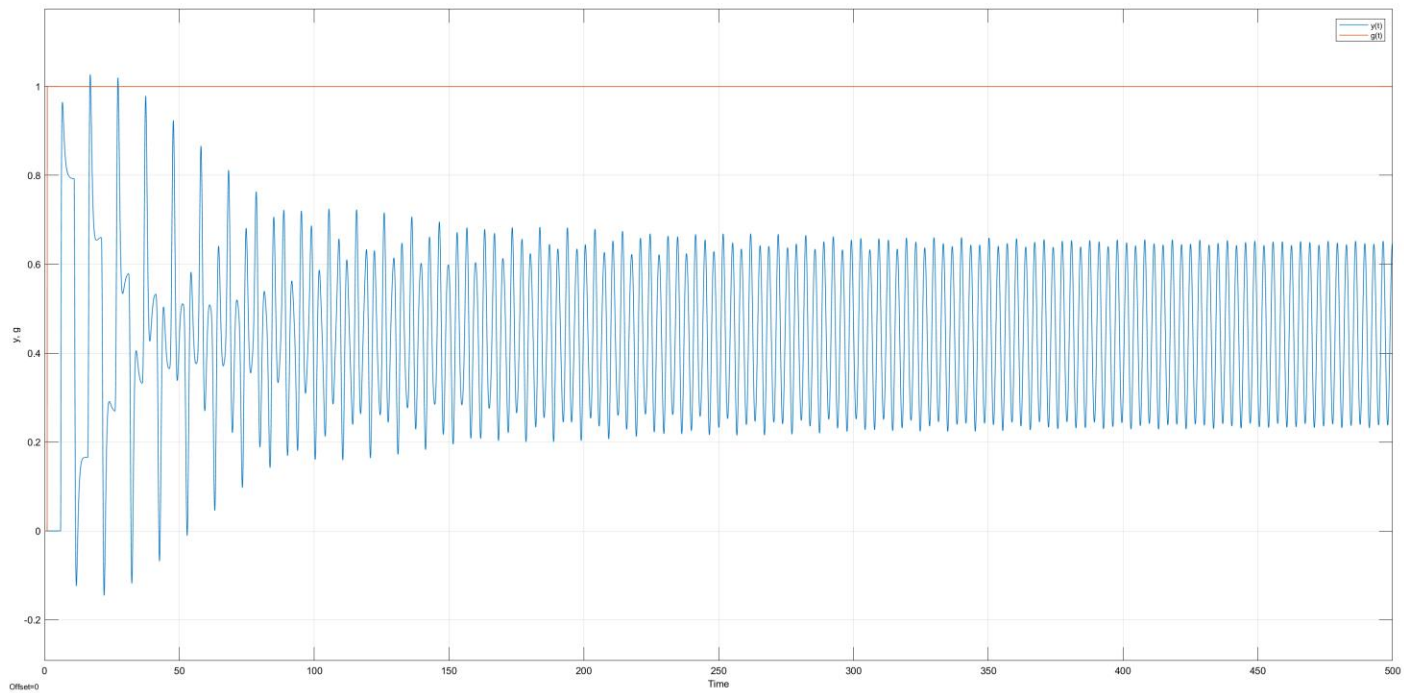

Рисунок 29: переходная характеристика замкнутой системы при $\tau = 5, k = 5.5457, t \in [0, 500]$

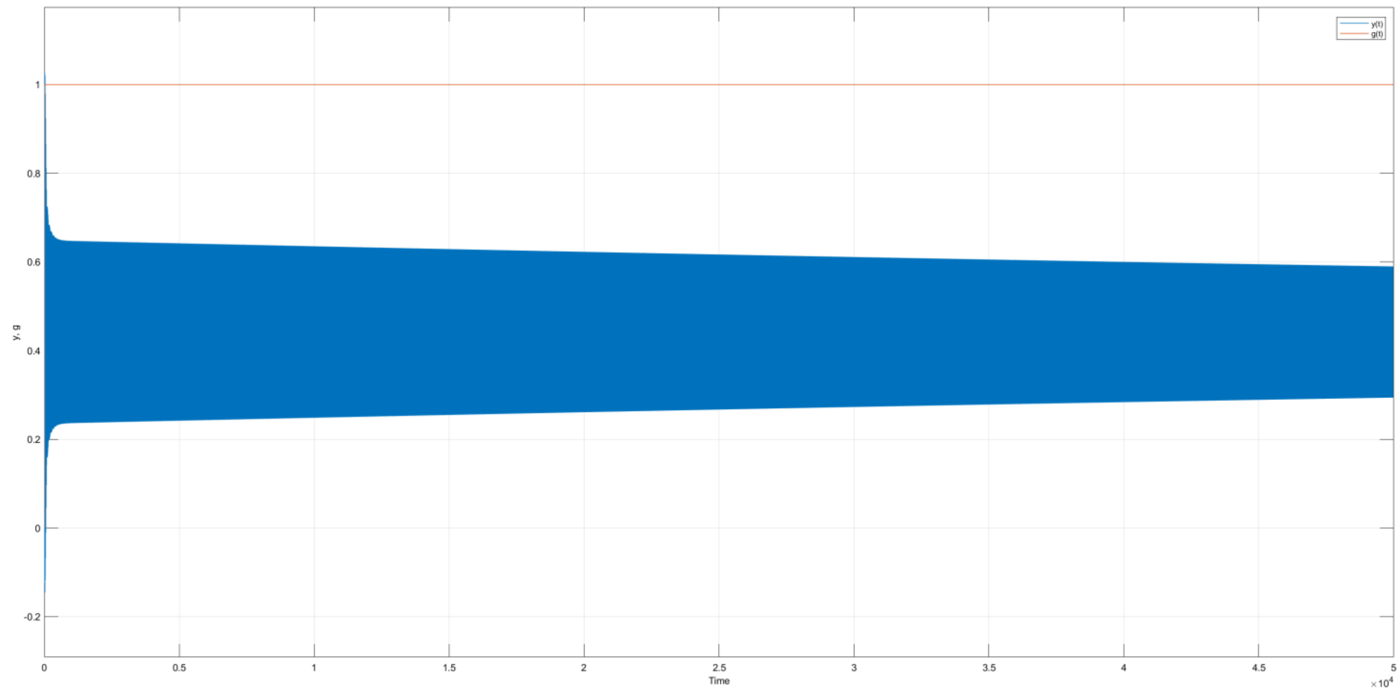

Рисунок 30: переходная характеристика замкнутой системы при $\tau = 5, k = 5.5457, t \in [0, 50000]$

При критическом коэффициенте усиления наблюдаем затухающие колебания, рассмотрим коэффициент усиления больший критического

$$k = 5.546$$

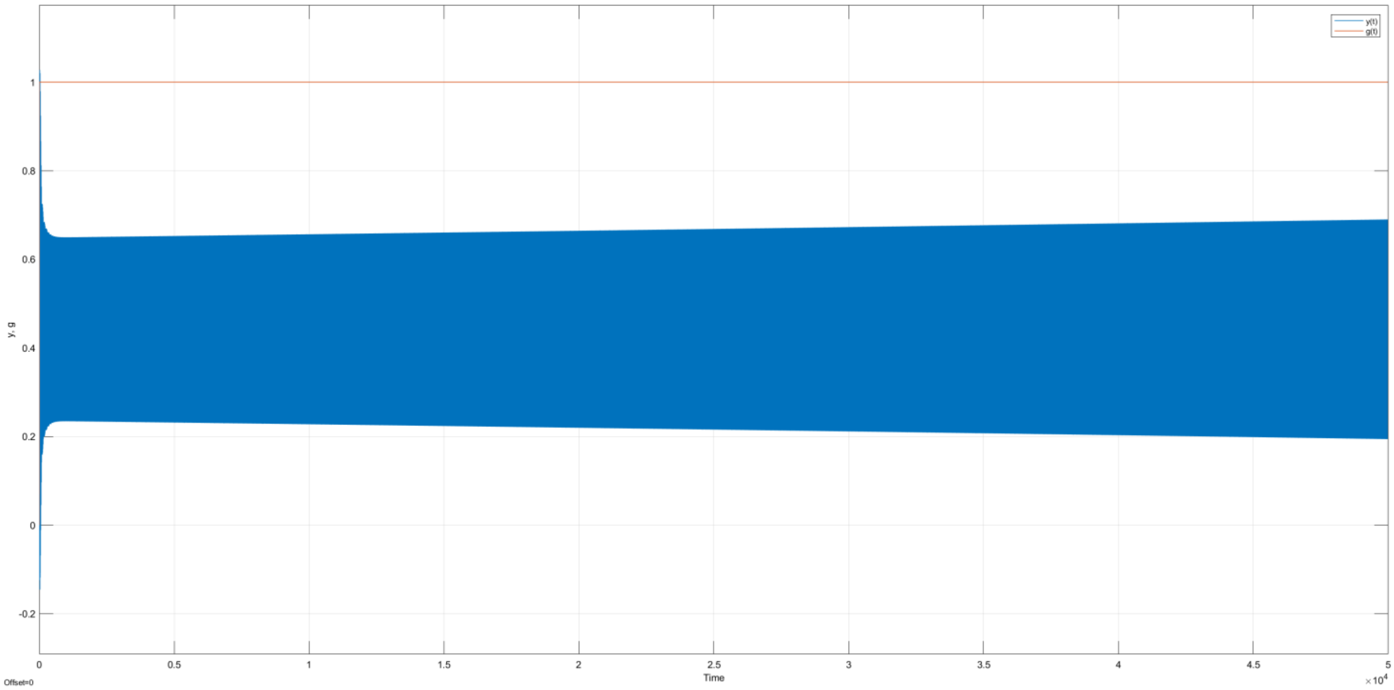

Рисунок 31: переходная характеристика замкнутой системы при $\tau = 5, k = 5.546, t \in [0, 50000]$

Так как годограф захватил критическую точку, то по критерию Найквиста у замкнутой системы появился неустойчивый полюс, следовательно колебания стали расходящимися.

<u>$\tau = 10$</u>

$$k = K_{max} = 5.5330$$

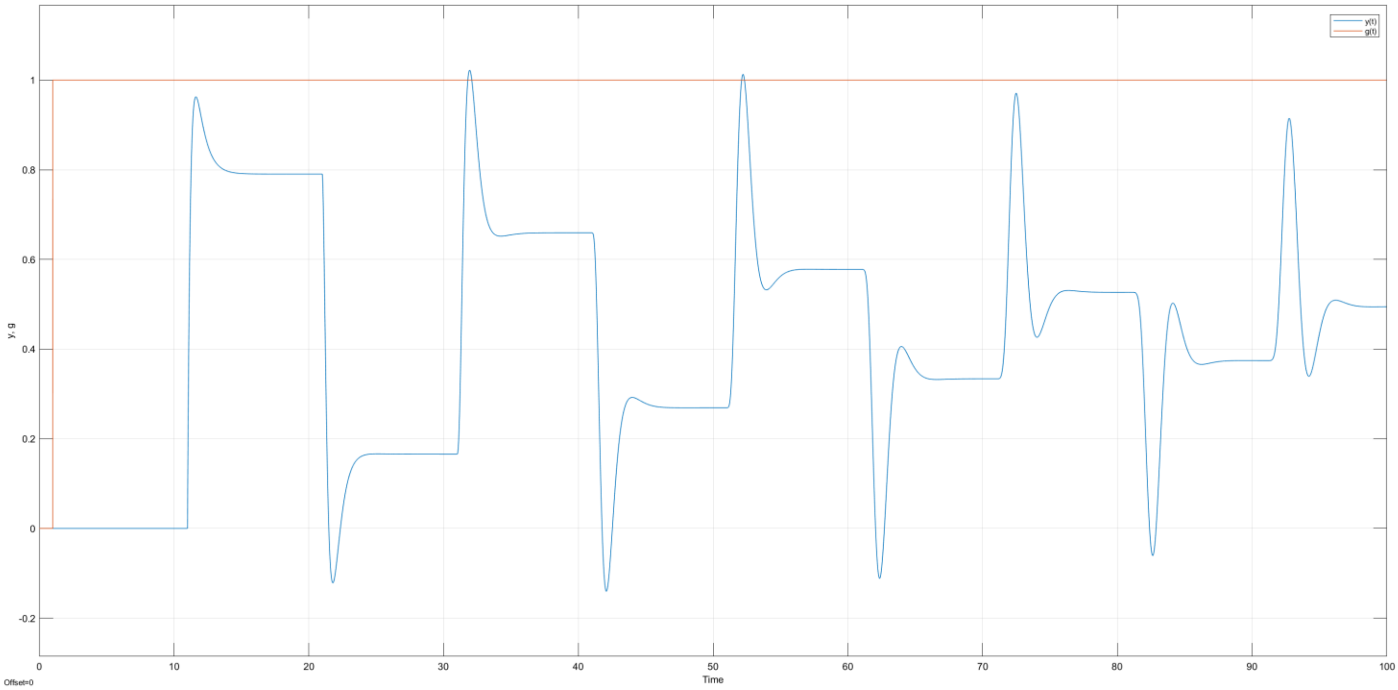

Рисунок 32: переходная характеристика замкнутой системы при $\tau = 10, k = 5.5330, t \in [0, 100]$

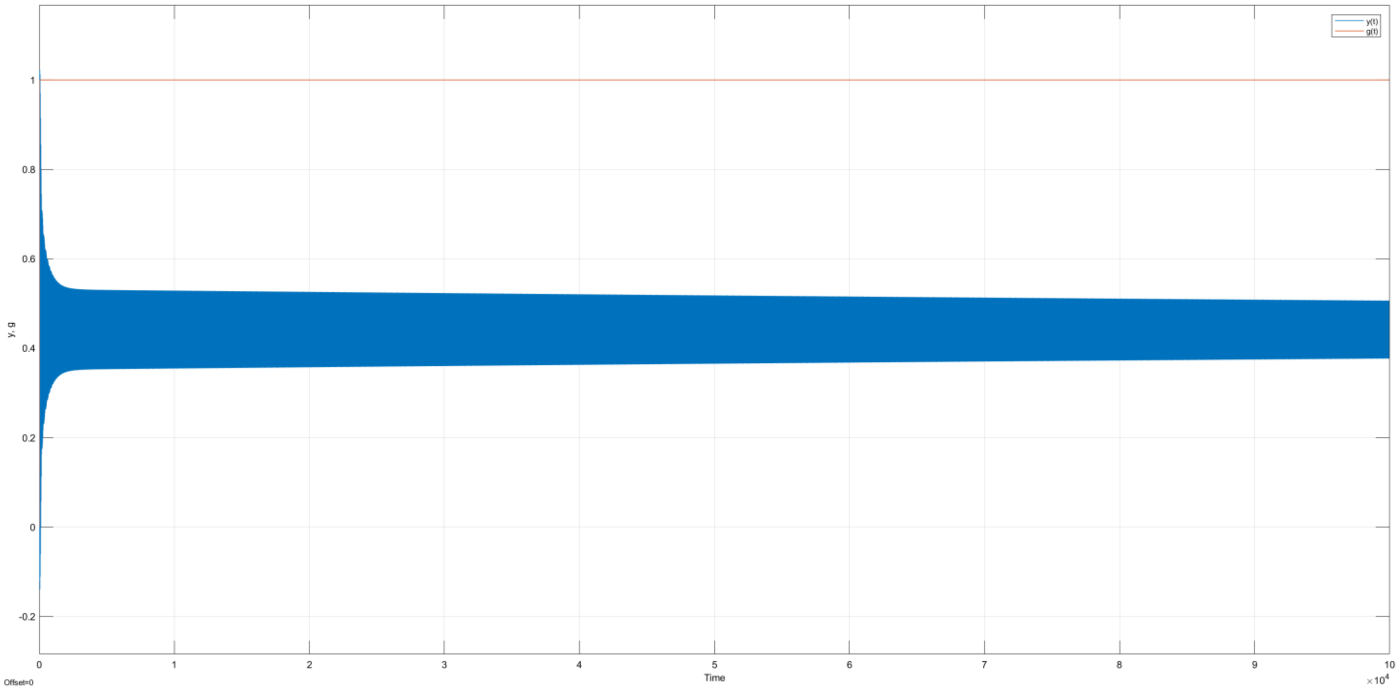

Рисунок 33: переходная характеристика замкнутой системы при $\tau = 10, k = 5.5330, t \in [0, 100000]$

При критическом коэффициенте усиления наблюдаем затухающие колебания, рассмотрим коэффициент усиления больший критического

$$k = 5.5340$$

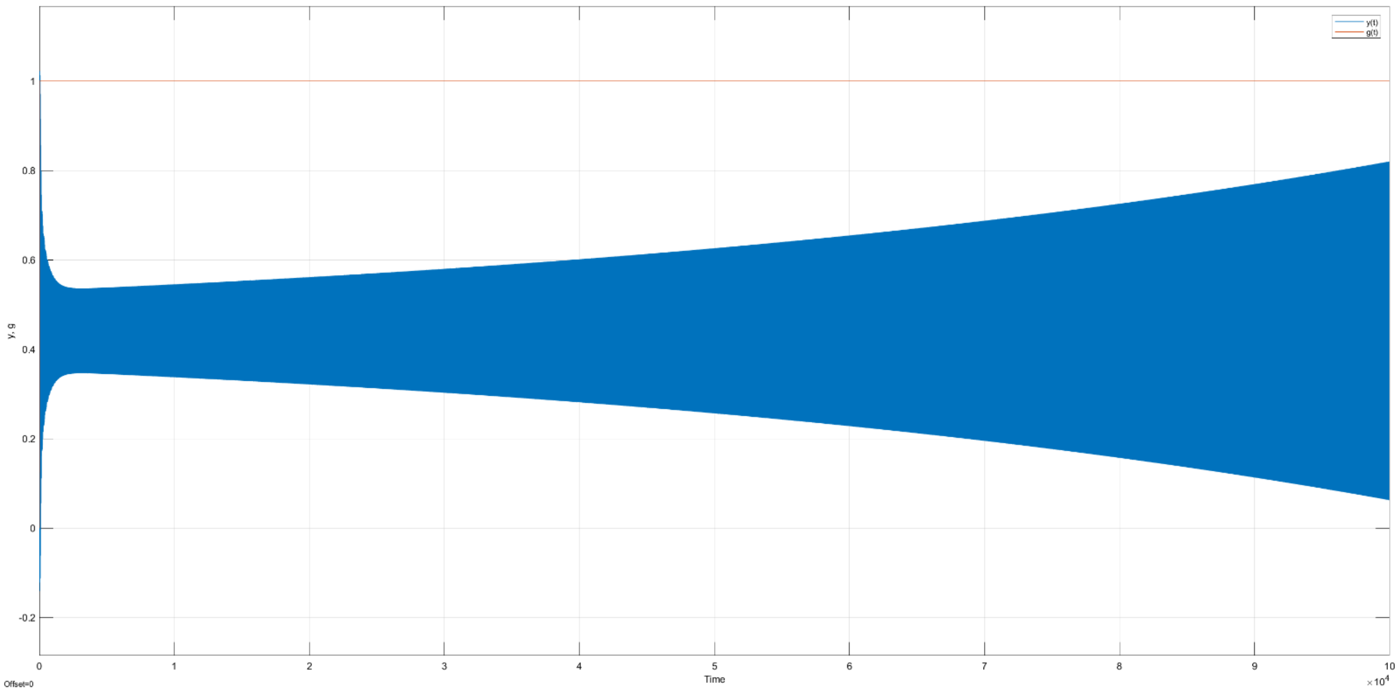

Рисунок 34: переходная характеристика замкнутой системы при $\tau = 10, k = 5.5340, t \in [0, 100000]$

3. *Зависимость критических значений запаздывания и коэффициента усиления для замкнутой системы*

3.1.

Приравняем модуль к единице:

$$k\frac{\sqrt{\omega^6 + 23\omega^4 + 71\omega^2 + 49}}{\omega^4 + 22\omega^2 + 49} = 1$$

Найдем частоту, соответствующую критической точке:

$$\omega = \frac{\sqrt{k^2 + \sqrt{k^4 - 40k^2 + 288} - 22}}{\sqrt{2}}$$

Фазовый сдвиг по этой частоте:

$$\Psi(\omega) = \operatorname{atan}\left(\frac{-\omega^3 + \omega}{5\omega^2 + 7}\right)$$

Критическое запаздывание:

$$\tau_{cr} = \frac{\pi + \varphi}{\omega_\varphi} = \frac{\pi + \operatorname{atan}\left(\frac{-\omega^3 + \omega}{5\omega^2 + 7}\right)}{\omega}$$

3.2.

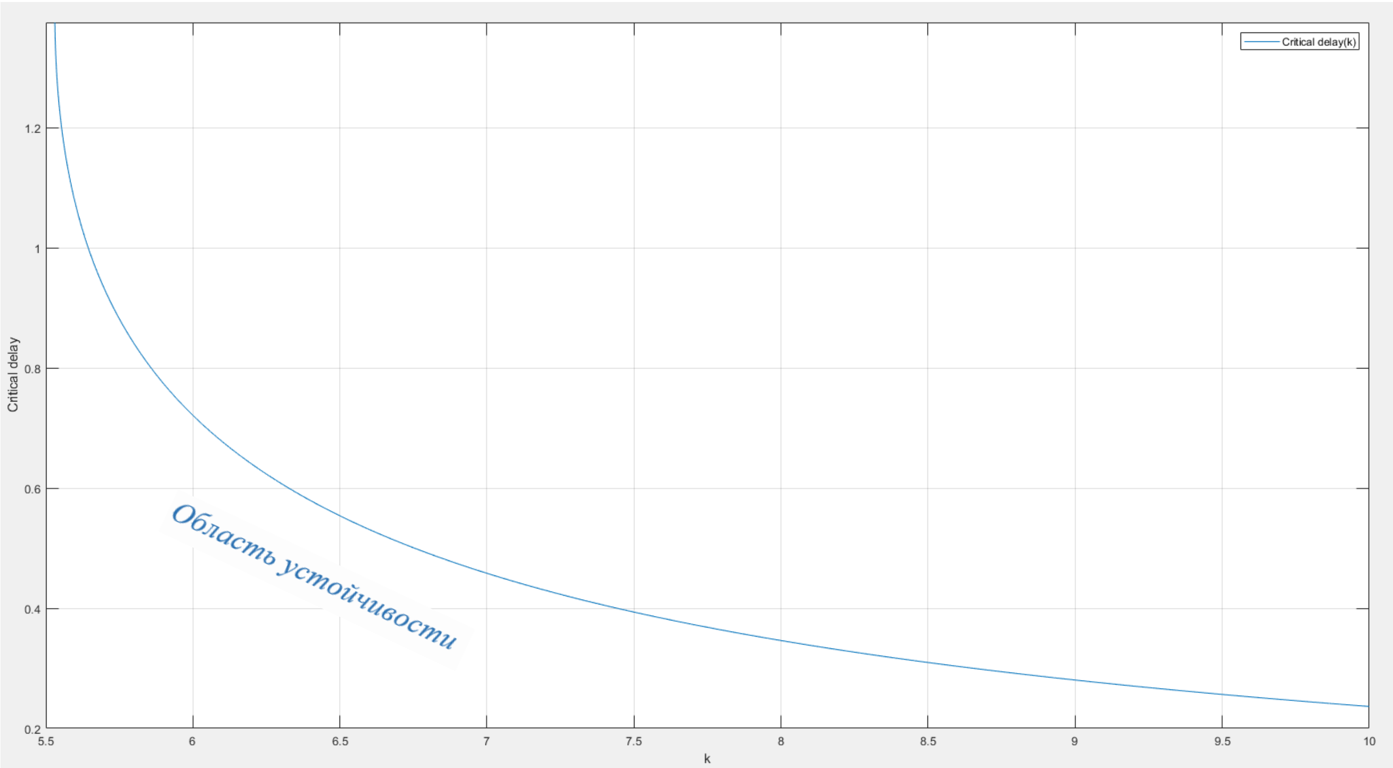

Рисунок 35: график зависимости критического запаздывания от коэффициента усиления

Выводы

В данной лабораторной работе исследовались критические значения запаздывания и коэффициента усиления и их зависимость. Были найдены запасы устойчивости по амплитуде и фазе при различных значениях k и τ. По приближенно вычисленным критическим значениям были построены переходные характеристики системы, которые были проверкой найденного значения (переходная характеристика системы со значением большим критическому становилась расходящейся из-за добавления неустойчивого полюса у передаточной функции по критерию Найквиста). В завершении была найдена зависимость критических значений запаздывания от коэффициента усиления и по нему найдена область устойчивости системы.