

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

по курсу «Компьютерное управление мехатронными системами»

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭТАЛОННЫХ
МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ СО СТАНДАРТНОЙ НАСТРОЙКОЙ

Авторы работы: Кирбаба Д.Д.,

Группа: R3438

Преподаватель: Ловлин С.Ю.

Санкт-Петербург

2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель работы	3
2. Ход работы	3
1. Исходные данные	3
2. Схема моделирования	3
3. Линейный оптимум	3
4. Биномиальный оптимум	10
5. Технический оптимум.....	15
6. Симметричный оптимум	20
7. Система, настроенная на астатизм 3-го порядка	25
8. Сравнительные таблицы	31
3. Выводы.....	32

1. Цель работы

Знакомство с настройками на биномиальный оптимум, оптимум по модулю, симметричный оптимум, настройкой на астатизм третьего порядка. Исследование качеств систем управления, настроенных на заданные оптимумы.

2. Ход работы

1. Исходные данные

$$T_{\mu} = 0.0363.$$

2. Схема моделирования

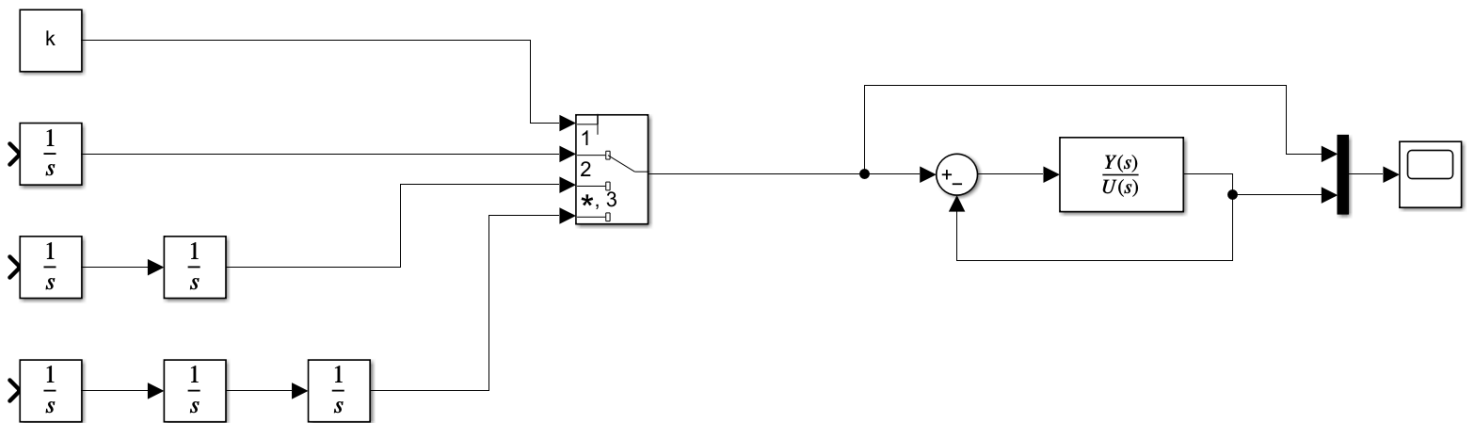


Рисунок 1. Обобщенная схема моделирования систем с различными входными воздействиями.

3. Линейный оптимум

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{ol}(s) = \frac{1}{T_{\mu}s}$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_{cl}(s) = \frac{W_{ol}(s)}{1 + W_{ol}(s)} = \frac{1}{T_{\mu}s + 1}$$

Переходный процесс при скачке задающего воздействия $u = 1$:

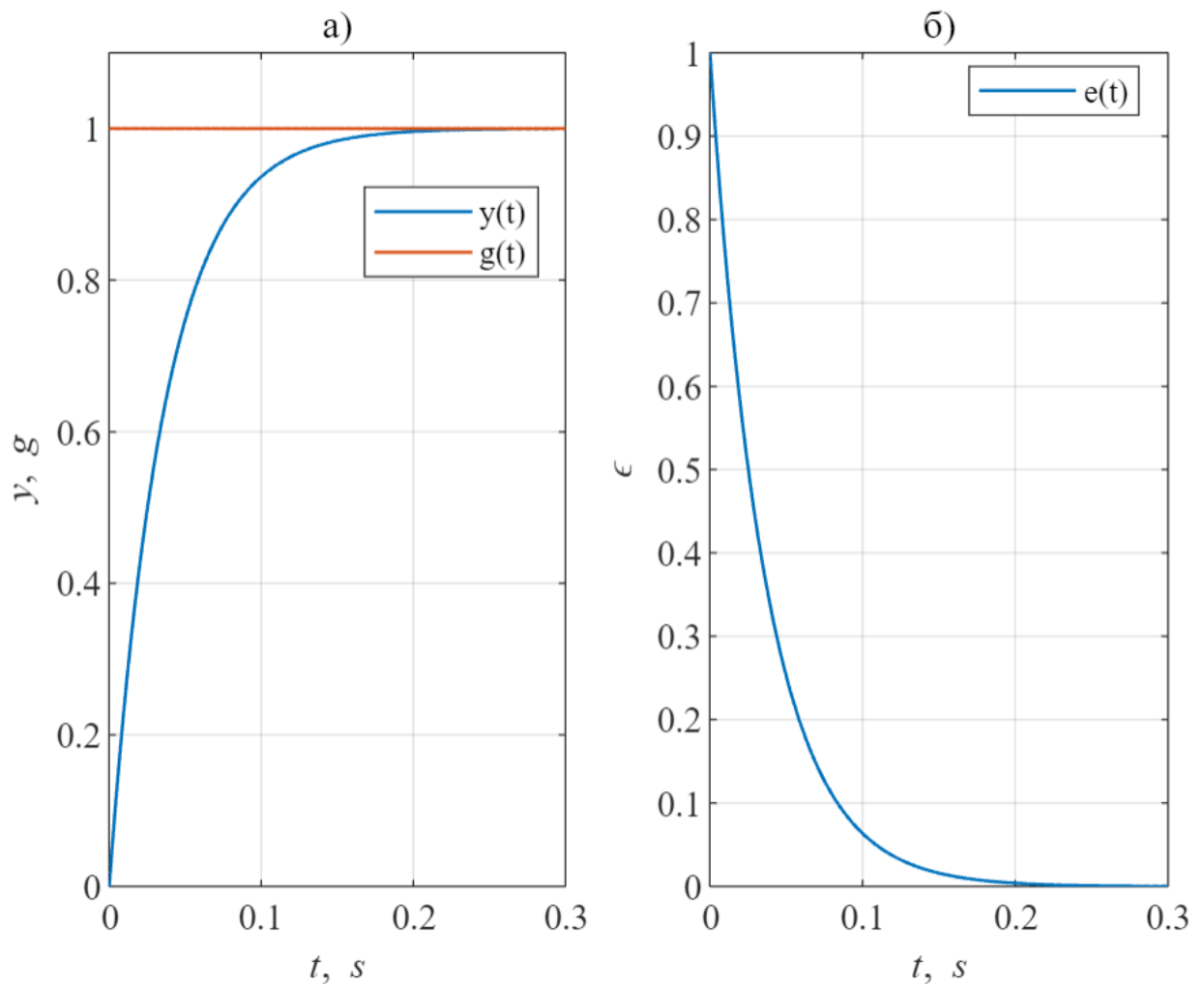


Рисунок 2. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) линейного оптимума при постоянном задающем воздействии.

Рассчитаем параметры переходного процесса: время переходного процесса для входа в 5% зону – t_{p5} , время переходного процесса для входа в 2% зону – t_{p2} , перерегулирование – Δy .

Для определения времени переходного процесса в заданную зону используем следующие вычисления:

$$t_p = t_1 - t_0,$$

где t_0 – время начала переходного процесса (в нашем случае 0), $t_1 = \max(t)$, для которого справедливо

$$\epsilon(t_1) = g(t) - y(t_1) = 1 - y(t_1) \geq D,$$

где $D = c \cdot |y(t_0) - y_{ss}|$, y_{ss} – установившееся значение.

Коэффициент c задаёт зону переходного процесса, в нашем случае, необходимо вычислить два значения при $c = \{0.02, 0.05\}$.

Стоит отметить, что для сравнения различных оптимумов будем использовать величину времени переходного процесса, отнесенную к параметру T_μ : t_p/T_μ .

В случае линейного оптимума значения следующие:

$$t_{p5}/T_\mu = 2.965, \quad t_{p2}/T_\mu = 3.874$$

Расчет перерегулирования производится следующим образом:

$$\Delta y = \left| \frac{\max \left((y(t) - y_{ss}) \cdot \text{sign}(y_{ss} - y(t_0)) \right)}{y_{ss} - y(t_0)} \right| \cdot 100\%$$

В случае линейного оптимума:

$$\Delta y = 0\%$$

Приведем графики при обработке линейного $g = vt$ и квадратичного $g = at^2$ задающих воздействий:

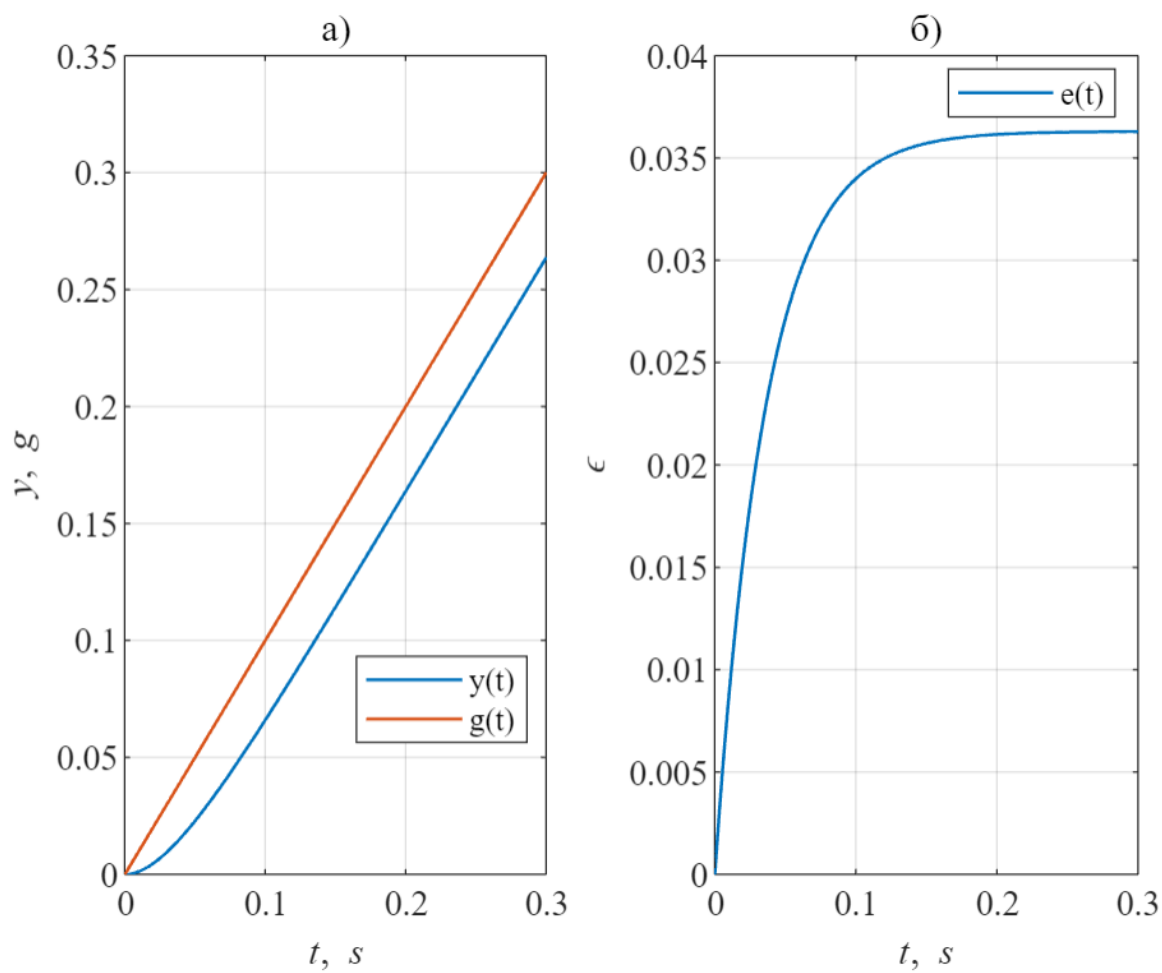


Рисунок 3. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) линейного оптимума при линейном задающем воздействии.

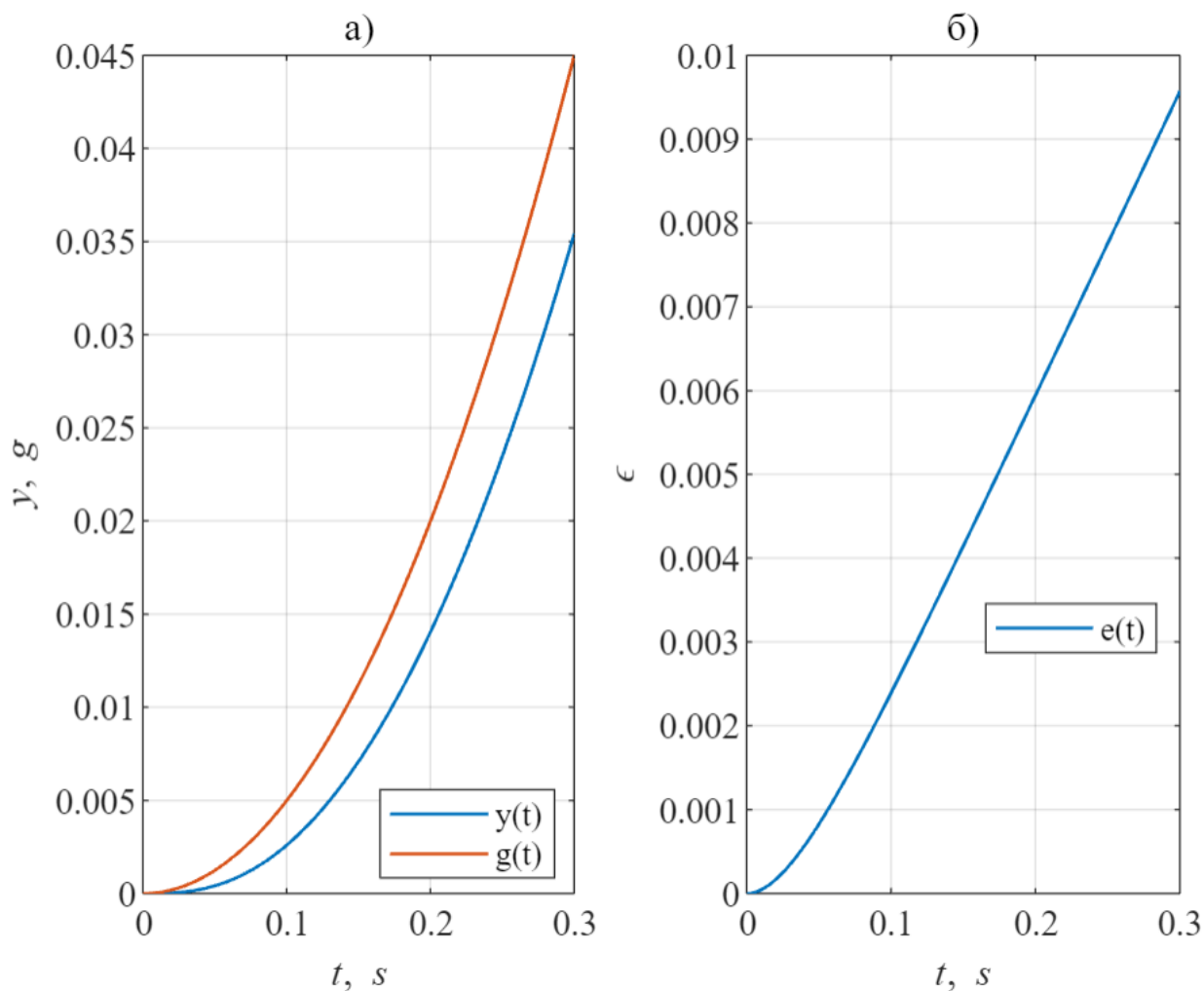


Рисунок 4. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) линейного оптимума при квадратичном задающем воздействии.

Проанализируем частотные характеристики линейного оптимума. Для этого построим ЛАЧХ и ФЧХ и вычислим запас по амплитуде, запас по фазе и показатель колебательности.

Частотная характеристика разомкнутой системы:

$$W_{ol}(j\omega) = \frac{1}{T_{\mu}j\omega}$$

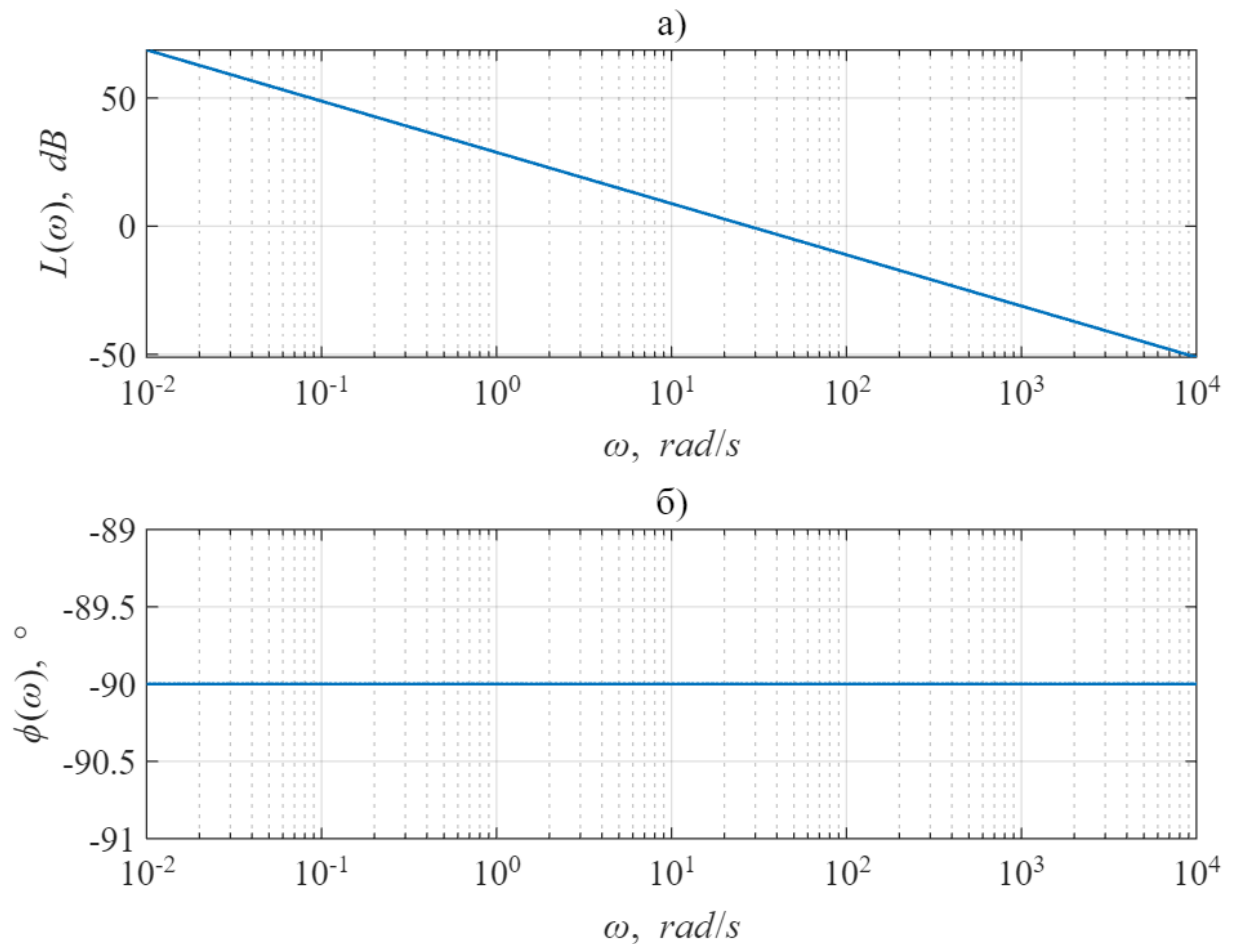


Рисунок 5. Графики ЛАЧХ (а) и ФЧХ (б) ПФ разомкнутой системы линейного оптимума.

Вычислим запас устойчивости по фазе ϕ – такой угол, при повороте на который годограф системы коснется критической точки $(-1, 0)$.

Формула для вычисления:

$$\phi = \phi_{\text{marg}} - (-180),$$

где ϕ_{marg} соответствует частоте, при которой ЛАЧХ пересекает ось Ox .

По найденному значению запаса устойчивости можно найти критическое запаздывание τ_{max} . Данное запаздывание, при введении его в ОУ, выводит систему на границу устойчивости.

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\phi}{\omega_{\text{marg}}}$$

В нашем случае:

$$\phi = 90^\circ, \quad \omega_{\text{marg}} = 27.542 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \tau_{\text{max}} = 57.032 \text{ мс}$$

Теперь определим запас по амплитуде L данной системы. Запас по амплитуде характеризует максимальное «растяжение» годографа до касания его критической точки $(1,0)$.

Вычисляется данное значение следующим образом:

$$L = 0 - L_{marg},$$

где L_{marg} — соответствующее значение ЛАЧХ с частотой при которой ФЧХ системы касается -180° .

Вычисленное значение L определяет критически допустимый коэффициент П-регулятора, который можно ввести в систему (система будет на границе устойчивости).

В нашем случае ФЧХ не достигает значения -180° , а значит запас по амплитуде бесконечен.

Для расчета показателя колебательности необходимо построить частотные характеристики замкнутой системы:

$$W_{cl}(j\omega) = \frac{W_{ol}(j\omega)}{1 + W_{ol}(j\omega)}$$

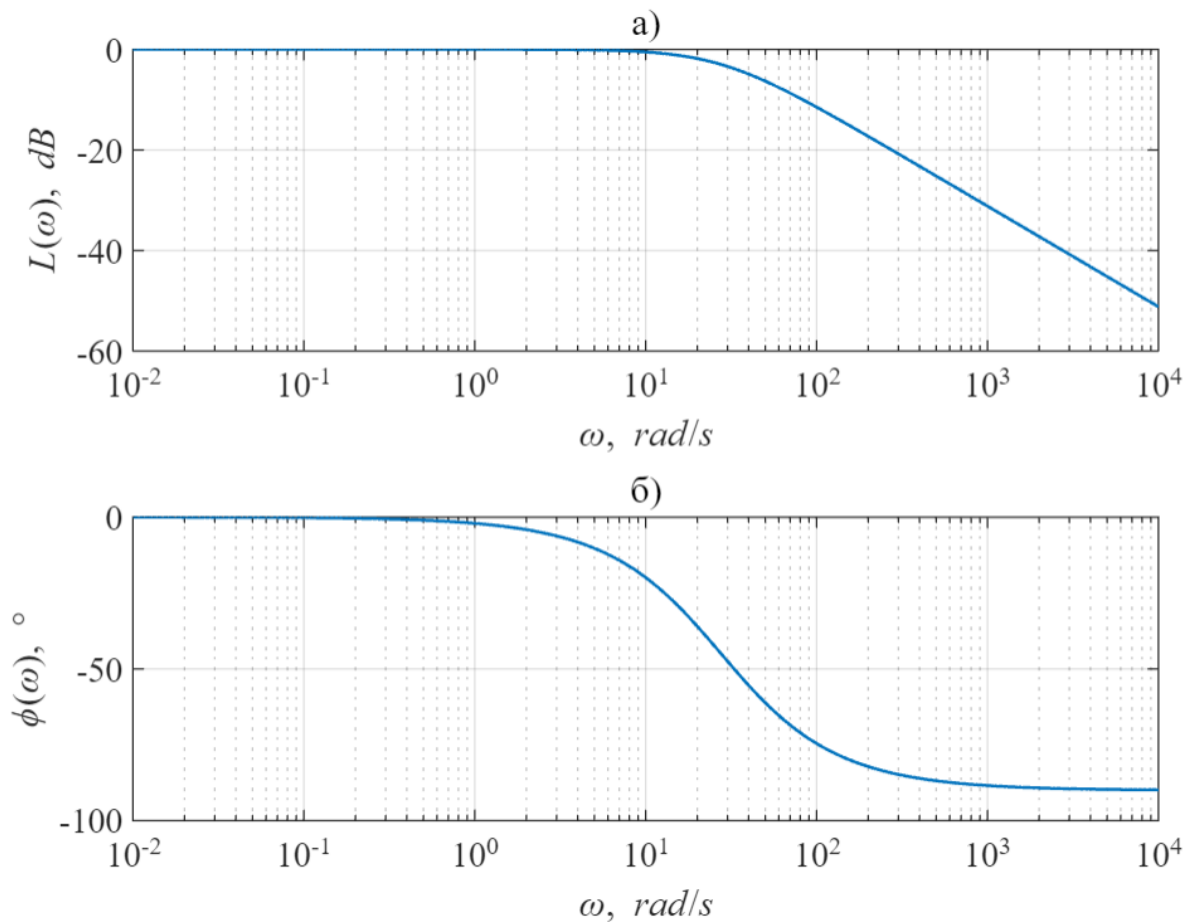


Рисунок 6. Графики ЛАЧХ (а) и ФЧХ (б) ПФ замкнутой системы линейного оптимума.

Показатель колебательности M количественно оценивает колебательность системы. Его значение вычисляется по следующей формуле:

$$M = \frac{10^{(L(\omega_c) - L(0))/20}}{10^{L(0)/20}},$$

где $\omega_c = \operatorname{argmax}(L(\omega))$.

В нашем случае в замкнутой системе отсутствуют колебания, поэтому

$$M = 1$$

4. Биномиальный оптимум

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{ol}(s) = \frac{1}{3T_\mu s \cdot (T_\mu s + 1)}$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_{cl}(s) = \frac{W_{ol}(s)}{1 + W_{ol}(s)} = \frac{1}{3T_{\mu}^2 s^2 + 3T_{\mu} s + 1}$$

Переходный процесс при скачке задающего воздействия $u = 1$:

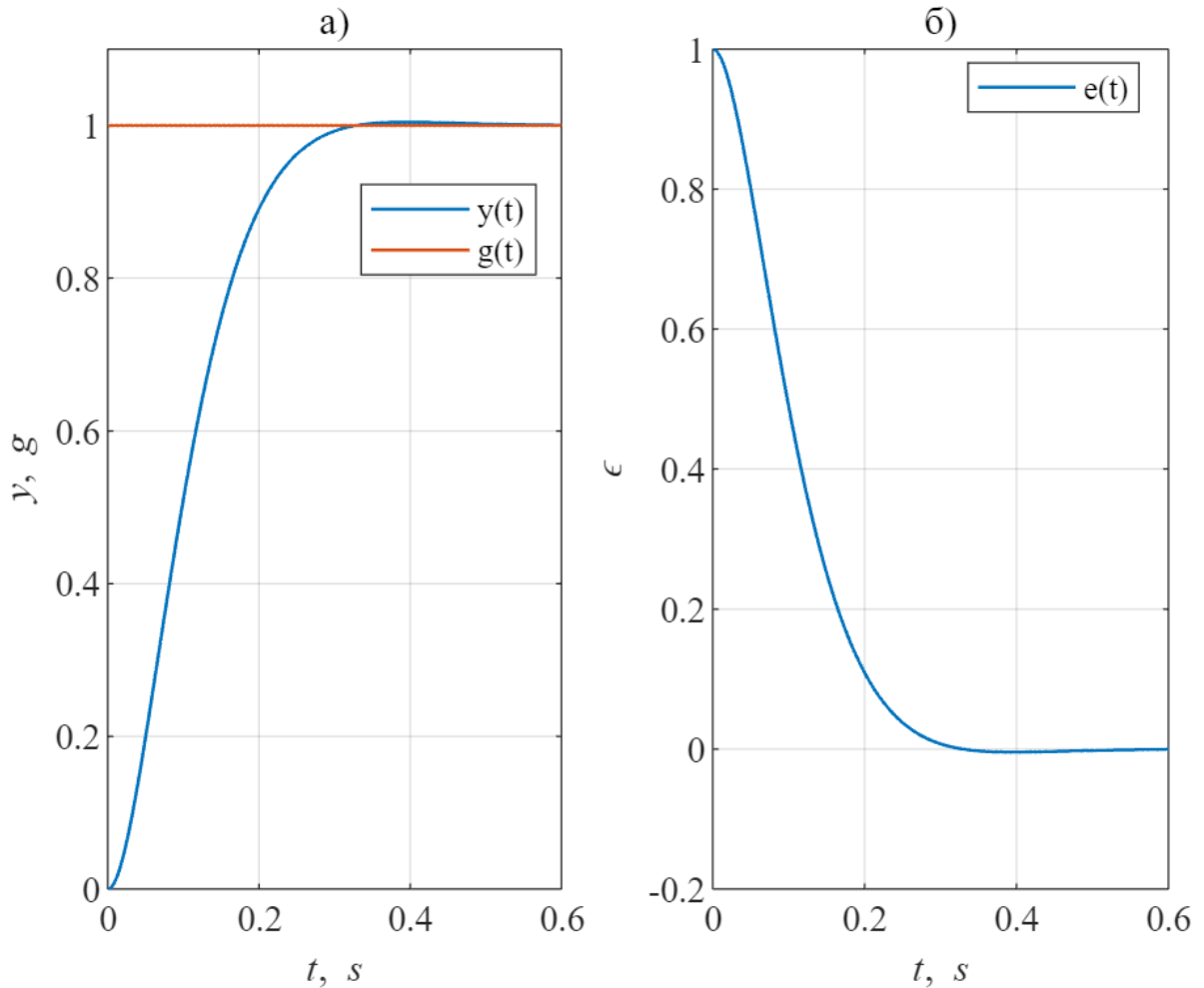


Рисунок 7. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) биномиального оптимума при постоянном задающем воздействии.

Рассчитаем параметры переходного процесса: время переходного процесса для входа в 5% зону – t_{p5} , время переходного процесса для входа в 2% зону – t_{p2} , перерегулирование – Δy .

$$t_{p5}/T_{\mu} = 6.546, \quad t_{p2}/T_{\mu} = 7.538, \quad \Delta y = 0.39\%$$

Приведем графики при обработке линейного $g = vt$ и квадратичного $g = at^2$ задающих воздействий:

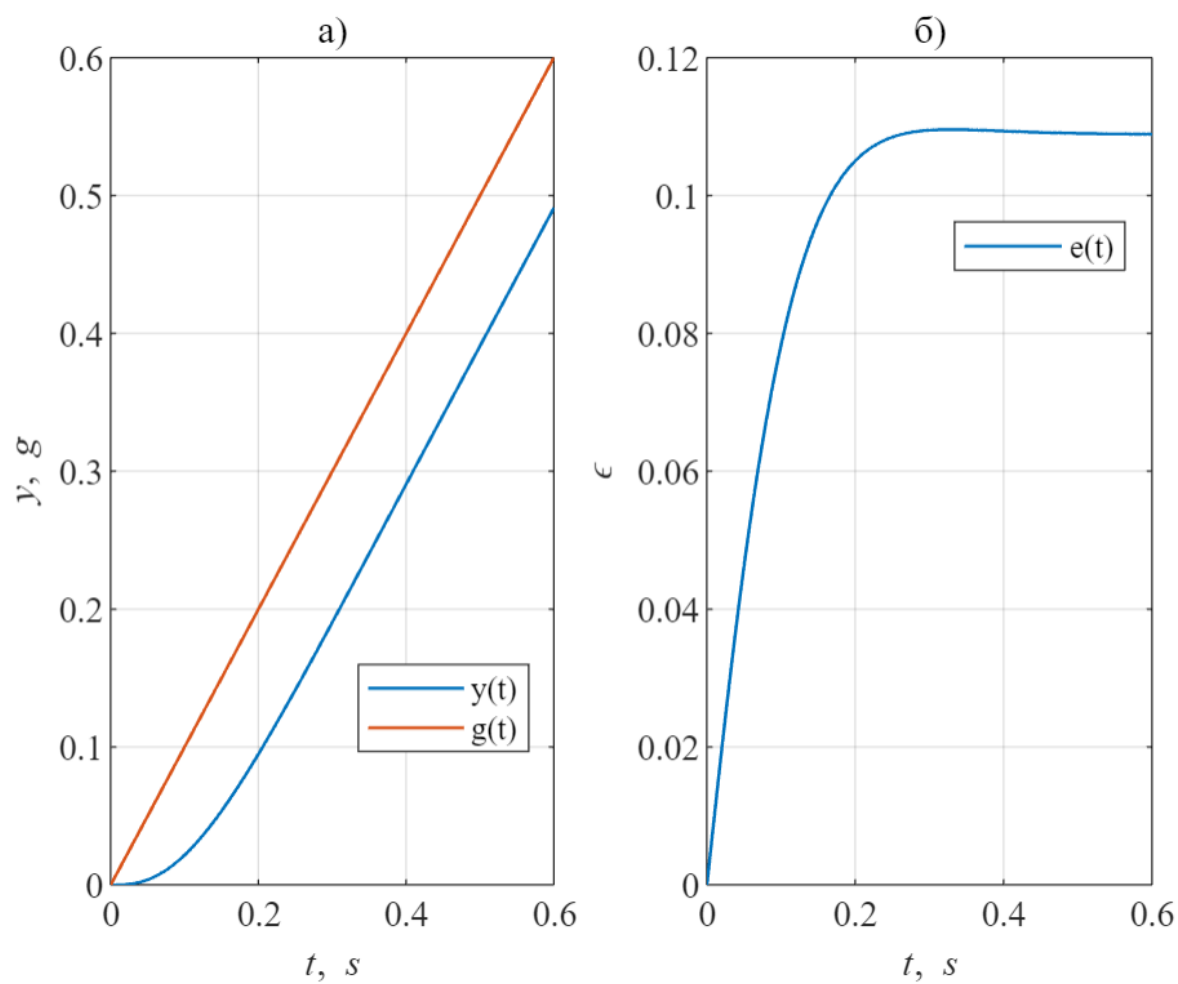


Рисунок 8. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) биномиального оптимума при линейном задающем воздействии.

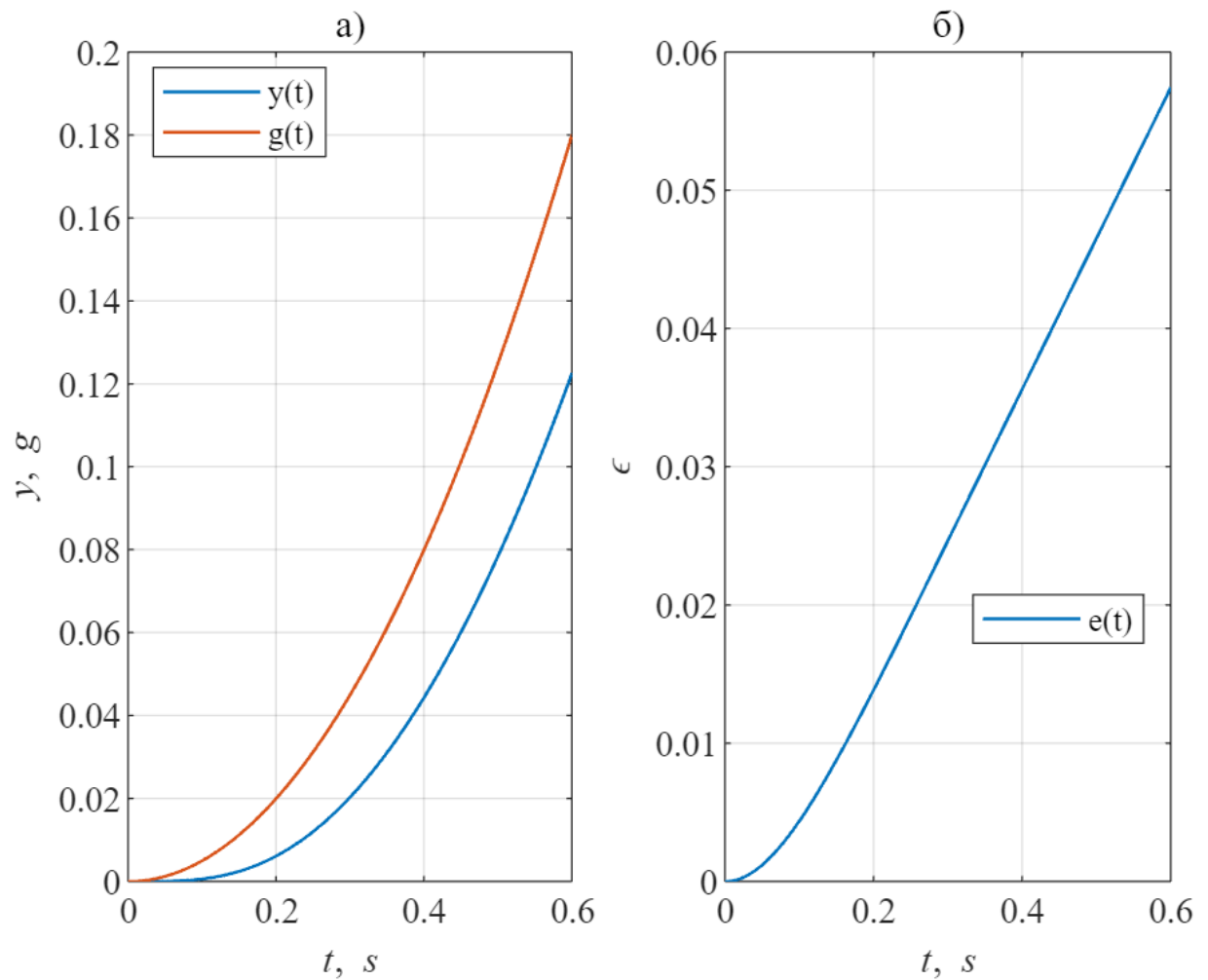


Рисунок 9. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) биномиального оптимума при квадратичном задающем воздействии.

Построим ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой и замкнутой систем и вычислим запас по амплитуде, запас по фазе и показатель колебательности.

Частотная характеристика разомкнутой системы:

$$W_{ol}(j\omega) = \frac{1}{3T_{\mu}j\omega(T_{\mu}j\omega + 1)}$$

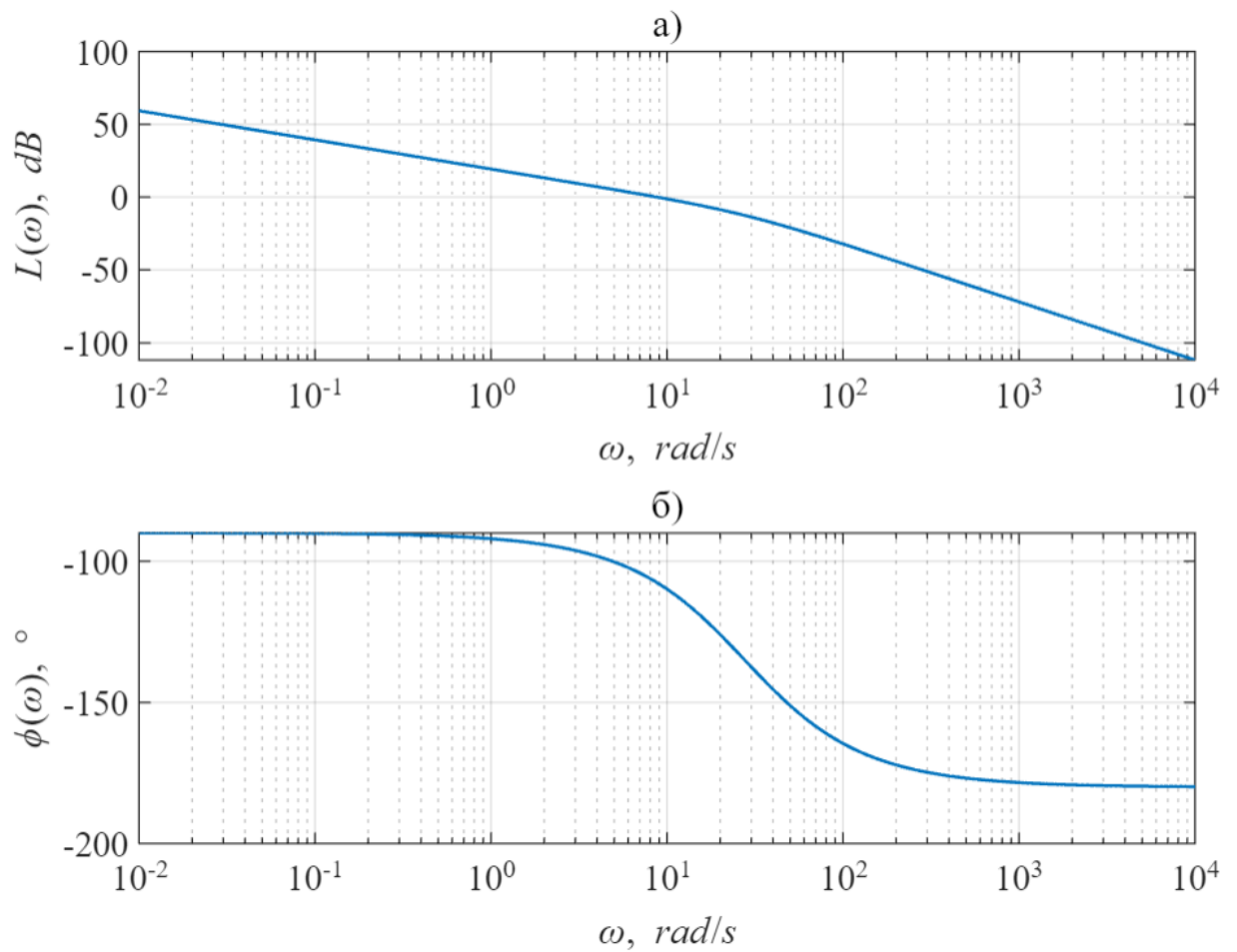


Рисунок 10. Графики ЛАЧХ (а) и ФЧХ (б) ПФ разомкнутой системы биномиального оптимума.

$$\phi = 72.458^\circ, \quad \omega_{\text{marg}} = 8.710 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \tau_{\text{max}} = 145.198 \text{ мс}$$

Запас по амплитуде бесконечен.

Частотная ПФ замкнутой системы:

$$W_{cl}(j\omega) = \frac{W_{ol}(j\omega)}{1 + W_{ol}(j\omega)}$$

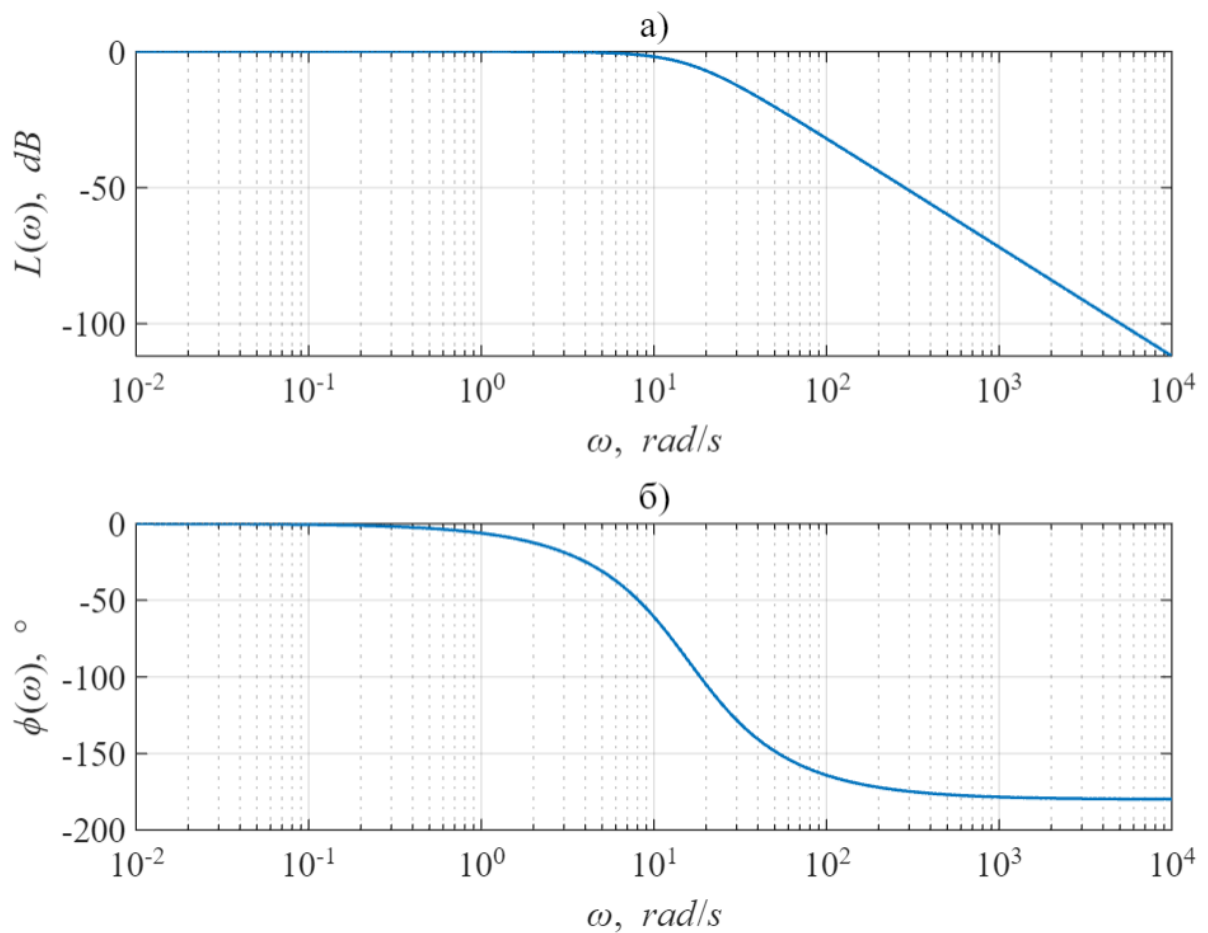


Рисунок 11. Графики ЛАЧХ (а) и ФЧХ (б) ПФ замкнутой системы биномиального оптимума.

$$M = 1$$

5. Технический оптимум

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{ol}(s) = \frac{1}{2T_{\mu}s \cdot (T_{\mu}s + 1)}$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_{cl}(s) = \frac{W_{ol}(s)}{1 + W_{ol}(s)} = \frac{1}{2T_{\mu}^2s^2 + 2T_{\mu}s + 1}$$

Переходный процесс при скачке задающего воздействия $u = 1$:

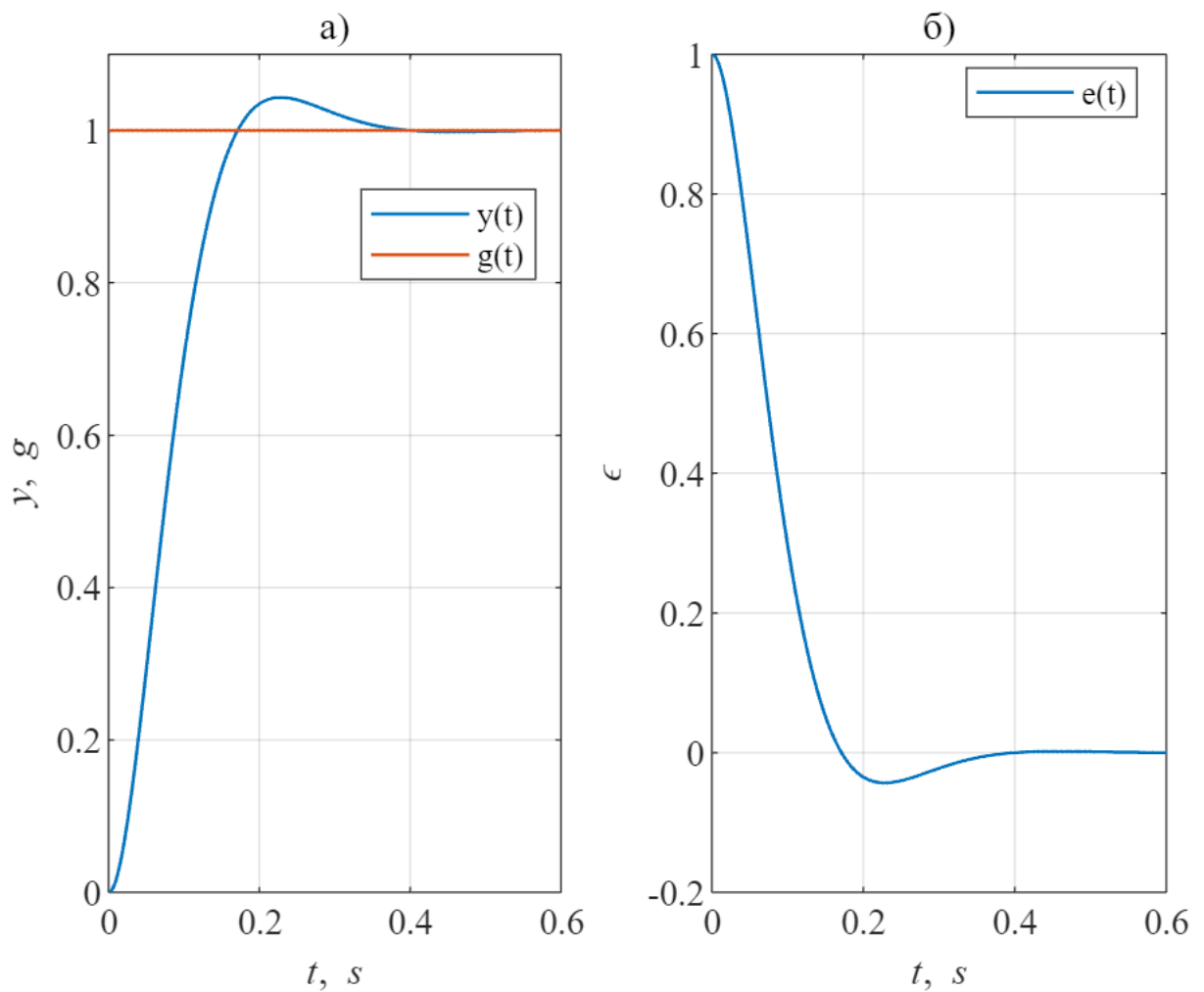


Рисунок 12. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) технического оптимума при постоянном задающем воздействии.

Рассчитаем параметры переходного процесса: время переходного процесса для входа в 5% зону – t_{p5} , время переходного процесса для входа в 2% зону – t_{p2} , перерегулирование – Δy .

$$t_{p5}/T_{\mu} = 4.122, \quad t_{p2}/T_{\mu} = 8.420, \quad \Delta y = 4.335\%$$

Приведем графики при обработке линейного $g = vt$ и квадратичного $g = at^2$ задающих воздействий:

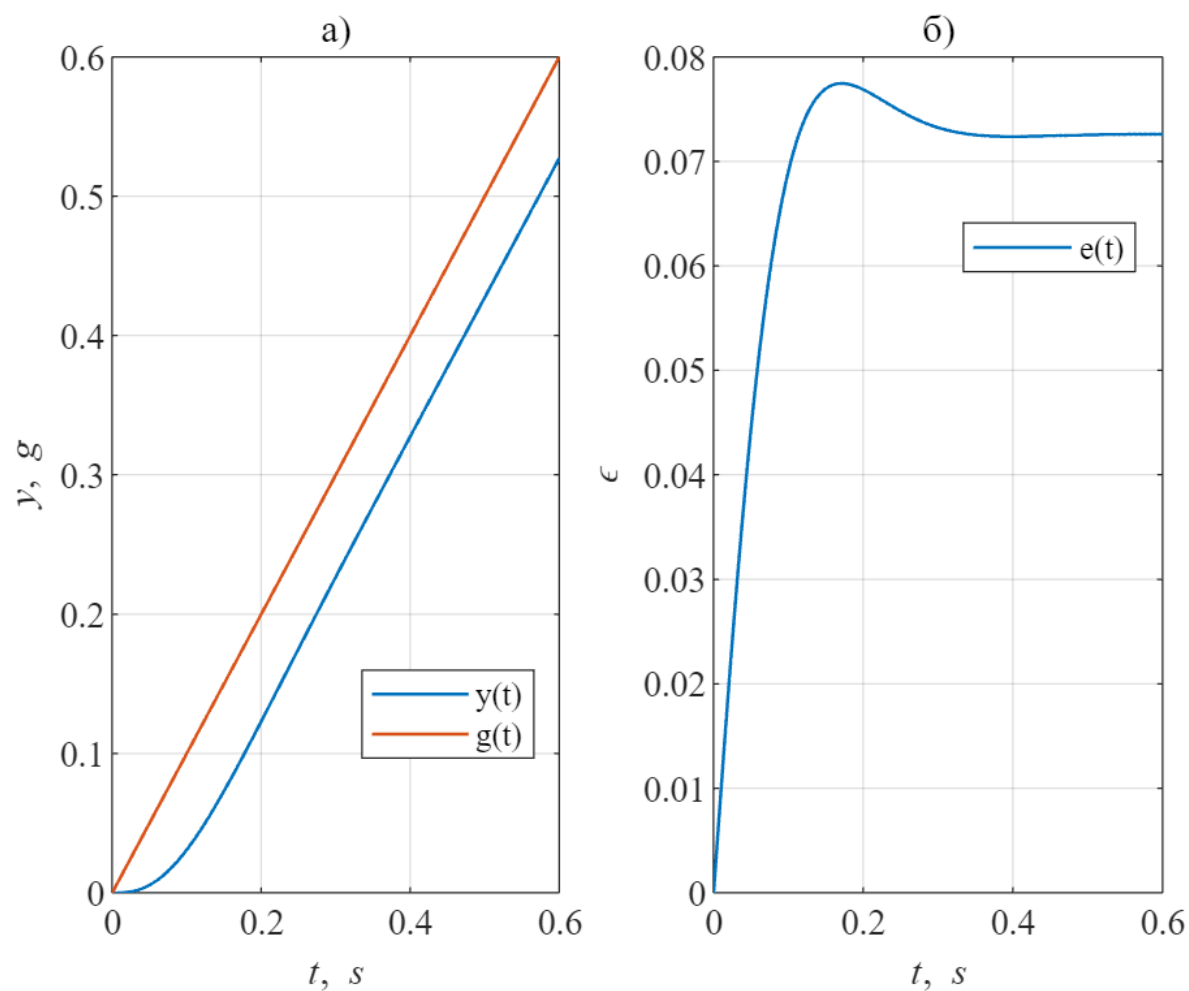


Рисунок 13. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) технического оптимума при линейном задающем воздействии.

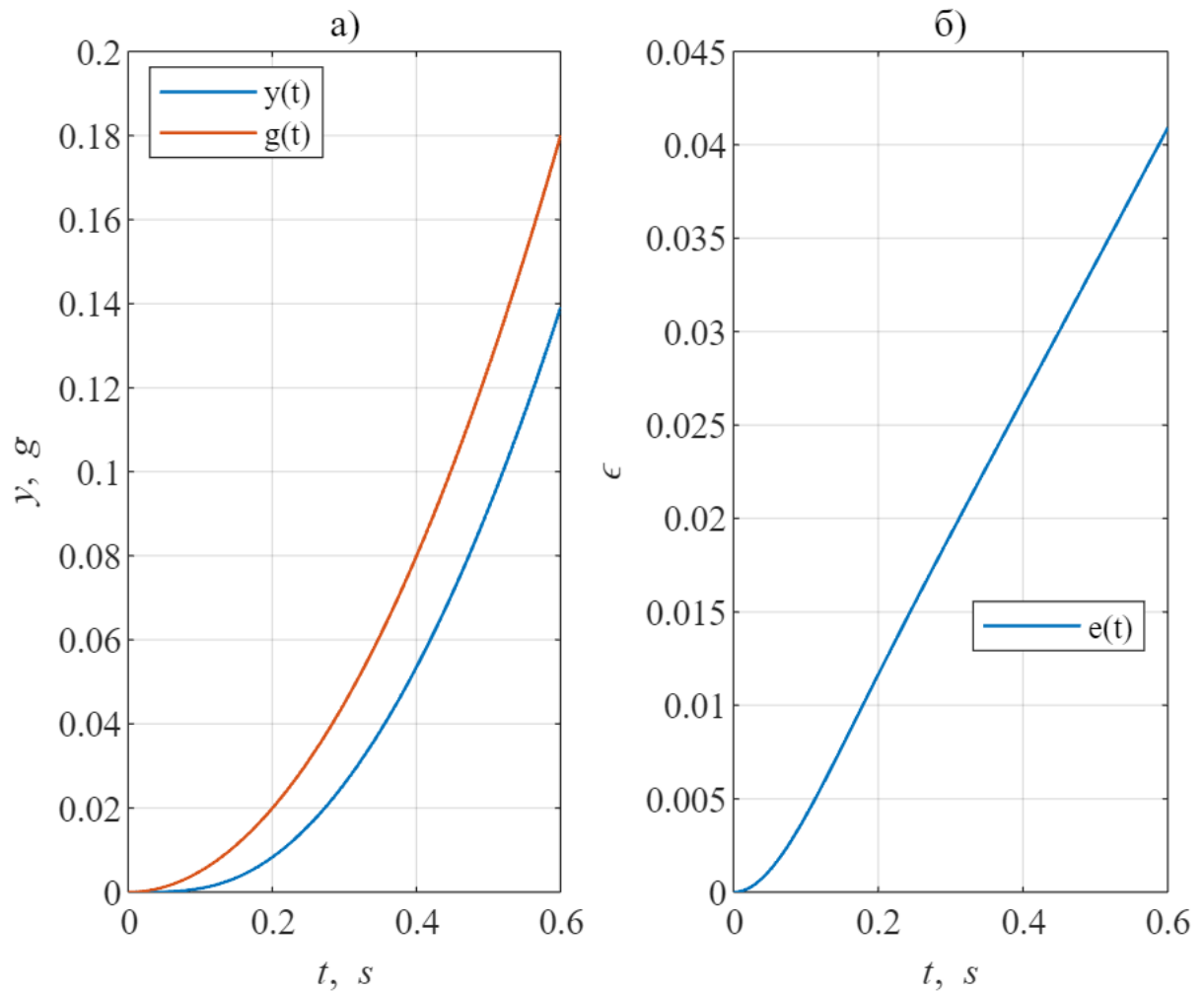


Рисунок 14. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) технического оптимума при квадратичном задающем воздействии.

Построим ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой и замкнутой систем и вычислим запас по амплитуде, запас по фазе и показатель колебательности.

Частотная характеристика разомкнутой системы:

$$W_{ol}(j\omega) = \frac{1}{2T_{\mu}j\omega(T_{\mu}j\omega + 1)}$$

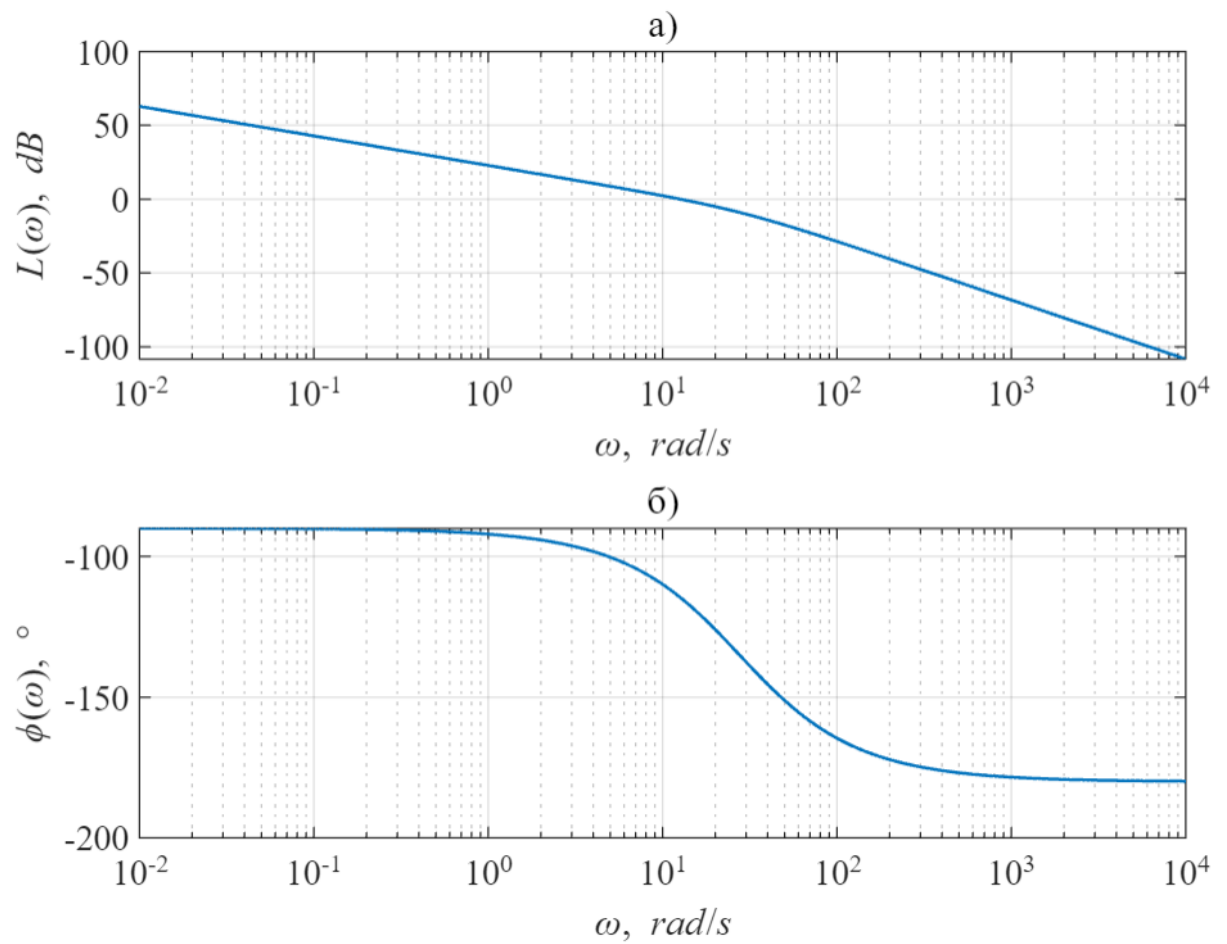


Рисунок 15. Графики ЛАЧХ (а) и ФЧХ (б) ПФ разомкнутой системы технического оптимума.

$$\phi = 65.443^\circ, \quad \omega_{\text{marg}} = 12.589 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \tau_{\text{max}} = 90.728 \text{ мс}$$

Запас по амплитуде бесконечен.

Частотная ПФ замкнутой системы:

$$W_{cl}(j\omega) = \frac{W_{ol}(j\omega)}{1 + W_{ol}(j\omega)}$$

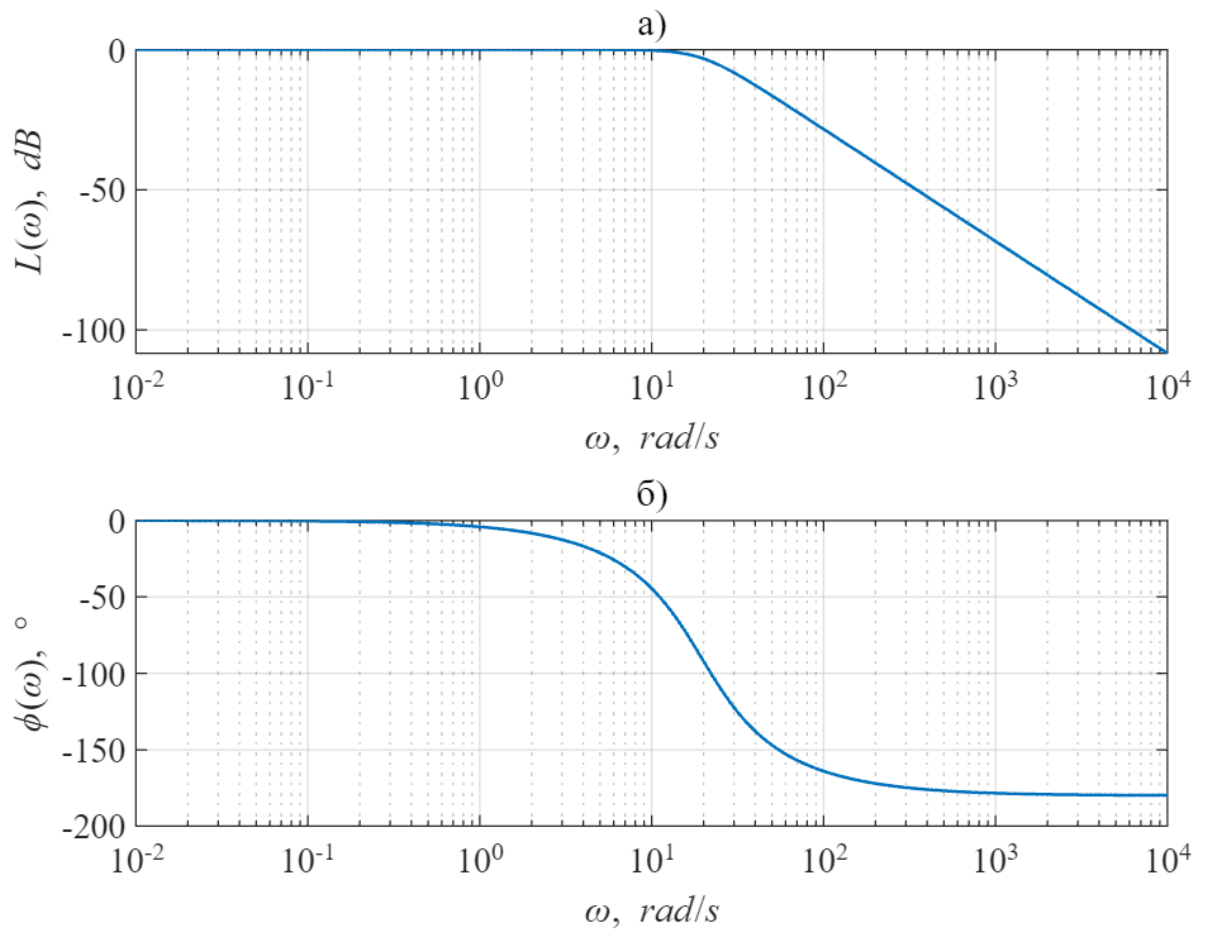


Рисунок 16. Графики ЛАЧХ (а) и ФЧХ (б) ПФ замкнутой системы технического оптимума.

$$M = 1$$

6. Симметричный оптимум

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{ol}(s) = \frac{4T_{\mu}s + 1}{8T_{\mu}^2s^2 \cdot (T_{\mu}s + 1)}$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_{cl}(s) = \frac{W_{ol}(s)}{1 + W_{ol}(s)} = \frac{4T_{\mu}s + 1}{8T_{\mu}^3s^3 + 8T_{\mu}^2s^2 + 4T_{\mu}s + 1}$$

Переходный процесс при скачке задающего воздействия $u = 1$:

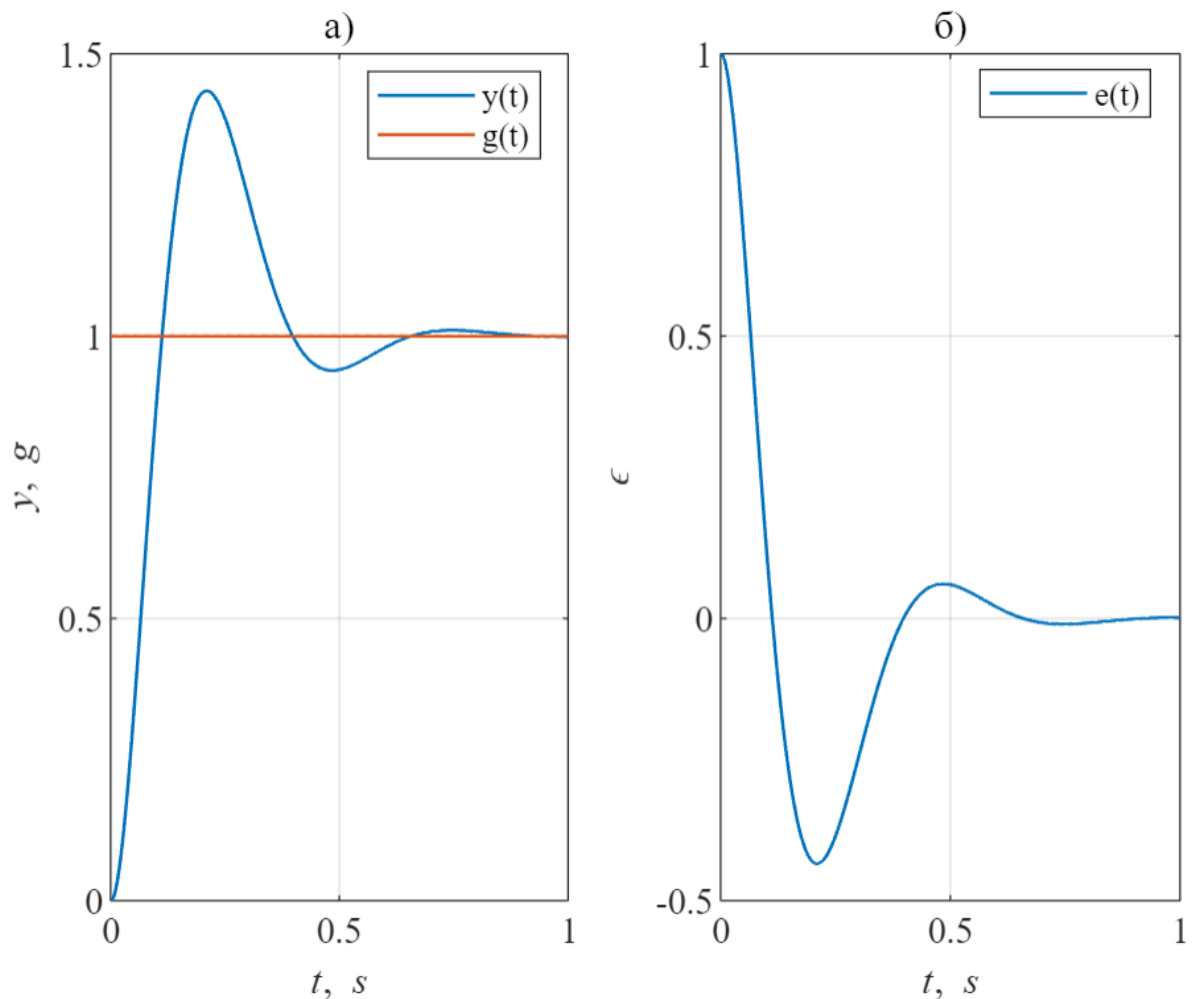


Рисунок 17. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) симметричного оптимума при постоянном задающем воздействии.

Рассчитаем параметры переходного процесса: время переходного процесса для входа в 5% зону – t_{p5} , время переходного процесса для входа в 2% зону – t_{p2} , перерегулирование – Δy .

$$t_{p5}/T_{\mu} = 14.564, \quad t_{p2}/T_{\mu} = 16.438, \quad \Delta y = 43.647\%$$

Приведем графики при обработке линейного $g = vt$ и квадратичного $g = at^2$ задающих воздействий:

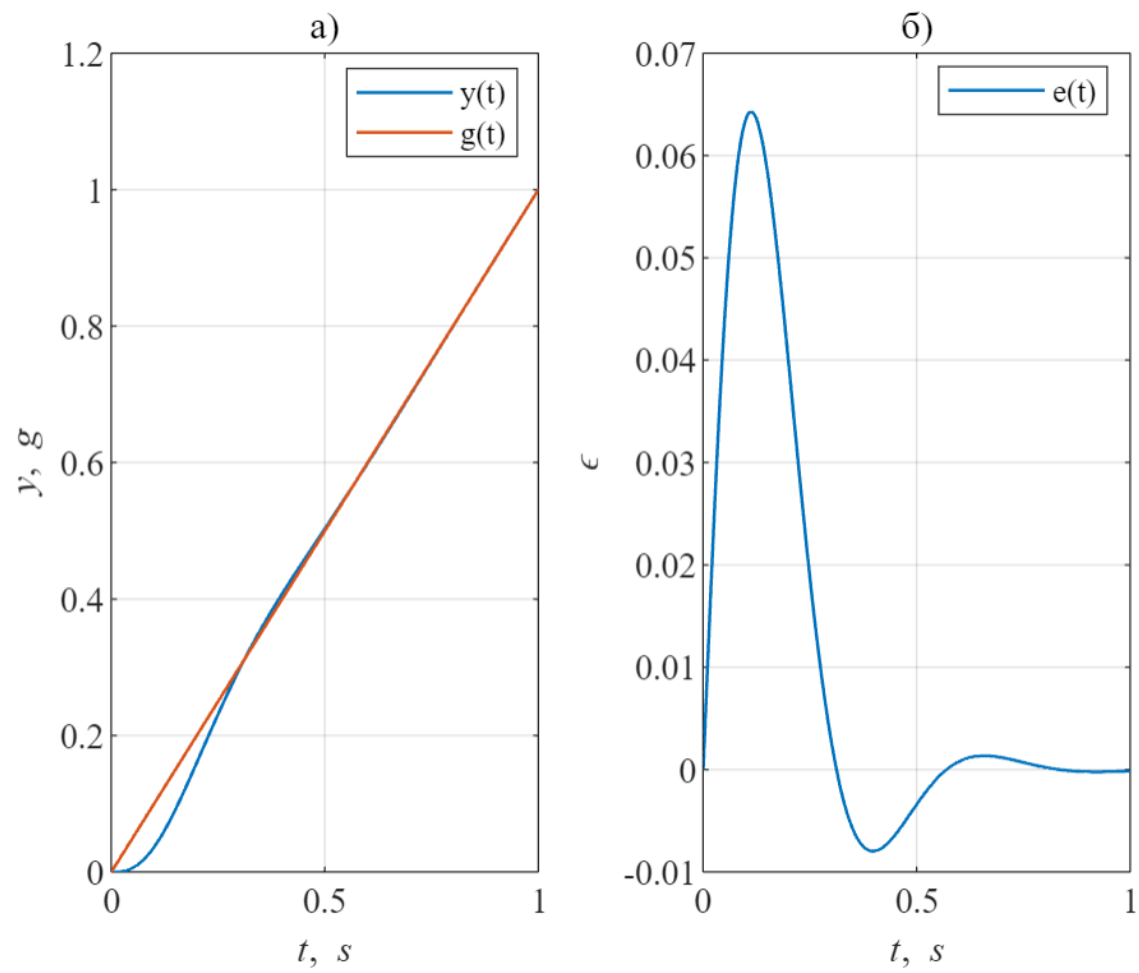


Рисунок 18. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) симметричного оптимума при линейном задающем воздействии.

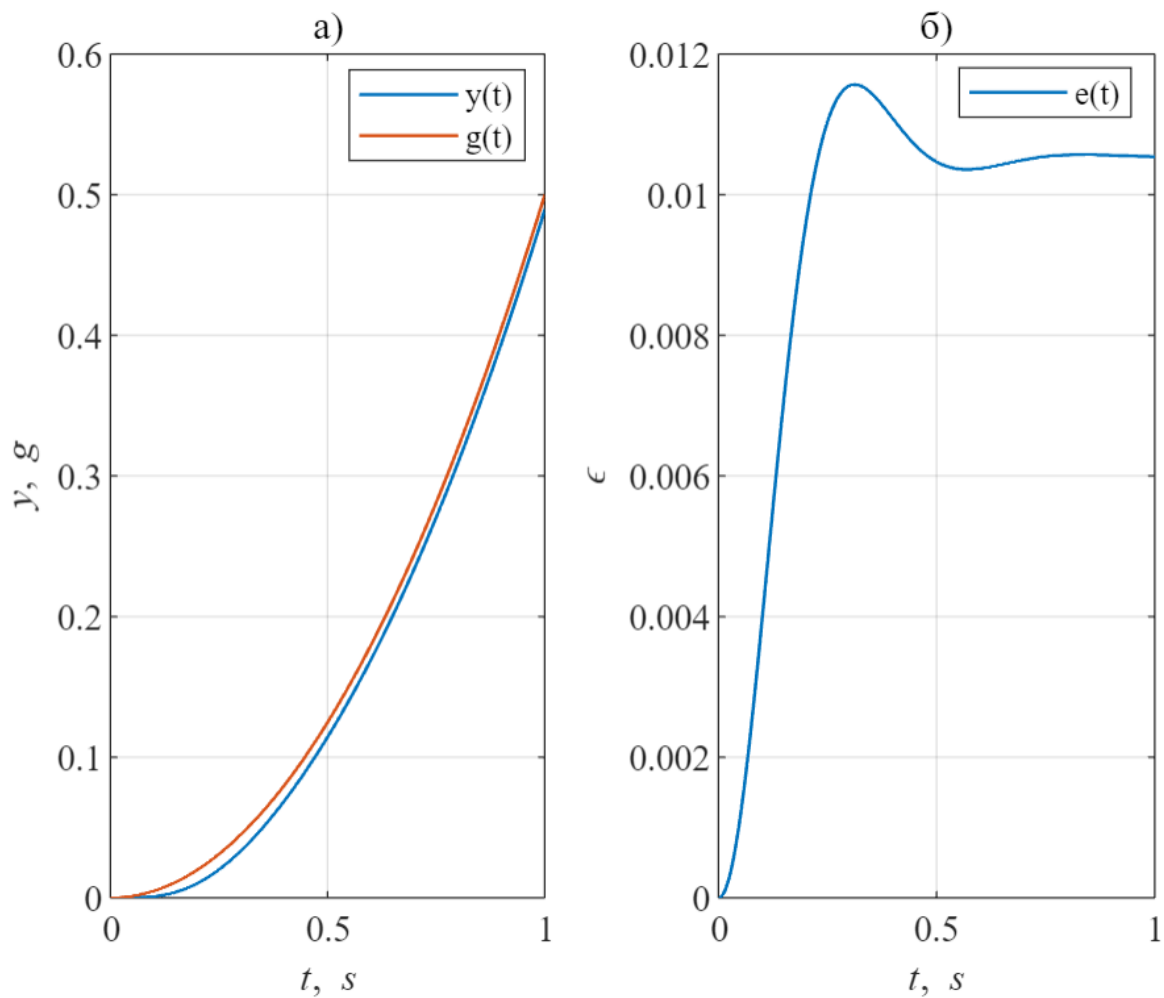


Рисунок 19. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) симметричного оптимума при квадратичном задающем воздействии.

Построим ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой и замкнутой систем и вычислим запас по амплитуде, запас по фазе и показатель колебательности.

Частотная характеристика разомкнутой системы:

$$W_{ol}(j\omega) = \frac{4T_{\mu}j\omega + 1}{8T_{\mu}^2(j\omega)^2 \cdot (T_{\mu}j\omega + 1)}$$

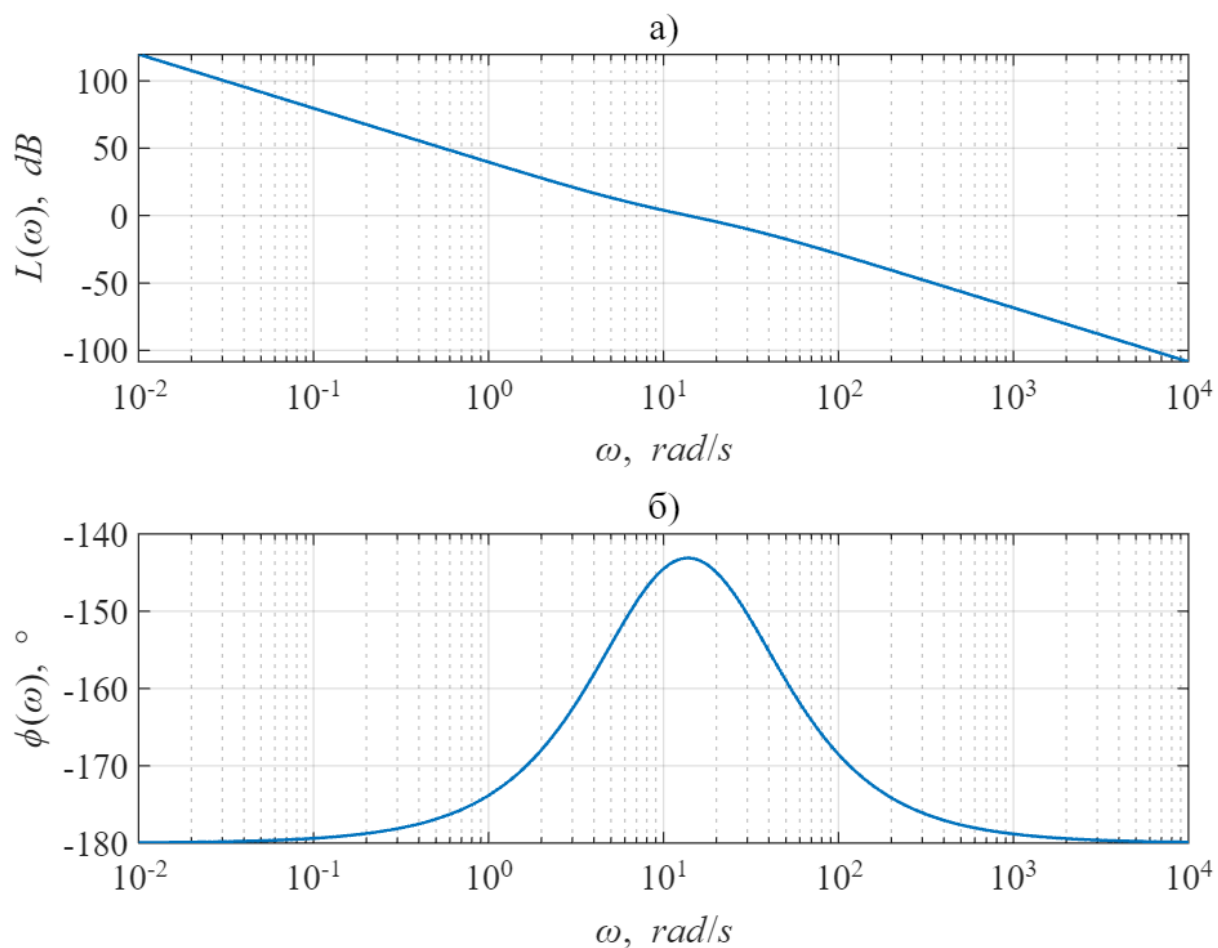


Рисунок 20. Графики ЛАЧХ (а) и ФЧХ (б) ПФ разомкнутой системы симметричного оптимума.

$$\phi = 36.870^\circ, \quad \omega_{\text{marg}} = 13.804 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \tau_{\text{max}} = 46.617 \text{ мс}$$

Запас по амплитуде бесконечен.

Частотная ПФ замкнутой системы:

$$W_{cl}(j\omega) = \frac{W_{ol}(j\omega)}{1 + W_{ol}(j\omega)}$$

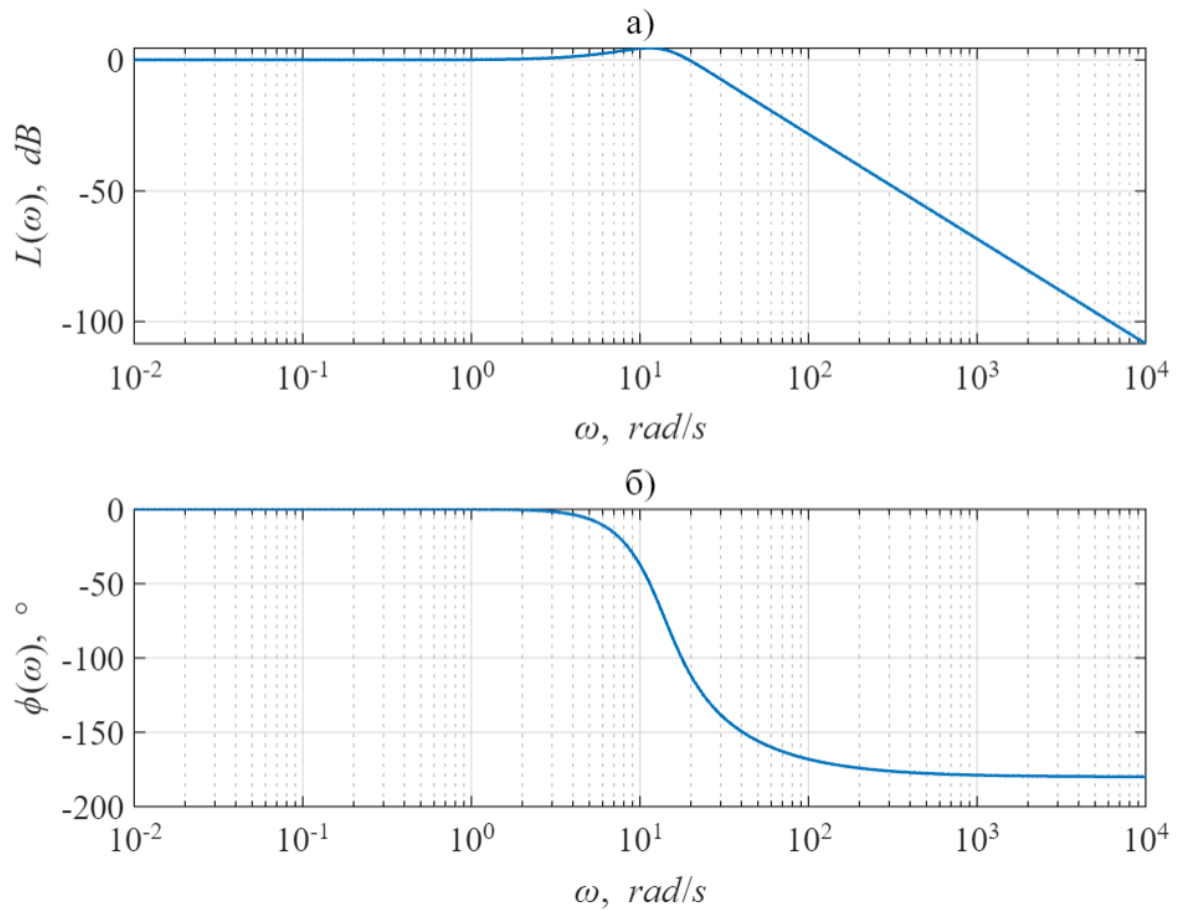


Рисунок 21. Графики ЛАЧХ (а) и ФЧХ (б) ПФ замкнутой системы симметричного оптимума.

$$M = 1.682$$

7. Система, настроенная на астатизм 3-го порядка

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{ol}(s) = \frac{(16T_{\mu}s + 1) \cdot (4T_{\mu}s + 1)}{128T_{\mu}^3s^3 \cdot (T_{\mu}s + 1)}$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_{cl}(s) = \frac{W_{ol}(s)}{1 + W_{ol}(s)} = \frac{64T_{\mu}^2s^2 + 20T_{\mu}s + 1}{128T_{\mu}^4s^4 + 128T_{\mu}^3s^3 + 64T_{\mu}^2s^2 + 20T_{\mu}s + 1}$$

Переходный процесс при скачке задающего воздействия $u = 1$:

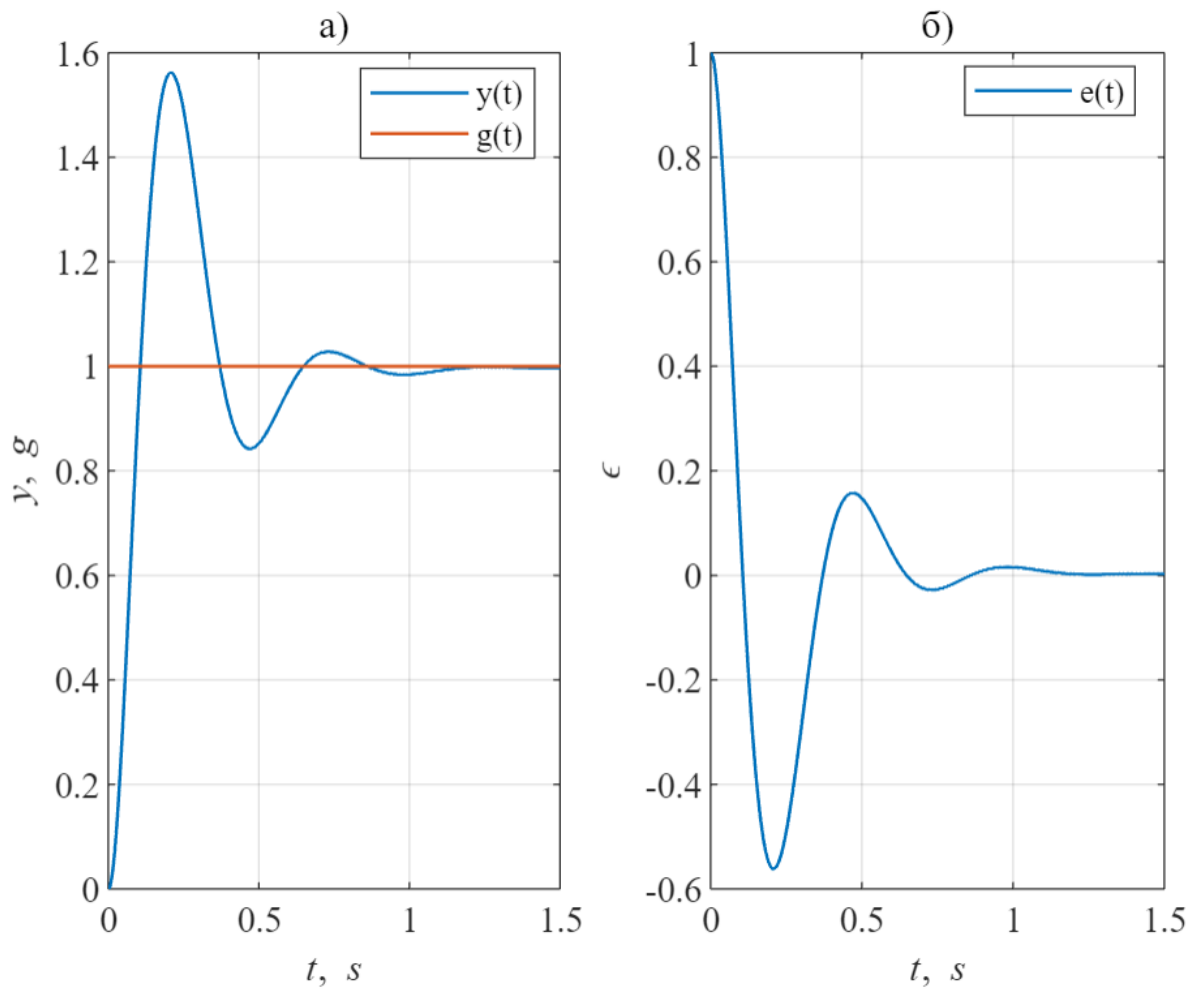


Рисунок 22. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) системы 3-го астатизма при постоянном задающем воздействии.

Рассчитаем параметры переходного процесса: время переходного процесса для входа в 5% зону – t_{p5} , время переходного процесса для входа в 2% зону – t_{p2} , перерегулирование – Δy .

$$t_{p5}/T_{\mu} = 16.2, \quad t_{p2}/T_{\mu} = 22.0, \quad \Delta y = 56.7\%$$

Приведем графики при обработке линейного $g = vt$ и квадратичного $g = at^2$ задающих воздействий:

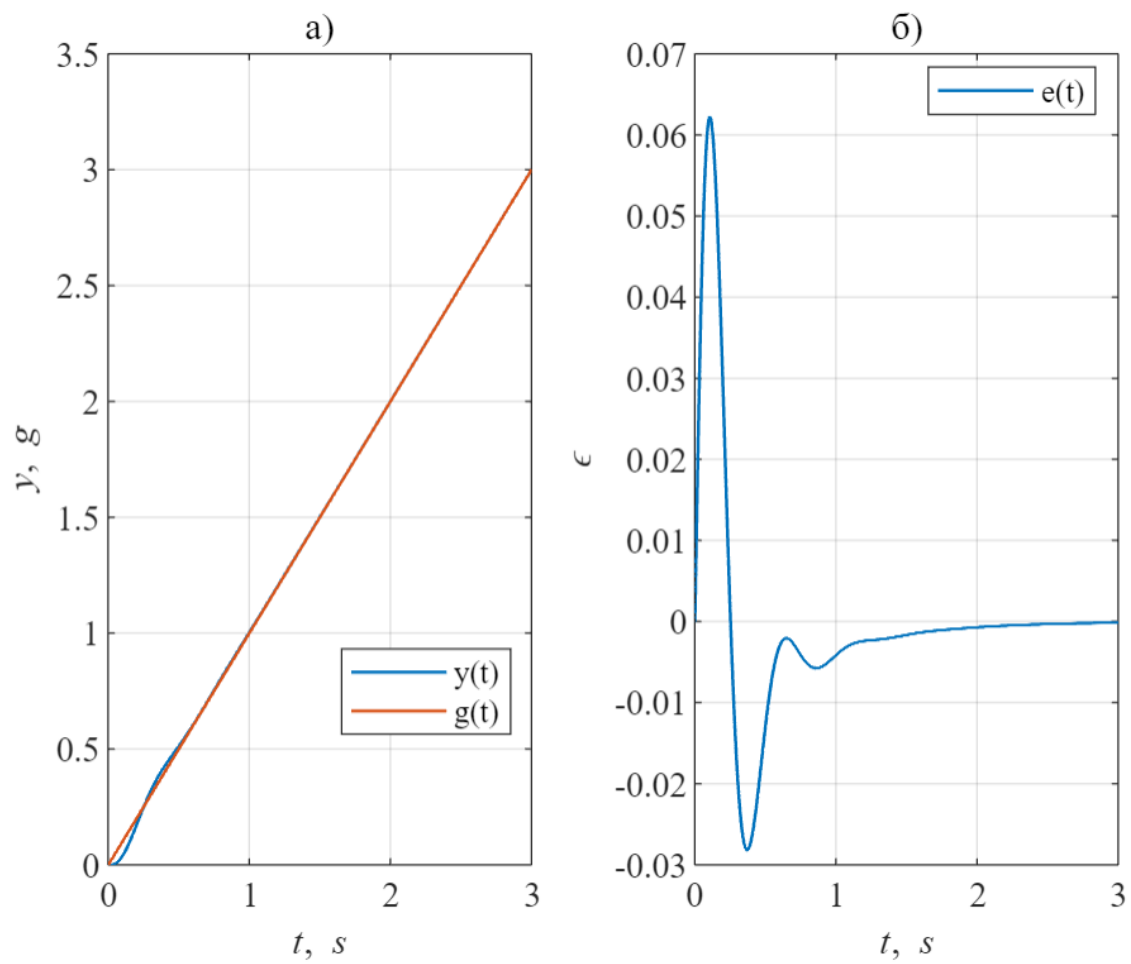


Рисунок 23. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) системы 3-го астатизма при линейном задающем воздействии.

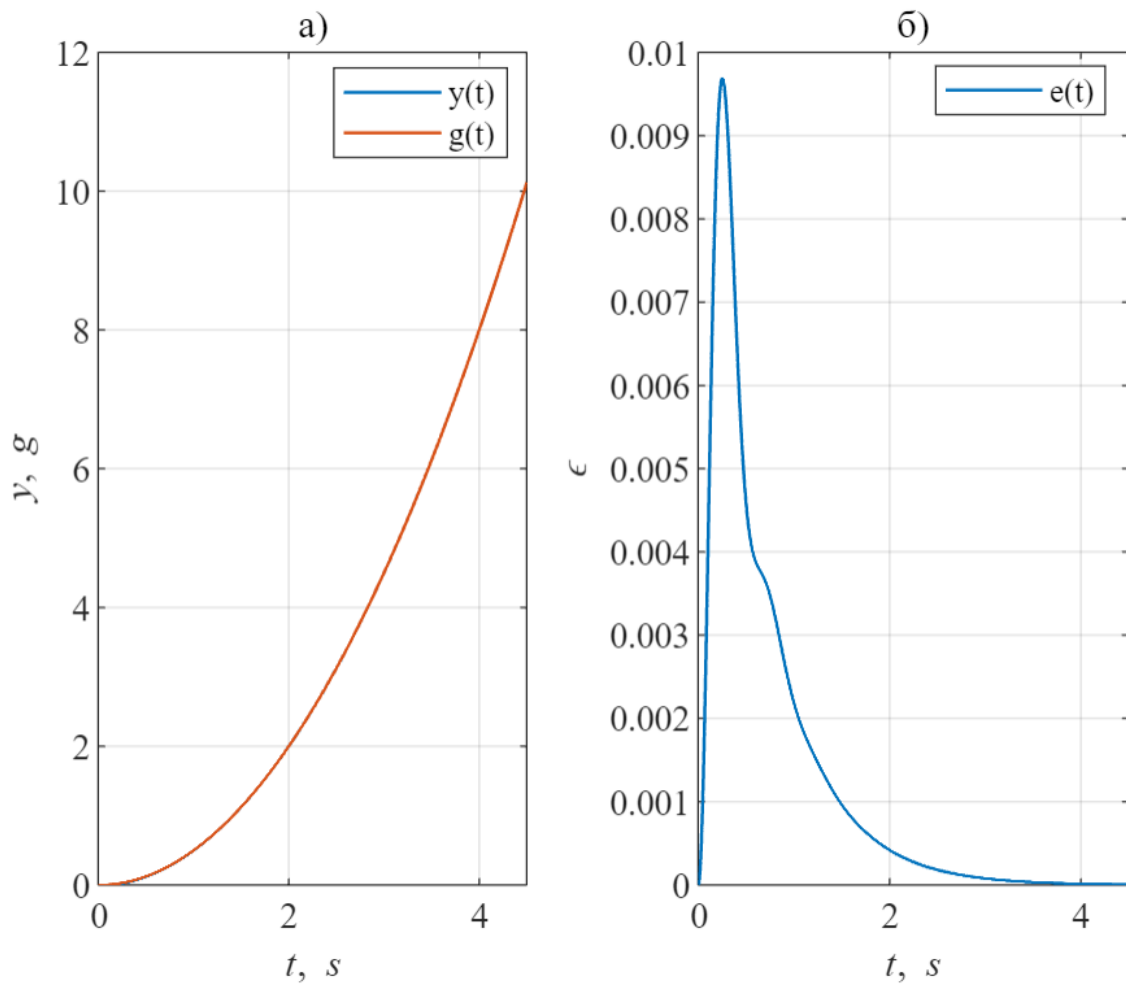


Рисунок 24. Графики переходного процесса (а) и ошибки (б) системы 3-го астатизма при квадратичном задающем воздействии.

Построим ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой и замкнутой систем и вычислим запас по амплитуде, запас по фазе и показатель колебательности.

Частотная характеристика разомкнутой системы:

$$W_{ol}(j\omega) = \frac{(16T_{\mu}j\omega + 1) \cdot (4T_{\mu}j\omega + 1)}{128T_{\mu}^3(j\omega)^3 \cdot (T_{\mu}j\omega + 1)}$$

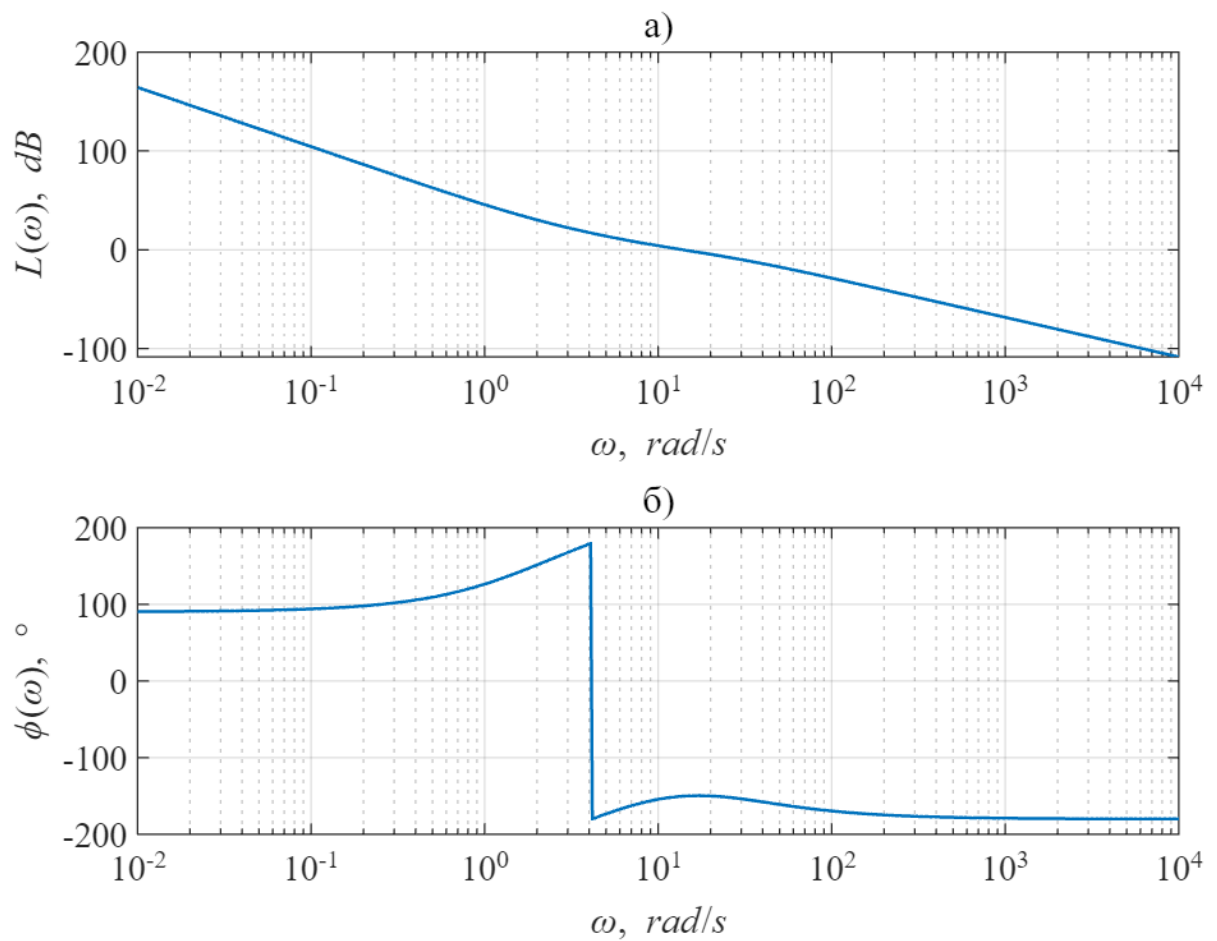


Рисунок 25. Графики ЛАЧХ (а) и ФЧХ (б) ПФ разомкнутой системы 3-го астатизма.

$$\phi = 29.8^\circ, \quad \omega_{\text{marg}} = 13.804 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \tau_{\text{max}} = 37.617 \text{ мс}$$

Запас по амплитуде:

$$L = 17.1 \text{ при частоте } 4.1 \text{ рад/с}$$

Тогда критический коэффициент усиления:

$$A = 10^{L/20} = 7.161$$

Частотная ПФ замкнутой системы:

$$W_{cl}(j\omega) = \frac{W_{ol}(j\omega)}{1 + W_{ol}(j\omega)}$$

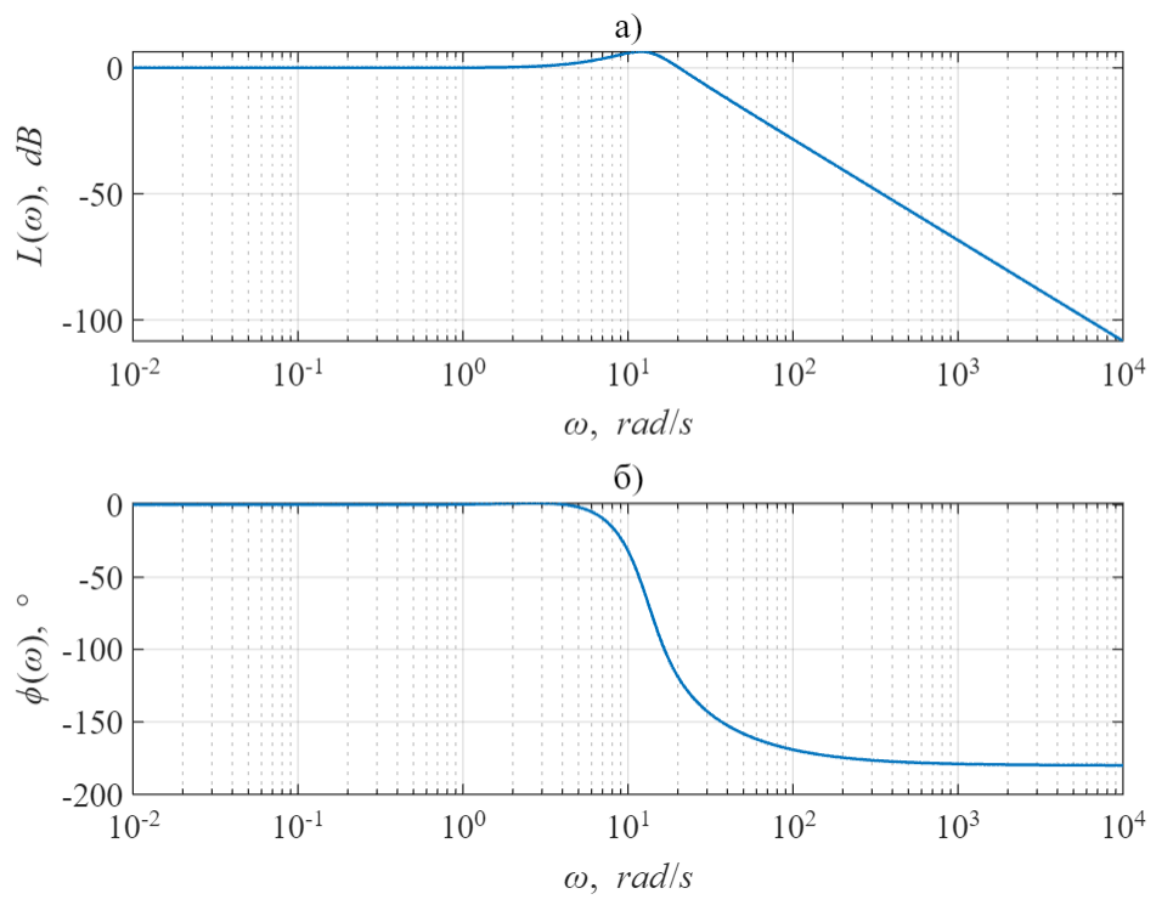


Рисунок 26. Графики ЛАЧХ (а) и ФЧХ (б) ПФ замкнутой системы 3-го астатизма.

$$M = 2.081$$

8. Сравнительные таблицы

Эталонная модель	t_{p5}/T_μ	t_{p2}/T_μ	$\Delta y, \%$
Линейный оптимум	2.97	3.87	0
Биномиальный оптимум	6.55	7.54	0.39
Технический оптимум	4.12	8.42	4.34
Симметричный оптимум	14.56	16.44	47.65
Система с астатизмом 3-го порядка	16.2	22.0	56.7

Таблица 1. Параметры переходных процессов исследуемых систем.

Эталонная модель	Статическая система	Астатизм 1-го порядка	Астатизм 2-го порядка	Астатизм 3-го порядка
Линейный оптимум		+		
Биномиальный оптимум		+		
Технический оптимум		+		
Симметричный оптимум			+	
Система с астатизмом 3-го порядка				+

Таблица 2. Характер астатизма исследуемых систем.

Эталонная модель	Показатель колебательности	Запас по амплитуде	Запас по фазе
Линейный оптимум	1	∞	90°
Биномиальный оптимум	1	∞	72.5°
Технический оптимум	1	∞	65.44°
Симметричный оптимум	1.68	∞	36.87°
Система с астатизмом 3-го порядка	2.08	7.16	29.8°

Таблица 3. Частотные характеристики исследуемых систем.

3. Выводы

В данной лабораторной работе изучались динамические характеристики эталонных моделей.

Эталонные модели систем были описаны соответствующими разомкнутыми передаточными функциями. По этой ПФ можно определить её динамический порядок, тем самым дав некоторую оценку «инерционности» системы. Так же на данном этапе можно определить порядок астатизма системы, он будет равен степени комплексной переменной s в знаменателе, при условии, что дробь $W(s) = \frac{num(s)}{den(s)}$ больше нельзя сократить. Иными словами, порядок астатизма равен количеству «чистых» интеграторов в системе.

Порядок астатизма характеризует способность системы выполнять слежение за задающими воздействиями. Например, система с астатизмом 1-го порядка может следить за постоянным входным сигналом с нулевой установившейся ошибкой, за линейно возрастающим входным сигналом с постоянной ошибкой и за квадратичным – с расходящейся ошибкой.

Данные выкладки следуют из следующего анализа:

- построим передаточную функцию замкнутой системы по ошибке

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{1}{1 + W_{ol}(s)} = \frac{s^p(\dots)}{(\dots)}$$

- проведем преобразование Лапласа над функцией сигнала слежения $g(t)$, получим вид

$$G(s) = \frac{c}{s^q}$$

- теперь можем представить образ Лапласа выходной переменной в виде

$$Y(s) = W_{g \rightarrow e}(s)G(s) = \frac{s^p(\dots)}{(\dots)} \frac{c}{s^q}$$

- используя теорему о конечном значении

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

можем определить способность системы следить за сигналом, то есть

$$\begin{cases} q = p + 1 \rightarrow e_{уст} = const \\ q < p + 1 \rightarrow e_{уст} = 0 \\ q > p + 1 \rightarrow e_{уст} = \infty \end{cases}$$

Стоит отметить, что данная теорема верно только если все полюса $sY(s)$ имеют строго отрицательную вещественную часть.

После расчетов замкнутой и разомкнутой ПФ было проведено моделирование при постоянном задающем сигнале и были рассчитаны прямые показатели качества: время переходного процесса в двух зонах и перерегулирование. Значения показателей представлены в Таблице 1. Можем заметить, что по мере увеличения динамического порядка представленных эталонных моделей систем, их показатели качества ухудшаются.

Далее, было проведено исследование частотных характеристик систем. Для этого строились ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой и замкнутой систем и находились частотные показатели качества: запасы по фазе и амплитуде и показатель колебательности. Данные по данным расчетам представлены в Таблице 3.

По результатам работы можно заключить, что линейный оптимум – самая простая модель системы, в ней отсутствует перерегулирование и высокое быстродействие. Такую модель можно использовать в системах, в которых для нас критично чтобы значение выходной переменной не превышало сигнала задания, который имеет вид постоянного значения, либо линейно растущей функции (однако в этом случае установившаяся ошибка будет зависеть от параметров модели).

Технический и биномиальный оптимумы, наоборот можно успешно использовать в системах, в которых допустимо перерегулирование. Данные

оптимумы могут компенсировать некоторые линейные от времени функции в отличие от линейного оптимума. Биномиальный оптимум имеет перерегулирование меньше относительно технического, более устойчив на запас по фазе, однако быстродействие у него меньше технического. Также отличие технического от биномиального в том, что у технического оптимума нет выхода из 5% зоны, а следовательно время переходного процесса в данной зоне существенно больше, чем у биномиального оптимума.

Симметричный оптимум и модель с 3 порядком астатизма имеют соответственно 2 и 3 порядки астатизма и могут следить за соответствующими сигналами.