НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

# Моделирование динамических систем
# Лабораторная работа №2
# Устойчивость нелинейных систем

Вариант 2

Выполнил студент:
Кирбаба Д.Д. R3338

Преподаватель:
Семенов Д.М.

г. Санкт-Петербург
2023

# Задание 1

Дана следующая нелинейная система:

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = -x - 2y - \frac{y}{|y|+1} \end{cases}$$

Необходимо найти все точки равновесия системы, линеаризовать систему около точек равновесия и исследовать устойчивость линеаризованной системы, построить функцию Ляпунова и доказать глобальную устойчивость нелинейной системы, отобразить графики линейной (линеаризованной) и нелинейной систем.

Для поиска точек равновесия системы, необходимо приравнять левую часть (производные) к нулю и решить систему:

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -x - 2y - \frac{y}{|y|+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{3} \\ -\frac{y}{3} - 2y - \frac{y}{|y|+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Итого, имеет единственную точку равновесия $(x = 0,\ y = 0)$.

Линеаризуем нашу систему около положения равновесия, то есть сконструируем систему $\dot{\Delta} = A\Delta$, где $\Delta = x - a = x$. В данной записи $x$ - двумерный вектор состояний системы, а $A$ - матрица частных производных.

Составим матрицу Якоби системы:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1(x,\ y)}{\delta x} & \frac{\delta f_1(x,\ y)}{\delta y} \\ \frac{\delta f_2(x,\ y)}{\delta x} & \frac{\delta f_2(x,\ y)}{\delta y} \end{bmatrix}_{x=a} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Теперь исследуем линеаризованную систему на устойчивость (анализом собственных чисел матрицы $A$):

$$\lambda_1 = -3 - i,\ \lambda_2 = -3 + i$$

Так как значение $\max Re(\lambda(A)) = -3 < 0$, то по соответствующей теореме положения равновесия $(x = 0,\ y = 0)$ локально асимптотически устойчиво. Положение равновесия в данном случае имеет вид устойчивого фокуса. А это значит, что и исходная нелинейная система локально устойчива в данном положении.

Докажем глобальную устойчивость нелинейной системы, для этого сформируем функцию Ляпунова:

$$V(x,\ y) = x^2 + y^2,\ V(x,\ y) > 0,\ V(0,\ 0) = 0$$

$$\dot{V}(x,\ y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(-3x + y) + 2y(-x - 2y - \frac{y}{|y| + 1})$$

$$= -6x^2 - 4y^2 - \frac{2y^2}{|y| + 1} < 0,\ \forall (x,\ y) \in R^2 \setminus \{0\}$$

Исходя из этих вычислений, следует, что для введенной функции Ляпунова $V(x,\ y)$ и исследуемой нелинейной системы выполняются условия теоремы об асимптотической устойчивости, а значит, нулевое решение системы глобально асимптотически устойчиво.

Предоставим графики компонент состояния линеаризованной и нелинейной систем:

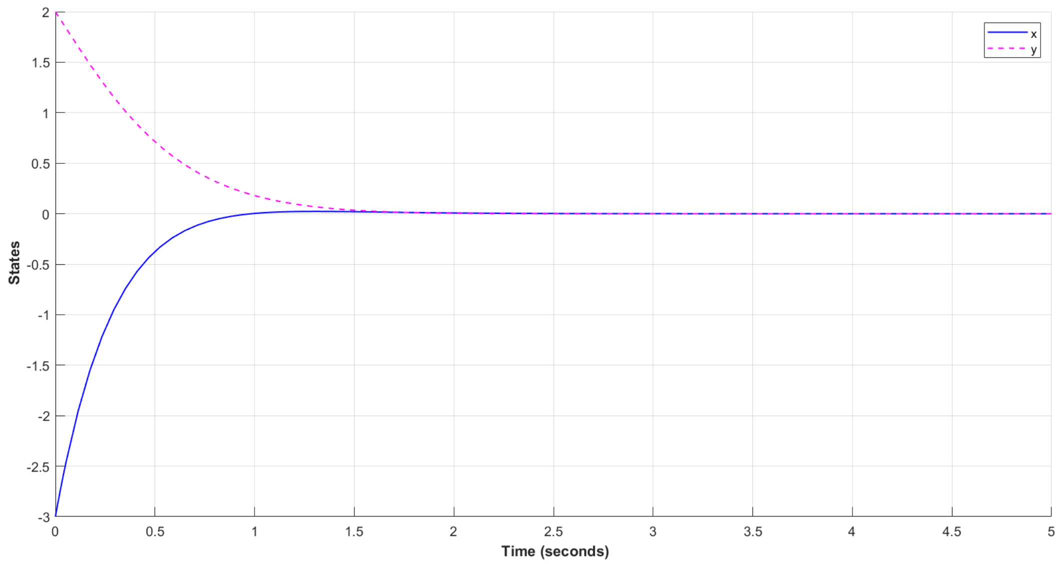


Рис. 1: компоненты вектора состояний линеаризованной системы

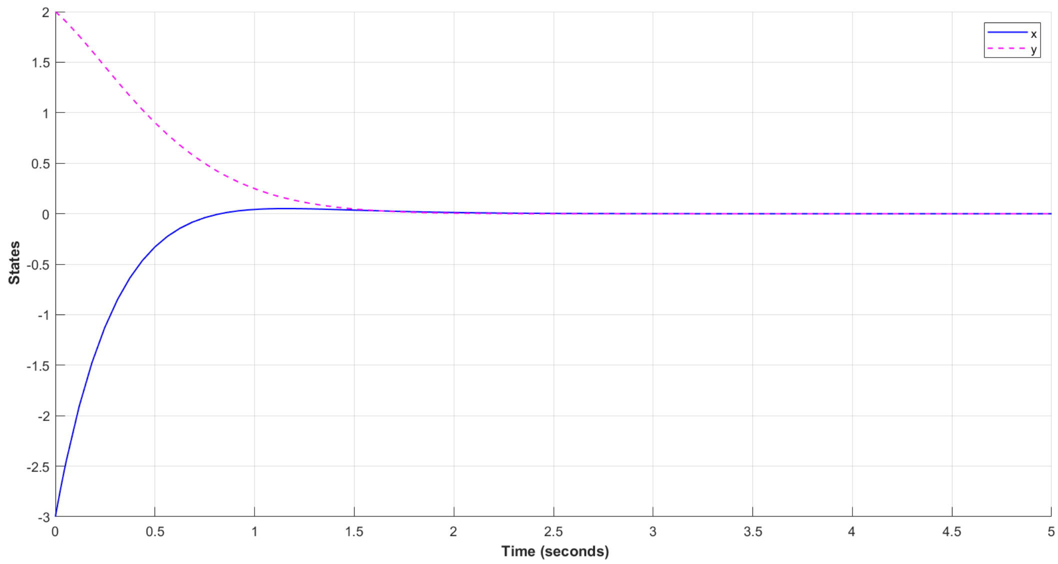


Рис. 2: компоненты вектора состояний исходной нелинейной системы

Как видно, обе системы устойчивы, что подтверждает вычисления и анализ, проведенный выше.

# Задание 2

Дана следующая нелинейная система:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi, \ \ \sigma = c^T x, \\ \xi = \varphi(\sigma, t), \end{cases}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \xi = \sin(\sigma)$$

Необходимо доказать экспоненциальную устойчивость системы, используя круговой критерий.

**"Секторное условие"**

$$\mu_1 \leq \frac{\sin\sigma}{\sigma} \leq \mu_2, \ \ \sigma \neq 0, \ \ \forall t \in (0, \infty)$$

$$\mu_1\sigma \leq \sin\sigma \leq \mu_2\sigma \Rightarrow_{derivative} \Rightarrow \mu_1 \leq \cos\sigma \leq \mu_2$$

$$\mu_1 = -1, \ \ \mu_2 = 1$$

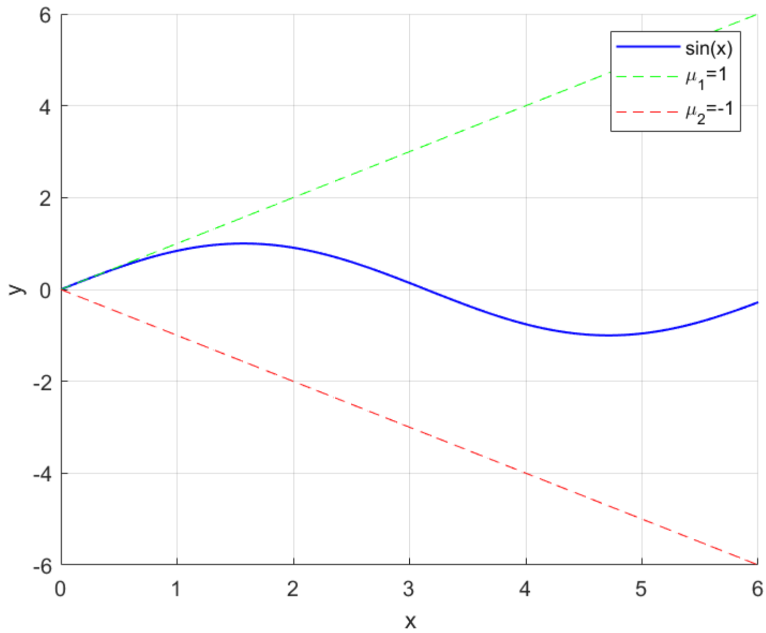


Рис. 3: круговой критерий

Из рисунка выше следует, что "секторное условие"выполнено.

**Проверка мнимых собственных значений**

Вычислим собственные значения матрицы $A$:

$$\lambda_1 = -2 - i,\ \lambda_2 = -2 + i$$

Матрица $A$ не имеет чисто мнимых собственных значений $\Rightarrow$ условие выполнено.

**Асимптотическая устойчивость линейной системы**

Асимптотическая устойчивость системы при $\xi = \mu_0 \sigma$. Поскольку значение $\mu_0$ выбирается из интервала $[\mu_1, \mu_2]$, то можно выбрать $\mu_0 = 0$. Тогда исследуемая система будет иметь вид $\dot{x} = Ax$. Поскольку собственные числа матрицы $A$ уже известны и они имеют отрицательную вещественную часть, то $\Rightarrow$ линейная система асимптотически устойчива, а значит, условие выполнено.

**"Частотное условие"**

Вычислим передаточную функцию системы:

$$W(\lambda) = c^T(A - \lambda I)^{-1}b = -\frac{1}{\lambda^2 + 4\lambda + 5}$$

Возьмем $\lambda = i\omega$ и проверим следующее неравенство:

$$Re\{[1 + \mu_1 W(i\omega)][1 + \mu_2 W(i\omega)]^*\} > 0,\ \omega \in [-\infty,\ +\infty]$$

Так как $\mu_1 = 0 \mu_2 = 1$, то

$$Re\{[1 + W(i\omega)]^*\} > 0,\ \omega \in [-\infty,\ +\infty] \Rightarrow$$

$$Re\{[1 + W(i\omega)]^*\} = Re\{[1 - \frac{1}{-\omega^2 + 4i\omega + 5}]^*\} = Re\{[\frac{\omega^2 - 4i\omega - 4}{\omega^2 - 4i\omega - 5}]^*\}$$

$$= Re\{[\frac{(\omega^2 - 4i\omega - 4)(\omega^2 + 4i\omega - 5)}{(\omega^2 - 5)^2 + 16\omega^2}]^*\} = Re\{[\frac{\omega^4 + 7\omega^2 + i4\omega + 20}{(\omega^2 - 5)^2 + 16\omega^2}]^*\} = \frac{\omega^4 + 7\omega^2 + 20}{(\omega^2 - 5)^2 + 16\omega^2} > 0$$

Числитель и знаменатель полученной дроби положительны при $\forall \omega$.

Все условия теоремы выполнены, следовательно, система экспоненциально устойчива.

# Задание 3

Дана следующая нелинейная система:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi,\ \sigma = c^* x, \\ \xi = \varphi(\sigma), \end{cases}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \xi = \frac{\sigma^3}{3}$$

Необходимо доказать асимптотическую устойчивость системы, используя критерий Попова.

**"Секторное условие"**

$$0 \le \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \le \mu_0 \le +\infty,\ \sigma \ne 0,\ \forall t \in (0, \infty)$$

$$0 \le \frac{\sigma^2}{3} \le \mu_0 \le +\infty \Rightarrow \mu_0 = \infty$$

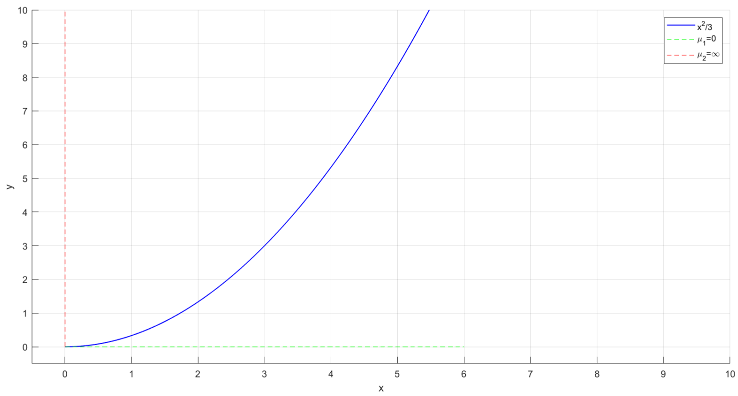


Рис. 4: круговой критерий

Из рисунка выше следует, что "секторное условие"выполнено.

**Устойчивость матрицы $A$**

$$det\{\lambda I - A\} = \lambda^2 - 4\lambda + 2 \Rightarrow \lambda_1 = -2 + \sqrt{2},\ \lambda_2 = -2 - \sqrt{2}$$

Матрица $A$ устойчива.

**"Частотное условие"**

Найдем передаточную функцию:

$$W(\lambda) = c^T(A - \lambda I)^{-1}b = \frac{1}{\lambda^2 + 4\lambda + 2}$$

Возьмем $\lambda = i\omega$ и проверим выполнение неравенства:

$$\mu_0^{-1} + Re[(1 + i\omega\nu)W(i\omega)] > 0,\ \forall\omega \in [0, +\infty].$$

Так как $\mu_0 = +\infty$, то $mu_0^{-1} = 0$. Получаем следующее неравенство:

$$Re[(1 + i\omega\nu)W(i\omega)] = Re[(1 + i\omega\nu)\frac{1}{-\omega^2 + i4\omega + 2}] = Re[\frac{1 + i\omega\nu}{-\omega^2 + i4\omega + 2}]$$

$$= Re[\frac{2 + 2i\omega\nu - \omega^2 - i\omega^3\nu - i4\omega + 4\omega^2\nu}{(2 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}] = \frac{4\omega^2\nu - \omega^2 + 2}{(2 - \omega^2)^2 + 16\omega^2} = \frac{\omega^2(4\nu - 1) + 2}{(2 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}$$

При $\nu \ge \frac{1}{4}$ числитель и знаменатель полученной дроби положительны при $\forall\omega$.

Все условия теоремы выполнены, следовательно, система асимптотически устойчива.

# Выводы

В данной лабораторной работе исследовались нелинейные системы и способы оценки их устойчивости. В начале работы была проведена оценка устойчивости с помощью линеаризации и метода функций Ляпунова. Результаты расчетов были подтверждены графиками моделирования систем. В итоге, нелинейные системы можно успешно линеаризовывать около положения равновесия для анализа устойчивости в данной области.
Для доказательства экспоненциальной или асимптотической устойчивости использовались круговой критерий и критерий Попова соответственно.