НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Моделирование динамических систем
Лабораторная работа №4
Дискретные системы

Вариант 2

Выполнил студент:
Кирбаба Д.Д. R3338

Преподаватель:
Семенов Д.М.

г. Санкт-Петербург
2023

Задание 1

Дана каноническая модель дискретной системы в пространстве состояний:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + bu_k, \\ y_k = Cx_k, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^3,\ u_k \in \mathbb{R},\ y_k \in \mathbb{R}$. Начальные данные - нулевые.
Перейти к функциональной модели «вход-выход» и построить передаточную функцию системы.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.2 & 0.1 & -0.5 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем характеристический многочлен:

$$a(\lambda) = \det\{\lambda I - A\} = \lambda^3 + 0.5\lambda^2 - 0.1\lambda + 0.2$$

$$a_{(1)}(\lambda) = (a(\lambda) - a(0))\lambda^{-1} = \lambda^2 + 0.5\lambda - 0.1$$
$$a_{(2)}(\lambda) = (a_{(1)}(\lambda) - a_{(1)}(0))\lambda^{-1} = \lambda + 0.5$$
$$a_{(3)}(\lambda) = (a_{(2)}(\lambda) - a_{(2)}(0))\lambda^{-1} = 1$$

Итого, форма "вход-выход":

$$a(\nabla)y_k = Ca_{(1)}(A)Bu_k + Ca_{(2)}(A)Bu_{k+1} + Ca_{(3)}(A)Bu_{k+2}$$

$$y_{k+3} + 0.5y_{k+2} - 0.1y_{k+1} + 0.2y_k = -0.21u_k + 0.45u_{k+1} + 0.6u_{k+2}$$

Задание 2

Дана функциональная модель дискретной системы в форме "вход-выход где $y_k \in \mathbb{R},\ u_k \in \mathbb{R}$. Начальные данные - нулевые.
Требуется перейти к канонической модели в пространстве состояний.

$$y_{k+3} + 0.4y_{k+2} + 0.2y_{k+1} - 0.2y_k = 0.2u_{k+2} + 0.06u_{k+1} + 0.08u_k$$

Для перехода от функциональной формы «вход-выход» к канонической форме пространства состояний достаточно просто представить систему в следующем виде:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

Найдем матрицы $A,\ B,\ C$:

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.06 \\ 0.08 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Итоговый вид системы:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.06 \\ 0.08 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k \end{cases}$$

Задание 3

Дана передаточная функция устойчивой непрерывной системы:

$$W_c(s) = \frac{2s - 1}{s^2 + 3s + 2}$$

Построим переходную функцию данной системы:

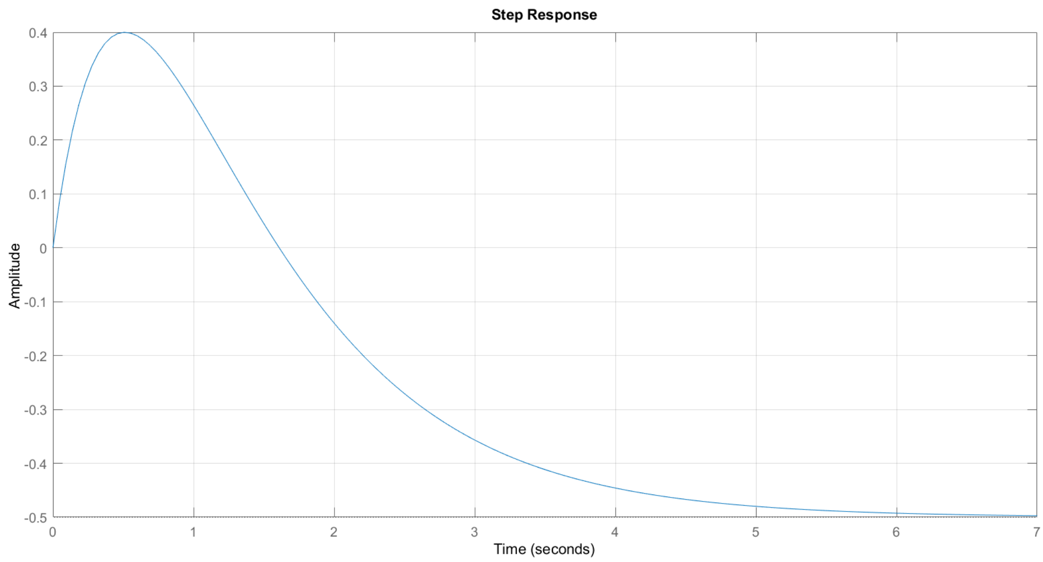


Рис. 1: Переходная функция.

Найдем передаточную функцию, используя метод аппросимации Эйлера:

$$W_d(s) = W_c(\frac{s-1}{h}) = \frac{2sh - h^2 - 2h}{s^2 + (3h-2)s + 2h^2 - 3h + 1}$$

Оценка на шаг дискретизации, при котором метод Эйлера дает устойчивую аппроксимацию:

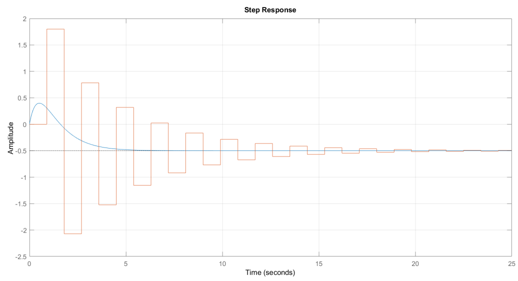
$$h < \min_i \frac{|2\Re\lambda_i(A)|}{|\lambda_i(A)|^2}$$

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2$$

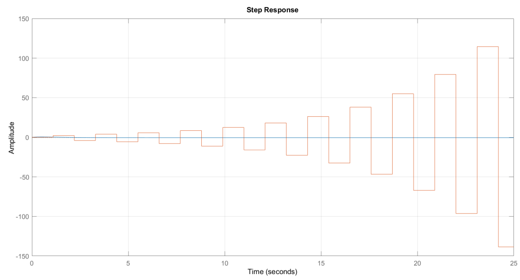
Тогда:

$$q_1 = \frac{2}{1} = 2, \; q_2 = \frac{4}{4} = 1$$
$$h < 1$$

Проверим полученное значение, построив переходную функцию полученной дискретной системы для двух разных шагов дискретизации: в первом случае дискретная система должна быть устойчива, а во втором – неустойчива.



(a) $h = 0.9$ - устойчивый случай



(b) $h = 1.1$ - неустойчивый случай

Рис. 2: Переходные функции дискретной и непрерывной систем.

Найдем передаточную функцию дискретной системы, соответствующей исходной, по методу Тастина:

$$e^{Ah} \approx (I + \frac{Ah}{2})(I - \frac{Ah}{2})^{-1}$$
$$W_d(s) = W_c(\frac{2s-1}{hs+1}) = \frac{s^2(4h-h^2) + s(4-4h) - 11.22}{s^2(2h^2+6h+4) + s(h+2)}$$

Данная система устойчива при $\forall h > 0$.
Построим переходную функцию полученной дискретной системы при $h = 1.1$:

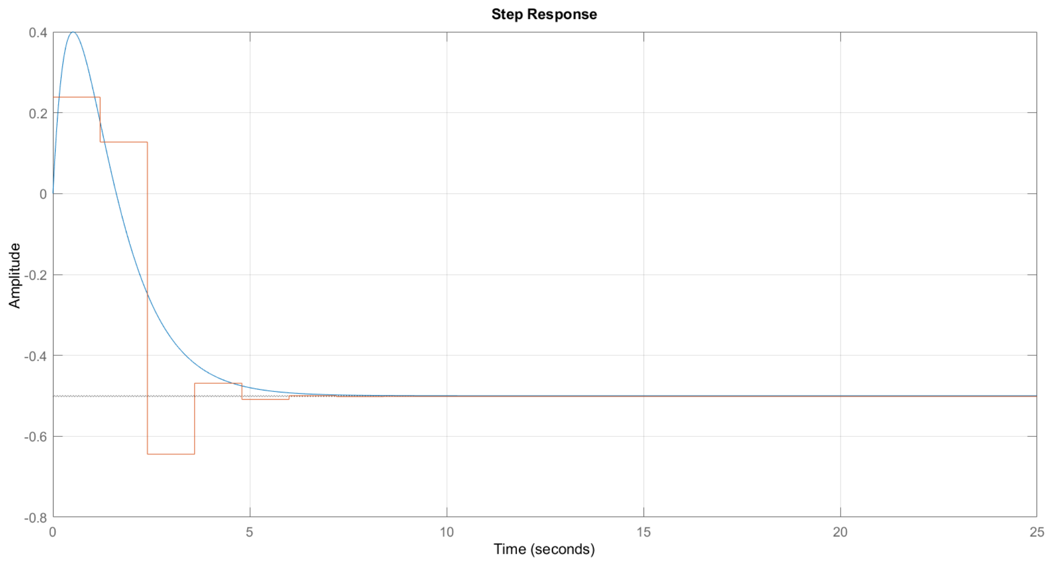


Рис. 3: Переходные функции дискретной и непрерывной систем.

Переходная функция дискретной системы, полученной по методу Тастина, изображена выше. Как видно, при шаге дискретизации $h = 1.1$ метод Эйлера дает неустойчивую аппроксимацию, тогда как метод Тастина дает устойчивую.

Выводы

В данной лабораторной работе была проделана работа по дискретизации непрерывных систем. В начале работы были проведены эквивалентные переходы между различными формами дискретных систем (такие же как и в случае непрерывных систем).
Во второй части работы требовалось получить дискретную систему различными способами: способом аппроксимации Эйлера и способом матричных дробей Паде (порядок (2, 2) - метод Тастина).
Метод Дастина сложен при вычислении, однако дает больший диапазон значения шага h в сравнении с методом Эйлера.