НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Моделирование динамических систем
Лабораторная работа №5
Системы с задержками

Вариант 2

Выполнил студент:
Кирбаба Д.Д. R3338

Преподаватель:
Семенов Д.М.

г. Санкт-Петербург
2023

Задание 1

Дана следующая система с задержкой:

$$\dot{x}(t) = -sign\ x(t-h),\ t \geq 0,\ h > 0,$$

где $h = 2$ - постоянная задержка, $x(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-h,\ 0]$.

Используя метод шагов, построить график решения системы при

$$\varphi(t) = \begin{cases} -t-1,\ t \in [-2,\ -1), \\ -(t+1)^2,\ t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Ограничимся решением системы на интервале $[-2,\ 2]$.

$$t \in [0,\ 2],\ x(0) = \varphi(0) = -1,\ \dot{x}(t) = -sign\ \varphi(t-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -1,\ \varphi(t-2) > 0, \\ \dot{x}(t) = 1,\ \varphi(t-2) < 0, \\ x(t) = C,\ \varphi(t-2) = 0. \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -1,\ t \in (0,\ 1], \\ \dot{x}(t) = 1,\ t \in (1,\ 2]. \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = -1,\ t \in (0,\ 1],$$
$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = -\int_0^t ds \Rightarrow x(t) = -1 - t \Rightarrow x(1) = -2.$$

$$\dot{x}(t) = 1,\ t \in (1,\ 2],$$
$$\int_{x(1)}^{x(t)} dx = \int_1^t ds \Rightarrow x(t) = t - 3 \Rightarrow x(2) = -1.$$

$$t \in (2, 4],\ x(2) = -1,\ \dot{x}(t) = -sign\ \varphi(t-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -1,\ \varphi(t-2) > 0, \\ \dot{x}(t) = 1,\ \varphi(t-2) < 0, \\ x(t) = C,\ \varphi(t-2) = 0. \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dot{x}(t) = 1,\ t \in (2,\ 4]$$

$$\dot{x}(t) = 1,\ t \in (2,\ 4],$$
$$\int_{x(2)}^{x(t)} dx = \int_2^t ds \Rightarrow x(t) = t - 3 \Rightarrow x(4) = 1.$$

Приведем график решения уравнения:

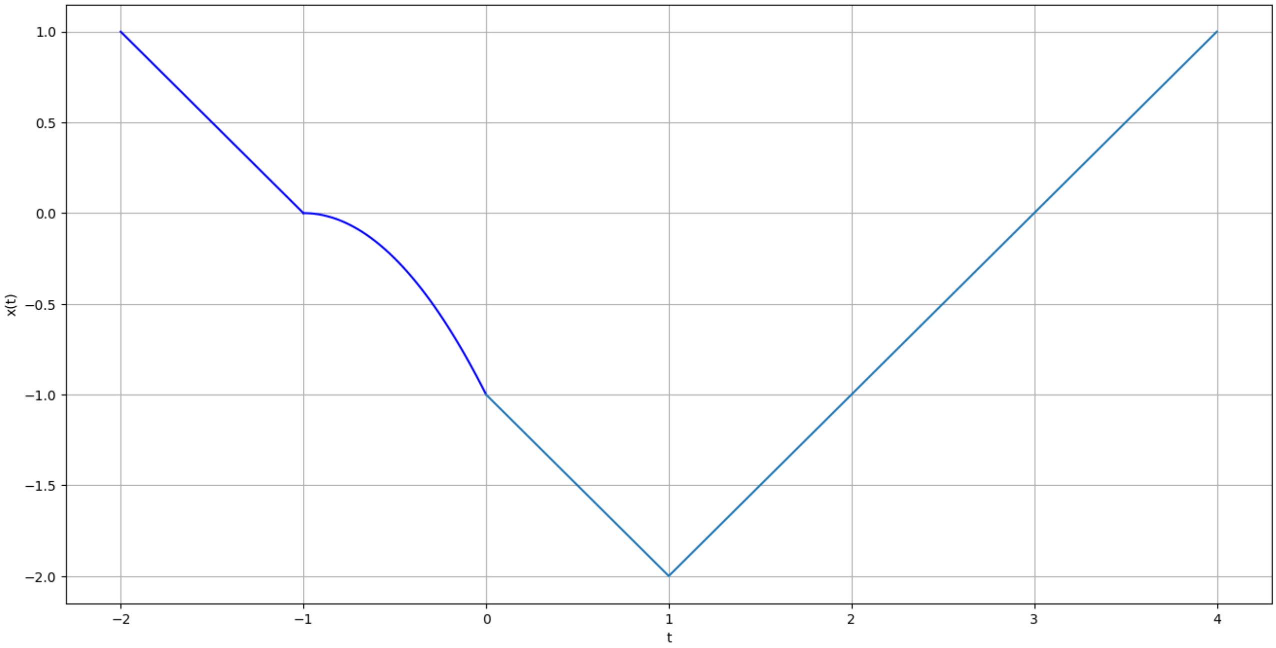

Рис. 1: Решение уравнения при $h = 2$ методом шагов.

Задание 2

Дана система с некоторой произвольной задержкой $\tau(t)$:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 0.1x(t - \tau(t))$$

Построить функцию Ляпунова. С помощью метода Разумихина доказать устойчивость данной системы. Для решения матричных неравенств использовать критерий Сильвестра.
Согласно методу Разумихина, система является асимптотически устойчивой, когда разрешимо линейное матричное неравенство (LMI):

$$\Psi = \begin{bmatrix} A^T P + PA + qP & PA_1 \\ A_1^T P & -qP \end{bmatrix} < 0,\ q > 0,\ P > 0.$$

Из уравнения следует, что $A = -1,\ A_1 = 0.1$. Тогда имеем:

$$\Psi = \begin{bmatrix} -2P + qP & 0.1P \\ 0.1P & -qP \end{bmatrix} < 0,\ q > 0,\ P > 0.$$

Неравенство выполнено тогда, когда (критерий Сильвестра):

$$\begin{cases} -P(2 - q) < 0, \\ qP^2(2 - q) - 0.01P^2 < 0, \\ q > 0,\ P > 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства получаем $0 < q < 2$, а из второго неравенства получаем $0.002 < q < 1.998$. Таким образом, система LMI разрешима $\forall q \in (0.002, 1.998)\ \Rightarrow$ система асимптотически устойчива.

Задание 3

Дана система с постоянной задержкой h:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h),$$

где $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $h = 2,\ x \in \mathbb{R}$.

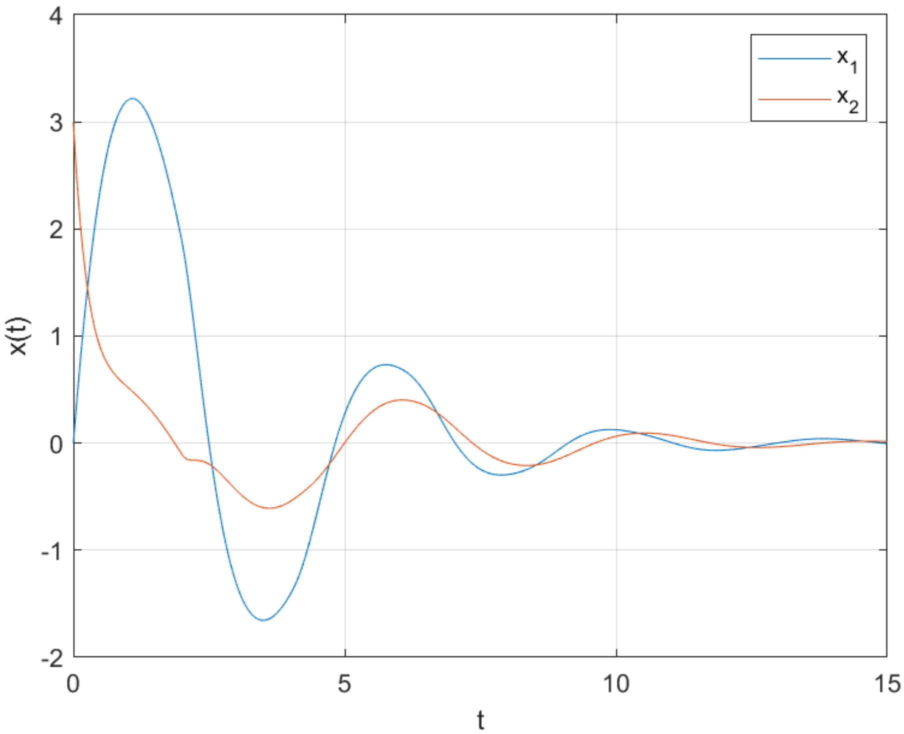

Рис. 2: Моделирование системы с задержкой $h = 2$.

Для доказательства устойчивости с помощью функционала Ляпунова-Красовского необходимо решить матричное уравнение вида:

$$\Psi = \begin{bmatrix} A^TP + PA + Q & A_1P \\ A_1^TP & -Q \end{bmatrix} < 0,\ Q > 0,\ P > 0.$$

так как задержка постоянная, то $\dot{h} = 0$. Решения данного LMI в MATLAB дает следующий результат:

$$P = \begin{bmatrix} 7.9318 & 0.5348 \\ 0.5348 & 10.0707 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 25.6439 & 0.3566 \\ 0.3566 & 30.6347 \end{bmatrix}$$

Следовательно, данная система является устойчивой.

Выводы

В данной работе были исследованы системы с задержками.
В первой части работы был применен метод шагов для решения системы. Также был построен график переходного процесса.

Во второй части было проведено исследование систем с запаздыванием на устойчивость. В качестве анализа было реализовано два метода: Ляпунова-Красовского и Разумихина. Результаты работы удовлетворительно, предпloженные системы были устойчивы. Также, при применении метода Ляпунова-Красовского матричный неравенства решались с помощью библиотеки YALMIP для MATLAB.