НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Моделирование динамических систем
Лабораторная работа №3
Бифуркации

Вариант 2

Выполнил студент:
Кирбаба Д.Д. R3338

Преподаватель:
Семенов Д.М.

г. Санкт-Петербург
2023

Задание 1

Дана следующая нелинейная система:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 \\ \dot{x_2} = rx_2 + x_2^3 - x_2^5 \end{cases}$$

Необходимо найти все возможные бифуркации в системе. Определить тип точек равновесия для каждых возможных значений бифуркационного параметра r.
Также требуется отобразить фазовые портреты линеаризованной и исходной нелинейной систем для каждого типа точек равновесия.

Для начала, найдем точки равновесия системы.
Для их поиска, необходимо приравнять левую часть (производные) к нулю и решить систему:

$$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ rx_2 + x_2^3 - x_2^5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 0 \end{cases}, \ if\ r \geq -\frac{1}{4}: \ \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = \pm\frac{\sqrt{1\pm\sqrt{4r+1}}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Итого, имеем единственную точку равновесия $(x_1^* = 0,\ x_2^* = 0)$, если $r < -\frac{1}{4}$.

Имеем три точки равновесия $(x_1^* = 0,\ x_2^* = 0),\ (x_1^* = 0,\ x_2^* = \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, если $r = -\frac{1}{4}$.

Имеем пять точек равновесия $(x_1^* = 0,\ x_2^* = 0), (x_1^* = 0,\ x_2^* = \pm\frac{\sqrt{1\pm\sqrt{4r+1}}}{\sqrt{2}})$, если $r \in (-\frac{1}{4},\ 0)$.

Имеем три точки равновесия $(x_1^* = 0,\ x_2^* = 0), (x_1^* = 0,\ x_2^* = \pm 1)$, если $r = 0$.

Имеем три точки равновесия $(x_1^* = 0,\ x_2^* = 0), (x_1^* = 0,\ x_2^* = \pm\frac{\sqrt{1+\sqrt{4r+1}}}{\sqrt{2}})$, если $r > 0$.

Составим матрицу Якоби системы:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1(x_1,\ x_2)}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1(x_1,\ x_2)}{\delta x_2} \\ \frac{\delta f_2(x_1,\ x_2)}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2(x_1,\ x_2)}{\delta x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & r + 3x_2^2 - 5x_2^4 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим точки равновесия $x_2 = \{0;\ \frac{\sqrt{1+\sqrt{4r+1}}}{\sqrt{2}};\ -\frac{\sqrt{1+\sqrt{4r+1}}}{\sqrt{2}};\ \frac{\sqrt{1-\sqrt{4r+1}}}{\sqrt{2}};\ -\frac{\sqrt{1-\sqrt{4r+1}}}{\sqrt{2}}\}$:

$$A_1 = \left.\frac{df(x_2)}{d(x_2)}\right|_{x_{2_1}=0} = r,$$

$$A_2 = \left.\frac{df(x_2)}{d(x_2)}\right|_{x_{2_2}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{4r+1}}}{\sqrt{2}}} = -4r - \sqrt{4r+1} - 1,$$

$$A_3 = \left.\frac{df(x_2)}{d(x_2)}\right|_{x_{2_3}=-\frac{\sqrt{1+\sqrt{4r+1}}}{\sqrt{2}}} = -4r - \sqrt{4r+1} - 1,$$

$$A_4 = \left.\frac{df(x_2)}{d(x_2)}\right|_{x_{2_4}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{4r+1}}}{\sqrt{2}}} = -4r + \sqrt{4r+1} - 1,$$

$$A_5 = \frac{df(x_2)}{d(x_2)}\bigg|_{x_{2_5} = -\frac{\sqrt{1-\sqrt{4r+1}}}{\sqrt{2}}} = -4r + \sqrt{4r+1} - 1,$$

В итоге получаем, что
$x^*_{2_1} = 0 \Rightarrow \dot{x_2} = A_1 x_2 = r x_2 \Rightarrow$ устойчиво $\forall r < 0$ и неустойчиво $\forall r > 0$;

$x^*_{2_{2,3}} = \pm\frac{\sqrt{1+\sqrt{4r+1}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dot{x_2} = A_{2,3} x_2 = (-4r - \sqrt{4r+1} - 1) x_2 \Rightarrow$ устойчиво $\forall r > -\frac{1}{4}$;

$x^*_{2_{4,5}} = \pm\frac{\sqrt{1-\sqrt{4r+1}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dot{x_2} = A_{4,5} x_2 = (-4r + \sqrt{4r+1} - 1) x_2 \Rightarrow$ устойчиво $\forall r > 0$ и неустойчиво $\forall -\frac{1}{4} < r < 0$;

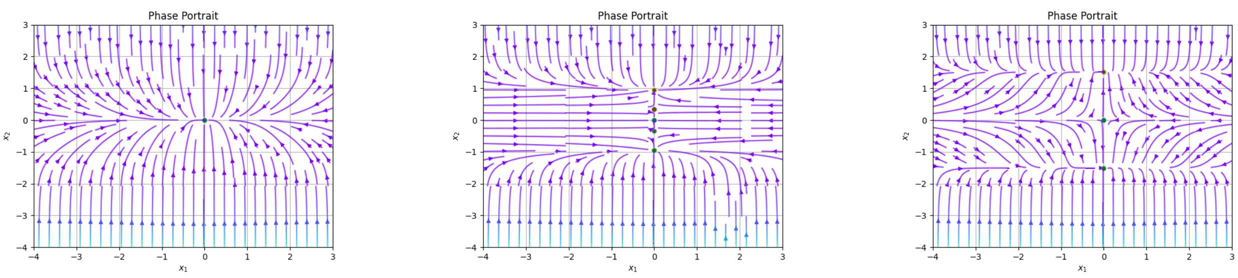
Теперь будем рассматривать целую систему вместе с первым уравнением:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 \\ \dot{x_2} = r x_2 + x_2^3 - x_2^5 \end{cases}$$

Итого, имеем:

$r < -1/4$	$(0,\ 0)$ - устойчивый узел
$r = -1/4$	$(0,\ 0)$ - устойчивый узел $(0,\ \pm 1/\sqrt{2})$ - два устойчивых узла со смещением
$r \in (-1/4,\ 0)$	$(0,\ 0)$ - устойчивый узел $(0,\ \pm\sqrt{1+\sqrt{4r+1}}/\sqrt{2})$ - два устойчивых узла $(0,\ \pm\sqrt{1-\sqrt{4r+1}}/\sqrt{2})$ - два неустойчивых положения (седла)
$r = 0$	$(0,\ 0)$ - устойчивый узел со смещением $(0,\ \pm 1)$ - два устойчивых узла
$r > 0$	$(0,\ 0)$ - неустойчивый узел (седло) $(0,\ \pm\sqrt{1+\sqrt{4r+1}}/\sqrt{2})$ - два устойчивых узла

Теперь отобразим фазовые портреты линеаризованной и исходной нелинейной систем для каждого типа точек равновесия.

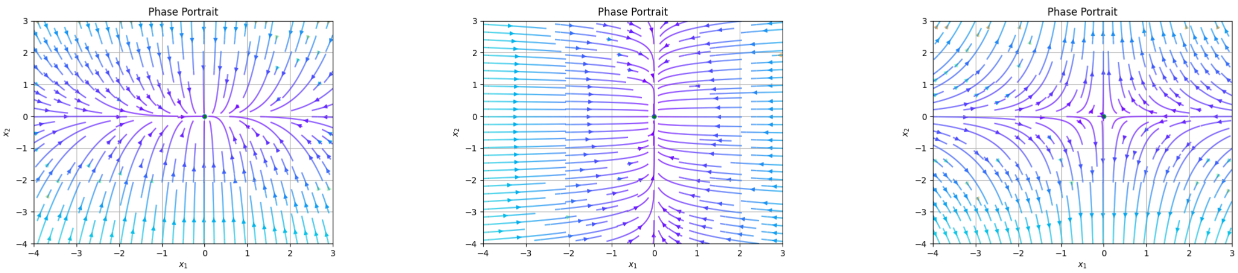


(a) $r = -4$ (b) $r = -0.1$ (c) $r = 3$

Рис. 1: Нелинейная система

Один устойчивый узел в $(0,\ 0)$
$\downarrow$

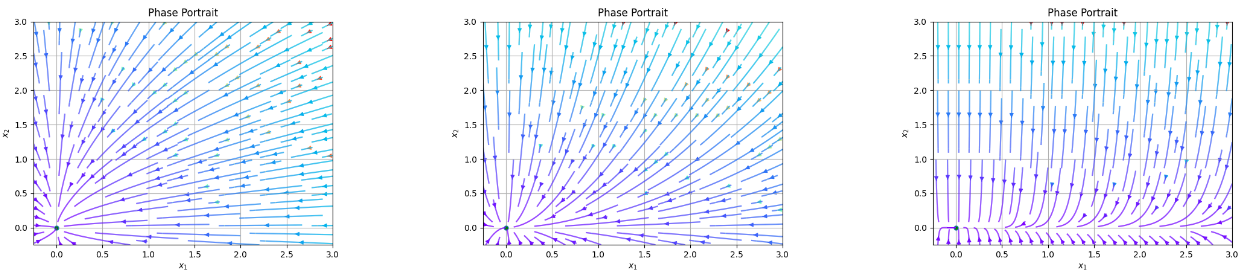
$$(0,\ 0) \text{ - устойчивый узел, } (0,\ \pm\sqrt{1+\sqrt{4r+1}}/\sqrt{2}) \text{ - два устойчивых узла,}$$
$$(0,\ \pm\sqrt{1-\sqrt{4r+1}}/\sqrt{2}) \text{ - два неустойчивых положения (седла)}$$
$$\downarrow$$
$$(0,\ 0) \text{ - неустойчивый узел (седло), } (0,\ \pm\sqrt{1+\sqrt{4r+1}}/\sqrt{2}) \text{ - два устойчивых узла}$$



(a) $r = -4$ (b) $r = -0.1$ (c) $r = 3$

Рис. 2: Линеаризованная система около $(0,\ 0)$

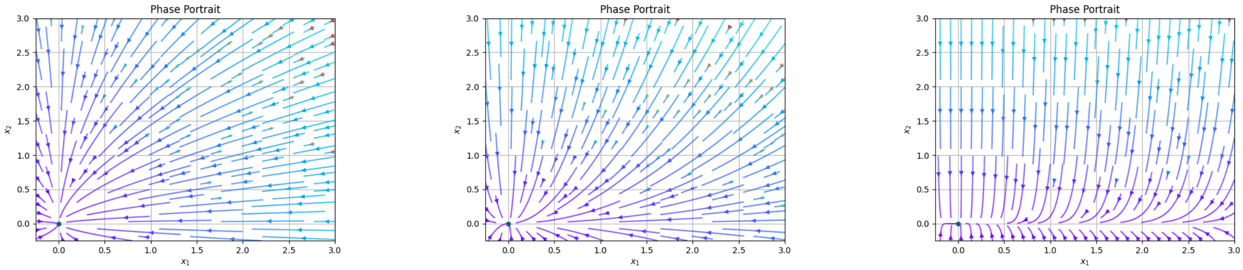
Устойчивый узел
$\downarrow$
Устойчивый узел
$\downarrow$
Седло



(a) $r = -1/4$ (b) $r = 0$ (c) $r = 3$

Рис. 3: Линеаризованная система около $(0,\ \sqrt{1+\sqrt{4r+1}}/\sqrt{2})$

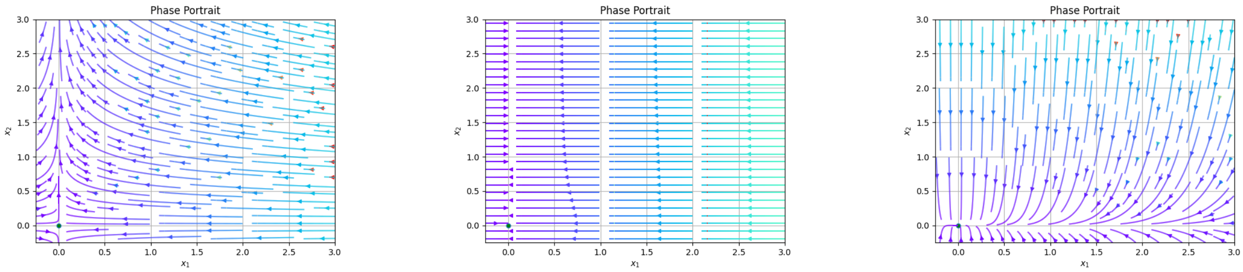
Устойчивый узел
$\downarrow$
Устойчивый узел
$\downarrow$
Устойчивый узел



(a) $r = -1/4$ (b) $r = 0$ (c) $r = 3$

Рис. 4: Линеаризованная система около $(0,\ -\sqrt{1+\sqrt{4r+1}}/\sqrt{2})$

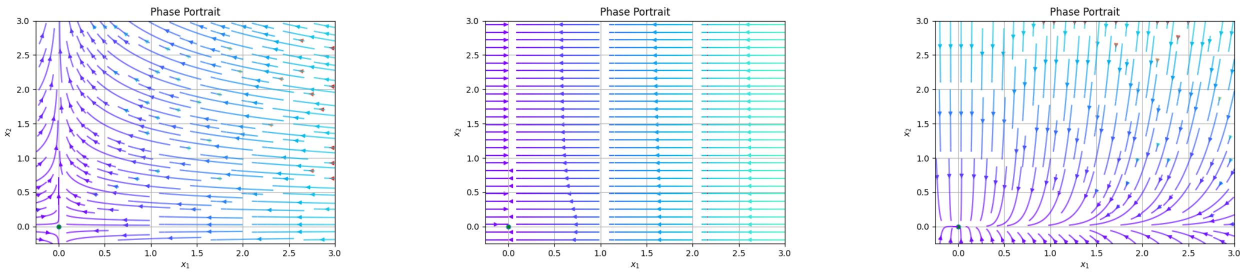
Устойчивый узел
$\downarrow$
Устойчивый узел
$\downarrow$
Устойчивый узел



(a) $r = -1/4$ (b) $r = 0$ (c) $r = 3$

Рис. 5: Линеаризованная система около $(0,\ \sqrt{1-\sqrt{4r+1}}/\sqrt{2})$

Седло
$\downarrow$
Граница устойчивости
$\downarrow$
Устойчивый узел



(a) $r = -1/4$ (b) $r = 0$ (c) $r = 3$

Рис. 6: Линеаризованная система около $(0,\ -\sqrt{1-\sqrt{4r+1}}/\sqrt{2})$

Седло

$\downarrow$

Граница устойчивости

$\downarrow$

Устойчивый узел

Выводы

В данной работе было проведено исследование системы с бифуркационным параметром r. Было аналитически предсказано, что поведение системы будет меняться при прохождении бифуркационного параметра порогов $\{-\frac{1}{4};\ 0\}$. Также были построены фазовые портреты нелинейной и линеаризованной около положений равновесия для наглядной картины преобразования системы при изменении бифуркационного параметра.