НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Моделирование динамических систем
Лабораторная работа №1
Устойчивость линейных систем

Вариант 2

Выполнил студент:
Кирбаба Д.Д. R3338

Преподаватель:
Семенов Д.М.

г. Санкт-Петербург
2023

Задание 1

Дана каноническая модель системы состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

, где $x \in R^3,\ u \in R,\ y \in R$. Начальные данные – нулевые.

Необходимо перевести модель в функциональную форму "вход-выход"и найти передаточную функцию данной системы.

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для перевода системы в форму "вход-выход"будем использовать метод, предложенный в учебнике, а именно метод, основанный на *тождестве Гамильтона-Кэли* и последующих преобразований рекуррентно выводимых уравнений.

Найдем характеристический многочлен матрицы A:

$$a(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1+\lambda)\lambda + 1) = -\lambda^3 + 1$$

Тогда:

$$a_{(1)}(\lambda) = (a(\lambda) - a(0))\lambda^{-1} = -\lambda^2$$
$$a_{(2)}(\lambda) = (a_{(1)}(\lambda) - a_{(1)}(0))\lambda^{-1} = -\lambda$$
$$a_{(3)}(\lambda) = (a_{(2)}(\lambda) - a_{(2)}(0))\lambda^{-1} = -1$$

Итого:

$$a(\frac{d}{dt})y = -\dddot{y} + 1 = C(-A^2)Bu + C(-A)B\dot{u} + C(-1)B\ddot{u}$$
$$\dddot{y} - 1 = \ddot{u} + \dot{u} + u$$

Теперь, имея систему в форме "вход-выход"не составит труда найти её передаточную функцию:

$$W(\lambda) = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda^3 - 1}$$

Задание 2

Дана система в форме "вход-выход":

$$\dddot{y} + 2\ddot{y} - \dot{y} - 2y = -\ddot{u} + 2\dot{u} - 8u$$

Начальные условия равны нулю.
Необходимо переписать данную модель в канонической форме пространства состояний.

Составим матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда, получим следующий вид системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Задание 3

Дана система в пространстве состояний:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где $x \in R^3$, B единичная матрица 3×3.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 2 \\ 3 & -4 & 6 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Необходимо просимулировать систему в *Matlab* (для этого использовать функцию *ode45* с ненулевыми начальными условиями), построить графики каждой компоненты вектора состояний (*plot*). Найти собственные числа системы, и по ним сделать вывод про устойчивость.
Также, необходимо найти граничное значение k^* такое, что для всех $k < k^*$ регулятор $u = kx$ обеспечивает стабилизацию системы в закрытой форме. Найти собственные значения этой системы и построить графики компонент вектора состояний x.

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = 5.5410,\ \lambda_2 = -6.2644,\ \lambda_3 = -9.2765$$

Видно, что существует одно положительное значение, а следовательно система является неустойчивой.
Проиллюстрируем неустойчивость на графиках вектора состояний:

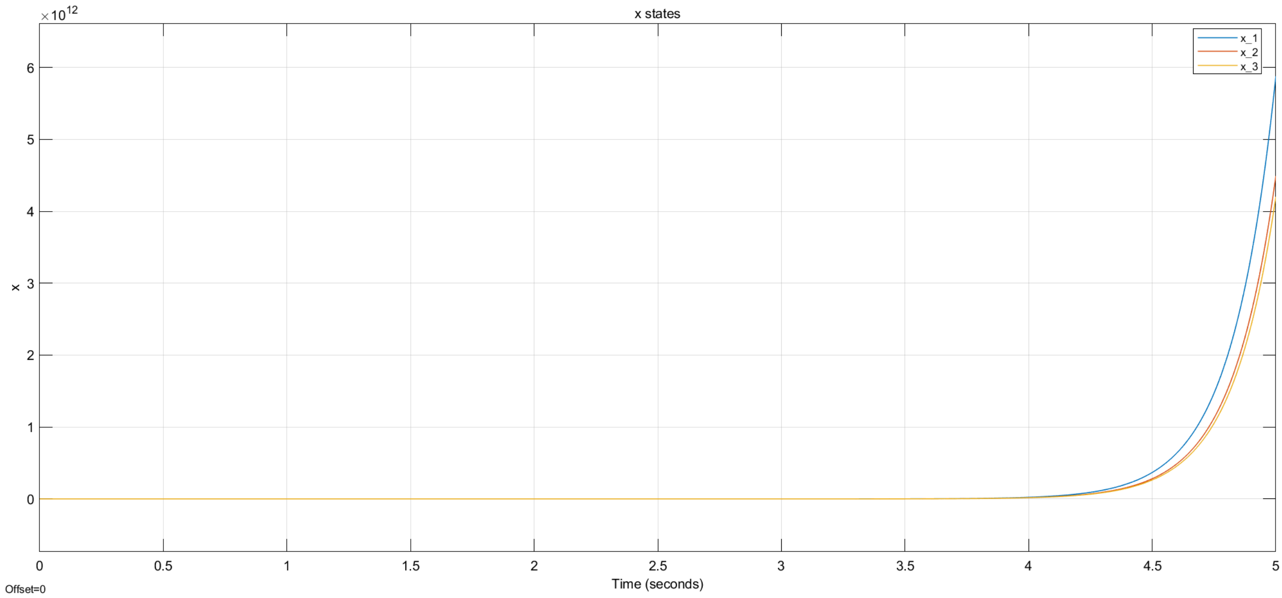

Рис. 1: компоненты вектора состояний системы

Как можно видеть, система действительно является неустойчивой, так как все компоненты состояния стремятся в бесконечность с течением времени.

Для того, чтобы система стала устойчивой можно замкнуть её регулятором $u = kx$, где $k \leq -\max_i Re(\lambda_i)$, λ_i - собственные числа матрицы A.

Итак, граничное значение параметра $k^* = -5.5410$.

Система принимает следующий вид:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 2 \\ 3 & -4 & 6 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} kx = /k = k^* = -5.5410/ = \begin{bmatrix} -7.5410 & 8 & 2 \\ 3 & -9.5410 & 6 \\ 3 & 5 & -9.5410 \end{bmatrix} x$$

Собственные числа системы:

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -11.8054, \ \lambda_3 = -14.8175$$

Так как собственных чисел с положительной действительной частью нет и существует некратный корень (с учётом мнимой части), действительная часть которого равна нулю, то система будет находиться на так называемой *границе устойчивости*, то есть компоненты состояния не сойдутся точно в 0, а сойдутся к каким-то значениям.

Построим графики этой системы:

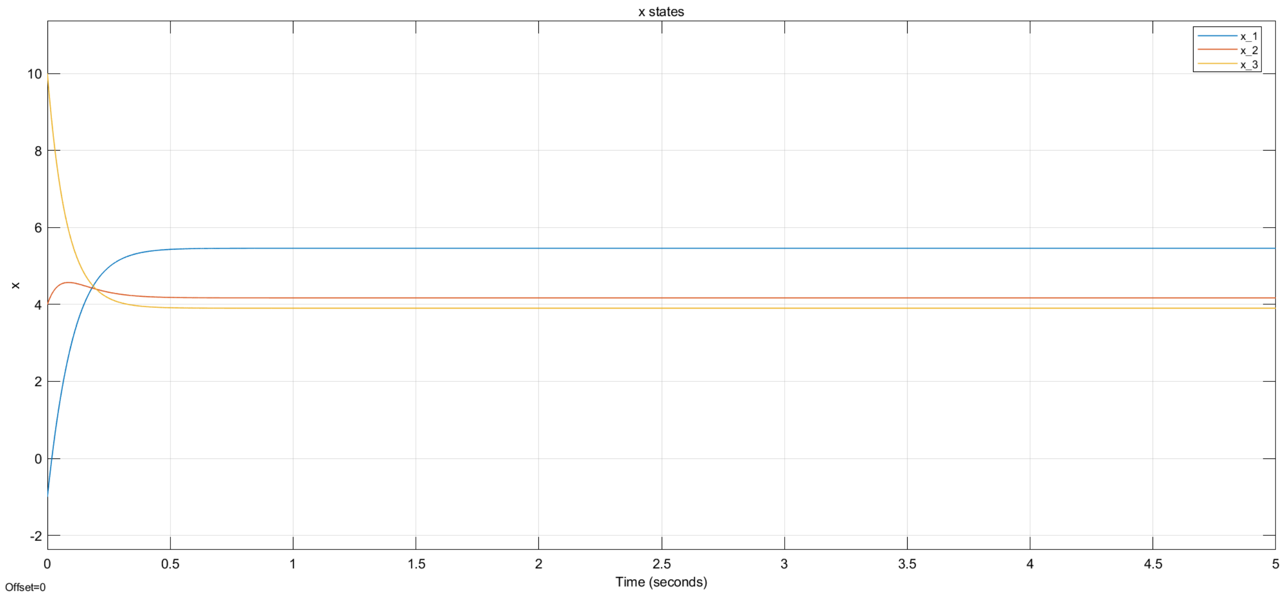

Рис. 2: компоненты вектора состояний замкнутой системы

Действительно, система уже не является неустойчивой.

Выводы

В данной лабораторной работе были рассмотрены линейные системы в различных формах, были проведены преобразования от "вход-выход"к "вход-состояние-выход". Как убедились, данные формы представления являютя эквивалентными.
Также проводилось исследование системы на устойчивость с помощью анализа собственных чисел. В случае неустойчивости простой системы был найден регулятор, стабилизирующий вектор компонент. В качестве доказательств правильности расчетов были приведены графики моделирования систем из среды *Simulink (Matlab)*.