

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ”

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

## **Моделирование технических систем**

Лабораторная работа №4

Вариант 9

Выполнили:

Студенты группы R33352

Иокша Дмитрий Сергеевич

Козлов Илья Алексеевич

Куровский Артем Маратович

Эргле Екатерина Артуровна

Преподаватель:

Семенов Данила Михайлович

Санкт-Петербург  
2023

# Задание 1

Дано

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.8 & -0.4 & -0.7 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix}; C = [0 \ 0 \ 1]$$

**Задание** Перейти к функциональной модели вход-выход и построить передаточную функцию системы.

**Решение**

Определим характеристический многочлен матрицы A:

$$a(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0.8 & -0.4 & \lambda + 0.7 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 0.7\lambda^2 + 0.4\lambda + 0.8$$

Основываясь на полученном характеристическом многочлене  $a(\lambda)$  и рекуррентных выражений, определим многочлены  $a_i(A)$ :

$$a_1(A) = A^2 + 0.7A = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 1 \\ 0.8 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0.8 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$a_2(A) = A + 0.7I = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1 \\ 0.8 & -0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_3(A) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a\left(\frac{d}{dt}\right)y = Ca_1(A)Bu + Ca_2(A)B\dot{u} + Ca_3(A)B\ddot{u}$$

Таким образом найдем  $Ca_i(A)B$ :

$$Ca_1(A)B = 0.16$$

$$Ca_2(A)B = 0.36$$

$$Ca_3(A)B = -0.2$$

Получаем уравнение в функциональной форме вход-выход:

$$y_{k+3} + 0.7y_{k+2} + 0.4y_{k+1} + 0.8y_k = -0.2u_{k+2} + 0.36u_{k+1} + 0.16u_k$$

Найдем передаточную функцию исследуемой системы

$$W(\lambda) = C(-A)^{-1}B = \frac{-\lambda^2 + 1.8\lambda + 0.4}{5(\lambda^3 + 0.7\lambda^2 + 0.4\lambda - 0.8)}$$

## Задание 2

Дано

$$y_{k+3} + 0.3y_{k+2} - 0.1y_{k+1} - 0.4y_k = -0.6u_{k+2} + 0.21u_{k+1} + 0.2u_k$$

Задание

Дана функциональная модель дискретной системы в пространстве вход-выход. Начальные данные – нулевые. Перейти к канонической модели в пространстве состояний.

Решение

Для представления системы вход-выход в канонической форме пространства состояний систему необходимо записать в виде:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k = \begin{bmatrix} 0.3 & 1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1 \\ -0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.21 \\ 0.2 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = Cx_k = [1 \ 0 \ 0] x_k$$

## Задание 3

Дано

$$W(s) = \frac{4s - 3}{s^2 + 6s + 3}$$

Задание

- Построить переходную функцию системы в Matlab
- Найти передаточную функцию дискретной системы, соответствующей исходной, по методу Эйлера
- Получить оценку на шаг дискретизации, при котором дискретная система будет устойчивой
- Построить переходную функцию полученной дискретной системы в среде Matlab для двух разных шагов дискретизации: в первом случае дискретная система должна быть устойчива, а во втором – неустойчива. Сравнить результаты с поведением исходной системы.

- Найти передаточную функцию исходной, по методу Тастина
- Построить переходную функцию полученной дискретной системы в среде Matlab. Сравнить результаты с поведением исходной системы

## Решение

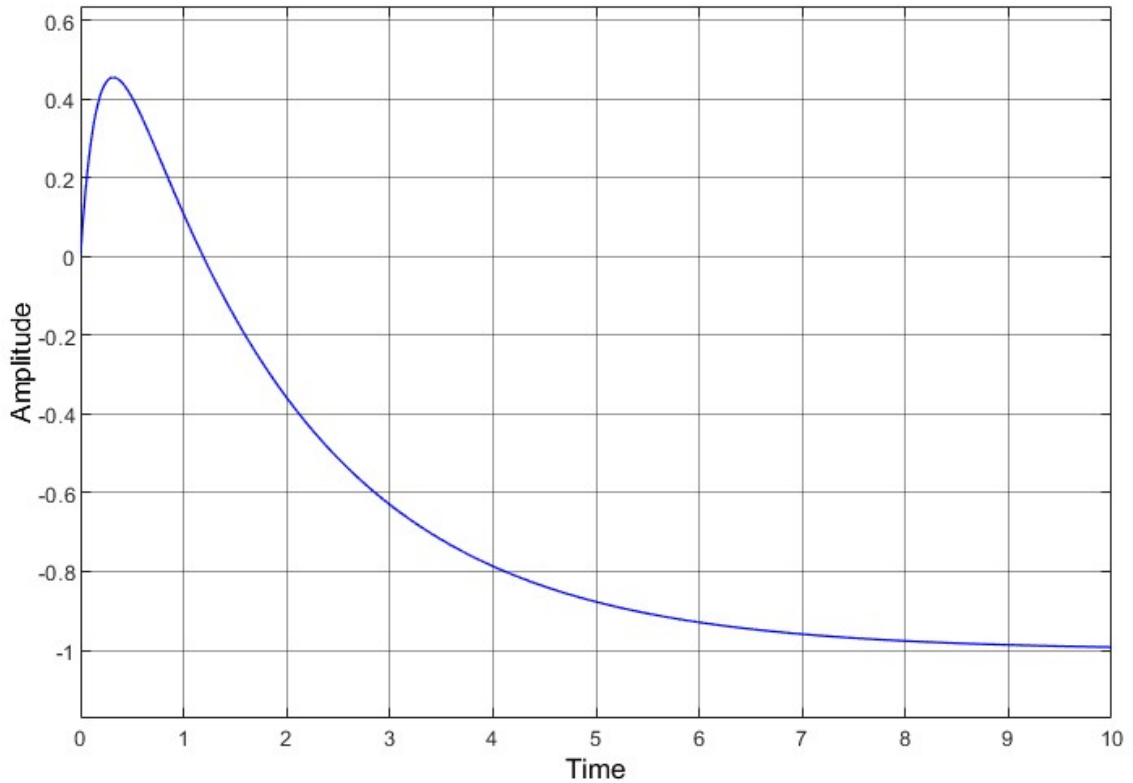


Рис. 1: Переходная функция непрерывной системы

Находим передаточную функцию по методу Эйлера

$$W_d(\lambda) = W\left(\frac{\lambda - 1}{h}\right) = \frac{4\frac{\lambda-1}{h} - 3}{\left(\frac{\lambda-1}{h}\right)^2 + 6\frac{\lambda-1}{h} + 3} = \frac{4\lambda h - (3h^2 + 4h)}{\lambda^2 + (6h - 2)\lambda + (3h^2 - 6h + 1)}$$

Оценка шага дискретизации:  $h < \min \frac{2|Re(\lambda_i)|}{|\lambda_i|^2} \approx 0.36$

Переходные функции дискретной системы по методу Эйлера

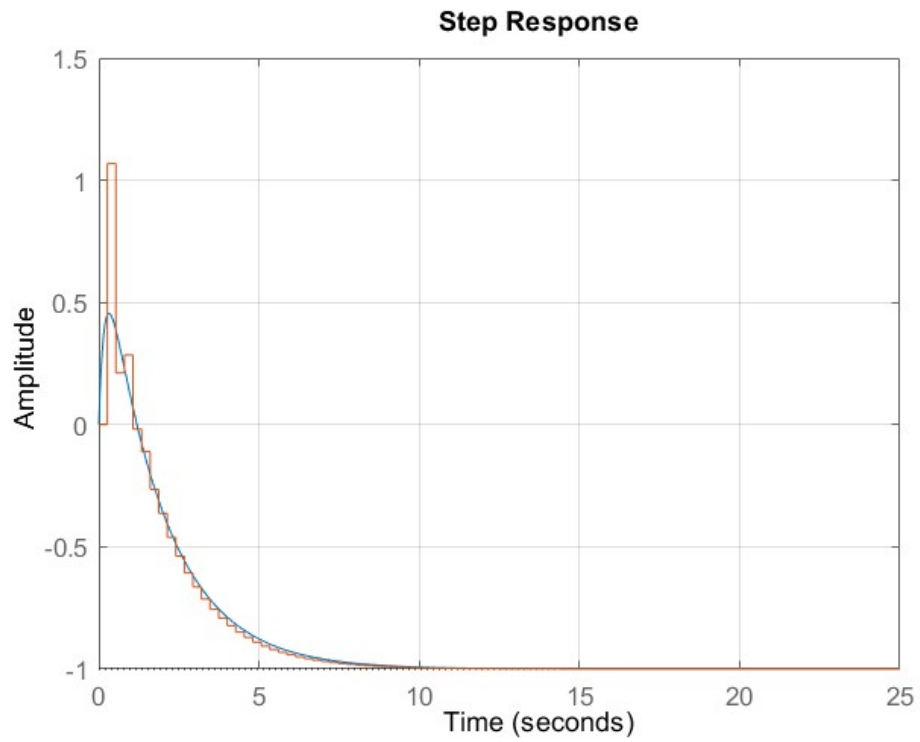


Рис. 2: Переходная функция дискретной системы устойчивый случай при  $h = 0.267$

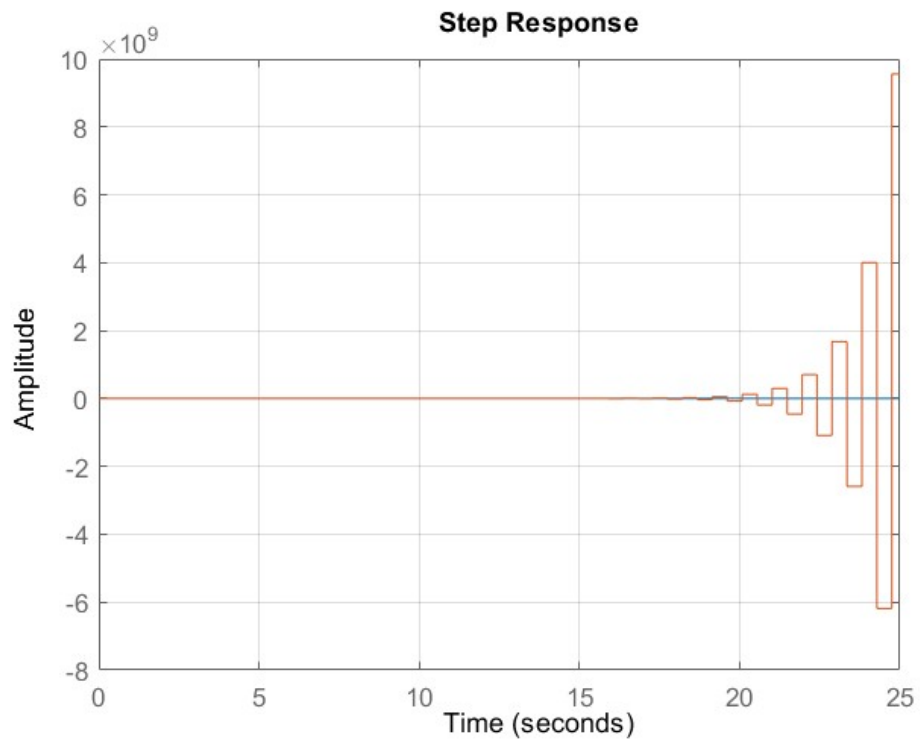


Рис. 3: Переходная функция дискретной системы неустойчивый случай при  $h = 0.467$

Находим передаточную функцию по методу Тастина

$$W_d(\lambda) = W\left(\frac{2}{h}\left[\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right]\right) = \frac{(-3h^2 + 8h)\lambda^2 + (-6h^2)\lambda + (-3h^2 - 8h)}{(3h^2 + 12h + 4)\lambda^2 + (6h^2 - 8)\lambda + (4h^2 - 12h + 4)}$$

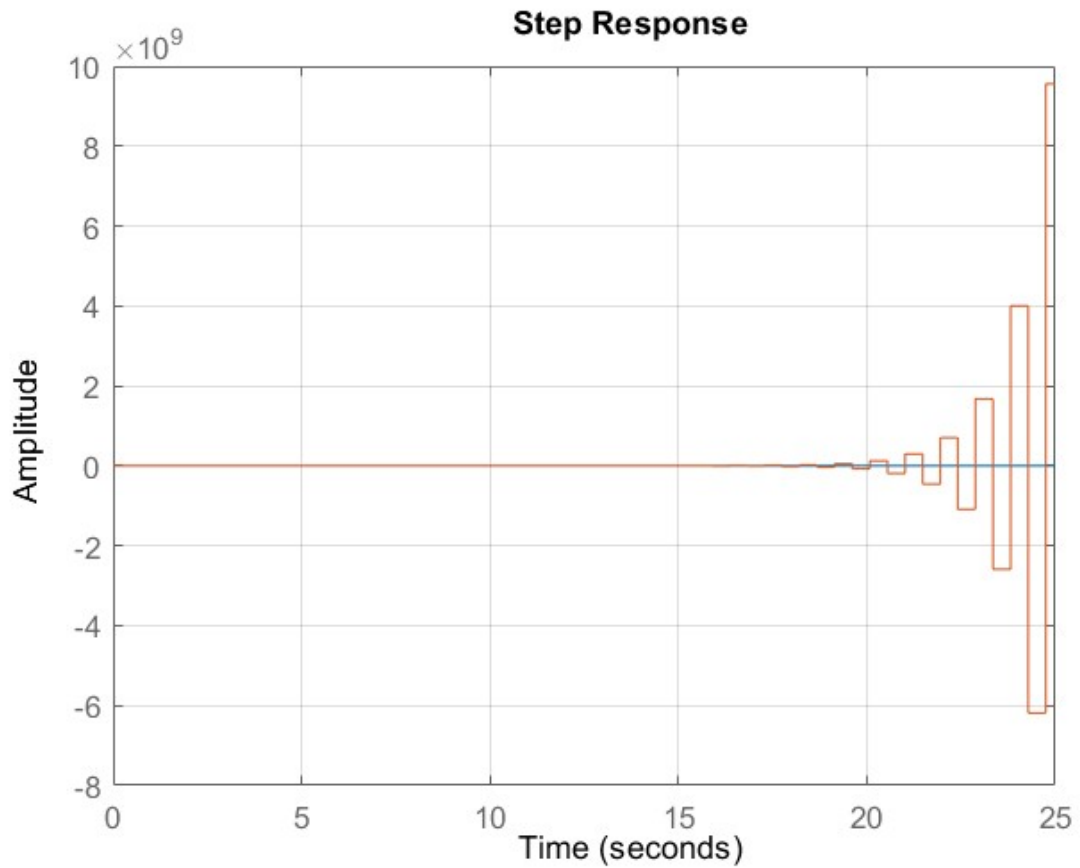


Рис. 4: Переходная функция по методу Тастина при  $h = 0.467$

## Вывод

В ходе работы мы канонической модели дискретной системы с нулевыми н.у. к функции Вход-Выход, нашли передаточные функции по методам Эйлера и Тастина, оценили шаг дискретизации по графикам функций устойчивой и неустойчивой систем.