ЛР «Экстремумы ФНП». 6 вариант.

Аналитический метод:

$z(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$ ЛР. 6 вариант

• $\begin{cases} 3x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 24y^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3 \cdot 4 \cdot y^4 - 12y = 0 \\ x = 2y^2 \end{cases}$ $\begin{cases} y^4 - y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ y^3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0;\ x = 0 \\ y = 1;\ x = 2 \end{cases}$

$(0;0)$ и $(2;1)$ – стац. точки

$z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = -12$, $z''_{yy} = 48y$

• $(0;0)$

М-ца Гессе: $\begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 < 0$

так как м-ца невырождена и не выполн. усл. $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$ или $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$, то $(0;0)$ не явл. точкой лок. экстремума

проверим определ.: $\exists U(a)\ \forall x \in U(a),\ x \neq a$: $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$

$\nexists$ $z(x,x) = 9x^3 - 12x^2 = x^2(\underset{0}{9x} - 12) < 0$

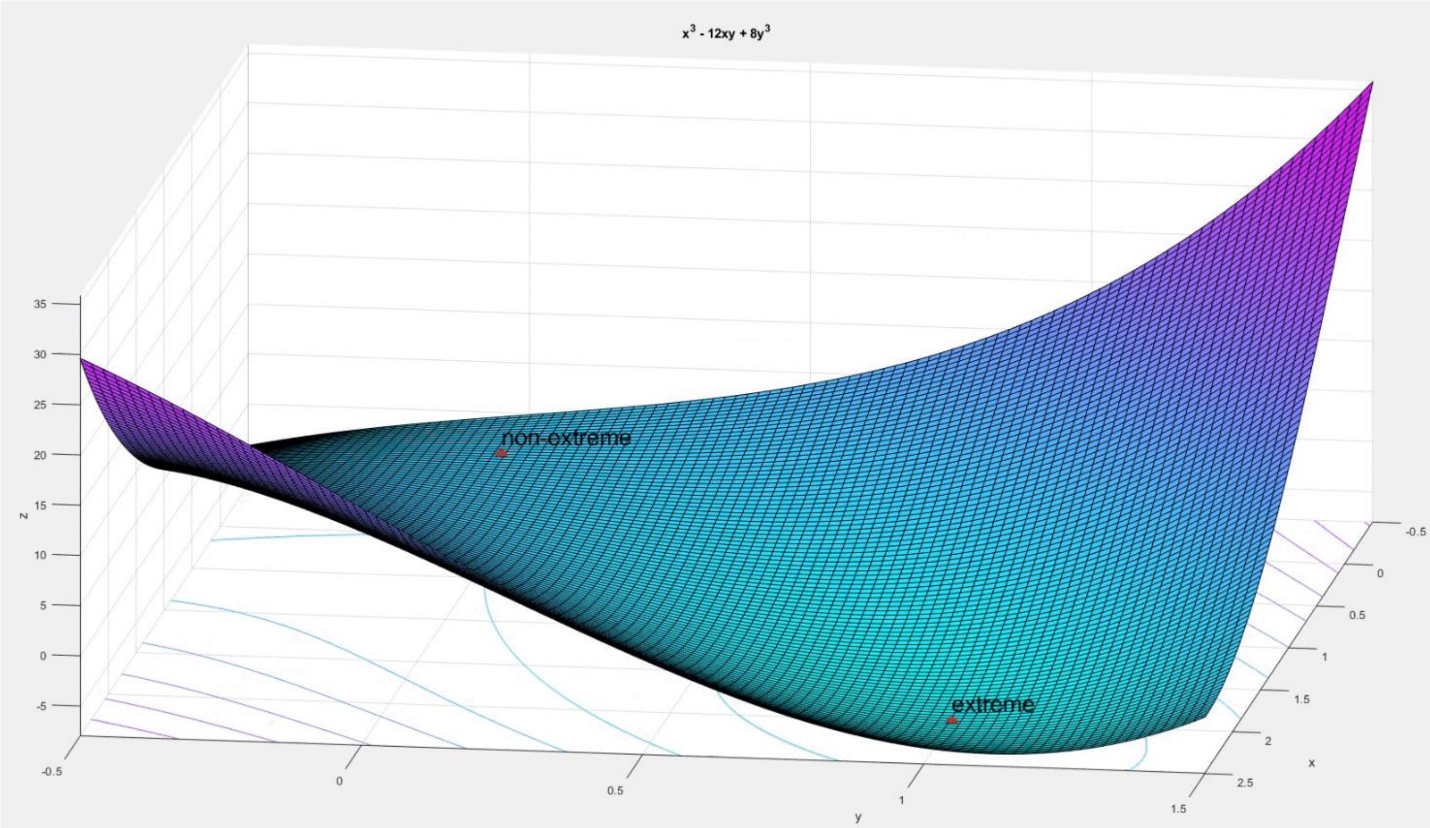
$\nexists$ $z(-2x, x) = -8x^3 + 8x^3 + 24x^2 > 0$ $\Rightarrow$ т. $(0,0)$ не явл. экстр.

• $(2;1)$ м-ца Гессе: $\begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$

т.к. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, то $(2;1)$ – точка строгого минимума.

Ответ: $(0,0)$ – не явл. лок. экстр.; $(2;1)$ – точка минимума.

График функции и линий уровня (z = 0, z = -8) с отмеченными стационарными точками (0, 0) и (2, 1).

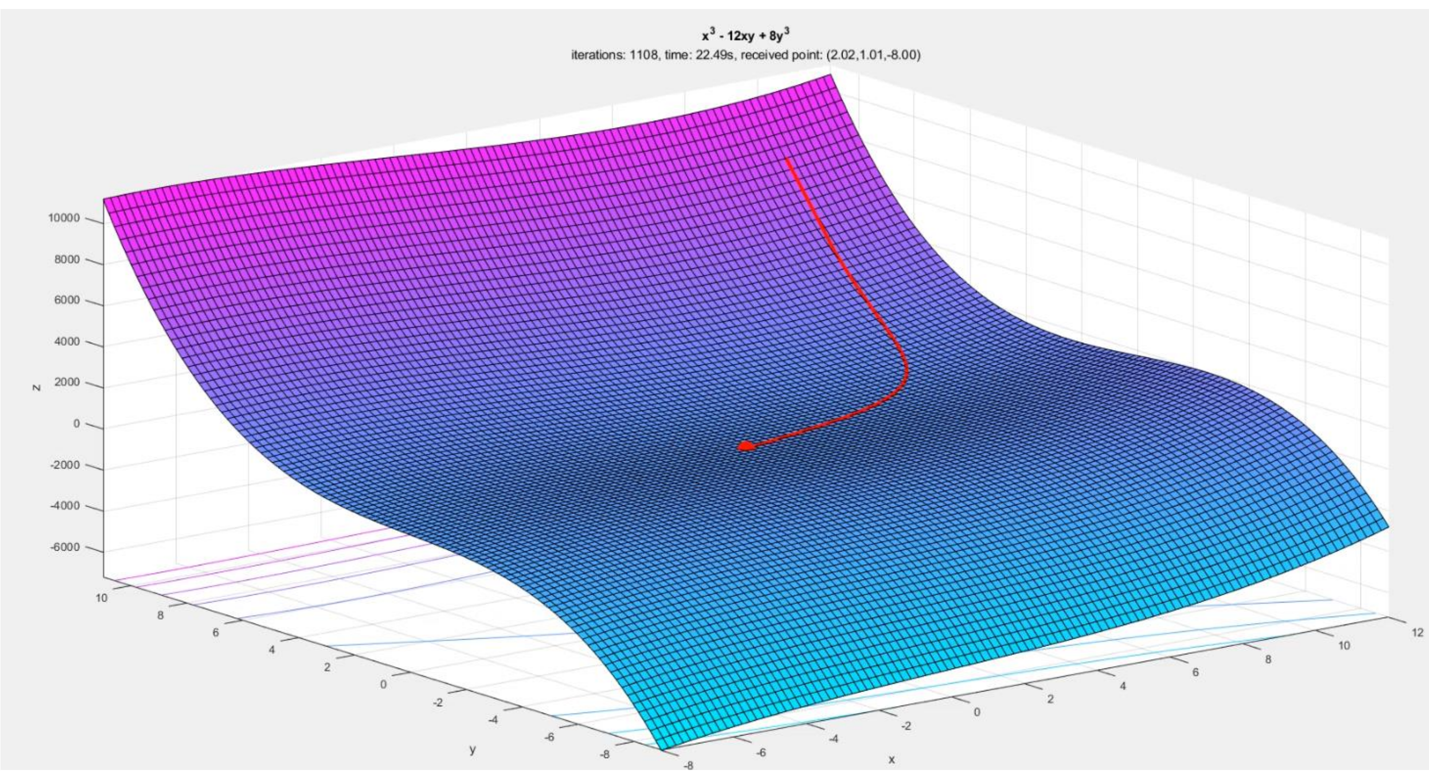


Численный метод:

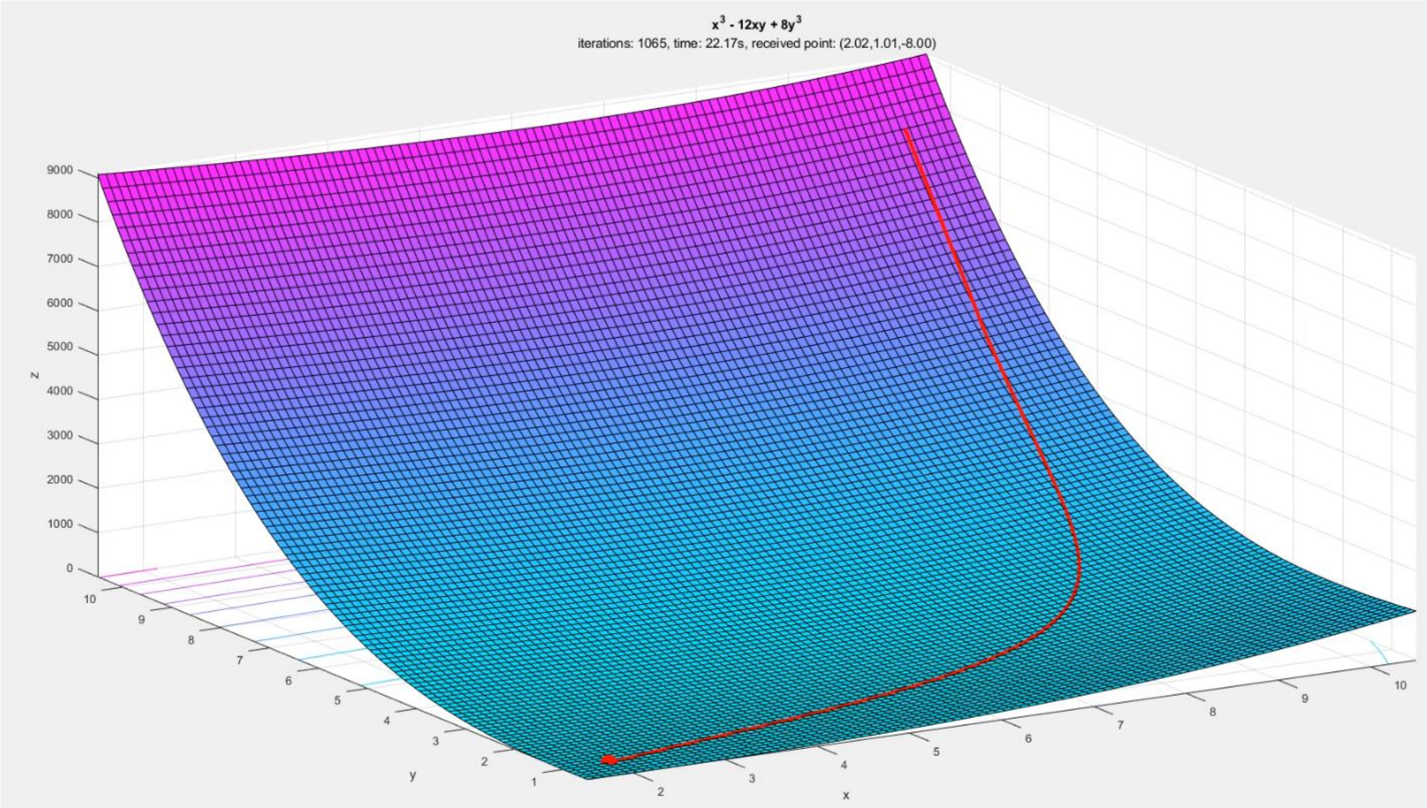
Выбираем точку минимума (2, 1, -8). Ограничим область до {(x, y): -8 ≤ x ≤ 12, -9 ≤ y ≤ 11}. Стартовая точка (10, 10).

Количество итераций: 1117. Критерий останова $|(\Delta x_k, \Delta y_k)| < 0.0001$. Полученная точка: (2.0181, 1.0055, -7.9985).

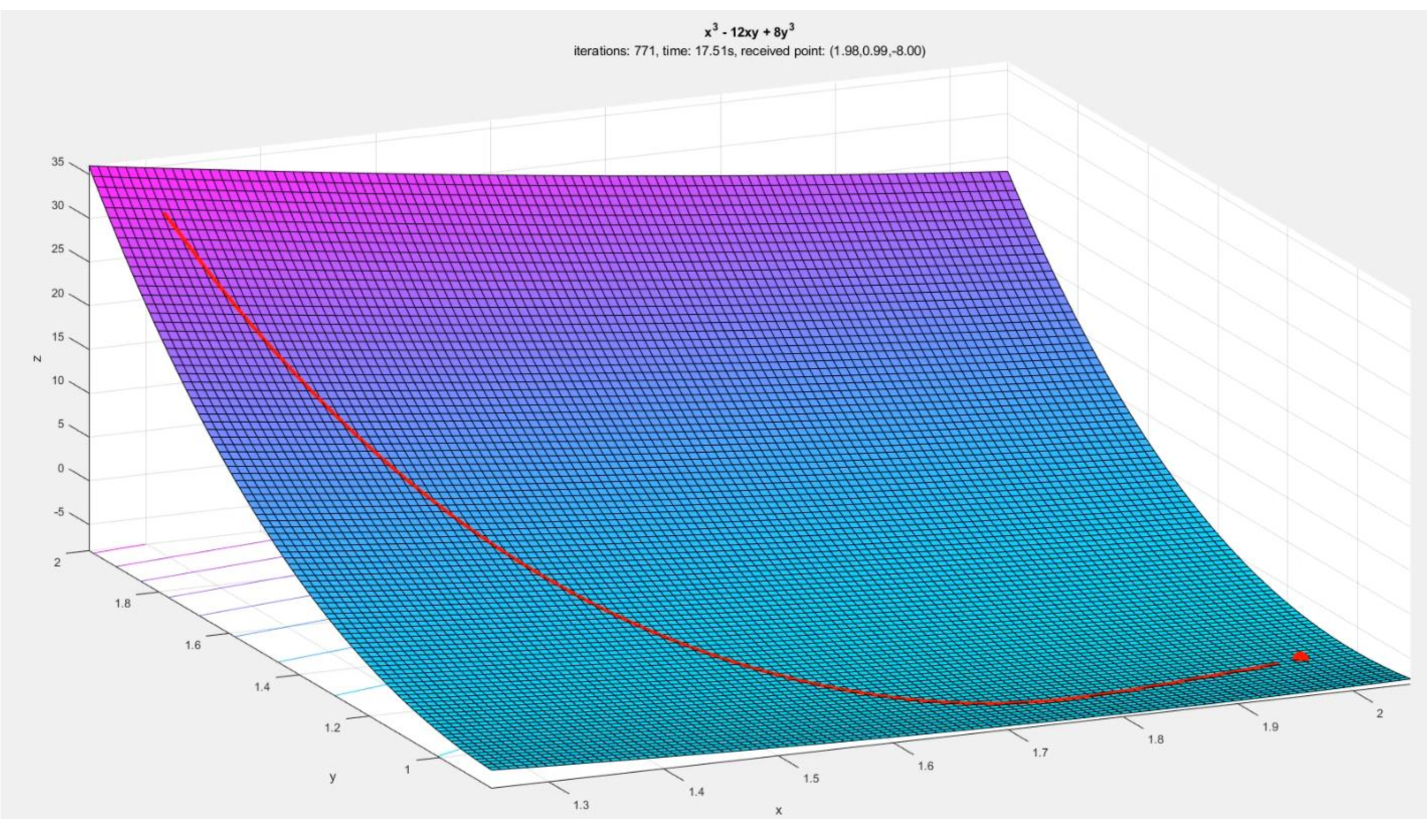
Время работы: 13.49с (с учётом всех пауз для наглядности построения каждого шага), 1.97с (без учёта пауз).



Ограничим область до $\{(x, y): 1.5 \leq x \leq 10.5,\ 0.5 \leq y \leq 10.5\}$.



Стартовая точка (1.3, 1.95). Ограничим область до $\{(x, y): 1.25 \leq x \leq 2.05,\ 0.85 \leq y \leq 2\}$.



Вывод

Численными методами можно легко находить области, в которых находится результат. Точность вычислений естественно зависит от оптимизации программной части и мощности вычислительной машины.