Дано два подпространства размерности 2, в которых находятся математические подсистемы. Состояние каждой подсистемы характеризуется комплекснозначным вектором в своём подпространстве. Например, вектор $\boldsymbol{a}$ пусть описывает состояние первой подсистемы, а вектор $\boldsymbol{b}$ – состояние второй подсистемы:

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{A}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{A}_2$$

$$\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{B}_1 + \beta_2 \boldsymbol{B}_2$$

где α_k и β_k – это комплекснозначные компоненты векторов, а $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ – это орты в первом и втором подпространствах соответственно.

Примем, что до некоторого начального момента времени t_0 математические подсистемы не взаимодействовали между собой, а после момента t_0 началось взаимодействие, которое привело к качественному изменению характера подсистем. Пространство **H**, в котором находятся две взаимодействующие математические подсистемы, представляет собой четырёхмерное пространство с базисом, равным декартовому произведению базисов первого и второго подпространств. То есть базисные векторы полного пространства могут быть записаны так:

$$\boldsymbol{C}_{ij} = \boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{B}_j$$

Таким образом, вектор состояния системы при взаимодействии двух подсистем имеет вид:

$$\boldsymbol{c} = c_{11} \boldsymbol{C}_{11} + c_{12} \boldsymbol{C}_{12} + c_{21} \boldsymbol{C}_{21} + c_{22} \boldsymbol{C}_{22}$$

Причем в общем случае вектор $\boldsymbol{c}$ не может быть представлен как тензорное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в своих подпространствах размерности 2. Если это возможно, то вектор $\boldsymbol{c}$ называют сепарабельным. Если это невозможно, то вектор $\boldsymbol{c}$ называют не сепарабельным. Следуя этому условию можно ввести вектор связанности $\boldsymbol{g}$ между двумя математическими подсистемами:

$$\boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{g}$$

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = \tilde{\boldsymbol{a}} \otimes \tilde{\boldsymbol{b}}$$

где векторы $\tilde{\boldsymbol{a}}$ и $\tilde{\boldsymbol{b}}$ могут быть выбраны по-разному. Мы будем считать, что они выбираются из того условия, что длина вектора $\boldsymbol{g}$ должна быть наименьшей. Метрика пространства является евклидовой метрикой. Тогда смысл вектора $\boldsymbol{g}$ заключается в отклонении состояния связанной математической системы, состоящей из двух подсистем, от ближайшего несвязанного состояния, в котором вектор $\tilde{\boldsymbol{c}}$, характеризующий полную систему, является сепарабельным.

В задаче требуется найти зависимость длины вектора связанности $\boldsymbol{g}$ от времени. Взаимодействие между двумя подсистемами задаётся следующим образом: компоненты векторов α_1 и β_1 стремятся поменяться местами, а также компоненты векторов α_2 и β_2 стремятся поменяться местами. В начальный момент времени t_0 система состоит из двух несвязанных подсистем, то есть вектор $\boldsymbol{c}$ является сепарабельным. Компоненты векторов $\boldsymbol{a}_0$ и $\boldsymbol{b}_0$ в начальный момент времени выбираются произвольно. Динамика системы при взаимодействии определяется уравнением:

$$\boldsymbol{c}(t) = e^{i(\hat{V} - \hat{I})t} \boldsymbol{c}(0)$$

$$\boldsymbol{c}(0) = \boldsymbol{a_0} \otimes \boldsymbol{b_0}$$

где $\hat{V}$ – это оператор, который меняет местами компоненты вектора с согласно описанному взаимодействию.

Комментарий

Для поиска вектора связанности, который соответствует отклонению вектора в полном пространстве от ближайшего сепарабельного вектора, следует найти минимум функции длины вектора связанности от компонент векторов $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{b}}$, из которых составлен ближайший сепарабельный вектор $\tilde{\boldsymbol{c}}$.