Задача о струне и мембране:

В задаче требуется построить модель колебания сначала струны, а потом мембраны при известном начальном возмущении системы.

Струна:

Уравнение колебания струны может быть задано гиперболическим уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

в данных обозначениях струна лежит на оси ‘x’, а u – это отклонение струны от невозмущённого положения вдоль оси, перпендикулярной ‘x’. Параметр v характеризует скорость распространения возмущения по струне и зависит от её натяжения и жёсткости. В простейшем случае будем считать, что натяжение струны однородное и не зависит от координаты x.

Для моделирования динамики струны зададим её начальное возмущение и наложим условия на края струны. Пусть длина струны равна L и функция u на краях струны в каждый момент времени равна нулю, то есть струна жёстко закреплена. Начальное возмущение задаётся таким образом, что функция u кусочно-гладкая: она равна единице в точке x_c, которая делит струну в пропорции 3 к 1, и линейно спадает до нуля к краям струны. Начальная скорость изменения u равна нулю вдоль всей струны.

Используя разностную схему для гиперболического уравнения, требуется промоделировать динамику струны с течением времени и визуализировать её как анимацию. Параметр жёсткости v и длину струны можно выбрать на своё усмотрение. При замене частных производных на отношение конечных разностей следует использовать неравенство:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \ll \frac{1}{v}$$

После моделирования колебания струны с равномерной жёсткостью следует решить эту же модельную задачу для неравномерной жёсткости (функция обсуждается индивидуально для каждого случая).

Мембрана:

Уравнение колебания струны может быть задано гиперболическим уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

в данных обозначениях струна лежит в плоскости ‘xy’, а u – это отклонение мембраны от невозмущённого положения вдоль оси ‘z’. Параметр v характеризует скорость распространения возмущения по мембране и зависит от её натяжения и жёсткости. В простейшем случае будем считать, что натяжение мембраны однородное и не зависит от координат x и y.

Для моделирования динамики мембраны зададим её начальное возмущение и наложим условия на края мембраны. Пусть мембрана занимает прямоугольную площадку с вершинами в точках (0,0), $(0,L_y)$, $(L_x,0)$ и (L_x,L_y). Функция u на краях мембраны в каждый момент времени равна нулю, то есть мембрана жёстко закреплена. Начальное возмущение задаётся формулой:

$$u(x, y, 0) = \exp\left\{-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{r^2}\right\}$$

Начальная скорость изменения u равна нулю вдоль всей струны.

Используя разностную схему для гиперболического уравнения, требуется промоделировать динамику мембраны с течением времени и визуализировать её как анимацию. Параметр жёсткости v и размеры мембраны можно выбрать на своё усмотрение. При замене частных производных на отношение конечных разностей следует использовать неравенства:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \ll \frac{1}{v}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta y} \ll \frac{1}{v}$$

После моделирования колебания струны с равномерной жёсткостью следует решить эту же модельную задачу для неравномерной жёсткости (функция обсуждается индивидуально для каждого случая).