

Задание

Получить приближительное решение данной краевой задачи уравнения в частных производных математической физики методом сеток.

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} - \frac{1}{v} \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0 \\ u'_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (2) \quad , \text{ где } u_0 = \begin{cases} 1, x = \frac{3l}{4} \\ \frac{4}{3l}x, x < \frac{l}{4} \\ -\frac{4}{l}x + 4, x > \frac{l}{4} \end{cases}$$

Данное уравнение является уравнением гиперболического типа и физически отражает процесс колебания струны. Искомое решение $u = u(x, t)$ – вертикальное отклонение струны в точке x в момент времени t .

Данная краевая задача состоит в нахождении функции $u = u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению (1), а также заданным начальным и граничным условиям (2).

Решение задачи с помощи разностной схемы

В явной разностной схеме значение сеточной функции на последующем слое полностью определяется значением её на предыдущем слое по рекуррентным формулам. В данной задаче аппроксимацию дифференциальных операторов проведём по следующим шаблонам:

1. Аппроксимация дифференциального уравнения

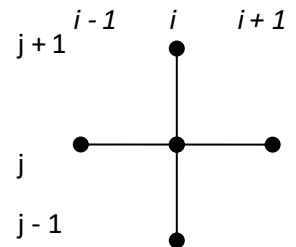
Для сведения задачи к явной разностной схеме используем шаблон "крест".

Получаем конечно-разностную систему:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} - \frac{1}{v^2} \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} = 0$$

Обозначим $g = \frac{\tau}{h}$ и выразим $u_{i,j+1}$ через остальные значения сеточной функции, входящие в уравнение:

$$u_{i,j+1} = \frac{g^2}{v^2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) - u_{i,j-1} + 2 \left(1 - \frac{g^2}{v^2} \right) u_{i,j} \quad (3)$$
$$i = 1, \dots, m-1$$
$$j = 1, \dots, n-1$$



Уравнение (3) должно выполняться для всех внутренних узлов сетки. Для того чтобы система стала полностью определенной, необходимо дополнить ее уравнениями, получаемыми из аппроксимации краевых и начальных условий.

2. Аппроксимация 1-го начального условия

$$u_{i,0} = \begin{cases} 1, i = \left\lfloor \frac{3l}{4h} \right\rfloor \\ \frac{4}{3l}ih, i < \left\lfloor \frac{3l}{4h} \right\rfloor \\ -\frac{4}{l}ih + 4, i > \left\lfloor \frac{3l}{4h} \right\rfloor \end{cases} \quad (4)$$

$$i = 0, \dots, m$$

3. Аппроксимация граничных условий

$$\begin{cases} u_{0,j} = 0 \\ u_{l,j} = 0 \\ j = 0, \dots, n \end{cases} \quad (5)$$

4. Аппроксимация 2-го начального условия

Для более точного аппроксимирования 2-го начального условия разложим $u(x, y)$ в окрестности точки $(x, 0)$ по формуле Тейлора и, используя 1-е и 2-е начальные условия, а также принимая во внимание уравнение (4) получаем перейдем к конечным разностям:

$$u_{i,1} = (1 - h)u_{i,0} \quad (6)$$

$$i = 0, \dots, m$$

Формула (6) используется на начальном этапе для вычисления значения функции $u(x, y)$ на первом слое, по известным значениям функции на нулевом слое и на границе.

Итак, $u_{i,j}$ при $j = 0, j = 1$ определены. Включается рекуррентная процедура, описываемая уравнением (3), и вычисляется $u_{i,j}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m - 1$, для каждого фиксированного $j = 2, \dots, n - 1$.