Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы

(Development and Implementation of Algorithms for Constrained Volume Triangulations: Iterative Algorithms Preprint, Inst. Appl. Math., the Russian Academy of Science)

Галанин М.П., Щеглов И.А.
(M.P.Galanin, I.A.Sheglov)

ИПМ им. М.В.Келдыша РАН

Москва, 2006
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00421)

Аннотация

Рассмотрены итерационные методы трехмерной дискретизации пространственных областей (построения тетраэдрических сеток): методы граничной коррекции, методы на основе критерия Делоне и методы исчерпывания. Приведены варианты алгоритмов для каждого из указанных методов. Обсуждены особенности построения сеток в сложных областях.

Abstract

Three main families of iterative algorithms for free and constrained simplicial volume triangulation are described: boundary correction (including "octree" algorithm), Delaunay-based methods and advancing front approach. For each method type an example algorithm is given.

Содержание

1. Введение

Среди двух классов методов триангуляции - прямых и итерационных - последние обладают достаточной универсальностью и поэтому, в отличие от прямых, могут быть использованы для триангуляции областей довольно произвольного вида. За эту универсальность приходится расплачиваться существенно большим потреблением ресурсов и более трудоемкой реализацией метода в конкретном алгоритме.

В настоящее время разработано большое количество программных пакетов на основе того или иного итерационного метода, реализующих построение сеток (частично или полностью) в автоматическом режиме. В основном эти пакеты коммерческие, что вполне оправдано с учетом затрачиваемых на их создание усилий, ведь трехмерное пространство имеет ряд неприятных особенностей, существенно затрудняющих жизнь разработчику [45].

Сетки, построенные итерационными методами, как правило, неструктурированы и неоднородны. Неструктурированность обусловлена тем, что топология сетки формируется в процессе построения, и поэтому естественно может варьироваться даже в пределах одной подобласти. По этой же причине однородность если и может возникнуть, то только случайно.

Поскольку перед построением сетки ничего нельзя сказать о ее будущей структуре, нельзя гарантировать и ее качества. Часто построенную сетку можно существенно улучшить с помощью одного из многочисленных методов оптимизации [16, 19, 34]. Этой возможностью обычно не пренебрегают, благо что время, затрачиваемое на оптимизацию, как правило, существенно меньше времени, затрачиваемого на построение.

Целью данной работы является рассмотрение и классификация существующих методов построения тетраэдрических сеток в трехмерных областях. Ввиду значительного объема информации ниже рассматриваются только так называемые "итерационные методы". Прямые методы описаны в [45].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00421).

2. Методы граничной коррекции

В самом названии этой группы методов содержится их основная идея. "Наложив" на заданную область некоторую уже построенную сетку, можно отсечь от этой сетки все выходящие за пределы нужной области фрагменты, а затем скорректировать положение узлов, лежащих вблизи границы, так, чтобы они попали в "углы", на "ребра" и на "грани" области.

Таким образом, алгоритм разбивается на два различных этапа:
1) построение "первичной" сетки и 2) ее коррекцию. Поскольку эти этапы практически не связаны друг с другом, рассмотрим их отдельно.

2.1. Построение первичной сетки

Самый простой подход к решению этой задачи - это использование одного из методов на основе шаблонов. В этом случае в качестве области для построения первичной сетки выбирают одну из подходящих геометрических форм, для которых разработаны шаблоны (разумеется, эта область должна полностью включать в себя заданную). Как правило, в качестве такой "супер-области" используют параллелепипед, хотя в некоторых случаях (например, радиальной симметрии) удобнее использовать цилиндр.

Дискретизация на основе шаблонов подробно рассмотрена в работе [45], поэтому не будем более останавливаться на этом варианте; заметим лишь, что построенная при этом итоговая сетка получается близкой к равномерной, то есть линейные размеры ее элементов

приблизительно равны. Это обусловлено тем, что при построении первичной сетки не используется никакой информации о геометрии заданной области.

Существует алгоритм, который позволяет учитывать эти особенности и таким образом строить своего рода адаптивные сетки (правда, адаптированные к геометрии, а не к конкретной задаче). Этот алгоритм был разработан группой Марка Шепарда (Mark Shephard) из университета Ренсселаера (США) в 80 годах XX столетия и получил название "octree" (его двумерный вариант называется "quadtree"). С тех пор было предложено несколько его разновидностей [30, 39, 40, 44]; рассмотрим одну из них.

Идея алгоритма заключается в следующем: исходная область помещается в кубическую сетку, элементы которой последовательно дробятся на более мелкие кубы до тех пор, пока размеры получаемых в итоге кубических ячеек не достигнут желаемой величины; при этом каждый куб дробится только в том случае, если его грани пересекаются границей области (либо внутри куба целиком оказывается особенности вроде отверстия или полости). Таким образом удается добиться "естественного" увеличения плотности узлов вблизи границ области и ее "особенных" участков. Чтобы избежать значительных перепадов размеров элементов, дополнительно вводят ограничение на степень "раздробленности" соседних элементов - она не должна отличаться более чем на единицу. Рис. 1 иллюстрирует идею метода для двумерного случая.

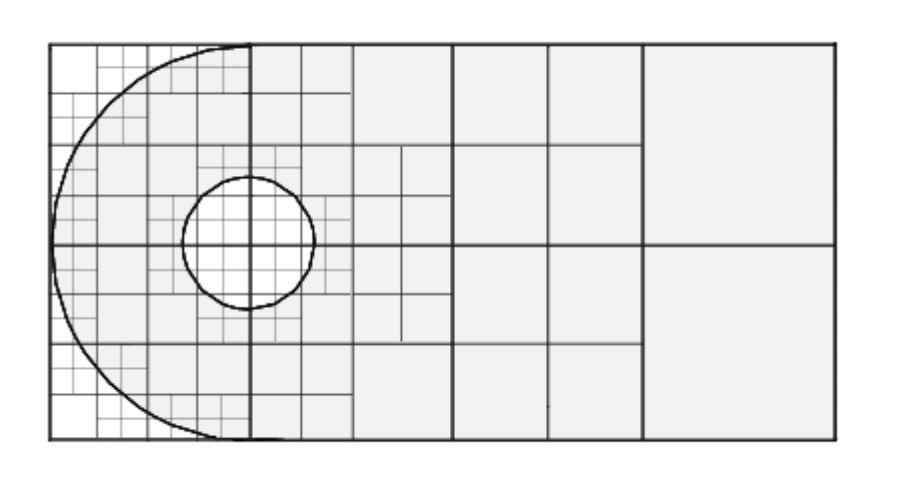


Рис. 1. Раздробление области на квадратные ячейки по алгоритму "quadtree"

Следующим этапом метода является построение треугольной (тетраэдрической) сетки на основе полученного разбиения на квадраты (кубы). Поскольку возможных вариантов размещения узлов на ребрах и гранях кубов/квадратов в такой сетке немного (для квадрата с учетом отражения и поворота - всего 6), для каждого варианта используется свой заранее заданный шаблон. На рис. 2 и рис. 3 показаны 2 набора таких шаблонов: "классический", предложенный Шепардом, и разработанный авторами вариант, основанный на вставке дополнительного узла, позволяющий получить сетки из подобных элементов (и лучшего качества).

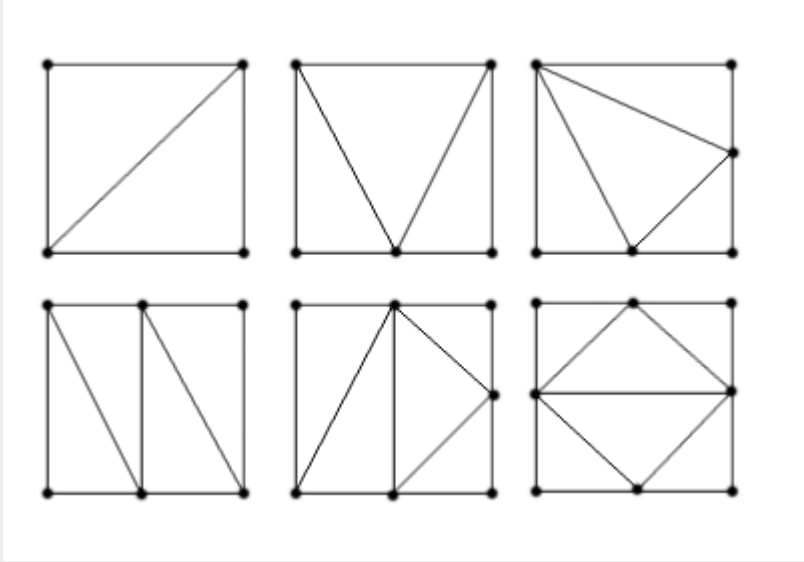


Рис. 2. "Классический" набор шаблонов для разбиения квадратов в методе "quadtree"

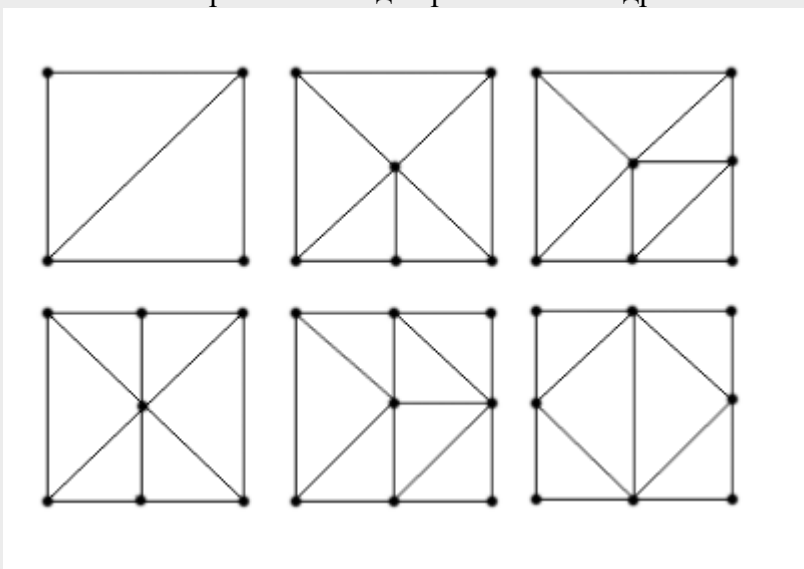


Рис. 3. Набор шаблонов с использованием дополнительного внутреннего узла, дающий лучшее качество сетки

На рис. 4 приведена сетка, получающаяся в результате применения указанных наборов шаблонов. Заметим, что описанный алгоритм без каких-либо особенностей переносится на случай 3 измерений, поэтому дополнительно рассматривать его нет смысла. Следует также обратить внимание, что полученная сетка не является структурированной, хотя в дальнейшем это не играет никакой роли (так как при граничной коррекции свойство структурированности в любом случае утрачивается).

2.2. Коррекция первичной сетки

Итак, пусть имеется некоторая сетка, наложенная на заданную область. Теперь необходимо отсечь у нее все лишнее и скорректировать положение узлов, лежащих близ границы области. Это непростая задача, метод решения которой в основном определяется способом задания самой области. Основная трудность при реализации алгоритма граничной коррекции - необходимость добиться того, чтобы "ребра" границы области были аппроксимированы ребрами сетки, а во все "углы" границы непременно попали узлы сетки. Если граница области является гладкой, таких проблем не возникает, однако нас интересует более общий случай, в котором граница может иметь ряд различных особенностей (она может быть несвязной, невыпуклой, а также состоять из фрагментов поверхностей,

пересекающихся под достаточно острыми углами, в том числе иметь конусообразные выпуклости).

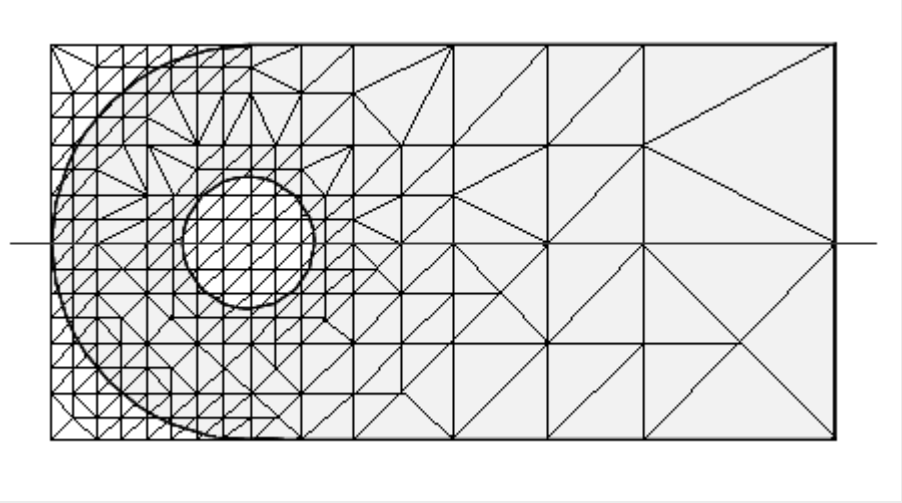


Рис. 4. Сетка, полученная на основе алгоритма "quadtree": вверху - по классическим шаблонам, внизу - по улучшенным.

Если в качестве входных данных передаются списки всех угловых точек, кривых и составляющих границу сплайнов [1] (типичный случай, когда область импортируется из CAD-системы), то проблема решается достаточно просто. Задается массив "особых точек", куда входят все "угловые" и другие характерные точки, в которых обязательно должны размещаться узлы триангуляции. Если в области есть ребра, которым не принадлежат никакие угловые точки (примером такого ребра может служить линия пересечения цилиндра с призмой), то в указанный массив следует добавить произвольную точку, лежащую на этом ребре. Далее процесс граничной коррекции можно разбить на этапы.

1) Для каждого элемента массива "особых точек" находится ближайший узел первичной сетки и передвигается в эту точку с сохранением всех связей.

2) Для каждого элемента массива "особых точек" и для каждого ребра границы, в которое входит эта особая точка (таких ребер может и не быть - если, например, точка является вершиной конусообразного выступа), анализируется множество узлов-соседей передвинутого в эту точку узла первичной сетки и находится узел, ближе всех лежащий к ребру границы. Этот узел проецируется на ребро, и среди множества его соседей вновь находится узел, лежащий ближе всех к ребру (исключая узел, спроецированный на предыдущей итерации). Процедура проекции и поиска подходящих узлов-соседей повторяется до тех пор, пока найденный узел не окажется элементом множества "особых точек". (То есть "ребро" границы окажется полностью аппроксимированным цепочкой ребер первичной сетки.) Обработанное "ребро" исключается из дальнейшего рассмотрения (в рамках данного этапа алгоритма). По окончанию этого этапа во всех "углах" границы области будут помещены узлы сетки, а все "ребра" окажутся аппроксимированы цепочками ребер. Далее остается только скорректировать положение узлов вблизи сплайнов; это один из самых простых этапов.

3) Для каждого сплайна рассматриваются ребра первичной сетки, пересекающие этот сплайн. Находится точка пересечения ребра с поверхностью и в нее перемещается тот

конец ребра, который лежит к ней ближе. Следует делать именно так, а не проецировать ближайший узел на поверхность (что на первый взгляд кажется лучшим вариантом), поскольку в этом случае спроецированный узел может оказаться за пределами заданной области или попасть внутрь другого тетраэдра. Если ребро делится сплайном точно пополам, для выбора перемещаемого узла проводится дополнительный анализ на основе, например, качества получающихся при этом тетраэдров.

4) В итоге проводится отсечение всех фрагментов первичной сетки, оставшихся за пределами заданной области. (Иначе говоря, удаляются все узлы и ребра первичной сетки, лежащие вне заданной области).

Алгоритмы граничной коррекции обладают достаточно высокой скоростью работы, и это, пожалуй, их единственное достоинство (за исключением сравнительной простоты реализации). Помимо уже указанных повышенных требований к входным данным, они обладают рядом других существенных недостатков. Во-первых, их крайне затруднительно использовать для дискретизации областей с заданной триангуляцией границы (фактически невозможно). Во-вторых, эти методы ненадежны, поэтому построенные с их помощью сетки необходимо проверять на правильность структуры. В-третьих, эти сетки обладают априори низким качеством элементов вблизи границы, поэтому для них столь же необходим и этап оптимизации (следует заметить, что при этом, как правило, качество сетки удается существенно улучшить). В-четвертых, алгоритм граничной коррекции обладает низкой "чувствительностью", поэтому при недостаточно малом шаге триангуляции некоторые особенности области могут быть просто-напросто потеряны. В этом смысле алгоритм "octree" обладает лучшими свойствами по сравнению с другими вариантами.

Несмотря на указанные выше недостатки, алгоритм граничной коррекции может быть успешно применен для дискретизации сложных областей, включающих в себя ограничения вида внутренних поверхностей и ребер. Поскольку с алгоритмической точки зрения внутренние "ребра" ничем не отличаются от внешних, при этом не придется даже как-то модифицировать саму программу.

Типичные ошибки, с которыми сталкиваются при реализации алгоритмов граничной коррекции - это "слипание" узлов (когда два узла первичной сетки оказываются перемещены в одну точку), что приводит к появлению вырожденных тетраэдров, а также появлению тетраэдров с нулевым объемом (все четыре узла оказываются в одной плоскости). Решение обеих проблем лежит в банальном удалении "лишних" вершин и последующем обновлении связей.

3. Методы на основе критерия Делоне

В первую очередь напомним, что такое критерий Делоне. Говорят, что треугольная сетка на плоскости удовлетворяет критерию Делоне (или является триангуляцией Делоне), если внутрь окружности, описанной вокруг любого треугольника, не попадают никакие другие узлы этой сетки. Этот термин также употребляется и по отношению к треугольнику сетки: треугольник удовлетворяет критерию Делоне (или условию "пустой окружности"), если критерию Делоне удовлетворяет сетка, составленная только из самого треугольника и соседних с ним треугольников [2, 6].

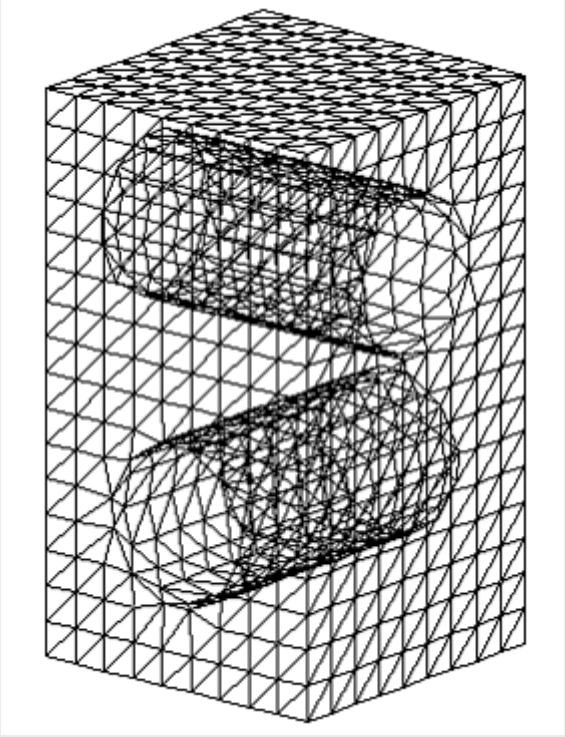


Рис. 5. Пример триангуляции простой трехмерной области (призма с двумя цилиндрическими отверстиями) методом граничной коррекции. Показаны только граничные узлы "видимых" сплайнов.

Триангуляция Делоне обладает рядом интересных свойств [2, 23, 30]. В частности, триангуляция Делоне обладает наибольшей суммой минимальных углов всех своих треугольников, а также наименьшей суммой радиусов описанных вокруг треугольников окружностей среди всех возможных сеток на той же системе точек. Поскольку величины минимальных углов явным образом фигурируют в некоторых оценках качества аппроксимации [4], можно сказать, что триангуляция Делоне для заданного набора точек в определенном смысле является оптимальной.

Алгоритмы построения сеток на основе критерия Делоне впервые были предложены Чарльзом Лоусоном (Charles Lawson) и Дэйвом Уотсоном (Dave Watson) [43]. За короткое время их идеи были существенно развиты, и в настоящий момент проблема двумерной триангуляции методами на основе критерия Делоне фактически является закрытой. Разработаны быстрые и эффективные алгоритмы построения и оптимизации сеток, в том числе и в сложных (двумерных) областях [2, 3].

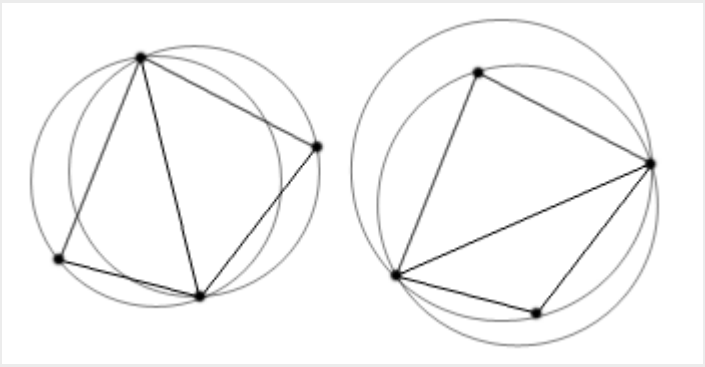


Рис. 6. Сетка, удовлетворяющая критерию Делоне (слева), и не удовлетворяющая ему (справа).

При попытках обобщить идеи алгоритмов на случай трех измерений обнаружился ряд проблем. Во-первых, выяснилось, что критерий Делоне в трехмерном случае не работает в том смысле, что сетка, удовлетворяющая критерию Делоне, не максимизирует минимальные углы[2]. Во-вторых, обнаружилось, что в пространстве не работают также и алгоритмы последовательного улучшения. Остановимся на этом подробнее.

В двумерном случае существует простой метод приведения произвольной триангуляции к триангуляции Делоне. Идея основана на том факте, что пару треугольников, не удовлетворяющих критерию Делоне, можно заменить на пару дуальных к ним треугольников, которые уже обязательно удовлетворяют критерию. Это достигается перестановкой внутреннего ребра четырехугольника, образованного треугольниками (см. рис. 6). Операцию (так называемый "флип", от англ. flip) продолжают итерационно для каждой пары треугольников, не удовлетворяющих критерию, до тех пор, пока такие треугольники остаются.

У двумерного "флипа" есть и трехмерный аналог, хотя основанный на другой идее. Оказывается, *почти* любые два соседних тетраэдра можно превратить в три. Для этого достаточно вставить внутрь шестигранника, образованного тетраэдрами, внутреннее ребро (рис. 7), причем сделать это можно единственным образом. Слово "почти" стоит здесь потому, что если любые три вершины этого шестигранника лежат на одной прямой либо четыре его вершины лежат в одной плоскости, то эта операция приведет к образованию вырожденных тетраэдров. Операция замены 2 тетраэдров на 3 и наоборот называется "трейд"[3] (от англ. trade). Как и "флип", "трейд" позволяет заменять элементы, не удовлетворяющие критерию Делоне, на элементы, ему удовлетворяющие.

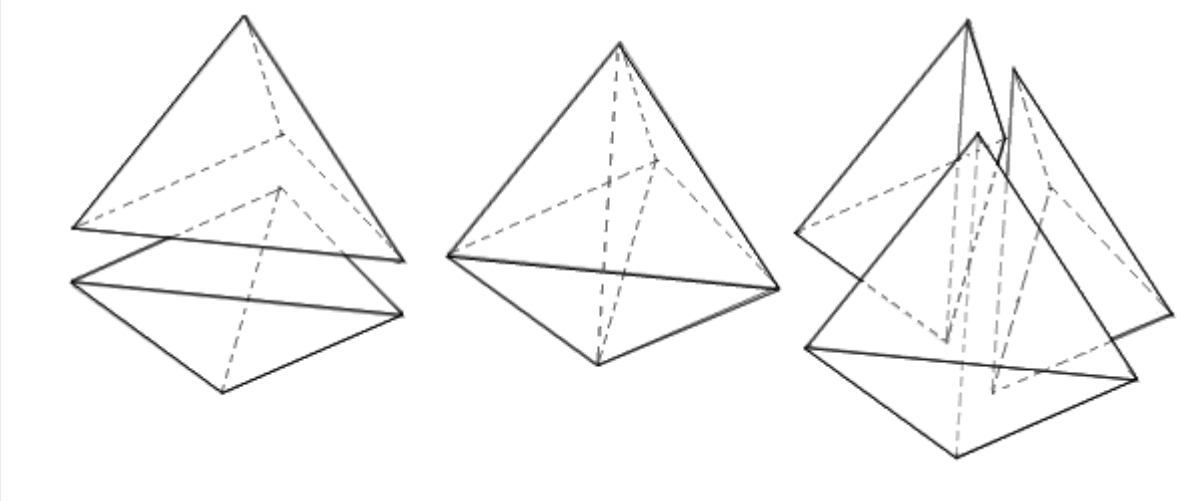


Рис. 7. "Трейд" - замена 2 тетраэдров на 3

Попытки использовать "трейд" для приведения произвольной трехмерной сетки к триангуляции Делоне закончились неудачно, поскольку такие алгоритмы очень часто зацикливались в локальных оптимумах. Вместе с тем не так давно был получен важный теоретический результат: канадский математик Б. Джо (Barry Joe) доказал, что если к уже существующей триангуляции Делоне добавить новые тетраэдры (разбив один из внутренних или присоединив тетраэдр к внешней грани), то полученную сетку можно гарантированно привести к триангуляции Делоне с помощью последовательных "трейдов" [23]. Этот факт играет огромную роль в построении триангуляций Делоне с ограничениями.

3.1. Построение триангуляции Делоне на заданном наборе точек

Как следует из названия раздела, исходными данными алгоритма является некий набор точек, которые должны стать узлами будущей триангуляции. Очевидным достоинством такого подхода является крайне точный контроль над размерами элементов сетки -

фактически, эти размеры определяются плотностью размещения узлов. Увеличивая плотность размещения узлов в особенных местах области, можно автоматически добиться локального сгущения сетки вблизи этих особенностей. Кроме того, если область является сложной, можно столь же легко обеспечить размещение узлов на поверхностях и ребрах ограничений.

Что касается самого способа предварительного размещения узлов, то здесь возможно множество вариантов. Заметим, что следует категорически воздержаться от принципа *случайного* размещения узлов, поскольку при этом весьма вероятно появление точек, лежащих очень близко друг к другу, что, в свою очередь, неминуемо влечет появление в сетке очень коротких ребер и, соответственно, тетраэдров предельно низкого качества.

Самый простой и часто используемый метод размещения узлов основан на принципах граничной коррекции. Исходная область помещается в некоторую супер-область, заполняемую узлами в соответствии с заданной плотностью размещения узлов, затем узлы, лежащие близ границы области, проецируются на нее, а узлы вне области удаляются.

Существуют и другие, более сложные методы. Так, метод под названием "упаковка пузырьков" ("bubble packing") основан на физической аналогии заполнения области мыльными пузырьками. В данном приложении модель этого процесса, разумеется, сильно упрощена - до уровня сил отталкивания между центрами пузырьков. Возникающие при этом дополнительные (довольно значительные) затраты на решение системы дифференциальных уравнений компенсируются максимально оптимальным размещением узлов, позволяющим получить сетки с априори высоким качеством триангуляции [41]. Используются и другие варианты [5, 8, 9, 35, 42].

Вернемся к задаче построения триангуляции Делоне на заданном наборе точек. Таких алгоритмов существует большое количество, почти все они адаптированы из двумерных вариантов [2], благо что используемые в них геометрические соображения универсальны и годятся для любого числа измерений. Рассмотрим один такой алгоритм (заметим, что в данном алгоритме сетку имеет смысл хранить именно как список элементов-тетраэдров, а не как узлы со списком "соседей").

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Формирование множества U - набора заданных узлов.

2. Создание так называемой "суперструктуры", представляющей собой произвольный выпуклый многогранник с треугольными гранями такой, что все заданные узлы лежат внутри него. Вершинами многогранника могут быть как элементы U, так и дополнительные узлы. В дальнейшем до определенного этапа с этими узлами обращаются как и со всеми остальными. В качестве суперструктуры может быть использован и тетраэдр.

3. Формирование множества G узлов сетки, куда переносятся все узлы U, использованные как вершины суперструктуры (если такие есть).

4. Если в качестве суперструктуры использован тетраэдр, производится переход к п. 5; иначе на основе узлов суперструктуры формируется триангуляция Делоне. Если в качестве суперструктуры использован правильный многогранник (октаэдр или икосаэдр), то это можно сделать следующим образом: выбрав *произвольный* узел из U, перенести его в G и путем вставки ребер между этим узлом и всеми вершинами многогранника сформировать

сетку из n тетраэдров, где n - число граней, равное 8 или 20 соответственно. Эта сетка будет являться триангуляцией Делоне [22].

5.Поиск для всех тетраэдров сетки центров и радиусов описанной сферы.

6. Выбор произвольного узла q из множества U и перенос его в G, затем удаление всех тетраэдров, для которых q попадает внутрь описанной сферы. При этом в сетке образуется полость в виде многогранника, в общем случае имеющего звездную форму. При этом любой луч, исходящий из q, должен пересекать границу этого многогранника в единственной точке. Если обнаруживаются тетраэдры, для которых q лежит в плоскости одной из граней (это возможно в случае неоднозначности триангуляции Делоне, если, например, пять или больше точек лежат на одной сфере), то их тоже необходимо удалить. Заметим, что фактически ребро (или грань) удаляется только в том случае, если удаляются все смежные с ним тетраэдры; при этом ребра и грани суперструктуры не удаляются никогда. Новые тетраэдры образуются путем вставки ребер между q и вершинами этого многогранника. Доказано [23], что при этом получается триангуляция Делоне.

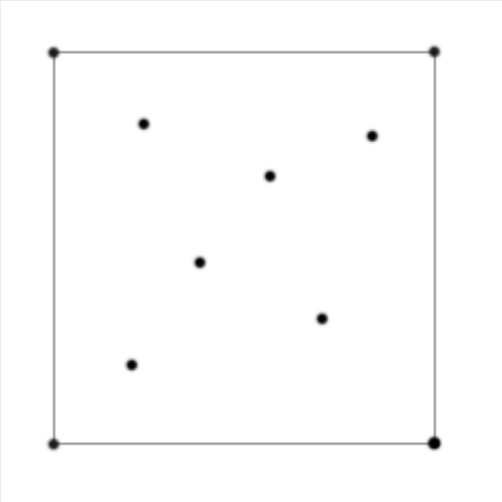
7. Нахождение для новообразованных тетраэдров центра и радиуса описанной сферы.

8. Если множество U не пусто, то переход к п. 6, иначе - к п. 9.

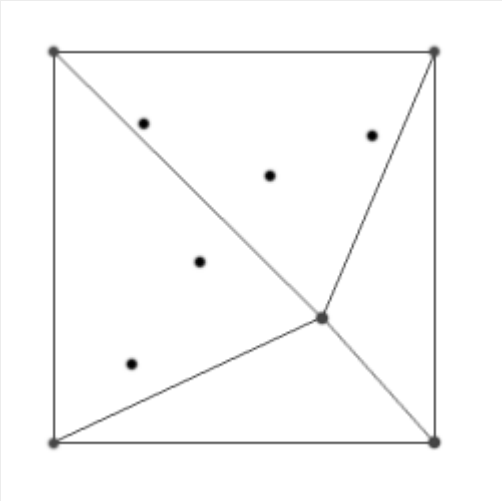
9. Удаление из сетки всех тетраэдров, в числе вершин которых есть вспомогательные узлы, использовавшиеся для построения суперструктуры. В результате получается сетка, построенная только на заданных узлах (G).

Двумерный аналог этого процесса проиллюстрирован на рис. 8.

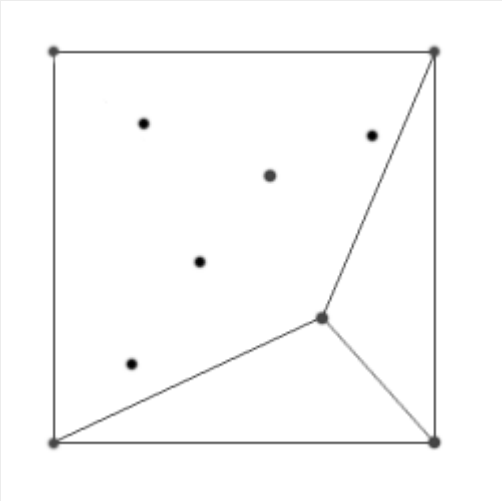
а) Заданный набор точек



б) Постройка суперструктуры (квадрат), один из заданных узлов используется как вершина квадрата



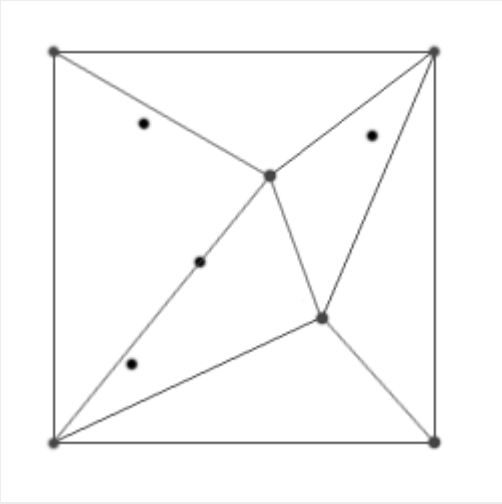
в) Постройка исходной триангуляции Делоне. Т.к. квадрат является правильным



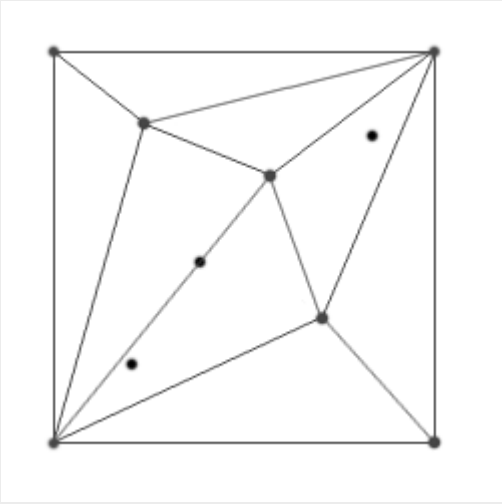
г) Выбор нового (произвольного) узла и удаление всех треугольников, для которых

многоугольником, для этого можно использовать любой из заданных узлов

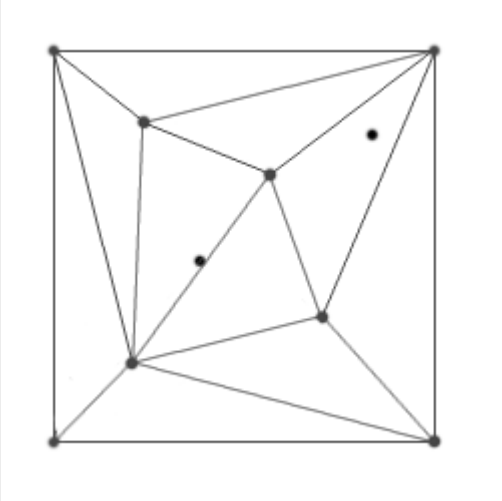
выбранный узел лежит внутри описанной окружности



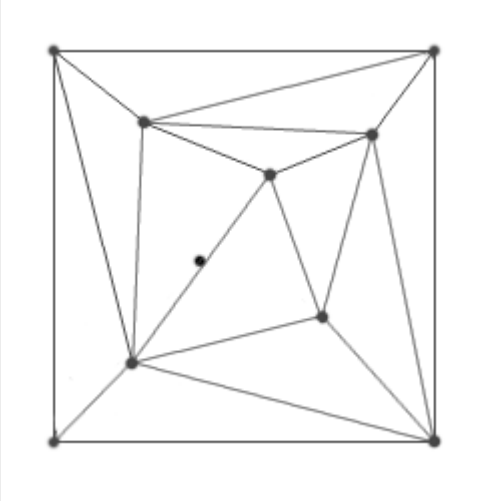
д) Соединение ребрами новой вершины с углами образовавшегося многоугольника



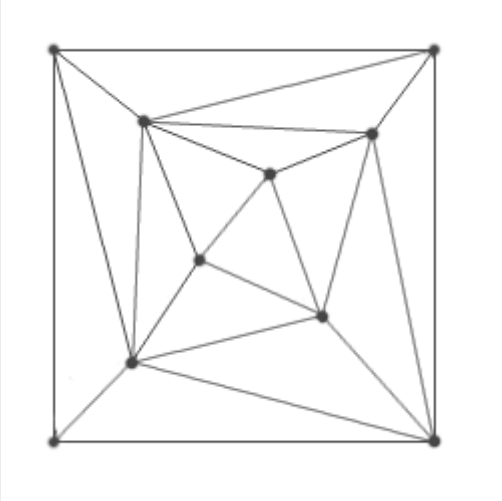
е) Выбор следующего узла и дальнейшее повторение процедуры, пока не останется неиспользованных заданных узлов



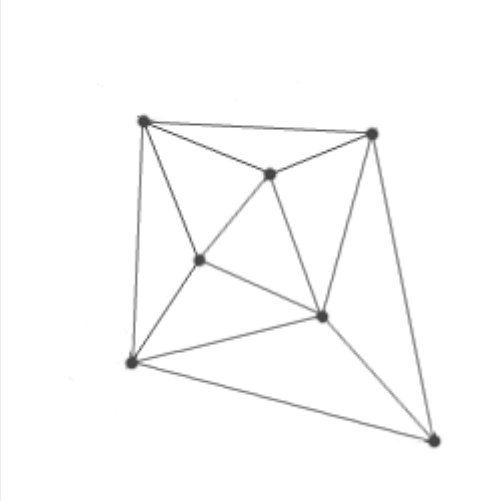
ж) Обработка еще одной точки



з) Еще одной



и) Сетка построена



к) Удаление из сетки всех треугольников, среди вершин которых были вспомогательные узлы суперструктуры

Рис. 8. Двумерный вариант алгоритма на основе критерия Делоне

Описанный алгоритм позволяет гарантированно строить триангуляцию Делоне для произвольного набора точек, причем граница сетки будет представлять собой (в общем случае невыпуклый) многогранник с треугольными гранями, опирающимися на наиболее удаленные от центра триангуляции узлы. К сожалению, на практике приходится иметь дело с областями, представляют собой более сложные геометрические формы.

В принципе, описанный алгоритм можно использовать для любой области, если в качестве входных данных передавать не только набор точек, но и некую грубую начальную триангуляцию Делоне заданной области (то есть сразу перейти к п. 5). С другой стороны, если такая триангуляция уже есть, то проще получить итоговую сетку методами дробления - измельчив имеющиеся тетраэдры до нужных размеров, что будет гораздо быстрее и с учетом последующей минимальной оптимизации обеспечит примерно такое же качество. Поэтому такой вариант может быть использован, только если необходимо обеспечить локальное сгущение сетки в нужных местах области (т.к. сетки, полученные методами дробления, являются равномерными). При этом остается вопрос о построении начальной грубой сетки, что само по себе является отдельной задачей. Именно поэтому куда большее значение имеет задача построения триангуляции Делоне с ограничениями

3.2. Триангуляции Делоне с ограничениями

Триангуляцией Делоне с ограничениями в виде поверхностей называют такую сетку, для которой внутрь сферы, описанной вокруг любого тетраэдра этой сетки, не попадают никакие другие *видимые* вершинам этого тетраэдра узлы сетки (считается, что точка a видима точке b (и наоборот), если отрезок $[a,b]$ не пересекает никаких поверхностей ограничений). Что такое триангуляция Делоне с ограничениями, если ограничения представлены в том числе и отрезками, до сих пор общепринятого определения нет.

В двумерном случае проблема построения триангуляции Делоне с ограничениями давно и успешно решена, причем самыми разными способами [3]. Что касается трех измерений, то к настоящему времени разработано лишь несколько алгоритмов, и все они базируются на одном и том же принципе. Их идея заключается в том, чтобы сначала в заданной области построить триангуляцию Делоне *без* ограничений, а затем восстановить поверхности и линии ограничений путем локальной перестройки сетки. Различие между алгоритмами состоит как раз в том, как именно осуществляется эта перестройка [5, 6, 24, 25].

Рассмотрим один из вариантов такого алгоритма, основанный на идее
К. Хэзлвуд (Carol Hazlewood). В своей работе [21] она доказала, что возможно построить триангуляцию Делоне с ограничениями, ретриангулируя (только) те тетраэдры, которые пересекаются поверхностями ограничений. В статье Хэзлвуд этот факт доказывается для случая пересечения тетраэдра произвольным выпуклым многогранником. Для ясности упростим алгоритм, введя дополнительные несложные требования к входным данным. А именно, потребуем, чтобы поверхности ограничения были представлены либо плоскостями, либо слабо изогнутыми (радиус кривизны много больше линейных размеров элементов) сплайнами, а также, чтобы все угловые точки поверхностей ограничения использовались на первом этапе для построения триангуляции Делоне. В результате все тетраэдры построенной триангуляции могут пересекаться только либо "ребрами" поверхностей ограничений, либо самими поверхностями. Поскольку вариантов таких пересечений немного, для каждого из них можно использовать заранее подготовленный шаблон ретриангуляции. Процесс можно упростить еще больше, если предварительно добиться, чтобы все ребра ограничений были аппроксимированы цепочкой ребер триангуляции. Тогда

тетраэдры смогут быть пересечены только плоскостями (сплайнами), а возможных вариантов такого пересечения всего ТРИ (рис. 9).

Таким образом, алгоритм можно разбить на четыре этапа:

1) построение триангуляции Делоне без ограничений;

2) восстановление "ребер" ограничений ("edge recovery");

3) восстановление поверхностей ограничений ("face recovery");

4) отсечение "лишних" тетраэдров, оказавшихся вне границы заданной области ("trimming").

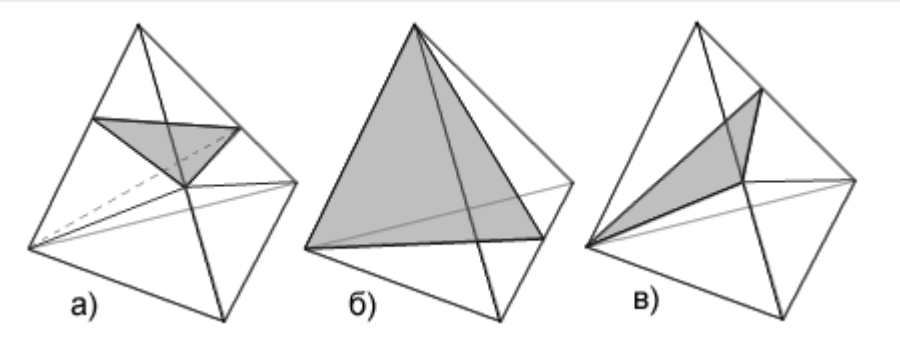


Рис. 9. Три возможных варианта пересечения тетраэдра плоскостью и соответствующие способы разбиения образующихся частей на тетраэдры: а) плоскость не пересекает вершины; б) плоскость пересекает две вершины; в) плоскость пересекает только одну вершину.

Подробнее остановимся на каждом этапе.

Этап 1. Несмотря на кажущуюся простоту, этот этап имеет несколько важных нюансов. Во-первых, как уже было сказано, все "углы" поверхностей ограничения (включая концы "незакрепленных" "ребер"), должны в обязательном порядке войти в набор узлов, по которым строится триангуляция. Во-вторых, поскольку многогранник, получающийся при использовании описанного выше алгоритма, не обязательно будет выпуклым, вполне возможна ситуация, при которой некоторые участки поверхностей ограничений окажутся вне этого многогранника. Чтобы не допустить этого, можно использовать слой дополнительных узлов, окружающий заданную область. На 4 этапе все тетраэдры, образованные с этими узлами, удаляются наряду с остальными тетраэдрами, оказавшимися "по ту сторону границы".

Этап 2. Восстановление "ребер" производится с помощью дополнительных узлов [4]. Заметим, что если в двумерном случае всегда возможно построить триангуляцию Делоне с ограничениями без использования дополнительных узлов, то в трехмерном случае это, как правило, невозможно.

Дополнительные узлы вставляются в точки пересечений "ребер" ограничений с гранями и ребрами тетраэдров. Заметим, что вариантов пересечения "ребра" с тетраэдром всего шесть (рис. 10). Соответственно, для каждого варианта используется свой шаблон разбиения тетраэдра. При этом встает вопрос согласования триангуляции на гранях соседних тетраэдров, поскольку некоторые случаи (рис. 10. в) допускают различные способы разбиения граней. Это проблема решается установкой следующих двух правил: 1) из всех вариантов всегда выбирается самое короткое ребро; 2) если ребра равны, проводится ребро от узла с самым меньшим глобальным номером (например).

Вспомним, что тетраэдр может пересекаться не одним "ребром", а сразу несколькими. Чтобы избежать ввода дополнительных шаблонов (поскольку, теоретически, "ребер", пересекающих тетраэдр, может быть неограниченно много), достаточно обрабатывать каждое "ребро" отдельно, по очереди. При обработке каждого "ребра" остальные, еще не обработанные, не учитываются, а после обработки "ребро" уже аппроксимировано цепочкой ребер триангуляции и естественным образом входит в сетку, поэтому указанная проблема исчезает.

Этап 3. На предыдущем этапе все "ребра" ограничений были аппроксимированы цепочками ребер сетки. Теперь нужно добиться того, чтобы все поверхности ограничений были представлены множеством смежных граней. Это также осуществляется вставкой дополнительных вершин - в точках пересечения поверхностей ограничения с ребрами сетки (см. рис. 9). Опять встает вопрос об однозначности разбиения граней, но теперь он несколько сложнее. В случае, если поверхность пересекает 3 ребра тетраэдра (рис. 9. а), то возможен такой вариант проведения ребер, при котором нижняя часть элемента - пятигранник (усеченный тетраэдр) - не разбивается на тетраэдры. Разрешить эту ситуацию можно с помощью дополнительного узла, вставляемого внутрь пятигранника. Тогда согласование ребер можно осуществлять по правилам, изложенным выше.

Этап 4. Удаление лишних тетраэдров, лежащих вне границы заданной области, не представляет какой-либо проблемы. Зато можно сказать, что после их удаления граница области будет полностью аппроксимирована гранями и ребрами построенной триангуляции. То же самое относится и к внутренним ребрам и поверхностям ограничений, если таковые были.

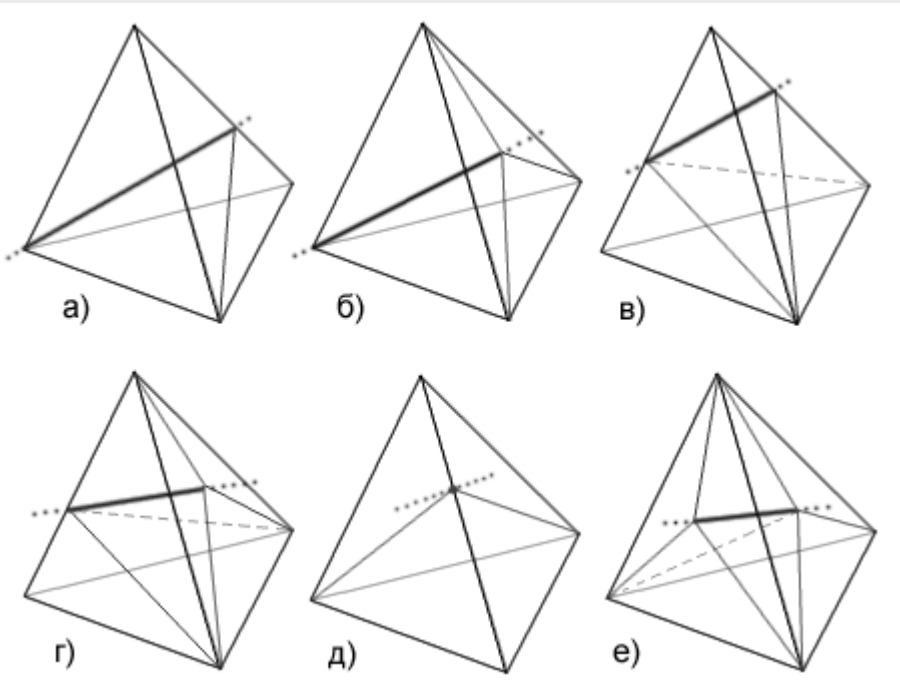


Рис. 10. Возможные варианты пересечения "ребра"ограничения с тетраэдром и соответствующие способы разбиения тетраэдра на части: а) вершина - ребро; б) вершина - грань; в) ребро - ребро; г) ребро - грань; д) ребро - вырожденный случай; е) грань - грань.

На рис. 11 представлен результат триангуляции с помощью описанного алгоритма области, являющей собой объединение икосаэдра и додекаэдра[5].

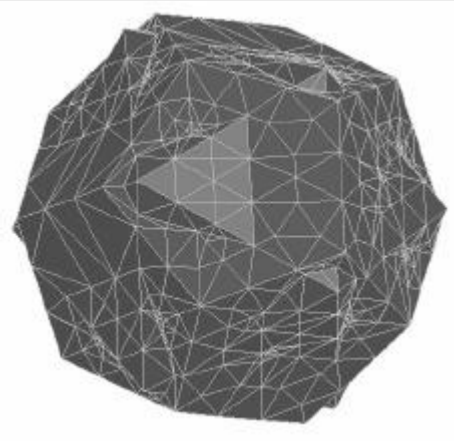


Рис. 11. Триангуляция области, представляющей собой объединение додекаэдра и икосаэдра (триангуляция Делоне с ограничениями)

Качество сеток, построенных данным методом, находится на среднем уровне (тетраэдры у границ могут иметь очень плохую форму), поэтому обычно дополнительно прибегают к одному из методов оптимизации.

В работах Б. Джо [23, 24] предложены другие варианты алгоритма, не использующие дополнительных точек и полностью основанные на локальных трансформациях, аналогичных "трейду".

3.3. Особенности технической реализации алгоритмов на основе критерия Делоне

Общий недостаток всех методов на основе критерия Делоне - крайне высокая чувствительность к точности машинных вычислений. Многие вычислительные процедуры, используемые в этих методах (нахождение центра и радиуса описанной окружности, проверка компланарности и коллинеарности векторов и т.п.) представляют собой плохо обусловленные задачи, а их неизбежное интенсивное использование столь же неизбежно влечет к накоплению ошибок округления, что в итоге может привести к ошибкам в структуре сетки или зацикливанию алгоритма.

Типичная ошибка, допускаемая в реализации этого класса алгоритмов, заключается в использовании приближенных вычислений и операций, например, использование для сравнения не нуля (x>0.0), а заданной точности (x>EPS или x>-EPS). Такой подход вполне оправдан и верен во многих других случаях, но только не в методах на основе критерия Делоне.

К сожалению, простое увеличение точности не дает существенных результатов. Использование числовых типов с удвоенной точностью перестает работать уже на задачах средней сложности (сетки с несколькими тысячами узлов). Частичным решением этой проблемы может быть использование числовых типов с фиксированной запятой. За счет отдельного хранения в 24-байтной структуре целой и десятичной частей числа (в виде целых чисел), на указанных выше плохо обусловленных задачах можно добиться точности вплоть до 10 знака, что является уже более-менее допустимым результатом [11].

Также возможно использование так называемой "точной арифметики", модули для реализации которой уже разработаны для многих популярных прикладных языков программирования (C++, Фортран и др.). В точной арифметике все иррациональные числа

представляются как набор предикатов (арифметических и алгебраических операторов) от рациональных/целых чисел и установленных констант (таких, как e, π и т.п.). То есть, например, в точной арифметике $\sqrt{3}$ - это *действительно* $\sqrt{3}$, а не 1,73205080756887729...

Недостатком обоих подходов является (весьма существенное) снижение скорости вычислений, так как ни точная арифметика, ни числа с фиксированной запятой пока аппаратно не поддерживаются процессорами современных персональных компьютеров. Поэтому все эти операции приходится реализовывать на уровне подпрограмм, что приводит к дополнительным затратам ресурсов.

Иной путь улучшения ситуации - оптимизация процедур вычисления. Так, например, сотрудники исследовательского центра IBM Павло Кавальканти и Улисс Мелло сумели создать устойчивый алгоритм построения триангуляции Делоне, сведя все геометрические операции к двум предикатам: проверке условия "пустой сферы" и нахождению положения точки относительно заданной плоскости [10].

4. Методы исчерпывания

Впервые идея метода исчерпывания была предложена Рейнальдом Лонером (R. Lohner), а его трехмерный вариант разработал профессор Гонконгского университета С.Х. Ло. Алгоритм Ло вот уже многие годы успешно используется в программном комплексе ANSYS для дискретизации произвольных объемных областей.

Общая идея этого класса методов заключается в последовательном изымании из заданной области фрагментов тетраэдрической формы до тех пор, пока вся область не окажется "исчерпана". Впрочем, этот легко представимый в воображении процесс на самом деле имеет мало общего с практической реализацией. Английское название "advancing front" (что можно перевести как "продвижение фронта"), пожалуй, лучше отражает сущность алгоритмов.

Отправной точкой всех алгоритмов этого класса является некая триангуляция границы заданной области, причем не грубая, а наиболее полно соответствующая требованиям разработчика, поскольку в дальнейшем никаких изменений этой триангуляции не будет. Заметим, что подобное требование к начальным данным может быть как положительной стороной метода, так и отрицательной. Если никаких ограничений на границу области не накладывается, то это приводит к необходимости ее отдельной триангуляции, что само по себе является самостоятельной задачей. С другой стороны, если необходимо обеспечить согласование триангуляции в сложной области, либо же триангуляция поверхности задана изначально, то использование метода исчерпывания будет самым удачным выбором.

Триангуляции границы является тем самым "фронтом", упоминаемым в названии. Используя какой-либо треугольник из фронта, можно на его основе построить тетраэдр, причем четвертой вершиной тетраэдра может быть либо другая вершина фронта, либо дополнительный узел, помещаемый внутрь заданной области. При изъятии полученного тетраэдра из фронта может быть удалено от 1 (случай вставки дополнительного узла) до 4 граней и одновременно добавлено от 1 до 3 новых граней. Таким образом, текущий фронт

дискретизации постепенно продвигается в пространстве - откуда и само название "advancing front". Обновив данные о фронте, можно вновь изъять тетраэдр, снова обновить фронт и так далее, пока вся область не окажется "исчерпана".

Заметим, что процесс исчерпывания применим как для дискретизации внутренности области, так и для внешности (например, для дискретизации пространства вокруг модели самолета в задаче аэродинамики, рис. 12).

Несмотря на кажущуюся простоту идеи, реализация алгоритма исчерпывания таит в себе ряд тонкостей (заметим, что реализация алгоритмов исчерпывания в двумерном случае намного проще). Самый сложный момент любого алгоритма исчерпывания заключается в проверке правильности построенного тетраэдра, ведь необходимо удостовериться, что этот новый тетраэдр не пересекается ни с какими уже существующими. Причем на каждой итерации алгоритма эта процедура с различными параметрами может вызываться от 5 до 20 раз (иногда и больше). От того, каким образом реализована эта проверка, главным образом и зависит производительность алгоритма.

Второй сложный момент является краеугольной проблемой трехмерной дискретизации. Нередка ситуация, когда в результате работы алгоритма образуются области, которые невозможно дискретизировать, не используя дополнительных внутренних узлов (в плоском случае любой многоугольник можно разбить на треугольники одними только внутренними ребрами).

Стоит также помнить, что во время работы алгоритма фронт может разбиться на несвязанные фрагменты.

Четвертой особенностью алгоритмов исчерпывания является необходимость контроля над объемом и/или линейными размерами получающихся тетраэдров. В отличие от методов на основе критерия Делоне, в которых линейные размеры тетраэдров фактически определяются плотностью предварительно размещаемых узлов, в методах исчерпывания размеры тетраэдров могут значительно колебаться. Появление близко расположенных тетраэдров с сильно различными размерами влечет дальнейшее расхождение размеров новых тетраэдров, в результате чего обычно появляются тетраэдры плохой формы (и низкого качества) - сильно вытянутые, приплюснутые и т.п. Чтобы не допустить этой нежелательной тенденции, обычно используют специальную контрольную функцию $f_V(x,y,z)$, которая обозначает желаемый объем тетраэдра в данной точке пространства (для равномерных сеток это будет константа). При этом из всех возможных вариантов нового тетраэдра выбирается тот, чей объем ближе всех к значению этой функции в центре тетраэдра.

Наконец, еще одна сложность связана с выбором текущей грани фронта для построения тетраэдра. Дело в том, что для этого весьма желательно использовать грань, вершинами которой являются узлы с наименьшими значениями внутренних телесных углов. В то время как вычисление *планарных* и *двугранных* углов тривиально, вычисление *телесных* углов представляет собой куда более трудоемкую задачу (особенно если учесть,

что каждый телесный угол в данном случае может быть сформирован различным числом граней) [27, 28, 29, 30, 34].

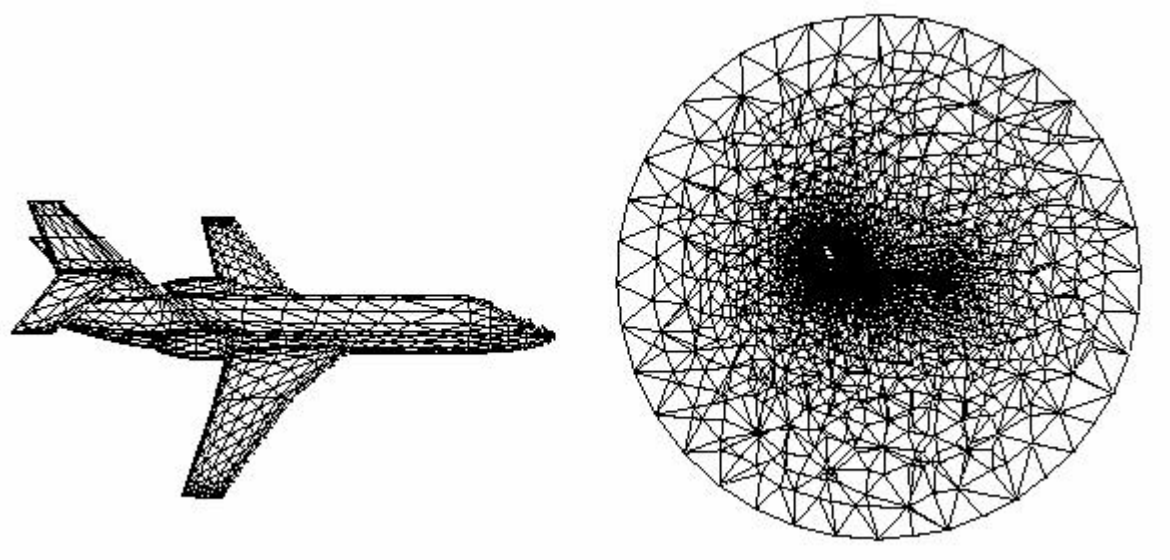


Рис. 12. Триангуляция пространства вокруг модели самолета для решения задачи аэродинамики [6]

4.1. Пример алгоритма исчерпывания

Рассмотрим алгоритм исчерпывания, разработанный вторым автором данной работы и предназначенный для построения равномерных сеток в произвольных областях.

Пусть необходимо построить сетку с желаемой средней длиной ребра, равной h (эту величину часто называют *шагом триангуляции*). В качестве исходных данных алгоритм требует два массива данных: массив, описывающий триангуляцию границы (фактически, начальный фронт; представляется в виде списка треугольников-граней) и массив вспомогательных точек F. Этот массив формируется так: заданная область помещается в супер-область (параллелепипед), которая равномерно заполняется вспомогательными точками F с шагом $h_F \approx \frac{h}{n},\ n = 7..15$ (то есть плотность их размещения должна быть на порядок больше плотности размещения узлов триангуляции.) Заметим, что, поскольку координаты этих узлов можно легко вычислять ($r_{ijk} = (ih_F, jh_F, kh_F)$), под этот массив не потребуется много памяти. Фактически, множество F будет описываться трехмерным массивом 1-битных булевых переменных (TRUE = точка существует, FALSE = точка удалена). Таким образом, хранение 8 миллионов элементов F потребует около мегабайта оперативной памяти. После формирования множества F из него удаляются все точки, лежащие вне заданной области. Оставшиеся точки будут представлять своего рода объемное растровое изображение заданной области. Именно с помощью множества F в этом алгоритме и решаются многие проблемы, указанные выше.

Поскольку алгоритм рассчитан на построение равномерных сеток, контрольная функция $f_V(x, y, z)$ считается константой, равной $0.15h^3$ (объем правильного тетраэдра с ребром h плюс допуск 25%).

Далее производятся следующие действия:

1. Формируется множество узлов G, состоящее из вершин фронта (т.е. изначально в него входят все существующие узлы сетки); для каждого узла G проводится *оценка* телесного угла. Эта оценка сводится к нахождению числа *существующих* (т.е.,

неудаленных) точек *F*, находящихся от данного узла на расстоянии не более чем $\sqrt{2}h$ (что требует существенно меньших затрат ресурсов, чем прямое вычисление телесных углов).

2. Находится вершина $g_1 \in G$ с наименьшим оценочным значением величины телесного угла и выбирается такая грань (g_1, g_2, g_3) фронта, для которой сумма оценок величин телесных углов для g_1, g_2, g_3 минимальна.

3. Формируется множество G_1 узлов *G*, находящихся от каждой из вершин выбранной грани на расстоянии не более $\sqrt{3}h$ (это множество может оказаться и пустым). Для каждого узла g_4 из G_1 рассматривается тетраэдр (g_1, g_2, g_3, g_4), причем тетраэдр отбрасывается, если **не** выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) строго внутри этого тетраэдра нет ни одной удаленной точки *F* (существование таких точек на гранях допускается);

2) внутри этого тетраэдра нет других существующих узлов сетки, за исключением самих вершин этого тетраэдра;

3) тетраэдр не пересекается никаким существующим ребром сетки (считается, что тетраэдр пересекается ребром, не являющимся ребром этого тетраэдра, если у него с этим ребром есть хотя бы одна общая точка, не являющаяся вершиной этого тетраэдра.)[7];

4) объем тетраэдра не больше максимально допустимого ($0.15h^3$).

Из всех тетраэдров (g_1, g_2, g_3, g_4) выбирается тетраэдр наилучшего качества [45] и производится переход к п. 5; если же тетраэдров, удовлетворяющих указанным условиям, не оказалось, то осуществляется переход к п. 4.

4. Находится такая точка p внутри еще неисчерпанной области, что:

1) тетраэдр (g_1, g_2, g_3, p) удовлетворяет всем условиям п. 3;

2) в шаре $B(p, 2h/n)$ нет ни одной удаленной точки *F* (это предотвращает размещение узла *p* слишком близко от граней и вершин существующих тетраэдров).

Вариант алгоритма поиска узла *p* рассмотрен ниже.

5. Удаляются все вершины *F*, попавшие внутрь (и на границы) сформированного тетраэдра. Затем фронт обновляется по следующей схеме: рассматривается каждая грань сформированного тетраэдра и

1) если грань является гранью фронта, то она удаляется из фронта;

2) если грань НЕ является гранью фронта, она добавляется во фронт.

6. Если еще остались неудаленные точки *F* или (что эквивалентно) фронт не пуст (то есть область еще не исчерпана полностью), осуществляется переход к п. 1, иначе процесс окончен.

Таким образом, массив *F* используется сразу для нескольких целей: для оценки величины телесного угла, для контроля правильности построения и для контроля размещения новых узлов. Также массив *F* удобно использовать для индикации процесса выполнения. Отношение числа удаленных во время работы алгоритма точек *F* к начальному числу существующих точек *F* фактически показывает, какая часть области уже исчерпана.

Вернемся к вопросу нахождения координат нового узла для построения тетраэдра (п. 4 описанного алгоритма). Пусть заданы три узла - g_1, g_2, g_3.

1. На первом шаге находятся r_c - центр масс треугольника (как среднее арифметическое координат его узлов) и единичная нормаль $\vec{n}$ к плоскости грани (через нормированное векторное произведение).

2. Далее определяется первое приближение для расстояния от r_c до искомой точки *p* (*H*), исходя из максимального объема тетраэдра: $V = SH/3$. Заметим, что площадь грани *S* фактически найдена на предыдущем шаге (результат векторного произведения двух ребер равен удвоенной площади грани), а максимальный объем обусловлен значением контрольной функции.

3. Проверяется точка $\vec{p} = \vec{r}_c + \vec{n}H$. Если тетраэдр (g_1, g_2, g_3, p) удовлетворяет всем требованиям, происходит переход к п. 6, иначе - к п. 4.

4. Проверяется точка $\vec{p} = \vec{r}_c - \vec{n}H$. Если тетраэдр (g_1, g_2, g_3, p) удовлетворяет всем требованиям, происходит переход к п. 6, иначе - к п. 5.

5. Полагают $H := 0.75H$ и переходят к п. 3.

6. Искомый узел найден.

Заметим, что в 99% случаев искомая точка находится на 1 или 2 итерации данного алгоритма.

В описанном выше алгоритме исчерпывания на каждом шаге из области изымается один тетраэдр. Сотрудник НАСА Ш. Пирзаде (Shahyar Pirzadeh) предложил другой вариант алгоритма, в котором за один раз из области изымается сразу целый слой тетраэдров (то есть на каждой итерации тетраэдры строятся сразу для всех граней текущего фронта) [32]. Вопреки ожиданию, этот вариант не позволяет сколько-нибудь существенно ускорить процесс построения (т.к. все новые тетраэдры все равно необходимо проверять на корректность), однако он избавляет от необходимости искать наиболее подходящую для построения тетраэдра грань. Это, однако, скорее минус, чем плюс, так как из-за этой особенности вариант Пирзаде менее надежен и может дать сбой на геометрически сложных областях. Вместе с тем на сравнительно простых областях он показывает неплохие результаты.

Сетки, построенные методами исчерпывания, как правило, обладают неплохим качеством, а последующая оптимизация положения узлов дает дополнительную прибавку к качеству. Подводя итог, заметим, что методы исчерпывания наиболее эффективны, если изначально задана триангуляция границы области. В этом и состоит их основное отличие от методов на основе критерия Делоне, для которых ситуация прямо обратная.

Список литературы

1. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. - М., Наука, 1989. - 288с.
2. Скворцов А.В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне // *Вычислительные методы и программирование*, 2002, №3, с. 14-39.
3. Скворцов А.В. Алгоритмы построения триангуляции с ограничениями // *Вычислительные методы и программирование*, 2002, №3, с. 82-92.
4. I.Babushka, W.C. Rheinboldt. A-posteriori Error Estimates for Finite Element Method // *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 12, p.p. 1597-1615, 1978.
5. T.J. Baker. Automatic Mesh Generation for Complex Three-Dimensional Regions Using a Constrained Delaunay Triangulation // *Engineering With Computers*, Springer-Verlag, № 5, p.p. 161-175, 1989.

6. M. Bern, D. Eppstein. Mesh Generation and Optimal Triangulation // *Computing in Euclidean Geometry*, World Scientific Publishing Co., p.p. 23-90, 1995.
7. D.K. Blandford, G. Blelloch, D. Cardoze, C. Kadow. Compact Representations of Simplicial Meshes In Two and Three Dimensions // *Proceedings of 12th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, p.p.135-146, Sept. 2003.
8. H. Borouchaki, S.H. Lo. Fast Delaunay Triangulation In Three Dimensions // *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, Elsevier, Vol. 128, p.p. 153-167, 1995.
9. E.K. Buratynski. A Three-Dimensional Unstructured Mesh Generator for Arbitrary Internal Boundaries // *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics*, Pineridge Press, p.p. 621-631, 1988.
10. P.R. Cavalcanti, U.T. Mello. Three-Dimensional Constrained Delaunay Triangulation: A Minimalist Approach // *Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable*, p.p. 119-129, 1999.
11. Dey, K. Tamal, K. Sugihara, C.L. Bajaj. Delaunay Triangulations In Three Dimensions With Finite Precision Arithmetic // *Computer Aided Geometric Design*, North-Holland, № 9, p.p. 457-470, 1992.
12. H.N. Djidjev. Force-Directed Methods For Smoothing Unstructured Triangular And Tetrahedral Meshes // *Proceedings of 9th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, p.p. 395-406, October 2000.
13. L. Durbeck. Evaporation: A Technique For Visualizing Mesh Quality // *Proceedings of 8th International Meshing Roundtable*, South Lake Tahoe, CA, U.S.A., p.p. 259-265, October 1999.
14. D.A. Field. Laplacian Smoothing And Delaunay Triangulations // *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 4, p.p. 709-712, 1988.
15. P.J. Frey, H. Borouchaki, P.-L. George. Delaunay Tetrahedralization Using an Advancing-Front Approach // *Proceedings of 5th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, p.p. 31-46, October 1996.
16. L.A. Freitag, C. Ollivier-Gooch. A Comparison of Tetrahedral Mesh Improvement Techniques // *Proceedings of 5th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, p.p. 87-106, October 1996.
17. L.A. Freitag, C. Ollivier-Gooch. Tetrahedral Mesh Improvement Using Swapping and Smoothing // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, p.p. 3979-4002, 1995.
18. L.A. Freitag, C. Ollivier-Gooch. The Effect Of Mesh Quality On Solution Efficiency // *Proceedings of 6th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, p.p.249, October 1997.
19. P.L. George. TET MESHING: Construction, Optimization and Adaptation // *Proceedings of 8th International Meshing Roundtable*, p.p.133-141, 1999.
20. N.A. Golias, T.D. Tsiboukis. An Approach to Refining Three-Dimensional Tetrahedral Meshes Based on Delaunay Transformations // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley, № 37, p.p.793-812, 1994.
21. C. Hazlewood. Approximating Constrained Tetrahedralizations // *Computer Aided Geometric Design*, vol. 10, p.p. 67–87, 1993.
22. B. Joe. Delaunay Triangular Meshes in Convex polygons, *SIAM J. Sci. Stat. Comput*., Vol. 7, p.p. 514-539, 1986.
23. B. Joe. Construction Of Three-Dimensional Delaunay Triangulations Using Local Transformations // *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 8, p.p. 123-142, 1991.
24. B. Joe. Construction of Three-Dimensional Improved-Quality Triangulations Using Local Transformations // *Siam J. Sci. Comput.*, vol. 16, p.p. 1292-1307, 1995.
25. R.W. Lewis, Yao Zheng, D.T. Gethin. Three-Dimensional Unstructured Mesh Generation: Part 3. Volume Meshes // *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, Elsevier, Vol 134, p.p.285-310, 1996.
26. A.Liu, B. Joe. On The Shape Of Tetrahedra From Bisection // *Mathematics of Computation*, vol. 63, №207, 141–154, 1994.
27. S.H. Lo. Volume Discretization into Tetrahedra-I. Verification and Orientation of Boundary Surfaces // *Computers and Structures*, Pergamon Press, Vol. 39, № 5, p.p. 493-500, 1991.

28. S.H. Lo. Volume Discretization into Tetrahedra - II. 3D Triangulation by Advancing Front Approach // *Computers and Structures*, Pergamon, Vol. 39, № 5, p.p. 501-511, 1991.
29. R. Lohner. Generation Of Three-Dimensional Unstructured Grids By The Advancing Front Method //*Proceedings of the 26th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Reno, Nevada, 1988.
30. S.J. Owen. A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology // *Proceedings of 7th International Meshing Roundtable*, p.p. 239-269, Dearborn, MI, 1998.
31. V.N. Parthasarathy, C.M. Graichen, A.F. Hathaway. A Comparison of Tetrahedron Quality Measures // *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, №. 15, p.p. 255-261, 1993.
32. S. Pirzadeh. Unstructured Viscous Grid Generation by Advancing-Layers Method // AIAA-93-3453-CP, AIAA, p.p. 420-434, 1993.
33. V.T. Rajan. Optimality of Delaunay Triangulation in R^d // *Proc. 7th ACM Symp. Comp. Geometry*, p.p. 357-363, 1991.
34. A.Rassineux. Generation and Optimization of Tetrahedral Meshes by Advancing Front Technique // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, Vol. 41, p.p. 651-674, 1998.
35. S. Rebay. Efficient Unstructured Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm // *Journal Of Computational Physics*, vol. 106, p.p. 125-138, 1993.
36. M.-C. Rivara. Selective Refinement/Derefinement Algorithms For Sequences Of Nested Triangulations // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, №28, p.p. 2889-2906, 1998.
37. M.-C. Rivara, C. Levin. A 3D Refinement Algorithm Suitable For Adaptive And Multigrid Techniques // *Communications in Applied Numerical Methods*, № 8, p.p. 281-290, 1998.
38. J. Ruppert. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation // *Journal of Algorithms*, №18, p.p. 548-585, 1995.
39. M.S. Shephard, M.K. Georges. Three-Dimensional Mesh Generation by Finite Octree Technique // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, p.p. 709-749, 1991.
40. M.S. Shephard, F. Guerinoni, J.E. Flaherty, R.A. Ludwig, P.L. Baehmann. Finite octree mesh generation for automated adaptive 3D Flow Analysis // *Numerical grid generation in computational Fluid mechanics*, Miami, 1988
41. K. Shimada, D.C. Gossard. Bubble Mesh: Automated Triangular Meshing of Non-manifold Geometry by Sphere Packing // *Proceedings of 3rd Symposium on Solid Modeling and Applications*, p.p. 409-419, 1995.
42. K. Shimada, A. Yamada, T. Itoh. Anisotropic Triangular Meshing of Parametric Surfaces via Close Packing of Ellipsoidal Bubbles // *Proceedings of 6th International Meshing Roundtable*, p.p. 375-390, 1997.
43. D.F. Watson. Computing the Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes // *The Computer Journal*, Vol. 24(2), p.p. 167-172, 1981.
44. M.A. Yerry, M.S. Shephard. Three-Dimensional Mesh Generation by Modified Octree Technique // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, p.p. 1965-1990, 1984.
45. Галанин М.П., Щеглов И.А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006, в печати.

---

[1] "Сплайнами" в данном случае называются фрагменты поверхностей

[2] Следует отметить, что свойство минимизации радиусов описанных сфер сохраняется; более того, как показывает работа сотрудника исследовательского центра IBM В.Т. Раджана (V.T. Rajan), это справедливо и для n-мерного случая [33]

[3] В англоязычной литературе также часто называется "2-to-3 flip"

[4] Это т.н. Steiner points, т.е. узлы Штейнера - дополнительные узлы, не входившие в изначальный набор

[5] П. Кавальканти, У. Мелло [10]

[6] из архива Dassault-Aviation

[7] Может показаться, что из условия 3 следует условие 2, но на самом деле это не так. Например, существующий тетраэдр может целиком оказаться *внутри* проверяемого тетраэдра.