

Нелинейные системы

Хасан К. Халил

Издание третье

Перевод с английского
И.А. Макарова
под редакцией
А.Л. Фрадкова

Посвящается моему учителю
Петару В. Кокотовичу

и моей семье
Амине, Мухаммеду, Омару, Юсуфу и Сюзане

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	10
Предисловие профессора П.В. Кокотовича	12
Предисловие автора к русскому изданию	14
Предисловие	17
Глава 1. Введение	20
1.1. Нелинейные модели и нелинейность	21
1.2. Примеры	24
1.2.1. Уравнения маятника (24). 1.2.2. Цепь с туннельным диодом (26). 1.2.3. Система «груз–пружина» (28). 1.2.4. Генератор с отрицательным сопротивлением (32). 1.2.5. Искусственные нейронные сети (34). 1.2.6. Адаптивное управление (37). 1.2.7. Типовые нелинейности (39).	
1.3. Упражнения	45
Глава 2. Системы второго порядка	58
2.1. Качественное поведение линейных систем	60
2.2. Множественные точки равновесия	70
2.3. Качественное поведение в окрестности точек равновесия	76
2.4. Предельные циклы	80
2.5. Численное построение фазовых портретов	85
2.6. Существование периодических орбит	87
2.7. Бифуркции	96
2.8. Упражнения	104
Глава 3. Фундаментальные свойства	114
3.1. Существование и единственность	115
3.2. Непрерывная зависимость решения от начальных данных и параметров	123

3.3. Дифференцируемость решений и уравнения чувствительности	127
3.4. Принцип!сравнения	131
3.5. Упражнения	134
Г л а в а 4. Устойчивость по Ляпунову	140
4.1. Автономные системы	141
4.2. Принцип инвариантности	158
4.3. Линейные системы и линеаризация	166
4.4. Функции сравнения	179
4.5. Неавтономные системы	182
4.6. Линейные зависящие от времени системы и линеаризация	192
4.7. Обратные теоремы Ляпунова	199
4.8. Ограниченнность и предельная ограниченность	206
4.9. Устойчивость систем по входу-состоянию	213
4.10. Упражнения	220
Г л а в а 5. Устойчивость в терминах «вход-выход»	234
5.1. \mathcal{L} -устойчивость	235
5.2. \mathcal{L} -устойчивость моделей состояния	242
5.3. \mathcal{L}_2 -коэффициент усиления	250
5.4. Системы с обратной связью: теорема о малом коэффициенте усиления	259
5.5. Упражнения	264
Г л а в а 6. Пассивность	270
6.1. Функции без памяти	271
6.2. Модели состояния	277
6.3. Положительно вещественные передаточные функции	282
6.4. \mathcal{L}_2 -устойчивость и устойчивость по Ляпунову	286
6.5. Системы с обратной связью: теоремы о пассивности	290
6.6. Упражнения	305
Г л а в а 7. Частотный анализ систем с обратной связью	310
7.1. Абсолютная устойчивость	311
7.1.1. Круговой критерий (313). 7.1.2. Критерий Попова (324).	
7.2. Метод описывающей функции	329
7.3. Упражнения	347
Г л а в а 8. Устойчивость систем	354
8.1. Теорема о центральном многообразии	355

8.2. Область притяжения	364
8.3. Теоремы инвариантности	376
8.4. Устойчивость периодических решений	384
8.5. Упражнения	388
Г л а в а 9. Устойчивость возмущенных систем	394
9.1. Возмущение, исчезающее в начале координат	395
9.2. Возмущения, не исчезающие в начале координат	402
9.3. Метод сравнения	406
9.4. Непрерывность решений на бесконечном интервале	412
9.5. Взаимосвязанные системы	415
9.6. Медленно меняющиеся системы	422
9.7. Упражнения	431
Г л а в а 10. Теория возмущений и усреднение	439
10.1. Метод возмущений	440
10.2. Метод возмущений на бесконечном интервале времени	452
10.3. Периодические возмущения автономных систем	457
10.4. Метод усреднения	461
10.5. Осцилляторы второго порядка со слабой нелинейностью	472
10.6. Метод усреднения для общего случая	474
10.7. Упражнения	480
Г л а в а 11. Сингулярные возмущения	485
11.1. Стандартная форма модели с сингулярными возмущениями	486
11.2. Временные свойства стандартной модели	494
11.3. Сингулярные возмущения на бесконечном интервале времени	503
11.4. Медленные и быстрые многообразия	507
11.5. Анализ устойчивости	514
11.6. Упражнения	526
Г л а в а 12. Управление с обратной связью	535
12.1. Задача управления	536
12.2. Стабилизация посредством линеаризации	543
12.3. Интегральное управление	547
12.4. Построение интегрального управления с использованием линеаризации	550
12.5. Метод настройки обратной связи	554
12.6. Упражнения	571

Г л а в а 13. Линеаризация обратной связью	578
13.1. Мотивация	579
13.2. Линеаризация по входу–выходу	583
13.3. Линеаризация по всем переменным состояния	596
13.4. Управление с обратной связью по состоянию	606
13.4.1. Стабилизация (606). 13.4.2. Задача слежения (618).	
13.5. Упражнения	623

Г л а в а 14. Нелинейные законы управления	630
14.1. Управление в скользящем режиме	632
14.1.1. Мотивирующий пример (632). 14.1.2. Стабилизация (644).	
14.1.3. Слежение (654). 14.1.4. Интегральное управление (658).	
14.2. Ляпуновский синтез закона управления	662
14.2.1. Задача стабилизации (662). 14.2.2. Нелинейное демпфирование (672).	
14.3. Бэкстеппинг	674
14.4. Управление на основе пассивности	690
14.5. Наблюдатели с сильной обратной связью	698
14.5.1. Мотивирующий пример (700). 14.5.2. Стабилизация (709).	
14.5.3. Интегральное управление (715).	
14.6. Упражнения	716

Приложение А. Математический обзор	741
---	-----

Приложение В. Сжимающее отображение	749
--	-----

Приложение С. Доказательства	753
С.1. Доказательства теорем 3.1 и 3.2	753
С.2. Доказательство леммы 3.4	756
С.3. Доказательство леммы 4.1	757
С.4. Доказательство леммы 4.3	758
С.5. Доказательство леммы 4.4	759
С.6. Доказательство леммы 4.5	760
С.7. Доказательство теоремы 4.16	763
С.8. Доказательство теоремы 4.17	766
С.9. Доказательство теоремы 4.18	773
С.10. Доказательство теоремы 5.4	774
С.11. Доказательство леммы 6.1	776
С.12. Доказательство леммы 6.2	779
С.13. Доказательство леммы 7.1	784
С.14. Доказательство теоремы 7.4	788

C.15. Доказательство теорем 8.1 и 8.3	790
C.16. Доказательство леммы 8.1	800
C.17. Доказательство теоремы 11.1	801
C.18. Доказательство теоремы 11.2	808
C.19. Доказательство теоремы 12.1	810
C.20. Доказательство теоремы 12.2	810
C.21. Доказательство теоремы 13.1	812
C.22. Доказательство теоремы 13.2	814
C.23. Доказательство теоремы 14.6	815

Библиографические комментарии	821
---	-----

Список литературы	826
-----------------------------	-----

Дополнение. Обзор работ по нелинейным системам	838
--	-----

Условные обозначения	850
--------------------------------	-----

Предметный указатель	852
--------------------------------	-----

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга профессора электротехники университета штата Мичиган в Ист-Лэнсинге, США Хасана Халила заслужила мировое признание как один из лучших трактатов по теории нелинейных систем для инженеров. В книге дано мастерское изложение основных разделов теории нелинейных систем управления, включая те из них, которые сложились лишь в последние 15–20 лет. Поэтому она может также использоваться инженерами и исследователями для самообразования и в качестве справочного руководства по современной теории управления.

Теория нелинейных систем – это область, в которой отечественные научные школы традиционно были сильны. Достаточно вспомнить первую в мире монографию по нелинейным системам А.И.Лурье, вышедшую в 1951 году. Фундаментальные результаты А.М.Ляпунова и А.А.Андронова, Л.С.Понтрягина и А.А.Фельдбаума, А.И.Лурье и В.А.Якубовича, Я.З.Цыпкина, Н.Н.Красовского, Е.П.Попова и других составляют основу теоретического аппарата и методов расчета не только в теории управления, но и в более широкой области – теории систем. Среди учебников, содержащих серьезное изложение теории нелинейных систем продолжают пользоваться успехом классические книги Е.П.Попова, А.А.Воронова, А.А.Первозванского. Да и в последние годы выпущен целый ряд монографий и учебных пособий, например серия «Анализ и синтез нелинейных систем», издаваемая Санкт-Петербургским издательским комплексом «Наука», серии под редакцией С.В.Емельянова, В.М.Матросова и др. Казалось бы, нет необходимости обращаться к иностранным источникам. Однако книга Х.Халила заслуживает особого отношения. Кроме доступного и в то же время серьезного изложения основ теории, пронизанного идеями устойчивости, функций Ляпунова, усреднения, теории возмущений, российского читателя наверняка заинтересует ясное и компактное изложение новых областей, таких, как управление на основе пассивности, теория устойчивости по «входу-состоянию» и «входу-выходу», интегральное управление, бэкстеппинг (обход интегратора), нелинейные наблюдатели с большим коэффициентом усиления, синтез робастных нелинейных систем. Специалистов привлечет изложение теории устойчивости на языке калибровочных функций классов \mathcal{K} , \mathcal{KL} , \mathcal{K}_∞ – удобного аппарата для работы с открытыми системами. Книга содержит много полезных лемм, оценок и вспомогательных неравенств. Изучение их доказательств позволяет читателю овладеть большинством математических приемов, используемых в современной теории систем. В то

же время в книге много поучительного материала и для специалистов смежных наук: физики, химии, прикладной математики.

Анализ многочисленных ссылок на книгу Х.Халила в международных журналах и трудах конференций (а она, по данным Google Scholar, входит в тройку наиболее цитируемых книг по теории управления) показывает, что книга активно используются зарубежными инженерами и исследователями и при подготовке аспирантов в зарубежных университетах. В то же время в России ее материал еще мало знаком не только аспирантам, но и профессорам. Не секрет, что в последние годы, в связи с трудностями доступа к «свежей» научной информации на русском языке наметилась тенденция к изоляции отечественной науки. Предлагаемая к переводу книга может способствовать перелому опасной тенденции, послужить развитию научной интеграции и сохранению конкурентоспособности отечественных специалистов, как молодых, так и зрелых.

Для понимания книги требуются знания в области математического анализа, дифференциальных уравнений и теории матриц на уровне студентов старших курсов университетов, а также знание теории линейных систем на уровне основных понятий: «состояние», «передаточная функция», «переходная матрица состояний». Вопросы, требующие более высокого уровня подготовки, а также некоторые вспомогательные математические результаты и доказательства вынесены в приложение. Третье издание было переработано с целью сделать книгу доступной для более широкого круга читателей. Наличие большого числа упражнений (только в 3-е издание добавлено более 170 упражнений!), авторского и предметного указателя делает книгу полезной и как справочник, и как пособие для самообразования. Книга будет полезна всем, желающим глубоко и систематически ознакомится как с основами теории нелинейных систем, так и с ее новейшими достижениями. Книгу сопровождают предисловие признанного мэтра теории нелинейных систем П.В.Кокотовича и предисловие автора, специально написанные для русского издания, а также написанное редактором перевода Дополнение — библиографический обзор некоторых работ последних лет, не нашедших отражения в книге, прежде всего, отечественных работ.

Александр Фрадков
Санкт-Петербург, сентябрь 2008г.

Зубова, Якубовича и многих других. Перевод книги как бы заново представляет российским читателям их богатое научное наследие.

Петар Кокотович,
Профессор-исследователь
Факультета электротехники и вычислительной техники
Университета Калифорния в Санта-Барбаре, США

ПРЕДИСЛОВИЕ ПРОФЕССОРА П.В. КОКОТОВИЧА

Для меня очень приятно разделить с российскими читателями свое мнение об этой отличной книге. Я использовал ее для подготовки аспирантов по нелинейным системам еще в 1990 и 1991 годах, когда она была еще в состоянии растущей рукописи. С тех пор эта книга помогала многим поколениям моих студентов, которые называли ее "самым дружественным" учебником. Им нравился ясный стиль доказательств большинства теорем и то, что физические примеры обогащали их интуицию. Благодаря педагогическому мастерству автора стиль изложения, сохраняя математическую строгость, делает книгу доступной студентам с различной подготовкой.

Кроме моего личного мнения о книге, есть много объективных критериев, показывающих, что она является одним из лучших текстов для специалистов в области систем и управления. За 16 лет многие тысячи экземпляров книги использовались студентами ведущих американских и европейских университетов. Число продаж каждый год продолжает расти, что говорит о том, что лишь немногие из проданных копий попадают к букинистам. А это показывает, что владельцы хранят книгу, пользуясь ею как справочником. И действительно, многие из недавно опубликованных научных статей в журналах и в трудах конференций цитируют эту книгу, обращаясь и к хорошо известным результатам, и к деталям их доказательств. Книга достигла статуса «стандартного справочника» и ее автор уже получил две престижнейших награды. В 2000 году профессор Халил получил премию имени Дж. Рагаззини в области образования от американского Совета по автоматическому управлению (AACC), представляющему несколько инженерных сообществ. В 2002 году книга была награждена премией за лучший учебник Международной федерацией по автоматическому управлению (ИФАК).

Те, кто следит за новейшими достижениями в нелинейной теории управления, знакомы с такими новыми методами синтеза как линеаризация обратной связью и бэкстеппинг, получившими известность в 1990-х годах. Содержание книги, меняясь, отразило эти достижения. Ее первое издание в 1992 году концентрировалось вокруг вопросов нелинейного анализа, в ее третьем издании 2002 года целых четыре последних главы посвящены вопросам синтеза. Другой аспект полноты этой книги, на который, конечно же, обратят внимание российские читатели - то, что она существенно опирается на фундаментальные результаты российских научных школ, как классических, так и современных, от Ляпунова, Четаева и Тихонова до Лурье, Красовского,

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Мне очень приятно видеть русский перевод моей книги «Нелинейные системы» и я благодарен российским ученым, выполнившим эту трудную работу. Для меня лучшая награда за работу над книгой — знание того, что многие коллеги и студенты использовали ее и нашли полезной. Это чувство еще усилилось, когда я узнал, что книга станет доступна российскому научному сообществу.

Я не являюсь российским ученым и, более того, со смущением должен признать, что до сих пор не побывал в России, однако я считаю себя в определенной мере продуктом российской научной школы. Одной из основных и наиболее очевидных причин этого является тот факт, что результаты российских ученых оказали основополагающее влияние на теорию, представленную в книге. Другая, менее очевидная причина заключается в том, что мой научный наставник и руководитель моей работы над докторской диссертацией Петар В. Кокотович, получивший образование в России, познакомил меня с наиболее важными работами Ляпунова и других российских ученых во время моей учебы в аспирантуре университета Иллинойса осенью 1975 года.

Хассан Халил

Нелинейные системы

Хасан К. Халил

Издание третье

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена управлению нелинейными системами и предназначена для студентов первого курса аспирантуры. Она может также использоваться для самообразования и в качестве справочного руководства для инженеров и специалистов в области прикладной математики. Эта книга стала естественным результатом моего опыта преподавания курса теории нелинейных систем в университете штата Мичиган (Ист-Лансинг). Для понимания книги необходимы знания основ электротехники, машиностроения и прикладной математики. Первоначальным источником этого курса стали книги Антсаклиса и Мишела [9], Чена [35], Кайлата [94] и Руза [158]. Поскольку предполагалось знание основ линейной теории систем, я не вводил заново понятие "состояния системы" и свободно использовал термины "передаточная функция", "переходная матрица" и другие концепции линейной теории. Математической основой книги являются знания в области математического анализа, дифференциальных уравнений и теории матриц, которыми должны обладать студенты последнего курса обучения по специальностям прикладной и высшей математики. В Приложении приведены некоторые математические результаты, которые могут понадобиться при чтении этой книги.

Текст написан таким образом, чтобы уровень его математической сложности возрастал от главы к главе. Поэтому вторая глава написана на элементарном уровне. В действительности, эта глава может служить основой для преподавания основ рассматриваемого предмета на средних или даже на младших курсах. Это стало также причиной того, что я разделил изложение теории устойчивости Ляпунова на две части. В разделах 4.1–4.3 введены понятия устойчивости по Ляпунову для автономных систем без использования таких технических деталей, как понятия равномерности, функции класса \mathcal{K} и т.п. В разделах 4.4–4.6 я представил теорию Ляпунова в более общем виде, что позволило рассмотреть неавтономные системы и более глубокие аспекты теории устойчивости. Уровень математической сложности, который достигается при прочтении первых четырех глав — это именно тот уровень, который будет необходим студентам для того, чтобы ознакомится с последующими главами книги.

Для понимания представленных в приложении доказательств основных результатов требуется еще более высокий уровень математической подготовки, но они не предназначены для изучения в условиях аудитории. Эти доказательства включены в книгу, с одной стороны,

для ее полноты и с другой — для того, чтобы удовлетворить нуждам или желаниям тех студентов, которые хотели бы ознакомится с ними в целях выполнения исследований в рамках подготовки кандидатской диссертации на тему управления нелинейными системами. Эти студенты могут продолжить чтение книги до конца включая приложения самостоятельно.

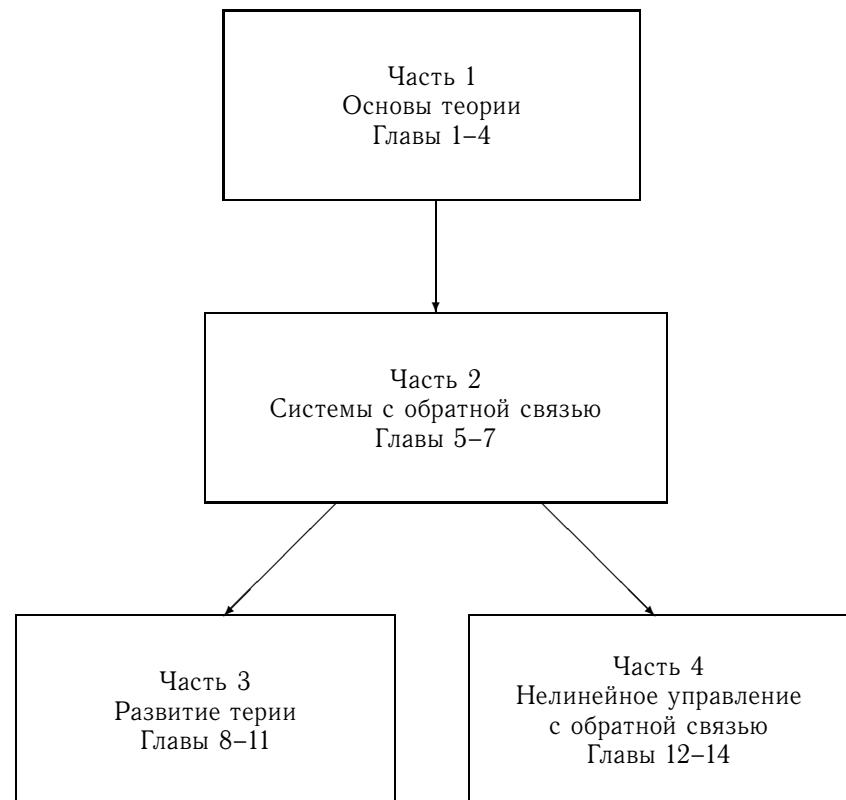
Третье издание было написано с учетом следующих целей:

1. Сделать книгу (особенно ее первые главы) более доступной для студентов первого курса аспирантуры. В качестве примера изменений, преследующих эту цель, можно указать на сделанные изменения в изложении Главы 3: Весь материал, касающийся математических основ — теорема о сжимающем отображении и доказательство теоремы о существовании и единственности, — был вынесен в приложения. Некоторые части книги были переписаны с целью повысить удобочитаемость.
2. Реорганизовать книгу таким образом, чтобы обеспечить более легкое понимание структуры курсов нелинейных систем и управления. Новое издание книги состоит из четырех частей (см. рисунок ниже). Курс анализа нелинейных систем изложен в частях 1, 2 и 3, а курс нелинейного управления — в частях 1, 2 и 4.
3. Обновить содержание книги для того, чтобы представить те результаты и темы, которые доказали в последнее время свою пользу для теории нелинейного управления. В третьем издании рассмотрены следующие новые темы: расширенное изложение понятия пассивности и его использования в задачах управления, интегрального управления, скользящих режимов и наблюдателей с сильной обратной связью. Кроме того, рассмотрены бифуркации в дифференциальных уравнениях в контексте исследования систем второго порядка. С технической точки зрения, рассмотрены версия Курцвейля обратной теоремы Ляпунова, нелокальные результаты в главах 10 и 11, новые результаты в области интегрального управления и настройки коэффициента усиления.
4. Обновить упражнения. Было включено более 170 новых упражнений.

Я признателен моим коллегам, студентам и читателям, помогавшим мне при написании этой книги в ходе плодотворных дискуссий, за их предложения, уточнения и конструктивные замечания. Я хотел бы упомянуть в этой связи более сотни имен, но я боюсь нечаянно упустить какое-нибудь имя. Поэтому я высказываю свою огромную благодарность всем вам.

Я благодарен университету штата Мичиган за предоставление условий, которые помогли мне написать эту книгу и Национальному Научному Фонду США за поддержку моих исследований в области нелинейного управления с обратной связью.

Книга была сверстана с использованием LaTeX. Все численные эксперименты, включая численное решение дифференциальных уравне-



ний, были сделаны с использованием пакетов MATLAB и SIMULINK. Рисунки были получены в MATLAB или набраны с использованием графических средств LaTeX.

Я хотел бы, чтобы книга не содержала ошибок, но я знаю, что этого не случится. Поэтому я прошу присыпать сообщения об этом на мой электронный адрес

khalil@msu.edu

Обновленный список ошибок может быть найден на сайте
www.egr.msu.edu/~khalil/NonlinearSystems

На этом сайте также может быть найден список изменений по сравнению со вторым изданием, дополнительные упражнения и другой полезный материал.

Хасан Халил
Ист-Лансинг, Мичиган

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

Когда инженеры анализируют и строят динамические модели для электрических сетей, механических систем, систем управления и других инженерных систем, им необходимо понимать и глубоко осознавать те средства нелинейного анализа, которые они намерены использовать в своей работе. В этой книге мы предложим некоторые из этих средств. В частности, мы предложим методы анализа устойчивости для нелинейных систем, сделав акцент на методах Ляпунова. Мы уделим специальное внимание задаче устойчивости для нелинейных систем и рассмотрим ее на основе двух подходов: входа-выхода и пассивности. Мы предложим средства для обнаружения и анализа "свободных" колебаний, включая метод описывающей функции¹⁾ (*describing function method*). Мы введем в рассмотрение асимптотические методы теории возмущений, включая методы усреднения и сингулярных возмущений. В заключение мы рассмотрим методы нелинейного управления с обратной связью, включая методы линеаризации, настройки коэффициента усиления (*gain scheduling*), интегрального управления, линеаризации с помощью обратной связи, управления в скользящем режиме, а также обратный метод Ляпунова построения закона обратной связи, методы бэкстеппинга или попятного управления (*backstepping*) и пассивного управления и, наконец, будут рассмотрены наблюдатели с сильной обратной связью (*high gain observers*).

¹⁾ Прим. ред. перев. — В отечественной литературе принят термин «метод гармонического баланса».

1.1. Нелинейные модели и нелинейность

Мы будем иметь дело с динамическими системами, которые допускают модель в виде системы из конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p),\end{aligned}$$

где \dot{x}_i обозначает производную x_i по времени t и u_1, u_2, \dots, u_p — входные переменные системы. Будем называть x_1, x_2, \dots, x_n переменными состояния системы. В них заложена информация о прошлом динамической системы. Для компактной записи таких систем будем использовать соответствующие векторные обозначения. Для этого определим

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}$$

и перепишем n обыкновенных дифференциальных уравнений в виде одного векторного дифференциального уравнения размерности n

$$\dot{x} = f(t, x, u). \quad (1.1)$$

Будем называть уравнение (1.1) уравнением состояния, вектор x — состоянием и вектор u — входом. Иногда будет рассматриваться уравнение

$$y = h(t, x, u), \quad (1.2)$$

которое определяет вектор выхода y размерности q с компонентами, представляющими специфический интерес при анализе динамической системы (например, переменные, которые могут быть измерены на физическом уровне или переменные, для которых требуется обеспечить нужное поведение). Будем называть уравнение (1.2) уравнением выхода, а систему уравнений (1.1), (1.2) — моделью пространства-состояния или более просто — моделью состояния. Математические модели конечномерных физических систем не обязательно имеют вид модели состояния. Однако, в большинстве случаев, мы можем построить модель физической системы именно в такой форме благодаря надлежащему выбору переменных состояния. Примеры и упражнения, которые будут приведены ниже, продемонстрируют универсальность модели состояния.

Большая часть нашей книги посвящена анализу уравнения состояния, в которое вектор входа u явным образом не входит. Такое уравнение называется свободным (free) и имеет следующий вид

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (1.3)$$

Рассмотрение свободного уравнения состояния не обязательно предполагает, что вход системы равен нулю. Это может означать, что вход системы явным образом задан в виде функции времени $u = \gamma(t)$, или в виде функции обратной связи $u = \gamma(x)$ или в виде зависящей от времени функции обратной связи $u = \gamma(t, x)$. Подстановка $u = \gamma$ в (1.1) исключает u и приводит к свободному уравнению состояния.

В случае, когда функция f не зависит явным образом от времени t , уравнение (1.3) принимает вид

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.4)$$

и система будет называться *автономной* или *инвариантной по времени* (time invariant). Поведение автономной системы инвариантно относительно сдвига по оси времени, поскольку замена переменной времени t на $t - a$ не приводит к изменению правой части уравнения состояния. Если система не является инвариантной по времени, она называется *неавтономной* или *зависящей от времени* (time varying).

При рассмотрении уравнения состояния важным понятием является понятие положения равновесия. Точка $x = x^*$ в пространстве состояния называется состоянием (положением) равновесия уравнения (1.3) если в процессе эволюции системы ее состояние остается неизменным x^* во все будущие моменты времени. В случае автономных систем (1.4) состояниями равновесия являются корни уравнения

$$f(x) = 0.$$

Точка равновесия может быть изолированной, т.е. в ее окрестности отсутствуют другие точки равновесия или же имеется континuum точек равновесия.

Для линейных систем модель состояния (1.1)–(1.2) принимает специальный вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ y &= C(t)x + D(t)u.\end{aligned}$$

Мы предполагаем, что читатель знаком с мощными средствами анализа линейных систем, основанных на *принципе суперпозиции*. Поскольку мы переходим от рассмотрения линейных систем к рассмотрению нелинейных систем, мы столкнемся с более сложной ситуацией; когда принцип суперпозиции не выполняется и средства анализа будут использовать более сложные математические концепции. Поскольку мощные средства анализа линейных систем известны, первым шагом анализа нелинейной системы обычно является ее линеаризация (если это возможно) в окрестности некоторой заданной точки и анализ по-

лученнойной линейной системы. Этот подход признан весьма полезным в инженерной практике. Несомненно, нам следует использовать подход линеаризации для того, чтобы узнать как можно больше о поведении нелинейной системы. Однако этот подход не является достаточным для полного анализа системы и возникает необходимость в разработке средств анализа исходной нелинейной системы. Имеют место два ограничения, накладываемых подходом линеаризации. Во-первых, поскольку линеаризация в окрестности заданной точки является лишь приближенным описанием поведения системы в этой окрестности, этот подход может предсказать лишь «локальное» поведение исходной нелинейной системы в окрестности этой точки: нелокальное поведение системы вне этой окрестности и тем более — «глобальное» поведение на всем пространстве состояний не может быть предсказано в рамках этого подхода. Во-вторых, динамика нелинейной системы существенно более богата, чем динамика линейной системы. Имеют место «существенно нелинейные явления», проявляющиеся только при наличии нелинейности и которые, соответственно, не могут быть описаны линейной моделью. Примерами таких существенно нелинейных явлений могут служить:

- **Конечное время ухода решения на бесконечность.** Состояние неустойчивой линейной системы уходит на бесконечность по мере того, как время приближается к бесконечности; состояние нелинейной системы может уйти на бесконечность за конечный промежуток времени.
- **Множественность состояний равновесия.** Линейная система может иметь только одну изолированную точку равновесия и, следовательно, она может иметь только одну устойчивую точку притяжения для всех начальных состояний системы. Нелинейная система может иметь более одной изолированной точки равновесия. Состояния могут притягиваться к одной из нескольких точек притяжения, в зависимости от начального состояния системы.
- **Предельные циклы.** Для колебания линейной инвариантной по времени системы, необходимо, чтобы она имела пару собственных значений на мнимой оси. Это условие не является робастным и почти всегда не может быть выполнено при наличии возмущений. Даже в случае его выполнения, амплитуда колебаний будет зависеть от начального состояния. В реальных условиях устойчивое колебание может быть продемонстрировано только нелинейной системой. Существуют нелинейные системы, которые могут колебаться с фиксированной амплитудой и частотой вне зависимости от начальных состояний этих систем. Этот тип колебаний известен как предельный цикл.
- **Субгармонические, гармонические и почти периодичные колебания.** Устойчивая линейная система с периодическим входом имеет на выходе сигнал, имеющий ту же частоту. Нелинейная система с периодическим возбуждением может колебаться с ча-

стотами, кратными частоте входа. Эти системы могут демонстрировать даже почти периодические колебания: примером таких колебаний может служить сумма двух периодических колебаний с некратными частотами.

- **Хаос.** Нелинейная система может иметь более сложное устойчивое поведение, чем простое положение равновесия, периодическое колебание или почти периодическое колебание. Такое поведение обычно называют хаосом. Некоторые из этих хаотических движений демонстрируют случайный характер несмотря на то, что сама система имеет сугубо детерминистическую природу.
- **Множественность режимов поведения.** Нередко одна и та же нелинейная система может продемонстрировать два или более режима поведения. Свободная система может иметь более чем один предельный цикл. Управляемая система с периодическим вовозбуждением может продемонстрировать гармоническое, субгармоническое или более сложное устойчивое поведение в зависимости от амплитуды и частоты входа. Она может продемонстрировать даже скачок режима поведения при гладком изменении амплитуды и частоты возбуждения.

В этой книге мы рассмотрим только первые три явления из выше-перечисленных¹⁾. Множественные положения равновесия и конечные циклы будут рассмотрены в следующей главе при рассмотрении автономных систем второго порядка, явление конечного времени ухода решения на бесконечность будет рассмотрено в главе 5.

1.2. Примеры

1.2.1. Уравнения маятника

Рассмотрим изображенный на рис. 1.1 простой маятник, где l — длина стержня и m — масса груза. Предположим, что стержень абсолютно твердый и имеет нулевую массу. Пусть θ — угол отклонения стержня от вертикальной оси, проходящей через точку подвеса. Маятник свободно качается в вертикальной плоскости и груз маятника совершает круговое движение с радиусом l . Для того, чтобы записать уравнение движения маятника, определим силы, действующие на маятник. Имеется сила гравитации, которая равна mg , где g — гравитационная постоянная. Имеется также сила трения, препятствующая движению, которая предполагается пропорциональной с коэффициентом k скорости вращения. Используя второй закон Ньютона, мы можем получить уравнение движения для продольного движения

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - k\dot{\theta}.$$

¹⁾ Вынужденные колебания, хаос, бифуркации и другие важные темы рассмотрены в [70], [74], [187] и [207].

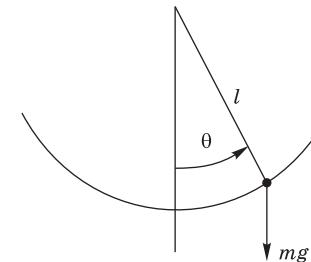


Рис. 1.1. Маятник.

Запись этого уравнения для продольного движения имеет то преимущество, что сила растяжения стержня, действующая ортогонально, не входит в это уравнение. Мы могли бы получить это уравнение и при записи уравнения для моментов относительно точки подвеса. Для того, чтобы получить уравнение состояния для маятника, выберем в качестве переменных состояния $x_1 = \theta$ и $x_2 = \dot{\theta}$. Тогда уравнения состояния могут быть записаны в следующем виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (1.5)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2. \quad (1.6)$$

Для того, чтобы найти точки равновесия, положим $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ и решим относительно x_1 и x_2 систему уравнений

$$0 = x_2,$$

$$0 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2.$$

Точки равновесия расположены в $(n\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. С физической точки зрения, маятник имеет только два положения равновесия, соответствующие значениям вектора состояния $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$. Другие положения равновесия представляют собой повторения этих двух положений при нескольких полных оборотах маятника вокруг точки подвеса прежде чем он остановится в одном из этих двух положений равновесия. Например, если маятник совершил m полных оборотов на 360° градусов прежде чем он остановился в нижнем положении равновесия, то с математической точки зрения мы можем сказать, что маятник достиг положения равновесия $(2m\pi, 0)$. В нашем исследовании мы ограничимся рассмотрением только двух "нетривиальных" положений равновесия $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$. С физической точки зрения эти два положения существенно отличаются друг от друга. В то время, как маятник может легко установится в нижнем положении равновесия $(0, 0)$, он, тем не менее, не сможет удерживаться в верхнем положении равновесия $(\pi, 0)$, поскольку малое возмущение выведет его из этого состояния. Отличие этих двух состояний заключается в различных

свойствах устойчивости, присущих этим состояниям. Этот вопрос будет более подробно рассмотрен в последующем.

Иногда оказывается полезным рассмотреть уравнения маятника, в которых силы трения не учитываются, т.е. $k = 0$. В этом случае система имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (1.7)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 \quad (1.8)$$

и является консервативной в том смысле, что если маятнику сообщено начальное ускорение, он продолжит бесконечные колебания с недиссипативным обменом энергии между кинетической и потенциальной энергиями. Это, разумеется, нереалистично, но позволяет рассмотреть некоторые аспекты поведения маятника. Использование этих уравнений позволяет также найти приближенные решения уравнений движения маятника для малого коэффициента k . Другую версию уравнений движения маятника можно получить, если приложить врачающий момент T . Этот момент может рассматриваться как управляющее воздействие в системе

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.9)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml^2} T. \quad (1.10)$$

Следует отметить, что поведение некоторых не связанных непосредственным образом с маятником физических систем может моделироваться с использованием математической модели, похожей на уравнения маятника. Примерами таких систем могут служить модель синхронного генератора, соединенного с бесконечной шиной (Упражнение 1.8), модель Джозефсоновского перехода (Josephson junction) линии передачи (transition line) (Упражнение 1.9) и модель контура фазовой синхронизации (phase lock loop) (Упражнение 1.11). Таким образом, уравнения маятника имеют важное практическое значение.

1.2.2. Цепь с туннельным диодом

Рассмотрим показанную на рис. 1.2¹⁾ цепь с туннельным диодом, который характеризуется значением $i_R = h(v_R)$. Энергонакопительными элементами в этой цепи являются конденсатор C и катушка индуктивности L . Предполагая, что эти величины имеют линейные характеристики и не зависят от времени, мы можем записать уравнения цепи в следующем виде

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad \text{и} \quad v_L = L \frac{di_L}{dt},$$

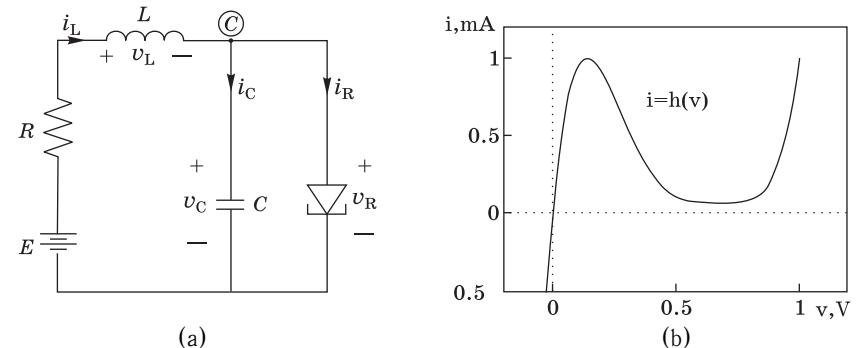


Рис. 1.2. (а) Цепь с туннельным диодом; (б) Диаграмма $v_R - i_R$ для диода.

где i и v — сила тока и напряжение в элементе, нижний индекс указывает на соответствующий элемент. Для того, чтобы записать модель состояния этой системы, выберем $x_1 = v_C$ и $x_2 = i_L$ в качестве переменных состояния и $u = E$ — в качестве управляющего воздействия. Для того, чтобы выписать уравнение состояния для x_1 , нам необходимо представить i_C в виде функции переменных состояния и входа u . Используя закон Кирхгофа, мы можем получить следующее уравнение (сумма всех токов исходящих из узла © равна нулю)

$$i_C + i_R - i_L = 0.$$

Тогда

$$i_C = -h(x_1) + x_2.$$

Аналогично, нам необходимо представить v_L в виде функции переменных состояния и входа u . Используя закон Кирхгофа, мы можем получить следующее уравнение (сумма напряжений на всех элементах в левой цепи равна нулю)

$$v_C - E + Ri_L + v_L = 0.$$

Следовательно

$$v_L = -x_1 - Rx_2 + u.$$

Таким образом мы можем представить модель состояния цепи в следующем виде

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} [-h(x_1) + x_2] \quad (1.11)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} [-x_1 - Rx_2 + u]. \quad (1.12)$$

¹⁾Этот рисунок, а также рисунки 1.3 и 1.7 взяты из [39].

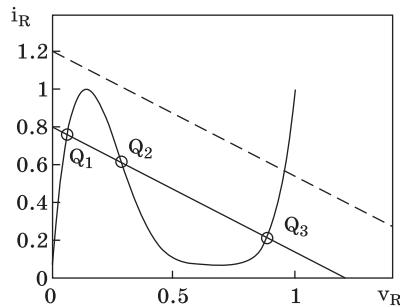


Рис. 1.3. Точки равновесия в цепи с туннельным диодом.

Точки равновесия системы можно определить, полагая в этих уравнениях $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ и решая относительно x_1 и x_2 систему уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= -h(x_1) + x_2 \\ 0 &= -x_1 - Rx_2 + u. \end{aligned}$$

Легко видеть, что положения равновесия соответствуют корням уравнения

$$h(x_1) = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}x_1.$$

Из рисунка 1.3 видно, что для определенных значений E и R это уравнение имеет три изолированных корня, соответствующих трем изолированным точкам равновесия системы. Например, если мы увеличиваем E , фиксируя некоторое значение R , мы достигнем точки, выше которой расположена только точка Q_3 . С другой стороны, если мы уменьшаем E , фиксируя некоторое заданное значение R , мы приходим в точку Q_1 , становящейся единственным положением равновесия. Рассмотрим ситуацию, когда существует несколько точек равновесия. В какой из точек равновесия будет находиться экспериментальная система? Ответ на этот вопрос зависит от свойств устойчивости точек равновесия. Мы вернемся к рассмотрению этого примера в главе 2 и получим ответ на этот вопрос.

1.2.3. Система «груз–пружина»

Изображенная на рис. 1.4 механическая система «груз–пружина» представляет собой груз массой m , скользящий по горизонтальной поверхности и соединенный с вертикальной поверхностью пружиной. Груз подвергается воздействию внешней силы F . Обозначим через y смещение груза относительно некоторого исходного положения и запишем второй закон Ньютона для движения такой системы

$$m\ddot{y} + F_f + F_{sp} = F,$$

где F_f — сила трения и F_{sp} — сила упругости, обусловленная наличием пружины. Мы будем предполагать, что сила трения является

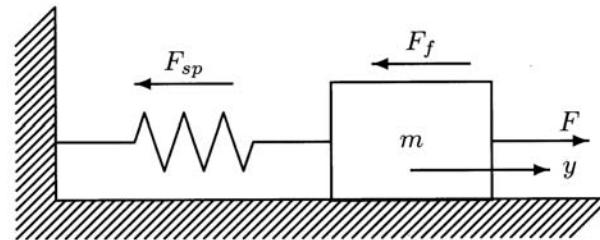


Рис. 1.4. Механическая система «груз–пружина».

функцией только смещения y , т.е. $F_{sp} = g(y)$ и исходное положение выбрано таким образом, что $g(0) = 0$. Внешняя сила находится в нашем распоряжении. В зависимости от того, какой вид имеют F , F_f и g , мы получим различные автономные и неавтономные модели второго порядка.

В случае относительно малого смещения сила упругости может быть представлена в виде линейной функции $g(y) = ky$, где k — коэффициент упругости. Для больших смещений сила упругости может зависеть от y нелинейно. Например, функция

$$g(y) = k(1 - a^2 y^2)y, \quad |ay| < 1$$

может служить моделью так называемой *мягкой пружины*, которая характеризуется тем, что при увеличении смещения более некоторой величины сила упругости возрастает незначительно. С другой стороны функция упругости

$$g(y) = k(1 + a^2 y^2)y$$

соответствует так называемой *жесткой пружине*, которая характеризуется тем, что при увеличении смещения более некоторой величины сила упругости значительно возрастает.

Сила трения F_f может иметь компоненты, соответствующие трению покоя, сухому и вязкому трению. Когда груз находится в состоянии покоя, на него действует сила статического трения F_s , направленная параллельно поверхности и ограниченная величинами $\pm \mu_s mg$, где $0 < \mu_s < 1$ — коэффициент трения покоя. Эта сила принимает различные значения в обозначенных выше пределах и удерживает груз в состоянии покоя. Для того, чтобы возникло движение груза, необходимо приложить некоторую силу для преодоления силы трения покоя. При отсутствии внешней силы $F = 0$ сила трения покоя компенсируется силой упругости пружины и система находится в положении равновесия $|g(y)| < \mu_s mg$. Как только движение началось, сила трения, действующая в противоположном движению направлении, может быть промоделирована как функция скорости скольжения $v = \dot{y}$. Сила трения

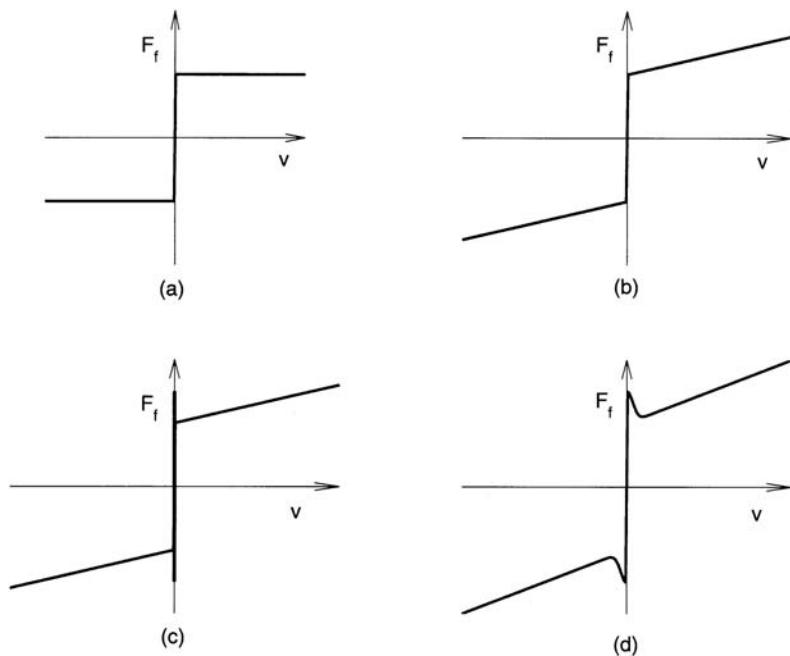


Рис. 1.5. Примеры моделей трения. (а) сухое трение; (б) сухое трение при линейном вязком трении; (в) статическое, сухое и линейное вязкое трение; (г) статическое, сухое и линейное вязкое трение — эффект Страйбека.

вследствие наличия *сухого трения* F_c имеет постоянную по модулю величину $\mu_k mg$, где μ_k — коэффициент кинетического трения, т.е.

$$F_c = \begin{cases} -\mu_k mg, & \text{при } v < 0; \\ \mu_k mg, & \text{при } v > 0. \end{cases}$$

Если груз движется в вязкой среде (воздухе или масле) то возникает сила вязкого трения. Эта сила обычно моделируется нелинейной функцией скорости движения, т.е. $F_v = h(v)$, где $h(0) = 0$. Для малых скоростей мы можем положить $F_v = cv$. На рис. 1.5(а) и (б) приведены примеры моделей сухого трения и сухого трения при линейном вязком трении, соответственно. На рис. 1.5(б) показан пример модели, в которой трение покоя больше сухого трения, а на рис. 1.5(д) — пример похожей ситуации, но с силой, уменьшающейся непрерывно при увеличении скорости (эффект Страйбека (Stribeck)).

Комбинация жесткой пружины, линейного вязкого трения и периодической внешней силы $F = A \cos \omega t$ приводит к рассмотрению

уравнения Дуффинга (Duffing)

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + ka^2 y^3 = A \cos \omega t, \quad (1.13)$$

которое является классическим примером при изучении периодического возбуждения нелинейной системы.

Комбинация линейной модели пружины, трения покоя, сухого трения, линейного вязкого трения и нулевой внешней силы приводит к рассмотрению следующего уравнения

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y, \dot{y}) = 0,$$

где

$$\eta(y, \dot{y}) = \begin{cases} \mu_k mg \operatorname{sign}(\dot{y}), & \text{при } |\dot{y}| > 0; \\ -ky, & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ и } |y| \leq \mu_s mg/k; \\ -\mu_s mg \operatorname{sign}(y), & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ и } |y| > \mu_s mg/k. \end{cases}$$

Значение $\eta(y, \dot{y})$ при $\dot{y} = 0$ и $|y| < \mu_s mg/k$ может быть получено из условия равновесия $\ddot{y} = \dot{y} = 0$. Выбор $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{y}$ приводит к модели состояния

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.14)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - 2 - \frac{1}{m}(x_1, x_2) \quad (1.15)$$

Отметим две особенности этой модели. Во-первых, она имеет не изолированные положения равновесия, а целое устойчивое множество положений равновесия. Во-вторых, правая часть уравнения является разрывной функцией переменных состояния. Наличие разрыва обусловлено предположением о линейности модели силы трения. Естественно было бы ожидать с физической точки зрения, что сила трения переходит из режима покоя в скользящий режим гладким образом, а не так резко, как в нашей идеализированной модели¹⁾. Однако такая разрывная идеализация модели упрощает задачу анализа. Например, при $x_2 > 0$ мы можем моделировать поведение системы с использованием линейной модели

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \mu_k g \end{aligned}$$

Аналогично при $x_2 < 0$ модель системы может быть представлена в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \mu_k g \end{aligned}$$

Таким образом, в каждой из областей мы можем предсказать поведение системы с использованием средств анализа линейных систем.

¹⁾ Гладкий переход от режима покоя к скользящему режиму может быть реализован в рамках динамической модели трения (см. например [12] и [144]).

Это может служить примером так называемого *кусочно-линейного анализа*, при котором система представляется в различных областях пространства состояния линейными моделями, отличающимися друг от друга определенными коэффициентами.

1.2.4. Генератор с отрицательным сопротивлением

На рис. 1.6 показана структурная схема цепи, представляющей важный класс электронных генераторов (oscillators). Модели катушки индуктивности и конденсатора предполагаются линейными, не зависящими от времени и пассивными, т.е. $L > 0$ и $C > 0$. Резистивный элемент представляет собой активную цепь, характеризующейся показанной на рисунке вольт-амперной характеристикой $i = h(v)$. Функция $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям

$$h(0) = 0, \quad h'(0) < 0, \\ h(v) \rightarrow \infty \text{ при } v \rightarrow \infty \text{ и } h(v) \rightarrow -\infty \text{ при } v \rightarrow -\infty,$$

где h' — первая производная $h(v)$ по v . Подобная $v - i$ -характеристика может быть реализована, например, показанной на рис. 1.7 цепью с двумя туннельными диодами с характеристикой, изображенной на рис. 1.2. Используя закон Кирхгофа, мы можем записать

$$i_C + i_L + i = 0.$$

Тогда

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(s) ds + h(v) = 0.$$

Дифференцируя по t и умножая на L , получаем

$$CL \frac{d^2v}{dt^2} + v + Lh'(v) \frac{dv}{dt} = 0.$$

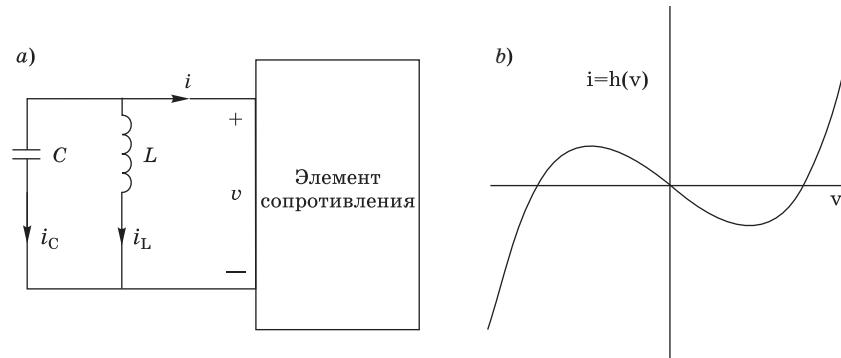


Рис. 1.6. (а) Структурная схема цепи генератора; (б) Типичная нелинейная характеристика в рабочей точке.

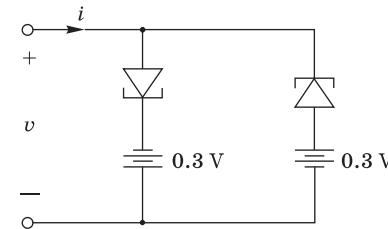


Рис. 1.7. Цепь с двумя туннельными диодами с отрицательным сопротивлением.

Вышеприведенное уравнение может быть записано в виде некоторого хорошо известного в теории нелинейных систем уравнения. Для этого сделаем замену переменной времени $\tau = t/\sqrt{CL}$. Тогда производные v по t и τ будут связаны следующими соотношениями

$$\frac{dv}{d\tau} = \sqrt{CL} \frac{dv}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d^2v}{d\tau^2} = CL \frac{d^2v}{dt^2}.$$

Обозначая производную v по τ через \dot{v} , мы можем переписать уравнение цепи в виде

$$\ddot{v} + \varepsilon h'(v)\dot{v} + v = 0,$$

где $\varepsilon = \sqrt{L/C}$. Это уравнение является специальным случаем *уравнения Лъенара* (Liénard)

$$\ddot{v} + f(v)\dot{v} + g(v) = 0. \quad (1.16)$$

При

$$h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$$

уравнение цепи принимает вид *уравнения Ван дер Поля* (van der Pol)

$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0. \quad (1.17)$$

Это уравнение, использованное Ван дер Полем для исследования колебаний в ламповых электронных цепях, является фундаментальным примером из нелинейной теории колебаний и имеет периодическое решение, являющееся атTRACTором для всех решений, за исключением нулевого в единственной точке равновесия $v = \dot{v} = 0$. Для того, чтобы записать модель состояния цепи выберем $x_1 = v$ и $x_2 = \dot{v}$. Тогда

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (1.18)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - \varepsilon h'(x_1)x_2. \quad (1.19)$$

Заметим, что альтернативная модель состояния может быть получена при выборе в качестве переменных состояния напряжения на конденсаторе и силы тока, проходящего через катушку индуктивности.

Обозначая переменные состояния $z_1 = i_L$ и $z_2 = v_C$ мы получаем модель состояния вида

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{L} z_2,$$

$$\frac{dz_2}{dt} = -\frac{1}{C}[z_1 + h(z_2)].$$

Поскольку первая модель состояния записана в терминах переменной времени $\tau = t/\sqrt{CL}$, запишем вторую модель также в терминах τ

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{\varepsilon} z_2, \quad (1.20)$$

$$\dot{z}_2 = -\varepsilon[z_1 + h(z_2)] \quad (1.21)$$

Легко видеть, что модели в x - и z -координатах различны, но, тем не менее, они являются эквивалентными представлениями системы. Эквивалентность может быть установлена, если заметить, что эти модели могут быть получены одна из другой при помощи замены координат

$$z = T(x).$$

Поскольку мы выбирали координаты x и z исходя из физических соображений, нам не составит труда найти отображение $T(\cdot)$. Действительно,

$$\begin{aligned} x_1 &= v = z_2, \\ x_2 &= \frac{dv}{dt} = \sqrt{CL} \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{L}{C}} [-i_L - h(v_C)] = \varepsilon[-z_1 - h(z_2)]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} -h(x_1) - (1/\varepsilon)x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

и обратное отображение имеет вид

$$x = T^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\varepsilon z_1 - \varepsilon h(z_2) \end{bmatrix}.$$

1.2.5. Искусственные нейронные сети

Искусственные нейронные сети, аналогично биологическим структурам, перспективны для распределенной обработки информации и могут использоваться для параллельных вычислений. На рис. 1.8 показана электрическая цепь, которая реализует одну из моделей нейронной сети, известной как *модель Хопфилда* (Hopfield). Цель основана на использовании сети соединенных между собой усилителей с резистивно-емкостной связью. Характеристика вход-выход усилителей задается равенством $v_i = g_i(u_i)$, где u_i и v_i — входное и выходное напряжения на i -м усилителе. Функция $g_i(\cdot) : R \rightarrow (-V_M, V_M)$ — сигмоидальная функция с асимптотами $-V_M$ и V_M (см. рис. 1.9).

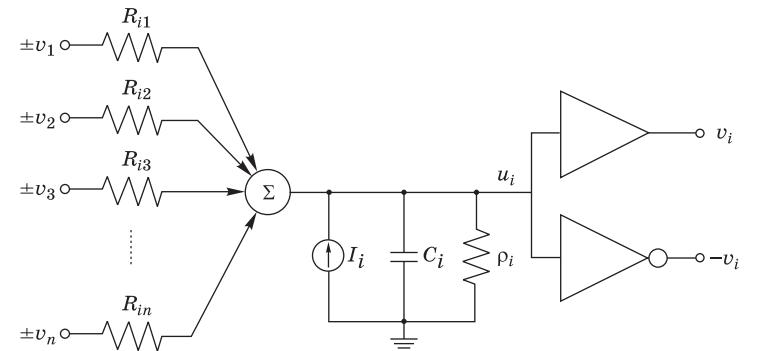


Рис. 1.8. Модель Хопфилда нейронной сети.

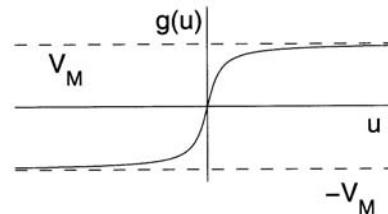


Рис. 1.9. Типичная характеристика вход-выход усилителей в модели Хопфилда.

Эта функция является непрерывно дифференцируемой, нечетной, монотонно возрастающей и $g_i(u_i) = 0$ если и только если $u_i = 0$. Примерами таких функций могут служить следующие

$$g_i(u_i) = \frac{2V_M}{\pi} \arctg \left(\frac{\lambda \pi u_i}{2V_M} \right), \quad \lambda > 0$$

и

$$g_i(u_i) = V_M \frac{e^{\lambda u_i} - e^{-\lambda u_i}}{e^{\lambda u_i} + e^{-\lambda u_i}} = V_M \operatorname{th}(\lambda u_i), \quad \lambda > 0,$$

где λ определяет угол наклона $g_i(u_i)$ в $u_i = 0$. Такая сигмоидальная вход-выходная характеристика может быть реализована с использованием операционных усилителей. Для каждого усилителя в сети, существует инвертирующий усилитель с выходом (выходным напряжением) $-v_i$, что позволяет выбрать знак выхода усилителя, соединенного с определенной входной линией сети. Выходы v_i и $-v_i$ обычно обеспечиваются двумя выходными терминалами той же цепи операционного усилителя. Описанную выше пару нелинейных усилителей называют "нейроном". Цепь содержит также резистивно-емкостный элемент на входе каждого усилителя. Емкость $C_i > 0$ и сопротивление $\rho_i > 0$ представляют собой совокупные шунтирующую емкость и шунтирующее

сопротивление входа i -го усилителя. Применяя закон Кирхгофа для входного узла i -го усилителя, получаем следующее равенство

$$C_i \frac{du_i}{dt} = \sum_j \frac{1}{R_{ij}} (\pm v_j - u_i) - \frac{1}{\rho_i} u_i + I_i = \sum_j T_{ij} v_j - \frac{1}{R_i} u_i + I_i,$$

где

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\rho_i} + \sum_j \frac{1}{R_{ij}}.$$

В этих равенствах T_{ij} — проводимость, ограниченная по модулю значением $1/R_{ij}$ и имеющая знак, определяемый выбором положительного или отрицательного выхода j -го усилителя, I_i — постоянная сила тока на входе. Функционирование цепи, состоящей из n усилителей, описывается системой из n дифференциальных уравнений первого порядка. Для того, чтобы выписать модель состояния такой системы выберем в качестве переменных состояния $x_i = v_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\dot{x}_i = \frac{dg_i}{du_i} \times \dot{u}_i = \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \times \frac{1}{C_i} \left(\sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} u_i + I_i \right)$$

Обозначая

$$h_i(x_i) = \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \Big|_{u_i=g_i^{-1}(x_i)}$$

мы можем переписать уравнения состояния в следующем виде¹⁾

$$\dot{x}_i = \frac{1}{C_i} h_i(x_i) \left[\sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.22)$$

Заметим, что с учетом сигмоидальности характеристики $g_i()$, функция $h()$ удовлетворяет неравенству

$$h_i(x_i) > 0, \quad \forall x_i \in (-V_M, V_M)$$

Точками равновесия системы являются корни системы из n уравнений

$$0 = \sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Эти точки определяются сигмоидальными характеристиками, линейной резистивной связью и входными токами. Альтернативную модель состояния мы можем получить, выбрав в качестве переменных состояния u_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

¹⁾ Прим. ред. перев. — Через $g^{-1}(x)$ здесь и далее обозначается обратная функция к $g(x)$: $g^{-1}(g(x)) = x$.

Анализ свойств устойчивости такой нейронной сети существенным образом связан с выполнением условия симметрии $T_{ij} = T_{ji}$. Анализу случая $T_{ij} = T_{ji}$ посвящен параграф 4.2, а случай $T_{ij} \neq T_{ji}$ рассмотрен в параграфе 9.5.

1.2.6. Адаптивное управление

Рассмотрим линейную систему первого порядка

$$\dot{y}_p = a_p y_p + k_p u,$$

где u — управляющее воздействие и y_p — измеряемый выход. Мы будем называть эту модель объектом управления. Предположим, что требуется получить замкнутую систему, вход–выходное поведение которой определяется эталонной моделью

$$\dot{y}_m = a_m y_m + k_m r,$$

где r — эталонное управляющее воздействие, а сама модель построена таким образом, что она обеспечивает желаемый выход замкнутой системы. Эта цель может быть достигнута с использованием линейного управления с обратной связью

$$u(t) = \theta_1^* r(t) + \theta_2^* y_p(t)$$

при условии, что параметры объекта a_p и k_p известны, $k_p \neq 0$ и параметры регулятора θ_1^* и θ_2^* выбраны в соответствии со следующими равенствами

$$\theta_1^* = \frac{k_m}{k_p} \quad \text{и} \quad \theta_2^* = \frac{a_m - a_p}{k_p}.$$

В случае, когда a_p и k_p неизвестны, мы можем рассмотреть регулятор вида

$$u(t) = \theta_1(t)r(t) + \theta_2(t)y_p(t),$$

где зависящие от времени коэффициенты $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ подстраиваются в режиме реального времени на основе анализа доступных данных: $r(\tau)$, $y_m(\tau)$, $y_p(\tau)$ и $u(\tau)$, $\tau < t$. Процесс адаптации должен обеспечивать стремление $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ к соответствующим номинальным значениям θ_1^* и θ_2^* . Закон адаптации выбирается исходя из требований устойчивости процесса. Одним из таких законов является градиентный алгоритм¹⁾

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -\gamma(y_p - y_m)r \\ \dot{\theta}_2 &= -\gamma(y_p - y_m)y_p \end{aligned}$$

¹⁾ Этот закон будет обоснован в параграфе 8.3.

Прим. ред. перевода: этот закон управления является градиентным по отношению к функции \dot{Q} , являющейся скоростью изменения целевой функции $Q = (y_p - y_m)^2$ в силу уравнений объекта с регулятором и эталонной модели, т.е. закон относится к классу алгоритмов скоростного градиента. См. Дополнение.

где γ — положительная константа, определяющая скорость сходимости процесса адаптации. Такой адаптивный закон управления предполагает, что знак k_p известен, т.е. не умаляя общности мы можем считать, что эта величина положительна. Для того, чтобы выписать модель состояния системы, замкнутой адаптивным законом управления, удобно ввести выходную ошибку (output error) e_o и параметрические ошибки ϕ_1 и ϕ_2 :

$$e_o = y_p - y_m, \quad \phi_1 = \theta_1 - \theta_1^*, \quad \phi_2 = \theta_2 - \theta_2^*.$$

Тогда эталонная модель может быть переписана в следующем виде

$$\dot{y}_m = a_p y_m + k_p(\theta_1^* r + \theta_2^* y_m).$$

С другой стороны, выход объекта y_p удовлетворяет уравнению

$$\dot{y}_p = a_p y_p + k_p(\theta_1 r + \theta_2 y_p).$$

Вычитая из последнего равенства предыдущее, получаем уравнение ошибки

$$\begin{aligned} \dot{e}_o &= a_p e_o + k_p(\theta_1 - \theta_1^*)r + k_p(\theta_2 y_p - \theta_2^* y_m) \\ &= a_p e_o + k_p(\theta_1 - \theta_1^*)r + k_p(\theta_2 y_p - \theta_2^* y_m + \theta_2^* y_p - \theta_2^* y_p) \\ &= (a_p + k_p \theta_2^*) e_o + k_p(\theta_1 - \theta_1^*)r + k_p(\theta_2 - \theta_2^*) y_p. \end{aligned}$$

Таким образом, замкнутая система описывается нелинейной, неавтономной моделью состояния третьего порядка

$$\dot{e}_o = a_m e_o + k_p \phi_1 r(t) + k_p \phi_2 [e_o + y_m(t)], \quad (1.23)$$

$$\dot{\phi}_1 = -\gamma e_o r(t), \quad (1.24)$$

$$\dot{\phi}_2 = -\gamma e_o [e_o + y_m(t)], \quad (1.25)$$

где $\dot{\phi}_i(t) = \dot{\theta}_i(t)$ и для функций $r(t)$ и $y_m(t)$ явно указана их зависимость от времени для того, чтобы подчеркнуть неавтономность системы. Сигналы $r(t)$ и $y_m(t)$ представляют собой внешние входы для замкнутой системы.

Простейшая версия этой модели может быть получена, когда k_p известен. В этом случае мы можем положить $\theta_1 = \theta_1^*$ и требуется подстраивать только θ_2 . Модель замкнутой системы сводится к следующей

$$\dot{e}_o = a_m e_o + k_p \phi [e_o + y_m(t)], \quad (1.26)$$

$$\dot{\phi} = -\gamma e_o [e_o + y_m(t)], \quad (1.27)$$

где нижний индекс ϕ_2 опущен для простоты записи. Если цель управления — устремить выход y_p к нулю, мы можем положить $r(t) \equiv 0$ (следовательно $y_m(t) \equiv 0$) и замкнутая модель сводится к автономной модели второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{e}_o &= (a_m + k_p \phi) e_o, \\ \dot{\phi} &= -\gamma e_o^2. \end{aligned}$$

Полагая $\dot{e}_o = \dot{\phi} = 0$ в вышеприведенной системе уравнений, мы можем определить точки равновесия системы из следующих уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= (a_m + k_p \phi) e_o, \\ 0 &= -\gamma e_o^2. \end{aligned}$$

Система имеет точку равновесия в $e_o = 0$ для всех значений ϕ , т.е. она имеет притягивающее множество $e_o = 0$. Изолированные точки равновесия отсутствуют.

Описанная выше схема адаптивного управления носит название *прямого адаптивного управления с эталонной моделью*. Использование термина «эталонная модель» обусловлено тем, что регулятор обеспечивает соответствие реального поведения системы заданному эталонному закону, а термин «прямое» связан с тем, что параметры регулятора адаптируются непосредственным образом, в отличие, например, от схемы адаптивного управления, в которой параметры объекта a_p и k_p оцениваются в режиме реального времени и эти оценки используются для вычисления параметров регулятора.¹⁾ При исследовании задач адаптивного управления возникают интересные нелинейные модели, которые могут быть использованы для иллюстрации рассмотренных в этой книге методов из теории устойчивости и теории возмущений.

1.2.7. Типовые нелинейности

В рассмотренных выше примерах мы имели дело с некоторыми нелинейностями стандартного типа, которые возникают при моделировании физических систем: нелинейное трение и сигмоидальные нелинейности. В этом параграфе мы исследуем другие типичные нелинейности. На рис. 1.10 показаны четыре типа безынерционных нелинейностей. Они называются безынерционными, с нулевой памятью, или статическими, поскольку выход таких нелинейностей в каждый момент времени однозначно определяется их входом в этот момент, т.е. зависимость от предыстории входа отсутствует.

На рис. 1.10(a) показано идеальное реле, описываемое сигнум-функцией

$$\text{sign}(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u > 0 \\ 0, & \text{если } u = 0 \\ -1, & \text{если } u < 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Подобная нелинейная характеристика может моделировать электромеханические реле, цепи тиристоров и другие переключающие устройства.

На рис. 1.10(b) показана нелинейность насыщения. Подобная нелинейная характеристика свойственна функционированию усилителей

¹⁾ Подробное изложение теории адаптивного управления может быть найдено в работах [5], [15], 87], [139] и [168]. Прим. ред. перев. — см. также Дополнение, [Д4], [Д44], [Д48].

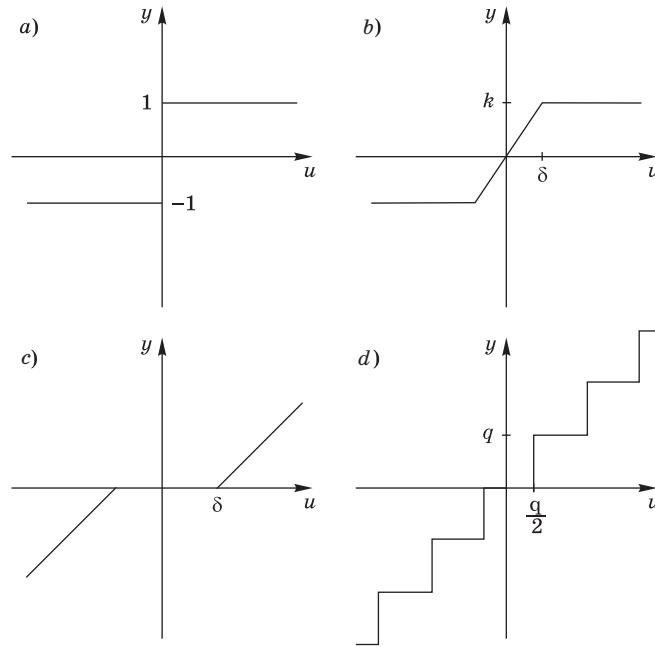


Рис. 1.10. Типичные безынерционные нелинейности: а) реле; б) насыщение; в) зона нечувствительности; г) квантование.

(электронных, магнитных, пневматических или гидравлических), моторов и других устройств. Эта нелинейность используется также для того, чтобы ограничивать абсолютную величину переменной. Определим функцию насыщения

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} u, & \text{если } |u| \leq 1 \\ \text{sign}(u), & \text{если } |u| < 1 \end{cases} \quad (1.29)$$

представляющую собой нормализованную нелинейность насыщения. На рис. 1.10(б) изображен график для $k \text{sat}(u/\delta)$.

На рис. 1.10(в) показана идеальная нелинейность с зоной нечувствительности. Такая характеристика типична для клапанов и некоторых усилителей при малых входных сигналах. Кусочно-линейные функции, показанные на рис. 1.10(б) и (в) и представляющие собой характеристики насыщения и зоны нечувствительности, являются аппроксимацией более реалистичных гладких функций (см. рис. 1.11).

На рис. 1.10(г) показана нелинейность квантования (quantization), которая характерна для аналого-цифровых преобразователей сигналов.

Часто мы будем сталкиваться с нелинейными элементами, вход-выходная характеристика которых имеет память, т.е. выход таких нелинейностей в каждый момент времени может зависеть от всей

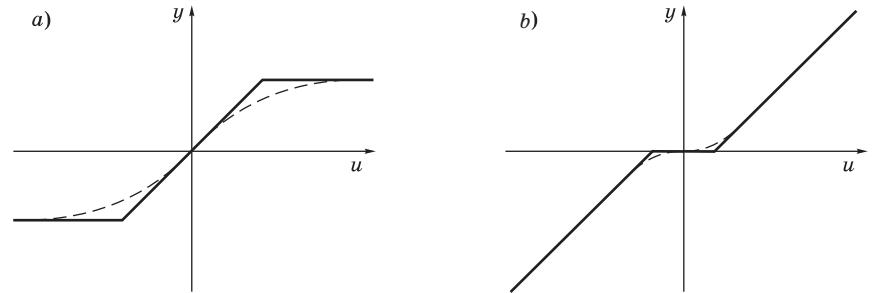


Рис. 1.11. Реальные характеристики (пунктирная линия) нелинейностей с а) насыщением (saturation) и б) с зоной нечувствительности (dead zone), являющиеся аппроксимацией кусочно-линейных характеристик (сплошная линия).

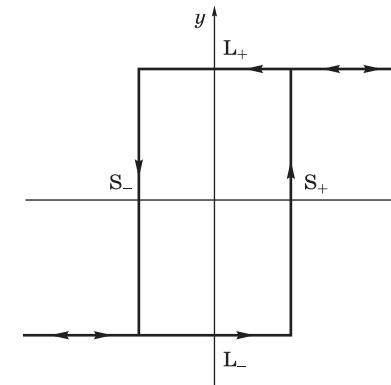


Рис. 1.12. Реле с гистерезисом.

предыстории входа. На рис. 1.12, 1.15(б) и 1.16 показаны три таких характеристики гистерезисного типа (hysteresis). Первый из этих трех элементов (рис. 1.12) представляет собой реле с гистерезисом. Для больших отрицательных значений входа выходной сигнал будет находиться на нижнем уровне L_- . При повышении уровня входного сигнала, уровень выхода остается равным L_- до тех пор, пока уровень входа не достигнет S_+ . При дальнейшем повышении уровня сигнала больше S_+ , уровень выхода переключается на верхний уровень и остается на нем при еще большем повышении уровня входного сигнала. При понижении уровня входного сигнала, уровень выхода остается на верхнем уровне L_+ до тех пор, пока уровень входа не достигнет S_- — и в этот момент выходной сигнал переходит на нижний уровень L_- и остается на нем при меньшем уровне входного сигнала. Такая вход-выходная характеристика может быть реализована, например,

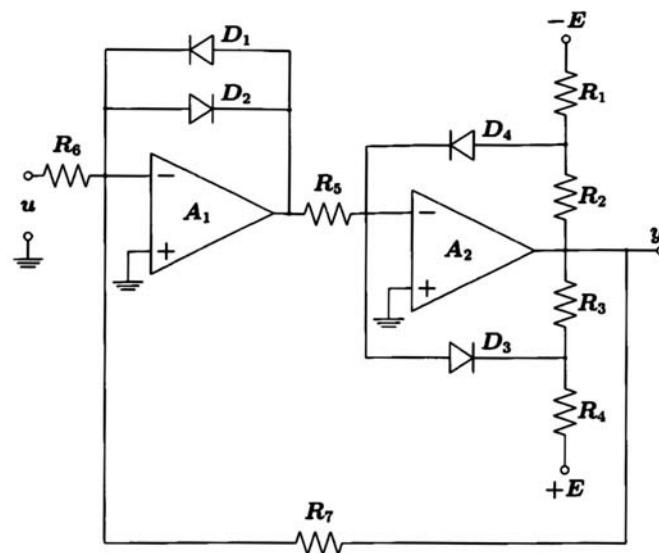


Рис. 1.13. Цепь с операционным усилителем, реализующая характеристику реле с гистерезисом, показанную на рис. 1.12.

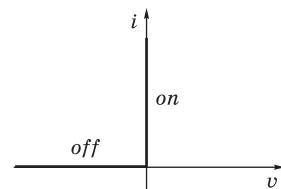


Рис. 1.14. Вольт-амперная характеристика идеального диода.

цепью операционного усилителя, показанной на рис. 1.13¹⁾. Эта цепь характеризует идеальный операционный усилитель и идеальные диоды. В идеальном операционном усилителе напряжение на инвертирующем (–) входе равно напряжению на неинвертирующем (+) входе и входные токи на обоих входах нулевые. Идеальный диод имеет вольт-амперную характеристику, изображенную на рис. 1.14. Когда входное напряжение сильно отрицательное, диоды D_1 и D_3 будут *открыты*, а диоды D_2 и D_4 будут *закрыты*²⁾. Поскольку инвертирующие входы обоих

¹⁾ Этот рисунок взят из [204].

²⁾ Для того, чтобы убедиться в том, что D_3 открыт когда D_1 закрыт, заметим, что когда D_1 открыт, напряжение на выходе A_1 будет равно напряжению смещения нуля V_d . Это приводит к тому, что ток V_d/R_5 проходит через R_5 на вход A_2 . Поскольку входной ток A_2 равен нулю, ток в R_5 должен протекать

усилителей реализуются заземлением, токи в R_5 и D_3 будут нулевыми и выход D_3 будет получаться на заземлении. Поэтому выход y будет равно $y = -(R_3/R_4)E$. Этот режим работы сохраняется до тех пор, пока ток через D_1 положителен, т.е.

$$i_{D_1} = \frac{R_3 E}{R_4 R_7} - \frac{u}{R_6} > 0 \Leftrightarrow u < \frac{R_3 R_6 E}{R_4 R_7}.$$

При повышении входного напряжения u выход y останется на уровне $-(R_3/R_4)E$ до тех пор, пока входное напряжение не увеличится до $R_3 R_r E / R_4 R_7$. Выше этого уровня диоды D_1 и D_3 будут закрыты, а D_2 и D_4 — открыты. Далее, поскольку инвертирующие входы обоих усилителей реализованы в виде заземления, токи в R_5 и D_4 будут нулевыми и входом диода D_4 будет заземление. Следовательно, выход будет определяться равенством $y = (R_2/R_1)E$. Этот режим будет сохраняться до тех пор, пока ток в D_2 будет положительным, т.е.

$$i_{D_2} = \frac{u}{R_6} + \frac{R_2 E}{R_1 R_7} > 0 \Leftrightarrow u > -\frac{R_2 R_6 E}{R_1 R_7}.$$

Таким образом, мы получили вход-выходную характеристику, изображенную на рис. 1.12, где

$$L_- = -\frac{R_3 E}{R_4}, \quad L_+ = \frac{R_2 E}{R_1}, \quad S_- = -\frac{R_2 R_6 E}{R_1 R_7}, \quad S_+ = \frac{R_3 R_6 E}{R_4 R_7}.$$

В примере 2.1 мы покажем, что цепь с туннельным диодом, описанная в параграфе 1.2.2, реализует похожую характеристику в случае, когда изменение входного напряжения значительно медленнее, чем процессы в цепи.

Другим типом нелинейности с гистерезисом является характеристика люфта (backlash), показанная на рис. 1.15(b). Такая характеристика присуща редукторам. Рисунок 1.15(a) иллюстрирует эффект люфта между двумя шестернями (gear), зубья которых разделены небольшим зазором. Предположим, что ведомая шестерня характеризуется большим отношением трения к инерционности так, что когда вращение ведущей шестерни начинает замедляться, поверхности зубьев сохраняют контакт в точке L . На вход-выходной характеристике, изображенной на рис. 1.15(b), показано как соотносится угол поворота ведущей шестерни y с углом поворота ведомой шестерни u . Когда ведущая шестерня начинает вращаться из положения, изображенного на рис. 1.15(a), и поворачивается на угол меньший, чем a , ведомая шестерня не вращается. При повороте на угол больший, чем a обеспечивается контакт зубьев в точке L и ведомая шестерня начинает вращаться вслед за ведомой, что соответствует участку $A_o A$ вход-выходной характеристики. Когда ведущая шестерня начинает вращаться в обратном направлении,

через D_3 . При моделировании диодов, мы не учитываем ток смещения нуля V_d . Поэтому токи в R_5 и D_3 также не учитываются.

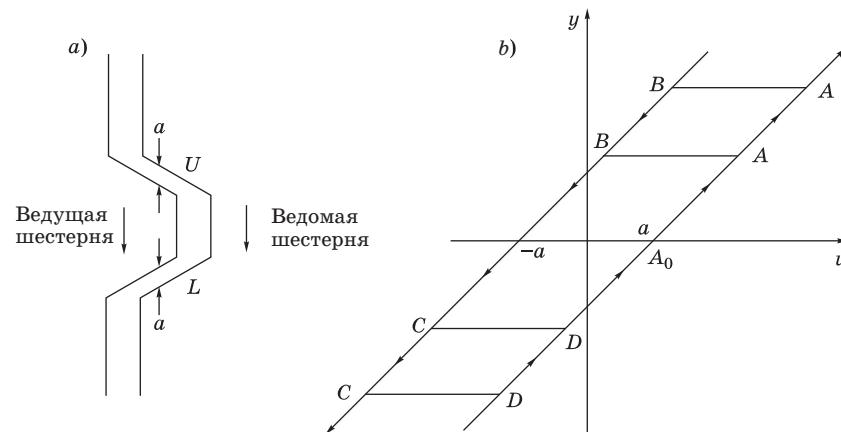


Рис. 1.15. Нелинейность люфта.

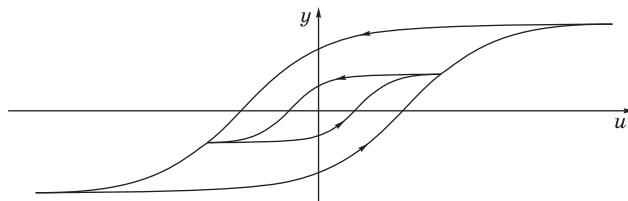


Рис. 1.16. Нелинейность с гистерезисом.

она должна повернуться на угол $2a$, прежде чем возникнет контакт в точке U . Во время этого движения угол y остается постоянным, что соответствует участку AB вход-выходной характеристики. После того, как контакт в точке U обеспечен, ведомая шестерня следует в своем вращении за ведущей шестерней, что соответствует участку BC . Последующее изменение направления вращения ведущей шестерни приводит к появлению участка CDA на вход-выходной характеристике системы. Таким образом, периодическое входное воздействие с амплитудой большей, чем a приводит к возникновению гистерезисного цикла $ABCD$, изображенного на рис. 1.15(б). Заметим, что в случае большей амплитуды, гистерезисным циклом будет $A'B'C'D'$ и это показывает важное отличие рассматриваемого типа гистерезисной характеристики от характеристики реле с гистерезисом (см. рис. 1.12), для которой характерно отсутствие зависимости гистерезисного цикла от амплитуды входа.

Изображенная на рис. 1.16 гистерезисная характеристика похожа на характеристику люфта, но присуща процессам намагничивания в маг-

нитных материалах. Эта характеристика также зависит от амплитуды входного воздействия¹⁾.

1.3. Упражнения

1.1 Математической моделью широкого класса физических нелинейных систем является дифференциальное уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} = g(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, u),$$

где u и y — скалярные величины. Выписать модель состояния такой системы предполагая, что u — ее вход и y — ее выход.

1.2 Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, которая описывается дифференциальным уравнением n -го порядка

$$y^{(n)} = g_1(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, u) + g_2(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-2)})\dot{u},$$

где g_2 — дифференцируемая функция своих аргументов. Выписать модель состояния такой системы предполагая, что u — ее вход и y — ее выход.

Указание: Положить $x_n = y^{(n-1)} - g_2(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-2)})u$.

1.3 Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, которая описывается дифференциальным уравнением n -го порядка

$$y^{(n)} = g(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, z, \dots, z^{(m)}), \quad m < n,$$

где z — вход и y — выход. Расширить динамику системы путем добавления последовательности m интеграторов на входе и рассмотреть $u = z^{(m)}$ в качестве входа расширенной системы (см. рис. 1.17). Используя $y, \dots, y^{(n-1)}$ и $z, \dots, z^{(m-1)}$ в качестве переменных состояния, выписать модель состояния расширенной системы.

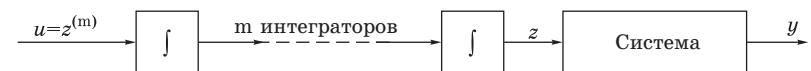


Рис. 1.17. К упражнению 1.3.

1.4 Нелинейные уравнения динамики манипулятора с m звеньями [171,185] имеют следующий вид

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = u,$$

где q — m -вектор обобщенных координат, которыми являются положения соответствующих звеньев, u — m -вектор управляющих моментов и

¹⁾ Моделирование гистерезисных характеристик, изображенных на рис. 1.15(б) и 1.16, является сложной проблемой. Различные подходы к ее решению могут быть найдены в [106], [126] и [203].

Прим. ред. перев. — См. также [Д21].

$M(q)$ — симметричная матрица инерции, которая является положительно определенной для всех $q \in R^m$. Член $C(q, \dot{q})\dot{q}$ соответствует вкладу центробежных (centrifugal) сил и сил Кориолиса. Матрица C обладает тем свойством, что матрица $\dot{M} - 2C$ является кососимметрической для всех $q, \dot{q} \in R^m$, \dot{M} — полная производная $M(q)$ по времени. Член $D\ddot{q}$ соответствует вкладу вязкого демпфирования, D — положительно полуопределенная и симметричная матрица. Член $g(q)$, соответствующий вкладу гравитационных сил, определяется в виде $g(q) = [\partial P(q)/\partial q]^T$, где $P(q)$ — полная потенциальная энергия звеньев. Выберите подходящие переменные состояния и выпишите соответствующую модель состояния.

1.5 Нелинейные уравнения динамики однозвездного манипулятора с упругими шарнирами [185] имеют следующий вид

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1 + MgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) &= 0, \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) &= u, \end{aligned}$$

где q_1 и q_2 — угловые положения, I и J — моменты инерции, k — константа, характеризующая упругость шарнира, M — масса манипулятора, L — расстояние между шарнирами и u — управляющий момент. Выберите переменные состояния и выпишите соответствующую модель состояния.

1.6 Нелинейные уравнения динамики манипулятора с m звеньями и с упругими шарнирами [185] имеют следующий вид

$$\begin{aligned} M(q_1)\ddot{q}_1 + h(q_1, \dot{q}_1) + K(q_1 - q_2) &= 0, \\ J\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) &= u, \end{aligned}$$

где q_1 и q_2 — m -векторы обобщенных координат, $M(q_1)$ и J — симметричные невырожденные матрицы инерции, и u — m -вектор управляющих воздействий. Выберите переменные состояния и выпишите соответствующую модель состояния. Член $h(q, \dot{q})$ соответствует вкладу центробежных сил, сил Кориолиса и силы гравитации и K — постоянная диагональная матрица, характеризующая упругость шарниров. Выберите переменные состояния и выпишите соответствующую модель состояния.

1.7 На рис. 1.18 показана схема управления с обратной связью для линейной инвариантной по времени системы, задаваемой передаточной функцией $G(s)$ и имеющей в своем составе нелинейный, зависящий от времени элемент, который задается равенством $z = \psi(t, y)$. Переменные r , u , y и z — векторы одинаковой размерности. Выписать модель состояния такой системы, предполагая, что r — ее вход и y — ее выход.

1.8 Модель синхронного генератора, соединенного с бесконечной электрической шиной, может быть представлена [148] в следующем виде

$$\begin{aligned} M\ddot{\delta} &= P - D\dot{\delta} - \eta_1 E_q \sin \delta, \\ \tau \dot{E}_q &= -\eta_2 E_q + \eta_3 \cos \delta + E_{FD}, \end{aligned}$$

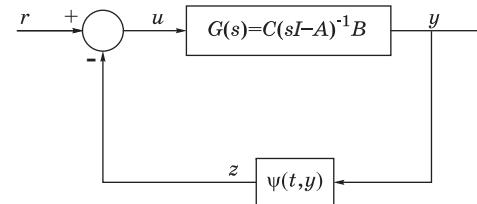


Рис. 1.18. К упражнению 1.7.

где δ — угол, выраженный в радианах, E_q — напряжение, P — механическая входная мощность, E_{FD} — напряжение возбуждения (вход), D — коэффициент демпфирования, M — коэффициент инерции, τ — постоянная времени и η_1, η_2, η_3 — постоянные параметры.

- (a) Используя δ , $\dot{\delta}$ и E_q в качестве переменных состояния, выпишать модель состояния.
- (b) Пусть $P = 0.815$, $E_{FD} = 1.22$, $\eta_1 = 2.0$, $\eta_2 = 2.7$, $\eta_3 = 1.7$, $\tau = 6.6$, $M = 0.0147$ и $D/M = 4$. Найти точки равновесия.
- (c) Предположим, что τ относительно велика, так что $\dot{E}_q \approx 0$. Показать, что в случае, когда E_q — константа, модель состояния сводится к уравнениям маятника.

1.9 Цепь, показанная на рис. 1.19, содержит катушку индуктивности с нелинейной характеристикой и управляемся источником тока с изменяющимся во времени напряжением. Предположим, что нелинейная характеристика катушки представлена функцией Джозефсона (Josephson) [39] $i_L = I_0 \sin k\phi_L$, где ϕ_L — магнитный поток катушки, I_0 и k — константы.

- (a) Используя ϕ_L и v_C в качестве переменных состояния, выписать уравнения состояния.
- (b) Удобно ли выбрать в качестве переменных состояния i_L и v_C ?

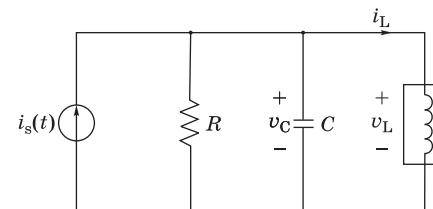


Рис. 1.19. К упражнениям 1.9 и 1.10.

1.10 Цепь, показанная на рис. 1.19, содержит катушку индуктивности с нелинейной характеристикой и управляемся источником тока с изменяющимся во времени напряжением. Предположим, что нелинейная

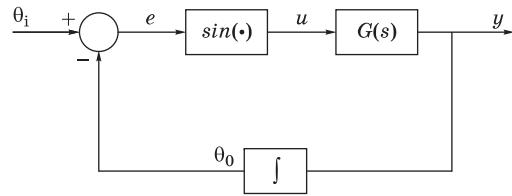


Рис. 1.20. К упражнению 1.11.

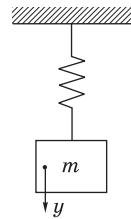


Рис. 1.21. К упражнению 1.12.

характеристика катушки представлена функцией $i_L = L\phi_L + \mu\phi_L^3$, где ϕ_L — магнитный поток катушки, L и μ — константы.

(а) Используя ϕ_L и v_C в качестве переменных состояния, выписать уравнения состояния.

(б) Найти все точки равновесия системы при $i_s = 0$.

1.11 Схема фазовой синхронизации [64] может быть представлена блок-диаграммой, показанной на рис. 1.20. Пусть $\{A, B, C\}$ — минимальная реализация скалярной строго собственной передаточной функции $G(s)$. Предположим, что все собственные значения A имеют отрицательные вещественные части, $G(0) \neq 0$ и $\theta_i = \text{const}$. Пусть z — состояние реализации $\{A, B, C\}$.

(а) Показать, что замкнутая система может быть представлена уравнениями состояния

$$\dot{z} = Az + B \sin e, \quad \dot{e} = -Ce.$$

(б) Найти все точки равновесия системы.

(с) Показать, что в случае, когда $G(s) = 1/(\tau s + 1)$, модель замкнутой системы совпадает с моделью состояния маятника.

1.12 Рассмотрим систему «груз–пружина», изображенную на рис. 1.21. Предположим, что пружина характеризуется линейной жесткостью и нелинейным вязким демпфированием, т.е. модель содержит член вида $c_1\dot{y} + c_2\dot{y}/|\dot{y}|$. Найти уравнение состояния и описать движение системы.

1.13 Примером механической системы, в которой трение может быть отрицательным в некоторой области, может служить модель, изложенная на рис. 1.22 [7]. На движущемся с равномерной скоростью

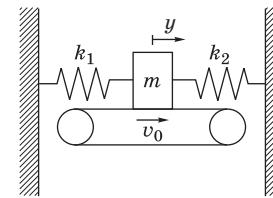


Рис. 1.22. К упражнению 1.13.

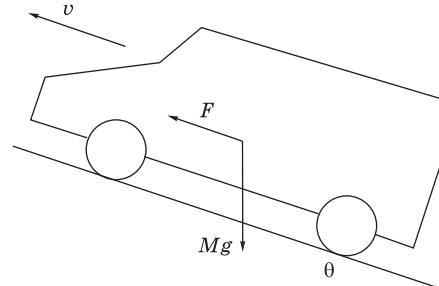


Рис. 1.23. К упражнению 1.14.

v_0 ремне лежит груз массой m , удерживаемый двумя пружинами с линейной упругостью, характеризуемой коэффициентами k_1 и k_2 . Действующая на груз сила трения $h(v)$ является функцией относительной скорости $v = v_0 - \dot{y}$. Предположим, что $h(v)$ является гладкой функцией для $|v| > 0$. Предположим также, что наряду с силой трения на груз действует линейное вязкое трение, пропорциональное \dot{y} .

(а) Выписать уравнения движения груза.

(б) Ограничев рассмотрение областью $|\dot{y}| \ll v_0$, мы можем использовать разложение в ряд Тейлора для аппроксимации $h(v)$ величиной $h(v_0) - \dot{y}h'(v_0)$. Используя такую аппроксимацию, упростить модель движения системы.

(с) С учетом рассмотренной в параграфе 1.2.3 модели трения описать характеристику трения $h(v)$, которая привела бы к возникновению отрицательного трения в системе.

1.14 На рис. 1.23 изображено транспортное средство массой M , движущееся со скоростью v по дороге с углом наклона θ . F — тяговое усилие, которое обеспечивается двигателем. Предположим, что сила трения имеет компоненты сухого трения и линейного вязкого трения, а также включает в себя член, соответствующий силе лобового сопротивления, пропорциональный v^2 . Рассматривая F в качестве входного воздействия, а θ — в качестве возмущения, выписать модель состояния системы.

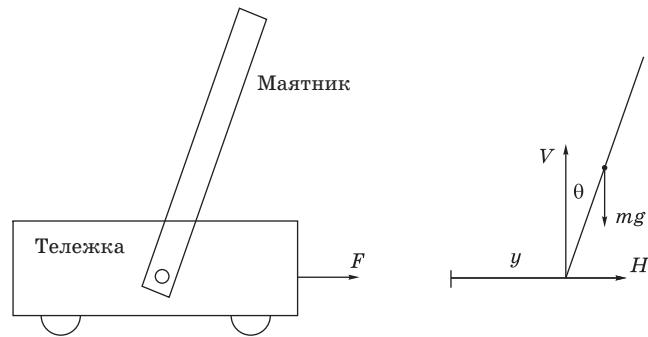


Рис. 1.24. К упражнению 1.15.

1.15 Рассмотрим обратный маятник, изображенный на рис. 1.24 [110]. Точка подвеса (pivot) маятника находится на тележке, которая может двигаться в горизонтальной плоскости. Тележка управляет мотором, который обеспечивает тяговое усилие F . На рисунке показаны также силы, действующие на маятник: сила гравитации mg , приложенная к центру тяжести, горизонтальная H и вертикальная V составляющие силы реакции в опорной точке. Применяя закон Ньютона относительно центра тяжести маятника, мы можем получить следующие уравнения

$$m \frac{d^2}{dt^2}(y + L \sin \theta) = H, \quad m \frac{d^2}{dt^2}(L \cos \theta) = V - mg,$$

где m — масса маятника, L — расстояние между центром тяжести и опорной точкой, y — смещение опорной точки, θ — измеренный по часовой стрелке угол наклона маятника и g — ускорение свободного падения. Приравнивая моменты вокруг центра масс получаем

$$I \ddot{\theta} = VL \sin \theta - HL \cos \theta,$$

где I — момент инерции маятника относительно центра тяжести. Приведенный выше закон Ньютона для горизонтальной составляющей сил может быть переписан в следующем виде

$$M \ddot{y} = F - H - k \dot{y},$$

где M — масса тележки, k — коэффициент трения.

(а) Выполнив указанные дифференцирования и исключая V и H , показать, что уравнения движения сводятся к следующим

$$I \ddot{\theta} = mgL \sin \theta - mL^2 \ddot{\theta} - mL \ddot{y} \cos \theta,$$

$$M \ddot{y} = F - m(\ddot{y} + L \ddot{\theta} \cos \theta - L \dot{\theta}^2 \sin \theta) - k \dot{y}.$$

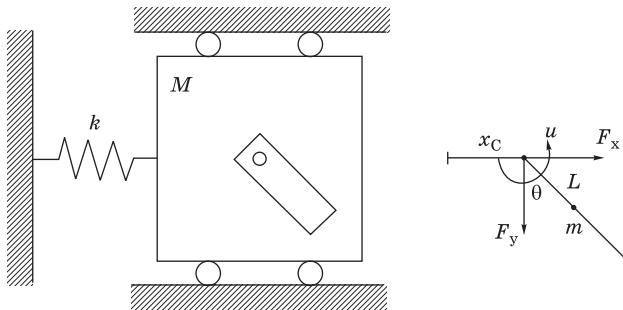


Рис. 1.25. Трансляционный осциллятор с ротационным актуатором (TORA-система).

(б) Решая вышеприведенные уравнения относительно $\ddot{\theta}$ и \ddot{y} , показать что

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\theta)} \begin{bmatrix} m+M & -mL \cos \theta \\ -mL \cos \theta & I+mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mgL \sin \theta \\ F + mL\dot{\theta}^2 \sin \theta - k\dot{y} \end{bmatrix},$$

где

$$\Delta(\theta) = (I + mL^2)(m + M) - m^2 L^2 \cos^2 \theta \geq (I + mL^2)M + mI > 0.$$

(с) Используя $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = y$, $x_4 = \dot{y}$ в качестве переменных состояния и $u = F$ в качестве управляющего воздействия, выпишите уравнения состояния.

1.16 На рис. 1.25 показана схема трансляционного осциллятора с ротационным актуатором (Translational Oscillator with Rotating Actuator — TORA) [25]. Система включает в себя платформу массы M , соединенную с неподвижной вертикальной поверхностью пружиной с линейной жесткостью, характеризуемой коэффициентом k . Платформа может двигаться только в горизонтальной плоскости, параллельной оси пружины. На платформе установлен эксцентрик массы m , приводимый в движение электродвигателем постоянного тока и имеющий момент инерции I относительно своего центра масс, расположенного на расстоянии L от оси вращения. Обозначим управляющий момент, приложенный к эксцентрику, через u . Вращающийся эксцентрик создает управляющую силу, используемую для демпфирования поступательного движения платформы. Получим математическую модель системы в предположении, что сила трения отсутствует. Из рисунка 1.25 видно, что на эксцентрик действуют силы F_x , F_y и момент u . Применив закон Ньютона к центру масс и вычислив момент относительно центра масс, получаем следующие уравнения

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x_c + L \sin \theta) = F_x,$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \theta) = F_y,$$

$$I \ddot{\theta} = u + F_y L \sin \theta - F_x L \cos \theta,$$

Где θ — угол поворота эксцентрика (измеренный против часовой стрелки). На платформу действуют силы F_x и F_y , направленные в противоположном направлении, а также восстанавливающая сила, обусловленная упругостью пружины. Закон Ньютона для платформы может быть записан в следующем виде

$$M \ddot{x}_c = -F_x - kx_c,$$

где x_c — положение платформы.

- (a) Выполнив дифференцирование и исключение F_x и F_y , покажите, что уравнения движения сводятся к следующим

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ mL\dot{\theta}^2 \sin \theta - kx_c \end{bmatrix}, \text{ где } D(\theta) = \begin{bmatrix} I + mL^2 & mL \cos \theta \\ mL \cos \theta & M + m \end{bmatrix}.$$

- (b) Решая вышеприведенные уравнения относительно $\ddot{\theta}$ и \ddot{x}_c , показать что

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\theta)} \begin{bmatrix} m + M & -mL \cos \theta \\ -mL \cos \theta & I + mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ mL\dot{\theta}^2 \sin \theta - kx_c \end{bmatrix},$$

где

$$\Delta(\theta) = (I + mL^2)(m + M) - m^2 L^2 \cos^2 \theta \geq (I + mL^2)M + mI > 0.$$

- (c) Используя $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = x_c$, $x_4 = \dot{x}_c$ в качестве переменных состояния и u в качестве управляющего воздействия, выпишать уравнения состояния.

- (d) Найти все точки равновесия системы.

1.17 Динамика электродвигателя постоянного тока [178] может быть описана системой

$$v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt},$$

$$v_a = c_1 i_f \omega + L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a,$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = c_2 i_f i_a - c_3 \omega.$$

Первое уравнение соответствует цепи обмотки статора (Обмотки возбуждения, field circuit) с v_f , i_f , R_f и L_f — напряжение, Сила тока, сопротивление и индуктивность, соответственно. Второе уравнение соответствует цепи обмотки якоря и v_a , i_a , R_a и L_a — соответствующие переменные. Третье уравнение представляет собой уравнение для момента, где J — момент инерции ротора и c_3 — демпфирующий коэффициент. Член $c_1 i_f i_a$ представляет собой обратную ЭДС, индуцируемую

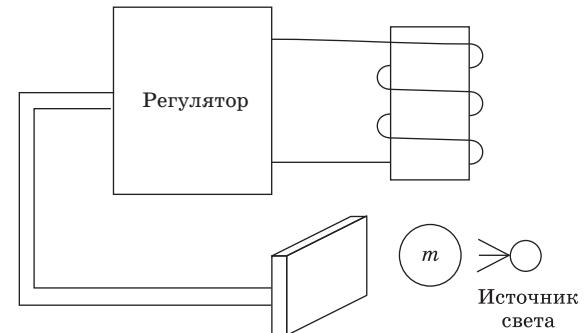


Рис. 1.26. К упражнению 1.18: система магнитной подвески.

цепью якоря, и $c_2 i_f i_a$ — момент, возникающий при взаимодействии тока якоря в обмотке статора с магнитным потоком в обмотке возбуждения.

- (a) Для независимо возбуждаемого электродвигателя постоянного тока напряжения v_a и v_f являются независимыми управляющими воздействиями. Выберите подходящие переменные состояния и выпишите уравнение состояния.
(b) Выпишите уравнения состояния для электродвигателя постоянного тока, управляемого напряжением в обмотке возбуждения, т.е. когда v_f является управляющим воздействием, а v_a — постоянно (полюсное управление, field control).
(c) Выпишите уравнения состояния для электродвигателя постоянного тока, управляемого напряжением в обмотке якоря, т.е. когда v_a является управляющим воздействием, а v_f — постоянно (якорное управление, armature control). Можно ли понизить порядок модели в этом случае?
(d) В электродвигателе с параллельными (шунтовыми) обмотками, обмотки статора и ротора соединены параллельно и внешнее сопротивление R_x соединено последовательно с обмоткой возбуждения для того, чтобы уменьшить магнитный поток в ней, т.е. $v = v_a = v_f + R_x i_f$. Выпишите уравнения состояния, рассматривая v в качестве управляющего воздействия.

1.18 На рис. 1.26 показана схема системы магнитной подвески: изготовленный из магнитного материала шар подвешен в воздухе с использованием электромагнита и управляется изменением силы тока в катушке с учетом положения шара, измеряемого оптическими средствами [211, стр. 192-200]. Эта система представляет собой макет для исследования эффекта левитации, который используется в гироскопах, акселерометрах и скоростных поездах. Уравнения движения шара имеют вид

$$m\ddot{y} = -k\dot{y} + mg + F(y, i),$$

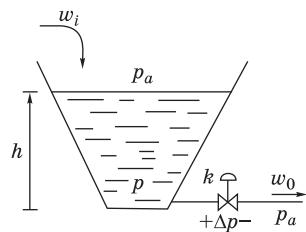


Рис. 1.27. К упражнению 1.19.

где m — масса шара, $y \geq 0$ — вертикальное положение шара ($y = 0$ если положение шара совпадает с первым витком катушки), k — коэффициент вязкого трения, g — ускорение свободного падения, $F(y, i)$ — сила, обусловленная работой электромагнита и i — сила тока в катушке. Индуктивность электромагнита зависит от положения шара и может быть промоделирована с использованием следующей функции

$$L(y) = L_1 + \frac{L_0}{1 + y/a},$$

где L_1, L_2 и a — некоторые положительные константы. Эта модель соответствует случаю, когда индуктивность принимает свое наибольшее значение при положении шара, совпадающем с первым витком катушки, и уменьшается до постоянной величины при $y = \infty$. Энергия, заключенная в электромагните, может быть вычислена по формуле $E(y, i) = \frac{1}{2}L(y)i^2$. Тогда сила $F(y, i)$ может быть получена в соответствии с равенством

$$F(y, i) = \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{L_0 i^2}{2a(1 + y/a)^2}.$$

В случае, когда электрическая цепь катушки управляет источником тока с напряжением v , закон Кирхгофа может быть записан в виде $v = \phi + Ri$, где R — добавочное сопротивление цепи и $\phi = L(y)i$ — магнитное потокосцепление.

(а) Используя $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ и $x_3 = i$ в качестве переменных состояния и $u = v$ — в качестве управляющего воздействия, выпишать уравнения состояния.

(б) Предположим, что необходимо стабилизировать определенное положение шара $r > 0$. Найти величины силы тока и напряжения I_{ss} , V_{ss} , соответствующие такому устойчивому состоянию.

Следующие три упражнения представляют собой примеры гидравлических систем [41].

1.19 На рис. 1.27 показана гидравлическая система, в которой бак заполняется жидкостью. Площадь поперечного сечения бака $A(h)$ является функцией уровня жидкости h , отсчитываемого от дна бака. Объем жидкости может быть вычислен по формуле $v = \int_0^h A(\lambda)d\lambda$. Для

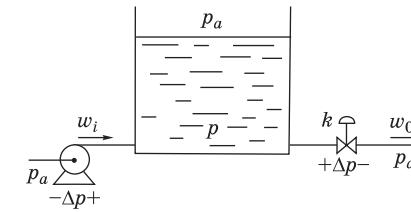


Рис. 1.28. К упражнению 1.20.

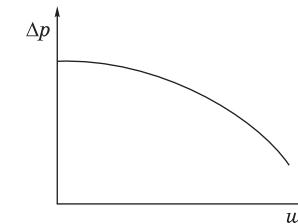


Рис. 1.29. Типичная характеристика центробежного насоса.

жидкости с плотностью ρ абсолютное давление определяется равенством $p = \rho gh + p_a$, где p_a — атмосферное давление (постоянное по предположению) и g — ускорение свободного падения. Бак наполняется со скоростью w_i ; жидкость вытекает через клапан со скоростью, определяемой соотношением между потоком и давлением $w_o = k\sqrt{\Delta p}$. В рассматриваемом случае $\Delta p = p - p_a$. Пусть $u = w_i$ — управляющее воздействие и $y = h$ — выход системы.

(а) Используя h в качестве переменной состояния, выпишать уравнение состояния системы.

(б) Используя $p - p_a$ в качестве переменной состояния, выпишать уравнение состояния системы.

(с) Найти u_{ss} , которое обеспечивает постоянное значение выхода r .

1.20 Гидравлическая система, изображенная на рис. 1.28, включает в себя центробежный насос постоянной скорости, который наполняет бак жидкостью. Эта жидкость вытекает через трубу с клапаном, который характеризуется соотношением $w_o = k\sqrt{p - p_a}$. Характеристика насоса для определенной скорости работы показана на рис. 1.29. Обозначим эту характеристику через $\Delta p = \phi(w_i)$ и определим соответствующую обратную функцию $w_i = \phi^{-1}(\Delta p)$. В рассматриваемом случае $\Delta p = p - p_a$. Площадь поперечного сечения бака является постоянной функцией, поэтому $v = Ah$ и $p = p_a + \rho gv/A$ (переменные определены в предыдущем упражнении).

(а) Используя $(p - p_a)$ в качестве переменной состояния, выпишать уравнение состояния системы.

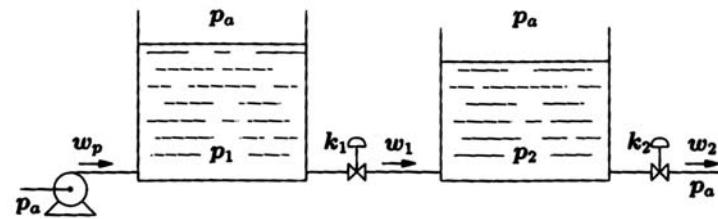


Рис. 1.30. К упражнению 1.21.

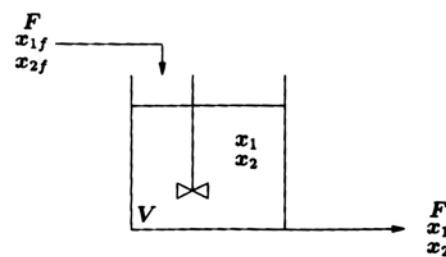


Рис. 1.31. К упражнению 1.22: биохимический реактор.

(b) Найти все положения равновесия системы.

1.21 Клапаны в гидравлической системе, изображенной на рис. 1.30 характеризуются соотношениями $w_1 = k\sqrt{p_1 - p_2}$ и $w_2 = k\sqrt{p_2 - p_a}$. Насос имеет характеристику $(p_1 - p_2) - w_p$, изображенную на рис. 1.29. Компоненты и переменные определены в предыдущих упражнениях.

(a) Используя $(p_1 - p_a)$ и $(p_2 - p_a)$ в качестве переменных состояния, выписать уравнения состояния системы.

(b) Найти все положения равновесия системы.

1.22 Рассмотрим биохимический реактор (см. рис. 1.31) с двумя компонентами — биомассой и субстратом, — в котором клетки биомассы поглощают субстрат [23]. Предположим, что в реакторе обеспечивается надлежащее перемешивание компонентов, объем которых V остается постоянным. Пусть x_1 и x_2 — концентрации (масса/объем) клеток биомассы и субстрата и x_{1f} и x_{2f} — соответствующие концентрации на входе реактора. Пусть r_1 — скорость размножения клеток биомассы (масса/объем/время), r_2 — скорость поглощения субстрата и F — скорость потока (объем/время). Динамическая модель такой системы имеет вид уравнений баланса биомассы и субстрата

$$\begin{aligned} \text{скорость накопления биомассы} &= \\ &= \text{поток на входе} - \text{поток на выходе} + \text{размножение} \\ \text{скорость накопления субстрата} &= \\ &= \text{поток на входе} - \text{поток на выходе} + \text{поглощение} \end{aligned}$$

Скорость размножения r_1 определяется моделью $r_1 = \mu x_1$, где μ — некоторая заданная функция x_2 . Предположим, что во входном потоке биомасса отсутствует, т.е. $x_{1f} = 0$, коэффициент разбавления $d = F/V$ и выход продукта $Y = r_1/r_2$ постоянны.

- (a) Используя x_1 и x_2 в качестве переменных состояния, выписать уравнения состояния системы.
- (b) Найти все положения равновесия системы при $\mu = \mu_m x_2/(k_m + x_2)$, где μ_m, k_m — некоторые положительные константы. Предположить, что $d < \mu_m$.
- (c) Найти все положения равновесия системы при $\mu = \mu_m x_2/(k_m + x_2 + k_1 x_2^2)$, где μ_m, k_m и k_1 — некоторые положительные константы. Предположить, что $d < \max_{x_2 \geq 0} \{\mu(x_2)\}$.

Глава 2

СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Автономные системы второго порядка играют важную роль при изучении нелинейных систем, т.к. соответствующие решения могут быть представлены в виде траекторий на плоскости. Это позволяет легко визуализировать качественное поведение системы. Цель этой главы заключается в том, чтобы с использованием систем второго порядка в качестве примера ввести некоторые элементарные понятия и дать представление об основных идеях, лежащих в основах теории нелинейных систем. В частности, мы рассмотрим поведение нелинейных систем в окрестности точек равновесия, явления нелинейных колебаний и бифуркаций.

Автономная система второго порядка представляется в виде двух скалярных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (2.2)$$

Пусть $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ — решение¹⁾ системы (2.1)–(2.2), соответствующее определенному начальному значению $x_0 = (x_{10}, x_{20})$, т.е. $x(0) = x_0$. Геометрическим местом точек $x(t)$ для всех $t \geq 0$ на плоскости $x_1 - x_2$ является кривая, проходящая через точку x_0 . Эта кривая называется *траекторией* или *орбитой* системы (2.1)–(2.2), исходящей из x_0 . Плоскость $x_1 - x_2$ называется *плоскостью состояний* или *фазовой плоскостью*. Правая часть системы (2.1)–(2.2) представляет собой касательный вектор $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$ кривой. Используя векторные обозначения, мы можем переписать систему (2.1)–(2.2) в следующем

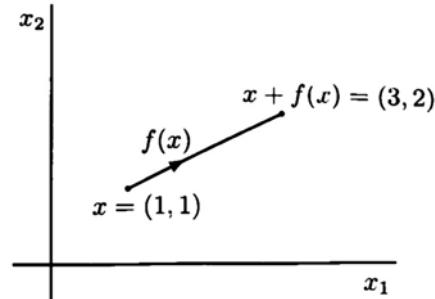


Рис. 2.1. Векторное поле

виде:

$$\dot{x} = f(x),$$

где $f(x)$ — вектор $(f_1(x), f_2(x))$. Мы будем рассматривать $f(x)$ в качестве *векторного поля* на фазовой плоскости, т.е. каждой точке x на плоскости мы будем сопоставлять вектор $f(x)$. Для простоты визуализации мы будем сопоставлять каждой точке x направленный отрезок, направленный из x в $x + f(x)$. Например, если $f(x) = (2x_1^2, x_2)$, то при $x = (1, 1)$ мы будем рисовать стрелку из точки $(1, 1)$ в точку $(1, 1) + (2, 1) = (3, 2)$ (см. Рис. 2.1). Повторяя эту процедуру в каждой точке пересечения линий координатной сетки на фазовой плоскости, мы можем получить *диаграмму векторного поля* (поле направлений). На рис. 2.2 изображена такая диаграмма для уравнений маятника без учета трения:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -10 \sin x_1\end{aligned}$$

Длина изображенной на рисунке стрелки, исходящей из точки x , пропорциональна длине $f(x)$ и равна $\sqrt{f_1^2(x) + f_2^2(x)}$. Иногда для удобства мы будем рисовать стрелки равной длины во всех точках. Поскольку векторное поле в точке касательно к траектории в этой точке, мы можем построить траектории с использованием диаграммы векторного поля. Начав траекторию в некоторой заданной начальной точке x_0 , мы можем построить траекторию, исходящую из этой точки, двигаясь вдоль направления векторного поля в точке x_0 . Это движение приведет нас в точку x_a , из которой мы можем продолжить траекторию, двигаясь вдоль направления векторного поля в точке x_a . Если этот процесс продолжить и последовательно выбранные таким образом точки достаточно близки, мы сможем получить достаточно точную аппроксимацию траектории, проходящей через точку x_0 . Например, на рис. 2.2 показана реализация вышеописанной процедуры для получения траектории, исходящей из точки $(2, 0)$, и можно заметить, что эта траектория представляет собой замкнутую кривую.

¹⁾ Единственность решений предполагается.

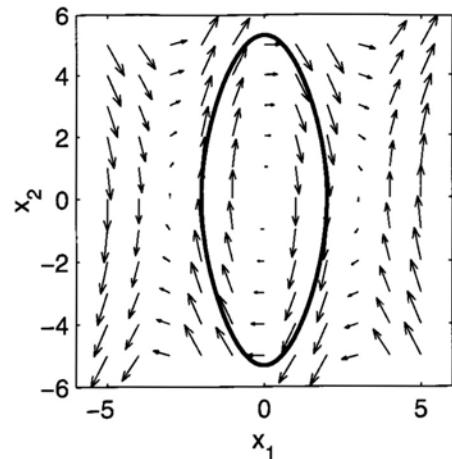


Рис. 2.2. Диаграмма векторного поля для уравнений маятника без учета трения.

Семейство всех траекторий или кривых, соответствующих решениям, называется *фазовым портретом* системы (2.1)–(2.2). Фазовый портрет (приблизительный) может быть получен путем прорисовки траекторий, исходящих из большого числа начальных состояний, накрывающих всю \$(x_1 - x_2)\$-плоскость. Поскольку имеется большое количество численных процедур для нахождения решений нелинейных дифференциальных уравнений, мы можем легко построить фазовый портрет системы с использованием компьютерного моделирования (см. параграф 2.5). Заметим, что по траектории на фазовом портрете невозможно восстановить соответствующее решение \$(x_1(t), x_2(t))\$, поскольку сам рисунок не содержит информации о моментах времени \$t\$. Следовательно, траектория предоставляет лишь *качественное*, но не *количественное* поведение соответствующего решения. Например, замкнутая траектория показывает, что существует периодическое решение, т.е. системе свойственно непрерывно колебаться, а стягивающаяся спираль показывает, что системе свойственны затухающие колебания. В этой главе мы представим качественный анализ поведения систем второго порядка с использованием фазовых портретов.

2.1. Качественное поведение линейных систем

Рассмотрим линейную, не зависящую от времени систему

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.3)$$

где \$A\$ — \$2 \times 2\$ вещественная матрица. Решение системы (2.3) для заданного начального состояния \$x_0\$ определяется равенством

$$x(t) = M \exp(J_r t) M^{-1} x_0,$$

где \$J_r\$ — вещественная Жорданова форма и \$M\$ — вещественная невырожденная матрица, такая что \$M^{-1}AM = J_r\$. В зависимости от собственных чисел матрицы \$A\$, вещественная Жорданова форма может принимать одну из трех форм:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

где \$k\$ может принимать два значения: 0 или 1. Первая форма соответствует случаю, когда собственные числа \$\lambda_1\$ и \$\lambda_2\$ вещественны и различны, вторая соответствует двум равным вещественным собственным числам и третья форма соответствует двум комплексным собственным числам \$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta\$. В нашем исследовании мы должны различать эти три случая. Более того, в случае вещественных собственных чисел мы должны особо выделить случай, когда по крайней мере одно собственное число является нулевым. В этой ситуации начало координат не является изолированной точкой равновесия и качественное поведение системы существенно отличается от поведения в других случаях.

Случай 1: Два вещественных собственных числа \$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0\$.

В этом случае \$M = [v_1, v_2]\$, где \$v_1\$ и \$v_2\$ — вещественные собственные векторы, соответствующие \$\lambda_1\$ и \$\lambda_2\$. Замена координат \$z = M^{-1}x\$ приводит систему к двум разделенным дифференциальным уравнениям

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2,$$

решения которых при заданных начальных значениях \$(z_{10}, z_{20})\$ имеют следующий вид:

$$z_1(t) = z_{10} e^{\lambda_1 t}, \quad z_2(t) = z_{20} e^{\lambda_2 t}.$$

Исключая из этих равенств \$t\$, мы получаем

$$z_2 = c z_1^{\lambda_2 / \lambda_1}, \quad (2.4)$$

где \$c = z_{20} / (z_{10})^{\lambda_1 / \lambda_2}\$. Фазовый портрет системы представляет собой семейство кривых, полученных при варьировании в (2.4) константы \$c\$ на всей числовой оси \$R\$. Вид фазового портрета зависит от знаков \$\lambda_1\$ и \$\lambda_2\$.

Рассмотрим первый случай, когда оба собственных числа отрицательны. Не умоляя общности можно считать, что \$\lambda_2 < \lambda_1 < 0\$. Тогда обе экспоненты \$e^{\lambda_1 t}\$ и \$e^{\lambda_2 t}\$ стремятся к нулю при \$t \rightarrow \infty\$. Более того, поскольку \$\lambda_2 < \lambda_1 < 0\$, член \$e^{\lambda_2 t}\$ стремится к нулю быстрее, чем член \$e^{\lambda_1 t}\$ и мы можем называть собственное число \$\lambda_2\$ быстрым, а \$\lambda_1\$ — медленным. Аналогично, собственный вектор \$v_2\$ мы будем называть быстрым, а \$v_1\$ — медленным. Траектория системы стремиться к началу

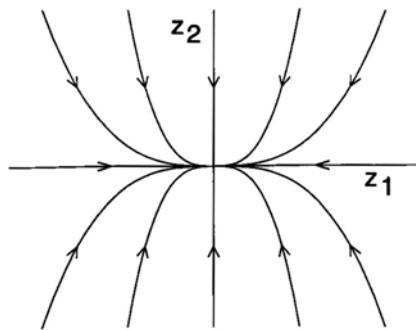


Рис. 2.3. Фазовый портрет устойчивого узла в модальных координатах

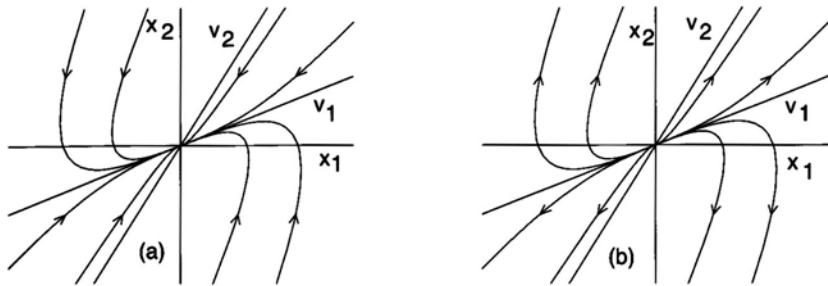


Рис. 2.4. Фазовый портрет устойчивого узла (а) и неустойчивого узла (б)

координат на $(z_1 - z_2)$ -плоскости вдоль кривой (2.4). Заметим, что угол наклона этой кривой определяется равенством

$$\frac{dz_2}{dz_1} = c \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1^{[(\lambda_2/\lambda_1)-1]}.$$

Поскольку $[(\lambda_2/\lambda_1) - 1]$ — положительная величина, угол наклона кривой стремится к нулю при $|z_1| \rightarrow 0$ и стремится к бесконечности при $|z_1| \rightarrow \infty$. Следовательно, при приближении траектории к началу координат она становится параллельной оси z_1 , при приближении траектории к бесконечности она становится параллельной оси z_2 . Эти результаты позволяют нам нарисовать фазовый портрет системы (см. рис. 2.3). При переходе к исходным x -координатам фазовый портрет системы приобретает вид, который изображен на рис. 2.4(а). Заметим, что на $(x_1 - x_2)$ -плоскости траектории становятся касательными к медленному собственному вектору v_1 при их приближении к началу координат и параллельными быстрому собственному вектору v_2 при удалении от начала координат. В рассматриваемом случае точка равновесия $x = 0$ называется *устойчивым узлом*.

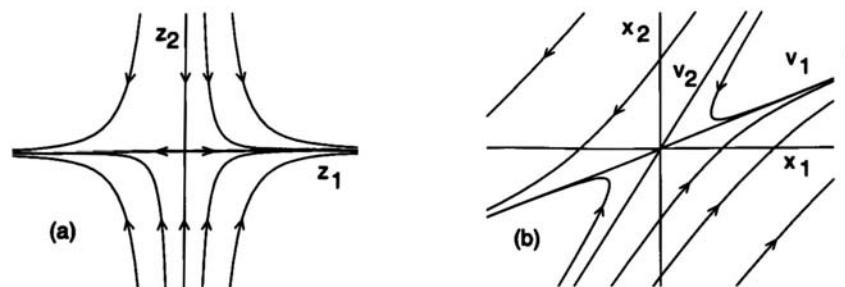


Рис. 2.5. Фазовый портрет седловой точки в модальных (а) и в исходных координатах (б).

В случае, когда оба собственных числа λ_1 и λ_2 положительны, фазовый портрет системы имеет похожий вид, но направление движения вдоль траекторий изменяется на противоположное, поскольку экспоненциальные члены $e^{\lambda_1 t}$ и $e^{\lambda_2 t}$ возрастают экспоненциально при $t \rightarrow \infty$. На рис. 2.4(б) показан фазовый портрет системы когда $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. В этом случае точка равновесия $x = 0$ называется *неустойчивым узлом*.

Предположим, что собственные значения имеют различные знаки. В частности, пусть $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. В этом случае $e^{\lambda_1 t} \rightarrow \infty$ и $e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Мы будем называть собственное значение λ_2 устойчивым, а λ_1 — неустойчивым. Соответственно собственные вектора v_2 и v_1 называются устойчивым и неустойчивым. В равенстве (2.4) отношение (λ_2/λ_1) будет отрицательным и, следовательно, семейство траекторий на $(z_1 - z_2)$ -плоскости будет иметь вид, изображенный на рис. 2.5(а). Траектории имеют гиперболическую форму: они становятся касательными к z_1 -оси при $|z_1| \rightarrow \infty$ и касательными к z_2 -оси при $|z_1| \rightarrow 0$. Кроме того, имеются четыре траектории, которые отличаются от гиперболических: две траектории вдоль z_2 -оси называются устойчивыми траекториями, т.к. они приближаются к началу координат при $t \rightarrow \infty$, а две траектории вдоль z_1 -оси называются неустойчивыми траекториями, т.к. они стремятся к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Фазовый портрет на $(x_1 - x_2)$ -плоскости показан на рис. 2.5(б). На этом рисунке видно, что устойчивые траектории проходят вдоль устойчивого собственного вектора v_2 , а неустойчивые траектории — вдоль неустойчивого собственного вектора v_1 . В рассматриваемом случае точка равновесия $x = 0$ называется *седловой точкой*.

Случай 2: Комплексные собственные числа $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$.

Замена координат $z = M^{-1}x$ приводит систему (2.3) к следующей форме:

$$\dot{z}_1 = \alpha z_1 - \beta z_2, \quad \dot{z}_2 = \beta z_1 + \alpha z_2.$$

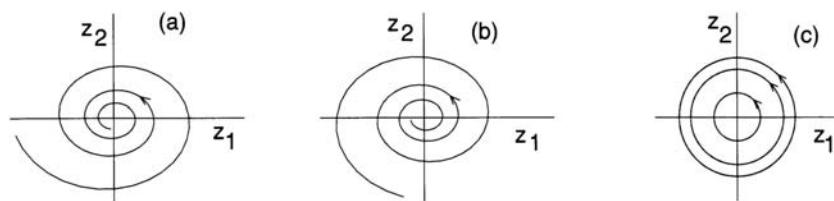


Рис. 2.6. Типичные траектории в случае комплексных собственных чисел: (a) $\alpha < 0$; (b) $\alpha > 0$; (c) $\alpha = 0$.

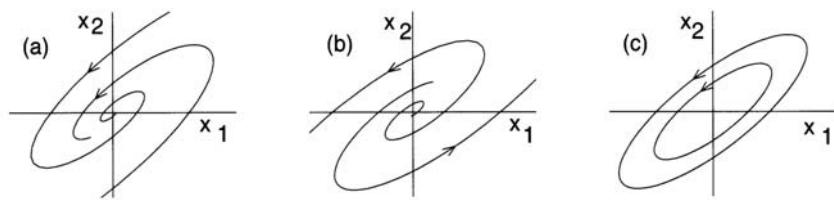


Рис. 2.7. Фазовые портреты для (a) устойчивого фокуса; (b) неустойчивого фокуса; (c) центра.

Решения этой системы носят колебательный характер. Система может быть представлена в полярных координатах

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

в виде двух разделенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \theta = \beta.$$

Решение этой системы с начальными данными (r_0, θ_0) имеет вид

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \theta_0 + \beta t.$$

Эти равенства определяют логарифмическую спираль на $(z_1 - z_2)$ -плоскости. В зависимости от значений α , эта траектория может принимать три различные формы, изображенные на рис. 2.6. В случае, когда $\alpha < 0$ спираль сходится к началу координат; в случае, когда $\alpha > 0$ спираль расходится от начала координат; в случае, когда $\alpha = 0$ траектория представляет собой окружность радиуса r_0 . На рис. 2.7 показаны траектории на $(x_1 - x_2)$ -плоскости. Точка равновесия $x = 0$ называется *устойчивым фокусом* если $\alpha < 0$, *неустойчивым фокусом* если $\alpha > 0$ и *центром* если $\alpha = 0$.

Случай 3: Кратные ненулевые собственные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

Замена координат $z = M^{-1}x$ приводит систему (2.3) к следующей форме:

$$\dot{z}_1 = \lambda z_1 + kz_2, \quad \dot{z}_2 = \lambda z_2.$$

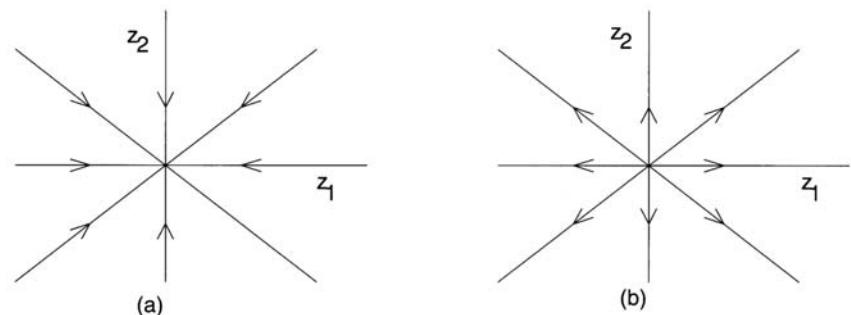


Рис. 2.8. Фазовые портреты в случае ненулевых равных собственных значений при $k = 0$ для случая (a) $\lambda < 0$ и (b) $\lambda > 0$.

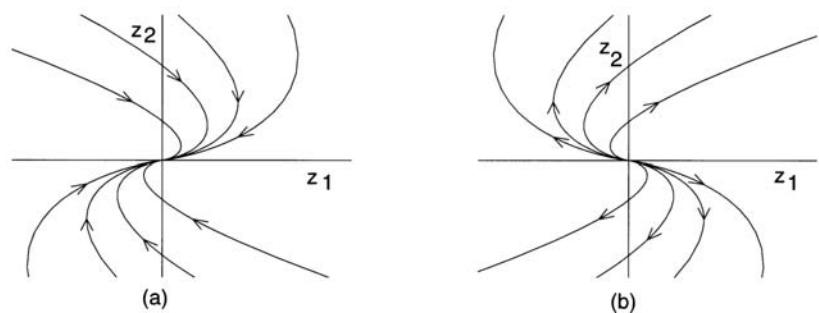


Рис. 2.9. Фазовые портреты в случае ненулевых равных собственных значений при $k = 1$ для случая (a) $\lambda < 0$ и (b) $\lambda > 0$.

Решения этой системы с начальными данными (z_{10}, z_{20}) имеют вид

$$z_1(t) = e^{\lambda t}(z_{10} + kz_{20}t), \quad z_2(t) = e^{\lambda t}z_{20}.$$

Исключая t , мы получаем

$$z_1 = z_2 \left[\frac{z_{10}}{z_{20}} + \frac{k}{\lambda} \ln \left(\frac{z_2}{z_{20}} \right) \right].$$

На рисунках 2.8 и 2.9 показаны траектории для случаев $k = 0$ и $k = 1$, соответственно. Фазовый портрет имеет сходство с фазовым портретом узла. Поэтому состояние равновесия $x = 0$ обычно называют устойчивым узлом при $\lambda < 0$ и неустойчивым узлом при $\lambda > 0$. Заметим, однако, что изображенные на рис. 2.8 и 2.9 фазовые портреты не характеризуются тем асимптотическим поведением, которое мы наблюдали на рис. 2.3 и 2.4.

Прежде, чем перейти к обсуждению вырожденного случая, когда одно или оба собственных значения являются нулевыми, суммируем наши результаты относительно качественного поведения системы в случае изолированной точки равновесия $x = 0$. Мы увидели, что система

может демонстрировать шесть качественно различных фазовых портретов, которые соответствуют различным типам состояния равновесия: устойчивый узел, неустойчивый узел, седловая точка, устойчивый фокус, неустойчивый фокус и центр. Тип точки равновесия полностью определяется собственными значениями матрицы A . Заметим, что глобальное качественное поведение на фазовой плоскости определяется типом точки равновесия и этот тип является характеристикой линейной системы. При исследовании качественного поведения нелинейных систем (см. следующий параграф) мы увидим, что тип точки равновесия может определять качественное поведение траекторий таких систем лишь в окрестности этой точки.

Случай 4: Одно или оба собственных числа равны нулю.

В случае, когда одно или оба собственных числа матрицы A равны нулю, соответствующие фазовые портреты в некотором смысле вырождаются. В рассматриваемом случае матрица A имеет нетривиальное нулевое подпространство. Каждый вектор из нулевого подпространства матрицы A является точкой равновесия системы, т.е. система имеет не единственную точку равновесия, а целое подпространство таких точек (подпространство равновесий). Размерность нулевого подпространства может быть равна 1 или 2. В последнем случае матрица A является нулевой. Этот случай является тривиальным, поскольку каждая точка на плоскости является точкой равновесия. В случае, когда размерность нулевого подпространства равна 1, вид жордановой формы матрицы A будет зависеть от кратности нулевого собственного значения. Если $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, то матрица M имеет вид $[v_1, v_2]$, где v_1 и v_2 — соответствующие собственные вектора. Заметим, что нулевое подпространство натянуто на v_1 . Замена координат $z = M^{-1}x$ приводит систему к следующему виду:

$$\dot{z}_1 = 0, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2.$$

Решением такой системы является

$$z_1(t) = z_{10}, \quad z_2(t) = z_{20}e^{\lambda_2 t}.$$

Экспоненциальный член либо возрастает, либо убывает, в зависимости от знака λ_2 . На рис. 2.10 показан фазовый портрет на $(x_1 - x_2)$ -плоскости. Все траектории сходятся к подпространству равновесий в случае $\lambda_2 < 0$ и расходятся от подпространства равновесий в случае $\lambda_2 > 0$.

В случае, когда оба собственных значения нулевые, замена координат $z = M^{-1}x$ приводит систему к виду

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = 0$$

и решением такой системы является

$$z_1(t) = z_{10} + z_{20}t, \quad z_2(t) = z_{20}.$$

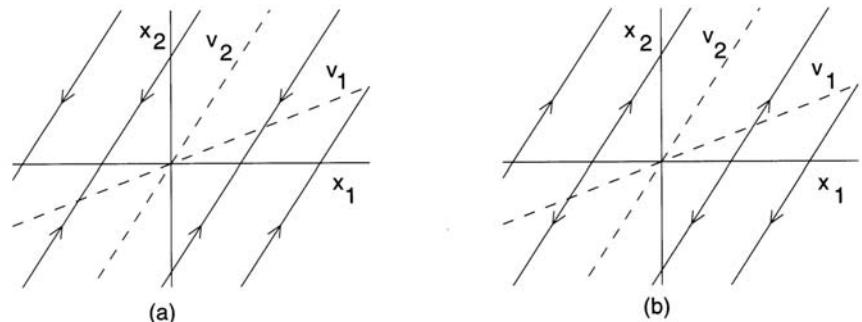


Рис. 2.10. Фазовые портреты для случая (a) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ и (b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$.

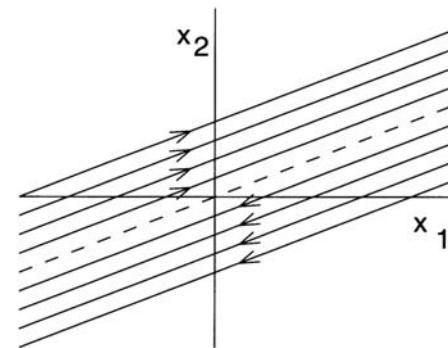


Рис. 2.11. Фазовый портрет для случая $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Член $z_{20}t$ увеличивается или убывает в зависимости от знака z_{20} а ось z_1 является подпространством равновесий. На рис. 2.11 показан фазовый портрет на $(x_1 - x_2)$ -плоскости; пунктирная линия соответствует подпространству равновесий. Легко видеть, что фазовый портрет на рис. 2.11 отличается от фазового портрета, изображенного на рис. 2.10. Траектории, начинающиеся вне подпространства равновесий, продолжаются параллельно ему.

Исследование поведения линейных систем в окрестности состояния равновесия имеет важное значение, т.к. во многих случаях локальное поведение нелинейных систем вблизи точки равновесия может быть изучено с использованием линеаризованной в окрестности этой точки исходной нелинейной системы путем анализа поведения полученной в ходе линеаризации линейной системы. Адекватность подхода линеаризации зависит в большой степени от того, насколько фазовые портреты линейной системы подвержены возмущениям. Мы можем проанализировать поведение линейной системы под воздействием возмущений путем рассмотрения специального случая линейных возмущений. Пред-

положим, что матрица A имеет различные собственные значения и рассмотрим сумму $A + \Delta A$, где ΔA — матрица размерности 2×2 с произвольно малыми амплитудами изменения элементов. Из теории возмущений матриц¹⁾ известно, что собственные значения матрицы непрерывно зависят от ее параметров. Это означает, что для заданного положительного числа ε существует соответствующее положительное число δ , такое что если амплитуда возмущения каждого из элементов матрицы A меньше чем δ , то собственные значения возмущенной матрицы $A + \Delta A$ будут принадлежать открытым дискам с радиусом ε и центром в соответствующих собственных значениях матрицы A . Следовательно, каждое собственное значение матрицы A , которое принадлежит открытой правой полуплоскости (т.е. имеет положительную вещественную часть) или открытой левой полуплоскости (т.е. имеет отрицательную вещественную часть), останется в соответствующей полуплоскости при произвольно малых возмущениях. С другой стороны, собственные значения, лежащие на мнимой оси, могут при возмущении сместиться либо в левую, либо в правую полуплоскость, т.к. диск с центром на мнимой оси имеет непустое пересечение с обеими полуплоскостями вне зависимости от того, насколько мало ε . Следовательно, мы можем заключить, что если точка равновесия $x = 0$ системы $\dot{x} = Ax$ является узлом, фокусом или седловой точкой, то точка равновесия $x = 0$ системы $\dot{x} = (A + \Delta A)x$ сохранит свой характеристический тип при достаточно малых возмущениях. В случае, когда точка равновесия является центром, ситуация совершенно другая: рассмотрим возмущение вещественной жордановой формы

$$\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix},$$

где μ — параметр, соответствующий возмущению. В случае, когда μ положителен, точкой равновесия возмущенной системы является неустойчивый фокус, а когда μ отрицателен — устойчивый фокус. Это остается верным вне зависимости от того, насколько мал μ , поскольку этот параметр отличен от нуля. Поскольку фазовые портреты устойчивого фокуса и неустойчивого фокуса качественно отличаются от фазового портрета центра, мы можем заключить, что точка равновесия типа центр не сможет противостоять возмущениям. Узел, фокус и седловая точка называются *структурно устойчивыми* точками равновесия, поскольку эти точки сохраняют свои характеристические свойства при произвольно малых возмущениях²⁾. Центр не является структурно устойчивой точкой равновесия. Различие между этими двумя случаями полностью определяется расположением собственных значений

¹⁾ См. [67, глава 7]

²⁾ Более строгое и общее определение структурной устойчивости см. [81, глава 16].

матрицы A и собственные значения, расположенные на мнимой оси, наиболее уязвимы при возмущениях. Это обстоятельство побуждает ввести понятие *гиперболической точки равновесия*. Начало координат называется гиперболической точкой равновесия системы $\dot{x} = Ax$, если A не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью.¹⁾

В случае, когда матрица A имеет кратные вещественные собственные значения, бесконечно малые возмущения могут привести к возникновению пары комплексных собственных значений. Следовательно, устойчивый (соответственно, неустойчивый) узел останется либо устойчивым (соответственно, неустойчивым) узлом, либо станет устойчивым (соответственно, неустойчивым) фокусом.

В случае, когда матрица A имеет нулевые собственные значения, разумно предположить, что при возмущении эти собственные значения отклонятся от нуля, что приведет к существенному изменению фазового портрета системы. Тем не менее, оказывается, что имеется существенное различие между случаем, когда только одно собственное значение является нулевым и случаем, когда оба собственных значения были нулевыми ($A \neq 0$). В первом случае возмущение нулевого собственного значения приводит к возникновению вещественного собственного значения $\lambda_1 = \mu$, где μ может быть как положительным, так и отрицательным. Поскольку другое собственное значение λ_2 отлично от нуля, возмущение оставит его ненулевым. Более того, поскольку мы рассматриваем произвольно малые возмущения, $|\lambda_1| = |\mu|$ будет существенно меньше, чем $|\lambda_2|$. Таким образом, при возмущении мы получим два различных вещественных собственных значения, т.е. точка равновесия возмущенной системы будет узлом или седловой точкой в зависимости от знаков λ_2 и μ и это приведет к существенному изменению фазового портрета системы. Однако, тщательное исследование фазового портрета приводит к получению дополнительной информации о качественном поведении системы. Поскольку $|\lambda_1| \ll |\lambda_2|$, экспоненциальный член $e^{\lambda_2 t}$ будет изменяться со временем t значительно быстрее, чем экспоненциальный член $e^{\lambda_1 t}$, т.е. при $\lambda_2 < 0$ фазовый портрет будет соответствовать случаю узла или седловой точки (см. рис. 2.12). Сравнивая эти фазовые портреты с рисунком 2.10(а) мы можем увидеть их сходство. В частности, как и на рис 2.10, траектории начинающиеся вне линии, соответствующей собственному вектору v_1 , сходятся к этому вектору вдоль линий, которые почти параллельны собственному вектору v_2 . При их приближении к вектору v_1 , они становятся касательными к нему и продолжаются вдоль него. При $\mu < 0$ траектории вдоль v_1 сходятся к началу координат (устойчивый узел), а при $\mu > 0$ траектории вдоль v_1 стремятся к бесконечности (сед-

¹⁾ Это определение гиперболической точки равновесия может быть обобщено на случай систем с большой размерностью. Оно может быть также перенесено на случай нелинейных систем, путем использования соответствующего определения для линеаризованной системы.

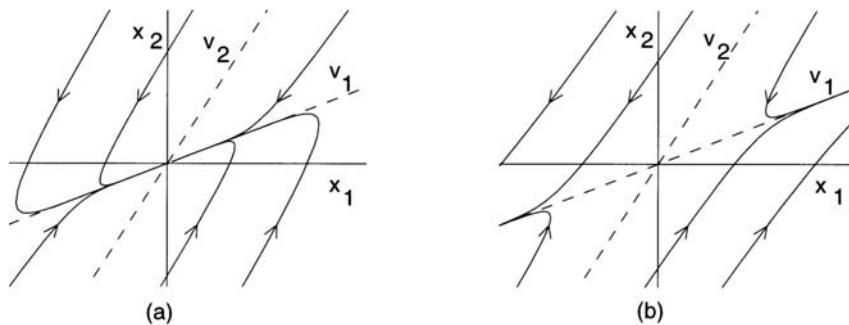


Рис. 2.12. Фазовые портреты возмущенной системы при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$: (a) $\mu < 0$; (b) $\mu > 0$.

ловая точка). Это качественное поведение характерно для сингулярно-возмущенных систем, которые будут рассмотрены в главе 11.

В случае, когда оба собственных значения матрицы A нулевые, результат воздействия возмущений еще более драматичен. Рассмотрим четыре возможных случая возмущений жордановой формы:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -\mu^2 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix},$$

где μ — положительный или отрицательный параметр, характеризующий возмущение. Легко видеть, что точками равновесия для этих случаев являются, соответственно, центр, фокус, узел и седловая точка. Другими словами, воздействие возмущений может привести к появлению всех возможных фазовых портретов изолированной точки равновесия.

2.2. Множественные точки равновесия

Линейная система $\dot{x} = Ax$ имеет изолированную точку равновесия $x = 0$, если матрица A не имеет нулевых собственных чисел, т.е если $\det A \neq 0$. Если $\det A = 0$, система имеет континuum точек равновесия. Для линейной системы имеется определенное число типов точек равновесия. Нелинейная система может иметь множество изолированных точек равновесия. В рассмотренных ниже двух примерах мы исследуем качественное поведение цепи с тунNELьным диодом (см. параграф 1.2.2) и уравнение маятника (см. параграф 1.2.1). В обеих системах наблюдаются множественные изолированные точки равновесия.

Пример 2.1. Модель состояния цепи с тунNELьным диодом представлена следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2], \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + u].\end{aligned}$$

Предположим, что параметрами цепи являются¹⁾ $u = 1.2V$, $R = 1.5 \text{ кОм} = 1.5 \times 10^3 \Omega$, $C = 2pF = 2 \times 10^{-12} F$ и $L = 5\mu H = 5 \times 10^{-6} H$. Предположим, что время измеряется в наносекундах, а токи x_2 , $h(x_1)$ — в миллиамперах. Тогда мы можем переписать уравнение модели в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0.5[-h(x_1) + x_2], \\ \dot{x}_2 &= 0.2[-x_1 - 1.5x_2 + 1.2].\end{aligned}$$

Предположим, что $h(\cdot)$ определяется равенством

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5.$$

Полагая $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, найдем из полученной системы все точки равновесия. Легко проверить, что этими точками равновесия являются следующие: (0.063, 0.758), (0.285, 0.61) и (0.884, 0.21). Фазовый портрет системы, полученный в ходе компьютерного моделирования, показан на рис. 2.13. На этом рисунке три точки равновесия обозначены соответственно Q_1, Q_2, Q_3 . Из фазового портрета видно, что за исключением двух особых траекторий, стремящихся к Q_2 , все траектории стремятся либо к Q_1 , либо к Q_3 . В окрестностях точек равновесия фазовые портреты соответствуют седловой точке для Q_2 и устойчивым узлам для Q_1 и Q_3 . Две особых траектории, сходящиеся к Q_2 , являются устойчивыми траекториями седловой точки. Они разделяют фазовую плоскость на две части. Все траектории, начинающиеся в левой части, сходятся к Q_1 , и все траектории, начинающиеся в правой части, сходятся к Q_3 . Эта разделяющая линия называется *сепаратрисой*, т.к. она разделяет фазовую плоскость на две области, для которых качественно различное поведение траекторий²⁾. В эксперименте мы будем наблюдать одну из двух точек устойчивого состояния Q_1 или Q_3 в зависимости от начального напряжения на конденсаторе и тока в катушке индуктивности. Точка равновесия Q_2 никогда не наблюдается на практике, т.к. постоянно присутствующий шум в цепи отклонит

¹⁾ Численные значения параметров заимствованы из [39].

²⁾ В общем случае фазовая плоскость может разделяться на несколько областей, внутри каждой из которых траектории могут демонстрировать различное качественное поведение. Линии, разделяющие эти области, называются сепаратрисами.

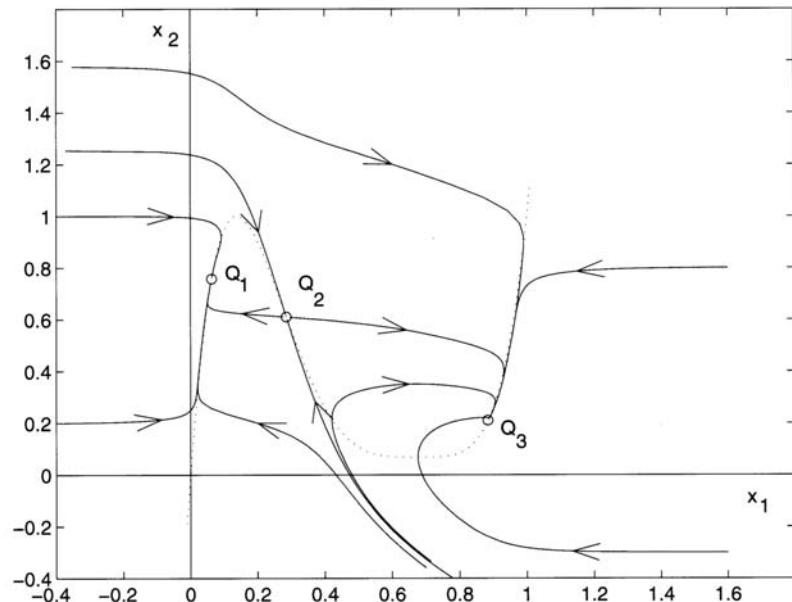


Рис. 2.13. Фазовый портрет цепи с туннельным диодом из примера 2.1.

траектории от Q_2 , даже если изначально выставить точные значения начального состояния, соответствующего точке Q_2 .

На рис. 2.13 изображен фазовый портрет глобального поведения цепи с туннельным диодом. Промежутки изменения x_1 и x_2 были выбраны таким образом, чтобы были видны все существенные качественные особенности фазового портрета. За пределами показанной области никаких существенных качественных особенностей не наблюдается.

Цепь с туннельным диодом, имеющая множественные точки равновесия, называется *бистабильной цепью*, т.к. она имеет две устойчивые рабочие точки. Эта схема использовалась в качестве ячейки компьютерной памяти, в которой точка Q_1 ассоциировалась с двоичным значением «0», а точка Q_3 — с двоичным значением «1». Переключение из состояния Q_1 в Q_3 и наоборот осуществлялось сигналом с достаточно большими амплитудой и длительностью, что приводило к переводу траектории через сепаратрису. Например, если система находилась в начальном состоянии Q_1 , то положительный импульс напряжения u переводил траекторию в правую по отношению к сепаратрисе область. Этот импульс должен быть достаточно сильным по амплитуде, чтобы поднять нагрузочную прямую выше пунктирной линии на рис. 2.14 и достаточно продолжительным, для того, чтобы позволить траектории достигнуть и пересечь сепаратрису.

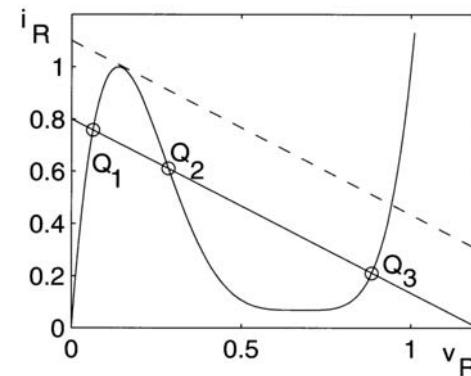


Рис. 2.14. Подстройка нагрузочной линии цепи с туннельным диодом при переключении.

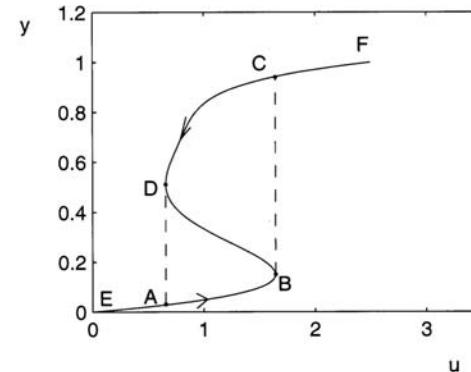


Рис. 2.15. Гистерезисная характеристика цепи с туннельным диодом.

Можно заметить и другую важную особенность этой цепи если рассмотреть ее как систему с входом u и выходом $y = v_R$. Предположим, что мы начинаем наше исследование при достаточно малом значении u и система находится в области, где лежит точка равновесия Q_1 . После завершения переходных процессов система устанавливается в состояние, соответствующее Q_1 . Начнем постепенно увеличивать u , позволяя системе устанавливаться в состояние Q_1 после каждого шага увеличения u . В некоторых пределах изменения u система будет иметь только одно состояние равновесия Q_1 . На вход-выходной характеристике системы, изображенной на рис. 2.15, этот промежуток соответствует сегменту EA . При дальнейшем увеличении напряжения система будет иметь две устойчивые рабочие точки: на сегменте AB — Q_1 , а на сегменте CD — Q_3 . Поскольку мы повышаем напряжение постепенно, то начальное состояние цепи будет находиться вблизи Q_1 и система

будет устанавливаться после каждого шага увеличения напряжения именно в это состояние. Следовательно, выходные значения будут соответствовать сегменту AB . При дальнейшем увеличении напряжения, мы достигаем точки, после которой единственным устойчивым состоянием цепи будет Q_3 и после завершения переходного процесса система будет устанавливаться именно в это состояние Q_3 . На вход-выходной характеристике это будет соответствовать скачку из B в C . Для больших значений напряжения выход системы будет оставаться на сегменте CF . Предположим, что мы начали постепенно снижать напряжение. Сначала единственной точкой равновесия системы будет Q_3 и выход системы будет двигаться вдоль сегмента FC . После того, как напряжение достигнет некоторого значения, соответствующего точке C , система будет обладать двумя устойчивыми рабочими точками, соответствующими состояниям Q_1 и Q_3 , но после завершения переходного процесса она будет устанавливаться в состояние Q_3 , т.к. это состояние ближе в этот момент времени к Q_3 . Следовательно, выход системы будет двигаться вдоль сегмента CD . При дальнейшем уменьшении напряжения система достигнет состояния, соответствующего точке D на вход-выходной характеристике, и ее единственной точкой равновесия станет Q_1 , что приведет к скачку из D в A . Таким образом, вход-выходная характеристика цепи демонстрирует гистерезисное поведение. Заметим, что при получении изображенной на рис. 2.15 вход-выходной характеристики, мы игнорировали динамику системы. Такой подход адекватен лишь в случае, когда вход системы изменяется медленно по сравнению с динамикой системы, т.к. это позволяет пренебречь временем переходного процесса, необходимого для переключения из одной устойчивой рабочей точки в другую.¹⁾

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение маятника с трением:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -10 \sin x_1 - x_2.\end{aligned}$$

Фазовый портрет этой системы, полученный с помощью компьютерного моделирования, изображен на рис. 2.16 и демонстрирует периодичность по x_1 с периодом 2π . Следовательно, все характерные особенности качественного поведения рассматриваемой системы могут быть представлены на вертикальной полосе $-\pi \leq x_1 \leq \pi$. Как было отмечено выше, точки равновесия $(0, 0), (2\pi, 0), (-2\pi, 0)$ и т.д., соответствуют нижней точке равновесия маятника $(0, 0)$. Траектории в окрестности этой точки равновесия демонстрируют качественное поведение, характерное для траекторий в окрестности устойчивого фокуса. С другой стороны, точки равновесия $(\pi, 0), (-\pi, 0)$ и т.д. соответствуют верхней точке равновесия маятника $(0, 0)$. Траектории в окрестности этой точки равновесия демонстрируют качественное поведение, характерное для

¹⁾ Это утверждение будет обосновано с использованием теории сингулярных возмущений, которая будет рассмотрена в главе 11.

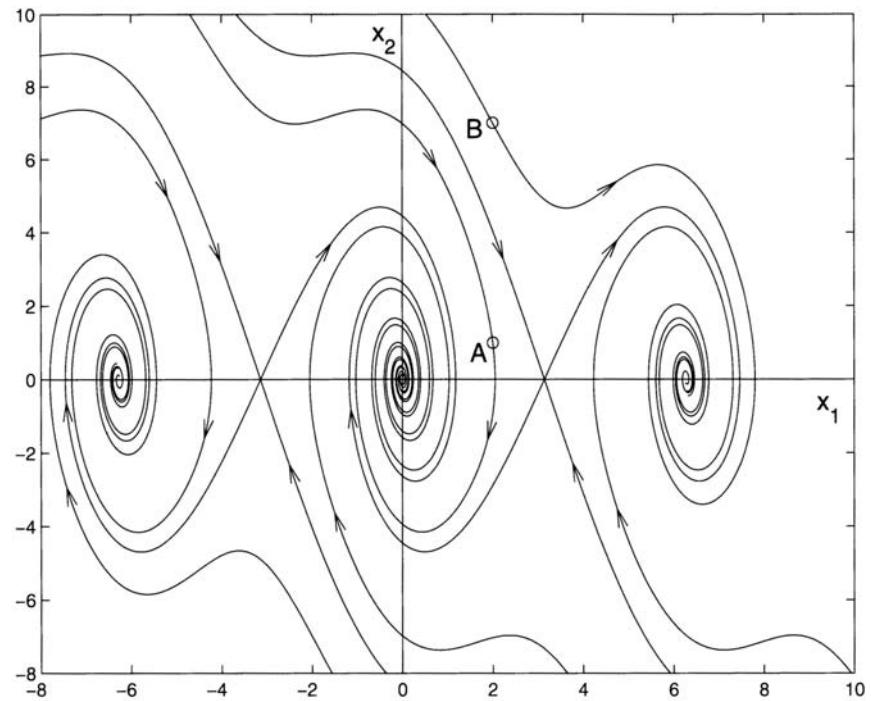


Рис. 2.16. Фазовый портрет уравнения маятника из Примера 2.2.

траекторий в окрестности седловых точек. Устойчивые траектории седловых точек в $(\pi, 0)$ и $(-\pi, 0)$ образуют сепаратрисы, которые отделяют области, характеризующиеся тем, что все траектории, начинающиеся внутри этих областей, стремятся к точке равновесия $(0, 0)$. Эта картина периодически повторяется. Тот факт, что траектории могут стремиться к различным точкам равновесия объясняется тем, что маятник может совершить несколько полных оборотов, прежде чем он установится в нижнем положении равновесия. Например, траектории, начинающиеся в точках A и B имеют одно и то же начальное состояние, но разные скорости. Траектория, начинающаяся в A , осциллирует с убывающей амплитудой, до тех пор пока не установится в нижнем положении равновесия. Траектория, начинающаяся в B , имеет большую начальную кинетическую энергию и совершает полный оборот, прежде чем начать осциллировать с убывающей амплитудой. Заметим, что «неустойчивое» состояние равновесия $(\pi, 0)$ не может поддерживаться на практике, т.к. любое возмущение заставляет систему уклониться от этого положения.

2.3. Качественное поведение в окрестности точек равновесия

Фазовые портреты, полученные в примерах 2.1 и 2.2, показывают, что качественное поведение в окрестности каждой точки равновесия похоже на качественное поведение, которое мы наблюдали при исследовании линейных систем в параграфе 2.1. В частности, из рис. 2.13 видно, что траектории вблизи Q_1 , Q_2 и Q_3 похожи на фазовые портреты устойчивого фокуса, седловой точки и устойчивого узла соответственно. Аналогично на рис. 2.16 показаны траектории вблизи $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$, которые похожи на фазовые портреты устойчивого фокуса и седловой точки соответственно. В этом параграфе мы покажем, что такое поведение вблизи точек равновесия может быть обнаружено без построения фазовых портретов исследуемой нелинейной системы. За исключением некоторых особых случаев качественное поведение нелинейной системы может быть определено посредством ее линеаризации в окрестности точки равновесия.

Пусть $p = (p_1, p_2)$ — точка равновесия нелинейной системы (2.1)–(2.2). Предположим, что функции f_1 и f_2 непрерывно дифференцируемы. Разлагая правую часть уравнений (2.1)–(2.2) в ряд Тейлора в точке (p_1, p_2) , мы получаем

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(p_1, p_2) + a_{11}(x_1 - p_1) + a_{12}(x_2 - p_2) + \text{HOT}, \\ \dot{x}_2 &= f_2(p_1, p_2) + a_{21}(x_1 - p_1) + a_{22}(x_2 - p_2) + \text{HOT},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}a_{11} &= \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}, \quad a_{12} = \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}, \\ a_{21} &= \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}, \quad a_{22} = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}\end{aligned}$$

и *HOT* — члены высших порядков (high order terms), т.е. члены разложения вида $(x_1 - p_1)^2$, $(x_2 - p_2)^2$, $(x_1 - p_1) \times (x_2 - p_2)$ и т.д. Поскольку (p_1, p_2) — точка равновесия,

$$f_1(p_1, p_2) = f_2(p_1, p_2) = 0.$$

Поскольку мы интересуемся видом траекторий вблизи (p_1, p_2) , удобно ввести следующие величины:

$$y_1 = x_1 - p_1, \quad \text{и} \quad y_2 = x_2 - p_2$$

и переписать уравнение состояния в виде

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \dot{x}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \text{HOT}, \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \text{HOT}.\end{aligned}$$

Если ограничиться рассмотрением поведения только в достаточно малой окрестности точки равновесия, то членами высокого порядка можно

пренебречь и аппроксимировать исходные нелинейные уравнения линейными уравнениями состояния

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \dot{x}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2,\end{aligned}$$

которые в векторной форме записи имеют следующий вид:

$$\dot{y} = Ay$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{x=p} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=p}.$$

Матрица $[\partial f / \partial x]$ называется **якобианом** (матрицей Якоби) функции $f(x)$ и A — матрицей Якоби, вычисленной в точке p .

Разумно предположить, что траектории нелинейной системы в малой окрестности точки равновесия должны быть «близки» к траекториям линеаризованной системы в точке равновесия. Действительно, если **нулевое решение линеаризованной системы является устойчивым (неустойчивым) узлом с различными собственными значениями, устойчивым (неустойчивым) фокусом или седловой точкой**, то в малой окрестности начала координат **нулевое решение нелинейных уравнений состояния является устойчивым (неустойчивым) узлом, устойчивым (неустойчивым) фокусом или седловой точкой**,¹⁾ соответственно. Следовательно, мы можем называть точку равновесия нелинейных уравнений состояния (2.1)–(2.2) **устойчивым (неустойчивым) узлом, устойчивым (неустойчивым) фокусом или седловой точкой**, если тем же свойством обладают линеаризованные в точке равновесия уравнения состояния. Таким образом, тип точки равновесия в примерах 2.1 и 2.2 может быть определен с использованием соответствующей линеаризованной модели и без построения глобальных фазовых портретов.

Пример 2.3. Матрица Якоби функции $f(x)$ для цепи с туннельным диодом из примера 2.1 имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -0.5h'(x_1) & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix},$$

¹⁾ Доказательство этого утверждения может быть найдено в [76]. Оно верно в предположении, что $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в окрестности точки равновесия (p_1, p_2) . В главе 4 будет доказан другой (но похожий) результат, связанный с линеаризацией систем высокого порядка (см. Теорему 4.7).

где

$$h'(x_1) = \frac{\partial h}{\partial x_1} = 17.76 - 207.58x_1 + 688.86x_1^2 - 905.24x_1^3 + 418.6x_1^4.$$

Вычисляя якобиан в точках равновесия $Q_1 = (0.063, 0.758)$, $Q_2 = (0.285, 0.61)$ и $Q_3 = (0.884, 0.21)$, мы получаем три матрицы:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.598 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \text{собственные числа: } -3.57, -0.33,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.82 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \text{собственные числа: } 1.77, -0.25,$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1.427 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \text{собственные числа: } -1.33, -0.4.$$

Таким образом, Q_1 — устойчивый узел, Q_2 — седловая точка, Q_3 — устойчивый узел. \triangle

Пример 2.4. Матрица Якоби функции $f(x)$ для уравнений маятника из примера 2.2 имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 \cos x_1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Вычисляя якобиан в точках равновесия $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$, мы получаем две матрицы:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{собственные числа: } -0.5 \pm j3/12,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{собственные числа: } -3.7, 2.7.$$

Таким образом, точка равновесия $(0, 0)$ — устойчивый фокус и $(\pi, 0)$ — седловая точка. \triangle

Заметим, что изложенный подход линеаризации можно применять только в случае, когда матрица линеаризованных уравнений состояния не имеет собственных чисел на мнимой оси, т.е. когда начало координат является гиперболической точкой равновесия линейной системы. Обобщением понятия гиперболической точки равновесия для нелинейных систем может служить следующее определение: точка равновесия является гиперболической, если матрица Якоби, вычисленная в этой точке, не имеет собственных чисел на мнимой оси. Если матрица Якоби имеет собственные числа на мнимой оси, то качественное поведение нелинейных уравнений состояния вблизи точки равновесия может существенно отличаться от качественного поведения линеаризованных уравнений состояния. Это обстоятельство не вызывает удивления в свете проведенного выше исследования воздействия линейных возмущений на качественное поведение линейной системы в случае, когда

начало координат не является гиперболической точкой. В нижеследующем примере мы рассмотрим случай, когда нулевое решение линеаризованных уравнений состояния является центром.

Пример 2.5. Система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

имеет точку равновесия в начале координат. Матрица линеаризованных уравнений состояния в начале координат имеет собственные значения $\pm j$, т.е. точка равновесия линеаризованной системы является центром. Мы можем определить качественное поведение нелинейной системы с использованием ее представления в полярных координатах

$$x_1 = r \cos \theta \quad \text{и} \quad x_2 = r \sin \theta.$$

В этих координатах исходная система имеет следующий вид:

$$\dot{r} = -\mu r^3 \quad \text{и} \quad \dot{\theta} = 1.$$

С использованием этого представления легко показать, что точка равновесия нелинейной системы является устойчивым фокусом при $\mu > 0$ и неустойчивым фокусом при $\mu < 0$. \triangle

Предыдущий пример показывает, что характерное для точки равновесия типа центр качественное поведение линеаризованной системы не сохраняется при рассмотрении исходной нелинейной системы.

Представленный выше анализ исключает случай, когда линеаризованные уравнения состояния имеют точку равновесия типа узел с кратными собственными значениями. В примере 2.5 рассматривается случай когда линеаризованная система имеет точку равновесия типа устойчивый узел, но исходная нелинейная система имеет точку равновесия типа устойчивого фокуса. Однако, следует отметить, что в случае, когда функция $f(x)$ более гладкая, то этого эффекта не наблюдается. В частности, если $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ являются аналитическими функциями¹⁾ в окрестности точки равновесия, то верно следующее утверждение²⁾: *Если нулевое решение линеаризованных уравнений состояния является устойчивым (неустойчивым) узлом, то в малой окрестности точки равновесия нулевое решение нелинейных уравнений состояния также является устойчивым (неустойчивым) узлом вне зависимости от того, различны или равны собственные значения матрицы линеаризованной системы.*

Определение типа точек равновесия с использованием метода линеаризации чрезвычайно полезно при аналитическом и численном построении глобального фазового портрета системы второго порядка. На практике, первым шагом при построении фазового портрета должно

¹⁾ Т.е. $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ имеют сходящиеся разложения в ряд Тейлора.

²⁾ См. [115], Теорема 3.4, стр. 188

быть нахождение всех точек равновесия и определение их качественного типа с использованием линеаризованной системы, которая представляет необходимую информацию об ожидаемом фазовом портрете системы в окрестности точек равновесия.

2.4. Пределевые циклы

Колебания являются важным явлением, свойственным динамическим системам. Система демонстрирует колебания в случае, когда она имеет *нетривиальное периодическое решение*

$$x(t+T) = x(t), \quad \forall t \geq 0,$$

для некоторого $T > 0$. Термин «нетривиальное» используется для того, чтобы исключить из рассмотрения постоянное решение, которое соответствует точке равновесия. Постоянное решение удовлетворяет предыдущему равенству, но не представляет для нас интереса в случае, когда мы говорим о колебаниях или периодических решениях. Далее говоря о периодическом решении, мы будем иметь в виду нетривиальное решение, за исключением специально оговоренных ситуаций. Траектория периодического решения на фазовом портрете представляет собой замкнутую кривую, которая обычно называется *периодической* или *замкнутой орбитой*.

Мы уже рассматривали в параграфе 2.1 пример, в котором наблюдались колебания: система второго порядка с собственными значениями $\pm j\beta$. Нулевое решение этой системы представляет собой центр, а другие траектории — замкнутые орбиты. Если преобразовать эту систему к жордановой форме, то решениями соответствующей системы будут следующие:

$$z_1 = r_0 \cos(\beta t + \theta_0), \quad z_2 = r_0 \sin(\beta t + \theta_0),$$

где

$$r_0 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \theta_0 = \arctg \left[\frac{z_2(0)}{z_1(0)} \right].$$

Таким образом, система имеет решение, колеблющееся с амплитудой r_0 . В этом случае она называется *гармонический осциллятор*. Если рассматривать гармонический осциллятор как модель линейной индуктивно-емкостной цепи, изображенный на рис. 2.17, то можно заметить, что физическим механизмом, приводящим к этим колебаниям, является периодический обмен (без диссипации) энергией, запасенной в электрическом поле конденсатора, с энергией, запасенной в магнитном поле катушки индуктивности. Однако имеются две фундаментальные проблемы, связанные с исследованием этого линейного осциллятора. Первая проблема заключается в робастности. Мы видели, что бесконечно малые (линейные или нелинейные) возмущения, введенные в правую часть модели, нарушают колебания. Т.е. *линейный осцилля-*

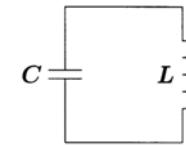


Рис. 2.17. Линейная индуктивно-емкостная цепь как гармонический осциллятор.

тор не является структурно устойчивым. На практике невозможно построить индуктивно-емкостную цепь, которая смогла бы реализовать гармонический осциллятор, т.к. сопротивление электрических проводов цепи приводит к рассеиванию энергии, запасенной в конденсаторе и катушке индуктивности. Даже если мы построим идеальный гармонический осциллятор, мы столкнемся со второй проблемой: *амплитуда колебаний зависит от начальных условий*.

Эти две фундаментальные проблемы, связанные с линейным осциллятором, могут быть решены, если рассмотреть нелинейный осциллятор. Можно построить физически реализуемый нелинейный осциллятор, такой что:

- Нелинейный осциллятор является структурно устойчивым.
- Амплитуда колебаний (в установившемся режиме) не зависит от начальных условий.

Генератор с отрицательным сопротивлением, рассмотренный в параграфе 1.2.4, представляет собой пример такого нелинейного осциллятора. Уравнения состояния системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \varepsilon h'(x_1)x_2, \end{aligned}$$

где функция h удовлетворяет некоторым свойствам, сформулированным в параграфе 1.2.4. Система имеет только одну точку равновесия $x_1 = x_2 = 0$. Матрица Якоби в этой точке определяется следующим равенством:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon h'(0) \end{bmatrix}.$$

Поскольку $h'(0) < 0$, нулевое решение является либо неустойчивым узлом, либо неустойчивым фокусом, в зависимости от значения $\varepsilon h'(0)$. В обоих случаях все траектории, начинающиеся вблизи начала координат, расходятся от него и устремляются в бесконечность. Эта особенность обусловлена отрицательностью сопротивления резистивного элемента вблизи начала координат; этот элемент является «активным» и обеспечивает систему энергией. Это обстоятельство находит аналитическое обоснование, если найти выражение для скорости изменения энергии. Суммарная энергия, запасенная в конденсаторе и катушке

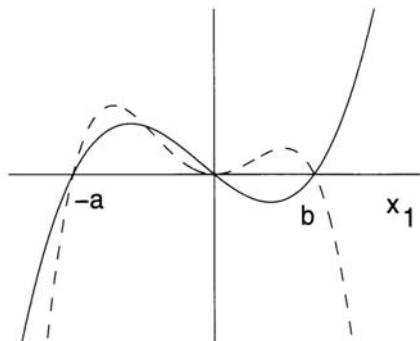


Рис. 2.18. Графики $h(x_1)$ (сплошная линия) и $-x_1h(x_1)$ (пунктирная линия), которые показывают, что \dot{E} положительна при $-a \leq x_1 \leq b$.

индуктивности, в каждый момент времени определяется равенством

$$E = \frac{1}{2}Cv_C^2 + \frac{1}{2}Li_L^2.$$

В параграфе 1.2.4 было показано, что

$$v_C = x_1 \quad \text{и} \quad i_L = -h(x_1) - \frac{1}{\varepsilon}x_2.$$

Таким образом, учитывая $\varepsilon = \sqrt{L/C}$, мы можем переписать выражение для энергии в следующем виде:

$$E = \frac{1}{2}C\{x_1^2 + [\varepsilon h(x_1) + x_2]^2\}.$$

Скорость изменения энергии определяется равенством

$$\begin{aligned} \dot{E} &= C\{x_1\dot{x}_1 + [\varepsilon h(x_1) + x_2][\varepsilon h'(x_1)\dot{x}_1 + \dot{x}_2]\} \\ &= C\{x_1x_2 + [\varepsilon h(x_1) + x_2][\varepsilon h'(x_1)x_2 - x_1 - \varepsilon h'(x_1)x_2]\} \\ &= C[x_1x_2 - \varepsilon x_1h(x_1) - x_1x_2] \\ &= -\varepsilon Cx_1h(x_1). \end{aligned}$$

Из этого равенства видно, что вблизи начала координат траектория получает энергию, т.к. при малых $|x_1|$ член $x_1h(x_1)$ отрицателен. Кроме того, легко заметить, что если траектория проходит внутри (соответственно вне) полосы $-a \leq x_1 \leq b$, то система получает (соответственно теряет) энергию. Границы полосы $-a$ и b представляют собой корни уравнения $h(x_1) = 0$ (см. рис. 2.18). Таким образом, происходит внутрисистемный обмен энергией: при прохождении траектории внутри полосы система получает энергию, а при прохождении траектории вне полосы — теряет. В системе могут наблюдаться стационарные колебания, если суммарное изменение энергии за один цикл равно нулю и соответствующая траектория будет замкнутой орбитой. Оказывается, что осциллятор с отрицательным сопротивлением имеет изолирован-

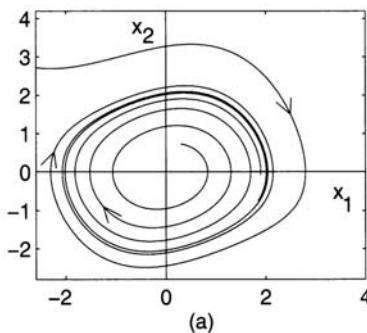


Рис. 2.19. Фазовые портреты осциллятора Ван дер Поля: (а) $\varepsilon = 0.2$; (б) $\varepsilon = 1.0$.

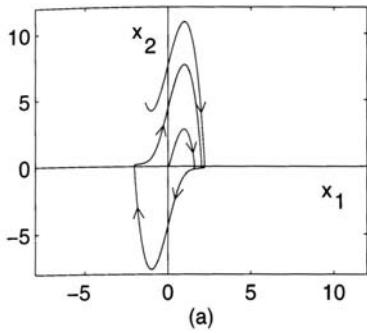
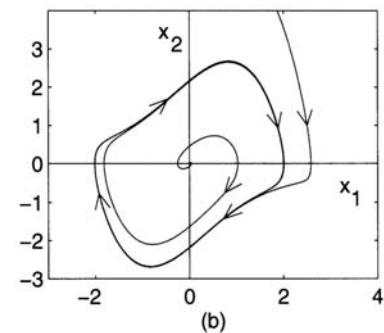


Рис. 2.20. Фазовые портреты осциллятора Ван дер Поля при $\varepsilon = 5.0$: (а) на $(x_1 - x_2)$ -плоскости; (б) на $(z_1 - z_2)$ -плоскости.

ную замкнутую орбиту. Этот факт может быть проиллюстрирован следующим примером осциллятора Ван дер Поля.

Пример 2.6. На рисунках 2.19(а), 2.19(б) и 2.20(а) показаны фазовые портреты уравнения Ван дер Поля

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2.5}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 \tag{2.6}$$

для трех различных значений параметра ε : 0.2, 1.0 и 5.0. Во всех трех случаях из фазовых портретов видно, что эта система имеет единственную замкнутую орбиту, которая притягивает все траектории, начинающиеся не на этой орбите. При $\varepsilon = 0.2$ замкнутая орбита представляет собой гладкую кривую, близкую к кругу с радиусом 2. Такое поведение типично для малых значений ε (скажем, $\varepsilon < 0.3$). При среднем значении параметра $\varepsilon = 1.0$ круговая форма орбиты несколько искажается (см. рис. 2.19(б)). Для большого значения $\varepsilon = 5.0$ замкнутая орбита еще более искажена (см. рис. 2.20(а)). Более показательный фазовый портрет для этого случая может быть получен, если выбрать в качестве

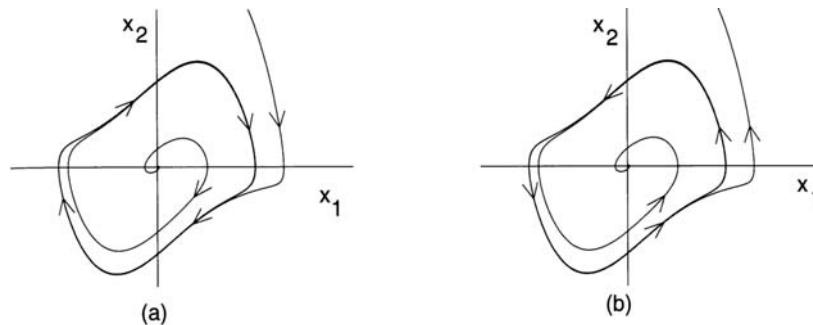


Рис. 2.21. (а) Устойчивый предельный цикл; (б) неустойчивый предельный цикл.

переменных состояния $z_1 = i_L$ и $z_2 = v_C$. Тогда уравнения состояния принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \frac{1}{\varepsilon} z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\varepsilon(z_1 - z_2 + \frac{1}{3}z_2^3).\end{aligned}$$

Фазовый портрет на $(z_1 - z_2)$ -плоскости при $\varepsilon = 5.0$ показан на рис. 2.20(б). Замкнутая орбита очень близка к кривой $z_1 = z_2 - (1/3)z_2^3$, за исключением мест с резким изгибом, в которых траектории становятся почти вертикальными. Вертикальные участки замкнутой орбиты могут рассматриваться как скачки замкнутой орбиты с одной ветки кривой на другую при достижении мест резкого изгиба. Колебания, при которых имеет место явление скачка обычно называются *релаксационными колебаниями*. Такие фазовые портреты характерны для больших значений ε (скажем, $\varepsilon > 3.0$). \triangle

Замкнутая орбита, которую мы получили в примере 2.6, отличается от замкнутой орбиты гармонического осциллятора. В случае гармонического осциллятора имеется континuum замкнутых орбит, а в примере системы Ван дер Поля имеется только одна изолированная периодическая орбита. Изолированные периодические орбиты называются *предельными циклами*. Предельный цикл осциллятора Ван дер Поля обладает тем свойством, что все траектории в окрестности предельного цикла стремятся к этому предельному циклу при $t \rightarrow \infty$. Предельный цикл с таким свойством известен как *устойчивый предельный цикл*. В дальнейшем мы увидим, что могут существовать и *неустойчивые предельные циклы*, которые обладают тем свойством, что все траектории начинающиеся в произвольно малой окрестности предельного цикла будут отклоняться от этого предельного цикла при $t \rightarrow \infty$ (см. рис. 2.21). Примером такого неустойчивого предельного цикла может служить уравнение Ван дер Поля в обратном времени, т.е.

$$\dot{x}_1 = -x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \varepsilon(1 - x_1^2)x_2.$$

Фазовый портрет этой системы похож на фазовый портрет осциллятора Ван дер Поля, но направление движения вдоль траекторий изменяется на противоположное. Следовательно, такой предельный цикл является неустойчивым.

Интересно рассмотреть предельный цикл осциллятора Ван дер Поля из примера 2.6 в предельных случаях, когда значение ε очень мало или очень велико. Такие специальные случаи могут исследоваться аналитически с использованием асимптотических методов. В главе 10 мы используем *метод усреднения* для исследования предельного случая $\varepsilon \rightarrow 0$, а в главе 11 мы используем *метод сингулярных возмущений* для исследования предельного случая $\varepsilon \rightarrow \infty$.

2.5. Численное построение фазовых портретов

Для нахождения численных решений обыкновенных дифференциальных уравнений используются специальные компьютерные программы, которые могут быть использованы и для построения фазовых портретов систем второго порядка. В этом параграфе мы дадим указания, которые могут оказаться полезными для читателя, незнакомого с этими аспектами.¹⁾

Первым шагом при построении фазового портрета является нахождение всех точек равновесия исследуемой системы и определение с использованием линеаризованной модели типов качественного поведения в окрестности найденных изолированных точек равновесия.

Для того, чтобы построить фазовый портрет необходимо выполнить три задачи:²⁾

- Выбрать границы области в пространстве состояния, внутри которой должен быть построен фазовый портрет:

$$x_{1min} \leq x_1 \leq x_{1max}, \quad x_{2min} \leq x_2 \leq x_{2max}.$$

- Выбрать начальные точки (значения) внутри границы области.
- Найти соответствующие траектории.

Рассмотрим сначала задачу нахождения траекторий. Для того, чтобы построить траекторию, проходящую через точку x_0 , необходимо решить уравнение

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

¹⁾ Более подробные инструкции к построению информативных фазовых портретов приведены в [149, глава 10].

²⁾ Мы не упомянули здесь четвертую задачу: нанесение на рисунок стрелок направления движения вдоль траекторий, т.к. для целей этой книги вполне достаточно выполнить эту процедуру вручную.

в прямом (при положительном t) и обратном времени (при отрицательном t). Решение в обратном времени эквивалентно решению в прямом времени уравнения

$$\dot{x} = -f(x), \quad x(0) = x_0,$$

т.к. замена независимой переменной $\tau = -t$ изменяет знак правой части этого уравнения на противоположный. Стрелка, указывающая направление движения вдоль траектории, направлена от x_0 в случае решения в прямом времени, и направлена к x_0 в случае решения в обратном времени. Заметим, что построение решения в обратном времени является единственным путем получения фазового портрета в окрестности неустойчивого фокуса, неустойчивого узла или неустойчивого предельного цикла. Траектории продолжаются до тех пор, пока они не достигнут границы выбранной области в пространстве состояния. В случае, когда траектория сходится к точке равновесия, следует ввести критерий останова процедуры вычисления.

Граница области должна быть выбрана таким образом, чтобы можно было отобразить все существенные особенности фазового портрета. Поскольку некоторые из этих особенностей не могут быть известны априори, необходимо предусмотреть возможность интерактивного переопределения границ области, но первоначальный выбор этой области должен учитывать всю доступную на момент начала моделирования информацию. Например, область должна включать все найденные точки равновесия. Необходимо быть внимательным, если траектория выходит за границы выбранной области, т.к. это свидетельствует, что эта траектория либо не ограничена, либо стремится к устойчивому предельному циклу.

Простейшим методом выбора начальных значений, является равномерное распределение этих точек в узлах некоторой сетки, покрывающей область моделирования местах пересечения координатной сетки. Однако равномерное распределение начальных точек по области не означает в общем случае равномерное распределение траекторий по этой области. Целесообразнее выбирать эти начальные точки интерактивно после того, как уже вычисленные траектории нанесены на фазовый портрет системы, т.к. большинство компьютерных программ имеет развитые и удобные в использовании средства для рисования графиков.

В случае, когда точка равновесия является седловой точкой, можно использовать метод линеаризации исследуемой системы для того, чтобы получить устойчивые и неустойчивые траектории. Это представляется полезным, т.к. в примерах 2.1 и 2.2 мы видели, что устойчивые траектории седловой точки определяют сепаратрису. Пусть собственные значения матрицы линеаризованной системы удовлетворяют неравенству $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ и соответствующие собственные вектора обозначены через v_1 и v_2 . Устойчивые и неустойчивые траектории седловой точки

нелинейной системы будут касательны к устойчивому собственному вектору v_2 и неустойчивому собственному вектору v_1 соответственно при приближении к точке равновесия p . Следовательно, две неустойчивые траектории могут быть получены при задании начальных значений вида $x_0 = p \pm \alpha v_1$, где α — малый положительный параметр. Аналогично, две устойчивые траектории могут быть получены при задании начальных значений вида $x_0 = p \pm \alpha v_2$. Основная часть неустойчивых траекторий будет получена при решении системы в прямом времени, и основная часть устойчивых траекторий будет получена при решении системы в обратном времени.

2.6. Существование периодических орбит

Периодические орбиты на плоскости обладают тем свойством, что они разделяют плоскость на две области: внутри орбиты и вне ее. Это позволяет получить критерии наличия или отсутствия периодических орбит для систем второго порядка. Следует отметить, однако, что эти критерии не могут быть обобщены на случай систем большей размерности. Наиболее известными критериями являются теорема Пуанкаре–Бендиксона, критерий Бендиксона и *метод индексов*.

Рассмотрим автономную систему второго порядка

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.7)$$

где $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция. В теореме Пуанкаре–Бендиксона даются условия существования периодических орбит (2.7). Мы не будем приводить полную формулировку этой теоремы,¹⁾ но сформулируем ее следствие, которое позволяет непосредственно использовать основной результат теоремы. Мы будем называть это следствие *критерием Пуанкаре–Бендиксона*.

Лемма 2.1 (Критерий Пуанкаре–Бендиксона). Рассмотрим систему (2.7) и пусть M — замкнутое ограниченное подмножество на плоскости, такое что

- M не содержит точек равновесия или содержит только одну точку равновесия, такую что собственные значения матрицы Якоби $[\partial f / \partial x]$ в этой точке имеют положительные вещественные части. (Следовательно, точка равновесия является неустойчивым фокусом или неустойчивым узлом.)
- Каждая траектория, начинающаяся в M , остается в M для всех будущих моментов времени.

Тогда M содержит периодическую орбиту системы (2.7).

С интуитивной точки зрения, в этой лемме утверждается, что ограниченные траектории на плоскости будут стремиться к перио-

¹⁾ Формулировка и доказательство теоремы Пуанкаре–Бендиксона приведены в [135] или во втором издании этой книги.

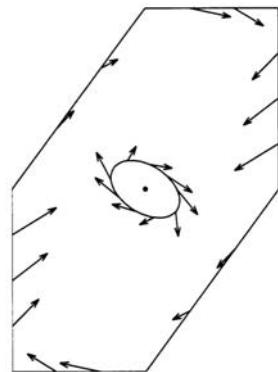


Рис. 2.22. Замена множества M на множество, исключающее окрестность неустойчивого фокуса или узла.

дической орбите или точкам равновесия при стремлении времени к бесконечности. Если M не содержит точек равновесия, то она должна содержать периодическую орбиту. Если M содержит только одну точку равновесия, удовлетворяющую указанным условиям, то в окрестности этой точки все траектории будут расходиться от нее. Таким образом, мы можем выбрать простую замкнутую кривую¹⁾ в окрестности точки равновесия, такую что векторное поле в точках этой кривой будет направлено наружу.²⁾ Заменяя множество M так, чтобы исключить ограниченную кривой область (см. рис. 2.22), мы получаем множество, которое не содержит точек равновесия и все траектории проходят внутри него.

Для того, чтобы установить лежат ли все траектории внутри множества M , следует использовать следующий метод. Рассмотрим простую замкнутую кривую, которая определяется уравнением $V(x) = c$, где $V(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда векторное поле $f(x)$ в точке x на кривой направлено внутрь множества, если скалярное произведение $f(x)$ на вектор-градиент $\nabla V(x)$ отрицательно, т.е.

$$f(x)\nabla V(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(x)f_1(x) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x)f_2(x) < 0.$$

Векторное поле $f(x)$ направлено наружу, если $f(x)\nabla V(x) > 0$ и по касательной к кривой, если $f(x)\nabla V(x) = 0$. Траектории могут выйти из множества, только если векторное поле направлено наружу в точке пересечения с границей множества. Таким образом, для множества

¹⁾ Простая замкнутая кривая разделяет плоскость на ограниченную область внутри этой кривой и неограниченную область вне этой кривой (примерами таких кривых могут служить окружности, эллипсы и многоугольники).

²⁾ См. Упражнение 4.33.

$M = \{V(x) \leq c\}$, где c — некоторая положительная константа, траектории лежат внутри M , если $f(x)\nabla V(x) \leq 0$ на границе $V(x) = c$. Для области в виде кольца $M = \{W(x) \geq c_1 \text{ и } V(x) \leq c_2\}$, где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, траектории лежат внутри M , если $f(x)\nabla V(x) \leq 0$ при $V(x) = c_2$ и $f(x)\nabla W(x) \geq 0$ при $W(x) = c_1$.

Следующие два примера иллюстрируют критерий Пуанкаре–Бендиксона, а третий пример представляет собой нетривиальное применение этого критерия к случаю осциллятора с отрицательным сопротивлением, рассмотренного в параграфе 1.2.4.

Пример 2.7. Рассмотрим гармонический осциллятор

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$

и область в виде кольца $M = \{c_1 \leq V(x) \leq c_2\}$, где $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ и $c_2 > c_1 > 0$. Множество M замкнуто, ограничено и не содержит точек равновесия, т.к. единственная точка равновесия находится в начале координат $(0, 0)$. Траектории лежат внутри M , поскольку равенство $f(x)\nabla V(x) = 0$ выполнено при всех x . Следовательно, по критерию Пуанкаре–Бендиксона, в множестве M существует периодическая орбита. \triangle

Предыдущий пример показывает, что критерий Пуанкаре–Бендиксона гарантирует существование периодической орбиты, но не ее единственность. Проведенные выше исследования гармонического осциллятора показывают, что эта система обладает континуумом периодических орбит в M .

Пример 2.8. Система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2),\end{aligned}$$

имеет единственную точку равновесия в начале координат. Матрица Якоби

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 1 - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_1x_2 \\ -2 - 2x_1x_2 & 1 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет собственные значения $1 \pm j\sqrt{2}$. Пусть $M = \{V(x) \leq c\}$, где $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ и $c > 0$. Легко видеть, что M замкнуто, ограничено и содержит только одну точку равновесия, в которой якобиан имеет собственные значения с положительными вещественными частями. На поверхности $V(x) = c$ мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_1}f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}f_2 &= 2x_1[x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-2x_2 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1x_2 \\ &\leq 2(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1^2 + x_2^2)^2 + (x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

$$= 3c - 2c^2.$$

При получении этой оценки мы использовали неравенство $|2x_1x_2| \leqslant x_1^2 + x_2^2$. Выбор $c \geqslant 1.5$ гарантирует то, что все траектории будут лежать в M . Следовательно, по критерию Пуанкаре–Бендиксона, в множестве M существует периодическая орбита. \triangle

Пример 2.9. Модель рассмотренного в параграфе 1.2.4 генератора с отрицательным сопротивлением может быть представлена в виде дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{v} + \varepsilon h'(v)\dot{v} + v = 0,$$

где ε — некоторая положительная константа и h удовлетворяет условиям

$$h(0) = 0, \quad h'(0) < 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} h(v) = \infty, \quad \lim_{v \rightarrow -\infty} h(v) = -\infty.$$

Для того, чтобы упростить анализ этой системы, наложим дополнительные требования:

$$h(v) = -h(-v), \quad h(v) < 0 \text{ при } 0 < v < a \text{ и } h(v) > 0 \text{ при } v > a.$$

Эти требования выполнены для функции, изображенной на рис. 1.6(b), а также для функции $h(v) = -v + (1/3)v^3$, используемой в осцилляторе Ван дер Поля.

Выберем переменные состояния:

$$x_1 = v \text{ и } x_2 = \dot{v} + \varepsilon h(v).$$

Тогда модель состояния будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \varepsilon h(x_1), \\ \dot{x}_2 &= -x_1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Эта система имеет единственную точку равновесия в начале координат. Покажем, что каждое неравновесное решение представляет собой траекторию, которая закручивается вокруг точки равновесия по часовой стрелке. Для этой цели, разделим пространство состояния на четыре области, которые определяются пересечением двух кривых (см. рис. 2.23):

$$x_2 - \varepsilon h(x_1) = 0 \text{ и } x_1 = 0.$$

На рисунке показаны также направления векторного поля $f(x)$ для системы (2.8) в полученных четырех областях и на границах между ними. Легко заметить, что решение, начинающееся в точке $A = (0, p)$, принадлежащей верхней половине x_2 -оси, представляет собой орбиту, отрезок которой показан на рис. 2.24. Положение точки E , в которой отрезок орбиты пересекает нижнюю половину x_2 -оси, зависит от начальной точки A . Обозначим точку E через $(0, -\alpha(p))$. Покажем, что если значение p выбрать достаточно большим, то $\alpha(p) < p$. Рассмотрим функцию

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

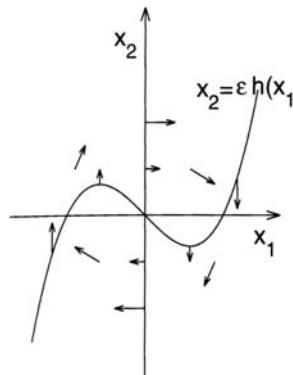


Рис. 2.23. Диаграмма векторного поля из примера 2.9.

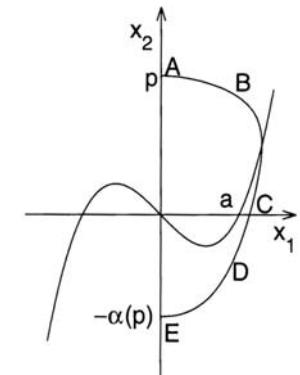


Рис. 2.24. Орбита $ABCDE$ из примера 2.9.

Для выполнения неравенства $\alpha(p) < p$ необходимо обеспечить выполнение неравенства $V(E) - V(A) < 0$, т.к.

$$V(E) - V(A) = \frac{1}{2}[\alpha^2(p) - p^2] \stackrel{\text{def}}{=} \delta(p).$$

Производная $V(x)$ определяется равенством

$$\dot{V}(x) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 x_2 - \varepsilon x_1 h(x_1) - x_1 x_2 = -\varepsilon x_1 h(x_1).$$

Таким образом, \dot{V} положительна при $x_1 < a$ и отрицательна при $x_1 > a$. Далее,

$$\delta(p) = V(E) - V(A) = \int_{AE} \dot{V}(x(t)) dt,$$

где интеграл берется по кривой AE . Если p мало, то вся кривая AE лежит внутри полосы $0 < x_1 < a$ и, следовательно, $\delta(p)$ будет положительно. При увеличении p часть кривой окажется вне полосы: сегмент BCD на рис. 2.24. В этом случае, вычислять интеграл следует с учетом того, что часть кривой лежит вне полосы $0 < x_1 < a$, т.е.

$$\delta(p) = \delta_1(p) + \delta_2(p) + \delta_3(p),$$

где

$$\delta_1(p) = \int_{AB} \dot{V}(x(t)) dt, \quad \delta_2(p) = \int_{BCD} \dot{V}(x(t)) dt, \quad \delta_3(p) = \int_{DE} \dot{V}(x(t)) dt.$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\delta_1(p) = - \int_{AB} \varepsilon x_1 h(x_1) dt = - \int_{AB} \varepsilon x_1 h(x_1) \frac{dt}{dx_1} dx_1.$$

Подставляя dx_1/dt из (2.8), получаем

$$\delta_1(p) = - \int_{AB} \varepsilon x_1 h(x_1) \frac{1}{x_2 - \varepsilon h(x_1)} dx_1,$$

где x_2 представляет собой известную функцию от x_1 вдоль кривой AB . Очевидно, что $\delta_1(p)$ положительно. Заметим, что при увеличении p значение $x_2 - \varepsilon h(x_1)$ также увеличивается вдоль кривой AB . Следовательно, $\delta_1(p)$ уменьшается при $p \rightarrow \infty$. Аналогично можно показать, что третий интеграл $\delta_3(t)$ положителен и убывает при $p \rightarrow \infty$. Рассмотрим теперь второй интеграл:

$$\delta_2(p) = - \int_{BCD} \varepsilon x_1 h(x_1) dt = - \int_{BCD} \varepsilon x_1 h(x_1) \frac{dt}{dx_2} dx_2.$$

Подставляя dx_2/dt из (2.8), мы получаем

$$\delta_2(p) = \int_{BCD} \varepsilon h(x_1) dx_2,$$

где x_1 представляет собой известную функцию от x_2 вдоль кривой BCB . Интеграл в правой части этого равенства отрицателен, т.к. $h(x_1) > 0$ и $dx_2 < 0$. При увеличении p область, по которой осуществляется интегрирование, увеличивается и, следовательно, $\delta_2(p)$ уменьшается при увеличении p , т.е. $\lim_{p \rightarrow \infty} \delta_2(p) = -\infty$. Суммируя полученные результаты, мы получаем, что

- $\delta(p) > 0$, если $p < r$ для некоторого $r > 0$;
- $\delta(p)$ монотонно уменьшается до $-\infty$ при $p \rightarrow \infty$, $p \geq r$.

График функции $\delta(p)$ изображен на рис. 2.25. Очевидно, что выбирая p достаточно большим, мы можем обеспечить отрицательность $\delta(p)$; следовательно, $\alpha(p) < p$.

Заметим, что благодаря симметрии, обусловленной нечетностью функции $h()$, мы можем заключить, что если $(x_1(t), x_2(t))$ является решением (2.8), то $(-x_1(t), -x_2(t))$ также является решением этого уравнения. Следовательно, если траектория $ABCDE$ существует, то траектория, являющаяся образом при отображении центральной симметрии относительно начала координат, также является решением. Рассмотрим $A = (0, p)$ и $E = (0, -\alpha(p))$, $\alpha(p) < p$. Сформируем замкнутую кривую, которая составлена из траектории $ABCDE$, ее центрально симметричного образа и отрезков на x_2 -оси, замыкающих эти две кривые (см. рис. 2.26). Пусть M — область, замкнутая этой кривой. Каждая траектория, начинающаяся в M при $t = 0$, будет лежать внутри этой области для всех $t \geq 0$. Это обусловлено направлением векторных полей на x_2 -оси, а также тем, что траектории не пересекаются друг с другом вследствие единственности решений дифференциального уравнения. Таким образом, мы имеем замкнутое, ограниченное множество,

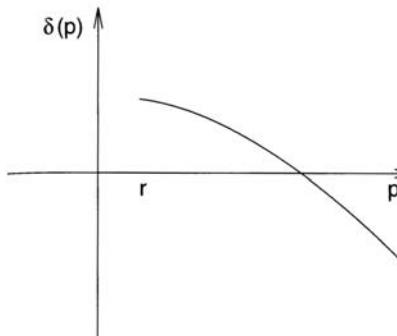


Рис. 2.25. График функции $\delta(p)$ из примера 2.9.

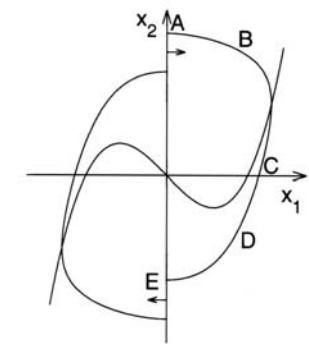


Рис. 2.26. Замкнутая кривая из примера 2.9.

которое содержит точку равновесия в начале координат. Матрица Якоби, вычисленная в начале координат, имеет следующий вид:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon h'(0) \end{bmatrix}.$$

Ее собственные значения имеют положительные вещественные части, т.к. $h'(0) < 0$. Следовательно, по критерию Пуанкаре–Бендиксона, в множестве M существует периодическая орбита.

Используя аналогичный подход, мы можем показать, что эта замкнутая орбита является единственной. Заметим, что следствием установленного выше свойства симметрии является то, что система может иметь замкнутую орбиту только и только если $\alpha(p) = p$. Из рис. 2.25 видно, что имеется только одно значение p , для которого это условие выполнено. Следовательно, существует только одна замкнутая орбита. Далее, можно показать, что каждое неравновесное решение сходится по спирали к единственной замкнутой орбите. Для того, чтобы аргументировать это утверждение, предположим, что $p_0 > 0$ — это то самое значение, при котором выполнено $\alpha(p) = p$. Рассмотрим точку $(0, p)$, $p > p_0$ на x_2 -оси. Как было отмечено выше, проходящая через точку $(0, p)$ траектория пересекает нижнюю половину x_2 -оси в точке $(0, -\alpha(p))$, $\alpha(p) < p$. Вследствие симметрии, проходящая через точку $(0, -\alpha(p))$ траектория пересечет верхнюю половину x_2 -оси в точке $(0, \sigma(p))$, $p_0 \leq \sigma(p) < p$. Верхняя граница этого ограничения обусловлена свойством симметрии, а нижняя — тем, что если $\sigma(p) < p_0$, то траектория должна пересечь замкнутую орбиту. Отображение $p \rightarrow \sigma(p)$ непрерывно вследствие непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения от начальных значений.¹⁾ Таким образом, начинающаяся в точке $(0, \sigma(p))$ траектория вернется на верхнюю

¹⁾ См. теорему 3.4.

половину x_2 -оси и пересечет ее в точке $(0, \sigma^2(p))$, $p_0 \leq \sigma^2(p) < \sigma(p)$. По индукции мы можем получить последовательность $\sigma^n(p)$, элементы которой удовлетворяют следующим неравенствам:

$$p_0 \leq \sigma^{n+1}(p) < \sigma^n(p), \quad n = 1, 2, \dots$$

Последовательность $\sigma^n(p)$ имеет предел $p_1 \geq p_0$. Заметим, что вследствие непрерывности $\sigma()$, предел p_1 удовлетворяет равенству

$$\sigma(p_1) - p_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\sigma^n(p)) - p_1 = p_1 - p_1 = 0.$$

Из единственности замкнутой орбиты следует, что $p_1 = p_0$, т.е. траектория, соответствующая значению p , сходится по спирали к единственной замкнутой орбите при $t \rightarrow \infty$. Аналогичное утверждение можно получить и для случая $p < p_0$. \triangle

Следующий результат, известный как *критерий Бендиексона*, может использоваться в некоторых случаях для установления существования периодических орбит.

Лемма 2.2 (Критерий Бендиексона). *Если выражение $\partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2$ не равно тождественно нулю и не изменяет знак на односвязной области¹⁾ D на плоскости, то система (2.7) не имеет периодических орбит, полностью лежащих в D .*

Доказательство: Для любой орбиты (2.7) мы имеем $dx_2/dx_1 = f_2/f_1$. Следовательно, для каждой замкнутой орбиты γ справедливо равенство

$$\int_{\gamma} f_2(x_1, x_2) dx_1 - f_1(x_1, x_2) dx_2 = 0.$$

Тогда, используя теорему Грина, мы получаем

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = 0,$$

где S — внутренность γ . Если $\partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2 > 0$ (или < 0) на D , то невозможно найти такую область $S \subset D$, что выполнено предыдущее равенство. Следовательно, не существует замкнутых орбит, целиком принадлежащих D . \square

Пример 2.10. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 - x_1^2 x_2 - x_1^3 \end{aligned}$$

¹⁾ Область D называется односвязной (simply connected), если для каждой простой замкнутой кривой C на D ее внутренность является подмножеством D . Внутренность любой окружности односвязна, но кольцеобразная область $0 < c_1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq c_2$ не является односвязной. Выражаясь неформально, односвязность означает отсутствие «дыр».

и пусть D — вся плоскость. Тогда мы имеем

$$\partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2 = b - x_1^2.$$

Следовательно, при $b < 0$ не существует периодических орбит. \triangle

В заключение этого параграфа мы сформулируем важный результат, который связывает существование периодических орбит с точками равновесия. В этом результате используется индекс (число вращения), введенный Пуанкаре. Рассмотрим систему второго порядка (2.7) и пусть C — простая замкнутая кривая, не проходящая через точку равновесия системы (2.7). Рассмотрим ориентацию векторного поля $f(x)$ в точке $p \in C$. При движении точки p вдоль кривой C против часовой стрелки вектор $f(x)$ вращается непрерывно и после возвращения в свое начальное положение должен совершить оборот на угол $2\pi k$, где k — некоторое целое число (угол измеряется против часовой стрелки). Целое число k называется *индексом* замкнутой кривой C . Если замкнутая кривая окружает одну изолированную точку равновесия \bar{x} , то k называется индексом точки \bar{x} . Читателю может доказать в качестве упражнения (см. Упражнение 2.25) следующую лемму.

Лемма 2.3.

- (a) Индекс узла, фокуса или центра равен +1.
- (b) Индекс (гиперболической) седловой точки равен -1.
- (c) Индекс замкнутой орбиты равен +1.
- (d) Индекс замкнутой кривой, которая не окружает ни одной точки равновесия, равен +1.
- (e) Индекс замкнутой кривой равен сумме индексов точек равновесия, которые окружены этой кривой.

Следствием этой леммы является

Следствие 2.1. *Внутри любой периодической орбиты γ должна находиться по крайней мере одна точка равновесия. Предположим, что точки равновесия внутри орбиты являются гиперболическими. Тогда если N — число узлов и фокусов и S — число седловых точек, то $N - S = 1$.*

Напомним, что точка равновесия является гиперболической если якобиан в этой точке не имеет чисто мнимых собственных значений. Если точка равновесия не является гиперболической, то ее индекс может отличаться от ± 1 . (См. Упражнение 2.26.)

Метод индексов обычно является полезным при установлении существования периодических орбит в определенных областях на плоскости.

Пример 2.11. Система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 \end{aligned}$$

имеет две точки равновесия в $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Матрицы Якоби в этих точках имеют вид

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $(0, 0)$ — седловая точка и $(1, 1)$ — устойчивый фокус. Единственная комбинация точек равновесия, которые могут быть окружены периодической орбитой — одиночный фокус. Другие варианты периодических орбит, например периодическая орбита, окружающая обе точки равновесия, исключены. \triangle

2.7. Бифуркации

Качественное поведение систем второго порядка определяется типом ее точек равновесия и периодическими орбитами, а также другими ее свойствами устойчивости. Одним из важных практических вопросов заключается в сохранении системой своих характеристик качественного поведения при бесконечно малых возмущениях. Если система сохраняет эти свои свойства, то она называется структурно устойчивой. В этом параграфе мы займемся проблемой структурной устойчивости. В частности, мы будем рассматривать возмущения, которые будут изменять точки равновесия системы или ее периодические орбиты и другие характеристики устойчивого поведения. Рассмотрим, например, систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu - x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2,\end{aligned}$$

которая зависит от параметра μ . При $\mu > 0$ система имеет две точки равновесия $(\sqrt{\mu}, 0)$ и $(-\sqrt{\mu}, 0)$. Матрица Якоби линеаризованной системы в точке $(\sqrt{\mu}, 0)$ имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

т.е. $(\sqrt{\mu}, 0)$ — устойчивый узел. Аналогично, матрица Якоби линеаризованной системы в точке $(-\sqrt{\mu}, 0)$ имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

т.е. $(-\sqrt{\mu}, 0)$ — седловая точка. При уменьшении μ седловая точка и узел приближаются друг к другу, сталкиваются друг с другом при $\mu = 0$ и исчезают при $\mu < 0$. При прохождении μ через нулевое значение мы можем наблюдать существенное изменение фазового портрета системы. На рис. 2.27 показаны фазовые портреты при положительном, нулевом и отрицательном значениях μ . При положительном и сколь

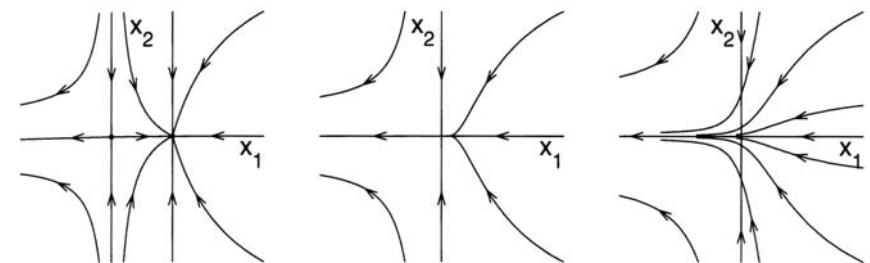


Рис. 2.27. Фазовый портрет системы из примера с бифуркацией «седло–узел» при $\mu > 0$ (слева), $\mu = 0$ (в центре), $\mu < 0$ (справа).

угодно малом значении μ все траектории в области $\{x_1 > -\sqrt{\mu}\}$ достигают устойчивого состояния в седловой точке, при отрицательном μ все траектории стремятся к бесконечности. Такое изменение качественного поведения называется *бифуркацией*. Более строго, *бифуркацией называется изменение точек равновесия или периодических орбит, или изменение свойств устойчивости при изменении параметра*. Этот параметр называется *параметром бифуркации*, а значения параметра, при которых происходят эти изменения, — *точками бифуркации*. В предыдущем примере параметром бифуркации является μ , а точкой бифуркации — $\mu = 0$.

Бифуркация, которую мы наблюдали в предыдущем примере, может быть изображена в виде *бифуркационной диаграммы*, которая показана на рис. 2.28(а). На диаграмме показана мера амплитуды (или норма) точек равновесия по отношению к параметру бифуркации. Устойчивый узел представлен сплошной линией, а седловая точка — пунктирной. Ординатой бифуркационной диаграммы является мера амплитуды точек равновесия или периодических орбит; сплошные линии представляют устойчивые узлы, устойчивые фокусы и устойчивые предельные циклы, а пунктирные линии — неустойчивые узлы, неустойчивые фокусы и неустойчивые предельные циклы. Бифуркация, изображенная на рис. 2.28(а), называется *бифуркацией «седло–узел»*, поскольку она возникает при столкновении седловой точки и узла. Заметим, что матрица Якоби имеет нулевое собственное значение в точке бифуркации. Эта особенность свойственна всем бифуркациям, изображенным на рис. 2.28(а)–(д), которые являются примерами *бифуркаций с нулевым собственным значением*. На рис. 2.28(б) показана *транскритическая бифуркация*, которая характеризуется тем, что при ее прохождении точки равновесия остаются неизменными, но их свойства устойчивости изменяются. Например, рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu x_1 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2.\end{aligned}$$

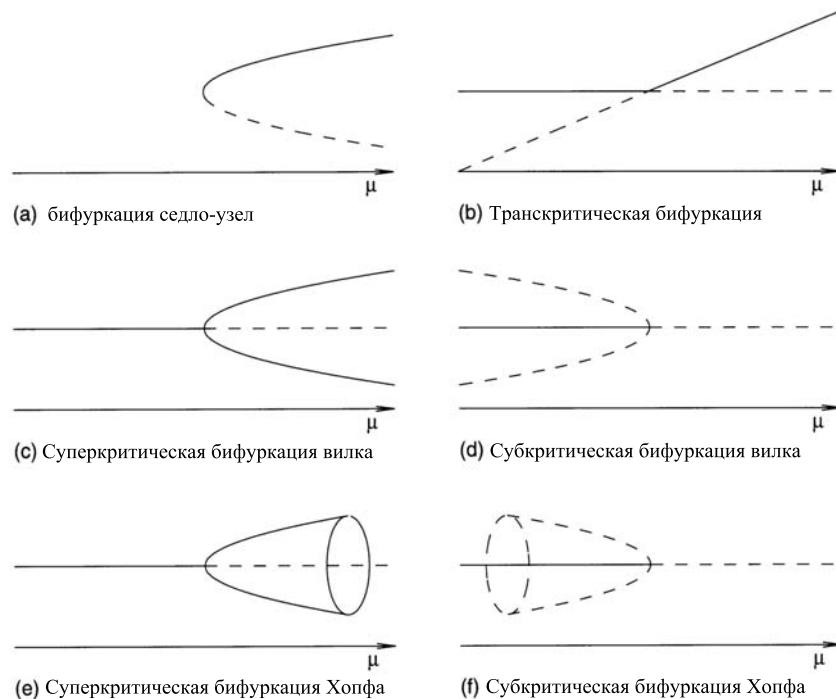


Рис. 2.28. Бифуркационные диаграммы

Эта система имеет две точки равновесия $(0, 0)$ и $(\mu, 0)$. Матрица Якоби в $(0, 0)$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

т.е. точка $(0, 0)$ является устойчивым узлом при $\mu < 0$ и седловой точкой при $\mu > 0$. С другой стороны, матрица Якоби в $(\mu, 0)$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

т.е. точка $(\mu, 0)$ является седловой точкой при $\mu < 0$ и устойчивым узлом при $\mu > 0$. Таким образом, точки равновесия сохраняются при прохождении через точку бифуркации $\mu = 0$, но $(0, 0)$ изменяется из устойчивого узла в седловую точку, а $(\mu, 0)$ — из седловой точки в устойчивый узел.

Прежде чем перейти к описанию других типов бифуркаций, диаграммы которых изображены на рис. 2.28, отметим важное различие между предыдущими двумя примерами. Во втором примере прохождение через точку бифуркации приводит к тому, что точка равновесия в начале координат изменяется из устойчивого узла в седловую точку,

одновременно возникает устойчивый узел в $(\mu, 0)$, который при малом μ будет близок к началу координат. Это означает, что воздействие бифуркации на систему не столь драматично. Предположим, например, что значение параметра μ в исходной системе отрицательно, т.е. начало координат представляет собой устойчивый узел. Из фазового портрета такой системы видно, что все траектории в множестве $\{x_1 > \mu\}$ сходятся к началу координат при стремлении времени к бесконечности. Предположим, что исходное значение μ настолько мало, что малые возмущения этого параметра могут привести к тому, что он станет положительным. Тогда начало координат станет седловой точкой, а $(\mu, 0)$ — устойчивым узлом. Тогда из фазового портрета системы видно, что все траектории в множестве $\{x_1 > 0\}$ сходятся к устойчивому узлу $(\mu, 0)$ при стремлении времени к бесконечности. При малых значениях μ устойчивая рабочая точка системы будет близка к началу координат. Таким образом, хотя возмущенная система и не имеет желаемого устойчивого поведения, она, тем не менее, близка к нему. В примере бифуркации «седло-узел» ситуация совершенно иная. Предположим, что значение параметра μ в исходной системе положительно, т.е. все траектории в множестве $\{x_1 > -\sqrt{\mu}\}$ сходятся к устойчивому узлу $(\sqrt{\mu}, 0)$ при стремлении времени к бесконечности. Если исходное значение μ мало и малые возмущения этого параметра приводят к тому, что он становится отрицательным, то устойчивый узел исчезает и траектории должны будут отклоняться от желаемой устойчивой рабочей точки или даже стремится к бесконечности, как в этом конкретном примере. Вследствие указанных различий в воздействии на устойчивое поведение, бифуркация в примере с транскритической бифуркацией называется *безопасной* или *мягкой*, а бифуркация в примере с бифуркацией «седло-узел» — *опасной* или *жесткой*.

Безопасные и опасные бифуркаций можно видеть и на диаграммах, изображенных на рис. 2.28(с) и (д), на которых показаны *суперкритическая бифуркация «вилка»* и *субкритическая бифуркация «вилка»*, соответственно. Бифуркация первого типа возникает, например, в следующей системе:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_2. \end{aligned}$$

При $\mu < 0$ имеется единственная точка равновесия в начале координат. Вычислив матрицу Якоби, можно показать, что эта точка является седловой. При $\mu > 0$ существует три точки равновесия $(0, 0)$, $(\sqrt{\mu}, 0)$ и $(-\sqrt{\mu}, 0)$. Первая из них является седловой точкой, а оставшиеся две — устойчивыми узлами. При прохождении μ через точку бифуркации $\mu = 0$ устойчивый узел в начале координат превращается в седловую точку и одновременно возникают еще два устойчивых узла в $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$. Амплитуда возникших устойчивых узлов возрастает при увеличении μ

и, следовательно, она мала при малом μ . Субкритическая бифуркация «вилка» возникает, например, в следующей системе:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu x_1 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_2.\end{aligned}$$

При $\mu < 0$ существует три точки равновесия: устойчивый узел в $(0, 0)$ и две седловых точки $(\pm\sqrt{-\mu}, 0)$. При $\mu > 0$ имеется единственная точка равновесия в начале координат и она является седловой точкой. При прохождении μ через точку бифуркации $\mu = 0$ устойчивый узел в начале координат сталкивается с седловыми точками $(\pm\sqrt{-\mu}, 0)$ и превращается в седловую точку. Сравнивая суперкритическую и субкритическую бифуркации можно заметить, что суперкритическая является безопасной, а субкритическая — опасной. В частности, если система имеет номинальную рабочую точку в устойчивом узле $(0, 0)$ при $\mu < 0$, то при суперкритической бифуркации «вилки» обеспечивается устойчивое поведение при малом положительном возмущении параметра μ , а после субкритической бифуркации «вилки» траектории начинают отклоняться от номинальной рабочей точки.

В рассмотренных простых примерах бифуркаций с нулевыми собственными значениями траектории стремились к бесконечности в опасных случаях. В более сложных примерах система может иметь другие точки равновесия или периодические орбиты, которые не изменяются при рассматриваемых бифуркациях. Траектории, отклоняющиеся от подвергающейся бифуркации точки равновесия, могут не уходить на бесконечность, но притягиваться другой точкой равновесия или периодической орбитой. Такая ситуация может быть проиллюстрирована следующим примером.

Пример 2.12. Рассмотрим цепь с туннельным диодом из параграфа 1.2.2:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2], \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + \mu].\end{aligned}$$

Вольт-амперная характеристика диода $h()$ изображена на рис. 1.2 и μ представляет собой постоянный вход системы. Исследуем бифуркации при изменении μ . Точки равновесия системы представляют собой пересечения кривой $x_2 = h(x_1)$ с нагрузочной прямой $x_2 = (\mu - x_1)/R$. В примерах 2.1 и 2.3 (см. также рис. 2.29(а)) мы показали, что при $\mu < A$ имеется устойчивый узел на левой ветке; при $A < \mu < B$ имеется три точки равновесия — седловая точка на средней ветке и два устойчивых узла на двух других ветках; при $\mu > B$ имеется устойчивый узел на правой ветке. Бифуркационная диаграмма изображена на рис. 2.29(б). Имеется две бифуркации «седло-узел» при $\mu = A$ и $\mu = B$. Заметим, что при исчезновении устойчивого узла после столкновения с седловой

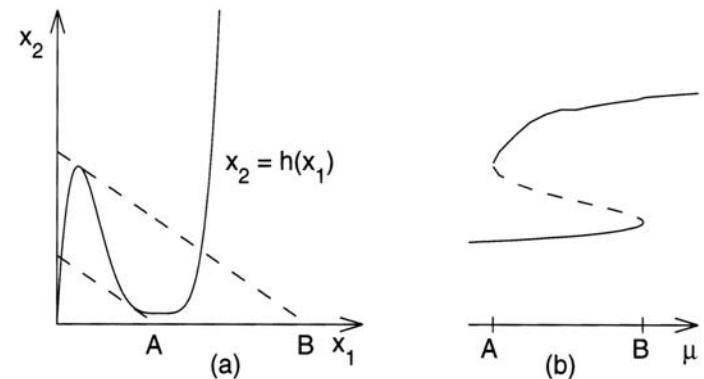


Рис. 2.29. К примеру 2.12: (а) нахождение точек равновесия; (б) диаграмма бифуркации.

точкой уходящие на бесконечность траектории начинают притягиваться другим устойчивым узлом, который не изменился при бифуркации. \triangle

Когда устойчивый узел теряет устойчивость после прохождения точки бифуркации, собственное значение якобиана проходит через нулевое значение. Теряет ли устойчивость в подобной ситуации устойчивый фокус? В этом случае два комплексно сопряженных собственных числа должны пройти через мнимую ось. На рисунках 2.28(е) и (f) показаны эти ситуации: на первом рисунке изображена *суперкритическая бифуркация Хопфа*, а на втором — *субкритическая бифуркация Хопфа*.

¹⁾ Суперкритическая бифуркация Хопфа возникает, например, в системе

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_1,\end{aligned}$$

которая может быть представлена в полярных координатах

$$x_1 = r \cos \theta \quad \text{и} \quad x_2 = r \sin \theta$$

в следующем виде:

$$\dot{r} = \mu r - r^3 \quad \text{и} \quad \dot{\theta} = 1.$$

Система имеет единственную точку равновесия в начале координат. Фазовые портреты для двух случаев, соответствующих μ с различными знаками, показаны на рис. 2.30. При $\mu < 0$ начало координат является устойчивым фокусом и все траектории притягиваются к нему, а при $\mu > 0$ начало координат является неустойчивым фокусом, но имеется устойчивый предельный цикл, который притягивает все траектории за

¹⁾ Используются также термины «бифуркация Андронова–Хопфа» и «бифуркация Пуанкаре–Андронова–Хопфа» чтобы подчеркнуть наличие более ранних работ Андронова и Пуанкаре.

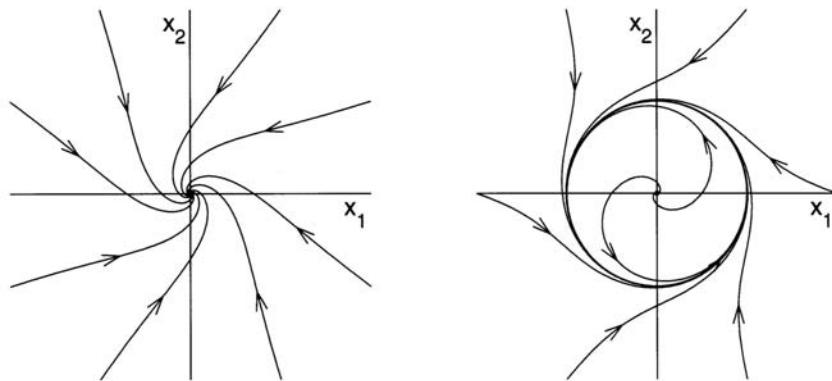


Рис. 2.30. Фазовый портрет суперкритической бифуркации Хопфа при $\mu < 0$ (слева) и $\mu > 0$ (справа).

исключением нулевого решения. Предельный цикл задается уравнением $r = \sqrt{\mu}$, т.е амплитуда колебаний возрастает с увеличением μ и мала при малом μ . Рассматриваемая бифуркация является безопасной, т.к. при исчезновении устойчивого фокуса вследствие малого возмущения система будет порождать устойчивое колебание с малой амплитудой. Для того, чтобы изучить поведение собственных значений при бифуркации заметим, что якобиан в начале координат

$$\begin{bmatrix} \mu - 1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

имеет собственный значения $\mu \pm j$, которые пересекают мнимую ось слева направо при увеличении μ из области отрицательных значений в область положительных значений.

Субкритическая бифуркация Хопфа возникает в системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1[\mu + (x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2] - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2[\mu + (x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2] + x_1, \end{aligned}$$

которая в полярных координатах имеет следующий вид:

$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5 \quad \text{и} \quad \dot{\theta} = 1.$$

Эта система имеет единственную точку равновесия в начале координат, которая является устойчивым фокусом при $\mu < 0$ и неустойчивым фокусом при $\mu > 0$. Предельный цикл системы может быть определен из следующего уравнения:

$$0 = \mu + r^2 - r^4.$$

При $\mu < 0$ имеется два предельных цикла, определяемых равенствами $r^2 = (1 \pm \sqrt{1+4\mu})/2$. Из графика функции $\dot{r}(r) = r(\mu + r^2 - r^4)$ (см. рис. 2.31) можно видеть, что предельный цикл $r^2 = (1 + \sqrt{1+4\mu})/2$

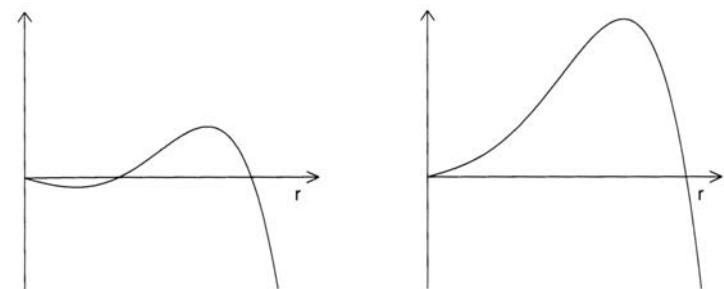


Рис. 2.31. График $r\mu + r^3 - r^5$ при $\mu < 0$ (слева) и $\mu > 0$ (справа).

является устойчивым, а $r^2 = (1 - \sqrt{1+4\mu})/2$ — неустойчивым. При малом $|\mu|$ неустойчивый предельный цикл может быть аппроксимирован уравнением $r^2 = -\mu$. При $\mu > 0$ имеется только один устойчивый предельный цикл $r^2 = (1 + \sqrt{1+4\mu})/2$. Таким образом, при увеличении μ из области отрицательных значений в область положительных значений устойчивый фокус в начале координат сливаются с неустойчивым предельным циклом и превращается в неустойчивый фокус (см. бифуркационную диаграмму 2.28(f)). Заметим, что устойчивый предельный цикл не показан на бифуркационной диаграмме, т.к. изменение μ приводит лишь к изменению его амплитуды. Субкритическая бифуркация Хопфа является опасной, т.к. малое возмущение номинального устойчивого фокуса в начале координат может привести к тому, что траектории начнут отклоняться от начала координат и притягиваться к устойчивому предельному циклу.

Все показанные на рис. 2.28 бифуркации происходили в окрестности точки равновесия. Поэтому они называются *локальными*. Существуют также *глобальные бифуркации*, которые происходят на больших областях пространства состояния и не могут быть описаны в окрестности какой-либо точки равновесия. Мы рассмотрим лишь один пример глобальной бифуркации.¹⁾ Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \mu x_2 + x_1 - x_1^2 + x_1 x_2. \end{aligned}$$

Имеются две точки равновесия в $(0, 0)$ и $(1, 0)$. С использованием линеаризации системы мы можем установить, что $(0, 0)$ всегда является седловой точкой, а $(1, 0)$ — неустойчивым фокусом при $-1 < \mu < 1$. Ограничимся рассмотрением системы при $-1 < \mu < 1$. На рис. 2.32 показан фазовый портрет для четырех различных значений μ . Фазовые портреты при $\mu = -0.95$ и -0.88 типичны для случая $\mu < \mu_c \approx -0.8645$, а при $\mu = -0.8$ — типичны для случая $\mu > \mu_c$. При $\mu <$

¹⁾ Другие примеры могут быть найдены в [187].

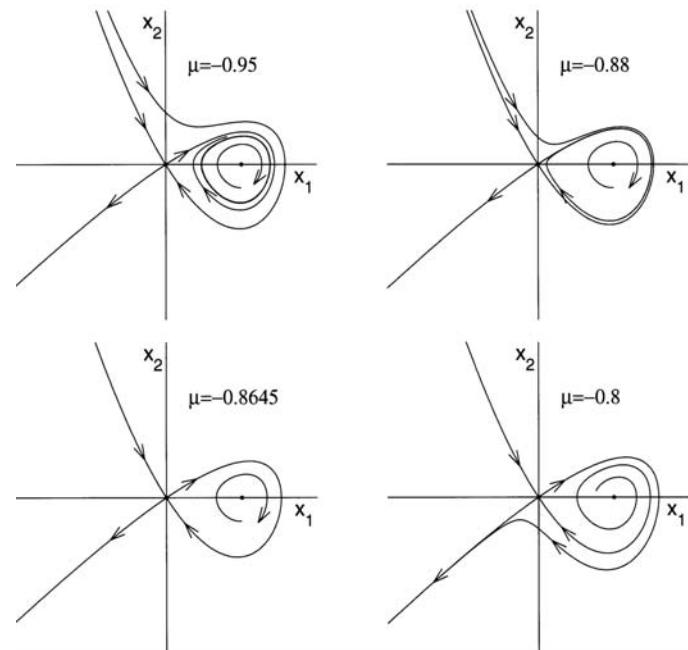


Рис. 2.32. Гомоклинические бифуркации.

$\mu < \mu_c$ имеется устойчивый предельный цикл, который окружает неустойчивый фокус. При приближении значения μ к μ_c предельный цикл расширяется до тех пор, пока не коснется седловой точки при $\mu = \mu_c$. При этом возникает траектория, которая начинается и заканчивается в седловой точке. Такая траектория называется *гомоклинической орбитой*. При $\mu > \mu_c$ предельный цикл исчезает. Заметим, что эта бифуркация не приводит к изменениям точек равновесия $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Такой тип бифуркации называется *гомоклинической бифуркацией* (saddle-connection, homoclinic bifurcation).

2.8. Упражнения

2.1 Для каждой из нижеследующих систем найти все точки равновесия и определить тип каждого изолированного состояния равновесия:

- (1) $\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2;$
- (2) $\dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3;$
- (3) $\dot{x}_1 = [1 - x_1 - 2h(x)]x_1, \quad \dot{x}_2 = [2 - h(x)]x_2;$
- (4) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4);$
- (5) $\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2);$
- (6) $\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3.$

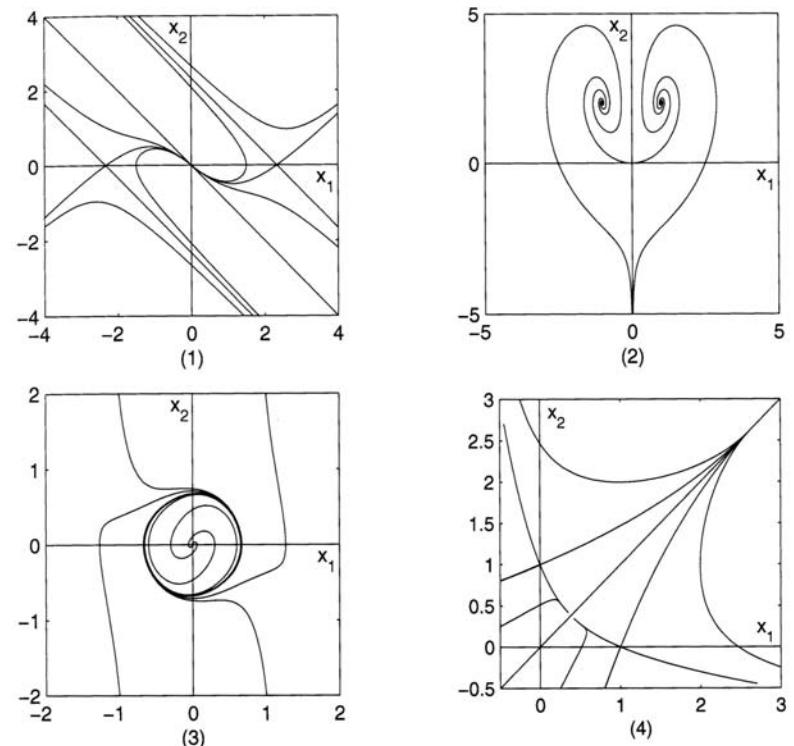


Рис. 2.33. Фазовые портреты систем из упражнения 2.4.

В четвертой системе $h(x) = x_2/(1 + x_1)$.

2.2 Для каждой из нижеследующих систем найти все точки равновесия и определить тип каждого изолированного состояния равновесия:

- (1) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{16}x_1^5 - x_2;$
- (2) $\dot{x}_1 = 2x_1 - x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1^2 - x_2;$
- (3) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - \psi(x_1 - x_2).$

В третьей системе $\psi(y) = y^3 + 0.5y$, если $|y| \leq 1$ и $\psi(y) = 2y - 0.5\text{sign}(y)$, если $|y| > 1$.

2.3 Для каждой системы из упражнения 2.1 построить фазовый портрет и обсудить качественное поведение системы.

2.4 Фазовые портреты нижеследующих систем изображены на рис. 2.33.

- (1) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + 2 \arctg(x_1 + x_2);$
- (2) $\dot{x}_1 = 2x_1 - x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1^2 - x_2;$
- (3) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2);$
- (4) $\dot{x}_1 = -(x_1 - x_2^2) + h(x), \quad \dot{x}_2 = -(x_2 - x_2^2) + h(x).$

В четвертой системе $h(x) = 1 - x_1 - x_2$. Укажите стрелками направления движения вдоль траекторий и обсудите качественное поведение систем.

2.5 Система

$$\dot{x}_1 = -x_1 - \frac{x_2}{\ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + \frac{x_1}{\ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

имеет точку равновесия в начале координат.

- (a) Линеаризовать систему в окрестности начала координат и показать, что начало координат является устойчивым узлом линейной системы.
- (b) Построить фазовый портрет нелинейной системы вблизи начала координат и показать, что этот портрет имеет сходство с фазовым портретом устойчивого фокуса. (Указание: Представьте уравнения системы в полярных координатах.)
- (c) Объясните различие результатов (a) и (b).

2.6 Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + ax_2 - bx_1x_2 + x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= -(a+b)x_1 + bx_1^2 - x_1x_2,\end{aligned}$$

где $a > 0$ и $b \neq 0$.

- (a) Найти все точки равновесия системы.
- (b) Определить тип каждой изолированной точки равновесия для всех значений $a > 0$ и $b \neq 0$.
- (c) Для каждого из нижеследующих случаев построить фазовый портрет и обсудить качественное поведение системы:
 - i. $a = b = 1$;
 - ii. $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$;
 - iii. $a = 1$, $b = -2$.

2.7 Рассмотрим генератор с отрицательным сопротивлением из параграфа 1.2.4 при

$$h(v) = -v + v^3 - \frac{1}{5}v^5 + \frac{1}{105}v^7$$

и $\varepsilon = 1$. Построить фазовый портрет в x -координатах и обсудить качественное поведение системы.

2.8 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{16}x_1^5 - x_2.$$

- (a) Найти точки равновесия и определить тип каждой изолированной точки равновесия.
- (b) Без использования компьютерного моделирования нарисовать фазовый портрет системы.

2.9 В задаче управления скоростью движения автомобиля по плоскому шоссе (круиз-контроль, cruise-control) динамика продольной скорости может быть промоделирована с использованием второго закона Ньютона дифференциальным уравнением первого порядка

$$m\dot{v} = u - K_c \operatorname{sign}(v) - K_f v - K_a v^2,$$

где m — масса автомобиля, v — его скорость, u — тяговое усилие двигателя, $K_c \operatorname{sign}(v)$ — сила сухого трения, $K_f v$ — сила вязкого трения и $K_a v^2$ — аэродинамическое сопротивление воздуха. Коэффициенты K_c , K_f и K_a неотрицательны. Используется пропорционально-интегральное управление $u = K_I \sigma + K_P(v_d - v)$, где v_d — желаемая скорость движения, σ — переменная состояния интегратора $\dot{\sigma} = v_d - v$ и K_I , K_P — положительные константы. Далее будет рассматриваться случай $v \geq 0$.

- (a) Используя $x_1 = \sigma$ и $x_2 = v$ в качестве переменных состояния построить модель состояния системы.
- (b) Пусть v_d — положительная константа. Найти точки равновесия и определить тип каждой изолированной точки равновесия.
- (c) Построить фазовый портрет системы и обсудить качественное поведение системы при $m = 1500$ кг, $K_c = 110$ Н, $K_f = 2.5$ Н/м/с, $K_a = 1$ Н/м²/с², $K_I = 15$, $K_P = 500$ и $v_d = 30$ м/с.
- (d) Выполнить задание (c) при $K_I = 150$ и сравнить с предыдущим результатом.
- (e) Выполнить задание (c) с введением насыщения в канале управления, т.е. ограничить значения u : $0 \leq u \leq 1800$ Н. Сравнить с результатом задания (c).

2.10 Рассмотрим цепь с туннельным диодом из параграфа 1.2.2 при численных значениях, указанных в примере 2.1 за исключением R и E , которые в этом упражнении должны быть следующими: $E = 0.2$ В и $R = 0.2$ кОм.

- (a) Найти точки равновесия и определить тип каждой изолированной точки равновесия.
- (b) Построить фазовый портрет системы и обсудить качественное поведение системы.

2.11 Решить предыдущее упражнение при $E = 0.4$ В и $R = 0.2$ кОм.

2.12 Рассмотрим модель нейронной сети Хопфилда из параграфа 1.2.5 при $n = 2$, $V_M = 1$ и $T_{21} = T_{12} = 1$. При $i = 1, 2$ положить $I_i = 0$, $C_i = 1$, $\rho_i = 1$, $T_{ii} = 0$ и $g_i(u) = (2/\pi) \operatorname{arctg}(\lambda \pi u / 2)$.

- (a) Найти точки равновесия и определить тип каждой изолированной точки равновесия.
- (b) При $\lambda = 5$ построить фазовый портрет системы и обсудить качественное поведение системы.

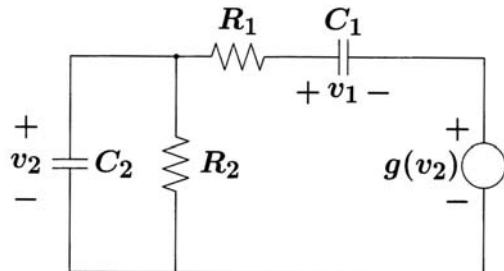


Рис. 2.34. К упражнению 2.13.

2.13 Эквивалентная цепь осциллятора Вена–Бриджа (Wien–Bridge) показана на рис. 2.34 [40], где $g(v_2)$ — нелинейный управляемый источник напряжения.

- (а) Используя $x_1 = v_1$ и $x_2 = v_2$ в качестве переменных состояния показать, что модель состояния определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{C_1 R_1} [-x_1 + x_2 - g(x_2)], \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{C_2 R_1} [-x_1 + x_2 - g(x_2)] - \frac{1}{C_2 R_2} x_2. \end{aligned}$$

- (б) Пусть $C_1 = C_2 = R_1 = R_2 = 1$ и $g(v) = 3.234v - 2.195v^3 + 0.666v^5$. Построить фазовый портрет системы и обсудить качественное поведение системы.

2.14 Рассмотрим систему «груз–пружина» с учетом силы сухого трения

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y, \dot{y}) = 0,$$

где величина η определена в параграфе 1.2.3. Используя метод кусочной линеаризации, построить фазовый портрет системы и обсудить качественное поведение системы.

2.15 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u,$$

где управляющее воздействие u может принимать значения ± 1 .

- (а) Построить фазовый портрет системы при $u = 1$.
 (б) Построить фазовый портрет системы при $u = -1$.
 (с) Сравнивая эти два фазовых портрета, разработать стратегию переключения управления между значениями ± 1 , так чтобы каждая точка пространства состояния могла быть перемещена в начало координат за конечное время.

2.16 Система «хищник–жертва» может быть промоделирована следующей системой [202]:

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - ax_2), \quad \dot{x}_2 = bx_2(x_1 - x_2),$$

где x_1 и x_2 — безразмерные переменные, которые пропорциональны численностям популяций жертв и хищников, соответственно; a и b — положительные константы.

- (а) Найти точки равновесия и определить тип каждой изолированной точки равновесия.
 (б) Построить фазовый портрет системы в первом квадранте ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) при $a = 1$, $b = 0.5$ и обсудить качественное поведение системы.

2.17 Для каждой из нижеследующих систем показать, используя критерий Пуанкаре–Бендиксона, что система имеет периодическую орбиту:

- $$\begin{array}{ll} (1) \dot{y} + y = \varepsilon \dot{y}(1 - y^2 - \dot{y}^2); & \\ (2) \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(2 - 3x_1^2 - 2x_2^2); \\ (3) \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 - 2(x_1 + 2x_2)x_2^2; \\ (4) \dot{x}_1 = x_1 + x_2 - x_1 h(x), \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 - x_2 h(x). & \end{array}$$

В четвертой системе $h(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

2.18 (Консервативная система) Рассмотрим систему второго порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g(x_1),$$

где g — непрерывно дифференцируемая функция и $zg(z) > 0$ при $z \neq 0$, $z \in (-a, a)$. Рассмотрим функцию энергии

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(z)dz.$$

- (а) Показать, что $V(x)$ остается постоянной вдоль решений системы.
 (б) Показать, что для достаточно малого значения $\|x(0)\|$ каждое решение периодично.
 (с) Предположим, что $zg(z) > 0$ при $z \neq 0$, $z \in (-\infty, \infty)$ и

$$\int_0^y g(z)dz \rightarrow \infty \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

Показать, что каждое решение является периодическим.

- (д) Предположим, что $g(z) = -g(-z)$ и положим $G(y) = \int_0^y g(z)dz$. Показать, что траектория, проходящая через точку $(A, 0)$, определяется равенством

$$x_2 = \pm \sqrt{2[G(A) - G(x_1)]}.$$

- (e) Используя результат (d), показать, что период колебаний замкнутой траектории, проходящей через точку $(A, 0)$, определяется равенством

$$T(A) = 2\sqrt{2} \int_0^A \frac{dy}{[G(A) - G(x_1)]^{1/2}}$$

- (f) Обсудить, как можно использовать результат (d) при построении фазового портрета системы.

2.19 Построить фазовый портрет и исследовать периодические решения системы из предыдущего упражнения при:

$$(1) g(x_1) = \sin x_1, \quad (2) g(x_1) = x_1 + x_1^3, \quad (3) g(x_1) = x_1^3.$$

Для каждого случая определить период колебаний периодической орбиты, проходящей через точку $(1, 0)$.

2.20 Для каждой из нижеследующих систем показать, что система не имеет предельных циклов:

- (1) $\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = g(x_1) + ax_2, \quad a \neq 1;$
- (2) $\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 + x_1 x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^3 + x_1^2 x_2;$
- (3) $\dot{x}_1 = 1 - x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1;$
- (4) $\dot{x}_1 = x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2;$
- (5) $\dot{x}_1 = x_2 \cos(x_1), \quad \dot{x}_2 = \sin(x_1).$

2.21 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2(x_1 + a) - b, \quad \dot{x}_2 = -cx_1(x_1 + a),$$

где a, b и c — положительные константы и $b > a$. Пусть

$$D = \left\{ x \in R^2 \mid x_1 < -ai \text{ и } x_2 < \frac{x_1 + b}{x_1 + a} \right\}.$$

- (a) Показать, что каждая траектория, начинающаяся в D , остается в D для всех будущих моментов времени.
(b) Показать, что не существует периодических орбит, проходящих через какую-либо точку $x \in D$.

2.22 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = ax_1 + x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = bx_1^2 - cx_2,$$

где a, b и c — положительные константы и $c > a$. Пусть $D = \{x \in R^2 \mid x_2 \geq 0\}$.

- (a) Показать, что каждая траектория, начинающаяся в D , остается в D для всех будущих моментов времени.
(b) Показать, что не существует периодических орбит, проходящих через какую-либо точку $x \in D$.

- 2.23 ([85])** Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -[2b - g(x_1)]ax_2 - a^2 x_1,$$

где a и b — положительные константы и

$$g(x_1) = \begin{cases} 0, & |x_1| > 1 \\ k, & |x_1| \leq 1 \end{cases}$$

- (a) Используя критерий Бендиксона, показать, что не существует периодических орбит при $k < 2b$.
(b) Используя критерий Пуанкаре–Бендиксона, показать, что существует периодическая орбита при $k > 2b$.

2.24 Рассмотрим систему второго порядка и предположим, что множество $M = \{x_1^2 + x_2^2 \leq a^2\}$ обладает тем свойством, что каждая траектория, начинающаяся в M , остается в M для всех будущих моментов времени. Показать, что M содержит точку равновесия.

2.25 Доказать лемму 2.3, исследуя векторные поля.

2.26 ([70]) Для каждой из нижеследующих систем показать, что начало координат не является гиперболической точкой равновесия, найти индекс начала координат и доказать, что этот индекс не равен ± 1 :

- (1) $\dot{x}_1 = x_1^2, \quad \dot{x}_2 = -x_2;$
- (2) $\dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 x_2.$

2.27 Для каждой из нижеследующих систем определить и классифицировать бифуркации, которые возникают при изменении μ :

- (1) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu(x_1 + x_2) - x_2 - x_1^3 - 3x_1^2 x_2;$
- (2) $\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -(1 + \mu^2)x_1 + 2\mu x_2 - \mu x_1^3 + 2(x_2 - \mu x_1)^3;$
- (3) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu - x_2 - x_1^2 - 2x_1 x_2;$
- (4) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(1 + \mu^2)x_1 + 2\mu x_2 + \mu x_1^3 - x_1^2 x_2;$
- (5) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu(x_1 + x_2) - x_2 - x_1^3 + 3x_1^2 x_2;$
- (6) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu(x_1 + x_2) - x_2 - x_1^2 - 2x_1 x_2.$

2.28 Следующая модель используется при анализе взаимодействия между тормозящим и возбуждающим нейронами в биологической системе [195]. В своей простейшей форме эта модель описывает взаимодействие двух нейронов. Переменными состояния являются x_1 — выход возбуждающего нейрона и x_2 — выход тормозящего нейрона. Уравнения эволюции системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{\tau}x_1 + \operatorname{th}(\lambda x_1) - \operatorname{th}(\lambda x_2), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{\tau}x_2 + \operatorname{th}(\lambda x_1) + \operatorname{th}(\lambda x_2), \end{aligned}$$

где $\tau > 0$ — постоянная времени и λ — коэффициент усиления.

- (a) Используя критерий Пуанкаре–Бендиксона, показать, что система имеет периодическую орбиту при $\lambda\tau > 1$.

- (b) Построить фазовый портрет системы при $\tau = 1$, $\lambda = 2$ и обсудить качественное поведение системы.
- (c) Выполнить задание (b) при $\tau = 1$, $\lambda = 1/2$.
- (d) Определить и классифицировать бифуркции, которые возникают при изменении $\mu = \lambda\tau$.

2.29 Модель химического осциллятора [187] имеет вид

$$\dot{x}_1 = a - x_1 - \frac{4x_1x_2}{1+x_1^2}, \quad \dot{x}_2 = bx_1 \left(1 - \frac{x_2}{1+x_1^2}\right),$$

где x_1 и x_2 — безразмерные концентрации химических реагентов и a, b — положительные константы.

- (a) Используя критерий Пуанкаре–Бендиксона, показать, что система имеет периодическую орбиту при $b < 3a/5 - 25/a$.
- (b) Построить фазовый портрет системы в первом квадранте при $a = 10$, $b = 2$ и обсудить качественное поведение системы.
- (c) Выполнить задание (b) при $a = 10$, $b = 4$.
- (d) Определить и классифицировать бифуркции, которые возникают при изменении b и фиксированном a .

2.30 Биохимический реактор может быть представлен моделью

$$\dot{x}_1 = \left(\frac{\mu_m x_2}{k_m + x_2} - d\right)x_1, \quad \dot{x}_2 = d(x_{2f} - x_2) - \frac{\mu_m x_1 x_2}{Y(k_m + x_2)},$$

где переменные состояния и неотрицательные константы d, μ_m, k_m, Y и x_{2f} определены в упражнении 1.22. Пусть $\mu_m = 0.5$, $k_m = 0.1$, $Y = 0.4$ и $x_{2f} = 4$.

- (a) Найти все точки равновесия при $d > 0$ и определить тип каждой из них.
- (b) Исследовать бифуркции при изменении d .
- (c) Построить фазовый портрет системы и обсудить качественное поведение системы при $d = 0.4$.

2.31 Биохимический реактор может быть представлен моделью

$$\dot{x}_1 = \left(\frac{\mu_m x_2}{k_m + x_2 + k_1 x_2^2} - d\right)x_1, \quad \dot{x}_2 = d(x_{2f} - x_2) - \frac{\mu_m x_1 x_2}{Y(k_m + x_2 + k_1 x_2^2)},$$

где переменные состояния и неотрицательные константы d, μ_m, k_m, k_1, Y и x_{2f} определены в упражнении 1.22. Пусть $\mu_m = 0.5$, $k_m = 0.1$, $k_1 = 0.5$, $Y = 0.4$ и $x_{2f} = 4$.

- (a) Найти все точки равновесия при $d > 0$ и определить тип каждой из них.
- (b) Исследовать бифуркции при изменении d .
- (c) Построить фазовый портрет системы и обсудить качественное поведение системы при $d = 0.1$.

- (d) Выполнить задание (c) при $d = 0.25$.
- (e) Выполнить задание (c) при $d = 0.5$.

Глава 3

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

В этой главе формулируются некоторые основные свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений - их существование, единственность, непрерывная зависимость от начальных данных и параметров. Эти свойства имеют важное значение при исследовании математической модели состояния $\dot{x} = f(t, x)$ физических систем. При проведении экспериментов с физической системой, например с маятником, мы предполагаем, что находясь в момент времени t_0 в некотором заданном состоянии, система начнет двигаться и ее состояние может быть определено во все будущие моменты времени $t > t_0$ (или, по крайней мере, в момент начала движения). Более того, в случае детерминированной системы мы предполагаем, что если мы проведем повторный полностью аналогичный эксперимент, мы получим аналогичную эволюцию системы и то же состояние в момент времени $t > t_0$, которым характеризовалась система при проведении первого эксперимента. Для достоверного предсказания будущего состояния системы на основании информации о ее текущем состоянии в момент времени t_0 необходимо, чтобы задача с начальными данными

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

имела единственное решение. Эта проблема связана с вопросом о существовании и единственности решений, который будет рассматриваться в параграфе 3.1. Будет показано, что существование и единственность могут быть обеспечены в предположении, что функция $f(t, x)$ в правой части этого уравнения удовлетворяет некоторым условиям. Ключевым ограничением, используемым в параграфе 3.1, является условие Лип-

шица, заключающееся в том, что $f(t, x)$ удовлетворяет неравенству¹⁾

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad (3.2)$$

для всех (t, x) и (t, y) в некоторой окрестности t_0, x_0 .

Одним из важнейших факторов, свидетельствующих о достоверности математической модели, представленной в виде дифференциального уравнения, является непрерывная зависимость этого уравнения от начальных данных. По крайней мере, мы ожидаем от этой математической модели, что произвольные малые отклонения начальных данных не приведут к большим отклонениям ее решений. Задача с начальными данными (3.1) характеризуется начальным состоянием x_0 , начальным моментом времени t_0 и функцией $f(t, x)$ в правой части этого равенства. Свойство непрерывной зависимости от начальных данных (t_0, x_0) и от параметров функции f исследуется в параграфе 3.2. Если функция f дифференцируема по параметрам, то решения этого уравнения также дифференцируемы по этим параметрам. Это свойство устанавливается в параграфе 3.3 и используется при получении уравнения чувствительности, описывающего влияние малой вариации параметров на эволюцию системы. Полученные в параграфах 3.2 и 3.3 результаты о непрерывности и дифференцируемости верны лишь на конечном промежутке времени. Результаты о непрерывности решений на бесконечном временном интервале будут представлены после того, как будет введено понятие устойчивости.²⁾

В заключении главы приведено краткое изложение принципа сравнения, который позволяет связать свойства решения скалярного дифференциального неравенства $\dot{v} \leq f(t, v)$ со свойствами решения дифференциального уравнения $\dot{u} = f(t, u)$.

3.1. Существование и единственность

В этом параграфе мы получим достаточные условия существования и единственности решения задачи с начальными данными (3.1). Под решением уравнения (3.1) на интервале $[t_0, t_1]$ мы понимаем непрерывную функцию $x : [t_0, t_1] \rightarrow R^n$, такую что функция $\dot{x}(t)$ определена и $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Если f непрерывна по t и x , решение $x(t)$ будет непрерывно дифференцируемо. Мы будем предполагать, что $f(t, x)$ непрерывна по x , но лишь кусочно-непрерывна по t . Тогда решение $x(t)$ будет кусочно-непрерывным и дифференцируемым. Предположение о кусочной непрерывности $f(t, x)$ по t позволяет рассмотреть случай, когда $f(t, x)$ зависит от функции входа, которая с течением времени может испытывать скачкообразные изменения.

¹⁾ $\|\cdot\|$ обозначает любую p -норму (см. Приложение А).

²⁾ См. параграф 9.4.

Дифференциальное уравнение с заданным начальным условием может иметь несколько решений. Например, скалярное уравнение

$$\dot{x} = x^{1/3}, \quad x(0) = 0 \quad (3.3)$$

имеет решение $x(t) = (2t/3)^{3/2}$. Это решение не единственное, поскольку $x(t) \equiv 0$ также является решением. С учетом того, что правая часть (3.3) является непрерывной функцией от x , легко видеть, что непрерывность функции $f(t, x)$ по ее аргументам не является достаточным условием для того, чтобы решение соответствующего уравнения было единственным. На функцию f необходимо наложить дополнительные условия. В этом смысле проблема существования решения менее ограничительна. Действительно, непрерывность $f(t, x)$ по ее аргументам гарантирует, что существует по крайней мере одно решение. Мы не будем приводить здесь строгое доказательство¹⁾. Вместо этого мы докажем более простое утверждение о существовании и единственности решения дифференциального уравнения, основанное на предположении о выполнении условия Липшица.

Теорема 3.1 (Локальное существование и единственность).

Пусть $f(t, x)$ кусочно непрерывна по t и удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

$\forall x, y \in B = \{x \in R^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Тогда существует константа $\delta > 0$, такая что уравнение состояния $\dot{x} = f(t, x)$ при $x(t_0) = x_0$ имеет единственное решение на интервале $[t_0, t_0 + \delta]$.

Доказательство: См. Приложение С.1. \square

Ключевым предположением в Теореме 3.1 является условие Липшица (3.2). Функция, удовлетворяющая условию (3.2) называется липшицевой по x , а положительная константа L — постоянной Липшица. Далее мы будем использовать словосочетания локально липшицева функция и глобально липшицева функция для указания области, на которой выполнено условие Липшица для этой функции. Введем некоторые термины для случая, когда функция f зависит только от x . Функция $f(x)$ называется локально липшицевой в области (открытое и связное множество) $D \subset R^n$, если каждая точка в D имеет окрестность D_0 , такую что функция f удовлетворяет условию Липшица (3.2) для всех точек в D_0 с некоторой константой L_0 . Мы будем говорить, что f липшицева на множестве W , если она удовлетворяет условию (3.2) для всех точек из W с одной и той же константой L . Локально липшицева функция в области D не обязательно является липшицевой на D , т. к. условие Липшица может не выполняться равномерно (т. е. с одной и той же константой L) для всех точек из D . Однако, локально липшицева функция в области D является липшицевой на каждом компактном (замкнутом и ограниченном) подмножестве D (Упражне-

¹⁾ См. [135, Теорема 2.3].

ние 3.19). Функция $f(x)$ называется глобально липшицевой если она липшицева на R^n . Аналогичная терминология может быть применена и к функции $f(t, x)$ при условии, что условие Липшица выполнено равномерно по t для всех t из некоторого заданного интервала времени. Например, $f(t, x)$ является локально липшицевой по x на $[a, b] \times D \subset R \times R^n$, если каждая точка $x \in D$ имеет окрестность D_0 , такую что f удовлетворяет (3.2) на $[a, b] \times D_0$ с некоторой константой Липшица L_0 . Мы будем говорить, что $f(t, x)$ локально липшицева по x на $[t_0, \infty) \times D$ если эта функция является локально липшицевой по x на $[a, b] \times D$ для каждого компактного интервала $[a, b] \subset [t_0, \infty)$. Функция $f(t, x)$ является липшицевой по x на $[a, b] \times W$, если она удовлетворяет условию (3.2) для всех $t \in [a, b]$ и всех точек из W с одной и той же константой Липшица L .

В скалярном случае $f : R \rightarrow R$ условие Липшица может быть представлено в виде следующего неравенства

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L,$$

из которого следует, что абсолютное значение тангенса угла наклона прямой линии, соединяющей на графике функции $f(x)$ любые две точки этой кривой, не превышает L . Поэтому любая функция $f(x)$, имеющая бесконечное значение тангенса угла наклона касательной в некоторой точке не является локально липшицевой в этой точке. Например, любая разрывная функция не является локально липшицевой в точке разрыва. В качестве другого примера можно привести функцию $f(x) = x^{1/3}$ в задаче (3.3), которая также не является локально липшицевой в точке $x = 0$, поскольку $f'(x) = (1/3)x^{-2/3} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$. С другой стороны, если $|f'(x)|$ ограничена некоторой константой k на некотором интервале, то $f(x)$ является локально липшицевой на том же интервале с той же константой Липшица $L = k$. Нижеследующая лемма представляет собой обобщение этого утверждения на случай векторных функций.

Лемма 3.1. Пусть $f : [a, b] \times D \rightarrow R^m$ непрерывна в некоторой области $D \subset R^n$. Предположим, что матрица Якоби $[\partial f / \partial x]$ существует и непрерывна на $[a, b] \times D$. Если для некоторого выпуклого подмножества $W \subset D$ существует некоторая константа $L \geq 0$, такая что неравенство

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq L$$

выполнено на $[a, b] \times W$, то

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

для всех $t \in [a, b] \in W$ и $y \in W$.

Доказательство: Пусть $\|\cdot\|_p$ — p -норма при заданном $p \in [1, \infty]$. Определим $q \in [1, \infty]$ из соотношения $1/p + 1/q = 1$. Зафиксируем $t \in [a, b]$, $x \in W$ и $y \in W$. Определим $\gamma(s) = (1-s)x + sy$ для всех $s \in R$, таких что $\gamma(s) \in D$. Поскольку $W \subset D$ выпукло, $\gamma(s) \in W$ при $0 \leq s \leq 1$. Выберем $z \in R^m$, такое что¹⁾

$$\|z\|_q = 1 \quad \text{и} \quad z^T[f(t, y) - f(t, x)] = \|f(t, y) - f(t, x)\|_p.$$

Положим $g(s) = z^T f(t, \gamma(s))$. Поскольку $g(s)$ — вещественная функция, являющаяся непрерывно дифференцируемой на открытом интервале, содержащем $[0, 1]$, из теоремы о среднем значении следует, что существует $s_1 \in (0, 1)$, такая что

$$g(1) - g(0) = g'(s_1).$$

Вычислив $g(s)$ в точках $s = 0, s = 1$ и определив $g'(s)$ с использованием цепного правила, получаем

$$\begin{aligned} z^T[f(t, y) - f(t, x)] &= z^T \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s_1))(y - x) \\ \|f(t, y) - f(t, x)\|_p &\leq \|z\|_q \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s_1)) \right\|_p \|y - x\|_p \leq L \|y - x\|_p, \end{aligned}$$

применив неравенство Гёльдера $|z^T w| \leq \|z\|_q \|w\|_p$. \square

Эта лемма предлагает метод вычисления константы Липшица на основании информации о $[\partial f / \partial x]$.

Требование липшицевости функции более сильное, нежели свойство ее непрерывности. Можно показать, что если $f(x)$ липшицева на W , то она равномерно непрерывна на W (Упражнение 3.20). Обратное утверждение неверно: например функция $f(x) = x^{1/3}$ является непрерывной, но не является локально липшицевой в $x = 0$. С другой стороны, условие Липшица слабее условия непрерывной дифференцируемости и это утверждение формулируется ниже в виде следующей леммы.

Лемма 3.2. Если $f(t, x)$ и $[\partial f / \partial x](t, x)$ непрерывны на $[a, b] \times D$ для некоторой области D , то функция f является локально липшицевой в x на $[a, b] \times D$.

Доказательство: Рассмотрим точку $x_0 \in D$ и положим r настолько малым, что шар $D_0 = \{x \in R^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ содержитя в D . Множество D_0 является выпуклым и компактным. По непрерывности $[\partial f / \partial x]$ ограничена на $[a, b] \times D_0$. Пусть L_0 — верхняя граница для $\|\partial f / \partial x\|$ на $[a, b] \times D_0$. Тогда по Лемме 3.1 функция f является липшицевой на $[a, b] \times D_0$ с константой Липшица L_0 . \square

Читателю предлагается (Упражнение 3.22) доказать в качестве обобщения предыдущего результата следующую лемму.

¹⁾ Такое z всегда существует. (см. Упражнение 3.21.)

Лемма 3.3. Пусть $f(t, x)$ и $[\partial f / \partial x](t, x)$ непрерывны на $[a, b] \times R^n$. Тогда функция f является глобально липшицевой в x на $[a, b] \times R^n$, если и только если $[\partial f / \partial x]$ равномерно ограничена на $[a, b] \times R^n$.

Пример 3.1. Функция

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1 x_2 \\ x_2 - x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

является непрерывно дифференцируемой на R^2 . Следовательно, она локально липшицева на R^2 . Однако она не является глобально липшицевой, поскольку $[\partial f / \partial x]$ не является однородно ограниченной на R^2 . На любом компактном подмножестве R^2 функция f липшицева. Предположим, что нам необходимо вычислить константу Липшица на выпуклом множестве $W = \{x \in R^2 \mid |x_1| \leq a_1, |x_2| \leq a_2\}$. Матрица Якоби для f имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 - x_1 \end{bmatrix}.$$

Используя норму $\|\cdot\|_\infty$ для векторов в R^2 и индуцированную матричную норму для матриц, получаем

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_\infty = \max\{|-1 + x_2| + |x_1|, |x_2| + |1 - x_1|\}.$$

Все точки в W удовлетворяют неравенствам

$$|-1 + x_2| + |x_1| \leq 1 + a_2 + a_1 \quad \text{и} \quad |x_2| + |1 - x_1| \leq a_2 + 1 + a_1.$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_\infty \leq 1 + a_1 + a_2$$

и в качестве константы Липшица может быть взята величина $L = 1 + a_1 + a_2$. \triangle

Пример 3.2. Функция

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\text{sat}(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$$

не является непрерывно дифференцируемой на R^2 . Проверим, является ли она липшицевой, анализируя величину $f(x) - f(y)$. Используя $\|\cdot\|_\infty$ в качестве нормы векторов в R^2 и учитывая тот факт, что функция насыщения $\text{sat}(\cdot)$ удовлетворяет

$$|\text{sat}(\eta) - \text{sat}(\xi)| \leq |\eta - \xi|,$$

получаем

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq (x_2 - y_2)^2 + (x_1 + x_2 - y_1 - y_2)^2 = \\ &= (x_1 - y_1)^2 + 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + 2(x_2 - y_2)^2. \end{aligned}$$

Используя неравенство

$$a^2 + 2ab + 2b^2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \leq \lambda_{\max} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \times \left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|_2^2,$$

получаем

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \sqrt{2.618} \|x - y\|_2, \quad \forall x, y \in R^n.$$

При получении предыдущего неравенства мы использовали свойство положительной полуопределенности симметричных матриц, т.е. $x^T Px \leq \lambda_{\max}(P)x^T x$, для всех $x \in R^n$, где $\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальное собственное значение матрицы. Более консервативная (большая) константа Липшица может быть получена при использовании более консервативного неравенства

$$a^2 + 2ab + 2b^2 \leq 2a^2 + 3b^2 \leq 3(a^2 + b^2).$$

В этом случае константа Липшица равна $L = \sqrt{3}$. \triangle

В этих двух примерах мы использовали нормы $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_2$. Вследствие эквивалентности этих норм выбор нормы на R^n не влияет на выполнение условия Липшица для исследуемой функции, но от этого выбора зависит величина соответствующей константы Липшица (Упражнение 3.5). Упражнение 3.2 иллюстрирует тот факт, что условие Липшица (3.2) не определяет однозначным образом константу Липшица L . Если условие (3.2) выполняется для некоторой положительной константы L , то оно выполняется и для любой константы, большей чем L . Эта неоднозначность может быть устранена путем определения L как минимальной константы, при которой выполнено (3.2), но такой подход будет применяться редко.

Теорема 3.1 является локальной теоремой, поскольку она гарантирует существование и единственность решения только на интервале $[t_0, t_0 + \delta]$, где константа δ может быть очень мала. Другими словами мы не можем определять выбор δ и, следовательно, мы не можем гарантировать существование и единственность решения на заданном интервале $[t_0, t_1]$. Однако можно попытаться расширить интервал, на котором существует решение, путем последовательных применений локальной теоремы на последовательно выбранных интервалах. Действительно, применив Теорему 3.1 при t_0 и начальном состоянии $x(t_0) = x_0$, мы получаем, что существует положительная константа δ (зависящая от x_0), такая что уравнение состояния (3.1) имеет единственное решение на интервале времени $[t_0, t_0 + \delta]$. Рассматривая $t_0 + \delta$ в качестве нового начального момента времени, а $x(t_0 + \delta)$ в качестве нового начального состояния, можно попытаться применить Теорему 3.1 для установления существования решения после момента времени $t_0 + \delta$. Если условия теоремы выполнены в точке $(t_0, x_0(t_0 + \delta))$, существует $\delta_2 > 0$, такая что уравнение имеет единственное решение на интервале $[t_0 + \delta, t_0 + \delta + \delta_2]$, проходящее через точку $(t_0 + \delta, x(t_0 + \delta))$. Соединив решения

на интервалах $[t_0, t_0 + \delta]$ и $[t_0 + \delta, t_0 + \delta + \delta_2]$, мы получаем решение, которое существует и единственно на интервале $[t_0, t_0 + \delta + \delta_2]$. Описанная процедура может быть продолжена и далее, но в общем случае интервал существования решения не может быть продолжен до бесконечности, т. к. условия Теоремы 3.1 могут прекратить выполняться. Существует максимальный интервал $[t_0, T)$, на котором начавшееся в (t_0, x_0) решение существует.¹⁾ В общем случае T может быть меньше t_1 и тогда при $t \rightarrow T$ решение покидает любое компактное множество, на котором функция f локально липшицева по x (Упражнение 3.26).

Пример 3.3. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x} = -x^2, \quad x(0) = -1.$$

Функция $f(x) = -x^2$ является локально липшицевой для всех $x \in R$. Следовательно, она является липшицевой на любом компактном подмножестве R . На интервале $[0, 1)$ существует единственное решение

$$x(t) = \frac{1}{t-1}.$$

При $t \rightarrow 1$ траектория $x(t)$ покидает любое компактное множество. \triangle

Фраза «конечное время ухода на бесконечность» («finite escape time») используется при описании феномена ухода траектории системы на бесконечность на конечном промежутке времени ее эволюции. Например, мы можем сказать, что в примере 3.3 траектория имеет конечное время ухода на бесконечность при $t = 1$.

В контексте обсуждения, предшествующего Примеру 3.3, можно задаться следующим вопросом: Когда можно гарантировать, что решение может быть продолжено на бесконечный интервал времени? Одним из путей ответа на этот вопрос является наложение дополнительных условий, обеспечивающих постоянное нахождение решения $x(t)$ в множестве, где $f(t, x)$ равномерно липшицева по x . Если потребовать, чтобы функция f удовлетворяла глобальному условию Липшица, мы получим следующий результат.

Теорема 3.2 (Глобальное существование и единственность решения). Предположим, что $f(t, x)$ кусочно-непрерывна по t и удовлетворяет

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

$\forall x, y \in R^n, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$ Тогда уравнение состояния $\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0$ имеет единственное решение на интервале $[t_0, t_1]$.

Доказательство: См. Приложение C.1. \square

Пример 3.4. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + g(t) = f(t, x),$$

¹⁾ Доказательство этого утверждения приведено в [81, параграф 8.5] или [135, параграф 2.3].

где $A(t)$ и $g(t)$ — кусочно-непрерывные функции времени. На любом конечном интервале времени $[t_0, t_1]$ элементы $A(t)$ ограничены. Следовательно, $\|A(t)\| \leq a$, где $\|A\|$ — любая индуцированная матричная норма. Условия Теоремы 3.2 выполнены, т. к.

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|A(t)(x - y)\| \leq \|A(t)\| \|x - y\| \leq a \|x - y\|$$

для всех $x, y \in R^n$ и $t \in [t_0, t_1]$. Тогда из Теоремы 3.2 следует, что линейная система имеет единственное решение на $[t_0, t_1]$. Поскольку момент времени t_1 может быть выбран произвольно большим, мы можем также заключить, что если $A(t)$ и $g(t)$ кусочно-непрерывны $\forall t \geq t_0$, система имеет единственное решение $\forall t \geq t_0$. Следовательно, система не может иметь конечное время ухода на бесконечность. \triangle

Для линейной системы из Примера 3.4 выполнение условия глобальной липшицевости Теоремы 3.2 является вполне разумным требованием. Однако в общем случае для нелинейных систем это условие может быть слишком ограничительным. Следует различать локальное условие Липшица из Теоремы 3.1 и глобальное условие Липшица из Теоремы 3.2. Свойство локальной липшицевости функции по существу является условием ее гладкости. Оно следует из непрерывной дифференцируемости. За исключением случаев разрывных неравенств, которые могут служить в качестве идеализированной модели физических явлений, разумно предполагать, что функции, стоящие в правой части моделей физических систем, локально липшицевы. Примеры непрерывных функций, не являющихся локально липшицевыми, существуют, но они очень редко используются в качестве моделей реальных систем. С другой стороны свойство глобальной липшицевости весьма ограничительно. Модели многих физических систем не удовлетворяют этому требованию. Можно легко предложить имеющие вполне определенный смысл примеры систем, не удовлетворяющих условию глобальной липшицевости, но имеющих, тем не менее, единственное и глобально определенные решения. Из этого следует, что Теорема 3.2 имеет консервативную природу.

Пример 3.5. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x} = -x^3 = f(x).$$

Функция $f(x)$ не удовлетворяет глобальному условию Липшица, поскольку якобиан $\partial f / \partial x = -3x^2$ не ограничен глобально. Тем не менее, для любого начального состояния $x(t_0) = x_0$ это уравнение имеет единственное решение

$$x(t) = \text{sign}(x_0) \sqrt{\frac{x_0^2}{1 + 2x_0^2(t - t_0)}},$$

которое определено для всех $t \geq t_0$. \triangle

В свете консервативной природы глобального условия Липшица было бы желательно сформулировать и доказать теорему о глобальном

3.2. Непрерывная зависимость решения от начальных данных и параметров

существовании и единственности решения, в которой на функцию f накладывается лишь условие локальной липшицевости. Следующая теорема решает поставленную задачу, но это достигается с использованием дополнительной информации о решении системы.

Теорема 3.3. Пусть $f(t, x)$ кусочно-непрерывна по t и локально липшицева по x для всех $t \geq t_0$ и всех x , принадлежащих области $D \subset R^n$. Пусть W — компактное подмножество D , $x_0 \in D$ и предположим, что любое решение системы

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

целиком содержится в W . Тогда существует единственное решение, определенное для всех $t \geq t_0$.

Доказательство: Обратимся снова к обсуждению процедуры расширения решения, предшествующему Примеру 3.3. По Теореме 3.1 существует единственное локальное решение на $[t_0, t_0 + \delta]$. Пусть $[t_0, T)$ — максимальный интервал, на котором существует решение. Мы хотим показать, что $T = \infty$. Напомним (Упражнение 3.26), что если T конечно, то решение должно покинуть любое компактное подмножество D . Поскольку по условию теоремы решение никогда не покидает компактное множество W , мы заключаем, что $T = \infty$. \square

Применение Теоремы 3.3 основано на установлении факта, что любое решение лежит в компактном множестве, причем это должно быть сделано без фактического решения дифференциального уравнения. В главе 4 будет показано, что метод Ляпунова для изучения устойчивости решений дифференциального уравнения, может быть очень полезен при решении этой задачи. Здесь мы проиллюстрируем применение этой теоремы простым примером.

Пример 3.6. Рассмотрим скалярную систему (см. Пример 3.5)

$$\dot{x} = -x^3 = f(x).$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица на R . Если в каждый момент времени величина $x(t)$ положительна, производная $\dot{x}(t)$ будет отрицательной. Аналогично, если в каждый момент времени величина $x(t)$ отрицательна, производная $\dot{x}(t)$ будет положительной. Поэтому решение, начинающееся в любой начальной точке $x(0) = a$, никогда не сможет покинуть компактное множество $\{x \in R \mid |x| \leq |a|\}$. Таким образом, без вычисления решения рассматриваемого дифференциального уравнения и с использованием Теоремы 3.3 мы можем заключить, что это уравнение имеет единственное решение для всех $t \geq 0$. \triangle

3.2. Непрерывная зависимость решения от начальных данных и параметров

Для того, чтобы решение уравнения состояния (3.1) представляло интерес, оно должно непрерывно зависеть от начального состояния x_0 , начального момента времени t_0 , а также от функции $f(t, x)$ в правой части этого уравнения. Непрерывная зависимость от начального времени следует из равенства

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

и поэтому мы предлагаем читателю доказать это утверждение в качестве упражнения (см. Упражнение 3.28). Далее мы сконцентрируем наше внимание на вопросе о непрерывной зависимости от начального состояния x_0 и функции f . Пусть $y(t)$ — решение (3.1), начинающееся в $y(t_0) = y_0$ и определенное на компактном интервале $[t_0, t_1]$. Решение называется непрерывно зависящим от y_0 , если решения, начинающиеся в окрестности этой точки определены на том же интервале времени и остаются близкими друг к другу на этом интервале. Эта формулировка допускает более строгое представление на языке ε - δ . Для любой константы $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такая что для всех z_0 из шара $\{x \in R^n \mid \|x - y_0\| < \delta\}$ уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ имеет определенное на $[t_0, t_1]$ единственное решение $z(t)$, $z(t_0) = z_0$, удовлетворяющее неравенству $\|z(t) - y(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Непрерывная зависимость от функции f в правой части уравнения определяется аналогичным образом, но для того, чтобы дать математически строгое определение этого понятия, мы должны определить возмущение функции f . В качестве одного из возможных способов представления такого возмущения может служить последовательность функций f_m , которая равномерно сходится к f при $m \rightarrow \infty$. Для каждой функции f_m решение уравнения $\dot{x} = f_m(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ обозначается $x_m(t)$. Решение называется непрерывно зависящим от функции в правой части уравнения, если $x_m(t) \rightarrow x(t)$ при $m \rightarrow \infty$. Этот подход применяется редко и здесь не будет рассматриваться.¹⁾ Более ограничительное, но одновременно более простое математическое представление возмущения функции в правой части уравнения заключается в предположении о том, что f непрерывно зависит от множества постоянных параметров, т. е. $f = f(t, x, \lambda)$, где $\lambda \in R^p$. В качестве постоянных параметров могут рассматриваться физические параметры системы и возмущения этих параметров могут интерпретироваться как ошибки модели или как изменение значений этих параметров с течением времени. Пусть $x(t, \lambda_0)$ — решение системы $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$, $x(t_0, \lambda_0) = x_0$, определенное на $[t_0, t_1]$. Решение называется непрерывно зависящим от λ , если для

¹⁾ Непрерывная зависимость от параметров, рассматриваемая с использованием этого подхода, исследована в работах [43, параграф 1.3], [75, параграф 1.3] и [135, параграф 2.5].

3.2. Непрерывная зависимость решения от начальных данных и параметров 125

любой константы $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такая что для всех λ из шара $\{\lambda \in R^p \mid \|\lambda - \lambda_0\| < \delta\}$ уравнение $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ имеет определенное на $[t_0, t_1]$ единственное решение $x(t, \lambda)$, $x(t_0, \lambda) = x_0$, удовлетворяющее неравенству $\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Непрерывная зависимость от начальных состояний и непрерывная зависимость от параметров могут исследоваться с единой точки зрения. Мы начнем с формулировки простого результата, в котором не рассматривается вопрос о существовании и единственности решения, но делается акцент на исследовании близости решений.

Теорема 3.4. Пусть $f(t, x)$ кусочно-непрерывна по t и липшицева по x на $[t_0, t_1] \times W$ с константой Липшица L , где $W \subset R^n$ — открытое связное множество. Пусть $y(t)$ и $z(t)$ — решения систем

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

и

$$\dot{z} = f(t, z) + g(t, z), \quad z(t_0) = z_0,$$

такие что $y(t), z(t) \in W$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Предположим, что

$$\|g(t, x)\| \leq \mu, \quad \forall (t, x) \in [t_0, t_1] \times W$$

для некоторой константы $\mu > 0$. Тогда

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| \exp[L(t - t_0)] + \frac{\mu}{L} \{\exp[L(t - t_0)] - 1\}$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство: Решения $y(t)$ и $z(t)$ имеют вид

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t [f(s, z(s)) + g(s, z(s))] ds.$$

Вычитая второе уравнение из первого и вычисляя нормы, получаем

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\| &\leq \|y_0 - z_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^t \|g(s, z(s))\| ds \leq \\ &\leq \gamma + \mu(t - t_0) + \int_{t_0}^t L \|y(s) - z(s)\| ds, \end{aligned}$$

где $\gamma = \|y_0 - z_0\|$. Применение неравенства Гронуолла–Беллмана (Лемма А.1) к функции $\|y(t) - z(t)\|$ приводит к оценке

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \gamma + \mu(t - t_0) + \int_{t_0}^t L[\gamma + \mu(s - t_0)] \exp[L(t - s)] ds.$$

Интегрируя по частям правую часть, получаем

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\| &\leq \gamma + \mu(t - t_0) - \gamma - \mu(t - t_0) + \gamma \exp[L(t - t_0)] + \\ &+ \int_{t_0}^t \mu \exp[L(t - s)] ds = \\ &= \gamma \exp[L(t - t_0)] + \frac{\mu}{L} \{\exp[L(t - t_0)] - 1\}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

С использованием Теоремы 3.4 мы можем доказать следующую теорему о непрерывности решений, определенной в терминах начальных состояний и параметров.

Теорема 3.5. Пусть $f(t, x, \lambda)$ непрерывна в точке (t, x, λ) и локально липшицева по x (равномерно по t и λ) на $[t_0, t_1] \times D \times \{\|\lambda - \lambda_0\| \leq c\}$, где $D \subset R^n$ – некоторое открытое связное множество. Пусть $y(t, \lambda_0)$ – решение системы $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$, $y(t_0, \lambda_0) = y_0 \in D$. Предположим, что функция $y(t, \lambda_0)$ определена и содержится в D для всех $t \in [t_0, t_1]$. Тогда для любой константы $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такая что если

$$\|z_0 - y_0\| < \delta \quad \text{и} \quad \|\lambda - \lambda_0\| < \delta,$$

то существует единственное решение $z(t, \lambda)$ системы $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ с начальным состоянием $z(t_0, \lambda) = z_0$, определенное на $[t_0, t_1]$ и удовлетворяющее неравенству

$$\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Доказательство: Из непрерывности функции $y(t, \lambda_0)$ по t и из компактности $[t_0, t_1]$ следует, что $y(t, \lambda_0)$ ограничена на $[t_0, t_1]$. Определим «трубку» U как окрестность решения $y(t, \lambda_0)$ (см. Рисунок 3.1):

$$U = \{(t, x) \in [t_0, t_1] \times R^n \mid \|x - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon\}.$$

Предположим, что $U \subset [t_0, t_1] \times D$; если это предположение не выполнено, всегда можно сделать замену ε на меньшую величину $\varepsilon_1 < \varepsilon$, гарантирующую выполнение $U \subset [t_0, t_1] \times D$, и продолжить доказательство с переопределенной константой ε_1 . Поскольку множество U компактно, функция $f(t, x, \lambda)$ липшицева по x на U ; обозначим

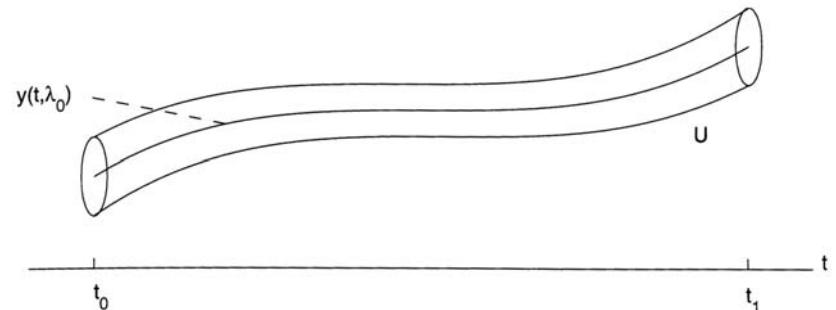


Рис. 3.1. Трубка как окрестность решения $y(t, \lambda_0)$.

соответствующую константу Липшица через L . Из непрерывности f по λ следует, что для любой $\alpha > 0$ существует $\beta > 0$ ($\beta < c$), такая что

$$\|f(t, x, \lambda) - f(t, x, \lambda_0)\| < \alpha, \quad \forall (t, x) \in U, \quad \forall \|\lambda - \lambda_0\| < \beta.$$

Положим $\alpha < \varepsilon$ и $\|z_0 - y_0\| < \alpha$. Из локальной теоремы о существовании и единственности решения следует, что на некотором интервале $t_0, t_0 + \Delta]$ существует единственное решение $z(t, \lambda)$. Решение начинается в трубке U и поскольку оно остается в этой трубке, оно может быть продолжено. Мы покажем, что при выборе достаточно малой константы α можно гарантировать то, что это решение останется в U при всех $t \in [t_0, t_1]$. Пусть τ – первый момент времени, когда решение покинуло трубку. Докажем, что мы можем обеспечить $\tau > t_1$. На интервале $[t_0, \tau]$ условия Теоремы 3.4 выполнены при $\mu = \alpha$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| &< \alpha \exp[L(t - t_0)] + \frac{\alpha}{L} \{\exp[L(t - t_0)] - 1\} < \\ &< \alpha \left(1 + \frac{1}{L}\right) \exp[L(t - t_0)]. \end{aligned}$$

Выбор $\alpha \leq \varepsilon L \exp[-L(t_1 - t_0)]/(1 + L)$ гарантирует то, что решение $z(t, \lambda)$ не может покинуть трубку на интервале времени $t_0, t_1]$. Поэтому $z(t, \lambda)$ определено на $[t_0, t_1]$ и удовлетворяет $\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \varepsilon$. Полагая $\delta = \min\{\alpha, \beta\}$, мы доказываем утверждение теоремы. \square

3.3. Дифференцируемость решений и уравнения чувствительности

Предположим, что $f(t, x, \lambda)$ непрерывна в точке (t, x, λ) и имеет непрерывные первые частные производные по x и λ для всех $(t, x, \lambda) \in [t_0, t_1] \times R^n \times R^p$. Обозначим через λ_0 некоторое номинальное значение параметра λ и предположим, что номинальное уравнение состояния

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda_0), \quad x(t_0) = x_0$$

имеет единственное решение $x(t, \lambda_0)$ на $[t_0, t_1]$. Из Теоремы 3.5 следует, что для всех λ достаточно близких к λ_0 , т. е. при достаточно малой величине $\|\lambda - \lambda_0\|$, уравнение состояния

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0$$

имеет единственное решение $x(t, \lambda)$ на $[t_0, t_1]$, которое достаточно близко к номинальному решению $x(t, \lambda_0)$. Поскольку функция f непрерывно дифференцируема по x и λ , решение $x(t, \lambda)$ дифференцируемо по λ вблизи λ_0 . Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим

$$x(t, \lambda) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s, \lambda), \lambda) ds.$$

Вычисляя частные производные по λ , получаем

$$x_\lambda(t, \lambda) = \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \lambda), \lambda) x_\lambda(s, \lambda) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, x(s, \lambda), \lambda) \right] ds,$$

где $x_\lambda(t, \lambda) = [\partial x(t, \lambda)/\partial \lambda]$ и $[\partial x_0/\partial \lambda] = 0$, т. к. x_0 не зависит от λ . Дифференцируя по t можно убедиться в том, что $x_\lambda(t, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} x_\lambda(t, L) = A(t, \lambda) x_\lambda(t, \lambda) + B(t, \lambda), \quad x_\lambda(t_0, \lambda) = 0, \quad (3.4)$$

где

$$A(t, \lambda) = \left. \frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial x} \right|_{x=x(t, \lambda)}, \quad B(t, \lambda) = \left. \frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{x=x(t, \lambda)}.$$

Для λ достаточно близких к λ_0 матрицы $A(t, \lambda)$ и $B(t, \lambda)$ определены на $[t_0, t_1]$. Следовательно, $x_\lambda(t, \lambda)$ определена на том же интервале. В точке $\lambda = \lambda_0$ правая часть равенства (3.4) зависит только от номинального решения $x(t, \lambda_0)$. Пусть $S(t) = x_\lambda(t, \lambda_0)$, тогда $S(t)$ является единственным решением уравнения

$$\dot{S}(t) = A(t, \lambda_0) S(t) + B(t, \lambda_0), \quad S(t_0) = 0. \quad (3.5)$$

Функция $S(t)$ называется *функцией чувствительности*, а уравнение (3.5) — *уравнением чувствительности*. Функции чувствительности представляют собой оценки первого порядка влияния вариаций параметров на решения. Они также могут использоваться для аппроксимации решения при значениях λ достаточно близких к их номинальной величине λ_0 . При малых $\|\lambda - \lambda_0\|$ решение $x(t, \lambda)$ может быть разложено в ряд Тейлора в окрестности номинального решения $x(t, \lambda_0)$:

$$x(t, \lambda) = x(t, \lambda_0) + S(t)(\lambda - \lambda_0) + \text{члены более высокого порядка.}$$

Пренебрегая членами более высокого порядка, можно получить аппроксимацию решения:

$$x(t, \lambda) \approx x(t, \lambda_0) + S(t)(\lambda - \lambda_0). \quad (3.6)$$

Обоснование этой аппроксимации будет предложено в Главе 10 при исследовании теории возмущений. Представление (3.6) имеет важное значение, поскольку оно позволяет с использованием информации о номинальном решении и о функции чувствительности получить аппроксимацию решения для всех значений λ в (малом) шаре с центром в λ_0 .

Суммируя все вышесказанное, мы можем предложить процедуру определения функции чувствительности, состоящую из следующих шагов:

- Решить номинальное уравнение состояния для получения номинального решения $x(t, \lambda_0)$.
- Вычислить матрицы Якоби

$$A(t, \lambda_0) = \left. \frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial x} \right|_{x=x(t, \lambda_0), \lambda=\lambda_0},$$

$$B(t, \lambda_0) = \left. \frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{x=x(t, \lambda_0), \lambda=\lambda_0}.$$

- Решить уравнение чувствительности (3.5) относительно $S(t)$.

Следуя этой процедуре, нужно решить нелинейное номинальное уравнение состояния и линейное уравнение чувствительности, зависящее от времени. За исключением нескольких тривиальных случаев, приходится использовать численное решение этих уравнений. В качестве альтернативного подхода для вычисления $S(t)$ можно использовать одновременное решение номинального уравнения и уравнения чувствительности. Это может быть выполнено путем совместного решения вариационного уравнения (3.4) и первоначального уравнения состояния, в котором следует положить $\lambda = \lambda_0$. В результате получим расширенную систему из $(n + np)$ уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, \lambda_0), & x(t_0) &= x_0 \\ \dot{S} &= \left[\frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial x} \right]_{\lambda=\lambda_0} S + \left[\frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_0}, & S(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

которую следует решать численными методами. Заметим, что если первоначальное уравнение состояния автономно, т. е. $f(t, x, \lambda) = f(x, \lambda)$ расширенное уравнение (3.7) будет также автономным. Применение предложенной процедуры проиллюстрируем следующим примером.

Пример 3.7. Рассмотрим модель фазовой подстройки частоты с обратной связью

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -c \sin x_1 - (a + b \cos x_1)x_2 = f_1(x_1, x_2),\end{aligned}$$

$$\dot{x}_2 = -c \sin x_1 - (a + b \cos x_1)x_2 = f_2(x_1, x_2),$$

и предположим, что параметры a, b и c имеют номинальные параметры $a_0 = 1, b_0 = 0$ и $c_0 = 1$. Тогда номинальная система имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 - x_2.\end{aligned}$$

Матрицы Якоби $[\partial f / \partial x]$ и $[\partial f / \partial \lambda]$ определяются равенствами

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c \cos x_1 + bx_2 \sin x_1 & -(a + b \cos x_1) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} & \frac{\partial f}{\partial c} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & -x_2 \cos x_1 & -\sin x_1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Значения этих матриц при номинальных параметрах имеют вид

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\text{nominal}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{\text{nominal}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & -x_2 \cos x_1 & -\sin x_1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Положим

$$S = \begin{bmatrix} x_3 & x_5 & x_7 \\ x_4 & x_6 & x_8 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial a} & \frac{\partial x_1}{\partial b} & \frac{\partial x_1}{\partial c} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a} & \frac{\partial x_2}{\partial b} & \frac{\partial x_2}{\partial c} \end{array} \right]_{\text{nominal}}.$$

Тогда уравнения (3.7) в рассматриваемом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 - x_2, & x_2(0) &= x_{20} \\ \dot{x}_3 &= x_4, & x_3(0) &= 0 \\ \dot{x}_4 &= -x_3 \cos x_1 - x_4 - x_2, & x_4(0) &= 0 \\ \dot{x}_5 &= x_6, & x_5(0) &= 0 \\ \dot{x}_6 &= -x_5 \cos x_1 - x_6 - x_2 \cos x_1, & x_6(0) &= 0 \\ \dot{x}_7 &= x_8, & x_7(0) &= 0 \\ \dot{x}_8 &= -x_7 \cos x_1 - x_8 - \sin x_1, & x_8(0) &= 0.\end{aligned}$$

Решение этого уравнения было получено при начальном состоянии $x_{10} = x_{20} = 1$. На Рисунке 3.2(a) показаны графики величин x_3, x_5 и x_7 , представляющих собой чувствительности x_1 по параметрам a, b и c , соответственно. На Рисунке 3.2(b) показаны графики соответствующих величин для x_2 . Из этих рисунков видно, что чувствительность

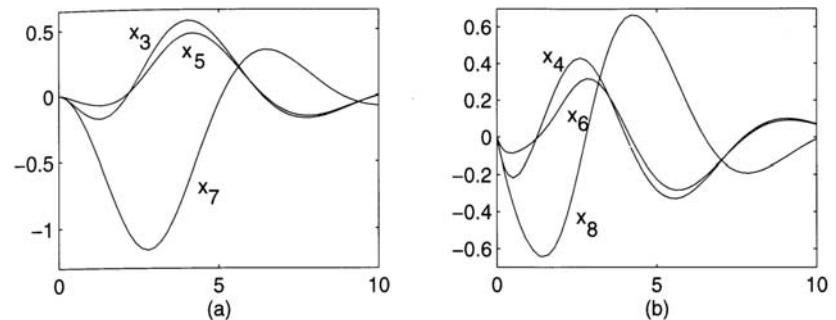


Рис. 3.2. Функция чувствительности для Примера 3.7.

решения к вариациям параметра c больше его чувствительности к вариациям параметров a и b . Аналогичный вывод можно сделать и на основании анализа решений для других начальных состояний. \triangle

3.4. Принцип сравнения

Часто при исследовании уравнения состояния $\dot{x} = f(t, x)$ необходимо вычислить оценки для решения $x(t)$ без нахождения самого решения. Одним из средств для достижения этой цели является неравенство Гронуолла–Беллмана (Лемма А.1). Другим подходом является использование леммы сравнения. Ее применяют в ситуациях, когда производная скалярной дифференцируемой функции $v(t)$ удовлетворяет неравенству вида $\dot{v}(t) \leq f(t, v(t))$ для всех t из некоторого определенного интервала времени. Это неравенство называется *дифференциальным неравенством*, а функция $v(t)$, удовлетворяющая этому неравенству, называется решением дифференциального неравенства. В лемме сравнения анализируется результат сравнения решения дифференциального неравенства $\dot{v}(t) \leq f(t, v(t))$ с решением дифференциального уравнения $\dot{u} = f(t, u)$. Лемма применима даже в тех случаях, когда $v(t)$ не дифференцируема, но имеет правую верхнюю производную $D^+v(t)$, удовлетворяющую дифференциальному неравенству. Правая верхняя производная $D^+v(t)$ определяется в Приложении С.2. Для наших целей достаточно знать два факта:

- Если $v(t)$ дифференцируема в t , то $D^+v(t) = \dot{v}(t)$.
- Если

$$\frac{1}{h}|v(t+h) - v(t)| \leq g(t, h), \quad \forall h \in (0, b]$$

и

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} g(t, h) = g_0(t),$$

то $D^+v(t) \leq g_0(t)$.

Под пределом $h \rightarrow 0^+$ подразумевается, что h приближается к нулю справа.

Лемма 3.4 (Лемма сравнения). Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0,$$

где $f(t, u)$ непрерывна по t и локально липшицева по u для всех $t \geq 0$ и всех $u \in J \subset R$. Пусть $[t_0, T]$ (T может быть бесконечностью) — максимальный интервал, на котором существует решение $u(t)$ и предположим, что $u(t) \in [t_0, T]$. Пусть $v(t)$ — непрерывная функция, правая верхняя производная $D^+v(t)$ которой удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$D^+v(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) \leq u_0,$$

где $v(t) \in J$ для всех $t \in [t_0, T]$. Тогда $v(t) \leq u(t)$ для всех $t \in [t_0, T]$.

Доказательство: См. Приложение C.2. \square

Пример 3.8. Скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x) = -(1 + x^2)x, \quad x(0) = a$$

имеет единственное решение на $[0, t_1)$ при некотором $t_1 > 0$, поскольку $f(x)$ локально липшицева по x . Пусть $v(t) = x^2(t)$. Функция $v(t)$ дифференцируема и ее производная определяется равенством

$$\dot{v}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) = -2x^2(t) - 2x^4(t) \leq -2x^2(t).$$

Следовательно, $v(t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{v}(t) \leq -2v(t), \quad v(0) = a^2.$$

Пусть $u(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{u} = -2u, \quad u(0) = a^2 \Rightarrow u(t) = a^2 e^{-2t}.$$

Тогда из леммы сравнения следует, что решение $x(t)$ определено для всех $t \geq 0$ и удовлетворяет оценке

$$|x(t)| = \sqrt{v(t)} \leq e^{-t}|a|, \quad \forall t \geq 0.$$

\triangle

Пример 3.9. Скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x) = -(1 + x^2)x + e^t, \quad x(0) = a$$

имеет единственное решение на $[0, t_1)$ при некотором $t_1 > 0$, поскольку $f(x)$ локально липшицева по x . Нам необходимо найти верхнюю границу $|x(t)|$ с использованием методов, аналогичных тем, что использовались в предыдущем примере. Пусть так же как и в Примере 3.8 $v(t) = x^2(t)$. Производная функции v имеет вид

$$\dot{v}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) = -2x^2(t) - 2x^4(t) + 2x(t)e^t \leq -2v(t) + 2\sqrt{v(t)}e^t.$$

К этому дифференциальному неравенству можно применить лемму сравнения, но в результате получается дифференциальное уравнение,

решение которого представляет непростую задачу. Поэтому рассмотрим другую функцию $v(t)$: положим $v(t) = |x(t)|$. При $x \neq 0$ функция $v(t)$ дифференцируема и ее производная определяется равенством

$$\dot{v}(t) = \frac{d}{dt} \sqrt{x^2(t)} = \frac{x(t)\dot{x}(t)}{|x(t)|} = -|x(t)||1 + x^2(t)| + \frac{x(t)}{|x(t)|}e^t.$$

Поскольку $1 + x^2(t) \geq 1$, мы имеем $-|x(t)||1 + x^2(t)| \leq -|x(t)|$ и $\dot{v}(t) \leq -v(t) + e^t$. С другой стороны, при $x(t) = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{|v(t+h) - v(t)|}{h} &= \frac{|x(t+h)|}{h} = \frac{1}{h} \left| \int_t^{t+h} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| = \\ &= \left| f(t, 0) + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [f(\tau, x(\tau)) - f(t, x(t))] d\tau \right| \leq \\ &\leq |f(t, 0)| + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f(\tau, x(\tau)) - f(t, x(t))| d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку $f(t, x(t))$ — непрерывная функция от t , для любой константы $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такая что для всех $|\tau - t| < \delta$ справедливо $|f(\tau, x(\tau)) - f(t, x(t))| < \varepsilon$. Тогда для всех $h < \delta$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f(\tau, x(\tau)) - f(t, x(t))| d\tau < \varepsilon,$$

из которого следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f(\tau, x(\tau)) - f(t, x(t))| d\tau = 0.$$

Таким образом, $D^+v(t) \leq |f(t, 0)| = e^t$ при $x(t) = 0$ и, следовательно, для всех $t \in [0, t_1)$ мы имеем

$$D^+v(t) \leq -v(t) + e^t, \quad v(0) = |a|.$$

Рассматривая функцию $u(t)$ в качестве решения линейного дифференциального уравнения

$$\dot{u} = -u + e^t, \quad u(0) = |a|,$$

мы можем с использованием леммы сравнения заключить, что

$$v(t) \leq u(t) = e^{-t}|a| + \frac{1}{2}[e^t - e^{-t}], \quad \forall t \in [0, t_1).$$

Верхняя граница функции $v(t)$ конечна для всех конечных t_1 и стремится к бесконечности лишь при $t_1 \rightarrow \infty$. Поэтому решение $x(t)$ определено при всех $t \geq 0$ и удовлетворяет оценке

$$|x(t)| \leq e^{-t}|a| + \frac{1}{2}[e^t - e^{-t}], \quad \forall t \geq 0.$$

△

3.5. Упражнения

3.1 Для каждой из нижеследующих функций $f(x)$ установить, является ли она (a) непрерывно дифференцируемой; (b) локально липшицевой; (c) непрерывной; (d) глобально липшицевой:

$$(1) f(x) = x^2 + |x|.$$

$$(3) f(x) = \sin(x) \operatorname{sign}(x).$$

$$(5) f(x) = -x + 2|x|.$$

$$(2) f(x) = x + \operatorname{sign}(x).$$

$$(4) f(x) = -x + a \sin(x).$$

$$(6) f(x) = \operatorname{tg}(x).$$

$$(7) f(x) = \begin{bmatrix} ax_1 + \operatorname{th}(bx_1) - \operatorname{th}(bx_2) \\ ax_2 + \operatorname{th}(bx_1) + \operatorname{th}(bx_2) \end{bmatrix}.$$

$$(8) f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + a|x_2| \\ -(a+b)x_1 + bx_1^2 - x_1x_2 \end{bmatrix}.$$

3.2 Пусть $D_r = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$. Каждую из нижеследующих систем представить в виде $\dot{x} = f(t, x)$ и установить, является ли функция f (a) локально липшицевой по x на D_r для достаточно малой r ; (b) локально липшицевой по x на D_r для любой конечной $r > 0$; (c) глобально липшицевой по x :

(1) Уравнение маятника с трением при постоянном входном моменте вращения (параграф 1.2.1).

(2) Цепь с туннельным диодом (Пример 2.1).

(3) Уравнения массы на пружине с линейной моделью пружины, линейным вязким демпфированием, сухим трением и нулевой внешней силой (параграф 1.2.3).

(4) Осциллятор Ван дер Поля (Пример 2.6).

(5) Замкнутое уравнение адаптивной системы управления третьего порядка (параграф 1.2.6).

(6) Система $\dot{x} = Ax - B\psi(Cx)$, где A, B и C — соответственно $(n \times n)$ -, $(n \times 1)$ - и $(1 \times n)$ -матрицы и $\psi(\cdot)$ — нелинейная функция нечувствительности (dead zone), график которой изображен на Рисунке 1.10(с).

3.3 Покажите, что если $f_1 : R \rightarrow R$ и $f_2 : R \rightarrow R$ локально липшицевы, то $f_1 + f_2$, $f_1 f_2$ и $f_1 \circ f_2$ локально липшицевы.

3.4 Пусть функция $f : R^n \rightarrow R^m$ определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|Kx\|} Kx, & \text{если } g(x)\|Kx\| \geq \mu > 0 \\ \frac{g(x)}{\mu} Kx, & \text{если } g(x)\|Kx\| < \mu, \end{cases}$$

где $g : R^n \rightarrow R$ — локально липшицева и неотрицательная функция, K — постоянная матрица. Показать, что $f(x)$ липшицева на любом компактном подмножестве R^n .

3.5 Пусть $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ — две различные p -нормы на R^n . Показать, что $f : R^n \rightarrow R^m$ липшицева по норме $\|\cdot\|_\alpha$, если и только если она липшицева по норме $\|\cdot\|_\beta$.

3.6 Пусть $f(t, x)$ кусочно-непрерывна по t , локально липшицева по x и

$$\|f(t, x)\| \leq k_1 + k_2\|x\|, \quad \forall (t, x) \in [t_0, \infty) \times R^n.$$

(a) Показать, что решение (3.1) удовлетворяет оценке

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| \exp[k_2(t - t_0)] + \frac{k_1}{k_2}\{\exp[k_2(t - t_0)] - 1\}$$

для всех $t \geq t_0$, при которых решение существует.

(b) Уходит ли решение на бесконечность за конечное время?

3.7 Пусть $g : R^n \rightarrow R^n$ непрерывно дифференцируема для всех $x \in R^n$. Определим $f(x)$ равенством

$$f(x) = \frac{1}{1 + g^T(x)g(x)}g(x).$$

Показать, что $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ имеет единственное решение, определенное для всех $t \geq 0$.

3.8 Показать, что уравнение состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \frac{2x_2}{1+x_2^2}, & x_1(0) &= a, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + \frac{2x_1}{1+x_1^2}, & x_2(0) &= b \end{aligned}$$

имеет единственное решение, определенное для всех $t \geq 0$.

3.9 Предположим, что система второго порядка $\dot{x} = f(x)$ с локально липшицевой правой частью имеет предельный цикл. Показать, что никакое решение, начинающееся в области, ограниченной предельным циклом, не может уйти на бесконечность за конечное время.

3.10 Вывести уравнения чувствительности для цепи туннельного диода из Примера 2.1 при отклонении L и C от номинальных значений.

3.11 Вывести уравнения чувствительности для осциллятора Ван дер Поля из Примера 2.6 при отклонении ε от номинального значения, используя уравнение состояния в x -координатах.

3.12 Выполните предыдущее упражнение, используя уравнение состояния в z -координатах.

3.13 Вывести уравнения чувствительности для системы

$$\dot{x}_1 = \operatorname{tg}^{-1}(ax_1) - x_1x_2, \quad \dot{x}_2 = bx_1^2 - cx_2$$

при отклонении параметров a, b, c от номинальных значений $a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 1$.

3.14 Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{\tau}x_1 + \operatorname{th}(\lambda x_1) - \operatorname{th}(\lambda x_2)\bar{b} \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{\tau}x_2 + \operatorname{th}(\lambda x_1) + \operatorname{th}(\lambda x_2),\end{aligned}$$

где λ и τ — положительные константы.

(а) Вывести уравнения чувствительности при отклонении λ и τ от номинальных значений λ_0 и τ_0 .

(б) Показать, что $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{r} \leq -\frac{1}{\tau}r + 2\sqrt{2}.$$

(в) Используя лемму сравнения, показать, что решение уравнения состояния удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\|_2 \leq e^{-t/\tau} \|x(0)\|_2 + 2\sqrt{2} \tau (1 - e^{-t/\tau}).$$

3.15 Используя лемму сравнения, показать, что решение уравнения состояния

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \frac{2x_2}{1+x_2^2}, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + \frac{2x_1}{1+x_1^2}$$

удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\|_2 \leq e^{-t} \|x(0)\|_2 + \sqrt{2} (1 - e^{-t}).$$

3.16 Используя лемму сравнения, найти верхнюю границу решения скалярного уравнения

$$\dot{x} = -x + \frac{\sin t}{1+x^2}, \quad x(0) = 2.$$

3.17 Рассмотрим задачу с начальными данными (3.1) и пусть $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая $x = 0$. Предположим, что решение $x(t)$ уравнения (3.1) принадлежит D при всех $t \geq t_0$ и $\|f(t, x)\|_2 \leq L\|x\|_2$ на $[t_0, \infty) \times D$. Показать, что

(а)

$$\left| \frac{d}{dt} [x^T(t)x(t)] \right| \leq 2L\|x(t)\|_2^2.$$

(б)

$$\|x_0\|_2 \exp[-L(t-t_0)] \leq \|x(t)\|_2 \leq \|x_0\|_2 \exp[L(t-t_0)].$$

3.18 Пусть $y(t)$ — неотрицательная скалярная функция, удовлетворяющая неравенству

$$y(t) \leq k_1 e^{-\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} [k_2 y(\tau) + k_3] d\tau,$$

где k_1, k_2 и k_3 — неотрицательные константы и α — положительная константа, удовлетворяющая $\alpha > k_2$. Используя лемму Гронуолла–Беллмана, покажите, что

$$y(t) \leq k_1 e^{-(\alpha-k_2)(t-t_0)} + \frac{k_3}{\alpha-k_2} [1 - e^{-(\alpha-k_2)(t-t_0)}].$$

Указание: Рассмотрите функцию $z(t) = y(t)e^{\alpha(t-t_0)}$ и выведите соответствующее неравенство для z .

3.19 Пусть $f : R^n \rightarrow R^n$ локально липшицева в области $D \subset R^n$. Предположим, что $S \subset D$ — некоторое компактное множество. Показать, что существует положительная константа L , такая что для всех $x, y \in S$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Указание: Множество S имеет конечное покрытие, т. е.

$$S \subset N(a_1, r_1) \cup N(a_2, r_2) \cup \dots \cup N(a_k, r_k).$$

Рассмотрите по отдельности два случая:

• $x, y \in S \cap N(a_i, r_i)$ для некоторого i .

• $x, y \notin S \cap N(a_i, r_i)$ для любого i ; в этом случае $\|x - y\| \geq \min_i r_i$.

Во втором случае используйте свойство равномерной ограниченности $f(x)$ на S .

3.20 Показать, что если $f : R^n \rightarrow R^n$ липшицева на $W \subset R^n$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на W .

3.21 Для любой точки $x \in R^n - \{0\}$ и любого $p \in [1, \infty)$ определим $y \in R^n$ равенством

$$y_i = \frac{x_i^{p-1}}{\|x\|_p^{p-1}} \operatorname{sign}(x_i^p).$$

Показать, что $y^T x = \|x\|_p$ и $\|y\|_q = 1$, где $q \in (1, \infty]$ удовлетворяет равенству $1/p + 1/q = 1$. При $p = \infty$ найти вектор y , такой что $y^T x = \|x\|_\infty$ и $\|y\|_1 = 1$.

3.22 Доказать Лемму 3.3.

3.23 Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, отображающая выпуклую открытую область $D \subset R^n$ в R^n . Предположим, что D содержит начало координат $x = 0$ и $f(0) = 0$. Показать, что

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) d\sigma, \quad \forall x \in D.$$

Указание: Положите $g(\sigma) = f(\sigma x)$, $0 \leq \sigma \leq 1$ и используйте равенство $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(\sigma)d\sigma$.

3.24 Пусть $V : R \times R^n \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что $V(t, 0) = 0$ для всех $t \geq 0$ и

$$V(t, x) \geq c_1 \|x\|^2; \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \right\| \leq c_4 \|x\|, \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times D,$$

где c_1 и c_4 — положительные константы и $D \subset R^n$ — выпуклая открытая область, содержащая начало координат $x = 0$.

(a) Показать, что $V(t, x) \leq \frac{1}{2}c_4\|x\|^2$ для всех $x \in D$.

Указание: Используйте представление $V(t, x) = \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x}(t, \sigma x)d\sigma$.

(b) Доказать, что константы c_1 и c_4 должны удовлетворять неравенству $2c_1 \leq c_4$.

(c) Показать, что $W(t, x) = \sqrt{V(t, x)}$ удовлетворяет условию Липшица

$$|W(t, x_2) - W(t, x_1)| \leq \frac{c_4}{2\sqrt{c_1}}\|x_2 - x_1\|, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in D.$$

3.25 Пусть $f(t, x)$ — кусочно-непрерывна по t и локально липшицева по x на $[t_0, t_1] \times D$, где D — некоторая открытая область $D \subset R^n$. Пусть W — компактное подмножество D и x — решение $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0 \in W$. Предположим, что $x(t)$ определено и $x(t) \in W$ для всех $t \in [t_0, T]$, $T < t_1$.

(a) Показать, что $x(t)$ равномерно непрерывна на $[t_0, T]$.

(b) Показать, что $x(T)$ определено, принадлежит W и $x(t)$ — решение на $[t_0, T]$.

(c) Показать, что существует $\delta > 0$, такая что решение может быть продолжено на $[t_0, T + \delta]$.

3.26 Пусть $f(t, x)$ — кусочно-непрерывна по t и локально липшицева по x на $[t_0, t_1] \times D$, где D — некоторая открытая область $D \subset R^n$. Пусть $y(t)$ — решение (3.1) на максимальном открытом интервале $[t_0, T) \subset [t_0, t_1]$, $T < \infty$. Пусть W — компактное подмножество D . Показать, что существует $t \in [t_0, T)$, такое что $y(t) \notin W$.

Указание: Используйте результаты предыдущего упражнения.

3.27 ([43]) Пусть $x_1 : R \rightarrow R^n$ и $x_2 : R \rightarrow R^n$ — дифференцируемые функции, удовлетворяющие неравенствам

$$\|x_1(a) - x_2(a)\| \leq \gamma, \quad \|\dot{x}_i(t) - f(t, x_i(t))\| \leq \mu_i, \quad i = 1, 2,$$

при $a \leq t \leq b$. Показать, что если f удовлетворяет условию Липшица (3.2), то

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \gamma e^{L(t-a)} + (\mu_1 + \mu_2) \left[\frac{e^{L(t-a)} - 1}{L} \right], \quad a \leq t \leq b.$$

3.28 В условиях Теоремы 3.5 показать, что решение системы (3.1) непрерывно зависит от начального момента времени t_0 .

3.29 Пусть функция $f(t, x)$ и ее частная производная по x непрерывны в (t, x) для всех $(t, x) \in [t_0, t_1] \times R^n$. Пусть $x(t, \eta)$ — решение (3.1), начинающееся в $x(t_0) = \eta$. Предположим, что $x(t, \eta)$ определено на $[t_0, t_1]$. Показать, что $x(t, \eta)$ непрерывно дифференцируема по η ; найти вариационное уравнение, которому удовлетворяет $[\partial x / \partial \eta]$.

Указание: Сделав замену $y = x - \eta$, преобразуйте (3.1) к виду

$$\dot{y} = f(t, y + \eta), \quad y(t_0) = 0,$$

где η рассматривается в качестве параметра.

3.30 Пусть функция $f(t, x)$ и ее частная производная по x непрерывны в (t, x) для всех $(t, x) \in R \times R^n$. Пусть $x(t, a, \eta)$ — решение (3.1), начинающееся в $x(a) = \eta$. Предположим, что $x(t, a, \eta)$ определено на $[a, t_1]$. Показать, что $x(t, a, \eta)$ непрерывно дифференцируема по a и η . Обозначим через $x_a(t)$ и $x_\eta(t)$ соответственно $[\partial x / \partial a]$ и $[\partial x / \partial \eta]$. Показать, что $x_a(t)$ и $x_\eta(t)$ удовлетворяют тождеству

$$x_a(t) + x_\eta(t)f(a, \eta) \equiv 0, \quad \forall t \in [a, t_1].$$

3.31 Пусть функция $f : R \times R \rightarrow R$ — непрерывная функция. Предположим, что $f(t, x)$ локально липшицева и неубывающая по x функция для любого фиксированного значения t . Пусть $x(t)$ — решение $\dot{x} = f(t, x)$ на интервале $[a, b]$. Показать, что если непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству

$$y(t) \leq x(a) + \int_a^t f(s, y(s))ds$$

при всех $a \leq t \leq b$, то $y(t) \leq x(t)$ на указанном интервале.

Глава 4

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

Теория устойчивости играет ключевую роль в теории систем и инженерных науках. Можно сформулировать несколько различных задач устойчивости, которые возникают при исследовании динамических систем. Центральным вопросом этой главы является устойчивость точек равновесия. В последующих главах будут рассмотрены другие типы задач устойчивости, такие как устойчивость в терминах «вход–выход» (input–output stability) и устойчивость периодических орбит. Устойчивость точек равновесия обычно рассматривается в рамках теории устойчивости, разработанной русским математиком и инженером Ляпуновым, заложившим ее основы и давшим ей имя. Точка равновесия устойчива, если все решения, начинающиеся вблизи этой точки, остаются в ее окрестности; в противном случае эта точка неустойчива. Точка равновесия асимптотически устойчива, если все решения, начинающиеся в близких к ней точках, не только остаются вблизи нее, но и стремятся к этой точке равновесия при стремлении времени к бесконечности. Более строгие определения этих понятий будут даны в параграфе 4.1, в котором будут приведены также основные теоремы метода Ляпунова для случая автономных систем. Предложенное Ла-Саллем (LaSalle) обобщение этой основной теории рассмотрено в параграфе 4.2. В случае линейной стационарной системы $\dot{x} = Ax(t)$ устойчивость точки равновесия $x = 0$ может быть полностью охарактеризована на основании информации о местоположении собственных чисел матрицы A . Этот метод анализа рассматривается в параграфе 4.3, в котором также исследуется вопрос о том, когда и как может быть установлен факт устойчивости точки равновесия с использованием линеаризации системы в окрестности этой точки. В параграфе 4.5 будут введены классы функций \mathcal{K} и \mathcal{KL} , которые будут часто использоваться в оставшейся части главы и в дальнейшем

изложении. В параграфах 4.5 и 4.6 метод Ляпунова будет обобщен на случай неавтономных систем. В параграфе 4.5 мы введем понятия равномерной устойчивости, равномерной асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости и предложим для неавтономных систем соответствующий метод Ляпунова для установления этих свойств. В параграфе 4.6 будут исследованы линейная стационарная система и ее линеаризация.

Теоремы устойчивости Ляпунова позволяют получить достаточные условия для устойчивости, асимптотической устойчивости и других типов устойчивости. Однако они не дают необходимых критериев устойчивости. Существуют теоремы, в которых утверждается (по крайней мере на концептуальной основе), что условия многих теорем устойчивости Ляпунова являются также и необходимыми условиями. Подобные теоремы обычно называются обратными теоремами Ляпунова. В параграфе 4.7 будут представлены три такие теоремы. Кроме того, мы используем обратную теорему о экспоненциальной устойчивости для доказательства того, что точка равновесия нелинейной системы является экспоненциально устойчивой, если и только если линеаризация этой системы в окрестности этой точки имеет экспоненциально устойчивое состояние равновесия в начале координат.

Методы анализа, используемые в теории устойчивости Ляпунова, могут применяться для доказательства факта ограниченности решения даже в случаях, когда рассматриваемая система не имеет точек равновесия. Этот вопрос обсуждается в параграфе 4.8, в котором вводятся понятия равномерной ограниченности и предельной ограниченности. Наконец, в параграфе 4.9 рассматривается задача устойчивости в терминах «вход–состояние» (input–to–state (ISS) stability), представляющая собой естественное обобщение стандартных задач теории Ляпунова на случай систем с входными воздействиями.

4.1. Автономные системы

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.1)$$

где $f : D \rightarrow R^n$ — локально липшицевое отображение области $D \subset R^n$ в R^n . Предположим, что $\bar{x} \in D$ — точка равновесия системы (4.1), т. е. $f(\bar{x}) = 0$. Наша цель — исследовать свойства устойчивости этой точки. Для простоты изложения сформулируем все определения и теоремы для случая, когда в качестве точки равновесия рассматривается начало координат $\bar{x} = 0$ в R^n . Этот выбор не умаляет общности, поскольку любая точка равновесия может быть перемещена в начало координат с использованием соответствующей замены координат. Предположим, что $\bar{x} \neq 0$ и рассмотрим замену координат $y = x - \bar{x}$. Тогда производная y определяется равенством

$$\dot{y} = \dot{x} - f(x) = f(y + \bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} g(y), \quad g(0) = 0.$$

Система, представленная в новых координатах, имеет состояние равновесия в начале координат. Таким образом, не умаляя общности, мы всегда можем предполагать, что $f(x)$ удовлетворяет $f(0) = 0$ и исследовать свойства устойчивости начала координат $x = 0$.

Определение 4.1. Точка равновесия $x = 0$ системы (4.1) является

- устойчивой, если для каждой константы $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такая что

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0;$$

- неустойчивой, если она не является устойчивой;
- асимптотически устойчивой, если она устойчива и константа δ может быть выбрана таким образом, что

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Формулировка задачи устойчивости на языке ε - δ предполагает, что для установления свойства устойчивости начала координат необходимо назначенному значению ε сопоставить некоторую константу δ , возможно зависящую от ε , такую что любая траектория, начинающаяся в δ -окрестности начала координат, никогда не покинет его ε -окрестность. Представленные три типа устойчивости могут быть проиллюстрированы на примере маятника из параграфа 1.2.1. уравнения маятника

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - bx_2\end{aligned}$$

имеют две точки равновесия ($x_1 = 0, x_2 = 0$ и $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$. Как мы видели в главе 2 (рисунок 2.2), при отсутствии трения траектории в окрестности первой точки равновесия представляют собой замкнутые орбиты. Поэтому можно гарантировать, что траектории, начинающиеся достаточно близко от этой точки равновесия, останутся в заданном шаре с центром в точке равновесия. Таким образом, требования на устойчивость в терминах ε - δ в этом случае выполняются. Однако, указанная точка равновесия не является асимптотически устойчивой, т. к. траектории, начинающиеся в этой точке, не стремятся к ней с течением времени. Вместо этого, они остаются на своих замкнутых орбитах. В случае, когда в системе присутствует трение ($b > 0$), точка равновесия в начале координат становится устойчивым фокусом. Анализ фазового портрета устойчивого фокуса показывает, что требования на устойчивость в терминах ε - δ в этом случае выполняются. Более того, траектории, начинающиеся вблизи точки равновесия, стремятся к ней при t , стремясь к бесконечности. Вторая точка равновесия в $x_1 = \pi$ является седловой точкой. Очевидно, что требования на устойчивость в терминах ε - δ в этом случае не выполняются, поскольку для любой $\varepsilon > 0$ всегда найдется траектория, которая покидает шар $\{x \in R^n \mid \|x -$

$-\bar{x}\| \leq \varepsilon\}$ даже в том случае, когда $x(0)$ расположено сколь угодно близко к точке равновесия \bar{x} .

В определении 4.1 подразумевается, что решения (4.1) определены при всех $t \geq 0$.¹⁾ Известно, что глобальное существование решения не гарантируется локальной липшицевостью правой части f . Тем не менее, далее будет показано, что некоторые дополнительные условия, введенные в теорему Ляпунова, позволяют гарантировать глобальное существование решения. Этот результат будет получен с применением теоремы 3.3.

Определив свойства устойчивости и асимптотической устойчивости точек равновесия, мы должны найти методы, которые позволяют установить факт наличия этих свойств. Подход, который использовался при анализе примера маятника, связан с исследованием фазовых портретов уравнений его динамики. Попытки обобщить этот подход на случай системы общего вида (4.1) связаны с большими трудностями и во многих случаях будут безуспешны, т. к. требуют нахождения решений этой системы. Однако заключения, которые были сделаны выше в отношении устойчивой точки равновесия маятника, могут быть получены с использованием энергетических концепций. Обозначим энергию маятника, представляющую собой сумму его кинетической и потенциальной энергий, через $E(x)$ и предположим, что потенциальная энергия определена таким образом, что $E(0) = 0$. Тогда

$$E(x) = \int_0^{x_1} a \sin y \, dy + \frac{1}{2} x_2^2 = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2.$$

При отсутствии трения ($b = 0$) система консервативна, т. е. в системе нет диссипации энергии. Тогда при движении системы $E = \text{const}$, или, другими словами, вдоль решений системы $dE/dt = 0$. Поскольку при $E(x) = c$, где c — малая величина, вокруг $x = 0$ образуется замкнутый контур, мы опять приходим к заключению, что $x = 0$ является устойчивой точкой равновесия. В случае, когда в системе имеет место трение ($b > 0$), во время ее движения энергия рассеивается, т. е. вдоль решений системы $dE/dt \leq 0$. Вследствие наличия трения энергия E не может при движении системы оставаться постоянной неопределенно долгое время и поэтому она продолжает уменьшаться до тех пор, пока не достигнет нулевого значения, что соответствует стремлению траектории к точке $x = 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, анализ производной функции E вдоль траекторий системы позволяет исследовать свойства устойчивости точки равновесия. В 1892 году Ляпунов показал, что

¹⁾ Это определение можно модифицировать таким образом, чтобы смягчить требование глобального существования решения. В работе [154] устойчивость определяется на максимальном интервале $[0, t_1]$ существования решения в условиях, когда требование $t_1 = \infty$ отсутствует.

для установления свойств устойчивости состояния равновесия вместо функции энергии могут использоваться некоторые другие функции. Пусть $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция, определенная в области $D \subset \mathbb{R}^n$, содержащей начало координат. Производная V вдоль траекторий системы (4.1), обозначаемая через $\dot{V}(x)$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \\ &= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x).\end{aligned}$$

Производная V вдоль траекторий системы зависит от уравнений этой системы. Следовательно, представление $\dot{V}(x)$ будет различно для различных систем. Если $\phi(t; x)$ — решение (4.1), начинающееся в точке x в момент времени $t = 0$, то

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(\phi(t; x)) \right|_{t=0}.$$

Легко видеть, что если $\dot{V}(x)$ отрицательна, то V убывает вдоль решений системы (4.1). Теорема Ляпунова может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 4.1. Пусть $x = 0$ — точка равновесия системы (4.1) и $D \subset \mathbb{R}^n$ — открытая область, содержащая $x = 0$. Пусть $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая что

$$V(0) = 0 \quad \text{и} \quad V(x) > 0 \quad \forall x \in D - \{0\}, \quad (4.2)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D. \quad (4.3)$$

Тогда $x = 0$ устойчива. Более того, если

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in D - \{0\}, \quad (4.4)$$

то $x = 0$ асимптотически устойчива.

Доказательство: Выберем $\varepsilon > 0$. Пусть $r \in (0, \varepsilon]$, такая что

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} \subset D.$$

Положим $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$. Тогда из (4.2) следует, что $\alpha > 0$. Положим $\beta \in (0, \alpha)$ и

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r \mid V(x) \leq \beta\}.$$

Тогда Ω_β — принадлежит внутренности шара B_r .¹⁾ (См. рисунок 4.1.) Любая траектория, начинаящаяся в момент времени $t \geq 0$ в множестве

¹⁾ Это утверждение может быть доказано от противного. Предположим Ω_β не содержиться во внутренности B_r . Тогда существует точка $p \in \Omega_\beta$, лежащая

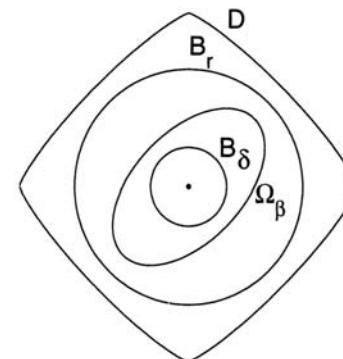


Рис. 4.1. Геометрическое представление множеств, фигурирующих в доказательстве теоремы 4.1.

Ω_β , остается в этом множестве при всех $t \geq 0$. Это утверждение следует из (4.3), поскольку

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \quad \forall t \geq 0.$$

Поскольку Ω_β является компактным множеством,¹⁾ из теоремы 3.3. следует, что (4.1) имеет единственное решение, определенное для всех $t \geq 0$ при условии, что $x(0) \in \Omega_\beta$. Поскольку $V(x)$ — непрерывная функция и $V(0) = 0$, существует $\delta > 0$, такая что

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Тогда

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$$

и

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r.$$

Таким образом,

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Из этих неравенств следует, что точка равновесия $x = 0$ устойчива. Далее, предположим, что также выполнено дополнительное условие (4.4). Для доказательства асимптотической устойчивости следует показать, что $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. для любой $a > 0$ существует $T > 0$, такое что $\|x(t)\| < a$ для всех $t > T$. Повторяя вышеприведенные рассуждения, можно показать, что для любой $a > 0$ мы можем найти $b > 0$, такое что $\Omega_b \subset B_a$. Поэтому, нам остается показать, что

на границе B_r . В этой точке $V(p) \geq \alpha > \beta$, но для всех $x \in \Omega_\beta$ выполнено $V(x) \leq \beta$, что противоречит предыдущему неравенству.

¹⁾ Ω_β замкнуто по построению и ограничено, т. к. оно содержится в B_r .

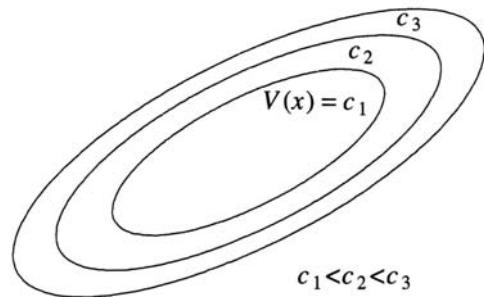


Рис. 4.2. Поверхности уровней функции Ляпунова.

$V(x(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поскольку $V(x(t))$ — монотонно убывающая и неотрицательная функция,

$$V(x(t)) \rightarrow c \geq 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Для того, чтобы убедиться в том, что $c = 0$, проведем доказательство от противного. Предположим $c > 0$. Из непрерывности $V(x)$ следует, что существует $d > 0$, такое что $B_d \subset \Omega_c$. Из предела $V(x(t)) \rightarrow c > 0$ следует, что траектория $x(t)$ лежит вне шара B_d для всех $t \geq 0$. Пусть $-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$. Этот максимум существует, т. к. непрерывная функция $\dot{V}(x)$ имеет максимум на компактном множестве $\{d \leq \|x\| \leq r\}$.¹⁾ Из (4.4) следует, что $-\gamma < 0$. Тогда

$$V(x) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t.$$

Поскольку правая часть при достаточно больших t становится отрицательной, это неравенство в конечном счете вступит в противоречие с предположением $c > 0$. \square

Непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$, удовлетворяющая (4.2) и (4.3) называется *функцией Ляпунова*. Поверхность $V(x) = c$ называется *поверхностью Ляпунова* или *поверхностью уровня*. С использованием рисунка 4.2 и понятия поверхностей Ляпунова мы можем дать интуитивное толкование теоремы 4.1. Действительно, на рисунке 4.2 показаны поверхности Ляпунова при увеличивающихся значениях c . Из условия $\dot{V} \leq 0$ следует, что когда траектория пересекает поверхность Ляпунова $V(x) = c$, она входит во внутренность множества $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c\}$ и никогда уже не сможет выйти из него. При $\dot{V} < 0$ траектория движется с одной поверхности Ляпунова на внутреннюю поверхность Ляпунова, соответствующую меньшему

¹⁾ См. [10, теорема 4-20].

значению c . При дальнейшем уменьшении c поверхность Ляпунова вырождается в точку — начало координат, т. е. с течением времени траектория приближается к началу координат. Если нам известно лишь $\dot{V} \leq 0$, мы не можем быть уверены в том, что траектория будет приближаться к началу координат,¹⁾ но мы можем заключить, что начало координат является устойчивой точкой равновесия, поскольку траектория содержится во внутренности любого шара B_ε при условии, что начальное состояние системы $x(0)$ принадлежит внутренности поверхности Ляпунова, содержащейся в этом шаре.

Функция $V(x)$, удовлетворяющая условию (4.2), т. е. $V(0) = 0$ и $V(x) > 0$ при $x \neq 0$, называется *положительно определенной*. Если функция $V(x)$ удовлетворяет более слабому условию $V(x) \geq 0$ при $x \neq 0$, она называется *положительно полуопределенной*. Функция $V(x)$, называется *отрицательно определенной* или *отрицательно полуопределенной*, если $-V(x)$ является соответственно положительно определенной или положительно полуопределенной. Если $V(x)$ не имеет определенного знака в смысле приведенных выше определений, она называется *законопределенной*. С учетом введенных терминов можно переформулировать теорему Ляпунова: *Начало координат устойчиво (асимптотически устойчиво), если существует непрерывно дифференцируемая положительно определенная функция $V(x)$, такая что функция $\dot{V}(x)$ отрицательно полуопределена (отрицательно определена)*.

Одним из классов скалярных функций, для которых может быть легко определена из закоопределенность, является класс функций, представляющих собой квадратичные формы

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j,$$

где P — вещественная симметричная матрица. В этом случае $V(x)$ является положительно определенной (положительно полуопределенной), если и только если собственные значения матрицы P положительны (неотрицательны), или иными словами, если и только если все ведущие главные миноры матрицы P положительны (все главные миноры матрицы P неотрицательны).²⁾ Если функция $V(x) = x^T P x$ положительно определена (положительно полуопределена), мы будем говорить, что матрица P положительно определена (положительно полуопределена) и писать $P > 0$ ($P \geq 0$).

Пример 4.1. Рассмотрим функцию

$$V(x) = ax_1^2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 + 4x_2x_3 + ax_3^2 =$$

¹⁾ См., однако, теорему Ла-Салля в параграфе 4.2.²⁾ Этот результат хорошо известен в теории матриц. Доказательство может быть найдено в [21] и [63].

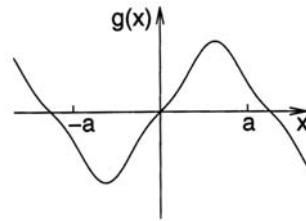


Рис. 4.3. Нелинейная функция в примере 4.2.

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^T P x.$$

Ведущие главные миноры матрицы P равны a , a^2 и $a(a^2 - 5)$. Функция $V(x)$ является положительно определенной при $a > \sqrt{5}$. Для того, чтобы эта функция была отрицательно определенной, необходима положительность ведущих главных миноров $-P$, т. е. ведущие главные миноры матрицы P должны иметь последовательно изменяющиеся знаки: миноры с нечетными номерами должны быть отрицательными, а с четными номерами — положительными. Следовательно, $V(x)$ отрицательно определена, если $a < -\sqrt{5}$. Вычислив все главные миноры, можно показать, что $V(x)$ положительно полуопределенна, если $a \geq \sqrt{5}$ и отрицательно полуопределенна, если $a \leq -\sqrt{5}$. При $a \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ функция $V(x)$ законеопределена. \triangle

Теорема Ляпунова может быть применена без непосредственного решения дифференциального уравнения. Однако, не существует систематического метода для нахождения функций Ляпунова. В некоторых случаях выбор функции Ляпунова определяется естественными соображениями: например, в электрических и механических системах в качестве кандидата на эту функцию выступает функция энергии. В остальных случаях выбор функции Ляпунова — это проблема, которую решают методом проб и ошибок. Однако ситуация складывается не так плохо, как могло бы показаться на первый взгляд. По мере ознакомления с большим количеством примеров и приложений рассматриваемой в этой книге теории некоторые идеи и подходы к решению задачи выбора подходящей функции Ляпунова будут проявляться более отчетливо.

Пример 4.2. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x} = -g(x),$$

где функция $g(x)$ локально липшицева на $(-a, a)$ и удовлетворяет

$$g(0) = 0; \quad xg(x) > 0, \quad \forall x \neq 0 \quad \text{и} \quad x \in (-a, a).$$

График функции, удовлетворяющей указанным требованиям, изображен на рисунке 4.3. Система имеет изолированную точку равновесия в начале координат. В этом простом примере можно легко удостовериться в том, что начало координат асимптотически устойчиво, поскольку решения системы, начинаясь по любую сторону от начала координат стремятся к нему. Для того, чтобы убедиться в этом достаточно принять во внимание знак производной \dot{x} , определенный рассматриваемым уравнением. К аналогичному заключению можно придти с использованием теоремы Ляпунова. Рассмотрим функцию

$$V(x) = \int_0^x g(y) dy.$$

В области $D = (-a, a)$ функция $V(x)$ непрерывно дифференцируема, $V(0) = 0$ и $V(x) > 0$ для всех $x \neq 0$. Таким образом, функцию $V(x)$ можно рассмотреть в качестве кандидата на функцию Ляпунова. Для того, чтобы установить является ли $V(x)$ функцией Ляпунова или нет, вычислим ее производную вдоль траектории системы:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}[-g(x)] = -g^2(x) < 0, \quad \forall x \in D - \{0\}.$$

Следовательно, по теореме 4.1 начало координат асимптотически устойчиво. \triangle

Пример 4.3. Рассмотрим уравнения маятника без трения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 \end{aligned}$$

и исследуем устойчивость точки равновесия в начале координат. Естественным выбором функции Ляпунова является функция энергии:

$$V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Очевидно, что $V(0) = 0$ и $V(x)$ положительно определена в области $-2\pi < x_1 < 2\pi$. Производная $V(x)$ вдоль траекторий системы имеет вид

$$\dot{V}(x) = a\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = ax_2 \sin x_1 - ax_2 \sin x_1 = 0.$$

Таким образом, условия (4.2) и (4.3) теоремы 4.1 выполнены и мы можем заключить, что начало координат устойчиво. Поскольку $\dot{V}(x) \equiv 0$, мы также можем сказать, что начало координат не является асимптотически устойчивым. Траектории, начинающиеся на поверхности Ляпунова $V(x) = c$, остаются на этой поверхности при всех будущих моментах времени. \triangle

Пример 4.4. Рассмотрим уравнения маятника с учетом трения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - bx_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим в качестве функции Ляпунова ту же функцию энергии $V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$. Тогда

$$\dot{V}(x) = a\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = -bx_2^2.$$

Производная $\dot{V}(x)$ — отрицательно полуопределенная функция. Она не является отрицательно определенной, т. к. $\dot{V}(x) = 0$ при $x_2 = 0$ вне зависимости от значения x_1 , т. е. $\dot{V}(x) = 0$ вдоль x_1 -оси. Таким образом, мы можем заключить, что начало координат устойчиво. Однако, при анализе фазового портрета уравнения маятника мы видели, что при $b > 0$ начало координат асимптотически устойчиво. Функция Ляпунова в виде функции энергии не позволяет выявить этот факт. В параграфе 4.2 мы увидим, что теорема Ла-Салля позволяет получить более адекватный результат. Здесь же мы попытаемся найти функцию Ляпунова $V(x)$, которая имела бы отрицательно определенную производную $\dot{V}(x)$. Для этого рассмотрим снова функцию энергии и заменим член $(1/2)x_2^2$ квадратичной формой общего вида $(1/2)x^T Px$, где P — некоторая положительно определенная (2×2) -матрица:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}x^T Px + a(1 - \cos x_1) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + a(1 - \cos x_1). \end{aligned}$$

Для того, чтобы квадратичная форма $(1/2)x^T Px$ была положительно определенной, необходимо, чтобы элементы матрицы P удовлетворяли условиям

$$p_{11} > 0, \quad p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0.$$

Производная $\dot{V}(x)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + a \sin x_1)x_2 + (p_{12}x_1 + p_{22}x_2)(-a \sin x_1 - bx_2) = \\ &= a(1 - p_{22})x_2 \sin x_1 - ap_{12}x_1 \sin x_1 + (p_{11} - p_{12}b)x_1 x_2 + \\ &\quad + (p_{12} - p_{22}b)x_2^2. \end{aligned}$$

Выберем p_{11}, p_{12} и p_{22} так, чтобы функция $\dot{V}(x)$ была отрицательно определенной. Члены $x_2 \sin x_1$ и $x_1 x_2$ знаконеопределенны, но мы можем избавиться от них положив $p_{22} = 1$, $p_{11} = bp_{12}$. В этом случае $V(x)$ будет положительно определенной, если p_{12} удовлетворяет $0 < p_{12} < b$. Пусть $p_{12} = b/2$. Тогда

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}abx_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}bx_2^2.$$

Член $x_1 \sin x_1 > 0$ для всех $0 < |x_1| < \pi$. Пусть $D = \{x \in R^n \mid |x_1| < \pi\}$. Тогда $V(x)$ положительно определена и $\dot{V}(x)$ отрицательно определена на D и, следовательно, по теореме 4.1 начало координат асимптотически устойчиво. \triangle

Этот пример выявляет важную особенность теоремы устойчивости Ляпунова: эта теорема дает лишь достаточные условия устойчи-

вости. Невыполнение для выбранного кандидата на роль функции Ляпунова условий устойчивости или асимптотической устойчивости не означает, что начало координат не является устойчивой или асимптотически устойчивой точкой равновесия системы. Это означает лишь то, что эти свойства устойчивости не могут быть установлены с использованием выбранного кандидата на роль функции Ляпунова. Является ли точка равновесия устойчивой (асимптотически устойчивой), или же не является, может быть установлено только в ходе дополнительных исследований.

При нахождении функции Ляпунова в примере 4.4 мы осознанно подбирали решение с учетом определенных свойств искомой функции. Мы анализировали выражение для производной $\dot{V}(x)$ и возвращались к выбору параметров $V(x)$ для того, чтобы сделать $\dot{V}(x)$ отрицательно определенной функцией. Эта идея имеет большое значение при выборе функции Ляпунова. Процедура, в которой используется эта идея, известна как *метод переменного градиента* (*variable gradient method*). Пусть $V(x)$ — скалярная функция от x и $g(x) = \nabla V = (\partial V / \partial x)^T$. Производная $\dot{V}(x)$ вдоль траекторий (4.1) определяется равенством

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = g^T(x) f(x).$$

Идея метода состоит в выборе $g(x)$ таким образом, чтобы эта функция являлась градиентом положительно определенной функции $V(x)$ и при этом $\dot{V}(x)$ была бы отрицательно определенной. Нетрудно удостовериться (Упражнение 4.5) в том, что $g(x)$ является градиентом скалярной функции, если и только если матрица Якоби $[\partial g / \partial x]$ симметрична, т. е.

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j, = 1, \dots, n.$$

С учетом этого ограничения выберем $g(x)$ таким образом, чтобы функция $g^T(x)f(x)$ была отрицательно определенной. Тогда функция $V(x)$ может быть вычислена следующим образом:

$$V(x) = \int_0^x g^T(y) dy = \int_0^x \sum_{i=1}^n g_i(y) dy_i.$$

Интегрирование выполняется вдоль любой кривой, соединяющей начало координат и x .¹⁾ Обычно это интегрирование выполняется вдоль осей:

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(y_1, 0, \dots, 0) dy_1 + \int_0^{x_2} g_1(x_1, y_2, \dots, 0) dy_2 + \dots$$

¹⁾ Криволинейный интеграл вектора градиента не зависит от пути. (См. [10], теорема 10-37.)

$$\dots + \int_0^{x_n} g_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_n) dy_n.$$

Оставляя некоторые параметры $g(x)$ неопределенными, можно попытаться выбрать остальные таким образом, чтобы функция $V(x)$ была положительно определенной. Метод переменного градиента мог бы быть использован для нахождения функции Ляпунова в Примере 4.4. Однако мы не будем этого делать и проиллюстрируем метод на примере несколько более общей системы.

Пример 4.5. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - ax_2,\end{aligned}$$

где $a > 0$, $h(\cdot)$ — локально липшицева функция, $h(0) = 0$ и $yh(y) > 0$ для всех $y \neq 0$, $y \in (-b, c)$, где b и c — некоторые положительные константы. Уравнение маятника является частным случаем этой системы. Чтобы применить метод переменного градиента, мы должны найти вектор $g(x)$ размерности 2, такой что

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}$$

$$\dot{V}(x) = g_1(x)x_2 - g_2(x)[h(x_1) + ax_2] < 0, \quad \text{при } x \neq 0$$

и

$$V(x) = \int_0^x g^T(y) dy > 0 \quad \text{при } x \neq 0.$$

Рассмотрим следующий выбор:

$$g(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x)x_1 + \beta(x)x_2 \\ \gamma(x)x_1 + \delta(x)x_2 \end{bmatrix},$$

где скалярные функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ подлежат определению. Для того, чтобы было выполнено требование симметричности, необходимо

$$\beta(x) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}x_1 + \frac{\partial \beta}{\partial x_2}x_2 = \gamma(x) + \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial \delta}{\partial x_1}x_2.$$

Производная $\dot{V}(x)$ определяется равенством

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \alpha(x)x_1x_2 + \beta(x)x_2^2 - a\gamma(x)x_1x_2 - \\ &\quad - a\delta(x)x_2^2 - \delta(x)x_2h(x_1) - \gamma(x)x_1h(x_1).\end{aligned}$$

Для того, чтобы исключить перекрестные члены, положим

$$\alpha(x)x_1 - a\gamma(x)x_1 - \delta(x)h(x_1) = 0.$$

Тогда

$$\dot{V}(x) = -[a\delta(x) - \beta(x)]x_2^2 - \gamma(x)x_1h(x_1).$$

Для простоты положим $\delta(x) = \delta = \text{const}$, $\gamma(x) = \gamma = \text{const}$ и $\beta(x) = \beta = \text{const}$. Тогда $\alpha(x)$ зависит только от x_1 и требование симметричности выполняется, если $\beta = \gamma$. В этом случае выражение для $g(x)$ сводится к следующему:

$$g(x) = \begin{bmatrix} a\gamma x_1 + \delta h(x_1) + \gamma x_2 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 \end{bmatrix}$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned}V(x) &= \int_0^{x_1} [a\gamma y_1 + \delta h(y_1)] dy_1 + \int_0^{x_2} (\gamma x_1 + \delta y_2) dy_2 = \\ &= \frac{1}{2}a\gamma x_1^2 + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy + \gamma x_1 x_2 + \frac{1}{2}\delta x_2^2 = \frac{1}{2}x^T P x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy,\end{aligned}$$

где

$$P = \begin{bmatrix} a\gamma & \gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Заметим, что при $\delta > 0$ и $0 < \gamma < a\delta$ функции $V(x)$ и $\dot{V}(x)$ соответственно положительно и отрицательно определены. Например, при $\gamma = ak\delta$, $0 < k < 1$ получаем функцию Ляпунова

$$V(x) = \frac{\delta}{2}x^T \begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy,$$

удовлетворяющую условиям (4.2) и (4.4) теоремы 4.1 в области $D = \{x \in R^2 \mid -b < x_1 < c\}$. Следовательно начало координат асимптотически устойчиво. \triangle

В случае асимптотической устойчивости начала координат интересен вопрос о том, насколько далеко от начала координат может проходить траектория системы, так чтобы при этом она стремилась к началу координат при $t \rightarrow \infty$. Этот вопрос связан с задачей определения *области притяжения*, (domain of attraction, basin) называемой также *областью асимптотической устойчивости*. Пусть $\phi(t; x)$ — решение (4.1), начинающееся в начальном состоянии x в момент времени $t = 0$. Тогда область притяжения определяется как множество всех точек x , таких что $\phi(t; x)$ определено для всех $t \geq 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; x) = 0$. Определение области притяжения аналитическими методами может быть очень сложной или даже невыполнимой задачей. Однако, функции Ляпунова могут быть использованы для оценки этой области, т. е. для нахождения множеств, содержащихся в области притяжения. Из доказательства теоремы 4.1 видно, что если существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям асимптотической устойчивости

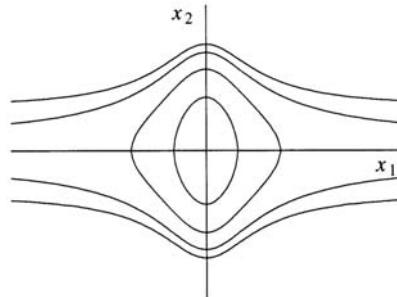


Рис. 4.4. Поверхности Ляпунова для функции $V(x) = x_1^2/(1 + x_1^2) + x_2^2$.

в области D и если множество $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c\}$ ограничено и содержитя в D , то любая начинаящаяся в Ω_c траектория остается в этом множестве и стремится к началу координат при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, множество Ω_c может служить в качестве оценки области притяжения. Однако, эта оценка может быть консервативна, т. е. эта область может быть существенно меньше действительной области притяжения. В параграфе 8.2 мы рассмотрим примеры оценки области притяжения и познакомимся с некоторыми идеями, которые позволяют увеличить эти оценки. Здесь мы рассмотрим другой вопрос: При каких условиях областью притяжения является все пространство R^n ? Иными словами, какие должны выполняться условия, чтобы при любом начальном состоянии системы траектория $\phi(t; x)$ стремилась бы к началу координат при $t \rightarrow \infty$ вне зависимости от того, насколько велико значение $\|x\|$. Если асимптотически устойчивая точка равновесия обладает этим свойством, она называется *глобально асимптотически устойчивой*.

¹⁾ Вспоминая доказательство теоремы 4.1, мы можем заключить, что система глобально асимптотически устойчива, если любая точка $x \in R^n$ принадлежит внутренности ограниченного множества Ω_c . Очевидно, что для выполнения этого условия необходимо, чтобы условия теоремы 4.1 выполнялись глобально, т. е. $D = R^n$, но достаточно ли этого? Оказывается, для того, чтобы любая точка из R^n могла содержаться в ограниченном множестве Ω_c , необходимо наложить дополнительные условия. Проблема заключается в том, что при больших c множество Ω_c должно оставаться ограниченным. Рассмотрим, например, функцию

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2.$$

На рисунке 4.4 показаны поверхности $V(x) = c$ для различных положительных значений c . При малых значениях c поверхность $V(x) =$

¹⁾ Прим. ред. перев. — В отечественной литературе принят термин «асимптотически устойчивая в целом».

= c замкнута и, следовательно, Ω_c ограничено, т. к. оно содержитя в замкнутом шаре B_r для некоторого $r > 0$. Этот факт является следствием непрерывности и положительной определенности функции $V(x)$. При достаточно большом c поверхность $V(x) = c$ становится открытым множеством, а множество Ω_c — незамкнутым. Для того, чтобы Ω_c содержалось во внутренности шара B_r константа c должна удовлетворять неравенству $c < \inf_{\|x\| \geq r} V(x)$. Если

$$l = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|x\| \geq r} V(x) < \infty,$$

то Ω_c будет ограничено при $c < l$. В рассматриваемом случае

$$l = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|x\|=r} \left[\frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \right] = \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \frac{x_1^2}{1+x_1^2} = 1.$$

Таким образом, множество Ω_c замкнуто только при $c < 1$. Дополнительным условием, гарантирующим ограниченность Ω_c при всех значениях $c > 0$, является следующее:

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow \infty.$$

Функция, удовлетворяющая этому требованию, называется *радиально неограниченной*.

Теорема 4.2. Пусть $x = 0$ — точка равновесия системы (4.1). Пусть $V : R^n \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая что

$$V(0) = 0 \quad \text{и} \quad V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (4.5)$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (4.7)$$

Тогда $x = 0$ — глобально асимптотически устойчивая точка равновесия.

Доказательство: Для любой точки $p \in R^n$ положим $c = V(p)$. Из условия (4.6) следует, что для любой $c > 0$ существует $r > 0$, такая что $V(x) > c$ при $\|x\| > r$. Тогда $\Omega_c \subset B_r$ и, следовательно, Ω_c ограничено. Дальнейшее доказательство может быть проведено аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 4.1. \square

Теорема 4.2 известна как теорема Барбашина–Красовского.¹⁾ В упражнении 4.8 дан контрпример, который показывает, что условие радиальной неограниченности действительно необходимо.

¹⁾ Прим. ред. перев. — На самом деле в работе Е.А.Барбашина и Н.Н.Красовского [Д12] получено более общее утверждение, охватывающее случай нестрогого неравенства $\dot{V}(x) \leq 0$. Именно оно обычно называется теоремой Барбашина–Красовского (см. также примечание к параграфу 4.2).

Пример 4.6. Рассмотрим систему из примера 4.5, но на этот раз предположим, что условие $y h(y) > 0$ выполнено при всех $y \neq 0$. Функция Ляпунова

$$V(x) = \frac{\delta}{2} x^T \begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy$$

положительно определена для всех $x \in R^2$ и радиально неограничена. Производная

$$\dot{V}(x) = -a\delta(1-k)x_2^2 - a\delta k x_1 h(x_1)$$

отрицательно определена для всех $x \in R^2$, поскольку $0 < k < 1$. Следовательно, начало координат глобально асимптотически устойчиво. \triangle

Если начало координат $x = 0$ является глобально асимптотически устойчивой точкой равновесия системы, оно представляет собой единственную точку равновесия системы. Действительно, если существует другая точка равновесия \bar{x} , то любая траектория, начинающаяся в этой точке, не покидает ее при всех $t \geq 0$ и, следовательно, не стремится к началу координат, что противоречит предположению о том, что начало координат является глобально асимптотической точкой равновесия системы. Таким образом, вопрос о глобальной асимптотической устойчивости не может стоять при исследовании систем с несколькими точками равновесия, как в примере маятника.

В теоремах 4.1 и 4.2 устанавливаются условия устойчивости или асимптотической устойчивости точки равновесия. Существуют также теоремы, которые устанавливают условия неустойчивости точки равновесия. Наиболее сильным результатом в этой области является теорема Четаева, которая будет сформулирована ниже как теорема 4.3. Однако, для того, чтобы сформулировать эту теорему, нам необходимо ввести некоторые дополнительные термины. Пусть $V : D \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируемая функция, определенная в области $D \subset R^n$, содержащей начало координат $x = 0$. Предположим, что $V(0) = 0$ и что существует сколь угодно близкая к началу координат точка x_0 , такая что $V(x_0) > 0$. Выберем $r > 0$ так, чтобы шар $B_r = \{x \in R^n \mid \|x\| \leq r\}$ содержался в D и положим

$$U = \{x \in B_r \mid V(x) > 0\}. \quad (4.8)$$

Множество U непустое и содержится в B_r . Его границу составляют поверхность $V(x) = 0$ и сфера $\|x\| = r$. Поскольку $V(0) = 0$, начало координат лежит на границе U и внутри B_r . Заметим, что U может состоять из более чем одного компонента. Например, на рисунке 4.5 изображено множество U для $V(x) = (x_1^2 - x_2^2)/2$. Множество U может быть всегда построено при условии, что $V(0) = 0$ и $V(x_0) > 0$ для некоторой точки x_0 , произвольно близкой к началу координат.

Теорема 4.3. Пусть $x = 0$ — точка равновесия системы (4.1). Пусть $V : D \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая

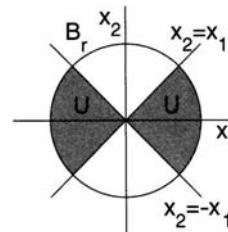


Рис. 4.5. Множество U для $V(x) = (x_1^2 - x_2^2)/2$.

что $V(0) = 0$ и $V(x_0) > 0$ для некоторой точки x_0 такой, что $\|x_0\|$ — произвольно малая величина. Определим множество U отношением (4.8) и предположим, что $\dot{V}(x) > 0$ в U . Тогда $x = 0$ — неустойчивая точка равновесия.

Доказательство: Точка x_0 принадлежит внутренности U и $V(x_0) = a > 0$. Траектория $x(t)$, начинающаяся в $x(0) = x_0$, должна покинуть множество U . Для того, чтобы убедиться в этом, заметим, что пока $x(t)$ находится в U , справедливо $V(x(t)) \geq a$, поскольку $\dot{V}(x) > 0$ в U . Пусть

$$\gamma = \min\{\dot{V}(x) \mid x \in U \text{ и } V(x) \geq a\}.$$

Эта константа действительно существует, т. к. непрерывная функция $\dot{V}(x)$ имеет минимум на компактном множестве $\{x \in U \text{ и } V(x) \geq a\} = \{x \in B_r \text{ и } V(x) \geq a\}$.¹⁾ Тогда $\gamma > 0$ и

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \geq a + \int_0^t \gamma ds = a + \gamma t.$$

Из этого неравенства видно, что $x(t)$ не может навсегда оставаться в U , т. к. $V(x)$ ограничена в U . Кроме того, $x(t)$ не может покинуть U через поверхность $V(x) = 0$, поскольку $V(x(t)) \geq a$. Следовательно, траектория $x(t)$ покидает множество U через поверхность сферы $\|x\| = r$. Поскольку это может случиться при произвольно малой $\|x_0\|$, начало координат неустойчиво. \square

Существуют и другие теоремы о неустойчивости, которые были доказаны ранее теоремы Четаева, но они являются следствиями этой теоремы. (См. упражнения 4.11 и 4.12).

Пример 4.7. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + g_1(x) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + g_2(x), \end{aligned}$$

¹⁾ См. [10, теорема 4-20].

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — локально липшицевы функции, удовлетворяющие в окрестности начала координат D неравенствам

$$|g_1(x)| \leq k\|x\|_2^2, \quad |g_2(x)| \leq k\|x\|_2^2.$$

Из этих неравенств следует, что $g_1(0) = g_2(0) = 0$, т. е. начало координат является точкой равновесия. Рассмотрим функцию

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

На прямой $x_2 = 0$ в произвольно близких к началу координат точках выполнено $V(x) > 0$. Множество U показано на рисунке 4.5. Производная функции $\dot{V}(x)$ вдоль траекторий системы определяется равенством

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x).$$

Абсолютная величина члена $x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)| \leq \sum_{i=1}^2 |x_i| \cdot |g_i(x)| \leq 2k\|x\|_2^3.$$

Следовательно,

$$\dot{V}(x) \geq \|x\|_2^2 - 2k\|x\|_2^3 = \|x\|_2^2(1 - 2k\|x\|_2).$$

При выборе r так, что $B_r \subset D$ и $r < 1/(2k)$, выполняются все условия теоремы 4.3. Таким образом, начало координат неустойчиво. \triangle

4.2. Принцип инвариантности

При анализе уравнения маятника с трением (см. пример 4.4) мы видели, что функция энергии не удовлетворяет условиям теоремы 4.1 о асимптотической устойчивости, поскольку ее производная $\dot{V}(x) = -bx_2^2$ отрицательно полуопределенна. Заметим, однако, что $\dot{V}(x)$ отрицательна везде, за исключением линии $x_2 = 0$, где $\dot{V}(x) = 0$. Для того, чтобы для траектории рассматриваемой системы было выполнено $\dot{V}(x) = 0$ необходимо, чтобы эта траектория располагалась целиком на линии $x_2 = 0$. За исключением точки начала координат это невозможно обеспечить, т. к. из уравнений системы видно

$$x_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \sin x_1(t) = 0.$$

Следовательно, на сегменте $-\pi < x_1 < \pi$ линии $x_2 = 0$ условие $\dot{V}(x) = 0$ вдоль траекторий системы может быть выполнено лишь в начале координат $x = 0$. Таким образом, вдоль этих траекторий функция $V(x(t))$ должна убывать к 0 и, следовательно, $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Этот результат соотносится с тем, что вследствие наличия трения энергия находящейся в движении системы не может оставаться постоянной.

Приведенное выше рассуждение указывает на то, что если в области вблизи начала координат определена функция Ляпунова, чья

производная вдоль траекторий системы отрицательно полуопределена, и если установлено, что ни одна из траекторий не может оставаться в точках, где $\dot{V}(x) = 0$, за исключением начала координат, то начало координат асимптотически устойчиво. Эта идея следует из *принципа инвариантности Ла-Салля*, который будет рассмотрен в этом параграфе.¹⁾ Для того, чтобы сформулировать и доказать теорему Ла-Салля нам необходимо определить некоторые понятия. Пусть $x(t)$ — решение системы (4.1). Точка p называется *положительной предельной точкой* траектории $x(t)$, если существует последовательность $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, такая что $x(t_n) \rightarrow p$ при $n \rightarrow \infty$. Множество всех положительных предельных точек траектории $x(t)$ называется *положительно предельным множеством*. Множество M называется *инвариантным множеством* по отношению к системе (4.1), если

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \in R,$$

т. е. если решение принадлежит M в некоторый момент времени, то оно принадлежит этому множеству во все будущие и прошлые моменты времени. Множество M называется *положительно инвариантным множеством*, если

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \geq 0.$$

Мы также будем говорить, что $x(t)$ стремится к множеству M при t стремящемся к бесконечности, если для любой константы $\varepsilon > 0$ существует момент времени $T > 0$, такой что

$$\text{dist}(x(t), M) < \varepsilon, \quad \forall t > T,$$

где $\text{dist}(p, M)$ — расстояние от точки p до множества M , т. е. наименьшее из расстояний между p и точками множества M :

$$\text{dist}(p, M) = \inf_{x \in M} \|p - x\|.$$

Введенные выше понятия могут быть проиллюстрированы на примере асимптотически устойчивой точки равновесия и устойчивого предельного цикла на плоскости. Асимптотически устойчивая точка равновесия представляет собой положительное предельное множество любого решения, начинающегося в достаточно малой окрестности этой точки. Устойчивый предельный цикл представляет собой положительное предельное множество любого решения, начинающегося в достаточно малой окрестности этого предельного цикла. Решение стремится

¹⁾ Прим. ред. перев. — Эта идея впервые была высказана в работе [Д12] и часто называется принципом Барбашина–Красовского. В работе Дж.Ла-Салля [112] она была распространена на задачи устойчивости множеств. В последние годы теорему, называемую теоремой Ла-Салля в англоязычной литературе, стали называть теоремой Красовского–Ла-Салля или (для нестационарного случая) теоремой Красовского–Ла-Салля–Йосидавы.

к предельному циклу при $t \rightarrow \infty$. Заметим, однако, что решение не стремится к какой-либо отдельной точке на предельном цикле. Другими словами, утверждение « $x(t)$ стремится к M при $t \rightarrow \infty$ » не означает, что существует $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$. Точка равновесия и предельный цикл представляют собой инвариантные множества, поскольку любое решение, начинаяющееся в любом из этих множеств, остается в нем при всех $t \in R$. Множество $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c\}$, $\dot{V}(x) \leq 0$ для всех $x \in \Omega_c$, является положительным инвариантным множеством, поскольку из теоремы 4.1 следует, что решение, начинаяющееся в Ω_c , остается в Ω_c для всех $t \geq 0$.

В следующей лемме, доказательство которой приведено в приложении С.3, формулируется фундаментальное свойство предельных множеств.

Лемма 4.1. *Если решение $x(t)$ системы (4.1) ограничено и принадлежит D при $t \geq 0$, то его положительное предельное множество L^+ представляет собой непустое, компактное, инвариантное множество. Более того, $x(t)$ стремится к L^+ при $t \rightarrow \infty$.*

Мы готовы сформулировать теорему Ла-Салля.

Теорема 4.4. *Пусть $\Omega \subset D$ — компактное множество, которое является положительно инвариантным множеством для системы (4.1). Пусть $V : D \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая что $\dot{V}(x) \leq 0$ в Ω . Предположим, что E — множество всех точек из Ω , в которых $\dot{V}(x) = 0$ и M — наибольшее инвариантное множество, содержащееся в E . Тогда каждое решение, начинаяющееся в Ω , стремится к M при $t \rightarrow \infty$.*

Доказательство: Пусть $x(t)$ — решение (4.1), начинаяющееся в Ω . Поскольку $\dot{V}(x) \leq 0$ в Ω , функция $V(x(t))$ убывает с течением времени. Поскольку $V(x)$ непрерывна на компактном множестве Ω , она ограничена в Ω сверху и, следовательно, $V(x(t))$ имеет предел a при $t \rightarrow \infty$. Заметим также, что положительное предельное множество L^+ содержится в Ω , т. к. Ω — замкнутое множество. Для любой точки $p \in L^+$ существует последовательность t_n , такая что $t_n \rightarrow \infty$ и $x(t_n) \rightarrow p$ при $n \rightarrow \infty$. Из непрерывности $V(x)$ следует, что $V(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = a$. Тогда $V(x) = a$ на L^+ . Поскольку по лемме 4.1 множество L^+ является инвариантным, $\dot{V}(x) = 0$ на L^+ . Таким образом,

$$L^+ \subset M \subset E \subset \Omega.$$

Поскольку $x(t)$ ограничено, $x(t)$ стремится к L^+ при $t \rightarrow \infty$ (по лемме 4.1). Следовательно $x(t)$ стремится к M при $t \rightarrow \infty$. \square

В теореме 4.4, в отличие от теоремы Ляпунова, не требуется, чтобы функция $V(x)$ была положительно определена. Заметим также, что построение множества Ω никак не связано с построением функции $V(x)$. Однако, во многих приложениях нахождение $V(x)$ гарантирует существование множества Ω . В частности, если $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c\}$ ограничено и $\dot{V}(x) \leq 0$ в Ω , то мы можем положить $\Omega = \Omega_c$.

Если $V(x)$ положительно определена, множество Ω_c ограничено при достаточно малом $c > 0$.¹⁾ Это утверждение не всегда справедливо, если $V(x)$ не является положительно определенной функцией. Например, если $V(x) = (x_1^2 - x_2^2)^2$, множество Ω_c неограничено при всех положительных значениях c . Если $V(x)$ радиально неограничена, т. е. $V(x) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$, то множество Ω_c ограничено при всех положительных значениях c . Это утверждение справедливо вне зависимости от того, является ли функция $V(x)$ положительно определенной, или нет.

Если задача состоит в том, чтобы показать, что $x(t) \rightarrow 0$ при $\|x\| \rightarrow \infty$, следует доказать, что наибольшим инвариантным множеством является начало координат. Это можно сделать, если показать, что единственным решением, постоянно остающимся в множестве E , является тривиальное решение $x(t) \equiv 0$. Применяя теорему 4.4 в этом случае и используя положительно определенную функцию Ляпунова $V(x)$, мы получаем следующие два следствия, которые являются более общими результатами, по сравнению с теоремами 4.1. и 4.2.²⁾

Следствие 4.1. *Пусть $x = 0$ — точка равновесия (4.1). Пусть $V : D \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируемая положительно определенная функция, определенная в области D , содержащей начало координат $x = 0$ и такая, что $\dot{V}(x) \leq 0$ в D . Рассмотрим множество $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ и предположим, что единственным решением, постоянно остающимся в множестве S , является тривиальное решение $x(t) \equiv 0$. Тогда начало координат асимптотически устойчиво.*

Следствие 4.2. *Пусть $x = 0$ — точка равновесия (4.1). Пусть $V : R^n \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируемая, радиально неограниченная, положительно определенная функция, такая, что $\dot{V}(x) \leq 0$ для всех $x \in R^n$. Рассмотрим множество $S = \{x \in R^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$ и предположим, что единственным решением, постоянно остающимся в множестве S , является тривиальное решение $x(t) \equiv 0$. Тогда начало координат глобально асимптотически устойчиво.*

При отрицательно определенной производной функции Ляпунова $\dot{V}(x)$ мы имеем $S = \{0\}$ и следствия 4.1. и 4.2 сводятся, соответственно, к теоремам 4.1 и 4.2.

Пример 4.8. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h_1(x_1) - h_2(x_2),\end{aligned}$$

¹⁾ Ω_c может иметь несколько компонент и это утверждение касается ограниченной компоненты, содержащей начало координат.

²⁾ Следствия 4.1 и 4.2 известны как теоремы Барбашина–Красовского, полученные ранее принципа инвариантности Ла-Салля. Прим. ред. перев. — см. [Д12].

где $h_1(\cdot)$ и $h_2(\cdot)$ — локально липшицевы функции, удовлетворяющие
 $h_i(0) = 0$, $y h_i(y) > 0$, $\forall y \neq 0$ и $y \in (-a, a)$.

Система имеет изолированную точку равновесия в начале координат. В общем случае система может иметь и другие точки равновесия — это зависит от функций $h_1(\cdot)$ и $h_2(\cdot)$. Рассматриваемые уравнения могут интерпретироваться как обобщенные уравнения маятника, где функция h_2 играет роль трения. Поэтому в качестве кандидата на функцию Ляпунова удобно рассмотреть функцию с членом, соответствующим энергии системы:

$$V(x) = \int_0^{x_1} h_1(y) dy + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Пусть $D = \{x \in R^2 \mid -a < x_1 < a\}$; функция $V(x)$ положительно определена на D и

$$\dot{V}(x) = h_1(x_1)x_2 + x_2(-h_1(x_1) - h_2(x_2)) = -x_2h_2(x_2) \leq 0$$

отрицательно полуопределена. Для нахождения множества $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ заметим, что

$$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow x_2h_2(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0, \text{ поскольку } -a < x_2 < a.$$

Следовательно, $S = \{x \in D \mid x_2 = 0\}$. Пусть $x(t)$ — решение, постоянно остающееся в S :

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2 \equiv 0 \Rightarrow h_1(x_1) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) = 0.$$

Таким образом, единственным решением, постоянно остающимся в множестве S , является тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ и, следовательно, начало координат асимптотически устойчиво. \triangle

Пример 4.9. Рассмотрим систему из примера 4.8 и предположим, что $a = \infty$ и $h_1(\cdot)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\int_0^y h_1(z) dz \rightarrow \infty \text{ при } |y| \rightarrow \infty.$$

Функция Ляпунова $V(x) = \int_0^{x_1} h_1(y) dy + (1/2)x_2^2$ радиально неограничена. Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере, можно показать, что $\dot{V}(x) \leq 0$ в R^2 и множество

$$S = \{x \in R^2 \mid \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in R^2 \mid x_2 = 0\}$$

не содержит решений, отличных от тривиального. Следовательно, начало координат глобально асимптотически устойчиво. \triangle

Теорема Ла-Салля позволяет не только ослабить требования теоремы Ляпунова относительно отрицательной определенности производной функции Ляпунова, но также и получить три важных обобщения

этой теоремы. Во-первых, она позволяет получить оценку области притяжения, причем полученная таким образом область может отличаться от стандартной $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c\}$. В качестве множества Ω , упомянутого в формулировке теоремы 4.4, может выступать любое компактное положительно инвариантное множество. Мы используем это обстоятельство в параграфе 8.2 при получении менее консервативных оценок области притяжения. Во-вторых, теорема Ла-Салля может использоваться в случаях, когда система имеет не только одну изолированную точку равновесия, но и целое множество устойчивых состояний. Эта особенность будет проиллюстрирована на простом примере адаптивной системы управления, рассмотренной в параграфе 1.2.6. В-третьих, функция $V(x)$ не обязательно должна быть положительно определенной. Использование этого обстоятельства будет продемонстрировано на примере анализа нейронной системы в параграфе 1.2.5.

Пример 4.10. Рассмотрим систему первого порядка

$$\dot{y} = ay + u$$

и адаптивный закон управления

$$u = -ky, \quad \dot{k} = \gamma y^2, \quad \gamma > 0.$$

Полагая $x_1 = y$ и $x_2 = k$, получаем замкнутую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 - a)x_1 \\ \dot{x}_2 &= \gamma x_1^2. \end{aligned}$$

Ось ординат $x_1 = 0$ представляет собой множество состояний равновесия. Мы покажем, что траектории стремятся к этому множеству при $t \rightarrow \infty$, т. е. адаптивный регулятор обеспечивает стремление выхода системы y к нулю. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2,$$

где $b > a$. Производная V вдоль траекторий системы определяется равенством

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{\gamma}(x_2 - b)\dot{x}_2 = -x_1^2(x_2 - a) + x_1^2(x_2 - b) = \\ &= -x_1^2(b - a) \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\dot{V}(x) \leq 0$. Поскольку $V(x)$ радиально неограничена, множество $\Omega_c = \{x \in R^2 \mid V(x) \leq c\}$ компактно и является положительно инвариантным. Полагая $\Omega = \Omega_c$, мы получаем, что все условия теоремы 4.4 выполнены. Множество E задается отношением $E = \{x \in \Omega_c \mid x_1 = 0\}$. Поскольку каждая точка на оси ординат $x_1 = 0$ является точкой равновесия, E является инвариантным множеством. Поэтому в рассматриваемом примере $M = E$. Из теоремы 4.4 следует, что любая траектория, начинаящаяся в Ω_c , стремится к E при $t \rightarrow \infty$, т. е. $x_1(t) \rightarrow$

$\rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Более того, поскольку $V(x)$ радиально неограничена, полученное утверждение выполнено глобально, т. е. оно справедливо для всех начальных условий $x(0)$, потому что для любого $x(0)$ константа c может быть выбрана настолько большой, что $x(0) \in \Omega_c$. \triangle

Заметим, что функция Ляпунова в примере 4.10 зависит от константы b , которая должна удовлетворять требованию $b > a$. Поскольку в адаптивной задаче управления константа a неизвестна, мы можем не знать точного значения константы b , но, тем не менее, мы можем быть уверены, что такая константа существует. Это обстоятельство позволяет выявить некоторое новое свойство метода Ляпунова, которое мы еще не упоминали в процессе изложения. Имеется ввиду то, что в некоторых ситуациях мы можем декларировать существование функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям определенной теоремы, но при этом мы даже можем не иметь ее точное выражение. В примере 4.10 мы можем определить функцию Ляпунова, если нам известно ограничение на константу a . Например, если мы знаем, что $|a| \leq \alpha$, где α — известная величина, мы можем в выражении для функции Ляпунова выбрать $b > \alpha$.

Пример 4.11. Нейронная сеть, рассмотренная в параграфе 1.2.5, описывается системой

$$\dot{x}_i = \frac{1}{C_i} h_i(x_i) \left[\sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где I_i — постоянные токи, рассматриваемые как входы системы, $R_i > 0$, $C_i > 0$ и в качестве переменных состояния x_i фигурируют напряжения на выходах усилителей. Эти величины могут принимать значения только из множества

$$H = \{x \in R^n \mid -V_M < x_i < V_M\}.$$

Функции $g_i : R \rightarrow (-V_M, V_M)$ — сигмоидальные функции

$$h_i(x_i) = \frac{dg_i}{du_i} \Big|_{u_i=g_i^{-1}(x_i)} > 0, \quad \forall x_i \in (-V_M, V_M).$$

Предположим что выполнено условие симметричности $T_{ij} = T_{ji}$. Система может иметь несколько точек равновесия в H . Мы будем предполагать, что все точки равновесия в H являются изолированными. Из условия симметричности следует, что вектор с компонентами

$$-\left[\sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i \right]$$

представляет собой градиент скалярной функции. Интегрируя аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении метода перемен-

ного градиента, можно показать, что эта скалярная функция имеет следующий вид:

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j T_{ij} x_i x_j + \sum_i \frac{1}{R_i} \int_0^{x_i} g_i^{-1}(y) dy - \sum_i I_i x_i.$$

Эта функция непрерывно дифференцируема, но в общем случае не является положительно определенной. Перепишем уравнения состояния в виде

$$\dot{x}_i = -\frac{1}{C_i} h_i(x_i) \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

и применим теорему 4.4, используя $V(x)$ в качестве функции Ляпунова. Производная этой функции вдоль траекторий системы имеет следующий вид:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} h_i(x_i) \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 \leq 0.$$

Более того,

$$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \dot{x}_i = 0, \quad \forall i.$$

Таким образом, $\dot{V}(x) = 0$ только в точках равновесия. Для того, чтобы применить теорему 4.4 мы должны построить множество Ω . Положим

$$\Omega(\varepsilon) = \{x \in R^n \mid -(V_M - \varepsilon) \leq x_i \leq (V_M - \varepsilon)\},$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малая константа. Множество $\Omega(\varepsilon)$ замкнуто и ограничено, $\dot{V}(x) \leq 0$ в $\Omega(\varepsilon)$. Осталось показать, что множество $\Omega(\varepsilon)$ является положительно инвариантным, т. е. каждая траектория начинающаяся в $\Omega(\varepsilon)$, остается в $\Omega(\varepsilon)$. Для упрощения стоящей задачи, предположим, что сигмоидальные функции имеют следующий вид:

$$g_i(u_i) = \frac{2V_M}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda \pi u_i}{2V_M} \right), \quad \lambda > 0.$$

Тогда

$$\dot{x}_i = \frac{1}{C_i} h_i(x_i) \left[\sum_j T_{ij} x_j - \frac{2V_M}{\lambda \pi R_i} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x_i}{2V_M} \right) + I_i \right].$$

При $|x_i| \geq V_M - \varepsilon$

$$\left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x_i}{2V_M} \right) \right| \geq \operatorname{tg} \left(\frac{\pi(V_M - \varepsilon)}{2V_M} \right) \rightarrow \infty \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поскольку x_i и I_i — ограниченные величины, ε может быть выбрана достаточно малой для того, чтобы было выполнено неравенство

$$x_i \sum_j T_{ij} x_j - \frac{2V_M x_i}{\lambda \pi R_i} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x_i}{2V_M} \right) + x_i I_i < 0 \text{ при } V_M - \varepsilon \leq |x_i| \leq V_M.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(x_i^2) = 2x_i \dot{x}_i < 0, \quad \text{при } V_M - \varepsilon \leq |x_i| \leq V_M, \quad \forall i.$$

Таким образом, траектории, начинающиеся в $\Omega(\varepsilon)$, останутся в $\Omega(\varepsilon)$. Более того, траектории, которые начались в $H - \Omega(\varepsilon)$, стремятся к $\Omega(\varepsilon)$. Из этого следует, что все точки равновесия лежат в компактном множестве $\Omega(\varepsilon)$. Следовательно, существует лишь конечное число изолированных точек равновесия. В $\Omega(\varepsilon)$ выполнено $E = M$, где M — множество точек равновесия внутри $\Omega(\varepsilon)$. Из теоремы 4.4 следует, что каждая траектория в $\Omega(\varepsilon)$ стремится к M при $t \rightarrow \infty$. Поскольку M состоит из изолированных точек равновесия, можно показать (упражнение 4.20), что траектория, стремящаяся к M , должна стремиться к одной из этих точек равновесия. Следовательно, траектории системы не осциллируют. \triangle

4.3. Линейные системы и линеаризация

Линейная стационарная система

$$\dot{x} = Ax \quad (4.9)$$

имеет точку равновесия в начале координат. Эта точка является изолированной, если и только если $\det(A) \neq 0$. Если $\det(A) = 0$, матрица A имеет нетривиальное нуль-пространство. Каждая точка в нуль-пространстве матрицы A является точкой равновесия системы (4.9). Другими словами, если $\det(A) = 0$, система имеет подпространство точек равновесия. Заметим, что линейная система не может иметь более одной изолированной точки равновесия. Действительно, если \bar{x}_1 и \bar{x}_2 — две различные точки равновесия системы (4.9), то из линейности следует, что любая точка на линии, соединяющей эти две точки, должна быть точкой равновесия системы. Свойства устойчивости начала координат могут быть установлены на основании информации о местоположении собственных чисел матрицы A . Из теории линейных систем известно,¹⁾ что решение (4.9) с начальным условием $x(0)$ определяется равенством

$$x(t) = \exp(At)x(0). \quad (4.10)$$

¹⁾ См., например, [9,35,81,94,158].

Кроме того, для любой матрицы A существует невырожденная матрица P (возможно, комплексная), определяющая преобразование к форме Жордана:

$$P^{-1}AP = J = \operatorname{diag}[J_1, J_2, \dots, J_r],$$

где J_i — жорданова клетка, соответствующая собственному значению λ_i матрицы A . Жордановы клетки порядка 1 и $m > 1$ имеют соответственно вид $J_i = \lambda_i$ и

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{m \times m}.$$

Тогда

$$\exp(At) = P \exp(Jt) P^{-1} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} \exp(\lambda_i t) R_{ik}, \quad (4.11)$$

где m_i — порядок клетки Жордана J_i . Если $n \times n$ матрица A имеет кратное собственное значение λ_i с алгебраической кратностью q_i ,¹⁾ то клетки Жордана, соответствующие λ_i , имеют порядок 1, если и только если $\operatorname{rank}(A - \lambda_i I) = n - q_i$. В следующей теореме устанавливаются свойства устойчивости начала координат для системы (4.9).

Теорема 4.5. Точка равновесия $x = 0$ системы $\dot{x} = Ax$ является устойчивой, если и только если все собственные значения A удовлетворяют $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ и для каждого собственного значения λ_i , $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ алгебраической кратности $q_i \geq 2$ выполнено $\operatorname{rank}(A - \lambda_i I) = n - q_i$, где n — размерность x . Точка равновесия $x = 0$ является (глобально) асимптотически устойчивой, если и только если все собственные значения A удовлетворяют $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$.

Доказательство: Из (4.10) видно, что начало координат устойчиво, если и только если $\exp(At)$ является ограниченной функцией времени для всех $t \geq 0$. Если одно из собственных значений A расположено в открытой правой полуплоскости комплексной плоскости, соответствующий экспоненциальный член $\exp(\lambda_i t)$ в (4.11) будет неограниченно возрастать при $t \rightarrow \infty$. Поэтому мы должны потребовать, чтобы собственные значения лежали в замкнутой правой полуплоскости. Однако, если порядок жордановых клеток, соответствующих собственным значениям, лежащих на мнимой оси, более единицы, в выражении для решения

¹⁾ Это означает, что q_i — кратность корня λ_i характеристического уравнения $\det(\lambda I - A) = 0$.

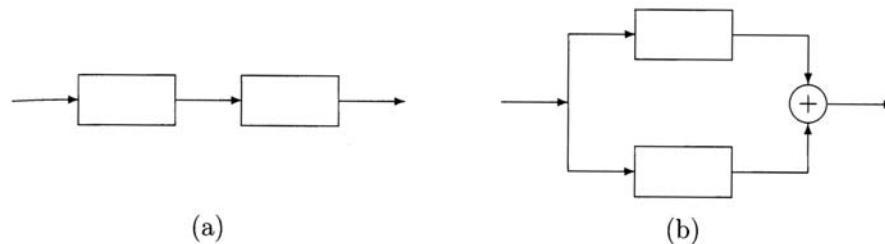


Рис. 4.6. (а) Последовательное соединение; (б) Параллельное соединение.

(4.11) могут возникнуть неограниченные члены, т. к. в этом случае они будут содержать множитель t^{k-1} . Поэтому мы должны потребовать, чтобы собственным значениям, лежащим на мнимой оси, соответствовали жордановы блоки размерности 1, что эквивалентно условию на ранг $\text{rank}(A - \lambda_i I) = n - q_i$. Таким образом, мы получили необходимые условия устойчивости. Очевидно, что эти условия являются также и достаточными для того, чтобы функция $\exp(At)$ была ограничена. Для доказательства асимптотической устойчивости начала координат следует показать, что $\exp(At)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Из (4.11) видно, что это условие равносильно требованию $\text{Re } \lambda_i < 0, \forall i$. Поскольку $x(t)$ линейно зависит от начального состояния $x(0)$, асимптотическая устойчивость начала координат является глобальным свойством. \square

С математической точки зрения понятно, почему кратные собственные значения на мнимой оси должны удовлетворять ранговому условию $\text{rank}(A - \lambda_i I) = n - q_i$. Физический смысл этого требования может быть проиллюстрирован следующим примером.

Пример 4.12. На рисунке 4.6 показаны последовательное и параллельное соединения двух идентичных систем. Каждая из систем имеет математическую модель следующего вида:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x,\end{aligned}$$

где u и y — соответственно вход и выход системы. Обозначим через A_s и A_p матрицы линейных систем с последовательным и параллельным соединениями:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения $\pm j, j = \sqrt{-1}$ матриц A_p и A_s , расположенные на мнимой оси, совпадают и имеют алгебраическую кратность $q_i = 2$.

Легко проверить, что $\text{rank}(A_p - jI) = 2 = n - q_i$ и $\text{rank}(A_s - jI) = 3 \neq n - q_i$. Таким образом, из теоремы 4.5 следует, что начало координат для системы с параллельным соединением подсистем устойчиво, а для системы с последовательным соединением подсистем — неустойчиво. С физической точки зрения различие этих систем заключается в следующем. В системе с параллельным соединением и ненулевым начальным состоянием возникают синусоидальные колебания с частотой 1 рад/с и это решение является ограниченной функцией времени. Сумма этих синусоидальных сигналов остается ограниченной функцией. С другой стороны, в системе с последовательным соединением и ненулевым начальным состоянием первого компонента возникают синусоидальные колебания этого компонента с частотой 1 рад/с, которые играют роль управляющего входного воздействия для второго компонента. Поскольку второй компонент имеет незатухающую собственную частоту 1 рад/с, входное воздействие от первого компонента приводит к возникновению «резонанса» и выход системы неограниченно возрастает. \triangle

Если все собственные значения A удовлетворяют $\text{Re } \lambda_i < 0$, матрица A называется *гурвицевой* или *устойчивой матрицей*. Начало координат (4.9) является асимптотически устойчивым, если и только если матрица A гурвицева. Асимптотическая устойчивость также может исследоваться с использованием метода Ляпунова. Рассмотрим квадратичную функцию Ляпунова вида

$$V(x) = x^T P x,$$

где P — вещественная симметричная положительно определенная матрица. Производная $V(x)$ вдоль траекторий линейной системы (4.9) определяется равенством

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (PA - A^T P)x = -x^T Qx,$$

где Q — симметричная матрица, определяемая соотношением

$$PA + A^T P = -Q. \quad (4.12)$$

Если Q положительно определена, из теоремы 4.1 следует, что начало координат асимптотически устойчиво, т. е. $\text{Re } \lambda_i < 0$ для всех собственных значений матрицы A . Здесь мы следуем стандартной процедуре метода Ляпунова, согласно которой выбирается положительно определенная функция V , а затем проверяется отрицательная определенность ее производной $\dot{V}(x)$. В случае линейных систем мы можем выполнить эту процедуру в обратном порядке. Предположим, мы начинаем наш анализ с выбора симметричной положительно определенной матрицы Q , а затем решаем уравнение (4.12) относительно P . Если (4.12) имеет положительно определенное решение, мы можем заключить, что начало координат асимптотически устойчиво. Уравнение (4.12) называется

уравнением Ляпунова. В следующей теореме асимптотическая устойчивость характеризуется в терминах решения уравнения Ляпунова.

Теорема 4.6. Матрица A является гурвицовой, т. е. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ для всех собственных значений A , если и только если для заданной положительно определенной симметричной матрицы Q существует положительно определенная симметричная матрица P , удовлетворяющая уравнению Ляпунова (4.12). Более того, если A гурвицева, то P – единственное решение (4.12).

Доказательство: Достаточность утверждений теоремы следует, как было показано выше, из теоремы 4.1 при выборе $V(x) = x^T Px$ в качестве функции Ляпунова. Для доказательства необходимости условий, предположим, что все собственные значения A удовлетворяют $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ и рассмотрим матрицу P , определенную равенством

$$P = \int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) dt. \quad (4.13)$$

Подынтегральная функция представляет собой сумму членов вида $t^{k-1} \exp(\lambda_i t)$, где $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$. Поэтому рассматриваемый интеграл существует. Матрица P является симметричной и положительно определенной. Тот факт, что она положительно определена, может быть обоснован от противного. Предположим, что существует вектор $x \neq 0$, такой что $x^T Px = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} x^T Px = 0 &\Rightarrow \int_0^\infty x^T \exp(A^T t) Q \exp(At) x dt = 0 \\ &\Rightarrow \exp(At)x \equiv 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow x = 0, \end{aligned}$$

поскольку $\exp(At)$ невырождена для всех t . Из полученного противоречия следует, что P положительно определена. Далее, подставляя (4.13) в левую часть (4.12), получаем

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= \int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) A dt + \int_0^\infty A^T \exp(A^T t) Q \exp(At) dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \exp(A^T t) Q \exp(At) dt = \exp(A^T t) Q \exp(At) \Big|_0^\infty = -Q. \end{aligned}$$

Это равенство показывает, что матрица P действительно является решением (4.12). Для доказательства его единственности предположим, что существует другое решение $\tilde{P} \neq P$. Тогда

$$(P - \tilde{P})A + A^T(P - \tilde{P}) = 0.$$

Умножая это равенство на $\exp(A^T t)$ и $\exp(At)$ соответственно слева и справа, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \exp(A^T t)[(P - \tilde{P})A + A^T(P - \tilde{P})] \exp(At) = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \exp(A^T t)(P - \tilde{P}) \exp(At) \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\exp(A^T t)(P - \tilde{P}) \exp(At) \equiv \text{const} \quad \forall t.$$

В частности, поскольку $\exp(A0) = I$, имеем

$$(P - \tilde{P}) = \exp(A^T t)(P - \tilde{P}) \exp(At) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $\tilde{P} = P$. \square

Требование положительной определенности матрицы Q может быть ослаблено. Читателю предлагается самостоятельно (упражнение 4.22) доказать, что Q может быть выбрана в форме положительно полуопределенной матрицы вида $Q = C^T C$, где пара (A, C) наблюдаемая.

Уравнение (4.12) представляет собой линейное алгебраическое уравнение, которое может быть решено с использованием его представления $Mx = y$, где x и y – вектора, составленные из элементов матриц P и Q . Этот подход будет использован в нижеследующем примере, но существуют и другие численные методы решения этих уравнений.¹⁾

Пример 4.13. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix},$$

где в силу симметричности $p_{12} = p_{21}$. В этом случае уравнение Ляпунова (4.12) может быть переписано в виде

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Единственное решение этого уравнения определяется равенством

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

¹⁾ Численные методы решения линейных алгебраических уравнений рассмотрены в [67]. Уравнение Ляпунова является частным случаем уравнения Сильвестра $PA + BP + C = 0$ и может быть решено с использованием соответствующих методов, также описанных в работе [67]. Почти все коммерческие программные средства исследования задач управления содержат процедуры для решения уравнения Ляпунова.

Матрица P является положительно определенной, поскольку ведущие главные миноры, равные 1.5 и 1.25, положительны. Следовательно, все собственные значения A расположены в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости. \triangle

Уравнение Ляпунова может быть использовано в качестве средства установления гурвицевости матрицы A , что представляет собой альтернативу непосредственному вычислению собственных чисел A . С этой целью, выберем положительно определенную матрицу Q (например, $Q = I$), и решим уравнение Ляпунова (4.12) относительно P . Тогда тот факт, что матрица A является гурвицевой, эквивалентен тому, что полученное решение является положительно определенной матрицей. Однако, с вычислительной точки зрения этот метод установления гурвицевости матриц не имеет преимуществ перед стандартным методом вычисления собственных значений.¹⁾ Кроме того, знание собственных значений позволяет непосредственно получить информацию о выходе линейной системы. Уравнение Ляпунова интересно не тем, что оно может использоваться при установлении устойчивости линейной системы,²⁾ а тем, что оно определяет процедуру нахождения функции Ляпунова для любой линейной системы $\dot{x} = Ax$, где A — гурвицева матрица. Только тот факт, что функция Ляпунова существует, позволяет нам сделать определенные заключения о поведении системы в случаях, когда ее правая часть Ax содержит возмущения, причем природа возмущений не играет большого значения — это могут быть линейные возмущения коэффициентов матрицы A , или какие-либо нелинейные возмущения другого рода. Это обстоятельство раскроет всю свою силу по мере того, как мы будем продвигаться в изучении метода Ляпунова.

Вернемся к рассмотрению нелинейной системы

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.14)$$

где $f : D \rightarrow R^n$ — непрерывно дифференцируемое отображение области $D \subset R^n$ в R^n . Предположим, что D содержит начало координат $x = 0$, являющееся точкой равновесия системы, т. е. $f(0) = 0$. По теореме о

¹⁾ Типичная процедура решения уравнения Ляпунова, известная как алгоритм Бартелса–Стьюарта (Bartels–Stewart) [67], предполагает в качестве первого шага преобразование A в вещественную форму Шура (Schur), в ходе которого вычисляются собственные значения этой матрицы. Таким образом, с вычислительной точки зрения процедура решения уравнения Ляпунова — это более трудоемкая операция, нежели вычисление собственных значений A . Другие алгоритмы решения уравнения Ляпунова имеют трудоемкость, сравнимую с трудоемкостью алгоритма Бартелса–Стьюарта.

²⁾ Тем не менее, представляется интересным тот факт, что уравнение Ляпунова может использоваться для вывода классического критерия Рууса–Гурвица. (См. [35, стр. 417–419].)

среднем значении

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x,$$

где z_i — точка на отрезке, соединяющем x с началом координат. Это равенство справедливо для любой точки $x \in D$, такой что отрезок, соединяющий эту точку с началом координат, целиком содержится в D . Поскольку $f(0) = 0$, мы можем записать

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x.$$

Тогда

$$f(x) = Ax + g(x),$$

где

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \quad \text{и} \quad g(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f}{\partial x}(0) \right] x.$$

Функция $g_i(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|g_i(x)| \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right\| \|x\|.$$

Из непрерывности $[\partial f / \partial x]$ следует, что

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \text{ при } \|x\| \rightarrow 0.$$

Из всего вышесказанного следует, что в малой окрестности начала координат мы можем аппроксимировать нелинейную систему (4.14) ее линеаризацией в окрестности начала координат:

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{где} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0).$$

В следующей теореме устанавливаются условия, при выполнении которых мы можем сделать заключение об устойчивости начала координат, являющегося точкой равновесия нелинейной системы, на основании результатов анализа свойств устойчивости точки равновесия ее линеаризации. Эта теорема представляет собой методологическую основу первого метода Ляпунова.

Теорема 4.7. Пусть $x = 0$ является точкой равновесия нелинейной системы

$$\dot{x} = f(x),$$

где $f : D \rightarrow R^n$ — непрерывно дифференцируемая функция и D — окрестность нуля. Пусть

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0}.$$

Тогда

1. Начало координат асимптотически устойчиво, если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ для всех собственных значений матрицы A .

2. Начало координат неустойчиво, если $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ по крайней мере для одного собственного значения матрицы A .

Доказательство: Для доказательства первого утверждения предположим, что A — гурвицева матрица. Тогда из теоремы 4.6 следует, что для любой положительно определенной симметричной матрицы Q решение P уравнения Ляпунова (4.12) является положительно определенной матрицей. Рассмотрим $V(x) = x^T P x$ в качестве функции Ляпунова для нелинейной системы. Тогда производная $\dot{V}(x)$ вдоль траекторий системы определяется равенством

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x^T P x + f^T(x) P x = \\ &= x^T P [Ax + g(x)] + [x^T A^T + g^T(x)] P x = \\ &= x^T (PA + A^T P)x + 2x^T Pg(x) = \\ &= -x^T Qx + 2x^T Pg(x).\end{aligned}$$

Первый член в правой части этого равенства отрицательный, а второй — в общем случае неопределензначный. Функция $g(x)$ удовлетворяет

$$\frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \rightarrow 0 \text{ при } \|x\|_2 \rightarrow 0.$$

Поэтому для любой $\gamma > 0$ существует константа $r > 0$, такая что

$$\|g(x)\|_2 < \gamma \|x\|_2, \quad \forall \|x\|_2 < r.$$

Следовательно,

$$\dot{V}(x) < -x^T Qx + 2\gamma \|P\|_2 \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < r.$$

Заметим, что

$$x^T Qx \geq \lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2,$$

где $\lambda_{\min}(\cdot)$ — минимальное собственное число матрицы. Поскольку Q положительно определена и симметрична, $\lambda_{\min}(Q)$ вещественно и положительно. Тогда

$$\dot{V}(x) < -[\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma \|P\|_2] \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < r.$$

Выбор $\gamma < (1/2)\lambda_{\min}(Q)/\|P\|_2$ обеспечивает то, что $\dot{V}(x)$ отрицательно определена. Следовательно, по теореме 4.1 начало координат асимптотически устойчиво. Для доказательства второго утверждения теоремы рассмотрим сначала частный случай, когда матрица A не имеет собственных чисел на мнимой оси. Если собственные значения A

разделены на две группы, находящиеся по разные стороны от мнимой оси, то существует невырожденная матрица T , такая что¹⁾

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

где A_1 и A_2 — гурвицевы матрицы. Положим

$$z = Tx = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

где размерности двух векторных компонентов вектора z соответствуют размерностям матриц A_1 и A_2 . При замене координат $z = Tx$ система

$$\dot{x} = Ax + g(x)$$

преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -A_1 z_1 + g_1(z) \\ \dot{z}_2 &= A_2 z_2 + g_2(z),\end{aligned}$$

где функции $g_i(x)$ характеризуются тем, что для любой $\gamma > 0$ существует $r > 0$, такая что

$$\|g_i(z)\|_2 < \gamma \|z\|_2, \quad \forall \|z\|_2 \leq r, \quad i = 1, 2.$$

Начало координат $z = 0$ является точкой равновесия для системы в z -координатах. Очевидно, что любое заключение о свойствах устойчивости $z = 0$ автоматически переносится на свойства устойчивости точки равновесия $x = 0$ системы в x -координатах, поскольку матрица T невырождена.²⁾ Для того, чтобы показать, что начало координат неустойчиво, применим теорему 4.3. Построение функции $V(z)$ выполняется аналогично тому, как это было выполнено в примере 4.7, но с учетом того, что рассматривается векторный случай. Пусть Q_1 и Q_2 — положительно определенные и симметричные матрицы, размерности которых соответствуют размерностям матриц A_1 и A_2 . Поскольку A_1 и A_2 — гурвицевы матрицы, из теоремы 4.6 следует, что уравнения Ляпунова

$$P_i A_i + A_i^T P_i = -Q_i, \quad i = 1, 2$$

имеют единственны положительно определенные решения P_1 и P_2 . Пусть

$$V(z) = z_1^T P_1 z_1 - z_2^T P_2 z_2 = z^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} z.$$

¹⁾ Для нахождения матрицы T существует несколько методов и одним из них является преобразование матрицы A в вещественную жорданову форму [67].

²⁾ Обсуждение вопроса об отображениях, сохраняющих свойства устойчивости, предлагается выполнить в качестве упражнения 4.26.

В подпространстве $z_2 = 0$ неравенство $V(z) > 0$ выполнено в точках, произвольно близких к началу координат. Положим

$$U = \{z \in R^n \mid \|z\|_2 \leq r \text{ и } V(z) > 0\}.$$

Для $z \in U$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &= -z_1^T(P_1A_1 + A_1^TP_1)z_1 + 2z_1^TP_1g_1(z) - \\ &\quad - z_2^T(P_2A_2 + A_2^TP_2)z_2 - 2z_2^TP_2g_2(z) = \\ &= z_1^TQ_1z_1 + z_2^TQ_2z_2 + 2z^T \begin{bmatrix} P_1g_1(z) \\ -P_2g_2(z) \end{bmatrix} \geqslant \\ &\geqslant \lambda_{\min}(Q_1)\|z_1\|_2^2 + \lambda_{\min}(Q_2)\|z_2\|_2^2 - \\ &\quad - 2\|z\|_2 \sqrt{\|P_1\|_2^2\|g_1(z)\|_2^2 + \|P_2\|_2^2\|g_2(z)\|_2^2} > \\ &> (\alpha - 2\sqrt{2}\beta\gamma)\|z\|_2^2, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \min\{\lambda_{\min}(Q_1), \lambda_{\min}(Q_2)\} \quad \text{и} \quad \beta = \max\{\|P_1\|_2, \|P_2\|_2\}.$$

Тогда при $\gamma < \alpha/(2\sqrt{2}\beta)$ выполнено $\dot{V}(z) > 0$ для $z \in U$ и по теореме 4.3 начало координат не устойчиво. Заметим, что мы могли бы применить теорему 4.3 и к системе, представленной в первоначальных координатах. Для этого определим матрицы

$$P = T^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} T; \quad Q = T^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} T,$$

удовлетворяющие уравнению

$$PA + A^TP = Q.$$

Матрица Q положительно определена и $V(x) = x^TPx$ положительна в точках произвольно близких к началу координат $x = 0$. Рассмотрим теперь общий случай, когда матрица A может иметь собственные числа не только в открытых левой и правой полуплоскостях комплексной плоскости, но и на мнимой оси. Этот случай можно свести к рассмотренному выше частному случаю путем смещения мнимой оси. Предположим, что A имеет m собственных чисел, таких что $\operatorname{Re} \lambda_i > \delta > 0$. Тогда матрица $[A - (\delta/2)I]$ имеет m собственных чисел в открытой правой полуплоскости и не имеет собственных чисел на мнимой оси. Используя полученные выше результаты для этого случая, можно заключить, что существуют матрицы $P = P^T$ и $Q = Q^T > 0$, такие что

$$P \left[A - \frac{\delta}{2}I \right] + \left[A - \frac{\delta}{2}I \right]^T P = Q,$$

и $V(x) = x^TPx$ — положительно определенная функция в точках произвольно близких к началу координат. Производная $V(x)$ вдоль траекторий системы определяется равенством

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T(PA + A^TP)x + 2x^TPg(x) = \\ &= x^T \left[P \left(A - \frac{\delta}{2}I \right) + \left(A - \frac{\delta}{2}I \right)^T P \right] x + \delta x^TPx + 2x^TPg(x) = \\ &= x^TQx + \delta V(x) + 2x^TPg(x). \end{aligned}$$

В множестве

$$\{x \in R^n \mid \|x\|_2 \leq r \text{ и } V(x) > 0\},$$

где константа r выбрана так, что $\|g(x)\|_2 \leq \gamma\|x\|_2$ при $\|x\|_2 < r$ производная $\dot{V}(x)$ удовлетворяет оценке

$$\dot{V}(x) \geq \lambda_{\min}(Q)\|x\|_2^2 - 2\|P\|_2\|x\|_2\|g(x)\|_2 \geq (\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma\|P\|_2)\|x\|_2^2.$$

Заметим, что при $\gamma < (1/2)\lambda_{\min}(Q)/\|P\|_2$ правая часть этого неравенства положительна. Применение теоремы 4.3 завершает доказательство. \square

Теорема 4.7 предлагает простую процедуру для определения свойств устойчивости точки равновесия в начале координат, которая сводится к вычислению *матрицы Якоби*

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$$

и анализу ее собственных значений. Если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ для всех i или $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ для некоторого i , то начало координат асимптотически устойчиво или неустойчиво, соответственно. Более того, из доказательства теоремы видно, что если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ для всех i , то мы всегда можем найти для системы функцию Ляпунова, определенную локально в некоторой окрестности начала координат. Эта функция Ляпунова имеет вид квадратичной формы $V(x) = x^TPx$, где P — решение уравнения Ляпунова (4.12) для некоторой положительно определенной симметричной матрицы Q . Заметим, что теорема 4.7 не позволяет установить свойства устойчивости в случае $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ для всех i с $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ при некотором i . В этом случае метод линеаризации не может быть использован для определения свойств устойчивости точки равновесия.¹⁾

Пример 4.14. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x} = ax^3.$$

¹⁾ См. параграф 8.1, в котором исследуется критический случай, когда линеаризация не позволяет сделать определенное заключение об устойчивости системы.

Линеаризуя систему в окрестности начала координат $x = 0$, получаем

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} = 3ax^2 \Big|_{x=0} = 0.$$

Таким образом, существует одно собственное значение, которое лежит на мнимой оси и, следовательно, с использованием линеаризации установить свойства устойчивости начала координат невозможно. Этого следовало ожидать, поскольку для рассматриваемой системы свойства устойчивости начала координат — его асимптотическая устойчивость, устойчивость или неустойчивость — зависят от значения параметра a . Если $a < 0$, начало координат асимптотически устойчиво и это может быть установлено с использованием функции Ляпунова $V(x) = x^4$, производная которой удовлетворяет $\dot{V}(x) = 4ax^6 < 0$ при $x \neq 0$. Если $a = 0$, система линейна и начало координат устойчиво по теореме 4.5. Если $a > 0$, начало координат неустойчиво по теореме 4.3 и это может быть установлено с использованием функции Ляпунова $V(x) = x^4$, производная которой удовлетворяет $\dot{V}(x) = 4ax^6 > 0$ при $x \neq 0$. \triangle

Пример 4.15. Уравнение маятника

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - bx_2\end{aligned}$$

имеет две точки равновесия $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ и $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$. Попытаемся исследовать свойства устойчивости этих точек равновесия с использованием метода линеаризации. Матрица Якоби

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos x_1 & -b \end{bmatrix},$$

вычисленная в начале координат $x = 0$, имеет вид

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}.$$

Для всех $a, b > 0$ собственные значения удовлетворяют $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ и, следовательно, точка равновесия в начале координат асимптотически устойчива. При отсутствии трения ($b = 0$) оба собственных значения расположены на мнимой оси. Таким образом, мы не можем определить свойства устойчивости начала координат с использованием метода линеаризации. В примере 4.3 мы видели, что в этом случае начало координат является устойчивой точкой равновесия и это может быть

установлено с использованием функции Ляпунова в виде функции энергии. Для того, чтобы определить свойства устойчивости точки равновесия $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$, вычислим якобиан в этой точке. Это эквивалентно замене координат $z_1 = x_1 - \pi$, $z_2 = x_2$, которая представляет собой сдвиг точки равновесия в начало координат, и последующему вычислению якобиана $[\partial f / \partial z]$ в точке $z = 0$:

$$\tilde{A} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_1=\pi, x_2=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы \tilde{A} :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a}.$$

Для всех $a > 0$ и $b \geq 0$ имеем одно собственное значение, расположенное в открытой правой полуплоскости и, следовательно, точка равновесия $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$ неустойчива. \triangle

4.4. Функции сравнения

До сих пор мы рассматривали автономные системы. При переходе к изучению неавтономных систем возникают дополнительные трудности и одна из них заключается в том, что решение неавтономной системы $\dot{x} = f(t, x)$, начинающееся в $x(t_0) = x_0$, зависит одновременно от t и t_0 . Для того, чтобы иметь возможность проводить анализ подобных систем, необходимо ввести новые определения устойчивости и асимптотической устойчивости, которые выполнялись бы равномерно по начальному моменту времени. Разумеется мы можем переформулировать определение 4.1 так, чтобы учесть эту равномерность по t_0 , но оказывается, что существуют более удобные определения, которые делаются в терминах специальных функций сравнения, известных как функции класса \mathcal{K} и класса \mathcal{KL} .

Определение 4.2. Непрерывная функция $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ принадлежит классу \mathcal{K} , если она является строго возрастающей и $\alpha(0) = 0$. Эта функция принадлежит классу \mathcal{K}_∞ , если $a = \infty$ и $\alpha(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

Определение 4.3. Непрерывная функция $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ принадлежит классу \mathcal{KL} , если для каждого фиксированного s отображение $\beta(r, s)$ принадлежит классу \mathcal{K} по r и для каждого фиксированного r отображение $\beta(r, s)$ является убывающим по s и $\beta(r, s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Пример 4.16.

- $\alpha(r) = \operatorname{arctg}(r)$ — строго возрастающая функция, поскольку $\alpha'(r) = 1/(1+r^2) > 0$. Она принадлежит классу \mathcal{K} , но не принадлежит классу \mathcal{KL} , т. к. $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \pi/2 < \infty$.
- $\alpha(r) = r^c$ — строго возрастающая функция для любого положительного вещественного числа c , поскольку $\alpha'(r) = cr^{c-1} >$

> 0 . Более того, $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$ и, следовательно, эта функция принадлежит классу \mathcal{K}_∞ .

- $\alpha(r) = \min\{r, r^2\}$ — непрерывная строго возрастающая функция, и $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$. Следовательно, эта функция принадлежит классу \mathcal{K}_∞ . Заметим, что $\alpha(r)$ не является непрерывно дифференцируемой в $r = 1$. Непрерывная дифференцируемость функции не является необходимым условием ее принадлежности к классу \mathcal{K} .
- $\beta(r, s) = r/(ksr + 1)$ — для любого положительного вещественного числа k строго возрастающая по r функция, поскольку

$$\frac{\partial \beta}{\partial r} = \frac{1}{(ksr + 1)^2} > 0$$

и строго убывающая по s , поскольку

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{-kr^2}{(ksr + 1)^2} < 0.$$

Более того, $\beta(r, s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$ и, следовательно, эта функция принадлежит классу \mathcal{KL} .

- $\beta(r, s) = r^c e^{-s}$ — для любого положительного вещественного числа c функция принадлежит классу \mathcal{KL} .

△

В следующей лемме формулируются некоторые важные свойства функций классов \mathcal{K} и \mathcal{KL} . Доказательство этой леммы предлагается выполнить читателю в качестве упражнения (Упражнение 4.34).

Лемма 4.2. Пусть α_1 и α_2 — \mathcal{K} -функции на $[0, a]$, α_3 и α_4 — \mathcal{K}_∞ -функции, и β — \mathcal{KL} -функция. Обозначим через α_i^{-1} обратную функцию функции α_i . Тогда

- α_1^{-1} определена на $[0, \alpha_1(a)]$ и принадлежит классу \mathcal{K} .
- α_3^{-1} определена на $[0, \infty)$ и принадлежит классу \mathcal{K}_∞ .
- $\alpha_1 \circ \alpha_2$ принадлежит классу \mathcal{K} .
- $\alpha_3 \circ \alpha_4$ принадлежит классу \mathcal{K}_∞ .

- $\sigma(r, s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$ принадлежит классу \mathcal{KL} .

Следующие две леммы вскрывают связь между \mathcal{K} - и \mathcal{KL} -функциями и анализом систем с использованием методов Ляпунова.

Лемма 4.3. Пусть $V : D \rightarrow R$ — непрерывная положительно определенная функция, определенная в области $D \subset R^n$, содержащей начало координат. Пусть $B_r \subset D$ для некоторого r . Тогда существуют \mathcal{K} -функции α_1 и α_2 , определенные на $[0, r]$, такие что

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

для всех $x \in B_r$. Если $D = R^n$ и $V(x)$ радиально не ограничена, то существуют функции α_1 и α_2 класса \mathcal{K}_∞ , такие что предыдущие неравенства выполнены при всех $x \in R^n$.

Доказательство: См. приложение C.4. □

В случае использования квадратичной положительно определенной функции $V(x) = x^T P x$ утверждение леммы следует из неравенств

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|_2^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|_2^2$$

Лемма 4.4. Рассмотрим скалярное автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = y_0,$$

где α — локально липшицева \mathcal{K} -функция, определенная на $[0, a)$. Для всех $0 \leq y_0 \leq a$ это уравнение имеет единственное решение $y(t)$, определенное для всех $t \geq t_0$. Более того,

$$y(t) = \sigma(y_0, t - t_0),$$

где σ — \mathcal{KL} -функция, определенная на $[0, a) \times [0, \infty)$.

Доказательство: См. приложение C.5. □

Проиллюстрируем утверждение этой леммы на примерах, в которых решение скалярного уравнения может быть найдено в явном виде. В качестве первого такого примера рассмотрим $\dot{y} = -ky$, $k > 0$. Решение этого уравнения имеет вид

$$y(t) = y_0 \exp[-k(t - t_0)] \Rightarrow \sigma(r, s) = r \exp(-ks).$$

Решение уравнения $\dot{y} = -ky^2$, $k > 0$ имеет следующий вид:

$$y(t) = \frac{y_0}{-ky_0(t - t_0) + 1} \Rightarrow \sigma(r, s) = \frac{r}{krs + 1}.$$

Использование функций классов \mathcal{K} и \mathcal{KL} при анализе систем с использованием метода Ляпунова может быть продемонстрировано на примере их применения для доказательства теоремы 4.1. В ходе этого доказательства мы выбирали β и δ такими, чтобы $B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$. С учетом того, что положительно определенная функция $V(x)$ удовлетворяет

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

мы можем выбрать $\beta \leq \alpha_1(r)$ и $\delta \leq \alpha_2^{-1}(\beta)$. Это действительно можно сделать, поскольку

$$V(x) \leq \beta \Rightarrow \alpha_1(\|x\|) \leq \alpha_1(r) \Leftrightarrow \|x\| \leq r$$

и

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) \leq \alpha_2(\delta) \leq \beta.$$

Далее, следуя доказательству, мы должны показать, что если $\dot{V}(x)$ отрицательно определена, то решение $x(t)$ стремится к нулю при t , стремящемся к бесконечности. Из леммы 4.3 следует, что существует \mathcal{K} -функция α_3 , такая что $\dot{V}(x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$. Следовательно, $V(x)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)).$$

Из леммы сравнения (лемма 3.4) следует, что $V(x(t))$ ограничена решением скалярного дифференциального уравнения

$$\dot{y} = -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(y)), \quad y(0) = V(x(0)).$$

По лемме 4.2 функция $\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$ принадлежит классу \mathcal{K} . Кроме того, из леммы 4.3 следует, что решение этого скалярного уравнения имеет вид $y(t) = \beta(y(0), t)$, где β — \mathcal{KL} -функция. Поскольку $V(x(t))$ удовлетворяет неравенству $V(x(t)) \leq \beta(V(x(0)), t)$, можно заключить, что $V(x(t))$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. В действительности мы можем выйти за рамки теоремы 4.1 и получить более сильный результат — оценку нормы решения $\|x\|$. Из неравенства $V(x(t)) \leq V(x(0))$ следует, что

$$\alpha_1(\|x(t)\|) \leq V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \alpha_2(\|x(0)\|).$$

Тогда $\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x(0)\|))$, где $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2$ — функция класса \mathcal{K} . Аналогично, из неравенства $V(x(t)) \leq \beta(V(x(0)), t)$ следует, что

$$\alpha_1(\|x(t)\|) \leq V(x(t)) \leq \beta(V(x(0)), t) \leq \beta(\alpha_2(\|x(0)\|), t).$$

Таким образом, $\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\beta(\alpha_2(\|x(0)\|), t))$, где $\alpha_1^{-1}(\beta(\alpha_2(r), t))$ — функция класса \mathcal{KL} .

4.5. Неавтономные системы

Рассмотрим неавтономную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (4.15)$$

где $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — кусочно-непрерывная по t и локально липшицевая по x на $[0, \infty) \times D$ функция, $D \subset \mathbb{R}^n$ — открытая область, содержащая начало координат $x = 0$. Начало координат является точкой равновесия системы (4.15) в момент $t = 0$, если

$$f(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Точка равновесия в начале координат может являться результатом переноса ненулевой точки равновесия или, в более общем случае, результатом переноса ненулевого решения системы. Для того, чтобы убедиться в справедливости этого утверждения предположим, что $\bar{y}(\tau) — определенное при всех $\tau \geq a$ решение системы$

$$\frac{dy}{d\tau} = g(\tau, y).$$

Тогда замена координат

$$x = y - \bar{y}(\tau); \quad t = \tau - a$$

приводит систему к виду

$$\dot{x} = g(\tau, y) - \dot{\bar{y}}(\tau) = g(t + a, x + \bar{y}(t + a)) - \dot{\bar{y}}(t + a) \stackrel{\text{def}}{=} f(t, x).$$

Поскольку

$$\dot{\bar{y}}(t + a) = g(t + a, \bar{y}(t + a)), \quad \forall t \geq 0,$$

начало координат $x = 0$ является точкой равновесия преобразованной системы при $t = 0$. Таким образом, исследовав свойства устойчивости начала координат, являющегося точкой равновесия преобразованной системы, мы определим свойства устойчивости решения $\bar{y}(\tau)$ исходной системы. Заметим, что если $\bar{y}(\tau)$ не является константой, преобразованная система будет неавтономной даже в случае, когда первоначальная система была автономной, т. е. когда $g(\tau, y) = g(y)$. Это обстоятельство служит объяснением того факта, что исследование устойчивости в смысле Ляпунова может быть проведено лишь в контексте исследования устойчивости точек равновесия неавтономных систем.

Понятия устойчивости и асимптотической устойчивости для точек равновесия неавтономных систем аналогичны тем, что были введены в определении 4.1 для автономных систем. Единственное отличие заключается в том, что решение автономной системы зависит только от $(t - t_0)$, а решение неавтономной системы может зависеть как от t , так и от t_0 . Поэтому свойства устойчивости точки равновесия будут в общем случае зависеть от t_0 . Начало координат $x = 0$ является устойчивой точкой равновесия системы (4.15), если для любой константы $\varepsilon > 0$ и любого момента $t_0 \geq 0$ существует константа $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, такая что

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t.$$

Константа δ в общем случае может зависеть от начального момента времени t_0 . Существование этой константы для каждого t_0 не обязательно служит гарантией того, что существует единая константа δ , зависящая лишь от ε , которая может быть использована при всех возможных t_0 . Это обстоятельство может быть проиллюстрировано следующим примером.

Пример 4.17. Линейная система первого порядка

$$\dot{x} = (6t \sin t - 2t)x$$

имеет решение

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) \exp \left[\int_{t_0}^t (6\tau \sin \tau - 2\tau) d\tau \right] = \\ &= x(t_0) \exp [6 \sin t - 6t \cos t - t^2 - 6 \sin t_0 + 6t_0 \cos t_0 + t_0^2]. \end{aligned}$$

Для любого t_0 член $-t^2$ с течением времени становится доминирующим и, следовательно, экспоненциальный член ограничен для всех $t \geq t_0$ некоторой константой $c(t_0)$, которая зависит от t_0 :

$$|x(t)| < |x(t_0)|c(t_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

Таким образом, для доказательства устойчивости начала координат можно для любой $\varepsilon > 0$ использовать в качестве δ величину $\delta = \varepsilon/c(t_0)$. С другой стороны, предположим, что t_0 принимает последовательные значения $t_0 = 2n\pi$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда в каждом из этих последовательных случаев $x(t)$ вычисляется на π секунд позднее по отношению к предыдущему случаю. Таким образом,

$$x(t_0 + \pi) = x(t_0) \exp[(4n+1)(6-\pi)\pi]$$

и, следовательно, для $x(t_0) \neq 0$ выполнено

$$\frac{x(t_0 + \pi)}{x(t_0)} \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Легко видеть, что при заданной $\varepsilon > 0$ невозможно определить константу δ , которая не зависела бы от t_0 и удовлетворяла бы равномерно по t_0 требованию, накладываемому определением устойчивости. \triangle

Неоднородность по t_0 может возникать также и при исследовании асимптотической устойчивости начала координат. Этот случай рассмотрен в следующем примере.

Пример 4.18. Линейная система первого порядка

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+t}$$

имеет решение

$$x(t) = x(t_0) \exp \left[\int_{t_0}^t \frac{-1}{1+\tau} d\tau \right] = x(t_0) \frac{1+t_0}{1+t}.$$

Поскольку $|x(t)| \leq |x(t_0)|$, $\forall t \geq t_0$, начало координат устойчиво. В действительности для любой заданной $\varepsilon > 0$ можно найти константу δ , которая не зависит от t_0 . Кроме того, легко показать, что

$$x(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Следовательно, в соответствии с определением 4.1 начало координат асимптотически устойчиво. Заметим, однако, что стремление $x(t)$ к началу координат неравномерно относительно начального момента времени t_0 . Напомним, что стремление $x(t)$ к началу координат эквивалентно тому, что для любой $\varepsilon > 0$ существует константа $T = T(\varepsilon, t_0) > 0$, такая что $|x(t)| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0 + T$, несмотря на то, что это утверждение справедливо для всех t_0 , константа T не может быть выбрана так, чтобы она не зависела от t_0 . \triangle

С учетом всего вышесказанного нам следует модифицировать определение 4.1 так, чтобы принять во внимание зависимость свойств устойчивости начала координат от начального момента времени t_0 . Мы заинтересованы в том, чтобы эта модификация позволила бы опреде-

лить свойства устойчивости и асимптотической устойчивости начала координат как равномерные по начальному времени свойства.¹⁾

Определение 4.4. Точка равновесия $x = 0$ системы (4.15) является

- *устойчивой*, если для каждой константы $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, такая что

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0; \quad (4.16)$$

- *равномерно устойчивой*, если для каждой константы $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, независимая от t_0 , такая что выполнено (4.16);
- *неустойчивой*, если она не является устойчивой;
- *асимптотически устойчивой*, если она устойчива и существует положительная константа $c = c(t_0)$, такая что $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для всех $\|x(t_0)\| < c$.
- *равномерно асимптотически устойчивой*, если она является равномерно устойчивой и существует положительная константа c , независимая от t_0 , такая что для всех $\|x(t_0)\| < c$, $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по t_0 , т. е. для каждой $\eta > 0$ существует $T = T(\eta) > 0$, такая что

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta), \quad \forall \|x(t_0)\| < c; \quad (4.17)$$

- *глобально равномерно асимптотически устойчивой*, если она является равномерно устойчивой, $\delta(\varepsilon)$ может быть выбрана так, чтобы было выполнено $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$ и для каждой пары положительных чисел η и c существует $T = T(\eta, c) > 0$, такое что

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta, c), \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (4.18)$$

В следующей лемме даются эквивалентные и более понятные определения понятий равномерной устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости в терминах \mathcal{K} - и \mathcal{KL} -функций.

Лемма 4.5. Точка равновесия $x = 0$ системы (4.15) является

¹⁾ См. работы [72] и [95], в которых даны другие модификации определения 4.1. Следует отметить, что в случае автономных систем приведенное здесь определение глобальной однородной асимптотической устойчивости эквивалентно определению глобальной асимптотической устойчивости, представленному в параграфе 4.1. В частности, $\delta(\varepsilon)$ всегда может быть выбрана так, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$. Справедливость этого утверждения доказывается в теореме 4.17. В лемме C.2 показано, что для автономных систем в случае глобальной асимптотической устойчивости начала координат решение $x(t)$ этой системы удовлетворяет $\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, 0)$ для всех $x(t_0)$, где $\beta(\tau, 0)$ — \mathcal{K}_∞ -функция. Функция $\delta(\varepsilon)$ может быть выбрана в виде $\delta(\varepsilon) = \beta^{-1}(\varepsilon, 0)$.

- равномерно устойчивой, если и только если существует функция α класса \mathcal{K} и положительная константа c , независимая от t_0 , такая что

$$\|x(t_0)\| < \alpha(\|x(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c; \quad (4.19)$$

- равномерно асимптотически устойчивой, если и только если существует функция β класса \mathcal{KL} и положительная константа c , независимая от t_0 , такая что

$$\|x(t_0)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c; \quad (4.20)$$

- глобально равномерно асимптотически устойчивой, если и только если неравенство (4.20) выполнено для всех начальных состояний $x(t_0)$.

Доказательство: См. приложение C.6. \square

Из этой леммы следует, что в случае автономных систем из устойчивости и асимптотической устойчивости, введенных в соответствии с определением 4.1, следует существование \mathcal{K} - и \mathcal{KL} -функций, удовлетворяющих неравенствам (4.19) и (4.20). Справедливость этого факта обусловлена тем, что в случае автономных систем свойства устойчивости и асимптотической устойчивости начала координат выполняются равномерно по начальному моменту времени t_0 .

Специальный случай равномерной асимптотической устойчивости, когда \mathcal{KL} -функция β в (4.20) имеет специальный вид $\beta(r, s) = k r e^{-\lambda s}$, имеет важное значение и будет рассматриваться ниже как особое свойство устойчивости точек равновесия.

Определение 4.5. Точка равновесия $x = 0$ системы (4.15) называется экспоненциально устойчивой, если существуют положительные константы c , k и λ , такие что

$$\|x(t)\| \leq k \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall \|x(t_0)\| < c \quad (4.21)$$

и глобально экспоненциально устойчивой, если неравенство (4.21) выполнено для любого начального состояния $x(t_0)$.

Теория Ляпунова для автономных систем может быть обобщена на случай неавтономных систем. Для каждой из теорем 4.1–4.4 можно предложить соответствующие обобщения. Мы не будем приводить здесь формулировки этих результатов.¹⁾ Вместо этого мы сосредоточим внимание на исследовании свойств равномерной устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости, поскольку эти свойства наиболее часто анализируются с использованием обобщений метода Ляпунова на случай неавтономных систем.

¹⁾ Литература по теории Ляпунова для неавтономных систем достаточно обширна. Всеобъемлющими работами в этой области являются [72] и [154], в качестве введения в эту тематику можно порекомендовать [201] и [135].

Теорема 4.8. Пусть $x = 0$ является точкой равновесия системы (4.15) и $D \subset \mathbb{R}^n$ — открытая область, содержащая начало координат $x = 0$. Пусть $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно-дифференцируемая функция, такая что

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0 \quad (4.23)$$

$\forall t \geq 0$ и $\forall x \in D$, где $W_1(x)$ и $W_2(x)$ — непрерывные положительно определенные функции на D . Тогда $x = 0$ — равномерно устойчивая точка равновесия.

Доказательство: Производная V вдоль траекторий (4.15) определяется равенством

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0.$$

Выберем $r > 0$ и $c > 0$ так, чтобы $B_r \subset D$ и $c < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$. Тогда $\{x \in B_r \mid W_1(x) \leq c\}$ — внутренность B_r . Определим зависящее от времени множество $\Omega_{t,c}$:

$$\Omega_{t,c} = \{x \in B_r \mid V(t, x) \leq c\}.$$

Множество $\Omega_{t,c}$ содержит $\{x \in B_r \mid W_2(x) \leq c\}$, поскольку

$$W_2(x) \leq c \Rightarrow V(t, x) \leq c.$$

С другой стороны, $\Omega_{t,c}$ является подмножеством $\{x \in B_r \mid W_1(x) \leq c\}$, поскольку

$$V(t, x) \leq c \Rightarrow W_1(x) \leq c.$$

Таким образом,

$$\{x \in B_r \mid W_2(x) \leq c\} \subset \Omega_{t,c} \subset \{x \in B_r \mid W_1(x) \leq c\} \subset B_r \subset D$$

для всех $t \geq 0$. Эти пять содержащихся друг в друге множеств изображены на рисунке 4.7, аналогичном рисунку 4.1, но в рассматриваемом здесь случае поверхность $V(t, x) = c$ зависит от времени и ограничена зависящими от времени поверхностями $W_1(x) = c$ и $W_2(x) = c$.

Поскольку $\dot{V}(t, x) \leq 0$ на D для всех $t_0 \geq 0$ и любых $x_0 \in \Omega_{t,c}$, решение, начинающееся в (t_0, x_0) остается в $\Omega_{t,c}$ при всех $t \geq t_0$. Поэтому любое решение, начинающееся в $\{x \in B_r \mid W_2(x) \leq c\}$, остается $\Omega_{t,c}$ и, следовательно, в $\{x \in B_r \mid W_1(x) \leq c\}$ при всех $t \geq t_0$. Таким образом, решение ограничено и определено при всех $t \geq t_0$. Более того, поскольку $\dot{V} \leq 0$,

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)), \quad \forall t \geq t_0.$$

Из леммы 4.3 следует, что существует \mathcal{K} -функции α_1 и α_2 , определенные на $[0, r]$, такие что

$$\alpha_1(\|x\|) \leq W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \leq \alpha_2(\|x\|).$$

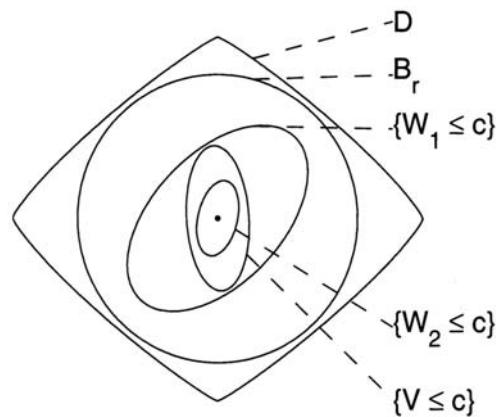


Рис. 4.7. Геометрическое представление множеств, используемых при доказательстве теоремы 4.8.

Из последних двух неравенств следует, что

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(V(t, x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(V(t_0, x(t_0))) \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x(t_0)\|)).$$

Поскольку по лемме 4.2 функция $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2$ принадлежит классу \mathcal{K} , из неравенства $\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x(t_0)\|))$ следует равномерная устойчивость начала координат. \square

Теорема 4.9. Предположим, что условия теоремы 4.8 выполнены с усиленным неравенством (4.23)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \quad (4.24)$$

для всех $t \geq 0$ и любых $x \in D$, где $W_3(x)$ — непрерывная положительно определенная функция на D . Тогда $x = 0$ равномерно асимптотически устойчивая точка равновесия. Более того, если константы r и c выбраны таким образом, что $B_r = \{ \|x\| \leq r \} \subset D$ и $c < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$, то каждая траектория, начинающаяся в $\{x \in B_r \mid W_2(x) \leq c\}$, удовлетворяет

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0,$$

где β — некоторая \mathcal{KL} -функция. Наконец, если $D = R^n$ и $W_1(x)$ радиально неограничена, то $x = 0$ — глобально равномерно асимптотически устойчивая точка равновесия.

Доказательство: При доказательстве теоремы 4.8 было показано, что траектории, начинающиеся в $\{x \in B_r \mid W_2(x) \leq c\}$, остаются в $\{x \in B_r \mid W_1(x) \leq c\}$ при всех $t \geq t_0$. Из леммы 4.3 следует, что существует \mathcal{K} -функция α_3 , определенная на $[0, r]$, такая что

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \leq -\alpha_3(\|x\|).$$

Из неравенства

$$V \leq \alpha_2(\|x\|) \Leftrightarrow \alpha_2^{-1}(V) \leq \|x\| \Leftrightarrow \alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)) \leq \alpha_3(\|x\|)$$

видно, что V удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)) \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha(V),$$

где $\alpha = \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$ — \mathcal{K} -функция, определенная на $[0, r]$. (См. лемму 4.2.) Предположим, не умаляя общности,¹⁾ что α — локально липшицевая функция. Пусть $y(t)$ удовлетворяет автономному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = V(t_0, x(t_0)) \geq 0.$$

Из леммы сравнения 3.4 следует, что

$$V(t, x) \leq y(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

По лемме 4.3 существует \mathcal{KL} -функция $\sigma(r, s)$, определенная на $[0, r] \times [0, \infty)$, такая что

$$V(t, x(t)) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0), \quad \forall V(t_0, x(t_0)) \in [0, c].$$

Тогда любое решение, начинающееся в $\{x \in B_r \mid W_2(x) \leq c\}$, удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \alpha_1^{-1}(V(t, x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(\sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0)) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(\|x(t_0)\|), t - t_0)) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0). \end{aligned}$$

Из леммы 4.2 следует, что β принадлежит классу \mathcal{KL} . Тогда неравенство (4.20) выполнено и, следовательно, $x = 0$ — равномерно асимптотически устойчивая точка равновесия. Если $D = R^n$, функции α_1 , α_2 и α_3 определены на $[0, \infty)$. Тогда α и, следовательно, β не зависят от c . Поскольку $W_1(x)$ радиально неограничена, константа c может быть выбрана произвольно большой так, чтобы любое начальное состояние принадлежало множеству $\{W_2(x) \leq c\}$. Таким образом, неравенство (4.20) выполнено для всех начальных состояний и, следовательно, начало координат является глобально равномерно асимптотически устойчивой точкой равновесия. \square

Функция $V(t, x)$ называется *положительно полуопределенной*, если $V(t, x) \geq 0$. Она называется *положительно определенной*, если

¹⁾ Если α не является локально липшицевой, мы можем выбрать локально липшицевую функцию β класса \mathcal{K} , такую что $\alpha(r) \geq \beta(r)$ в рассматриваемой области. Тогда $\dot{V} \leq -\beta(V)$ и мы можем продолжить доказательство, используя вместо α функцию β . Например, предположим, что $\alpha(r) = \sqrt{r}$. Функция \sqrt{r} принадлежит классу \mathcal{K} , но не является локально липшицевой в $r = 0$. Определим $\beta(r) = r$ при $r < 1$ и $\beta(r) = \sqrt{r}$ при $r \geq 1$. Функция β принадлежит классу \mathcal{K} и локально липшицева. Более того, $\alpha(r) \geq \beta(r)$ при всех $r \geq 0$.

$V(t, x) \geq W_1(x)$, где $W_1(x)$ — некоторая положительно определенная функция, радиально неограниченной, если $W_1(x)$ обладает этим же свойством, и убывающей, если $V(t, x) \leq W_2(x)$. Функция $V(t, x)$ называется отрицательно определенной (полупредопределенной), если $-V(t, x)$ — положительно определенная (полупредопределенная) функция. Таким образом, в теоремах 4.8 и 4.9 утверждается, что начало координат равномерно устойчиво, если существует непрерывно дифференцируемая положительно определенная, убывающая функция $V(t, x)$, производная которой вдоль траекторий системы отрицательно определена. Кроме того, начало координат равномерно асимптотически устойчиво, если эта производная отрицательно определена, и глобально равномерно асимптотически устойчиво, если функция $V(t, x)$ радиально неограничена и условия равномерной асимптотической устойчивости выполнены для нее глобально.

Теорема 4.10. Пусть $x = 0$ является точкой равновесия системы (4.15) и $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая начало координат $x = 0$. Пусть $V : [0, \infty) \times D \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая что

$$k_1 \|x\|^a \leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^a \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq k_3 \|x\|^a \quad (4.26)$$

$\forall t \geq 0$ и $\forall x \in D$, где k_1, k_2, k_3 и a — положительные константы. Тогда $x = 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия. Если эти предположения выполнены глобально, то $x = 0$ — глобально экспоненциально устойчивая точка равновесия.

Доказательство: Из рисунка 4.7 видно, что траектории, начинающиеся в $\{k_2 \|x\|^a \leq c\}$ с достаточно малой c , остаются ограниченными для всех $t \geq t_0$. Из неравенств (4.25) и (4.26) следует, что V удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{V} \leq -\frac{k_3}{k_2} V.$$

Из леммы сравнения 3.4 получаем

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) e^{-(k_3/k_2)(t-t_0)}.$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \left[\frac{V(t, x(t))}{k_1} \right]^{1/a} \leq \left[\frac{V(t_0, x(t_0)) e^{-(k_3/k_2)(t-t_0)}}{k_1} \right]^{1/a} \leq \\ &\leq \left[\frac{k_2 \|x(t_0)\|^a e^{-(k_3/k_2)(t-t_0)}}{k_1} \right]^{1/a} = \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{1/a} \|x(t_0)\| e^{-(k_3/k_2 a)(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Таким образом, начало координат экспоненциально устойчиво. Если все предположения выполнены глобально, с может быть выбрана про-

извольно большой и предыдущее неравенство выполнено для всех $x(t_0) \in R^n$. \square

Пример 4.19. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x} = -[1 + g(t)]x^3,$$

где $g(t)$ — непрерывная функция, $g(t) \geq 0$ для всех $t \geq 0$. Используя функцию Ляпунова $V(x) = x^2/2$, получаем

$$\dot{V}(t, x) = -[1 + g(t)]x^4 \leq -x^4, \quad \forall x \in R, \quad \forall t \geq 0.$$

Условия теоремы 4.9 при $W_1(x) = W_2(x) = V(x)$ и $W_3(x) = x^4$ выполнены глобально. Следовательно, начало координат глобально равномерно асимптотически устойчиво. \triangle

Пример 4.20. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - g(t)x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2, \end{aligned}$$

где $g(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая

$$0 \leq g(t) \leq k \quad \text{и} \quad \dot{g}(t) \leq g(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Используя функцию Ляпунова $V(x) = x_1^2 + [1 + g(t)]x_2^2$, получаем

$$x_1^2 + x_2^2 \leq V(t, x) \leq x_1^2 + (1 + k)x_2^2, \quad \forall x \in R^2.$$

Следовательно, $V(t, x)$ — положительно определенная, убывающая и радиально неограниченная функция. Производная V вдоль траекторий системы определяется равенством

$$\dot{V}(t, x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - [2 - 2g(t) - \dot{g}(t)]x_2^2.$$

Из неравенства

$$2 + 2g(t) - \dot{g}(t) \geq 2 + 2g(t) - g(t) \geq 2$$

следует, что

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq -2x_1 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} -x^T Q x, \end{aligned}$$

где Q — положительно определенная матрица. Таким образом, $\dot{V}(t, x)$ — отрицательно определенная функция и условия теоремы 4.9 при положительно определенных квадратичных функциях $W_1(x)$, $W_2(x)$ и $W_3(x)$ выполнены глобально. С учетом того, что положительно определенная квадратичная функция $x^T P x$ удовлетворяет

$$\lambda_{\min}(P)x^T x \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P)x^T x,$$

заключаем, что условия теоремы 4.10 при $a = 2$ выполнены глобально. Следовательно, начало координат глобально экспоненциально устойчиво. \triangle

Пример 4.21. Линейная зависящая от времени система

$$\dot{x} = A(t)x \quad (4.27)$$

имеет точку равновесия в $x = 0$. Пусть $A(t)$ является непрерывной для всех $t \geq 0$. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая, симметричная, ограниченная, положительно определенная матрица $P(t)$, удовлетворяющая неравенствам

$$0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I, \quad \forall t \geq 0,$$

и матричному дифференциальному уравнению

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + Q(t), \quad (4.28)$$

где $Q(t)$ — непрерывная, симметричная и положительно определенная матрица, такая что

$$Q(t) \geq c_3 I > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Функция Ляпунова

$$V(t, x) = x^T P x$$

удовлетворяет неравенствам

$$c_1 \|x\|_2^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|_2^2$$

и ее производная вдоль траекторий системы (4.27) определяется равенством

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= x^T \dot{P} x + x^T P(t) \dot{x} + \dot{x}^T P(t) x = \\ &= x^T [\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t)]x = -x^T Q(t)x \leq -c_3 \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

Таким образом, условия теоремы 4.10 при $a = 2$ выполнены глобально и, следовательно, начало координат глобально экспоненциально устойчиво. \triangle

4.6. Линейные зависящие от времени системы и линеаризация

Свойства устойчивости начала координат, являющегося точкой равновесия линейной зависящей от времени системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x, \quad (4.29)$$

могут быть охарактеризованы в терминах переходной матрицы системы. Из линейной теории¹⁾ известно, что решение (4.29) имеет вид

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0),$$

где $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица. В следующей теореме равномерная асимптотическая устойчивость охарактеризована в терминах $\Phi(t, t_0)$.

Теорема 4.11. Точка равновесия $x = 0$ системы (4.29) (глобально) равномерно асимптотически устойчива, если и только если передаточная матрица удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq k e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (4.30)$$

где k и λ — некоторые положительные константы.

Доказательство: Если начало координат равномерно асимптотически устойчиво, то это свойство выполняется глобально, поскольку $x(t)$ линейно зависит от $x(t_0)$. Достаточность (4.30) следует из неравенства

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|x(t_0)\| \leq k \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Для доказательства необходимости предположим, что начало координат равномерно асимптотически устойчиво. Тогда, существует \mathcal{K} -функция β , такая что

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x(t_0) \in R^n.$$

Из определения индуцированной матричной нормы (см. приложение А) следует, что

$$\|\Phi(t, t_0)\| = \max_{\|x\|=1} \|\Phi(t, t_0)x\| \leq \max_{\|x\|=1} \beta(\|x\|, t - t_0) = \beta(1, t - t_0).$$

Поскольку

$$\beta(1, s) \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty,$$

существует $T > 0$, такая что $\beta(1, T) \leq 1/e$. Предположим, что для всех $t \geq t_0$ константа N является наименьшим числом, таким что $t \leq t_0 + NT$. Разделим интервал $[t_0, t_0 + (N-1)T]$ на $(N-1)$ равных подинтервалов длиной T . Используя свойства переходной матрицы $\Phi(t, t_0)$, можем записать

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= \Phi(t, t_0 + (N-1)T)\Phi(t + (N-1)T, t_0 + (N-2)T) \cdots \times \\ &\quad \times \Phi(t_0 + T, t_0). \end{aligned}$$

Тогда

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq \|\Phi(t, t_0 + (N-1)T)\| \prod_{k=1}^{k=N-1} \|\Phi(t_0 + kT, t_0 + (k-1)T)\| \leq$$

¹⁾ См. например, [9], [35], [94] и [158].

$$\leq \beta(1, 0) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{1}{e} = e\beta(1, 0)e^{-N} \leq \\ \leq e\beta(1, 0)e^{-(t-t_0)/T} = ke^{-\lambda(t-t_0)},$$

где $k = e\beta(1, 0)$ и $\lambda = 1/T$. \square

Теорема 4.11. показывает, что для линейных систем равномерная асимптотическая устойчивость начала координат эквивалентна экспоненциальной устойчивости. Несмотря на то, что неравенство (4.30) позволяет установить свойство равномерной асимптотической устойчивости начала координат без использования функции Ляпунова, оно не столь же полезно, как критерий устойчивости линейных не зависящих от времени систем, в котором используется информация о расположении собственных значений матрицы этих систем, поскольку для получения переходной матрицы $\Phi(t, t_0)$ необходимо решить уравнение состояния (4.29). Заметим, что для линейных зависящих от времени систем равномерная асимптотическая устойчивость не может быть охарактеризована с использованием информации о расположении собственных значений матрицы A .¹⁾ Это утверждение может быть проиллюстрировано следующим примером.

Пример 4.22. Рассмотрим линейную систему второго порядка с матрицей

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + 1.5 \cos^2 t & 1 - 1.5 \sin t \cos t \\ -1 - 1.5 \sin t \cos t & 1 + 1.5 \sin^2 t \end{bmatrix}.$$

Для каждого t собственными значениями матрицы $A(t)$ являются величины $-0.25 \pm 0.25\sqrt{7}j$. Таким образом, собственные значения не зависят от t и лежат в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости. Тем не менее, начало координат неустойчиво. Действительно, из

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{0.5t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{0.5t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{bmatrix}$$

видно, что существуют начальные состояния $x(0)$, произвольно близкие к началу координат, для которых решение неограниченно и уходит на бесконечность. \triangle

Как мы увидим позднее, несмотря на то, что теорема 4.11 не может быть непосредственно использована в качестве критерия устойчивости, она гарантирует существование функции Ляпунова для линейной системы (4.29). В примере 4.21 мы видели, что если найдена положи-

¹⁾ Существуют специальные случаи, в которых равномерная асимптотическая устойчивость начала координат, являющегося точкой равновесия системы (4.29), эквивалентна упомянутым условиям на собственные значения. Одним из таких случаев являются периодические системы. (См. примеры 4.40 и 10.8) Другим подобным случаем, являются медленно изменяющиеся системы. (См. пример 9.9)

жительно определенная, ограниченная матрица $P(t)$, удовлетворяющая для некоторой положительно определенной матрицы $Q(t)$ дифференциальному уравнению (4.28), то $V(t, x) = x^T P(t)x$ — функция Ляпунова для этой системы. Если матрица $Q(t)$ выбрана не только положительно определенной, но и ограниченной, т. е.

$$0 < c_3 I \leq Q(t) \leq c_4 I, \quad \forall t \geq 0,$$

и если $A(t)$ непрерывна и ограничена, то можно показать, что в случае экспоненциальной устойчивости начала координат существует решение уравнения (4.28), обладающее желаемыми свойствами.

Теорема 4.12. Пусть $x = 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия (4.29). Предположим, что $A(t)$ непрерывна и ограничена. Пусть $Q(t)$ — непрерывная, ограниченная, положительно определенная, симметричная матрица. Тогда существует непрерывно дифференцируемая, ограниченная, положительно определенная, симметричная матрица $P(t)$, удовлетворяющая (4.28). Следовательно, $V(t, x) = x^T P(t)x$ — функция Ляпунова для системы, удовлетворяющая условиям теоремы 4.10.

Доказательство: Пусть

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau$$

и $\phi(\tau; t, x)$ — решение (4.29), начинающееся в (t, x) . Вследствие линейности системы $\phi(\tau; t, x) = \Phi(\tau, t)x$. По определению $P(t)$

$$x^T P(t)x = \int_t^\infty \phi^T(\tau; t, x) Q(\tau) \phi(\tau; t, x) d\tau.$$

Используя (4.30), получаем

$$\begin{aligned} x^T P(t)x &\leq \int_t^\infty c_4 \|\Phi(\tau, t)\|_2^2 \|x\|_2^2 d\tau \leq \\ &\leq \int_t^\infty k^2 e^{-2\lambda(\tau-t)} d\tau c_4 \|x\|_2^2 = \frac{k^2 c_4}{2\lambda} \|x\|_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} c_2 \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку

$$\|A(t)\|_2 \leq L, \quad \forall t \geq 0,$$

решение $\phi(\tau; t, x)$ удовлетворяет оценке снизу¹⁾

$$\|\phi(\tau; t, x)\|_2^2 \geq \|x\|_2^2 e^{-2L(\tau-t)}.$$

¹⁾ См. упражнение 3.17.

Тогда

$$\begin{aligned} x^T P(t)x &\geq \int_t^\infty c_3 \|\phi(\tau; t, x)\|_2^2 d\tau \geq \\ &\geq \int_t^\infty e^{-2L(\tau-t)} d\tau c_3 \|x\|_2^2 = \frac{c_3}{2L} \|x\|_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} c_1 \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$c_1 \|x\|_2^2 \leq x^T P(t)x \leq c_2 \|x\|_2^2.$$

Из этих неравенств видно, что $P(t)$ является положительно определенной и ограниченной матрицей. Из определения $P(t)$ следует, что она является, кроме того, симметричной и непрерывно дифференцируемой. То, что $P(t)$ удовлетворяет (4.28), может быть доказано путем непосредственного дифференцирования $P(t)$ и с последующим использованием

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\tau, t) = -\Phi(\tau, t)A(t).$$

В частности,

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t)Q(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\tau, t) d\tau + \\ &+ \int_t^\infty \left[\frac{\partial}{\partial t} \Phi^T(\tau, t) \right] Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau - Q(t) = \\ &= - \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t)Q(\tau)\Phi(\tau, t) d\tau A(t) - \\ &- A^T(t) \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t)Q(\tau)\Phi(\tau, t) d\tau - Q(t) = \\ &= -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) - Q(t). \end{aligned}$$

Тот факт, что $V(t, x) = x^T P(t)x$ — функция Ляпунова, было показано в примере 4.21. \square

В случае, если линейная система (4.29) не зависит от времени, т. е. когда A — постоянная матрица, функция Ляпунова $V(t, x)$ в теореме 4.12 может быть выбрана независимой от t . Напомним, что для линейной не зависящей от времени системы

$$\Phi(\tau, t) = \exp[(\tau - t)A],$$

и эта передаточная матрица удовлетворяет (4.30), если A гурвицева. Выбрав положительно определенную, симметричную (постоянную) матрицу Q , мы можем определить $P(t)$ равенством

$$\begin{aligned} P &= \int_t^\infty \exp[(\tau - t)A^T]Q \exp[(\tau - t)A] d\tau = \\ &= \int_t^\infty \exp[A^T s]Q \exp[As] ds. \end{aligned}$$

Заметим, что эта матрица не зависит от t . Сравнивая это представление для $P(t)$ с (4.13), можно заключить, что P — единственное решение уравнения Ляпунова (4.12). Таким образом, функция Ляпунова из теоремы 4.12 сводится к функции Ляпунова, используемой в параграфе 4.3.

Факт существования функций Ляпунова для линейных систем, гарантированный теоремой 4.12, может быть теперь использован для доказательства результата для линеаризованных систем, обобщающего теорему 4.7 на неавтономный случай. Рассмотрим нелинейную неавтономную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (4.31)$$

где $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая функция и $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$. Предположим, что начало координат $x = 0$ является точкой равновесия для системы при $t = 0$, т. е. $f(t, 0) = 0$ для всех $t \geq 0$. Кроме того, предположим что матрица Якоби $[\partial f_i / \partial x]$ ограничена и липшицева на D равномерно по t :

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x_1) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x_2) \right\|_2 \leq L_i \|x_1 - x_2\|_2, \quad \forall x_1, x_2 \in D, \forall t \geq 0$$

для всех $1 \leq i \leq n$. По теореме о среднем значении

$$f_i(t, x) = f_i(t, 0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i)x,$$

где z_i — точка на отрезке, соединяющем x и начало координат. Поскольку $f(t, 0) = 0$, мы можем записать

$$f_i(t, x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0)x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0) \right] x.$$

Следовательно,

$$f(t, x) = A(t)x + g(t, x),$$

где

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) \quad \text{и} \quad g_i(t, x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0) \right] x.$$

Функция $g(t, x)$ удовлетворяет

$$\|g(t, x)\|_2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0) \right\|_2^2 \right)^{1/2} \|x\|_2 \leq L \|x\|_2^2,$$

где $L = \sqrt{n} L_1$. Таким образом, в малой окрестности начала координат мы можем аппроксимировать нелинейную систему (4.31) ее локальной линеаризацией. Следующая теорема представляет собой формулировку первого метода Ляпунова, используемого для установления свойства экспоненциальной устойчивости начала координат для неавтономных систем.

Теорема 4.13. Пусть $x = 0$ — точка равновесия для нелинейной системы

$$\dot{x} = f(t, x),$$

где $f : [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$ — непрерывно дифференцируемая функция, $D = \{x \in R^n \mid \|x\|_2 < r\}$, матрица Якоби $[\partial f / \partial x]$ ограничена и липшицева на D равномерно по t . Пусть

$$A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|_{x=0}.$$

Тогда начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия для нелинейной системы, если она является экспоненциально устойчивой точкой равновесия для линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Доказательство: Поскольку линейная система имеет экспоненциально устойчивую точку равновесия в начале координат и $A(t)$ является непрерывной и ограниченной, из теоремы 4.12 следует, что существует непрерывно дифференцируемая, ограниченная, положительно определенная симметричная матрица $P(t)$, удовлетворяющая (4.28) с непрерывной, положительно определенной и симметричной матрицей $Q(t)$. Рассмотрим $V(t, x) = x^T P(t)x$ в качестве функции Ляпунова для нелинейной системы. Производная этой функции вдоль решений системы определяется равенством

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= x^T P(t)f(t, x) + f^T(t, x)P(t)x + x^T \dot{P}(t)x = \\ &= x^T [P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + \dot{P}(t)]x + 2x^T P(t)g(t, x) = \\ &= -x^T Q(t)x + 2x^T P(t)g(t, x) \leq \\ &\leq -c_3 \|x\|_2^2 + 2c_2 L \|x\|_2^2 \leq \\ &\leq -(c_3 - 2c_2 L\rho) \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < \rho. \end{aligned}$$

Выбор $\rho < \min\{r, c_2/(2c_2 L)\}$ обеспечивает отрицательную определенность $V(t, x)$ при $\|x\|_2 < \rho$. Таким образом, условия теоремы 4.10 выполнены для $\|x\|_2 < \rho$ и, следовательно, начало координат экспоненциально устойчиво. \square

4.7. Обратные теоремы Ляпунова

В теоремах 4.9. и 4.10 устанавливаются условия равномерной асимптотической и экспоненциальной устойчивости начала координат, основанные на требовании существования функции Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющей определенным условиям. Это требование существования дополнительной функции $V(t, x)$, удовлетворяющей определенным требованиям, является типичным для большинства теорем из теории Ляпунова. Условия этих теорем не могут быть проверены непосредственно с использованием данных исследуемой задачи. Вместо этого необходимо найти дополнительную функцию — функцию Ляпунова. В связи с проблемой нахождения этой функции возникает два вопроса. Во-первых, существует ли такая функция, удовлетворяющая условиям теорем? Во-вторых, какова методология поиска этой функции? Во многих случаях теория Ляпунова позволяет получить утвердительный ответ на первый вопрос. Этот ответдается в форме обратных теорем Ляпунова (converse Lyapunov theorems), являющихся обращением соответствующих теорем Ляпунова. Например, в обратной теореме для равномерной асимптотической устойчивости утверждается, что если начало координат равномерно асимптотически устойчиво, то существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям теоремы 4.9. Большинство из этих обратных теорем обычно доказываются путем непосредственного построения дополнительных функций, удовлетворяющих условиям соответствующих теорем. К сожалению, нахождение этих функций почти всегда предполагает знание решения дифференциального уравнения. Поэтому эти теоремы не могут помочь при практическом нахождении функций Ляпунова. Однако гарантия существования этих функций — это лучше, чем полное отсутствие какой-либо информации. По крайней мере мы будем уверены, что наши поиски могут увенчаться успехом. Обратные теоремы полезны также при использовании теории Ляпунова для получения концептуальных заключений о поведении динамических систем. Приведенная ниже теорема 4.15 принадлежит именно к этому классу результатов. Другие примеры подобного использования обратных теорем Ляпунова будут приведены в последующих главах. В этом параграфе мы приведем три обратных теоремы Ляпунова.¹⁾ Первая теорема представляет собой обращение теоремы об экспоненциальной устойчивости начала координат, а вторая — теоремы о равномерной асимптотической устойчивости начала координат. Третья теорема применима к автономным системам и определяет конверсную функцию Ляпунова (converse Lyapunov function)²⁾ для всей области притяжения асимптотически устойчивой точки равновесия.

¹⁾ Всеобъемлющий обзор обратных теорем Ляпунова приведен в работах [72] и [107], последние результаты в этой области изложены в [193].

²⁾ Прим. ред. перев. — Термин «converse Lyapunov function», обозначающий функцию Ляпунова, определяемую при доказательстве обратной (converse)

Задача построения конверсной функции Ляпунова для нас не нова. Мы решили ее для случая линейных систем при доказательстве теоремы 4.12. При внимательном чтении этого доказательства можно убедиться в том, что для его проведения линейность системы не является критическим требованием и используется лишь при установлении квадратичности функции $V(t, x)$ по x . Это наблюдение приводит к формулировке первой из трех упомянутых обратных теорем Ляпунова, доказательство которой представляет собой простое обобщение доказательства теоремы 4.12.¹⁾

Теорема 4.14. Пусть $x = 0$ — точка равновесия нелинейной системы

$$\dot{x} = f(t, x),$$

где $f : [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$ — непрерывно дифференцируемая функция, $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$, и матрица Якоби $[\partial f / \partial x]$ ограничена в D равномерно по t . Пусть k, λ и r_0 — положительные константы, $r_0 < r/k$. Пусть $D_0 = \{x \in R^n \mid \|x\| < r_0\}$. Предположим, что решения системы удовлетворяют

$$\|x(t)\| \leq k\|x(t_0)\|e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall x(t_0) \in D_0, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Тогда существует функция $V : [0, \infty) \times D_0 \rightarrow R$, удовлетворяющая неравенствам

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2\|x\|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3\|x\|^2$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4\|x\|^2,$$

где c_1, c_2, c_3 и c_4 — некоторые положительные константы. Более того, если $r = \infty$ и начало координат глобально экспоненциально устойчиво, то $V(t, x)$ определена и удовлетворяет на R^n вышеприведенным неравенствам. Кроме того, если система автономна, V может быть выбрана независимой от t .

Доказательство: Вследствие эквивалентности норм достаточно доказать утверждения этой теоремы для 2-нормы. Пусть $\phi(\tau; t, x)$ — решение системы, начинающееся в (t, x) , т. е. $\phi(t; t, x) = x$. Для любого

теоремы Ляпуновского типа переведен как «конверсная функция Ляпунова», чтобы избежать смешения с термином «обратная функция».

¹⁾ Прим. ред. перев. — Теорема 4.14 впервые была получена Н.Н.Красовским [107] и в отечественной литературе называется теоремой Красовского. Участвующие в ее формулировке неравенства называют, вслед за Н.Н.Красовским, неравенствами квадратичного типа.

$x \in D_0$, $\phi(\tau; t, x) \in D$ для всех $\tau \geq t$. Пусть

$$V(t, x) = \int_t^{t+\delta} \phi^T(\tau; t, x) \phi(\tau; t, x) d\tau,$$

где δ — положительная константа, подлежащая определению. Вследствие экспоненциального убывания решений имеем

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \int_t^{t+\delta} \|\phi(\tau; t, x)\|_2^2 d\tau \leq \\ &\leq \int_t^{t+\delta} k^2 e^{-2\lambda(\tau-t)} d\tau \|x\|_2^2 = \frac{k^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda\delta}) \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, матрица Якоби $[\partial f / \partial x]$ ограничена на D . Пусть

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\|_2 \leq L, \quad \forall x \in D.$$

Тогда $\|f(t, x)\|_2 \leq L\|x\|_2$ и $\phi(\tau; t, x)$ удовлетворяет оценке снизу¹⁾

$$\|\phi(\tau; t, x)\|_2^2 \geq \|x\|_2^2 e^{-2L(\tau-t)}.$$

Следовательно,

$$V(t, x) \geq \int_t^{t+\delta} e^{-2L(\tau-t)} d\tau \|x\|_2^2 = \frac{1}{2L} (1 - e^{-2L\delta}) \|x\|_2^2.$$

Таким образом, $V(t, x)$ удовлетворяет первому неравенству из формулировки доказываемой теоремы с константами

$$c_1 = \frac{(1 - e^{-2L\delta})}{2L} \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{k^2(1 - e^{-2\lambda\delta})}{2\lambda}.$$

Для вычисление производной V вдоль траекторий системы определим функции чувствительности

$$\phi_t(\tau; t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(\tau; t, x); \quad \phi_x(\tau; t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \phi(\tau; t, x).$$

Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) = \phi^T(\tau + \delta; t, x) \phi(\tau + \delta; t, x) - \phi^T(\tau; t, x) \phi(\tau; t, x) +$$

¹⁾ См. упражнение 3.17.

$$\begin{aligned}
& + \int_t^{t+\delta} 2\phi^T(\tau; t, x)\phi_t(\tau; t, x) d\tau + \\
& + \int_t^{t+\delta} 2\phi^T(\tau; t, x)\phi_x(\tau; t, x) d\tau f(t, x) = \\
& = \phi^T(t + \delta; t, x)\phi(t + \delta; t, x) - \|x\|_2^2 + \\
& + \int_t^{t+\delta} 2\phi^T(\tau; t, x)[\phi_t(\tau; t, x) + \phi_x(\tau; t, x)f(t, x)] d\tau.
\end{aligned}$$

Легко показать, что¹⁾

$$\phi_t(\tau; t, x) + \phi_x(\tau; t, x)f(t, x) \equiv 0, \quad \forall \tau \geq t.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &= \phi^T(t + \delta; t, x)\phi(t + \delta; t, x) - \|x\|_2^2 \leq \\
&\leq -(1 - k^2 e^{-2\lambda\delta})\|x\|_2^2.
\end{aligned}$$

Выбор $\delta = \ln(2k^2)/(2\lambda)$ обеспечивает выполнение второго неравенства в формулировке теоремы при $c_2 = 1/2$. Для того, чтобы показать справедливость третьего неравенства заметим, что $\phi_x(\tau; t, x)$ удовлетворяет уравнению чувствительности

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_x = \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \phi(\tau; t, x))\phi_x, \quad \phi_x(t; t, x) = I.$$

Поскольку на D выполнено

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\|_2 \leq L,$$

ϕ_x удовлетворяет оценке²⁾

$$\|\phi_x(\tau; t, x)\|_2 \leq e^{L(\tau-t)}.$$

Поэтому

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|_2 = \left\| \int_t^{t+\delta} 2\phi^T(\tau; t, x)\phi_x(\tau; t, x) d\tau \right\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_t^{t+\delta} 2\|\phi(\tau; t, x)\|_2 \|\phi_x(\tau; t, x)\|_2 d\tau \leq \\
&\leq \int_t^{t+\delta} 2ke^{-\lambda(\tau-t)}e^{L(\tau-t)} d\tau \|x\|_2 = \\
&= \frac{2k}{(\lambda - L)}[1 - e^{-(\lambda-L)\delta}]\|x\|_2.
\end{aligned}$$

Таким образом, последнее неравенство в формулировке теоремы выполнено с константой

$$c_4 = \frac{2k}{(\lambda - L)}[1 - e^{-(\lambda-L)\delta}].$$

Если все предположения выполнены глобально, то r_0 может быть выбрана произвольно большой. Если система автономна, то $\phi(\tau; t, x)$ зависит только от $(\tau - t)$, т. е.

$$\phi(\tau; t, x) = \psi(\tau - t; x).$$

Тогда

$$V(t, x) = \int_t^{t+\delta} \psi^T(\tau - t; x)\psi(\tau - t; x) d\tau = \int_0^\delta \psi^T(s; x)\psi(s; x) ds$$

и это представление не зависит от t . \square

Из теоремы 4.13 следует, что если линеаризация нелинейной системы в окрестности начала координат имеет экспоненциально устойчивую точку равновесия, то начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия этой нелинейной системы. Ниже мы используем теорему 4.14 для доказательства того факта, что экспоненциальная устойчивость линеаризации является необходимым и достаточным условием для экспоненциальной устойчивости начала координат.

Теорема 4.15. Пусть $x = 0$ — точка равновесия нелинейной системы

$$\dot{x} = f(t, x),$$

где $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая функция, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$ и матрица Якоби $[\partial f / \partial x]$ ограничена и липшицева на D равномерно по t . Пусть

$$A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|_{x=0}.$$

¹⁾ См. упражнение 3.30.

²⁾ См. упражнение 3.17.

Тогда $x = 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия нелинейной системы, если и только если она является экспоненциально устойчивой точкой равновесия линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Доказательство: Необходимость следует из теоремы 4.13. Для доказательства достаточности запишем линейную систему в следующем виде:

$$\dot{x} = f(t, x) - [f(t, x) - A(t)x] = f(t, x) - g(t, x).$$

С учетом рассуждений, предшествующих теореме 4.13, можно утверждать, что

$$\|g(t, x)\|_2 \leq L\|x\|_2^2, \quad \forall x \in D, \quad \forall t \geq 0.$$

Поскольку начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия нелинейной системы, существуют положительные константы k , λ и c , такие что

$$\|x(t)\|_2 \leq k\|x(t_0)\|_2 e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\|_2 < c.$$

Выбор $r_0 < \min\{c, r/k\}$ обеспечивает выполнение условий теоремы 4.14. Пусть $V(t, x)$ — функция, существование которой гарантируется теоремой 4.14. Используем ее в качестве функции Ляпунова для линейной системы. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} A(t)x &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) - \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \leq \\ &\leq -c_3\|x\|_2^2 + c_4L\|x\|_2^3 < \\ &< -(c_3 - c_4L\rho)\|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < \rho. \end{aligned}$$

Выбор $\rho < \min\{r_0, c_3/(c_4L)\}$ гарантирует отрицательную определенность $\dot{V}(t, x)$ при $\|x\|_2 < \rho$. Следовательно, все условия теоремы 4.10 выполнены при $\|x\|_2 < \rho$ и мы можем заключить, что начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия линейной системы. \square

Следствие 4.3. Пусть $x = 0$ — точка равновесия нелинейной системы $\dot{x} = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности $x = 0$ функция. Пусть $A(t) = [\partial f/\partial x](0)$. Тогда $x = 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия нелинейной системы, если и только если A гурвицева.

Пример 4.23. Рассмотрим скалярное уравнение $\dot{x} = -x^3$. В примере 4.14 мы показали, что начало координат асимптотически устойчиво, но соответствующая линеаризованная система в окрестности начала координат имеет вид $\dot{x} = 0$. Легко видеть, что матрица A не является гурвицевой. Используя следствие 4.3 можно заключить, что начало координат не является экспоненциально устойчивым. \triangle

Приведенные ниже обратные теоремы Ляпунова (теоремы 4.16 и 4.17) представляют собой обобщения теоремы 4.14 в двух различных направлениях, однако их доказательства более сложны. Теорема

4.16 применяется в более общем случае равномерной асимптотической устойчивости.¹⁾ Теорема 4.16 применима в случае автономных систем и гарантирует существование функции Ляпунова, которая определена на всей области притяжения.

Теорема 4.16. Пусть $x = 0$ — точка равновесия нелинейной системы

$$\dot{x} = f(t, x),$$

где $f : [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$ — непрерывно дифференцируемая функция, $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ и матрица Якоби $[\partial f/\partial x]$ ограничена на D равномерно по t . Пусть β — \mathcal{KL} -функция и r_0 — положительная константа, такая что $\beta(r_0, 0) < r$. Пусть $D_0 = \{x \in R^n \mid \|x\| < r_0\}$. Предположим, что решения системы удовлетворяют

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall x(t_0) \in D_0, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Тогда существует непрерывно дифференцируемая функция $V : [0, \infty) \times D_0 \rightarrow R$, удовлетворяющая неравенствам

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) &\leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &\leq -\alpha_3(\|x\|) \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq \alpha_4(\|x\|), \end{aligned}$$

где α_1 , α_2 , α_3 и α_4 — \mathcal{K} -функции, определенные на $[0, r_0]$. Если система автономна, V может быть выбрана независимой от t .

Доказательство: См. приложение C.7. \square

Теорема 4.17. Пусть $x = 0$ — асимптотически устойчивая точка равновесия нелинейной системы

$$\dot{x} = f(x),$$

где $f : D \rightarrow R^n$ — локально липшицевая функция, $D \subset R^n$ — область, содержащая начало координат. Пусть $R_A \subset D$ — область притяжения точки $x = 0$. Тогда существуют гладкая, положительно определенная функция $V(x)$ и непрерывная, положительно определенная функция $W(x)$, определенные для всех $x \in R_A$, такие что

$$\begin{aligned} V(x) &\rightarrow \infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow \partial R_A \\ \frac{\partial V}{\partial x} f(x) &\leq -W(x), \quad \forall x \in R_A, \end{aligned}$$

¹⁾ Теорема 4.16 может быть сформулирована лишь для локально липшицевой, а не для непрерывно дифференцируемой функции $f(t, x)$ [125, теорема 14]. Также можно сформулировать соответствующий результат для случая глобальной равномерной асимптотической устойчивости [125, теорема 23].

и для любой константы $c > 0$ множество $\{V(x) \leq c\}$ является компактным подмножеством R_A . В случае, если $R_A = R^n$, функция $V(x)$ является радиально неограниченной.

Доказательство: См. приложение C.8. \square

Анализируя теорему 4.17, интересно отметить, что любое ограниченное подмножество S области притяжения может быть включено в компактное множество вида $\{V(x) \leq c\}$, где $c > 0$ — некоторая константа. Это обстоятельство представляется важным, поскольку очень часто нам приходится ограничивать свой анализ рассмотрением положительно инвариантного, компактного множества вида $\{V(x) \leq c\}$. В этом случае, если $S \subset \{V(x) \leq c\}$, полученные нами результаты будут верны для всего множества S . Если, с другой стороны, все, что нам известно, это факт существования на S функции Ляпунова $V_1(x)$, то мы должны выбрать константу c_1 , такую что множество $\{V_1(x) \leq c_1\}$ является компактным и содержится в S . Тогда наш анализ будет ограничен рассмотрением множества $\{V_1(x) \leq c_1\}$, являющегося лишь подмножеством S .

4.8. Ограничность и предельная ограниченность

Теория Ляпунова может быть использована для доказательства ограниченности решения уравнения состояния даже в случае, когда начало координат не является точкой равновесия. Мотивировка рассматриваемого в этом параграфе вопроса может быть получена при анализе следующего примера. Скалярное уравнение

$$\dot{x} = -x + \delta \sin t, \quad x(t_0) = a, \quad a > \delta > 0$$

не имеет точек равновесия и его решение определяется равенством

$$x(t) = e^{-(t-t_0)}a + \delta \int_{t_0}^t e^{-(t-\tau)} \sin \tau \, d\tau.$$

Это решение удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq e^{-(t-t_0)}a + \delta \int_{t_0}^t e^{-(t-\tau)} \, d\tau = e^{-(t-t_0)}a + \delta \left[1 - e^{-(t-t_0)} \right] \leq \\ &\leq a, \quad \forall t \geq t_0, \end{aligned}$$

которая показывает, что решение ограничено для всех $t \geq t_0$ равномерно по t_0 , т. е. эта верхняя оценка не зависит от t_0 . Несмотря на то, что эта оценка верна для всех $t \geq t_0$, она становится по мере течения времени все более консервативной оценкой решения, поскольку не учитывает экспоненциально убывающего члена. Если, с другой

стороны, мы выберем любое число b , удовлетворяющее $\delta < b < a$, то можно показать, что

$$|x(t)| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + \ln \left(\frac{a-\delta}{b-\delta} \right).$$

Новая верхняя граница решения b , также являющаяся независимой от t_0 , представляется лучшей оценкой решения после завершения в системе переходного процесса. В этом случае решение называется равномерно предельно ограниченным, а константа b — предельной границей. Доказательство того факта, что решение уравнения $\dot{x} = -x + \delta \sin t$ обладает свойствами равномерной ограниченности и равномерной предельной ограниченности может быть выполнено с использованием теории Ляпунова без явного вычисления решения уравнения состояния. Рассмотрим функцию $V(x) = x^2/2$ и вычислим ее производную вдоль решений исследуемого уравнения:

$$\dot{V} = x\dot{x} = -x^2 + x\delta \sin t \leq -x^2 + \delta|x|.$$

Правая часть этого неравенства неотрицательна, поскольку вблизи начала координат положительный линейный член $\delta|x|$ доминирует над отрицательным квадратичным членом $-x^2$. Однако, \dot{V} отрицательна вне множества $\{|x| \leq \delta\}$. При $c > \delta^2/2$ решения, начинающиеся в множестве $\{V(x) \leq c\}$, остаются в этом множестве во все будущие моменты времени, т. к. \dot{V} отрицательна на границе этого множества $V = c$. Таким образом, решения равномерно ограничены. Кроме того, если мы выберем любое число ε , такое что $(\delta^2/2) < \varepsilon < c$, то \dot{V} будет отрицательной в множестве $\{\varepsilon \leq V \leq c\}$ и, следовательно, в этом множестве V будет монотонно убывать до тех пор, пока решение не войдет в множество $\{V \leq \varepsilon\}$. Начиная с этого момента, решение не сможет покинуть множество $\{V \leq \varepsilon\}$, поскольку \dot{V} отрицательна на его границе $V = \varepsilon$. Таким образом, мы можем заключить, что решение равномерно предельно ограничено с предельной границей $|x| \leq \sqrt{2\varepsilon}$.

Цель, которую мы преследуем в этом параграфе, заключается в том, чтобы показать как теория Ляпунова может быть использована для получения аналогичных заключений в отношении системы

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{4.32}$$

где $f : [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$ — кусочно-непрерывная по t и локально липшицевая по x на $[0, \infty) \times D$ функция, $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая начало координат.

Определение 4.6. Решения (4.32) являются

- равномерно ограниченными, если существует положительная константа c , независимая от $t_0 \geq 0$, и для каждой $a \in (0, c)$ существует $\beta = \beta(a) > 0$, независимая от t_0 , такая что

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta, \quad \forall t \geq t_0; \tag{4.33}$$

- глобально равномерно ограниченными, если (4.33) выполнено для произвольно большой константы a ;
- равномерно предельно ограниченными с предельной границей b , если существуют положительные константы b и c , независящие от $t_0 \geq 0$, и для каждой $a \in (0, c)$ существует $T = T(a, b) \geq 0$, независимая от t_0 , такая что

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T; \quad (4.34)$$

- глобально равномерно предельно ограниченными, если (4.34) выполнено для произвольно большой константы a .

В случае, когда рассматривается автономная система, мы можем опустить слово «равномерно», поскольку решение зависит только от $t - t_0$.

Для того, чтобы продемонстрировать использование теории Ляпунова при установлении свойств ограниченности и предельной ограниченности, рассмотрим непрерывно дифференцируемую, положительно определенную функцию $V(x)$ и предположим, что множество $\{V \leq c\}$ компактно, где $c > 0$ — некоторая константа. Пусть

$$\Lambda = \{\varepsilon \leq V(x) \leq c\},$$

где $\varepsilon < c$ — некоторая положительная константа. Предположим, что производная V вдоль траекторий системы $\dot{x} = f(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(t, x) \leq -W_3(x) \quad \forall x \in \Lambda, \quad \forall t \geq t_0, \quad (4.35)$$

где $W_3(x)$ — непрерывная, положительно определенная функция. Из неравенства (4.35) следует, что множества $\Omega_c = \{V(x) \leq c\}$ и $\Omega_\varepsilon = \{V(x) \leq \varepsilon\}$ положительно инвариантны, поскольку на границах $\partial\Omega_c$ и $\partial\Omega_\varepsilon$ производная \dot{V} отрицательна. На рисунке 4.8 изображены множества Λ , $\partial\Omega_c$ и $\partial\Omega_\varepsilon$. Поскольку \dot{V} отрицательна в Λ , траектории, начинающиеся в Λ , должны двигаться в направлении убывания $V(x(t))$. При нахождении траекторий в Λ функция V удовлетворяет неравенствам (4.22) и (4.24) из формулировки теоремы 4.9. Поэтому поведение траекторий соответствует ситуации, когда начало координат равномерно асимптотически устойчиво; кроме того, выполнено неравенство

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0),$$

где β — некоторая \mathcal{KL} -функция. Функция $V(x(t))$ продолжает убывать до тех пор, пока траектория не достигнет за конечное время множества Ω_c ; после этого траектория останется в этом множестве во все будущие моменты времени. Тот факт, что траектория достигнет множества Ω_c за конечное время, доказывается следующим образом. Пусть $k = \min_{x \in \Lambda} W_3(x) > 0$. Этот минимум существует, т. к. $W_3(x)$ непрерывна и Λ компактно. Кроме того, этот минимум является положитель-

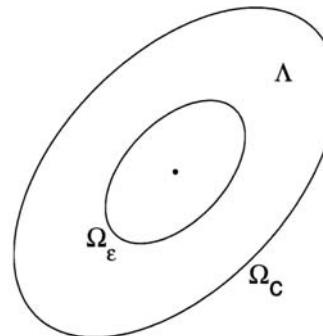


Рис. 4.8. Множества Λ , $\partial\Omega_c$ и $\partial\Omega_\varepsilon$.

ной величиной, поскольку $W_3(x)$ является положительно определенной функцией. Следовательно,

$$W_3(x) \geq k, \quad \forall x \in \Lambda. \quad (4.36)$$

Из неравенств (4.35) и (4.36) следует, что

$$\dot{V}(t, x) \leq -k, \quad \forall x \in \Lambda, \quad \forall t \geq t_0.$$

Поэтому справедлива оценка

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0)) - k(t - t_0) \leq c - k(t - t_0),$$

из которой следует, что $V(x(t))$ убывает до величины ε на интервале времени $[t_0, t_0 + (c - \varepsilon)/k]$.

При решении многих задач неравенство $\dot{V} \leq -W_3$ получают с использованием неравенств для норм. В этих случаях при анализе часто приходят к неравенству

$$\dot{V}(t, x) \leq -W_3(x), \quad \forall \mu \leq \|x\| \leq r, \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.37)$$

Если r превосходит μ и достаточно велико, мы можем выбрать c и ε , так чтобы множество Λ было непустым и содержалось в $\{\mu \leq \|x\| \leq r\}$. В частности, предположим, что α_1 и α_2 — \mathcal{K} -функции, такие что¹⁾

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|). \quad (4.38)$$

Из левого неравенства (4.38) следует, что

$$V(x) \leq c \Rightarrow \alpha_1(\|x\|) \leq c \Leftrightarrow \|x\| \leq \alpha_1^{-1}(c).$$

Поэтому выбор $c = \alpha_1(r)$ обеспечивает $\Omega_c \subset B_r$. С другой стороны, из правого неравенства (4.38) следует, что

$$\|x\| \leq \mu \Rightarrow V(x) \leq \alpha_2(\mu).$$

¹⁾ Такие \mathcal{K} -функции всегда существуют по лемме 4.3.

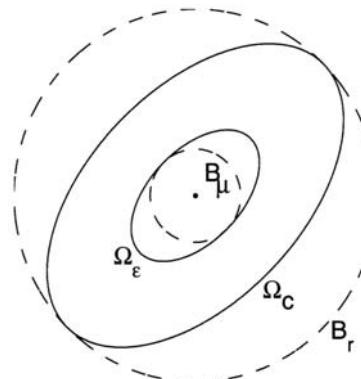


Рис. 4.9. Множества Ω_ε , Ω_c , (непрерывные линии) и B_μ , B_r (пунктирные линии).

Следовательно, выбор $\varepsilon = \alpha_2(\mu)$ обеспечивает $B_\mu \subset \Omega_\varepsilon$. Для того, чтобы получить $\varepsilon < c$, мы должны обеспечить $\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$. На рисунке 4.9 изображены множества Ω_c , Ω_ε , B_r и B_μ .

Из всего вышесказанного следует, что все траектории, начинающиеся в Ω_c достигают за конечное время T множества Ω_ε .¹⁾ Для вычисления предельной границы для $x(t)$ используем левое неравенство (4.38):

$$V(x) \leq \varepsilon \Rightarrow \alpha_1(\|x\|) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \|x\| \leq \alpha_1^{-1}(\varepsilon).$$

Поскольку $\varepsilon = \alpha_2(\mu)$, имеем

$$x \in \Omega_\varepsilon \Rightarrow \|x\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)).$$

Поэтому в качестве предельной границы можно принять $b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$.

Представленная теория для непрерывно дифференцируемой функции $V(x)$ может быть обобщена на случай непрерывно дифференцируемой функции $V(t, x)$, если $V(t, x)$ удовлетворяет неравенству (4.38). В следующей теореме формулируются условия равномерной и предельной ограниченности для этого случая.

Теорема 4.18. Пусть $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая начало координат, $V : [0, \infty) \times D \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая что

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \quad \forall \|x\| \geq \mu \geq 0 \quad (4.40)$$

¹⁾ $T = 0$, если траектория начинается в Ω_ε .

$\forall t \geq 0$ и $\forall x \in D$, где α_1 и α_2 — \mathcal{K} -функции и $W_3(x)$ — непрерывная, положительно определенная функция. Пусть $r > 0$, такая что $B_r \subset D$, и предположим, что

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)). \quad (4.41)$$

Тогда существует \mathcal{KL} -функция β для любого начального состояния $x(t_0)$, удовлетворяющего $\|x(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$, существует $T \geq 0$ (зависящая от $x(t_0)$ и μ), такие что решение (4.32) удовлетворяет неравенствам

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad (4.42)$$

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (4.43)$$

Более того, если $D = R^n$ и α_1 принадлежит классу \mathcal{K}_∞ , то (4.42) и (4.43) выполнены для любого начального состояния $x(t_0)$ вне зависимости от того, насколько велико μ .

Доказательство: См. приложение С.9. \square

Из неравенств (4.42) и (4.43) следует, что $x(t)$ равномерно ограничено для всех $t \geq t_0$ и равномерно предельно ограничено с предельной границей $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$. Предельная граница является функцией от μ класса \mathcal{K} и, следовательно, чем меньше значение μ , тем меньше предельная граница. При $\mu \rightarrow 0$ предельная граница стремится к нулю.

Наиболее важным приложением теоремы 4.18 является ее использование при исследовании устойчивости возмущенных систем.¹⁾ Следующий пример иллюстрирует основные идеи, лежащие в основе этого применения.

Пример 4.24. В параграфе 1.2.3 было показано, что система «масса на пружине» с жесткой пружиной, линейным вязким демпфированием и периодической внешней силой может быть представлена уравнением Дуффинга

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + ka^2y^3 = A \cos \omega t.$$

Пусть $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$. Предположим, что константы в этом уравнении выбраны таким образом, что модель состояния имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(1 + x_1^2)x_1 - x_2 + M \cos \omega t, \end{aligned}$$

где константа $M \geq 0$ пропорциональна амплитуде периодической внешней силы. При $M = 0$ система имеет точку равновесия в начале координат. В примере 4.6 было показано, что начало координат глобально асимптотически устойчиво и в качестве функции Ляпунова можно

¹⁾ См. параграф 9.2.

использовать¹⁾

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x + 2 \int_0^{x_1} (y + y^3) dy = x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x + x_1^2 + \frac{1}{2} x_1^4 = \\ &= x^T \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x + \frac{1}{2} x_1^4 \stackrel{\text{def}}{=} x^T P x + \frac{1}{2} x_1^4. \end{aligned}$$

Используя эту функцию Ляпунова мы можем применить теорему 4.18 при $M > 0$. Функция $V(x)$ положительно определена и радиально неограничена. Следовательно, по лемме 4.3 существуют \mathcal{K} -функции α_1 и α_2 , удовлетворяющие (4.39) глобально. Производная $V(x)$ вдоль траекторий системы определяется равенством

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_1^4 - x_2^2 + (x_1 + 2x_2)M \cos \omega t \leq -\|x\|_2^2 - x_1^4 + M\sqrt{5}\|x\|_2.$$

При получении этого неравенства мы записали $(x_1 + 2x_2)$ как $y^T x$ и использовали неравенство $y^T x \leq \|x\|_2 \|y\|_2$. Для того, чтобы обеспечить выполнение (4.40), нам следует сделать так, чтобы при больших $\|x\|$ член $-\|x\|_2$ доминировал над $M\sqrt{5}\|x\|_2$. Для этого перепишем предыдущее неравенство

$$\dot{V} \leq -(1 - \theta)\|x\|_2^2 - x_1^4 - \theta\|x\|_2^2 + M\sqrt{5}\|x\|_2,$$

где $0 < \theta < 1$. Тогда

$$\dot{V} \leq -(1 - \theta)\|x\|_2^2 - x_1^4, \quad \forall \|x\|_2 \geq \frac{M\sqrt{5}}{\theta}.$$

Эта оценка показывает, что неравенство (4.40) выполнено глобально при $\mu = M\sqrt{5}/\theta$. Таким образом, мы приходим к заключению, что решения глобально равномерно предельно ограничены. Для того, чтобы вычислить предельную границу мы должны найти функции α_1 и α_2 . Из неравенств

$$V(x) \geq x^T P x \geq \lambda_{\min}(P)\|x\|_2^2$$

$$V(x) \leq x^T P x + \frac{1}{2}\|x\|_2^4 \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|_2^2 + \frac{1}{2}\|x\|_2^4$$

видно, что в качестве функций α_1 и α_2 могут быть выбраны

$$\alpha_1(r) = \lambda_{\min}(P)r^2 \quad \text{и} \quad \alpha_2(r) = \lambda_{\max}(P)r^2 + \frac{1}{2}r^4.$$

Таким образом, предельная граница определяется равенством

$$b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) = \sqrt{\frac{\alpha_2(\mu)}{\lambda_{\min}(P)}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)\mu^2 + \mu^4/2}{\lambda_{\min}(P)}}.$$

△

¹⁾ Значения констант δ и k из примера 4.6 выбраны следующими: $\delta = 2$ и $k = 1/2$.

4.9. Устойчивость систем по входу-состоянию

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (4.44)$$

где $f : [0, \infty) \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$ — кусочно-непрерывная по t и локально липшицевая по x и u функция. Вход системы $u(t)$ — кусочно-непрерывная и ограниченная функция времени t для всех $t \geq 0$. Предположим, что свободная система (система с нулевым входом)

$$\dot{x} = f(t, x, 0) \quad (4.45)$$

имеет глобально равномерно асимптотически устойчивую точку равновесия в начале координат $x = 0$. Что можно сказать о поведении системы (4.44) при наличии ограниченного внешнего воздействия $u(t)$? В случае линейной системы, не зависящей от времени,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

с гурвицевой матрицей A можно выписать решение в явном виде

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau) d\tau$$

и с учетом ограниченности первого члена $\|e^{t-t_0}A\| \leq ke^{-\lambda(t-t_0)}$ получить оценку решения

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq ke^{-\lambda(t-t_0)}\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t ke^{-\lambda(t-\tau)}\|B\|\|u(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq ke^{-\lambda(t-t_0)}\|x(t_0)\| + \frac{k\|B\|}{\lambda} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|. \end{aligned}$$

Эта оценка показывает, что состояние системы при нулевом входе (zero-input response) экспоненциально убывает до нуля. Кроме того, из этой оценки также следует, что состояние системы при нулевом начальном состоянии (zero-state response) ограничено при любом ограниченном входе. Более того, из этой оценки следует, нечто большее, нежели свойство системы, заключающееся в том, что при ограниченном входе ее состояние будет также ограничено (bounded-input-bounded-state property). Полученная оценка показывает, что состояние системы при нулевом начальном состоянии пропорционально ограничению на норму входа. Можем ли мы ожидать, что подобное поведение будет наблюдаться и в случае нелинейной системы? Нет ничего удивительного в том, что в общем случае эти свойства не будут иметь места, даже если начало координат свободной системы является глобально равномерно

асимптотически устойчивым. Рассмотрим, например, скалярное уравнение

$$\dot{x} = -3x + (1 + 2x^2)u,$$

имеющее при $u = 0$ глобально экспоненциально устойчивую точку равновесия в нуле. Тем не менее, при $x(0) = 2$ и $u(t) \equiv 1$ решение $x(t) = (3 - e^t)/(3 - 2e^t)$ неограничено и даже уходит на бесконечность за конечное время.

Рассмотрим систему (4.44) как возмущение свободной системы (4.45). Предположим, что $V(t, x)$ — функция Ляпунова для свободной системы. Вычислим ее производную при наличии входа u . Вследствие ограниченности u весьма вероятно, что в некоторых случаях можно будет доказать отрицательность \dot{V} вне некоторого шара радиуса μ , где μ будет зависеть от $\sup \|u\|$. Одной из подобных ситуаций будет случай, когда функция $f(t, x, u)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\| \leq L\|u\|. \quad (4.46)$$

Если \dot{V} отрицательна вне шара радиуса μ , можно применить теорему 4.18 из предыдущего параграфа и показать, что $x(t)$ удовлетворяет (4.42) и (4.43). Эти неравенства показывают, что величина $\|x(t)\|$ ограничена \mathcal{KL} -функцией $\beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$ на интервале $[t_0, t_0 + T]$, а также \mathcal{K} -функцией $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$ при $t \geq t_0 + T$. Следовательно, оценка

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$$

верна для всех $t \geq t_0$ и мотивирует следующее определение *устойчивости по «входу-состоянию»* (input-to-state stability, ISS).

Определение 4.7. Система (4.44) называется *устойчивой по входу-состоянию*, если существуют \mathcal{KL} -функция β и \mathcal{K} -функция γ , такие что для любого начального состояния $x(t_0)$ и любого ограниченного входа $u(t)$ решение $x(t)$ существует для всех $t \geq t_0$ и удовлетворяет оценке

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma \left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\| \right). \quad (4.47)$$

Неравенство (4.47) гарантирует, что для любого ограниченного входа $u(t)$ состояние $x(t)$ будет также ограниченным. Более того, при увеличении t состояние $x(t)$ становится предельно ограниченным \mathcal{K} -функцией $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|$. Читателю предлагается показать (упражнение 4.58) с использованием неравенства (4.47), что если $u(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, то $x(t)$ также стремится к нулю.¹⁾ Поскольку при $u(t) \equiv 0$ неравенство (4.47) сводится к

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0),$$

¹⁾ Другое интересное использование неравенства (4.47) будет вскоре приведено в лемме 4.7

из устойчивости по входу-состоянию следует, что начало координат свободной системы (4.45) глобально равномерно асимптотически устойчиво. Понятие устойчивости по входу-состоянию дано в глобальной постановке, когда начальное состояние и вход системы могут быть произвольно большими. Локальная версия определения этого свойства системы представлена в упражнении 4.60.

В следующих теоремах приведены достаточные условия устойчивости по входу-состоянию.¹⁾

Теорема 4.19. Пусть $V : [0, \infty) \times R^n \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая что

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq -W_3(x), \quad \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) > 0 \quad (4.49)$$

$\forall (t, x, u) \in [0, \infty) \times R^n \times R^m$, где α_1 , α_2 — \mathcal{K}_∞ -функции, ρ — \mathcal{K} -функция и $W_3(x)$ — непрерывная положительно определенная функция на R^n . Тогда система (4.44) устойчива по входу-состоянию при $\gamma = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$.

Доказательство: Используя глобальную версию теоремы 4.18, можно заключить, что решение $x(t)$ существует и удовлетворяет оценке

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma \left(\sup_{r \geq t_0} \|u(\tau)\| \right), \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.50)$$

Поскольку $x(t)$ зависит лишь от $u(\tau)$ при $t_0 \leq \tau \leq t$, супремум в правой части неравенства (4.50) может вычисляться на интервале $[t_0, t]$ и, следовательно, выполнена оценка (4.47).²⁾ \square

Следующая лемма представляет собой прямое следствие обратной теоремы Ляпунова для случая глобальной экспоненциальной устойчивости (теорема 4.14).

Лемма 4.6. Предположим, что $f(t, x, u)$ — некоторая функция, являющаяся непрерывно дифференцируемой и глобально липшицевой по (x, u) равномерно по t . Если свободная система (4.45) имеет глобально экспоненциально устойчивую точку равновесия в начале координат, то система (4.44) устойчива по входу-состоянию.

¹⁾ В [183] показано, что для автономных систем условия теоремы 4.19 являются также и необходимыми. В литературе для устойчивости по входу-состоянию принято использовать аббревиатуру ISS и называть функцию V в теореме 4.19 ISS-функцией Ляпунова.

²⁾ В частности, можно повторить эти рассуждения для отрезка времени $[0, T]$ и показать, что справедливо неравенство

$$\|x(\sigma)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, \sigma - t_0) + \gamma \left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq T} \|u(\tau)\| \right), \quad \forall t_0 \leq \sigma \leq T.$$

Тогда можно положить $\sigma = T = t$.

Доказательство: Рассмотрим систему (4.44) как возмущение свободной системы (4.45). Из обратной теоремы Ляпунова 4.14 следует, что для свободной системы (4.45) существует функция Ляпунова $V(t, x)$, глобально удовлетворяющая неравенствам из теоремы. Поскольку функция f имеет свойство равномерной глобальной липшицевости, член возмущения удовлетворяет (4.46) для всех $t \geq t_0$ и (x, u) . Производная V вдоль решений системы (4.44) удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) + \frac{\partial V}{\partial x} [f(t, x, u) - f(t, x, 0)] \leqslant \\ &\leqslant -c_3 \|x\|^2 + c_4 \|x\| L \|u\|.\end{aligned}$$

Для того, чтобы обеспечить доминирование члена $-c_3 \|x\|^2$ над членом $c_4 \|x\| L \|u\|$ при больших $\|x\|$, перепишем предыдущее неравенство в следующем виде:

$$\dot{V} \leq -c_3(1 - \theta) \|x\|^2 - c_3 \theta \|x\|^2 + c_4 L \|x\| \|u\|,$$

где $0 < \theta < 1$. Тогда

$$\dot{V} \leq -c_3(1 - \theta) \|x\|^2, \quad \forall \|x\| \geq \frac{c_4 L \|u\|}{c_3 \theta}$$

для всех (t, x, u) . Следовательно, условия теоремы 4.19 выполнены с $\alpha_1(r) = c_1 r^2$, $\alpha_2(r) = c_2 r^2$ и $\rho(r) = (c_4 L / c_3 \theta) r$ и мы можем заключить, что система устойчива по входу-состоянию с $\gamma(r) = \sqrt{c_2 / c_1} (c_4 L / c_3 \theta) r$. \square

Согласно лемме 4.6 для устойчивости по входу-состоянию требуется глобальная липшицевость функции f и экспоненциальная устойчивость начала координат свободной системы. Легко построить примеры, показывающие, что утверждение леммы не выполняется в условиях отсутствия одного из этих условий. Рассмотренное ранее уравнение $\dot{x} = -3x + (1 + x^2)u$ не удовлетворяет условию глобальной липшицевости. В системе

$$\dot{x} = -\frac{x}{1 + x^2} + u \stackrel{\text{def}}{=} f(x, u)$$

функция f является глобально липшицевой, т. к. частные производные f по x и u глобально ограничены. Начало координат $\dot{x} = -x/(1 + x^2)$ глобально асимптотически устойчиво и это может быть доказано с использованием функции Ляпунова $V(x) = x^2/2$, производная которой $\dot{v}(x) = -x^2/(1 + x^2)$ является отрицательно определенной функцией для всех x . Начало координат этой системы локально экспоненциально устойчиво, поскольку ее линеаризация в окрестности начала координат имеет вид $\dot{x} = -x$. Однако, она не является глобально экспоненциально устойчивой. Справедливость последнего утверждения легко доказать с учетом того, что эта система не является устойчивой по входу-состоянию. Заметим, что $f(x, u) \geq 1/2$ при $u(t) \equiv 1$. Следовательно, $x(t) \geq x(t_0) + t/2$ для всех $t \geq 0$, т.е. решение не ограничено.

Тем не менее, при отсутствии свойств экспоненциальной устойчивости начала координат и глобальной липшицевости правой части системы оказывается возможным доказать устойчивость системы по входу-состоянию в случаях, когда применима теорема 4.19. Рассмотрим три примера, которые иллюстрируют это утверждение.

Пример 4.25. Система

$$\dot{x} = -x^3 + u$$

имеет глобально асимптотически устойчивое начало координат при $u = 0$. Пусть $V = x^2/2$. Тогда производная этой функции вдоль решений уравнения определяется равенством

$$\dot{V} = -x^4 + xu = -(1 - \theta)x^4 - \theta x^4 + xu \leq -(1 - \theta)x^4, \quad \forall |x| \geq \left(\frac{|u|}{\theta}\right)^{1/3},$$

где $0 < \theta < 1$. Таким образом, система устойчива по входу-состоянию с $\gamma(r) = (r/\theta)^{1/3}$. \triangle

Пример 4.26. Система

$$\dot{x} = f(x, u) = -x - 2x^3 + (1 + x^2)u^2$$

имеет глобально экспоненциально устойчивое начало координат при $u = 0$, но лемма 4.6 неприменима, т. к. f не является глобально липшицевой. Пусть $V = x^2/2$. Тогда

$$\dot{V} = -x^2 - 2x^4 + x(1 + x^2)u^2 \leq -x^4, \quad \forall |x| \geq u^2.$$

Таким образом, система устойчива по входу-состоянию с $\gamma(r) = r^2$. \triangle

В примерах 4.25 и 4.26 функция $V(x) = x^2/2$ удовлетворяет (4.48) с $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2/2$. Следовательно, $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(r)) = r$ и $\gamma(r)$ сводится к $\rho(r)$. В системах большой размерности вычисление γ представляет определенные трудности.

Пример 4.27. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u.\end{aligned}$$

Положим $u = 0$ и докажем глобальную асимптотическую устойчивость начала координат свободной системы. Используя

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}ax_2^4, \quad a > 0$$

в качестве функции Ляпунова, получаем

$$\dot{V} = -x_1^2 + x_1 x_2^2 - ax_2^4 = -(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)^2 - (a - \frac{1}{4})x_2^4.$$

При $a > 1/4$ начало координат глобально асимптотически устойчиво. Предположим, что $u \neq 0$ и используем функцию $V(x)$ с $a = 1$ в качестве

функции Ляпунова для теоремы 4.19. Производная \dot{V} определяется равенством

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2^2)^2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^4) + x_2^3 u \leq -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^4) + |x_2|^3 |u|.$$

Для того, чтобы обеспечить доминирование члена $-(x_1^2 + x_2^4)/2$ над членом $|x_2|^3 |u|$, перепишем предыдущее неравенство в следующем виде:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}(1 - \theta)(x_1^2 + x_2^4) - \frac{1}{2}\theta(x_1^2 + x_2^4) + |x_2|^3 |u|,$$

где $0 < \theta < 1$. Член

$$-\frac{1}{2}\theta(x_1^2 + x_2^4) + |x_2|^3 |u|$$

будет ≤ 0 , если $|x_2| \geq 2|u|/\theta$ или $|x_2| \leq 2|u|/\theta$ и $|x_1| \geq (2|u|/\theta)^2$. Это требование будет выполнено, если

$$\max\{|x_1|, |x_2|\} \geq \max\left\{\frac{2|u|}{\theta}, \left(\frac{2|u|}{\theta}\right)^2\right\}.$$

Используя норму $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ и определив \mathcal{K} -функцию ρ равенством

$$\rho(r) = \max\left\{\frac{2r}{\theta}, \left(\frac{2r}{\theta}\right)^2\right\},$$

получаем, что неравенство (4.49) выполнено, поскольку

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}(1 - \theta)(x_1^2 + x_2^4), \quad \forall \|x\|_\infty \geq \rho(|u|).$$

Выполнение неравенства (4.48) следует из леммы 4.3, т. к. $V(x)$ является положительно определенной и радиально неограниченной. Следовательно система устойчива по входу-состоянию. Предположим, что нам необходимо найти \mathcal{K} -функцию γ . В этом случае нам следует определить α_1 и α_2 . Легко показать, что

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^4 \leq \frac{1}{2}\|x\|_\infty^2 + \frac{1}{4}\|x\|_\infty^4,$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^4 \geq \begin{cases} \frac{1}{2}|x_1|^2 = \frac{1}{2}\|x\|_\infty^2, & \text{если } |x_2| \leq |x_1|, \\ \frac{1}{4}|x_2|^4 = \frac{1}{4}\|x\|_\infty^4, & \text{если } |x_2| \geq |x_1|. \end{cases}$$

Неравенство (4.48) выполнено с \mathcal{K}_∞ -функциями

$$\alpha_1(r) = \min\{\frac{1}{2}r^2, \frac{1}{4}r^4\} \quad \text{и} \quad \alpha_2(r) = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{4}r^4.$$

Таким образом, $\gamma(r) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\rho(r)))$, где

$$\alpha_1^{-1}(s) = \begin{cases} (4s)^{\frac{1}{4}}, & \text{если } s \leq 1, \\ \sqrt{2s}, & \text{если } s \geq 1. \end{cases}$$

Функция γ зависит от выбора $\|x\|$. Если мы выберем другую p -норму, мы получим другую γ . \triangle

Интересным применением концепции устойчивости по входу-состоянию является анализ устойчивости каскадной системы

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2) \tag{4.51}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_2) \tag{4.52}$$

где $f_1 : [0, \infty) \times R^{n_1} \times R^{n_2} \rightarrow R^{n_1}$ и $f_2 : [0, \infty) \times R^{n_2} \rightarrow R^{n_2}$ — кусочно-непрерывные по t и локально липшицевые по $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ функции. Предположим, что системы

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, 0)$$

и (4.52) имеют глобально равномерно асимптотически устойчивые точки равновесия в их началах координат. При каких условиях начало координат $x = 0$ каскадной системы обладает тем же свойством? В следующей лемме показано, что это будет иметь место, если система (4.51) с вектором x_2 , рассматриваемым как ее вход, является устойчивой по входу-состоянию.

Лемма 4.7. В условиях принятых предположений, если система (4.51) с вектором x_2 , рассматриваемым как ее вход, является устойчивой по входу-состоянию и начало координат (4.52) глобально равномерно асимптотически устойчиво, то начало координат каскадной системы (4.51) и (4.52) глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство: Пусть $t_0 \geq 0$ — начальный момент времени. Решения (4.51) и (4.52) глобально удовлетворяют неравенствам

$$\|x_1(t)\| \leq \beta_1(\|x_1(s)\|, t-s) + \gamma_1 \left(\sup_{s \leq \tau \leq t} \|x_2(\tau)\| \right) \tag{4.53}$$

$$\|x_2(t)\| \leq \beta_2(\|x_2(s)\|, t-s) \tag{4.54}$$

где $t \geq s \geq t_0$, β_1 , β_2 — \mathcal{KL} -функции и γ_1 — \mathcal{K} -функция. Неравенство (4.52) при $s = (t+t_0)/2$ принимает следующий вид:

$$\|x_1(t)\| \leq \beta_1 \left(\left\| x_1 \left(\frac{t+t_0}{2} \right) \right\|, \frac{t-t_0}{2} \right) + \gamma_1 \left(\sup_{\frac{t+t_0}{2} \leq \tau \leq t} \|x_2(\tau)\| \right). \tag{4.55}$$

Для получения оценки $x_1((t+t_0)/2)$ положим в (4.53) $s = t_0$ и заменим t на $(t+t_0)/2$:

$$\left\| x_1 \left(\frac{t+t_0}{2} \right) \right\| \leq \beta_1 \left(\|x_1(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2} \right) + \gamma_1 \left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq \frac{t+t_0}{2}} \|x_2(\tau)\| \right). \tag{4.56}$$

Используя (4.54), получаем

$$\sup_{t_0 \leq \tau \leq \frac{t+t_0}{2}} \|x_2(\tau)\| \leq \beta_2(\|x_2(t_0)\|, 0), \quad (4.57)$$

$$\sup_{\frac{t+t_0}{2} \leq \tau \leq t} \|x_2(\tau)\| \leq \beta_2 \left(\|x_2(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2} \right), \quad (4.58)$$

Подставляя (4.56)–(4.58) в (4.55) и используя неравенства

$$\|x_1(t_0)\| \leq \|x(t_0)\|, \quad \|x_2(t_0)\| \leq \|x(t_0)\|, \quad \|x(t)\| \leq \|x_1(t)\| + \|x_2(t)\|,$$

получаем

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0),$$

где

$$\beta(r, s) = \beta_1 \left(\beta_1 \left(r, \frac{s}{2} \right) + \gamma_1(\beta_2(r, 0)), \frac{s}{2} \right) + \gamma_1 \left(\beta_2 \left(r, \frac{s}{2} \right) \right) + \beta_2(r, s).$$

Легко проверить, что β принадлежит классу \mathcal{KL} для всех $r \geq 0$. Следовательно, начало координат (4.51) и (4.52) глобально равномерно асимптотически устойчиво. \square

4.10. Упражнения

4.1 Рассмотрим автономную систему второго порядка. Для каждого из следующих типов точек равновесия определите является ли она устойчивой, неустойчивой, или асимптотически устойчивой:

- (1) устойчивый узел; (2) неустойчивый узел;
- (3) устойчивый фокус; (4) неустойчивый фокус;
- (5) центр; (6) седло.

4.2 Рассмотрим скалярное уравнение $\dot{x} = ax^p + g(x)$, где p — положительное число и $g(x)$ удовлетворяет $|g(x)| \leq k|x|^{p+1}$ в некоторой окрестности начала координат $x = 0$. Покажите, что начало координат асимптотически устойчиво, если p нечетно и $a < 0$, и неустойчиво, если p нечетно и $a > 0$, или если p четно и $a \neq 0$.

4.3 Для каждой из следующих систем с использованием квадратичной функции Ляпунова покажите, что начало координат асимптотически устойчиво:

$$\begin{array}{ll} (1) & \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2, & \dot{x}_2 = -x_2; \\ (2) & \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), & \dot{x}_2 = x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2); \\ (3) & \dot{x}_1 = x_2(1 - x_1^2), & \dot{x}_2 = -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2); \\ (4) & \dot{x}_1 = -x_1 - x_2, & \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2^2. \end{array}$$

Исследуйте систему на предмет глобальной асимптотической устойчивости.

4.4 ([151]) Уравнения Эйлера врачающегося твердого тела (космического корабля) имеют вид

$$J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 + u_1,$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 + u_2,$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 + u_3,$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции вектора угловой скорости ω на главные оси эллипсоида вращения, u_1, u_2, u_3 — входные моменты относительно этих осей, J_1, J_2, J_3 — главные моменты инерции.

(a) Покажите, что при $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ начало координат $\omega = 0$ устойчиво. Является ли оно асимптотически устойчивым?

(b) Предположим, что входные моменты реализуют управляемые обратные связи $u_i = -k_i \omega_i$, где k_1, k_2, k_3 — положительные константы. Покажите, что начало координат замкнутой системы управления глобально асимптотически устойчиво.

4.5 Пусть $g(x)$ — отображение из R^n в R^n . Покажите, что $g(x)$ является вектором градиента скалярной функции $V : R^n \rightarrow R^n$, если и только если

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

4.6 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(x_1 + x_2) - h(x_1 + x_2),$$

где h — непрерывно дифференцируемая функция и $zh(z) > 0$ для всех $z \neq 0$. Используя метод переменного градиента, найдите функцию Ляпунова, с помощью которой можно показать, что начало координат глобально асимптотически устойчиво.

4.7 Рассмотрим систему $\dot{x} = -Q\phi(x)$, где Q — симметричная положительно определенная матрица и $\phi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, i -й компонент которой зависит только от x_i , т. е. $\phi_i(x) = \phi_i(x_i)$. Предположим, что $\phi_i(0) = 0$ и $y\phi_i(y) > 0$ в некоторой окрестности $y = 0$ для всех $1 \leq i \leq n$.

(a) Используя метод переменного градиента, найдите функцию Ляпунова, с помощью которой можно показать, что начало координат асимптотически устойчиво.

(b) При каких условиях оно будет глобально асимптотически устойчиво?

(c) Примените полученные результаты к частному случаю

$$n = 2, \quad \phi_1(x_1) = x_1 - x_1^2, \quad \phi_2(x_2) = x_2 + x_2^3, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.8 ([72]) Рассмотрим систему второго порядка

$$\dot{x}_1 = \frac{-6x_1}{u^2} + 2x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{-2(x_1 + x_2)}{u^2},$$

где $u = 1 + x_1^2$. Пусть $V(x) = x_1^2/(1 + x_1^2) + x_2^2$.

- (a) Покажите, что $V(x) > 0$ и $\dot{V}(x) < 0$ для всех $x \in R^2 - \{0\}$.
- (b) Рассмотрим гиперболу $x_2 = 2/(x_1 - \sqrt{2})$. Исследовав векторное поле на границе этой гиперболы, покажите, что траектории справа от ветки этой гиперболы в первом квадранте не могут пересечь эту ветку.
- (c) Покажите, что начало координат не является глобально асимптотически устойчивым.

Указание: В (b) покажите, что на линии гиперболы выполнено $\dot{x}_2/\dot{x}_1 = -1/(1 + 2\sqrt{2}x_1 + 2x_1^2)$ и сравните эту величину с тангенсом угла наклона касательных к этой гиперболе.

4.9 При проверке условия радиальной неограниченности положительно определенной функции $V(x)$ может показаться, что достаточно выполнить соответствующий анализ при $\|x\| \rightarrow \infty$ вдоль координатных осей. Однако этот подход ошибочный и это можно доказать на примере функции

$$V(x) = \frac{(x_1 + x_2)^2}{1 + (x_1 + x_2)^2} + (x_1 - x_2)^2.$$

- (a) Покажите, что $V(x) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$ вдоль осей $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.
- (b) Покажите, что $V(x)$ не является радиально неограниченной.

4.10 (Метод Красовского). Рассмотрим систему $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$. Предположим, что $f(x)$ непрерывно дифференцируема и ее якобиан удовлетворяет неравенству

$$P \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x) \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x) \right]^T P \leqslant -I, \quad \forall x \in R^n, \quad \text{где } P = P^T > 0.$$

- (a) Используя представление $f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) x \, d\sigma$ покажите, что

$$x^T P f(x) + f^T(x) P x \leqslant -x^T x, \quad \forall x \in R^n.$$

- (b) Покажите, что функция $V(x) = f^T(x) P f(x)$ положительно определена для всех $x \in R^n$ и радиально неограничена.

(c) Покажите, что начало координат глобально асимптотически устойчиво.

4.11 С использованием теоремы 4.3 докажите первую теорему Ляпунова о неустойчивости:

Рассмотрим систему (4.1). Если может быть найдена непрерывно дифференцируемая функция $V_1(x)$, определенная в окрестности начала координат и такая, что $V_1(0) = 0$ и функция \dot{V}_1 положительно определена вдоль траекторий системы, но сама функция V_1 не является

отрицательно определенной или отрицательно полуопределенной в произвольно малой окрестности начала координат, то начало координат неустойчиво.

4.12 С использованием теоремы 4.3 докажите вторую теорему Ляпунова о неустойчивости:

Рассмотрим систему (4.1). Если в окрестности D начала координат существует непрерывно дифференцируемая функция $V_1(x)$, такая что $V_1(0) = 0$ и вдоль траекторий системы функция \dot{V}_1 представима в виде $\dot{V}_1 = \lambda V_1 + W(x)$, где $\lambda > 0$ и $W(x) \geqslant 0$ в D , и если функция V_1 не является отрицательно определенной или отрицательно полуопределенной в произвольно малой окрестности начала координат, то начало координат неустойчиво.

4.13 Для каждой из следующих систем покажите, что начало координат неустойчиво:

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_1^3 + x_1^2 x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3;$$

$$(2) \quad \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^6 - x_2^3;$$

Указание: В примере (2) покажите, что $\Gamma = \{0 \leqslant x_1 \leqslant 1\} \cap \{x_2 \geqslant x_1^3\} \cap \{x_2 \leqslant x_1^3\}$ — непустое положительно инвариантное множество и исследуйте поведение траекторий внутри Γ .

4.14 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g(x_1)(x_1 + x_2),$$

где g — локально липшицева и $g(y) \geqslant 1$ для всех $y \in R$. Проверьте, что функция $V(x) = \int_0^{x_1} y g(y) \, dy + x_1 x_2 + x_2^2$ положительно определена для всех $x \in R^2$ и радиально неограничена. Используйте эту функцию для доказательства глобальной асимптотической устойчивости начала координат.

4.15 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -h_1(x_1) - x_2 - h_2(x_3), \quad \dot{x}_3 = x_2 - x_3,$$

где h_1 и h_2 — локально липшицевые функции, такие что $h_i(0) = 0$ и $y h_i'(y) > 0$ для всех $y \neq 0$.

(a) Покажите, что система имеет единственную точку равновесия в начале координат.

(b) Покажите, что $V(x) = \int_0^{x_1} h_1(y) \, dy + x_2^2/2 + \int_0^{x_3} h_2(y) \, dy$ — положительно определена для всех $x \in R^3$.

(c) Покажите, что начало координат асимптотически устойчиво.

(d) При каких условиях на h_1 и h_2 начало координат глобально асимптотически устойчиво.

4.16 Покажите, что начало координат системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^3$$

глобально асимптотически устойчиво.

4.17 ([77]) Рассмотрим уравнение Льенара

$$\ddot{y} + h(y)\dot{y} + g(y) = 0,$$

где g и h — непрерывно дифференцируемые функции.

- (a) Используя обозначения $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{y}$, выпишите уравнения состояния и найдите условия на g и h , гарантирующие то, что начало координат является изолированной точкой равновесия.
 - (b) Используя функцию Ляпунова $V(x) = \int_0^{x_1} g(y) dy + (1/2)x_2^2$, найдите условия на g и h , гарантирующие то, что начало координат является асимптотически устойчивым.
 - (c) Решите задачу (b) при $V(x) = (1/2)[x_2 + \int_0^{x_1} h(y) dy]^2 + \int_0^{x_1} g(y) dy$.
- 4.18** Модель системы «груз–пружина» из упражнения 1.12 имеет вид

$$M\ddot{y} = Mg - ky - c_1y - c_2\dot{y}|\dot{y}|.$$

Покажите, что система имеет глобально асимптотически устойчивую точку равновесия.

4.19 Рассмотрим уравнения движения m -звенного манипулятора, описанного в упражнении 1.4. Предположим, что $P(q)$ — положительно определенная функция от q и $g(q) = 0$ имеет изолированный корень в $q = 0$.

- (a) В случае $u = 0$, используя полную энергию $V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + P(q)$ в качестве функции Ляпунова покажите, что начало координат ($q = 0, \dot{q} = 0$) устойчиво.
- (b) В случае $u = -K_d\dot{q}$, где K_d — положительная диагональная матрица покажите, что начало координат асимптотически устойчиво.
- (c) В случае $u = g(q) - K_p(q - q^*) - K_d\dot{q}$, где K_p и K_d — положительные диагональные матрицы и q^* — желаемое расположение корней в R^m , покажите, что точка ($q = q^*, \dot{q} = 0$) — асимптотически устойчивая точка равновесия.

4.20 Предположим, что множество M в теореме Ла-Салля состоит из конечного числа изолированных точек. Покажите, что $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ существует и равен одной из этих точек.

4.21 ([81]) Градиентной системой является динамическая система вида $\dot{x} = -\nabla V(x)$, где $\nabla V(x) = [\partial V / \partial x]^T$ и $V : D \subset R^n \rightarrow R$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

- (a) Покажите, что $\dot{V}(x) \leq 0$ для всех $x \in D$ и $\dot{V}(x) = 0$, если и только если x является точкой равновесия.
- (b) Пусть $D = R^n$ и предположим, что множество $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c\}$ компактно для любой $c \in R$. Покажите, что все решения системы определены для всех $t \geq 0$.
- (c) В условиях предположений пункта (b) и при $\nabla V(x) \neq 0$ за исключением конечного числа точек p_1, \dots, p_r покажите, что для любого

решения $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ существует и совпадает с одной из точек p_1, \dots, p_r .

4.22 Рассмотрим уравнение Ляпунова $PA + A^T P = -C^T C$, где пара (A, C) наблюдаемая. Покажите, что матрица A является гурвицовой, если и только если существует $P = P^T > 0$, удовлетворяющая этому уравнению. Кроме того, покажите, что если A гурвицева, то уравнение Ляпунова имеет единственное решение.

Указание: Примените теорему Ла-Салля и примите во внимание, что для наблюдаемой пары (A, C) вектор $C \exp(At)x \equiv 0, \forall t$, если и только если $x = 0$.

4.23 Рассмотрим линейную систему $\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P)x$, где $P = P^T > 0$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0,$$

где $R = R^T > 0$ и $Q = Q^T \geq 0$. Используя функцию Ляпунова $V(x) = x^T Px$, покажите, что начало координат глобально асимптотически устойчиво в случаях

- (1) $Q > 0$.
- (2) $Q = C^T C$ и (A, C) наблюдаема; см. указание в упражнении 4.22.
- (4.24) Рассмотрим систему¹⁾

$$\dot{x} = f(x) - kG(x)R^{-1}(x)G^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T,$$

где $V(x)$ — непрерывно дифференцируемая, положительно определенная функция, удовлетворяющая уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + q(x) - \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} G(x)R^{-1}(x)G^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T = 0,$$

где $q(x)$ положительно полуопределенная функция, $R(x)$ — положительно определенная матрица и k — положительная константа. Используя $V(x)$ в качестве функции Ляпунова, докажите асимптотическую устойчивость начала координат в случаях:

- (1) $q(x)$ — положительно определена и $k \geq 1/4$;
- (2) $q(x)$ — положительно определена, $k \geq 1/4$, и единственное решение уравнения $\dot{x} = f(x)$, постоянно находящееся в множестве $\{q(x) = 0\}$, является тривиальным решением $x(t) = 0$.

При каких условиях начало координат будет глобально асимптотически устойчивым?

4.25 Рассмотрим линейную систему $\dot{x} = Ax + Bu$, где пара (A, B) управляема. Пусть $W = \int_0^\tau e^{-At} BB^T e^{-A^T t} dt$ для некоторого $\tau >$

¹⁾ Это уравнение представляет собой замкнутую систему оптимального стабилизирующего управления. См. [172].

> 0 . Покажите, что W положительно определена. Пусть $K = B^T W^{-1}$. Используя для анализа системы $\dot{x} = (A - BK)x$ функцию Ляпунова $V(x) = x^T W^{-1} x$, докажите гурвицевость матрицы $(A - BK)$.

4.26 Пусть $\dot{x} = f(x)$, где $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Рассмотрим замену координат $z = T(x)$, где $T(0) = 0$ и $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм в окрестности начала координат (т. е. существует обратное отображение $T^{-1}(\cdot)$ и $T(\cdot)$, $T^{-1}(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемы). Преобразованная система имеет вид

$$\dot{z} = \hat{f}(z), \quad \text{где } \hat{f}(z) = \left. \frac{\partial T}{\partial x} f(x) \right|_{x=T^{-1}(z)}.$$

- (a) Докажите, что точка $x = 0$ является изолированной точкой равновесия $\dot{x} = f(x)$, если и только если $z = 0$ является изолированной точкой равновесия $\dot{z} = \hat{f}(z)$.
- (b) Докажите, что точка равновесия $x = 0$ является устойчивой (асимптотически устойчивой или неустойчивой), если и только если $z = 0$ является устойчивой (асимптотически устойчивой или неустойчивой) точкой равновесия.

4.27 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_2 x_3 + 1, \quad \dot{x}_2 = x_1 x_3 - x_2, \quad \dot{x}_3 = x_3^2(1 - x_3).$$

- (a) Покажите, что система имеет единственную точку равновесия.
- (b) Используя метод линеаризации, покажите, что точка равновесия асимптотически устойчива. Является ли она глобально асимптотически устойчивой?

4.28 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = (x_1 x_2 - 1)x_2^3 + (x_1 x_2 - 1 + x_1^2)x_2.$$

- (a) Покажите, что $x = 0$ — единственная точка равновесия системы.
- (b) Используя метод линеаризации, покажите, что $x = 0$ асимптотически устойчива.
- (c) Покажите, что $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \geq 2\}$ — положительно инвариантное множество.
- (d) Является ли точка $x = 0$ глобально асимптотически устойчивой?

4.29 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 3x_1 - x_2.$$

- (a) Найдите все точки равновесия системы.
- (b) Используя метод линеаризации, исследуйте свойства устойчивости всех точек равновесия.
- (c) Используя квадратичные функции Ляпунова, оцените область притяжения каждой асимптотически устойчивой точки равновесия. Попытайтесь получить как можно большие оценки.

(d) Постройте фазовый портрет системы и укажите на нем области притяжения, а также их оценки.

4.30 Повторите предыдущее упражнение для системы

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x_2}{2}\right).$$

4.31 Применяя метод линеаризации к каждой из систем упражнения 4.3, докажите асимптотическую устойчивость начала координат.

4.32 Для каждой из нижеследующих систем исследуйте свойства устойчивости начала координат:

$$\begin{array}{ll} (1) \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 & (2) \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_3^2 & \dot{x}_2 = -\sin x_3 + x_1[-2x_3 - \operatorname{sat}(y)]^2 \\ \dot{x}_3 = x_3 - x_1^2 & \dot{x}_3 = -2x_3 - \operatorname{sat}(y), \\ & \text{где } y = -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 \\ (3) \dot{x}_1 = -2x_1 + x_1^3 & (4) \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 & \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_3 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 & \dot{x}_3 = (x_1 + 1)x_2 \end{array}$$

4.33 Рассмотрим систему второго порядка $\dot{x} = f(x)$, где $f(0) = 0$ и $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности начала координат. Предположим $[\partial f / \partial x](0) = -B$, где B — гурвицева матрица. Пусть P — положительно определенное решение уравнения Ляпунова $PB + B^T P = -I$ и $V(x) = x^T P x$. Покажите, что существует $c^* > 0$, такая что для каждой $0 < c < c^*$ поверхность $V(x) = c$ замкнута и $[\partial V / \partial x]f(x) > 0$ для всех $x \in \{V(x) = c\}$.

4.34 Докажите лемму 4.2.

4.35 Предположим, что функция α принадлежит классу \mathcal{K} и задана на $[0, a)$. Покажите, что

$$\alpha(r_1 + r_2) \leq \alpha(2r_1) + \alpha(2r_2), \quad \forall r_1, r_2 \in [0, a/2).$$

4.36 Является ли нуль равномерно асимптотически устойчивой точкой равновесия скалярного уравнения $\dot{x} = -x/(1+t)$, $t \geq 0$.

4.37 С использованием квадратичных функций Ляпунова покажите для каждой из нижеследующих систем, что начало координат экспоненциально устойчиво:

$$\begin{array}{ll} (1) \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha(t) \\ \alpha(t) & -2 \end{bmatrix} x, \quad |\alpha(t)| \leq 1 & (2) \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha(t) \\ \alpha(t) & -2 \end{bmatrix} x, \\ (3) \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha(t) \end{bmatrix} x, \quad \alpha(t) \geq 2 & (4) \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \alpha(t) & -2 \end{bmatrix} x. \end{array}$$

Во всех случаях $\alpha(t)$ — непрерывная и ограниченная для всех $t \geq 0$ функция.

4.38 ([95]) Модель RLC-цепи с элементами, характеристики которых зависят от времени, имеет следующий вид:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L(t)}x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{C(t)}x_1 - \frac{R(t)}{L(t)}x_2.$$

Предположим, что $L(t)$, $C(t)$ и $R(t)$ — непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют неравенствам $k_1 \leq L(t) \leq k_2$, $k_3 \leq C(t) \leq k_4$ и $k_5 \leq R(t) \leq k_6$, где k_1 , k_3 и k_5 — положительные константы. Рассмотрим кандидата на функцию Ляпунова

$$V(t, x) = \left[R(t) + \frac{2L(t)}{R(t)C(t)} \right] x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{2}{R(t)}x_2^2.$$

(a) Покажите, что $V(t, x)$ — положительно определенная и убывающая функция.

(b) Определите условия на $\dot{L}(t)$, $\dot{C}(t)$ и $\dot{R}(t)$, гарантирующие экспоненциальную устойчивость начала координат.

4.39 ([154]) Уравнения маятника с зависящим от времени трением имеют следующий вид:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 - g(t)x_2.$$

Предположим, что $g(t)$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет неравенствам

$$0 < a < \alpha \leq g(t) \leq \beta < \infty \quad \text{и} \quad \dot{g}(t) \leq \gamma \leq 2$$

для всех $t \geq 0$. Рассмотрим кандидата на функцию Ляпунова

$$V(t, x) = \frac{1}{2}(a \sin x_1 + x_2)^2 + [1 + ag(t) - a^2](1 - \cos x_1).$$

(a) Покажите, что $V(t, x)$ — положительно определенная и убывающая функция.

(b) Покажите, что $\dot{V} \leq -(\alpha - a)x_2^2 - a(2 - \gamma)(1 - \cos x_1) + O(\|x\|^3)$, где $O(\|x\|^3)$ — член, ограниченный в некоторой окрестности начала координат величиной $k\|x\|^3$.

(c) Покажите, что начало координат равномерно асимптотически устойчиво.

4.40 (Теория Флоке) Рассмотрим линейную систему $\dot{x} = A(t)x$, где $A(t) = A(t+T)$.¹⁾ Пусть $\Phi(\cdot, \cdot)$ — передаточная матрица. Определим постоянную матрицу B уравнением $\exp(BT) = \Phi(T, 0)$ и положим $P(t) = \exp(Bt)\Phi(0, t)$. Покажите, что

(a) $P(t+T) = P(t)$.

(b) $\Phi(t, \tau) = P^{-1}(t) \exp[(t-\tau)B]P(\tau)$.

¹⁾ Всеобъемлющее изложение теории Флоке (Floquet) приведено в [158].

(c) Начало координат $\dot{x} = A(t)x$ экспоненциально устойчиво, если и только если B — гурвицева матрица.

4.41 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1x_2 + 3t + 2 - 3x_1 - 2(t+1)x_2.$$

(a) Покажите, что $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 1$ — решение системы.

(b) Покажите, что если $x(0)$ достаточно близко к $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, то $x(t)$ стремится к $\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ при $t \rightarrow \infty$.

4.42 Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -a[I_n + S(x) + xx^T]x,$$

где a — положительная константа, I_n — $n \times n$ единичная матрица и $S(x)$ — кососимметрическая матрица, зависящая от x . Докажите, что начало координат глобально экспоненциально устойчиво.

4.43 Рассмотрим систему $\dot{x} = f(x) + G(x)u$. Предположим, что существует положительно определенная симметричная матрица P , положительно полуопределенная функция $W(x)$ и положительные константы γ и σ , такие что

$$2x^T Pf(x) + \gamma x^T Px + W(x) - 2\sigma x^T PG(x)G^T(x)Px \leq 0, \quad \forall x \in R^n.$$

Покажите, что при $u = -\sigma G^T(x)Px$ замкнутая система имеет глобально экспоненциально устойчивую точку равновесия в начале координат.

4.44 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + (x_1^2 + x_2^2) \sin t, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + (x_1^2 + x_2^2) \cos t.$$

Покажите, что начало координат экспоненциально устойчиво и оцените область притяжения.

4.45 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = h(t)x_2 - g(t)x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -h(t)x_1 - g(t)x_2^3,$$

где $h(t)$ и $g(t)$ — ограниченные, непрерывно дифференцируемые функции и $g(t) \geq k > 0$ для всех $t \geq 0$.

(a) Является ли точка равновесия $x = 0$ равномерно асимптотически устойчивой?

(b) Является ли она экспоненциально устойчивой?

(c) Является ли она глобально равномерно асимптотически устойчивой?

(d) Является ли она глобально экспоненциально устойчивой?

4.46 Покажите, что начало координат системы

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

асимптотически устойчиво. Является ли оно экспоненциально устойчивым?

4.47 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -\phi(t)x_1 + a\phi(t)x_2, \quad \dot{x}_2 = b\phi(t)x_1 - ab\phi(t)x_2 - c\psi(t)x_2^3,$$

где a, b и c — положительные константы, $\phi(t)$ и $\psi(t)$ — неотрицательные, непрерывные, ограниченные функции, удовлетворяющие

$$\phi(t) \geq \phi_0 > 0, \quad \psi(t) \geq \psi_0 > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Покажите, что начало координат глобально равномерно асимптотически устойчиво. Является ли оно экспоненциально устойчивым?

4.48 Рассмотрим две системы $\dot{x} = f(x)$ и $\dot{x} = h(x)f(x)$, где $f : R^n \rightarrow R^n$ и где $h : R^n \rightarrow R^n$ — непрерывно дифференцируемые функции, такие что $f(0) = 0$ и $h(0) > 0$. Покажите, что начало координат первой системы экспоненциально устойчиво, если и только если начало координат второй системы экспоненциально устойчиво.

4.49 Покажите, что система

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + b, \quad \dot{x}_2 = -cx_2 + x_1(\alpha - \beta x_1 x_2),$$

где все коэффициенты положительны, имеет глобально экспоненциально устойчивую точку равновесия.

Указание: Используя замену координат, сместите точку равновесия в начало координат и используйте $V = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + k_3y_1^4$, где (y_1, y_2) — новые координаты.

4.50 Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0,$$

где функция $[\partial f / \partial x]$ является ограниченной и липшицевой по x в окрестности начала координат равномерно по t для всех $t \geq t_0 \geq 0$. Предположим, что начало координат $x = 0$ линеаризованной системы экспоненциально устойчиво и решения системы удовлетворяют

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c \quad (4.59)$$

для некоторой \mathcal{KL} -функции β и некоторой положительной константы c .

(a) Покажите, что существуют \mathcal{K} -функция α и положительная константа γ , такая что

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|) \exp[-\gamma(t - t_0)], \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c.$$

(b) Покажите, что существует положительная константа M , возможно зависящая от c , такая что

$$\|x(t)\| \leq M\|x(t_0)\| \exp[-\gamma(t - t_0)], \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (4.60)$$

(c) Если неравенство (4.59) выполняется глобально, можно ли обеспечить глобальное выполнение неравенства (4.60)?

4.51 Предположим, что условия теоремы 4.18 выполнены с $\alpha_1(r) = k_1r^\alpha$, $\alpha_2(r) = k_2r^\alpha$ и $W(x) \geq k_3\|x\|^a$, где k_1, k_2, k_3 и a — некоторые положительные константы. Покажите, что (4.42) и (4.43) выполнены с $\beta(r, s) = kr \exp(-\gamma s)$ и $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) = k\mu$, где $k = (k_2/k_1)^{1/\alpha}$ и $\gamma = k_3/(k_2a)$.

4.52 Рассмотрим теорему 4.18 при $V(t, x) = V(x)$ и предположим, что неравенство (4.40) заменено на следующее:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \quad \forall W_4(x) \geq \mu > 0,$$

где $W_3(x)$ и $W_4(x)$ — некоторые положительно определенные, непрерывные функции. Покажите, что (4.42) и (4.43) выполнены для любого начального состояния $x(t_0) \in \{V(x) \leq c\} \subset D$ при условии, что множество $\{V(x) \leq c\}$ компактно и $\max_{W_4(x) \leq \mu} V(x) < c$.

4.53 ([72]) Рассмотрим систему $\dot{x} = f(t, x)$ и предположим, что существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая

$$\begin{aligned} W_1(x) &\leq V(t, x) \leq W_2(x), \quad \forall \|x\| \geq r > 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &< 0, \quad \forall \|x\| \geq r_1 \geq r, \end{aligned}$$

где $W_1(x)$ и $W_2(x)$ — положительно определенные, непрерывные функции. Покажите, что решения системы равномерно ограничены.

Указание: Заметим, что функция $V(t, x)$ может не быть положительно определенной.

4.54 Для каждой из нижеследующих скалярных систем выполните исследование свойств устойчивости по входу–состоянию:

$$\begin{array}{ll} (1) & \dot{x} = -(1+u)x^3, & (2) & \dot{x} = -(1+u)x^3 - x^5, \\ (3) & \dot{x} = -x + x^2u, & (4) & \dot{x} = x - x^3 + u. \end{array}$$

4.55 Для каждой из нижеследующих систем выполните исследование свойств устойчивости по входу–состоянию:

$$\begin{array}{ll} (1) & \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2x_2, & \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + u, \\ (2) & \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, & \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + u, \\ (3) & \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + u, \\ (4) & \dot{x}_1 = (x_1 - x_2 + u)(x_1^2 - 1), & \dot{x}_2 = (x_1 + x_2 + u)(x_1^2 - 1), \\ (5) & \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2x_2, & \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 + u, \\ (6) & \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + u_1, & \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 + u_2, \\ (7) & \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, & \dot{x}_2 = -x_1 - \sigma(x_1) - x_2 + u, \end{array}$$

где σ — локально липшицевая функция, $\sigma(0) = 0$ и $y\sigma(y) \geq 0$ для всех $y \neq 0$.

4.56 Используя лемму 4.7, покажите, что начало координат системы

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2^3$$

глобально асимптотически устойчиво.

4.57 Докажите версию теоремы 4.19, отличающуюся от оригинальной теоремы тем, что неравенство (4.19) заменено на

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \psi(u),$$

где функция α_3 принадлежит классу \mathcal{K}_∞ и $\psi(u)$ — непрерывная функция от u , такая что $\psi(0) = 0$.

4.58 Используя неравенство (4.47), покажите, что если $u(t)$ сходится к нулю при $t \rightarrow \infty$, то $x(t)$ обладает тем же свойством.

4.59 Рассмотрим скалярное уравнение $\dot{x} = -x^3 + e^{-t}$. Покажите, что $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

4.60 Предположим, что условия теоремы 4.19 выполнены для $\|x\| < r$ и $\|u\| < r_u$ с \mathcal{K} -функциями α_1 и α_2 , которые не обязательно должны принадлежать классу \mathcal{K}_∞ . Покажите, что существуют положительные константы k_1 и k_2 , такие что неравенство (4.47) выполнено при $\|x(t_0)\| < k_1$ и $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\| < k_2$. В этом случае система называется *локально устойчивой по входу–состоянию*.

4.61 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_1 \left\{ \left[\sin \left(\frac{\pi x_2}{2} \right) \right]^2 - 1 \right\}, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u$$

- (a) При $u = 0$ покажите, что начало координат глобально асимптотически устойчиво.
- (b) Покажите, что при любом ограниченном входе $u(t)$, состояние $x(t)$ ограничено.
- (c) При $u(t) \equiv 1$, $x_1(0) = a$ и $x_2(0) = 1$ покажите, что решение имеет вид $x_1(t) \equiv a$, $x_2(t) \equiv 1$.
- (d) Является ли эта система устойчивой по входу–состоянию?

В следующих семи упражнениях рассматриваются дискретные по времени динамические системы¹⁾

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad f(0) = 0. \quad (4.61)$$

Скорость изменения скалярной функции $V(x)$ вдоль траектории (4.61) определяется равенством

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x).$$

4.62 Переформулируйте определение 4.1 для дискретной системы (4.61).

4.63 Покажите, что начало координат (4.61) устойчиво, если в окрестности начала координат существует непрерывная положительно определенная функция $V(x)$, такая что $\Delta V(x)$ отрицательно полуопределенна. Покажите, что эта система асимптотически устойчива, если эта функ-

¹⁾ Теория устойчивости Ляпунова для дискретных по времени динамических систем детально изложена в работе [95].

ция $\Delta V(x)$ отрицательно определена. Наконец, покажите, что начало координат глобально асимптотически устойчиво, если условия асимптотической устойчивости выполняются глобально и $V(x)$ радиально неограничена.

4.64 Покажите, что начало координат (4.61) экспоненциально устойчиво, если в окрестности начала координат существует непрерывная положительно определенная функция $V(x)$, такая что

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2, \quad \Delta V(x) \leq -c_3 \|x\|^2,$$

где c_1 , c_2 и c_3 — некоторые положительные константы.

Указание: Для дискретных по времени систем свойство экспоненциальной устойчивости определяется выполнением неравенства $\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| \gamma^k$ для всех $k \geq 0$, где $\alpha \geq 1$ и $0 < \gamma < 1$.

4.65 Покажите, что начало координат (4.61) асимптотически устойчиво, если в окрестности начала координат существует непрерывная положительно определенная функция $V(x)$, такая что $\Delta V(x)$ отрицательно полуопределенна и $\Delta V(x)$ не равна тождественно нулю для всех $x \neq 0$.

4.66 Рассмотрим линейную систему $x(k+1) = Ax(k)$. Покажите, что следующие утверждения эквивалентны:

- (1) Точка $x = 0$ асимптотически устойчива.
- (2) $|\lambda_i| < 1$ для всех собственных значений A .
- (3) Для любой $Q = Q^T$ существует $P = P^T > 0$, являющаяся единственным решением линейного уравнения $A^T P A - P = -Q$.

4.67 Пусть A — матрица линеаризованной в окрестности начала координат системы для (4.61), т. е. $A = [\partial f / \partial x](0)$. Покажите, что начало координат асимптотически устойчиво, если модуль всех собственных значений A меньше единицы.

4.68 Пусть $x = 0$ — точка равновесия нелинейной дискретной по времени системы $x(k+1) = f(x(k))$, где $f : D \rightarrow R^n$ — непрерывно дифференцируемая функция и $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$. Пусть $C, \gamma < 1$ и r_0 — положительные константы и $r_0 < r/C$. Пусть $D_0 = \{x \in R^n \mid \|x\| < r_0\}$. Предположим, что решения системы удовлетворяют

$$\|x(k)\| \leq C \|x(0)\| \gamma^k, \quad \forall x(0) \in D_0, \quad \forall k \geq 0.$$

Покажите, что существует функция $V : D_0 \rightarrow R$, удовлетворяющая

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2,$$

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq -c_3 \|x\|^2,$$

$$|V(x) - V(y)| \leq c_4 \|x - y\| (\|x\| + \|y\|)$$

Для всех $x, y \in D_0$ и некоторых положительных констант c_1 , c_2 , c_3 и c_4 .

Г л а в а 5

УСТОЙЧИВОСТЬ В ТЕРМИНАХ «ВХОД-ВЫХОД»

В этой книге мы в основном используем подход пространства состояния для моделирования нелинейных динамических систем и уделяем большое внимание исследованию поведения переменных состояния. Однако существует альтернативный подход к математическому моделированию динамических систем — подход «вход–выход».¹⁾ Модель «вход–выход» связывает вход системы непосредственно с ее выходом и это реализуется без явного знания внутренней структуры системы, определяемой уравнением состояния. Система рассматривается как «черный ящик», доступ к которому осуществляется только через входные и выходные терминалы (порты). В параграфе 5.1 вводятся математические модели «вход–выход» и определено понятие \mathcal{L} -устойчивости нелинейной системы, лежащее в основе концепции устойчивости в терминах «вход–выход». В параграфе 5.2 исследуется \mathcal{L} -устойчивость нелинейных систем, представленных в виде модели пространства–состояния. В параграфе 5.3 обсуждается задача вычисления \mathcal{L}_2 -коэффициента усиления для класса систем, не зависящих от времени. Наконец, в параграфе 5.4 представлена одна из формулировок теоремы о малом коэффициенте усиления (small-gain theorem).

¹⁾ В этой главе мы дадим лишь беглый обзор подхода «вход–выход» для того, чтобы дать возможность читателю понять связь теории устойчивости Ляпунова с устойчивостью от входа к выходу, а также введем термины, необходимые для того, чтобы сформулировать теорему о малом коэффициенте усиления (small-gain theorem). Всеобъемлющее изложение подхода «вход–выход» приведено в [53], [208] и [162]. Основы этого подхода в приложении к нелинейным системам даны в работах Сандберга и Зеймса, опубликованных в 1960-х годах. (См., например, [164], [217] и [218].

5.1. \mathcal{L} -устойчивость

Рассмотрим систему, в которой связь входов и выходов представлена равенством

$$y = Hu,$$

где H — некоторый оператор или некоторое отображение, которые определяют y в терминах u . Вход u принадлежит пространству сигналов и отображает временной интервал $[0, \infty)$ в евклидово пространство R^m , т. е. $u : [0, \infty) \rightarrow R^m$. В качестве примеров подобных пространств можно указать пространство кусочно-непрерывных, ограниченных функций, т. е. $\sup_{t \geq 0} \|u(t)\| < \infty$, или пространство кусочно-непрерывных, интегрируемых с квадратом функций, т. е. $\int_0^\infty u^T(t)u(t) dt < \infty$. Для измерения интенсивности сигнала введем норму функций $\|u\|$, удовлетворяющую трем свойствам:

- Норма сигнала равна нулю, если и только если сигнал тождественно равен нулю, в противном случае норма принимает строго положительные значения.
- Масштабирование сигнала приводит к соответствующему масштабированию его нормы, т. е. $\|au\| = a\|u\|$ для любой положительной константы и любого сигнала.
- Норма удовлетворяет неравенству треугольника $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|$ для любых двух сигналов u_1 и u_2 .

Например, в случае пространства кусочно-непрерывных, ограниченных функций, норма определяется равенством

$$\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| < \infty$$

и это пространство обозначается \mathcal{L}_∞^m . В случае пространства кусочно-непрерывных, интегрируемых с квадратом функций, норма определяется равенством

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^\infty u^T(t)u(t) dt} < \infty$$

и это пространство обозначается \mathcal{L}_2^m . В общем случае пространство \mathcal{L}_p^m , $1 \leq p \leq \infty$ определяется как множество всех кусочно-непрерывных функций $u : [0, \infty) \rightarrow R^m$, таких что

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Нижний индекс p в \mathcal{L}_p^m соответствует типу p -нормы, используемой для определения пространства, а верхний индекс соответствует размерности сигнала u . Если из контекста ясно, какой индекс имеется в виду, мы будем его опускать и обозначать соответствующее пространство

\mathcal{L}_p , \mathcal{L}^m или \mathcal{L} . Для того, чтобы отличать норму вектора u в пространстве \mathcal{L} от нормы вектора $u(t)$ в пространстве R^m , мы будем записывать первую в виде $\|\cdot\|_{\mathcal{L},1}$ ¹⁾.

Если с нашей точки зрения вход $u \in \mathcal{L}^m$ характеризуется «удовлетворительным поведением», возникает вопрос, характеризуется ли с нашей точки зрения выход столь же «удовлетворительным поведением» в том смысле, что $y \in \mathcal{L}^q$, где \mathcal{L}^q — пространство, аналогичное пространству \mathcal{L}^m , но в общем случае число выходных переменных q может отличаться от числа входных переменных m . Система, обладающая тем свойством, что при «удовлетворительном поведении» входного воздействия, она генерирует выходной сигнал с «удовлетворительным поведением», будет характеризоваться как устойчивая система. Однако, мы не можем определить H как отображение из \mathcal{L}^m в \mathcal{L}^q , поскольку мы можем иметь дело с неустойчивыми системами, в которых вход $u \in \mathcal{L}^m$ может генерировать выход y , который не принадлежит \mathcal{L}^q . Поэтому H обычно определяется как отображение из расширенного пространства \mathcal{L}_e^m в расширенное пространство \mathcal{L}_e^q , где

$$\mathcal{L}_e^m = \{u \mid u_\tau \in \mathcal{L}^m, \forall \tau \in [0, \infty)\}$$

и u_τ — функция усечения (truncation function):

$$u_\tau(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

Расширенное пространство \mathcal{L}_e^m является линейным пространством, содержащим нерасширенное пространство \mathcal{L}^m . Это позволяет нам иметь дело с неограниченными сигналами. Например, сигнал $u(t) = t$ не принадлежит пространству \mathcal{L}_∞ , но его усечение

$$u_\tau(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

принадлежит \mathcal{L}_∞ для любого конечного τ . Следовательно, $u(t) = t$ принадлежит расширенному пространству $\mathcal{L}_{\infty e}$. Отображение $H : \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q$ называется каузальным (causal) или неупреждающим, если значение выхода $(Hu)(t)$ в любой момент времени t зависит только от значений входа в прошедшие моменты времени, включая t . Иными словами,

$$(Hu)_\tau = (Hu_\tau)_\tau.$$

Каузальность — это свойство, присущее динамическим системам, представленным в виде модели пространства состояния.

¹⁾ Заметим, что в качестве нормы $\|\cdot\|$, используемой для определения $\|\cdot\|_{\mathcal{L},p}$ для $p \in [1, \infty]$, может выступать любая p -норма в R^m . В упомянутых в тексте двух нормах число p не обязательно должно быть одинаковым. Например, мы можем определить пространство \mathcal{L}_∞ с нормой $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_1$, $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_2$ или $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_\infty$. Однако, обычно определяют пространство \mathcal{L}_2 с использованием 2-нормы в R^m .

Определив пространства входных и выходных сигналов, мы можем дать определение устойчивость «вход-выход».

Определение 5.1. Отображение $H : \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q$ называется \mathcal{L} -устойчивым, если существуют \mathcal{K} -функция α , определенная на $[0, \infty)$, и неотрицательная константа β , такие что

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha(\|u_\tau\|_{\mathcal{L}}) + \beta \quad (5.1)$$

для всех $u \in \mathcal{L}_e^m$ и $\tau \in [0, \infty)$. Это отображение называется \mathcal{L} -устойчивым с конечным коэффициентом усиления, если существуют неотрицательные константы γ и β , такие что

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma \|u_\tau\|_{\mathcal{L}} + \beta \quad (5.2)$$

для всех $u \in \mathcal{L}_e^m$ и $\tau \in [0, \infty)$.

Константа β в (5.1) и (5.2) называется членом смещения. Этот член присутствует в определении, поскольку необходимо учесть ситуации, когда в системе выход Hu не равен нулю при $u = 0$.¹⁾ Если неравенство (5.2) справедливо, нам обычно интересно получить наименьшее значение γ , при котором существует β с которым выполнено (5.2). В ситуациях, когда это значение γ может быть определено, мы будем называть эту величину коэффициентом усиления системы. Если неравенство (5.2) выполняется с некоторой $\gamma \geq 0$, мы будем говорить, что система имеет \mathcal{L} -коэффициент усиления меньший, либо равный γ .

Для каузальной, \mathcal{L} -устойчивой системы можно легко показать, что

$$u \in \mathcal{L}^m \Rightarrow Hu \in \mathcal{L}^q$$

и

$$\|Hu\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha(\|u\|_{\mathcal{L}}) + \beta, \quad \forall u \in \mathcal{L}^m.$$

Для каузальной, \mathcal{L} -устойчивой с конечным коэффициентом усиления системы предыдущее неравенство принимает следующий вид:

$$\|Hu\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{L}} + \beta, \quad \forall u \in \mathcal{L}^m.$$

Определение \mathcal{L}_∞ -устойчивости совпадает с определением устойчивости системы типа «ограниченный вход – ограниченный выход» (bounded-input–bounded-output (BIBO) stability): если система \mathcal{L}_∞ -устойчива, то для любого ограниченного входа $u(t)$ выход $Hu(t)$ также ограничен.

Пример 5.1. Функция без памяти, возможно зависящая от времени, $h : [0, \infty) \times R \rightarrow R$ может рассматриваться как оператор H , сопоставляющий входному сигналу $u(t)$ выходной сигнал $y(t) = h(t, u(t))$. Мы используем этот простой оператор для того, чтобы проиллюстрировать определение \mathcal{L} -устойчивости. Положим

$$h(u) = a + b \operatorname{th} cu = a + b \frac{e^{cu} - e^{-cu}}{e^{cu} + e^{-cu}},$$

¹⁾ Этот член может играть в системе и другие роли (см. упражнение 5.3).

где a , b и c — некоторые неотрицательные константы. С учетом того, что

$$h'(u) = \frac{4bc}{(e^{cu} + e^{-cu})^2} \leq bc, \quad \forall u \in R,$$

имеем

$$|h(u)| \leq a + bc|u|, \quad \forall u \in R.$$

Следовательно, оператор H является \mathcal{L}_∞ -устойчивым с конечным коэффициентом усиления и $\gamma = bc$, $\beta = a$. Кроме того, если $a = 0$, то для любого $p \in [1, \infty)$

$$\int_0^\infty |h(u(t))|^p dt \leq (bc)^p \int_0^\infty |u(t)|^p dt.$$

Таким образом, для любого $p \in [1, \infty]$ оператор H является \mathcal{L}_∞ -устойчивым с конечным коэффициентом усиления, $\gamma = bc$ и смещение равно нулю. Пусть h — зависящая от времени функция, удовлетворяющая

$$|h(t, u)| \leq a|u|, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in R,$$

где a — некоторая положительная константа. Для любого $p \in [1, \infty]$ оператор H является \mathcal{L}_p -устойчивым с конечным коэффициентом усиления, $\gamma = a$ и смещение равно нулю. Наконец, положим

$$h(u) = u^2.$$

Поскольку

$$\sup_{t \geq 0} |h(u(t))| \leq \left(\sup_{t \geq 0} |u(t)| \right)^2,$$

оператор H является \mathcal{L}_∞ -устойчивым, $\alpha(r) = r^2$ и смещение равно нулю. Этот оператор не является \mathcal{L}_∞ -устойчивым с конечным коэффициентом усиления, т. к. на функцию $h(u) = u^2$ не может быть наложено ограничение вида $|h(u)| \leq \gamma|u| + \beta$ для всех $u \in R$. \triangle

Пример 5.2. Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, определяемую каузальным оператором свертки

$$y(t) = \int_0^t h(t - \sigma)u(\sigma) d\sigma,$$

где $h(t) = 0$ при $t < 0$. Предположим, что $h \in \mathcal{L}_{1e}$, т. е. для всех $\tau \in [0, \infty)$

$$\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^\infty |h_\tau(\sigma)| d\sigma = \int_0^\tau |h(\sigma)| d\sigma < \infty.$$

Если $u \in \mathcal{L}_{\infty e}$ и $\tau \geq t$, то

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \int_0^t |h(t - \sigma)| |u(\sigma)| d\sigma \leq \\ &\leq \int_0^t |h(t - \sigma)| d\sigma \sup_{0 \leq \sigma \leq t} |u(\sigma)| = \int_0^t |h(s)| ds \sup_{0 \leq \sigma \leq t} |u(\sigma)|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}, \quad \forall \tau \in [0, \infty).$$

Это неравенство подобно неравенству (5.2), но не идентично ему, поскольку константа γ в (5.2) не зависит от τ и в рассматриваемом случае это условие не выполнено. Несмотря на то, что величина $\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1}$ конечна для всех конечных τ , она не является равномерно ограниченной по τ . Например, при $h(t) = e^t$ мы имеем $\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1} = (e^\tau - 1)$ и эта величина действительно конечна для всех конечных $\tau \in [0, \infty)$, но не является равномерно ограниченной по τ . Неравенство (5.2) выполнено, если $h \in \mathcal{L}_1$, т. е.

$$\|h\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^\infty |h(\sigma)| d\sigma < \infty.$$

Тогда из неравенства

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \|h\|_{\mathcal{L}_1} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}, \quad \forall \tau \in [0, \infty)$$

следует, что система является \mathcal{L}_∞ -устойчивой с конечным коэффициентом усиления. Более того, условие $\|h\|_{\mathcal{L}_1} < \infty$ гарантирует \mathcal{L}_p -устойчивость с конечным коэффициентом усиления при $p \in [1, \infty]$. Рассмотрим случай $p = 1$. При $t \leq \tau < \infty$ имеем

$$\int_0^\tau |y(t)| dt = \int_0^\tau \left| \int_0^t h(t - \sigma)u(\sigma) d\sigma \right| dt \leq \int_0^\tau \int_0^t |h(t - \sigma)| |u(\sigma)| d\sigma dt.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\tau |y(t)| dt &\leq \int_0^\tau |u(\sigma)| \int_0^\tau |h(t - \sigma)| dt d\sigma \leq \int_0^\tau |u(\sigma)| \|h\|_{\mathcal{L}_1} d\sigma \leq \\ &\leq \|h\|_{\mathcal{L}_1} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_1} \leq \|h\|_{\mathcal{L}_1} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_1}, \quad \forall \tau \in [0, \infty).$$

Рассмотрим теперь случай $p \in (1, \infty)$ и предположим, что константа $q \in (1, \infty)$ определяется равенством $1/p + 1/q = 1$. При $t \leq \tau < \infty$ имеем

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \int_0^t |h(t-\sigma)| |u(\sigma)| d\sigma = \\ &= \int_0^t |h(t-\sigma)|^{1/q} |h(t-\sigma)|^{1/p} |u(\sigma)| d\sigma \leqslant \\ &\leq \left(\int_0^t |h(t-\sigma)| d\sigma \right)^{1/q} \left(\int_0^t |h(t-\sigma)| |u(\sigma)|^p d\sigma \right)^{1/p} \leqslant \\ &\leq (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{1/q} \left(\int_0^t |h(t-\sigma)| |u(\sigma)|^p d\sigma \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

где второе неравенство было получено с использованием неравенства Гельдера.¹⁾ Тогда

$$\begin{aligned} (\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_p})^p &= \int_0^\tau |y(t)|^p dt \leqslant \\ &\leq \int_0^\tau (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{p/q} \left(\int_0^t |h(t-\sigma)| |u(\sigma)|^p d\sigma \right) dt = \\ &= (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{p/q} \int_0^\tau \int_0^t |h(t-\sigma)| |u(\sigma)|^p d\sigma dt. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} (\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_p})^p &\leq (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{p/q} \int_0^\tau |u(\sigma)|^p \int_0^\tau |h(t-\sigma)| dt d\sigma \leqslant \\ &\leq (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{p/q} \|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1} (\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p})^p = (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^p (\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p})^p. \end{aligned}$$

¹⁾ Если $f \in \mathcal{L}_{pe}$ и $g \in \mathcal{L}_{qe}$, где $p \in (1, \infty)$ и $1/p + 1/q = 1$, то неравенство Гельдера имеет вид

$$\int_0^\tau |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_0^\tau |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^\tau |g(t)|^q dt \right)^{1/q}$$

для всех $\tau \in [0, \infty)$. (См. [14].)

Следовательно,

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_p} \leq \|h\|_{\mathcal{L}_1} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p}.$$

Таким образом, если $\|h\|_{\mathcal{L}_1} < \infty$, то для любой константы $p \in [1, \infty]$ каузальный оператор свертки \mathcal{L}_p -устойчив с конечным коэффициентом усиления и неравенство (5.2) выполнено с $\gamma = \|h\|_{\mathcal{L}_1}$ и $\beta = 0$. \triangle

Одним из недостатков определения 5.1 является то, что в нем явным образом накладывается условие выполнения неравенств (5.1) и (5.2) при любых входных сигналах из пространства \mathcal{L}^m . Эти требования исключают из рассмотрения системы, в которых вход-выходные соотношения определены лишь на подмножестве пространства входных сигналов. В следующем примере рассматривается подобная ситуация и мотивируется необходимость определения нового понятия — \mathcal{L} -устойчивости при малом входном сигнале.

Пример 5.3. Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, определяемую нелинейностью

$$y = \operatorname{tg} u.$$

Выход $y(t)$ определен лишь при входных сигналах, удовлетворяющих неравенству

$$|u(t)| < \frac{\pi}{2}, \quad \forall t \geq 0.$$

Таким образом, система не является \mathcal{L}_∞ -устойчивой в смысле определения 5.1. Однако, если мы ограничимся рассмотрением входных сигналов $u(t)$, удовлетворяющих

$$|u| \leq r < \frac{\pi}{2},$$

то

$$|y| \leq \left(\frac{\operatorname{tg} r}{r} \right) |u|$$

и система будет удовлетворять неравенству

$$\|y\|_{\mathcal{L}_p} \leq \left(\frac{\operatorname{tg} r}{r} \right) \|u\|_{\mathcal{L}_p}$$

для любых $u \in \mathcal{L}_p$, таких что $|u(t)| \leq r$ для всех $t \geq 0$, где $p \in [1, \infty]$. В пространстве \mathcal{L}_∞ из неравенства $|u(t)| \leq r$ следует $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq r$, т. е. приведенное выше неравенство выполнено только для входных сигналов с малой нормой. Однако, в случае рассмотрения других пространств \mathcal{L}_p , $p < \infty$, мгновенная ограниченность величины $|u(t)|$ не влечет ограниченность соответствующей нормы этого входного сигнала. Например, сигнал

$$u(t) = re^{-rt/a}, \quad a > 0$$

принадлежит \mathcal{L}_p для всех $p \in [1, \infty]$ и имеет мгновенную границу $|u(t)| \leq r$, однако его \mathcal{L}_p -норма

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p} = r \left(\frac{a}{rp} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

может принимать произвольно большие значения. \triangle

Определение 5.2. Отображение $H : \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q$ называется \mathcal{L} -устойчивым при малом входном сигнале (соответственно, \mathcal{L} -устойчивым при малом входном сигнале с конечным коэффициентом усиления), если существует положительная константа r , такая что неравенство (5.1) (соответственно, неравенство (5.2)) выполнено для всех $u \in \mathcal{L}_e^m$, $\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| \leq r$.

5.2. \mathcal{L} -устойчивость моделей состояния.

Свойство устойчивости от входа к выходу интуитивно понятно. Это возможно объясняет то, что большинство из нас знакомится с теорией устойчивости динамических систем на примере концепции устойчивости систем с ограниченным входом и ограниченным выходом. В рамках теории Ляпунова мы уделяем особое внимание исследованию точек равновесия и асимптотическому поведению переменных состояния и в связи с этим возникает вопрос: Какую информацию о устойчивости от входа к выходу мы можем получить с использованием формализма теории устойчивости Ляпунова? В этом параграфе мы покажем, как предлагаемые теорией Ляпунова средства установления устойчивости могут быть использованы для доказательства \mathcal{L} -устойчивости нелинейных систем, представленных моделями состояния.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (5.3)$$

$$y = h(t, x, u), \quad (5.4)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^q$, $f : [0, \infty) \times D \times D_u \rightarrow R^n$ — кусочно-непрерывная по t и локально липшицевая по (x, u) функция, $h : [0, \infty) \times D \times D_u \rightarrow R^q$ — кусочно-непрерывная по t и непрерывная по (x, u) функция, $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая начало координат $x = 0$ и $D_u \subset R^m$ — область, содержащая $u = 0$. Для каждого фиксированного $x_0 \in D$ модель состояния (5.3)–(5.4) определяет оператор H , сопоставляющий каждому входному сигналу $u(t)$ соответствующий выходной сигнал $y(t)$. Предположим, что $x = 0$ является точкой равновесия свободной системы

$$\dot{x} = f(t, x, 0). \quad (5.5)$$

В этом параграфе будет показано, что при определенных условиях на f и h из равномерной асимптотической устойчивости (или экспоненциальной устойчивости) начала координат (5.5) следует \mathcal{L} -устойчивость

или \mathcal{L} -устойчивость при малом входном сигнале системы (5.3)–(5.4), где \mathcal{L} — определенное пространство входных сигналов. Этот результат будет доказан сначала для случая экспоненциальной устойчивости, а затем для случая равномерной асимптотической устойчивости.

Теорема 5.1. Рассмотрим систему (5.3)–(5.4) и выберем $r > 0$ и $r_u > 0$, такие что $\{\|x\| \leq r\} \subset D$ и $\{\|u\| \leq r_u\} \subset D_u$. Предположим, что

- $x = 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия (5.5) и существует функция Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющая неравенствам

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) \leq -c_3 \|x\|^2, \quad (5.7)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|, \quad (5.8)$$

для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ и некоторых положительных констант c_1 , c_2 c_3 и c_4 .

- f и h удовлетворяют неравенствам

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\| \leq L \|u\|, \quad (5.9)$$

$$\|h(t, x, u)\| \leq \eta_1 \|x\| + \eta_2 \|u\|, \quad (5.10)$$

для всех $(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times D_u$ и некоторых неотрицательных констант L , η_1 и η_2 .

Тогда для каждого x_0 , такого что $\|x_0\| \leq r \sqrt{c_1/c_2}$, система (5.3)–(5.4) \mathcal{L}_p -устойчива при малом входном сигнале с конечным коэффициентом усиления для всех $p \in [1, \infty]$. В частности, для каждого $u \in \mathcal{L}_{pe}$, такого что $\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| \leq \min\{r_u, c_1 c_3 r / (c_2 c_4 L)\}$, выход системы $y(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_p} \leq \gamma \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p} + \beta \quad (5.11)$$

для всех $\tau \in [0, \infty)$, где

$$\gamma = \eta_2 + \frac{\eta_1 c_2 c_4 L}{c_1 c_3},$$

$$\beta = \eta_1 \|x_0\| \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \rho, \quad \text{где } \rho = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \infty, \\ \left(\frac{2c_3}{c_3 p}\right)^{1/p}, & \text{если } p \in [1, \infty). \end{cases}$$

Кроме того, если начало координат глобально экспоненциально устойчиво и все предположения выполнены глобально (при $D = R^n$ и $D_u = R^m$), то для каждого $x_0 \in R^n$ система (5.3)–(5.4) \mathcal{L}_p -устойчива с конечным коэффициентом усиления для всех $p \in [1, \infty]$.

Доказательство: Производная V вдоль решений системы (5.3) удовлетворяет

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, x, u) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) + \frac{\partial V}{\partial x} [f(t, x, u) - f(t, x, 0)] \leqslant \\ &\leqslant -c_3 \|x\|^2 + c_4 L \|x\| \|u\|.\end{aligned}$$

Пусть $W(t) = \sqrt{V(t, x(t))}$. При $V(t, x(t)) \neq 0$ имеет место $\dot{W} = \dot{V}/(2\sqrt{V})$. С учетом (5.6) получаем

$$\dot{W} \leqslant -\frac{1}{2} \left(\frac{c_3}{c_2} \right) W + \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \|u(t)\|.$$

При $V(t, x(t)) = 0$ можно показать,¹⁾ что

$$D^+ W(t) \leqslant \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \|u(t)\|. \quad (5.12)$$

Тогда

$$D^+ W(t) \leqslant -\frac{1}{2} \left(\frac{c_3}{c_2} \right) W + \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \|u(t)\|$$

для всех значений $V(t, x(t))$. Используя лемму сравнения 3.4, можно показать, что $W(t)$ удовлетворяет неравенству

$$W(t) \leqslant e^{-tc_3/2c_2} W(0) + \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \int_0^t e^{-(t-\tau)c_3/2c_2} \|u(\tau)\| d\tau.$$

Используя (5.6), получаем

$$\|x(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|x_0\| e^{-tc_3/2c_2} + \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \int_0^t e^{-(t-\tau)c_3/2c_2} \|u(\tau)\| d\tau.$$

Легко показать, что из неравенств

$$\|x_0\| \leqslant r \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \quad \text{и} \quad \sup_{0 \leqslant \sigma \leqslant t} \|u(\sigma)\| \leqslant \frac{c_1 c_3 r}{c_2 c_4 L}$$

следует, что $\|x(t)\| \leqslant r$, т. е. $x(t)$ остается в области, в которой выполнены сделанные предположения. Используя (5.10), получаем

$$\|y(t)\| \leqslant k_1 e^{-at} + k_2 \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \|u(\tau)\| d\tau + k_3 \|u(t)\|, \quad (5.13)$$

где

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|x_0\| \eta_1, \quad k_2 = \frac{c_4 L \eta_1}{2c_1}, \quad k_3 = \eta_2, \quad a = \frac{c_3}{2c_2}.$$

¹⁾ См. упражнение 5.6.

Положим

$$y_1(t) = k_1 e^{-at}, \quad y_2(t) = k_3 \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \|u(\tau)\| d\tau, \quad y_3(t) = k_3 \|u(t)\|.$$

Предположим, что $u \in \mathcal{L}_{pe}^m$ при некотором $p \in [1, \infty]$. С использованием результатов, полученных в примере 5.2, легко показать, что

$$\|y_2\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant \frac{k_2}{a} \|u\|_{\mathcal{L}_p}.$$

Непосредственной проверкой можно доказать, что

$$\|y_3\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant k_3 \|u\|_{\mathcal{L}_p}.$$

Далее, можно показать, что первый член в оценке вектора выхода удовлетворяет оценке

$$\|y_1\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant k_1 \rho, \quad \text{где} \quad \rho = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \infty, \\ \left(\frac{1}{ap} \right)^{1/p}, & \text{если } p \in [1, \infty). \end{cases}$$

Таким образом, из неравенства треугольника следует, что (5.11) выполнено с константами

$$\gamma = k_3 + \frac{k_2}{a}, \quad \beta = k_1 \rho.$$

В случае, если все предположения выполнены глобально, нет необходимости накладывать ограничения на x_0 и мгновенные значения $\|u(t)\|$. Поэтому (5.11) выполнено для всех $x_0 \in R^n$ и $u \in \mathcal{L}_{pe}$. \square

С использованием обратной теоремы Ляпунова 4.14 можно показать, что существует функция Ляпунова, удовлетворяющая (5.6)–(5.8). Тогда можно сформулировать следующее следствие.

Следствие 5.1. Предположим, что в некоторой окрестности точки $(x = 0, u = 0)$ функция $f(t, x, u)$ является непрерывно дифференцируемой, матрицы Якоби $[\partial f / \partial x]$ и $[\partial f / \partial u]$ ограничены равномерно по t и $h(t, x, u)$ удовлетворяет (5.10). Если начало координат $x = 0$ является экспоненциально устойчивой точкой равновесия (5.5), то существует константа $r_0 > 0$, такая что для любого x_0 , $\|x_0\| < r_0$ система (5.3)–(5.4) является \mathcal{L}_p -устойчивой при малом входном сигнале с конечным коэффициентом усиления для всех $p \in [1, \infty]$. Кроме того, если все предположения выполнены глобально и начало координат является глобально экспоненциально устойчивой точкой равновесия (5.5), то для любого $x_0 \in R^n$ система (5.3)–(5.4) является \mathcal{L}_p -устойчивой с конечным коэффициентом усиления для всех $p \in [1, \infty]$.

В случае линейной не зависящей от времени системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (5.14)$$

$$y = Cx + Du, \quad (5.15)$$

условия глобальной экспоненциальной устойчивости, сформулированные в теореме теоремы 5.1, эквивалентны условию гурвицевости матрицы A . Таким образом, для линейных систем мы имеем следующий результат.

Следствие 5.2. *Линейная не зависящая от времени система (5.14)–(5.15) \mathcal{L}_p -устойчива с конечным коэффициентом усиления для всех $p \in [1, \infty]$, если A — гурвицева матрица. Более того, (5.11) выполнено с*

$$\gamma = \|D\|_2 + \frac{2\lambda_{\max}^2(P)\|B\|_2\|C\|_2}{\lambda_{\min}(P)}, \quad \beta = \rho\|C\|_2\|x_0\|\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}},$$

где

$$\rho = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \infty \\ \left(\frac{2\lambda_{\max}(p)}{p}\right)^{1/p}, & \text{если } p \in [1, \infty) \end{cases}$$

и P является решением уравнения Ляпунова $PA + A^T P = -I$.

Читателю предлагается вывести приведенные выше выражения, определяющие константы γ и β .

Пример 5.4. Рассмотрим скалярную систему с одним входом и одним выходом

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - x^3 + u, \quad x(0) = x_0, \\ y &= \operatorname{th} x + u. \end{aligned}$$

Начало координат $\dot{x} = -x - x^3$ глобально экспоненциально устойчиво и это может быть установлено с использованием функции Ляпунова $V(x) = x^2/2$. Функция V удовлетворяет (5.6)–(5.8) глобально с $c_1 = c_2 = 1/2$, $c_3 = c_4 = 1$. Функции f и h удовлетворяют (5.9) и (5.10) глобально с $L = \eta_1 = \eta_2 = 1$. Следовательно, для всех $x_0 \in R$ и $p \in [1, \infty]$ система \mathcal{L}_p -устойчива с конечным коэффициентом усиления. \triangle

Пример 5.5. Рассмотрим систему второго порядка с одним входом и одним выходом

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - a \operatorname{th} x_1 + u, \\ y &= x_1, \end{aligned}$$

где a — некоторая неотрицательная константа. Используем

$$V(x) = x^T Px = p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2$$

в качестве функции Ляпунова для свободной системы:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -2p_{12}(x_1^2 + ax_1 \operatorname{th} x_1) + 2(p_{11} - p_{12} - p_{22})x_1x_2 - \\ &- 2ap_{22}x_2 \operatorname{th} x_1 - 2(p_{22} - p_{12})x_2^2. \end{aligned}$$

Для того, чтобы избавится от перекрестного члена x_1x_2 , положим $p_{11} = p_{12} + p_{22}$. Тогда при $p_{22} = 2p_{12} = 1$ матрица P будет положительно определена и

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 - ax_1 \operatorname{th} x_1 - 2ax_2 \operatorname{th} x_1.$$

С учетом того, что $x_1 \operatorname{th} x_1 \geq 0$ для всех $x_1 \in R$, получаем

$$\dot{V} \leq -\|x\|_2^2 + 2a|x_1||x_2| \leq -(1-a)\|x\|_2^2.$$

Таким образом, для всех $a < 1$ функция V удовлетворяет (5.6)–(5.8) глобально с $c_1 = \lambda_{\min}(P)$, $c_2 = \lambda_{\max}(P)$, $c_3 = 1 - a$ и $c_4 = 2\|P\|_2 = 2\lambda_{\max}(P)$. Функции f и h удовлетворяют (5.9) и (5.10) глобально с $L = \eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0$. Следовательно, для всех $x_0 \in R^2$ и $p \in [1, \infty]$ система является \mathcal{L}_p -устойчивой с конечным коэффициентом усиления. \triangle

Далее рассматривается более общий случай, когда начало координат (5.5) равномерно асимптотически устойчиво и исследуется задача \mathcal{L}_∞ -устойчивости. В следующих двух теоремах даются соответственно условия \mathcal{L}_∞ -устойчивости и \mathcal{L}_∞ -устойчивости при малом входном сигнале.

Теорема 5.2. *Рассмотрим систему (5.3)–(5.4) и выберем $r > 0$ так, чтобы $\{\|x\| \leq r\} \subset D$. Предположим, что*

- $x = 0$ — равномерно асимптотически устойчивая точка равновесия (5.5) и существует функция Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющая неравенствам

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) \leq -\alpha_3(\|x\|), \quad (5.17)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq \alpha_4(\|x\|) \quad (5.18)$$

для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ и некоторых \mathcal{K} -функций α_i , $i = 1, 2, 3, 4$;

- f и h удовлетворяют неравенствам

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\| \leq \alpha_5(\|u\|), \quad (5.19)$$

$$\|h(t, x, u)\| \leq \alpha_6(\|x\|) + \alpha_7(\|u\|) + \eta \quad (5.20)$$

для всех $(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times D_u$, некоторых \mathcal{K} -функций α_i , $i = 5, 6, 7$ и некоторой неотрицательной константе η .

Тогда для всех $x_0 : \|x_0\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ система (5.3)–(5.4) \mathcal{L}_∞ -устойчива при малом входном сигнале.

Доказательство: Производная V вдоль траекторий (5.3) удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x, u) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) + \frac{\partial V}{\partial x} [f(t, x, u) - f(t, x, 0)] \leq \\ &\leq -\alpha_3(\|x\|) + \alpha_4(\|x\|)\alpha_5(\|u\|) \leq \end{aligned}$$

$$\leq -(1-\theta)\alpha_3(\|x\|) - \theta\alpha_3(\|x\|) + \alpha_4(r)\alpha_5 \left(\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| \right),$$

где $0 < \theta < 1$. Положим

$$\mu = \alpha_3^{-1} \left(\frac{\alpha_4(r)\alpha_5 (\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\|)}{\theta} \right)$$

и выберем $r_u > 0$ достаточно малой, чтобы $\{\|u\| \leq r_u\} \subset D_u$ и $\mu \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ при $\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| \leq r_u$. Тогда

$$\dot{V} \leq -(1-\theta)\alpha_3(\|x\|), \quad \forall \|x\| \geq \mu.$$

Применяя теорему 4.18, заключаем с использованием (4.42) и (4.43), что $\|x(t)\|$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma \left(\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| \right) \quad (5.21)$$

для всех $0 \leq t \leq \tau$, где β и γ — соответственно \mathcal{KL} - и \mathcal{K} -функции. Используя (5.20), получаем с использованием свойства \mathcal{K} -функций¹⁾

$$\alpha(a+b) \leq \alpha(2a) + \alpha(2b)$$

оценку

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \alpha_6 \left(\beta(\|x_0\|, t) + \gamma \left(\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| \right) \right) + \alpha_7(\|u(t)\|) + \eta \leq \\ &\leq \alpha_6(2\beta(\|x_0\|, t)) + \alpha_6 \left(2\gamma \left(\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| \right) \right) + \alpha_7(\|u(t)\|) + \eta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \gamma_0(\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}) + \beta_0, \quad (5.22)$$

где

$$\gamma_0 = \alpha_6 \circ 2\gamma + \alpha_7 \quad \text{и} \quad \beta_0 = \alpha_6(2\beta(\|x_0\|, 0)) + \eta.$$

□

С использованием обратной теоремы Ляпунова 4.16 можно показать, что существует функция Ляпунова, удовлетворяющая (5.16)–(5.18). Таким образом, можно сформулировать следствие.

Следствие 5.3. Предположим, что в некоторой окрестности точки $(x=0, u=0)$ функция $f(t, x, u)$ непрерывно дифференцируема, матрицы Якоби $[\partial f / \partial x]$ и $[\partial f / \partial u]$ ограничены равномерно по t и $h(t, x, u)$ удовлетворяет (5.20). Если свободная система (5.5) имеет в начале координат равномерно асимптотически устойчивую точку

равновесия $x=0$, то система (5.3)–(5.4) \mathcal{L}_∞ -устойчива при малом входном сигнале.

Для того, чтобы обобщить теорему 5.2 на случай доказательства \mathcal{L}_∞ -устойчивости, нам необходимо показать, что (5.21) выполняется для всех начальных состояний $x_0 \in R^n$ и любого ограниченного входного сигнала. В параграфе 4.9 было отмечено, что это неравенство необязательно справедливо, если условия теоремы 5.2 выполнены глобально даже в случае, когда начало координат (5.5) является глобально асимптотически устойчивым. Однако, справедливость этого неравенства может быть доказана, если система (5.3) обладает свойством устойчивости по входу-состоянию, которое может быть установлено с использованием теоремы 4.19.

Теорема 5.3. Рассмотрим систему (5.3)–(5.4) с $D = R^n$ и $D_u = R^m$. Предположим, что

- система (5.3) устойчива по входу-состоянию;
- h удовлетворяет неравенству

$$\|h(t, x, u)\| \leq \alpha_1(\|x\|) + \alpha_2(\|x\|) + \eta \quad (5.23)$$

для всех $(t, x, u) \in [0, \infty) \times R^n \times R^m$, некоторых \mathcal{K} -функций α_1, α_2 и некоторой неотрицательной константы η .

Тогда для всех $x_0 \in R^n$ система (5.3)–(5.4) \mathcal{L}_∞ -устойчива.

Доказательство: Из свойства устойчивости по входу-состоянию следует, что для всех $x_0 \in R^n$ и $u \in \mathcal{L}_\infty$ выполнено неравенство, аналогичное (5.21). Оставшаяся часть доказательства этой теоремы аналогична доказательству теоремы 5.2. □

Пример 5.6. Рассмотрим систему первого порядка с одним входом и одним выходом

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - 2x^3 + (1+x^2)u^2 \\ y &= x^2 + u. \end{aligned}$$

В примере 4.26 было показано, что это уравнение состояния является устойчивым по входу-состоянию. Функция выхода h удовлетворяет (5.23) глобально с $\alpha_1(r) = r^2$, $\alpha_2(r) = r$ и $\eta = 0$. Таким образом, система \mathcal{L}_∞ -устойчива. △

Пример 5.7. Рассмотрим систему второго порядка с одним входом и одним выходом

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + g(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(t)x_1 - x_2^3 + u \\ y &= x_1 + x_2, \end{aligned}$$

где $g(t)$ — непрерывная и ограниченная для всех $t \geq 0$ функция. Полагая $V = (x_1^2 + x_2^2)$, получаем

$$\dot{V} = -2x_1^4 - 2x_2^4 + 2x_2u.$$

¹⁾ См. упражнение 4.35.

С учетом того, что

$$x_1^4 + x_2^4 \geq \frac{1}{2} \|x\|_2^4,$$

получаем

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\|x\|_2^4 + 2\|x\|_2|u| = -(1-\theta)\|x\|_2^4 - \theta\|x\|_2^4 + 2\|x\|_2|u| \leq \\ &\leq -(1-\theta)\|x\|_2^4, \quad \forall \|x\|_2 \geq \left(\frac{2|u|}{\theta}\right)^{1/3},\end{aligned}$$

где $0 < \theta < 1$. Таким образом, V удовлетворяет неравенствам (4.48) и (4.49) в формулировке теоремы 4.19 с $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2$, $W_3(x) = (1-\theta)\|x\|_2^4$ и $\rho(r) = (2r/\theta)^{1/3}$. Следовательно, уравнение состояния устойчиво по входу-состоянию. Кроме того, функция $h = x_1 + x_2$ удовлетворяет (5.23) глобально с $\alpha_1(r) = \sqrt{2}r$, $\alpha_2 = 0$ и $\eta = 0$. Таким образом, система \mathcal{L}_∞ -устойчива. \triangle

5.3. \mathcal{L}_2 -коэффициент усиления

Свойство \mathcal{L}_2 -устойчивости играет особую роль при анализе систем, в ходе которого естественно рассматривать случай интегрируемых с квадратом сигналов, поскольку они являются сигналами с конечной энергией.¹⁾ Во многих задачах управления²⁾ система представлена в виде отображения, связывающего вход с выходом — возмущающий входной сигнал u с управляемым выходом y . При этом требуется, чтобы величина этого выхода была малой. Система управления с входными сигналами, являющимися \mathcal{L}_2 -функциями, разрабатывается таким образом, чтобы отображение вход-выход было \mathcal{L}_2 -устойчивым с конечным коэффициентом усиления и так, чтобы этот коэффициент принимал минимальные значения. В таких задачах важно не только установить факт \mathcal{L}_2 -устойчивости системы с конечным коэффициентом усиления, но также и вычислить \mathcal{L}_2 -коэффициент усиления или верхнюю границу его возможных значений. В этом параграфе мы покажем, как вычислить этот \mathcal{L}_2 -коэффициент усиления, если система не зависит от времени. Начнем с линейных систем.

Теорема 5.4. Рассмотрим линейную не зависящую от времени систему

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{5.24}$$

$$y = Cx + Du \tag{5.25}$$

¹⁾ Если в качестве $u(t)$ рассмотреть силу тока или его напряжение, то величина $u^T(t)u(t)$ будет пропорциональна мгновенной мощности сигнала и интеграл этой величины, взятый по всему промежутку времени, представляет собой меру энергии этого входного сигнала.

²⁾ См. литературу по H_∞ -управлению, например, [20], [54], [61], [90], [199] и [219]. Прим. ред. перев. — см. также [Д56].

где A — гурвицева матрица. Пусть $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Тогда \mathcal{L}_2 -коэффициент усиления равен $\sup_{\omega \in R} \|G(j\omega)\|_2$.¹⁾

Доказательство: Поскольку система линейна, мы можем положить $x(0) = 0$. Из теории преобразования Фурье известно,²⁾ что преобразование Фурье $Y(j\omega)$ для каузального сигнала $y \in \mathcal{L}_2$ определяется равенством

$$Y(j\omega) = \int_0^\infty y(t)e^{-j\omega t} dt$$

и

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega).$$

Используя теорему Парсеваля,³⁾ можно записать

$$\begin{aligned}\|y\|_{\mathcal{L}_2}^2 &= \int_0^\infty y^T(t)y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty Y^*(j\omega)Y(j\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty U^*(j\omega)G^T(-j\omega)G(j\omega)U(j\omega) d\omega = \\ &= \left(\sup_{\omega \in R} \|G(j\omega)\|_2 \right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty U^*(j\omega)U(j\omega) d\omega = \\ &= \left(\sup_{\omega \in R} \|G(j\omega)\|_2 \right)^2 \|u\|_{\mathcal{L}_2}^2.\end{aligned}$$

Из этой оценки видно, что \mathcal{L}_2 -коэффициент усиления меньше либо равен $\sup_{\omega \in R} \|G(j\omega)\|_2$. Доказательство того, что этот коэффициент равен $\sup_{\omega \in R} \|G(j\omega)\|_2$ может быть выполнено от противного (см. приложение C.10). \square

Рассмотренный случай линейной не зависящей от времени системы является единственной ситуацией, в которой возможно определить точное значение \mathcal{L}_2 -коэффициента усиления. В общем случае можно определить лишь верхнюю границу значений этого коэффициента.

¹⁾ Эта норма является индуцированной 2-нормой комплексной матрицы $G(j\omega)$ и равна $\sqrt{\lambda_{\max}[G^T(-j\omega)G(j\omega)]} = \sigma_{\max}[G(j\omega)]$. Эта величина известна как H_∞ -норма матрицы $G(j\omega)$, если $G(j\omega)$ рассматривается как элемент пространства Харди H_∞ . (См. [61].)

²⁾ См. [53].

³⁾ В теореме Парсеваля [53] утверждается, что для каузального сигнала $y \in \mathcal{L}_2$ выполнено

$$\int_0^\infty y^T(t)y(t) dt = \int_{-\infty}^\infty Y^*(j\omega)Y(j\omega) d\omega.$$

Теорема 5.5. Рассмотрим нелинейную не зависящую от времени систему

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad x(0) = x_0 \quad (5.26)$$

$$y = h(x) \quad (5.27)$$

где $f(x)$ — локально липшицевая функция и $G(x)$, $h(x)$ — непрерывные функции на R^n . Матрица $G(x)$ имеет размерность $n \times n$ и $h : R^n \rightarrow R^q$. Функции f и h обращаются в начале координат в ноль $f(0) = 0$, $h(0) = 0$. Пусть γ — некоторое положительное число и предположим, что существует непрерывно дифференцируемая, положительно полуопределенная функция $V(x)$, удовлетворяющая неравенству

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(V, f, G, h, \gamma) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} G(x) G^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \\ &+ \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

для всех $x \in R^n$. Тогда для любого $x_0 \in R^n$ система (5.26)–(5.27) L_2 -устойчива с конечным коэффициентом усиления, значение которого меньше либо равно γ .

Доказательство: Можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} G(x)u &= -\frac{1}{2}\gamma^2 \left\| u - \frac{1}{\gamma^2} G^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right\|_2^2 + \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \\ &+ \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} G(x) G^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2}\gamma^2 \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Подставляя (5.28), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} G(x)u &\leq \frac{1}{2}\gamma^2 \|u\|_2^2 - \frac{1}{2}\|y\|_2^2 - \\ &- \frac{1}{2}\gamma^2 \left\| u - \frac{1}{\gamma^2} G^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right\|_2^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} G(x)u \leq \frac{1}{2}\gamma^2 \|u\|_2^2 - \frac{1}{2}\|y\|_2^2. \quad (5.29)$$

Заметим, что левая часть (5.29) представляет собой производную V вдоль решений системы (5.26). Интегрируя (5.29), получаем

$$V(x(\tau)) - V(x_0) \leq \frac{1}{2}\gamma^2 \int_0^\tau \|u(t)\|_2^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \|y(t)\|_2^2 dt,$$

где $x(t)$ — решение (5.26) при заданном $u \in L_{2e}$. С учетом того, что $V(x) \geq 0$, получаем

$$\int_0^\tau \|y(t)\|_2^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^\tau \|u(t)\|_2^2 dt + 2V(x_0).$$

Вычисляя квадратные корни от левой и правой частей этого неравенства и используя неравенство $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$, где a и b — неотрицательные числа, получаем окончательную оценку

$$\|y_\tau\|_{L_2} \leq \gamma \|u_\tau\|_{L_2} + \sqrt{2V(x_0)}. \quad (5.30)$$

□

Неравенство (5.28) известно как *неравенство Гамильтона–Якоби* (или *уравнение Гамильтона–Якоби*, если вместо \leq имеет место равенство). Для того, чтобы найти функцию $V(x)$, удовлетворяющую (5.28), необходимо решить дифференциальное уравнение в частных производных, что может быть непросто. Если функция $V(x)$ определена, мы можем установить свойство L_2 -устойчивости системы с конечным коэффициентом усиления. Отметим, что этот результат не требует наложения дополнительного условия экспоненциальной устойчивости начала координат свободной системы, что отличает его от результата, сформулированного в теореме 5.1. Этот факт иллюстрируется следующим примером.

Пример 5.8. Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_1^3 - kx_2 + u \\ y &= x_2, \end{aligned}$$

где a и k — положительные константы. Свободная система представляет собой специальный случай класса систем, рассмотренного в примере 4.9. Выберем функцию Ляпунова в виде функции энергии $V(x) = ax_1^4/4 + x_2^2/2$ и покажем, что начало координат глобально асимптотически устойчиво. Используя функцию $V(x) = \alpha(ax_1^4/4 + x_2^2/2)$, где $\alpha > 0$, в качестве кандидата на решение неравенства Гамильтона–Якоби (5.28), можно показать, что

$$\mathcal{H} = (V, f, G, h, \gamma) = \left(-\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2}, x_2^2 \right).$$

Для выполнения (5.28) необходимо выбрать $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$ так, чтобы

$$-\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \leq 0. \quad (5.31)$$

Можно показать, что это неравенство можно переписать в следующем виде:

$$\gamma^2 \geq \frac{\alpha^2}{2\alpha k - 1}.$$

Поскольку мы заинтересованы в получении наименьшего коэффициента γ , мы выберем α так, чтобы минимизировать правую часть вышеприведенного неравенства. Минимальное значение $1/k^2$ достигается при $\alpha = 1/k$. Таким образом, выбрав $\gamma = 1/k$, мы можем заключить, что система L_2 -устойчива с конечным коэффициентом усиления, значение которого меньше либо равно $1/k$. Заметим, что условия теоремы 6.1 в рассматриваемом примере не выполняются, поскольку начало координат свободной системы не является экспоненциально устойчивым. Линеаризация системы в окрестности начала координат приводит к линейной системе с матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -k \end{bmatrix},$$

которая не является гурвицевой. \triangle

Следующий пример представляет собой обобщение вышеприведенного результата.

Пример 5.9. Рассмотрим нелинейную систему (5.26)–(5.27) с $m = q$ и предположим, что существует непрерывно дифференцируемая, положительно полуопределенная функция $W(x)$, удовлетворяющая¹⁾

$$\frac{\partial W}{\partial x} f(x) \leq -kh^T(x)h(x), \quad k > 0 \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} G(x) = h^T(x) \quad (5.33)$$

для всех $x \in R^n$. Используя $V(x) = \alpha W(x)$, $\alpha > 0$, в качестве кандидата на решение неравенства Гамильтона–Якоби (5.28), можно показать, что

$$\mathcal{H} = (V, f, G, h, \gamma) = \left(-ak + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \right) h^T(x)h(x).$$

Для выполнения (5.28) необходимо выбрать $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$ так, чтобы

$$-ak + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \leq 0.$$

Это неравенство совпадает с (5.31). Повторив рассуждения предыдущего примера, можно показать, что система L_2 -устойчива с конечным коэффициентом усиления, значение которого меньше либо равно $1/k$. \triangle

¹⁾ Система, удовлетворяющая (5.32) и (5.33) будет определена в следующей главе как строго пассивная по выходу система.

Пример 5.10. Рассмотрим нелинейную систему (5.26)–(5.27) с $m = q$ и предположим, что существует непрерывно дифференцируемая, положительно полуопределенная функция $W(x)$, удовлетворяющая¹⁾

$$\frac{\partial W}{\partial x} f(x) \leq 0 \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} G(x) = h^T(x) \quad (5.35)$$

для всех $x \in R^n$. Замыкая систему обратной связью

$$u = -ky + v, \quad k > 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) - kG^T(x)G(x) \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^T + G(x)v \stackrel{\text{def}}{=} f_c(x) + G(x)v \\ y &= h(x) = G^T(x) \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^T. \end{aligned}$$

Легко показать, что для замкнутой системы функция $W(x)$ удовлетворяет условиям (5.32) и (5.33) из предыдущего примера. Следовательно отображение вход–выход от v к y является L_2 -устойчивым с конечным коэффициентом усиления, значение которого меньше либо равно $1/k$. Более того, этот коэффициент может быть сделан произвольно малым путем выбора достаточно большого коэффициента усиления в обратной связи. \triangle

Пример 5.11. Рассмотрим линейную не зависящую от времени систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Предположим, что существует положительно полуопределенное решение P уравнения Риккати

$$PA + A^T P + \frac{1}{\gamma^2} PBB^T P + C^T C = 0, \quad (5.36)$$

где $\gamma > 0$ — некоторая константа. Полагая $V(x) = (1/2)x^T Px$ и с учетом $[\partial V/\partial x] = x^T P$ можно легко показать, что $V(x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби

$$\mathcal{H}(V, Ax, B, Cx) = x^T Px + \frac{1}{2\gamma^2} x^T PB^T BPx + \frac{1}{2} x^T C^T Cx = 0.$$

¹⁾ Система, удовлетворяющая (5.34) и (5.35) будет определена в следующей главе как пассивная система. В параграфе 6.5 мы исследуем ее как соединение двух пассивных систем, осуществленное посредством обратной связи.

Следовательно, система \mathcal{L}_2 -устойчива с конечным коэффициентом усиления, значение которого меньше либо равно γ . Этот результат представляет собой другой метод вычисления верхней границы \mathcal{L}_2 -коэффициента усиления, отличный от частотного метода, предложенного в теореме 5.4. Интересно отметить, что существование положительно полуопределенного решения (5.36) является необходимым и достаточным условием того, что \mathcal{L}_2 -коэффициент усиления меньше либо равен γ .¹⁾ \triangle

В теореме 5.5 мы предположили, что условия выполнены глобально. Из доказательства этой теоремы очевидно, что если условия выполнены лишь на конечной области D , то неравенство (5.30) выполнено до тех пор, пока решение (5.26) остается в D .

Следствие 5.4. Предположим, что условия теоремы 5.5 выполнены в области $D \subset R^n$, содержащей начало координат. Тогда для любого $x_0 \in D$ и любого $u \in \mathcal{L}_{2e}$, при котором решение (5.26) удовлетворяет $x(t) \in D$ для всех $t \in [0, \tau]$, справедлива оценка

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_2} \leq \gamma \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_2} + \sqrt{2V(x_0)}.$$

Тот факт, что решение $x(t)$ уравнения (5.26) остается при достаточно малых $\|x_0\|$ и $\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\|$ в некоторой окрестности начала координат, следует из асимптотической устойчивости начала координат системы $\dot{x} = f(x)$. Этот результат используется в следующей лемме для установления свойства \mathcal{L}_2 -устойчивости при малом входном сигнале.

Лемма 5.1. Предположим, что условия теоремы 5.5 выполнены в области $D \subset R^n$, содержащей начало координат, $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $x = 0$ — асимптотически устойчивая точка равновесия системы $\dot{x} = f(x)$. Тогда существует константа $k_1 > 0$, такая что для любого x_0 , $\|x_0\| < k_1$, система (5.26)–(5.27) является \mathcal{L}_2 -устойчивой при малом входном сигнале с конечным коэффициентом усиления, значение которого меньше либо равно γ .

Доказательство: Выберем $r > 0$ так, чтобы $\{\|x\| \leq r\} \subset D$. Из обратной теоремы Ляпунова 4.16 следует, что существует константа $r_0 > 0$ и непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $W(x)$, удовлетворяющая

$$\alpha_1(\|x\|) \leq W(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

для всех $\|x\| < r_0$, где α_1, α_2 и α_3 — некоторые \mathcal{K} -функции. Производная $W(x)$ вдоль траекторий (5.26) удовлетворяет

$$\dot{W}(x) = \frac{\partial W}{\partial x} f(x, 0) + \frac{\partial W}{\partial x} [f(x, u) - f(x, 0)] \leq -\alpha_3(\|x\|) + kL\|u\| \leq$$

¹⁾ Необходимость доказана в [54].

$$\begin{aligned} &\leq -(1 - \theta)\alpha_3(\|x\|) - \theta\alpha_3(\|x\|) + kL \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| \leq \\ &\leq -(1 - \theta)\alpha_3(\|x\|), \quad \forall \|x\| \geq \alpha_3^{-1} \left(\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| / \theta \right), \end{aligned}$$

где k — верхняя граница для $\|\partial W / \partial x\|$, L — константа Липшица для функции f по u и $0 < \theta < 1$. Аналогично тому, как это было сделано в теореме 5.2, мы можем применить теорему 4.18 и показать, что существуют \mathcal{KL} -функция β , \mathcal{K} -функция γ_0 и положительные константы k_1 и k_2 , такие что для любого начального состояния x_0 , $\|x_0\| \leq k_1$, и любого входного сигнала $u(t)$, $\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| \leq k_2$, решение $x(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma_0 \left(\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| \right)$$

для всех $0 \leq t \leq \tau$. Таким образом, выбирая константы k_1 и k_2 достаточно малыми, мы можем обеспечить $\|x(t)\| \leq r$ для всех $0 \leq t \leq \tau$. Тогда утверждение леммы следует из следствия 5.4. \square

При использовании леммы 5.1 необходимо проверять наличие свойства асимптотической устойчивости начала координат системы $\dot{x} = f(x)$. Это может быть выполнено с использованием метода линеаризации или путем нахождения подходящей функции Ляпунова. В следующей лемме показано, что при выполнении определенных условий в качестве такой функции Ляпунова можно использовать ту же функцию V , что удовлетворяет неравенству Гамильтона–Якоби (5.28).

Лемма 5.2. Предположим, что условия теоремы 5.5 выполнены в области $D \subset R^n$, содержащей начало координат, $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция и не существует решения, отличного от тривиального $x(t) \equiv 0$, которое постоянно остается в $S = \{x \in D \mid h(x) = 0\}$. Тогда начало координат системы $\dot{x} = f(x)$ асимптотически устойчиво и существует константа $k_1 > 0$, такая что для любого x_0 , $\|x_0\| < k_1$, система (5.26)–(5.27) является \mathcal{L}_2 -устойчивой при малом входном сигнале с конечным коэффициентом усиления, значение которого меньше либо равно γ .

Доказательство: Пусть $u(t) \equiv 0$. С учетом (5.28) имеем

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq -\frac{1}{2} h^T(x) h(x), \quad \forall x \in D. \quad (5.37)$$

Пусть константа $r > 0$ такова, что $B_r = \{\|x\| \leq r\} \subset D$. Мы покажем, что $V(x)$ положительно определена на B_r . Предположим, что $\phi(t; x)$ — решение $\dot{x} = f(x)$, начинающееся в $\phi(0; x) = x \in B_r$. Из теоремы 3.1 (о существовании и единственности решения) и теоремы 3.4 (о непрерывной зависимости решения от начальных данных) следует, что су-

ществует $\delta > 0$, такое что для любого $x \in B_r$ решение $\phi(t; x)$ остается в D для всех $t \in [0, \delta]$. Интегрируя (5.37) на $[0, \tau]$, $\tau \leq \delta$, получаем

$$V(\phi(\tau; x)) - V(x) \leq -\frac{1}{2} \int_0^\tau \|h(\phi(t; x))\|_2^2 dt.$$

С учетом $V(\phi(t; x)) \geq 0$ можно записать

$$V(x) \geq \frac{1}{2} \int_0^\tau \|h(\phi(t; x))\|_2^2 dt.$$

Предположим, что существует $\bar{x} \neq 0$, такое что $V(\bar{x}) = 0$. Из предыдущего неравенства следует, что

$$\int_0^\tau \|h(\phi(t; \bar{x}))\|_2^2 dt = 0, \quad \forall \tau \in [0, \delta] \Rightarrow h(\phi(t; \bar{x})) \equiv 0, \quad \forall t \in [0, \delta].$$

Поскольку на этом интервале времени решение остается в S и по предположению единственным решением, остающимся в S , является тривиальное решение, мы можем заключить, что $\phi(t; \bar{x}) \equiv 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$. Таким образом, $V(x)$ положительно определена на B_r . Используя $V(x)$ в качестве функции Ляпунова для $\dot{x} = f(x)$, можно показать с использованием (5.37) и принципа инвариантности Ла-Салля (следствие 4.1), что начало координат системы $\dot{x} = f(x)$ асимптотически устойчиво. Применяя лемму 5.1, завершаем доказательство. \square

Пример 5.12. Продолжая анализ, начатый в примерах 5.8 и 5.9, рассмотрим несколько модифицированную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a(x_1 - \frac{1}{3}x_1^3) - kx_2 + u \\ y &= x_2, \end{aligned}$$

где a и k — положительные константы. Функция $V(x) = \alpha[a(x_1^2/2 - x_1^4/12) + x_2^2/2]$, $\alpha > 0$, является положительно полуопределенной на множестве $\{|x_1| \leq \sqrt{6}\}$. Используя функцию $V(x)$ в качестве кандидата на решение неравенства Гамильтона–Якоби (5.28), можно показать, что

$$\mathcal{H} = (V, f, G, h, \gamma) = \left(-\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2}, x_2^2 \right).$$

Повторяя рассуждения примера 5.8, можно легко показать, что выбор $\alpha = \gamma = 1/k$ обеспечивает выполнение неравенства (5.28) для всех $x \in R^2$. Поскольку условия теоремы 5.5 глобально не выполняются, мы исследуем используя лемму 5.1 вопрос о устойчивости при малом входном сигнале с конечным коэффициентом усиления. Нам необходимо показать, что начало координат свободной системы асимптотически

устойчиво. Это может быть сделано методом линеаризации в окрестности начала координат, что приводит к линейной системе с гурвицевой матрицей. Альтернативно, мы можем применить лемму 5.2, условия которой выполнены в области $D = \{|x_1| < \sqrt{3}\}$, поскольку

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t)[3 - x_1^2(t)] \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0.$$

Таким образом, система является \mathcal{L}_2 -устойчивой при малом входном сигнале с конечным коэффициентом усиления, меньшим, либо равным $1/k$. \triangle

5.4. Системы с обратной связью: теорема о малом коэффициенте усиления

Формализм устойчивости по «входу-выходу» играет важную роль при исследовании устойчивости соединения систем, поскольку коэффициент усиления системы позволяет нам увеличивать или уменьшать норму сигнала, проходящего через эту систему. В частности, это имеет место в изображенном на рисунке 5.1 соединении двух систем при помощи обратных связей. Система имеет две подсистемы $H_1 : \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q$ и $H_2 : \mathcal{L}_e^q \rightarrow \mathcal{L}_e^m$. Предположим, что обе системы \mathcal{L} -устойчивы с конечным коэффициентом усиления,¹⁾ т. е.

$$\|y_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma_1 \|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_1, \quad \forall e_1 \in \mathcal{L}_e^m, \quad \forall \tau \in [0, \infty), \quad (5.38)$$

$$\|y_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma_2 \|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2, \quad \forall e_2 \in \mathcal{L}_e^q, \quad \forall \tau \in [0, \infty). \quad (5.39)$$

Предположим также, что система с обратной связью *корректно определена* (well defined) в том смысле, что для любой пары входных сигналов $u_1 \in \mathcal{L}_e^m$ и $u_2 \in \mathcal{L}_e^q$ существуют единственны выходы $e_1, y_2 \in \mathcal{L}_e^m$ и $e_2, y_1 \in \mathcal{L}_e^q$.²⁾ Определим

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

Нас интересует вопрос о \mathcal{L} -устойчивости с конечным коэффициентом усиления замкнутой системы, обратная связь в которой рассматривается как отображение от входа u к выходу e , или как отображение от

¹⁾ В этом параграфе мы представим вариант классической теоремы о малом коэффициенте усиления (small gain theorem) для случая \mathcal{L} -устойчивости с конечным коэффициентом усиления. Более общие теоремы для случая \mathcal{L} -устойчивости приведены в работах [93] и [123].

²⁾ Достаточные условия существования и единственности решений могут быть найдены в литературе. Общепринятым методом установления этих свойств является использование принципа сжимающего отображения. (См., например, [53, теорема III.3.1].) Другой подход, использующий факт существования и единственности решений уравнений состояния, изложен в [93].

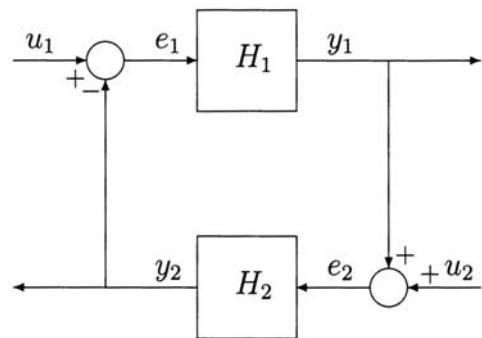


Рис. 5.1. Соединение систем с обратной связью.

входа u к выходу y .¹⁾ Нетрудно проверить (см. упражнение 5.17), что отображение от u к e является \mathcal{L} -устойчивым с конечным коэффициентом усиления, если и только если отображение от u к y является \mathcal{L} -устойчивым с конечным коэффициентом усиления. Следовательно, мы можем говорить, что обратная связь \mathcal{L} -устойчива с конечным коэффициентом усиления, если одно из этих отображений является \mathcal{L} -устойчивым с конечным коэффициентом усиления. В следующей теореме сформулированы достаточные условия для того, чтобы система с обратными связями являлась \mathcal{L} -устойчивой с конечным коэффициентом усиления.

Теорема 5.6. В условиях вышеупомянутых предположений система является \mathcal{L} -устойчивой с конечным коэффициентом усиления, если $\gamma_1\gamma_2 < 1$.

Доказательство: Предполагая, что решение существует, можно записать

$$e_{1\tau} = u_{1\tau} - (H_2 e_2)\tau, \quad e_{2\tau} = u_{2\tau} - (H_1 e_1)\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} &\leq \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \|(H_2 e_2)\tau\|_{\mathcal{L}} \leq \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2 \leq \\ &\leq \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 (\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_1 \|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_1) + \beta_2 = \\ &= \gamma_1 \gamma_2 \|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + (\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2 + \gamma_2 \beta_1). \end{aligned}$$

Поскольку $\gamma_1\gamma_2 < 1$,

$$\|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{1 - \gamma_1\gamma_2} (\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2 + \gamma_2 \beta_1) \quad (5.40)$$

¹⁾ См. упражнение 5.20, в котором исследуется вопрос: почему при исследовании устойчивости связанных обратной связью систем следует рассматривать как входы, так и выходы.

для всех $\tau \in [0, \infty)$. Аналогично,

$$\|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{1 - \gamma_1\gamma_2} (\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_1 \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_1 + \gamma_1 \beta_2) \quad (5.41)$$

для всех $\tau \in [0, \infty)$. Тогда утверждение теоремы следует из неравенства треугольника $\|e\|_{\mathcal{L}} \leq \|e_1\|_{\mathcal{L}} + \|e_2\|_{\mathcal{L}}$. \square

Изображенная на рисунке 5.1 система представляет собой удобную модель для исследования робастности динамических систем. Очень часто динамические системы, имеющие некоторые неопределенности в своей модели, могут быть представлены в виде соединения систем, в которых подсистема H_1 выступает в роли устойчивой номинальной системы, а подсистема H_2 — в роли устойчивого возмущения. В этом случае условие $\gamma_1\gamma_2 < 1$ будет выполнено при достаточно малом значении γ_2 . Таким образом, теорема о малом коэффициенте обратной связи представляет собой концептуальную основу для понимания множества результатов в теории робастности динамических систем и это справедливо особенно в тех случаях, когда в этих системах присутствует обратная связь.

Пример 5.13. Рассмотрим систему с обратной связью, изображенную на рисунке 5.1. Пусть в качестве H_1 выступает линейная не зависящая от времени система с гурвицевой квадратной передаточной матрицей $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$. Пусть H_2 — функция без памяти $y_2 = \psi(t, y_2)$, удовлетворяющая

$$\|\psi(t, y)\|_2 \leq \gamma_2 \|y\|_2, \quad \forall t \geq 0, \forall y \in R^m.$$

Из теоремы 5.4 следует, что H_1 является \mathcal{L}_2 -устойчивой с конечной обратной связью, \mathcal{L}_2 -коэффициент которой определяется равенством

$$\gamma_1 = \sup_{\omega \in R} \|G(j\omega)\|_2.$$

В примере 5.1 мы видели, что H_2 является \mathcal{L}_2 -устойчивой с конечной обратной связью, \mathcal{L}_2 -коэффициент которой меньше либо равен γ_2 . В предположении, что система с обратной связью является корректно определенной, мы можем заключить с использованием теоремы о малом коэффициенте усиления, что эта система \mathcal{L}_2 -устойчива с конечным коэффициентом усиления, если $\gamma_1\gamma_2 < 1$. \triangle

Пример 5.14. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, v + d_1(t)) \\ \varepsilon \dot{z} &= Az + B[u + d_2(t)] \\ v &= Cz, \end{aligned}$$

где f — гладкая функция своих аргументов, A — гурвицева матрица, $-CA^{-1}B = I$, ε — малый положительный параметр и d_1, d_2 — возмущения. Линейная часть этой модели описывает динамику исполнительного устройства, которая обычно является более быстрой по сравнению

с динамикой объекта управления, представленной в нашем примере нелинейным уравнением $\dot{x} = f$. Возмущения d_1 и d_2 входят в систему соответственно через вход объекта управления и через вход исполнительного устройства. Предположим, что возмущения принадлежат классу сигналов \mathcal{L} , в качестве которого может выступать любое \mathcal{L}_p -пространство, и цель управления заключается в том, чтобы уменьшить результат воздействия этих возмущений на состояние системы x . Эта цель может быть достигнута, если обратная связь построена таким образом, чтобы отображение вход-выход замкнутой системы, сопоставляющее вектор возмущений (d_1, d_2) вектору состояния x , являлось \mathcal{L} -устойчивым с конечным коэффициентом усиления, значение которого меньше некоторой заданной величины $\delta > 0$. Для упрощения задачи построения подобной обратной связи обычно пренебрегают динамикой исполнительного устройства, полагая $\varepsilon = 0$ и подставляя $v = -CA^{-1}B(u + d_2) = u + d_2$ в уравнение объекта управления. В результате исследуемая модель сводится к следующей:

$$\dot{x} = f(t, x, u + d),$$

где $d = d_1 + d_2$. Предполагая, что переменные состояния могут быть измерены, мы используем эту модель для синтеза обратной связи $u = \gamma(t, x)$, обеспечивающей достижение цели управления. Предположим, что мы успешно построили такую гладкую обратную связь, обеспечивающую выполнение неравенства

$$\|x\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma \|d\|_{\mathcal{L}} + \beta, \quad (5.42)$$

при $\gamma < \delta$. Обеспечивает ли это управление выполнение цели управления, если применить его к исходной системе, в которой присутствует динамика исполнительного устройства? Этот вопрос составляет существование проблемы робастности алгоритма управления по отношению к немоделируемой динамике исполнительного устройства.¹⁾ Уравнение исходной системы, замкнутой найденным законом управления, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, Cz + d_1(t)), \\ \varepsilon \dot{z} &= Az + B[\gamma(t, x) + d_2(t)]. \end{aligned}$$

Предположим, что $d_2(t)$ дифференцируема и $\dot{d}_2 \in \mathcal{L}$. Замена переменных

$$\eta = z + A^{-1}B[\gamma(t, x) + d_2(t)]$$

приводит замкнутую систему к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, \gamma(t, x) + d(t) + C\eta), \\ \varepsilon \dot{\eta} &= A\eta + \varepsilon A^{-1}B[\dot{\gamma} + \dot{d}_2(t)], \end{aligned}$$

¹⁾ В примере 11.14 мы исследуем с использованием теории возмущений аналогичную задачу робастности.

где

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x}f(t, x, \gamma(t, x) + d(t) + C\eta).$$

Легко видеть, что замкнутая система может быть представлена изображенной на рисунке 5.1 схемой, где H_1 определена системой

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, \gamma(t, x) + e_1), \\ y_1 &= \dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x}f(t, x, \gamma(t, x) + e_1), \end{aligned}$$

H_2 определена системой

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \frac{1}{\varepsilon}A\eta + A^{-1}Be_2, \\ y_2 &= -C\eta, \end{aligned}$$

и

$$u_1 = d_1 + d_2 = d, \quad u_2 = \dot{d}_2.$$

В этом представлении система H_1 является номинальной редуцированной замкнутой системой, а H_2 представляет собой эффект воздействия на поведение системы немоделируемой динамики. Заметим, что при $\varepsilon = 0$ замкнутая система сводится к номинальной системе. Предположим, что функция обратной связи удовлетворяет неравенству

$$\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x}f(t, x, \gamma(t, x) + e_1) \right\| \leq c_1\|x\| + c_2\|e_1\| \quad (5.43)$$

для всех (t, x, e_1) , где c_1 и c_2 — неотрицательные константы. С использованием (5.42) и (5.43) можно показать, что

$$\|y_1\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma_1\|e_1\|_{\mathcal{L}} + \beta_1,$$

где

$$\gamma_1 = c_1\gamma + c_2, \quad \beta_1 = c_1\beta.$$

Поскольку H_2 — линейная не зависящая от времени система и A — гурвицева матрица, мы можем применить следствие 5.2 и показать, что H_2 является \mathcal{L}_p -устойчивой с конечным коэффициентом усиления для любого $p \in [1, \infty]$ и

$$\|y_2\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma_2\|e_2\|_{\mathcal{L}} + \beta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon\gamma_f\|e_2\|_{\mathcal{L}} + \beta_2,$$

где

$$\gamma_f = \frac{2\lambda_{\max}^2(Q)\|A^{-1}B\|_2\|C\|_2}{\lambda_{\min}(Q)}, \quad \beta_2 = \rho\|C\|_2\|\eta(0)\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}},$$

$$\rho = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \infty, \\ \left(\frac{2\varepsilon\lambda_{\max}(Q)}{p}\right)^{1/p}, & \text{если } p \in [1, \infty) \end{cases}$$

и Q — решение уравнения Ляпунова $QA + A^TQ = -I$.¹⁾ Таким образом, в предположении, что система с обратной связью корректно определена, заключаем с использованием теоремы о малом коэффициенте усиления, что отображение вход-выход от u к e является \mathcal{L} -устойчивым. Используя (5.40), получаем

$$\|e_1\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon\gamma_1\gamma_f} [\|u_1\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon\gamma_f\|u_2\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon\gamma_f\beta_1 + \beta_2].$$

Из (5.42) следует, что

$$\|x\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma\|e_1\|_{\mathcal{L}} + \beta.$$

Тогда по определению u_1 и u_2

$$\|x\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{\gamma}{1 - \varepsilon\gamma_1\gamma_f} [\|d\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon\gamma_f\|\dot{d}\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon\gamma_f\beta_1 + \beta_2] + \beta. \quad (5.44)$$

Интересно отметить, что правая часть (5.44) стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к

$$\gamma\|d\|_{\mathcal{L}} + \beta + \gamma\beta_2.$$

Из этого следует, что при достаточно малом ε значение верхней границы \mathcal{L} -коэффициента усиления отображения от d к x для исходной замкнутой системы будет достаточно близко к соответствующей величине для номинальной замкнутой системы. \triangle

5.5. Упражнения

5.1 Покажите, что последовательное соединение двух \mathcal{L} -устойчивых (соответственно, \mathcal{L} -устойчивых с конечным коэффициентом усиления) систем является \mathcal{L} -устойчивой (соответственно, \mathcal{L} -устойчивой с конечным коэффициентом усиления) системой.

5.2 Покажите, что параллельное соединение двух \mathcal{L} -устойчивых (соответственно, \mathcal{L} -устойчивых с конечным коэффициентом усиления) систем является \mathcal{L} -устойчивой (соответственно, \mathcal{L} -устойчивой с конечным коэффициентом усиления) системой.

5.3 Рассмотрим систему, определенную функцией без памяти $y = u^{1/3}$.

(а) Покажите, что система \mathcal{L}_{∞} -устойчива с нулевым смещением.

(б) Покажите, что для любой положительной константы a система является \mathcal{L}_{∞} -устойчивой с конечным коэффициентом усиления при $\gamma = a$ и $\beta = 1/a^{1/2}$.

(с) Сравните эти два результата.

5.4 Рассмотрим систему, определенную функцией без памяти $y = h(u)$, где $h : R^m \rightarrow R^q$ — глобально липшицевая функция. Исследуйте систему

¹⁾ Матрица P из следствия 5.2 в рассматриваемом случае равна εQ и, следовательно, $(\varepsilon Q)(A/\varepsilon) + (A/\varepsilon)^T(\varepsilon Q) = -I$.

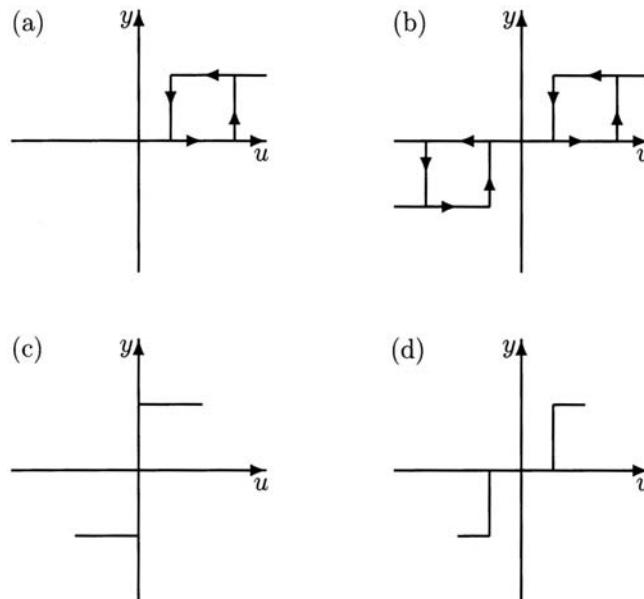


Рис. 5.2. Характеристики реле: (a) реле с гистерезисом, (b) реле с зоной нечувствительности и гистерезисом, (c) идеальное реле, (d) реле с зоной нечувствительности.

му на предмет ее \mathcal{L}_p -устойчивости для каждого $p \in [1, \infty]$ в следующих случаях:

- (1) $h(0) = 0$; (2) $h(0) \neq 0$.

5.5 Исследуйте реле с характеристиками, изображенными на рисунке 5.2, на предмет их \mathcal{L}_{∞} - и \mathcal{L}_2 -устойчивости.

5.6 Проверьте, что $D^+W(t)$ удовлетворяет (5.12) при $V(t, x(t)) = 0$.

Указание: Используя упражнение 3.24, покажите, что $V(t+h, x(t) + h) \leq c_4 h^2 L^2 \|u\|^2 / 2 + o(h)$, где $o(h)/h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. После этого используйте неравенство $c_4 \geq 2c_1$.

5.7 Предположим, что все условия теоремы 5.1 выполнены за исключением неравенства (5.10). Покажите, что если это неравенство заменить на

$$\|h(t, x, u)\| \leq \eta_1 \|x\| + \eta_2 \|u\| + \eta_3, \quad \eta_3 > 0,$$

то система является \mathcal{L}_{∞} -устойчивой при малом входном сигнале с конечным коэффициентом усиления (или \mathcal{L}_{∞} -устойчивой с конечным коэффициентом усиления, если условия выполнены глобально). Определите константы γ и β в (5.11).

5.8 Предположим, что все условия теоремы 5.1 выполнены за исключением неравенства (5.10). Покажите, что если это неравенство заменить

на (5.20), то система является \mathcal{L}_∞ -устойчивой при малом входном сигнале (или \mathcal{L}_∞ -устойчивой, если условия выполнены глобально).

5.9 Получите результат, аналогичный следствию 5.2 для линейной зависящей от времени системы.

5.10 Для каждой из следующих систем выполните исследование на предмет их \mathcal{L}_∞ -устойчивости и \mathcal{L}_∞ -устойчивости с конечным коэффициентом усиления:

$$(1) \begin{aligned} \dot{x} &= -(1+u)x^3 \\ y &= x \end{aligned}$$

$$(2) \begin{aligned} \dot{x} &= -(1+u)x^3 - x^5 \\ y &= x + u \end{aligned}$$

$$(3) \begin{aligned} \dot{x} &= -x/(1+x^2) + u \\ y &= x/(1+x^2) \end{aligned}$$

$$(4) \begin{aligned} \dot{x} &= -x - x^3 + x^2u \\ y &= x \sin u \end{aligned}$$

5.11 Для каждой из следующих систем выполните исследование на предмет их \mathcal{L}_∞ -устойчивости и \mathcal{L}_∞ -устойчивости с конечным коэффициентом усиления:

$$(1) \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + u, \quad y = x_1;$$

$$(2) \dot{x}_1 = -x_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + u, \quad y = x_2;$$

$$(3) \dot{x}_1 = (x_1 + u)(\|x\|_2^2 - 1),$$

$$\dot{x}_2 = x_2(\|x\|_2^2 - 1), \quad y = x_1;$$

$$(4) \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 + u_2, \quad y = x_1(x_2 + u_1);$$

$$(5) \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u, \quad y = x_1 + u;$$

$$(6) \dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + u, \quad y = x_2;$$

$$(7) \dot{x}_1 = -x_1 - x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u, \quad y(t) = x_1(t - T),$$

$$T > 0.$$

5.12 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -y - h(y) + u, \quad y = x_1 + x_2,$$

где h — непрерывно дифференцируемая функция, $h(0) = 0$ и $zh(z) > az^2$ для всех $z \in R$ и некоторой константы $a > 0$. Покажите, что система является L_p -устойчивой с конечным коэффициентом усиления для всех $p \in [1, \infty]$.

5.13 [192] Рассмотрим зависящую от времени систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x, u),$$

где f — локально липшицева функция, h — непрерывная функция, $f(0, 0) = 0$ и $h(0, 0) = 0$. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая, положительно определенная и радиально неограниченная функция $V(x)$, такая что

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq -W(x) + \psi(u), \quad \forall (x, u),$$

где $W(x)$ — непрерывная, положительно определенная и радиально неограниченная функция, $\psi(u)$ — непрерывная функция и $\psi(0) = 0$. Покажите, что система является \mathcal{L}_∞ -устойчивой.

5.14 Пусть $H(s)$ — гурвицева, строго собственная передаточная функция и $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ — соответствующая импульсная характеристика. Покажите, что

$$\sup_{\omega \in R} |H(j\omega)| \leq \int_0^\infty |h(t)| dt.$$

5.15 Докажите, что следующие системы являются \mathcal{L}_2 -устойчивыми с конечным коэффициентом усиления (или \mathcal{L}_2 -устойчивыми при малом входном сигнале с конечным коэффициентом усиления) и определите верхнюю границу \mathcal{L}_2 -коэффициента усиления:

$$(1) \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - kx_2 + u, \\ y &= x_2, \end{aligned} \quad a > 0, \quad k > 0;$$

$$(3) \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \text{sat}(2x_1 + x_2) + u, \\ y &= x_1; \end{aligned}$$

$$(2) \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \text{sat}(x_2^2 - x_3^2) + x_2 u, \\ x_3 &= x_3 \text{sat}(x_2^2 - x_3^2) - x_3 u, \\ y &= x_2^2 - x_3^2; \end{aligned}$$

$$(4) \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(1+x_1^2)x_2 - x_1^3 + x_1 u, \\ y &= x_1 x_2. \end{aligned}$$

5.16 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - \sigma(x_1) - x_2 + u, \quad y = x_2,$$

где σ — локально липшицева функция, $\sigma(0) = 0$ и $z\sigma(z) \geq 0$ для всех $z \in R$.

(a) Является ли эта система \mathcal{L}_∞ -устойчивой?

(b) Является ли эта система \mathcal{L}_2 -устойчивой с конечным коэффициентом усиления? Если да, найдите верхнюю границу \mathcal{L}_2 -коэффициента усиления.

5.17 ([77]) Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad y = h(x) + J(x)u,$$

где f, G, h — гладкие функции от x . Предположим, что существует положительная константа γ , такая что $\gamma^2 I - J^T(x)J(x) > 0$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{2} \left[h^T J + \frac{\partial V}{\partial x} G \right] \left(\gamma^2 I - J^T J \right)^{-1} \left[h^T J + \frac{\partial V}{\partial x} G \right]^T + \\ + \frac{1}{2} h^T h \leq 0 \end{aligned}$$

для всех x . Покажите, что система \mathcal{L}_2 -устойчива с конечным коэффициентом усиления, значение которого меньше либо равно γ .

Указание: Пусть

$$\gamma^2 I - J^T(x)J(x) = W^T(x)W(x),$$

$$L(x) = -[W^T(x)]^{-1} \left[h^T(x)J(x) + \frac{\partial V}{\partial x}G(x) \right]^T.$$

Покажите, что для любого u выполнено следующее неравенство

$$\frac{\partial V}{\partial x}f + \frac{\partial V}{\partial x}Gu = -\frac{1}{2}[L + Wu]^T[L + Wu] + \frac{\gamma^2}{2}u^Tu - \frac{1}{2}y^Ty + \mathcal{H}.$$

5.18 ([199]) Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u + K(x)w, \quad y = h(x),$$

где u — управление и w — возмущение. Функции f, G, K и h — гладкие, $f(0) = 0, h(0) = 0$. Пусть $\gamma > 0$. Предположим, что существует гладкая, положительно полуопределенная функция $V(x)$, удовлетворяющая при всех x неравенству

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma^2}K(x)K^T(x) - G(x)G^T(x) \right] \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2}h^T(x)h(x) \leq 0.$$

Покажите, что если управление имеет вид $u = -G^T(x)(\partial V/\partial x)^T$, то для замкнутой системы отображение от w к $\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$ является \mathcal{L}_2 -устойчивым с конечным коэффициентом усиления, значение которого меньше либо равно γ .

5.19 ([200]) В этом упражнении показывается, что \mathcal{L}_2 -коэффициент усиления линейной не зависящей от времени системы (5.24)–(5.25) с гурвицовой матрицей A не зависит от того, на каком промежутке определено пространство функций — на $R_+ = [0, \infty)$ или на $R = (-\infty, \infty)$. Пусть \mathcal{L}_2 — пространство интегрируемых с квадратом функций на R_+ с нормой $\|u\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \int_0^\infty u^T(t)u(t) dt$ и \mathcal{L}_{2R} — пространство интегрируемых с квадратом функций на R с нормой $\|u\|_{\mathcal{L}_{2R}}^2 = \int_{-\infty}^\infty u^T(t)u(t) dt$. Пусть γ_2 и γ_{2R} — \mathcal{L}_2 -коэффициенты усиления для \mathcal{L}_2 и \mathcal{L}_{2R} , соответственно. Поскольку \mathcal{L}_2 является подмножеством \mathcal{L}_{2R} , можно заключить, что $\gamma_2 \leq \gamma_{2R}$. Мы докажем, что $\gamma_2 = \gamma_{2R}$, показав, что для любой $\varepsilon > 0$ существует сигнал $u \in \mathcal{L}_2$, такой что $y \in \mathcal{L}_2$ и $\|y\|_{\mathcal{L}_2} \geq (1 - \varepsilon)\gamma_{2R}\|u\|_{\mathcal{L}_2}$.

(а) Покажите, что для заданной константы $\varepsilon > 0$ можно всегда найти константу $0 < \delta < 1$, такую что

$$\frac{1 - \varepsilon/2 - \sqrt{\delta}}{\sqrt{1 - \delta}} \geq 1 - \varepsilon.$$

(б) Покажите, что всегда можно найти $u \in \mathcal{L}_{2R}$ и момент времени $t_1 < \infty$, такие что

$$\|u\|_{\mathcal{L}_{2R}} = 1, \quad \|y\|_{\mathcal{L}_{2R}} \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \int_{-\infty}^{t_1} u^T(t)u(t) dt = \delta.$$

(с) Пусть $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, где u_1 равно нулю при $t < t_1$ и u_2 равно нулю при $t > t_1$. Пусть $y_1(t)$ — выход, соответствующий входу $u_1(t)$. Покажите, что

$$\frac{\|y_1\|_{\mathcal{L}_{2R}}}{\|u_1\|_{\mathcal{L}_{2R}}} \geq \frac{1 - \varepsilon/2 - \sqrt{\delta}}{\sqrt{1 - \delta}} \gamma_{2R} \geq (1 - \varepsilon)\gamma_{2R}.$$

(д) Для всех $t \geq 0$ определим вход и выход равенствами $u(t) = u_1(t + t_1)$ и $y(t) = y_1(t + t_1)$. Покажите, что u и y принадлежат \mathcal{L}_2 , y — выход, соответствующий $u(t)$, и $\|y\|_{\mathcal{L}_2} \geq (1 - \varepsilon)\gamma_{2R}\|u\|_{\mathcal{L}_2}$.

5.20 Рассмотрим соединение систем, изображенное на рисунке 5.1, где H_1 и H_2 — линейные не зависящие от времени системы, представленные передаточными функциями $H_1(s) = (s - 1)/(s - 1)$ и $H_2(s) = 1/(s - 1)$. Найдите передаточные функции замкнутой системы от (u_1, u_2) к (y_1, y_2) и от (u_1, u_2) к (e_1, e_2) . Используйте эти передаточные функции для ответа на вопрос: почему при исследовании систем с обратной связью следует рассматривать как входы (u_1, u_2) , так и выходы (e_1, e_2) (или (y_1, y_2))?

5.21 Рассмотрим систему с обратной связью, изображенную на рисунке 5.1. Покажите, что отображение от (u_1, u_2) к (y_1, y_2) является \mathcal{L} -устойчивым с конечным коэффициентом усиления, если и только если отображение от (u_1, u_2) к (e_1, e_2) является \mathcal{L} -устойчивым с конечным коэффициентом усиления.

5.22 Пусть в примере 5.14 $d_2(t) = a \sin \omega t$, где a и ω — положительные константы.

(а) Покажите, что для достаточно малом ε состояние замкнутой системы равномерно ограничено.

(б) Исследуйте эффект увеличения ω .

5.23 Рассмотрим систему с обратной связью, изображенную на рисунке 5.1, где H_1 и H_2 заданы равенствами

$$H_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + e_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad H_2 : \begin{cases} \dot{x}_3 = -x_3^3 + e_2 \\ y_2 = (1/2)x_3^3 \end{cases}$$

Пусть $u_2 = 0$, $u = u_1$ — вход и $y = y_1$ — выход системы.

(а) Используйте $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ в качестве вектора состояния, постройте модель состояния системы.

(б) Является ли эта система \mathcal{L}_2 -устойчивой?

Глава 6

ПАССИВНОСТЬ

Понятие пассивности представляет собой удобное средство для анализа нелинейных систем и тесно связано с теорией устойчивости Ляпунова и понятием \mathcal{L}_2 -устойчивости. В параграфе 6.1 мы дадим определение пассивности нелинейностей, представленных функцией без памяти.¹⁾ В параграфе 6.2 это определение будет обобщено на случай динамических систем, представленных в форме модели состояния. В обоих случаях в качестве мотивирующих примеров будут служить различные электрические цепи. В параграфе 6.3 будут рассмотрены положительно вещественные и строго положительно вещественные передаточные функции, а также показано, что эти функции определяют соответственно пассивные и строго пассивные системы. Связь между теорией пассивности и теориями Ляпунова и \mathcal{L}_2 -устойчивости исследуется в параграфе 6.4. Эти первые четыре параграфа являются методологической основой для формулировки основных результатов этой главы — теорем о пассивности, представленных в параграфе 6.5. В основной теореме о пассивности утверждается, что *соединение систем с (отрицательной) обратной связью, состоящее из двух пассивных систем, является пассивной*. При выполнении дополнительного условия наблюдаемости этого соединения систем, оно является асимптотически устойчивым. Теоремы о пассивности, представленные в параграфе 6.5, а также теорема о малом коэффициенте усиления, сформулированная в параграфе 5.4, позволяют получить концептуально важное обобщение того факта, что соединение систем с обратной связью, состоящее из двух устойчивых линейных систем, будет устойчиво,

¹⁾ Прим. ред. перев. — В аналогичных случаях часто используются термины «статическая нелинейность», «безынерционная нелинейность». При переводе был оставлен авторский вариант.

если контурный коэффициент усиления меньше единицы или если контурный сдвиг по фазе меньше 180 градусов. Связь между пассивностью и фазой передаточной функции может быть выявлена с использованием частотной характеристики положительно вещественных передаточных функций, данной в параграфе 6.3. В этом же параграфе утверждается, что фаза положительно вещественной передаточной функции не может превышать 90 градусов и, следовательно, общий фазовый сдвиг не может превышать 180 градусов. Если одна из двух передаточных функций является строго положительно вещественной, фаза обратной связи будет строго меньше 180 градусов. В параграфе 6.5 исследуются замены обратной связи, которые позволяют в некоторых случаях преобразовать систему с обратной связью, состоящую из двух подсистем и не являющуюся пассивной системой, в соединение систем с обратной связью, состоящее из двух пассивных подсистем. Этот результат усиливает теоретическую ценность теорем о пассивности.

6.1. Функции без памяти

В этом параграфе мы дадим определение пассивности статической системы, описываемой функцией $y = h(t, u)$, где $h : [0, \infty) \times R^p \rightarrow R^p$. Мотивирующим примером будет служить электрическая цепь, изображенная на рисунке 6.1(a). Эта цепь состоит из резистора, через который течет ток u и на котором падает напряжение u . Резистор пассивен, если поступающая в систему мощность всегда неотрицательна, т. е. если $uy \geq 0$ для всех точек (u, y) на $u - u$ характеристике. Это означает, что кривая $u - u$ должна лежать в первом и третьем квадранте (см. рисунок 6.1(b)). Простейшим резистором, удовлетворяющим этим требованиям, является линейный резистор, ток в котором удовлетворяет закону Ома $u = Ry$ или $y = Gu$, где R — сопротивление резистора и $G = 1/R$ — его проводимость. Если величина сопротивления положительна, $u - u$ характеристика представляет собой прямую линию с тангенсом угла наклона G и произведение $uy = Gu^2$ всегда неотрицательно. На самом деле эта величина почти всегда положительна, за исключением точки начала координат $(0, 0)$. Нелинейные пассивные резисторы имеют нелинейные $u - u$ характеристики и эти кривые также лежат в первом и третьем квадрантах (см. рисунки 6.2(a) и 6.2(b)). Заметим, что характеристика туннельного диода, изображенная на рисунке 6.2(b), остается пассивной, несмотря на то, что ее кривая имеет в некоторых областях отрицательный тангенс угла наклона касательной. В качестве примера элемента, не являющегося пассивным, можно использовать отрицательный резистор с $u - u$ характеристикой, изображенной на рисунке 6.2(c). Этот элемент был рассмотрен в параграфе 1.2.4 в качестве генератора с отрицательным сопротивлением. Чтобы реализовать подобную характеристику, необходимо применять активные устройства, например цепь с двумя туннельными диодами, изображенную на рисунке 1.7. В многополюсных цепях (с несколькими портами), для описания

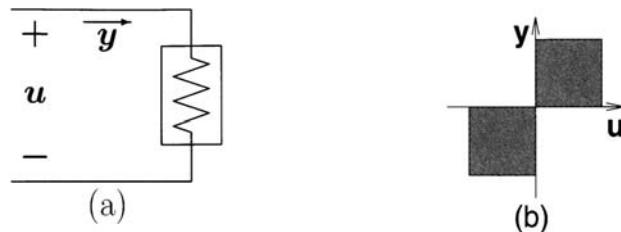


Рис. 6.1. (а) Пассивный резистор; (б) $u - y$ характеристика лежит в первом и третьем квадрантах.

которых используются векторные значения u и y , поступление мощности в систему равно скалярному произведению $u^T y = \sum_{i=1}^p u_i y_i = \sum_{i=1}^p u_i h_i(u)$. Эта сеть пассивна, если $u^T y \geq 0$ для всех u . Далее мы абстрагируемся от рассмотренной выше физической природы концепции пассивности и введем это понятие для любой функции $y = h(t, u)$. Мы будем рассматривать величину $u^T y$ как поток мощности, поступающей в систему, и будем говорить, что система пассивна, если $u^T y \geq 0$ для всех u . В скалярном случае график соотношения вход-выход должен лежать в первом и третьем квадранте. Мы также будем говорить, что график принадлежит сектору $[0, \infty]$, где нуль и бесконечность — это тангенсы углов наклона границ первого и третьего квадрантов. Это графическое представление остается верным, если h зависит от времени. В этом случае $u - y$ характеристика зависит от времени, но всегда принадлежит сектору $[0, \infty]$. Для векторных функций мы можем дать аналогичное графическое представление в специальном случае, когда компоненты функции $h(t, u)$ развязаны (decoupled) в том смысле, что $h_i(t, u)$ зависит только от u_i :

$$h(t, u) = \begin{bmatrix} h_1(t, u_1) \\ h_2(t, u_2) \\ \vdots \\ h_p(t, u_p) \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

В этом случае график каждого компонента этого вектора принадлежит сектору $[0, \infty]$. В общей ситуации подобное графическое представление отсутствует, но мы будем продолжать использовать термин «сектор» говоря, что h принадлежит сектору $[0, \infty]$, если $u^T h(t, u) \geq 0$ для всех (t, u) .

В некотором смысле вырожденный случай пассивности возникает при $u^T y = 0$. В подобных ситуациях мы будем говорить, что система не имеет потерь. В качестве примера такой системы можно использовать идеальный трансформатор, схема которого изображена на рисунке 6.3.

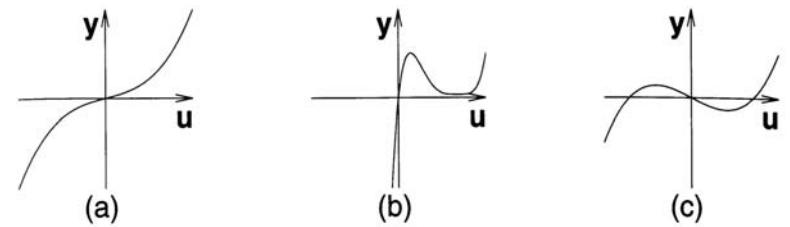


Рис. 6.2. (а) и (б) — примеры нелинейных характеристик пассивного резистора; (с) — пример не пассивного резистора.

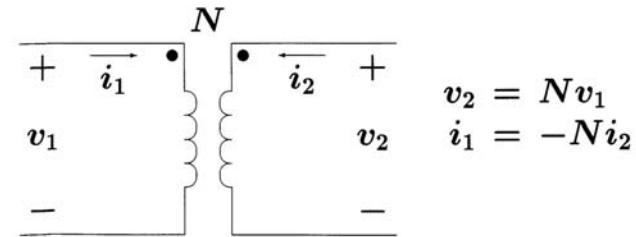


Рис. 6.3. Идеальный трансформатор.

Имеем $y = Su$, где

$$u = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -N \\ N & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица S является кососимметрической, т. е. $S + S^T = 0$. Следовательно, $u^T y = u^T Su = (1/2)u^T(S + S^T)u = u$.

Рассмотрим функцию h , удовлетворяющую $u^T y \geq u^T \varphi(u)$, где $\varphi(u)$ — некоторая функция. Если $u^T \varphi(u) > 0$ для всех $u \neq 0$, то h называется *строго пассивной по входу*, поскольку свойство пассивности выполняется строго, т. е. $u^T y = 0$ только если $u = 0$. Для скалярного случая это эквивалентно тому, что график $u - y$ характеристики не касается u -оси в точках, отличных от начала координат. Величина $u^T \varphi(u)$ представляет собой «избыток» пассивности. С другой стороны, если $u^T \varphi(u)$ принимает при некоторых u отрицательное значение, то функция h не обязательно является пассивной и в этом случае величина $u^T \varphi(u)$ представляет собой «недостаток» пассивности. Сущность понятий избытка и недостатка пассивности можно легко понять, если рассмотреть ситуацию, когда h является скалярной и $\varphi(u) = \varepsilon u$. В этом случае h принадлежит сектору $[\varepsilon, \infty]$ (см. рисунок 6.4) и избыток пассивности имеет место при $\varepsilon > 0$, а недостаток — при $\varepsilon < 0$. Избыток или недостаток пассивности могут быть устранены путем введения в систему прямой связи по входу (input feedforward) (см. рисунок 6.4(с)).

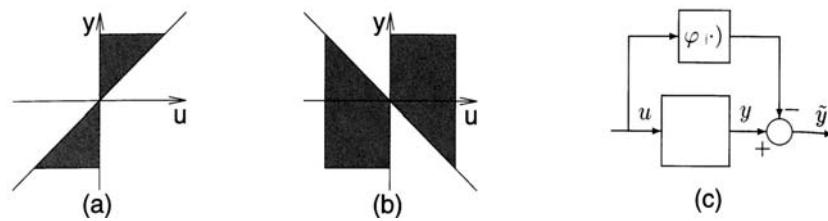


Рис. 6.4. Графическое представление для случая $u^T y \geq \varepsilon u^T u$ при (a) $\varepsilon > 0$ (избыток пассивности); (b) $\varepsilon < 0$ (недостаток пассивности); (c) устранение избытка или недостатка пассивности путем использования в системе прямой связи по входу.

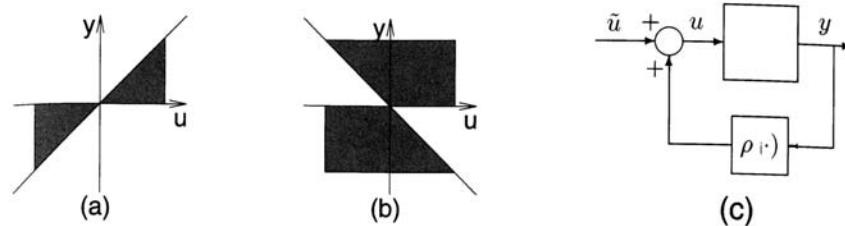


Рис. 6.5. Графическое представление для случая $u^T y \geq \delta y^T y$ при (a) $\delta > 0$ (избыток пассивности); (b) $\delta < 0$ (недостаток пассивности); (c) устранение избытка или недостатка пассивности путем использования в системе обратной связи по выходу.

Тогда, определив новый выход равенством $\tilde{y} = y - \varphi(u)$, получаем

$$u^T \tilde{y} = u^T [y - \varphi(u)] \geq u^T \varphi(u) - u^T \varphi(u) = 0.$$

Таким образом, любая функция, удовлетворяющая $u^T y \geq u^T \varphi(u)$, может быть преобразована в функцию, принадлежащую сектору $[0, \infty]$, путем использования в системе прямой связи по входу (*input-feedforward passive function*). С другой стороны, предположим, что $u^T y \geq y^T \rho(y)$, где $\rho(y)$ — некоторая функция. Повторяя вышеизложенные рассуждения, можно заключить, что избыток пассивности имеет место при $y^T \rho(y) > 0$ для всех $y \neq 0$, а недостаток пассивности — если величина $y^T \rho(y)$ принимает отрицательные значения при некоторых y . Графическое представление этой ситуации для скалярного случая при $\rho(y) = \delta y$ представлено на рисунке 6.5. Избыток пассивности имеет место при $\delta > 0$, а недостаток — при $\delta < 0$. Избыток или недостаток пассивности могут быть устранены путем замыкания системы обратной связью по выходу (см. рисунок 6.5(с)). Тогда, определив новый вход равенством $\tilde{u} = u - \rho(y)$, получаем

$$\tilde{u}^T y = [u - \rho(y)]^T y \geq y^T \rho(y) - y^T \rho(y) = 0.$$

Таким образом, любая функция, удовлетворяющая $u^T y \geq y^T \rho(y)$, может быть преобразована в функцию, принадлежащую сектору $[0, \infty]$, путем использования в системе обратной связи по выходу (*output-feedback passive function*).¹⁾ При $y^T \rho(y) > 0$ для всех $y \neq 0$ функция называется *строго пассивной по выходу*, поскольку свойство пассивности выполняется строго в том смысле, что $u^T y = 0$ только если $y = 0$. Для скалярного случая это эквивалентно тому, что график $u - y$ характеристики не касается y -оси в точках, отличных от начала координат. Вышеприведенные различные варианты пассивности объединены в следующем определении.

Определение 6.1. Система $y = h(t, u)$ называется

- *пассивной*, если $u^T y \geq 0$.
- *системой без потерь*, если $u^T y = 0$.
- *пассивной при прямой связи по входу*, (*input-feedforward passive*), если $u^T y \geq u^T \varphi(u)$, где φ — некоторая функция.
- *строго пассивной по выходу*, если $u^T y \geq u^T \varphi(u)$ и $u^T \varphi(u) > 0$, $\forall u \neq 0$.
- *пассивной при обратной связи по выходу*, (*output-feedback passive*), если $u^T y \geq y^T \rho(y)$, где ρ — некоторая функция.
- *строго пассивной по выходу*, если $u^T y \geq y^T \rho(y)$ и $y^T \rho(y) > 0$, $\forall y \neq 0$.

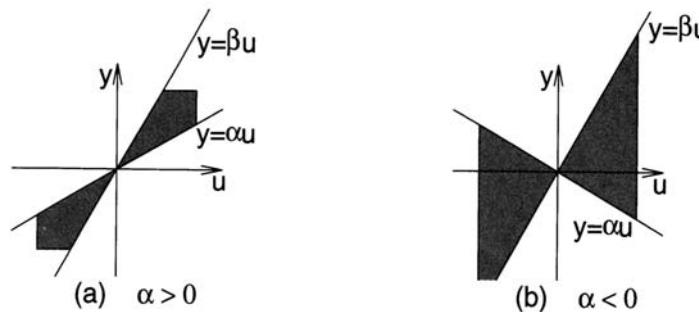
Во всех случаях неравенство должно быть выполнено для всех (t, u) .

Рассмотрим скалярную функцию $y = h(t, u)$, удовлетворяющую неравенству

$$\alpha u^2 \leq u h(t, u) \leq \beta u^2 \quad (6.2)$$

для всех (t, u) , где α и β — вещественные числа и $\beta \geq \alpha$. График этой функции принадлежит сектору, границами которого служат линии $y = \alpha u$ и $y = \beta u$. В этом случае мы будем говорить, что h принадлежит сектору $[\alpha, \beta]$. На рисунке 6.6 показан сектор $[\alpha, \beta]$ при $\beta > 0$ и α с различными знаками. Если в (6.2) имеют место строгие неравенства, мы будем говорить, что h принадлежит сектору $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, или (α, β) . Сравнив секторы, изображенные на рисунке 6.6, с секторами, изображенными на рисунках 6.4 и 6.5, можно заключить, что функция в секторе $[\alpha, \beta]$ обладает свойством пассивности при прямой связи по входу и свойством строгой пассивности по выходу, т. к. сектор $[\alpha, \beta]$ является пересечением секторов $[\alpha, \infty]$ и $[0, \beta]$. Действительно, можно показать, что эта функция может быть преобразована в функцию, принадлежащую сектору $[0, \infty]$, путем последовательного применения в системе прямой связи по входу и обратной связи по выходу. Прежде

¹⁾ Прим. ред. перев. — Используются также термины «пассифицируемая» (*passifiable*) или «пассивируемая» система. Операция превращения системы в пассивную путем введения прямой или обратной связи — пассивификация — играет важную роль при синтезе нелинейных систем, см. [Д49, Д55].

Рис. 6.6. Сектор $[\alpha, \beta]$ при $\beta > 0$ и (а) $\alpha > 0$; (б) $\alpha < 0$.

чем воспользоваться этим методом, обобщим определение сектора на векторный случай. Заметим, что неравенства (6.2) эквивалентны неравенству

$$[h(t, u) - \alpha u][h(t, u) - \beta u] \leq 0 \quad (6.3)$$

для всех (t, u) . Обратимся к векторному случаю. Рассмотрим сначала ситуацию, когда компоненты функции $h(t, u)$, связанные, т. е. функция представима в виде (6.1) и предположим, что каждый компонент h_i удовлетворяет секторному условию (6.2) с константами α_i и $\beta_i > \alpha_i$. Положим

$$K_1 = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p), \quad K_2 = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p).$$

Тогда легко показать, что

$$[h(t, u) - K_1 u]^T [h(t, u) - K_2 u] \leq 0 \quad (6.4)$$

для всех (t, u) . Заметим, что матрица $K = K_2 - K_1$ является положительно определенной и симметричной (диагональной). Неравенство (6.4) может быть выполнено для векторных функций более общего вида. Например, предположим, что $h(t, u)$ удовлетворяет неравенству

$$\|h(t, u) - Lu\| \leq \gamma \|u\|_2$$

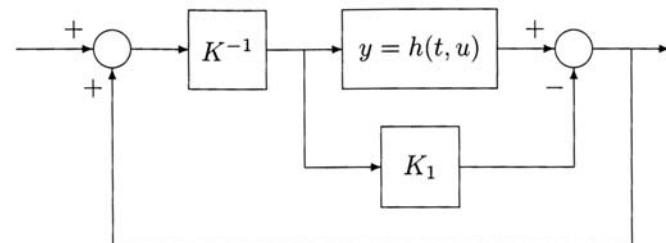
для всех (t, u) . Полагая $K_1 = L - \gamma I$ и $K_2 = L + \gamma I$, можно записать

$$[h(t, u) - K_1 u]^T [h(t, u) - K_2 u] = \|h(t, u) - Lu\|_2^2 - \gamma^2 \|u\|_2^2 \leq 0.$$

Заметим, что матрица $K = K_2 - K_1$ также является положительно определенной и симметричной (диагональной). Таким образом, неравенство (6.4) с положительно определенной симметричной матрицей $K = K_2 - K_1$ определяет в векторном случае сектор $[K_1, K_2]$. Следующее определение объединяет введенную терминологию.

Определение 6.2. Функция без памяти $h : [0, \infty) \times R^p \rightarrow R^p$ принадлежит сектору

- $[0, \infty]$, если $u^T h(t, u) \geq 0$;
- $[K_1, \infty]$, если $u^T [h(t, u) - K_1 u] \geq 0$;

Рис. 6.7. Функция из сектора $[K_1, K_2]$, где $K = K_2 - K_1 = K^T > 0$ может быть преобразована в функцию из сектора $[0, \infty]$ путем последовательного применения в системе прямой связи по входу и обратной связи по выходу.

- $[0, K_2]$ с $K_2 = K_2^T > 0$, если $h^T(t, u)[h(t, u) - K_2 u] \leq 0$;
- $[K_1, K_2]$ с $K = K_2 - K_1 = K^T > 0$, если

$$[h(t, u) - K_1 u]^T [h(t, u) - K_2 u] \leq 0. \quad (6.5)$$

Во всех случаях неравенство должно выполняться для всех (t, u) . Если в какой-либо из вышеприведенных ситуаций соответствующее неравенство выполняется строго, сектор записывается как $(0, \infty)$, (K_1, ∞) , $(0, K_2)$ или (K_1, K_2) . В скалярном случае мы будем писать (α, β) , $[\alpha, \beta]$ или (α, β) , указывая на то, что левая, правая или обе части неравенства (6.2) выполняются строго.

Сектор $[0, \infty]$ соответствует наличию в системе пассивности. Сектор $[K_1, \infty]$ соответствует пассивности с прямой связью по входу с $\varphi(u) = K_1 u$. Сектор $[0, K_2]$ с $K_2 = (1/\delta)I > 0$ соответствует строгой пассивности по выходу с $\rho(y) = \delta y$. Читателю предлагается (упражнение 6.1) проверить, что функция из сектора $[K_1, K_2]$ может быть преобразована в функцию из сектора $[0, \infty]$ путем последовательного применения в системе прямой связи по входу и обратной связи по выходу (см. рисунок 6.7).

6.2. Модели состояния

В этом параграфе мы определим пассивность для динамической системы, представленной в виде модели состояния

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (6.6)$$

$$y = h(x, u), \quad (6.7)$$

где $f : R^n \times R^p \rightarrow R^n$ — локально липшицева функция, $h : R^p \rightarrow R^p$ — непрерывная функция и $f(0, 0) = 0$, $h(0, 0) = 0$. Система имеет столько же входов, сколько и выходов. Следующая RLC-цепь мотивирует приведенное ниже определение.

Пример 6.1. RLC-цепь, схема которой изображена на рисунке 6.8, содержит источник электрического тока, линейные катушку ин-

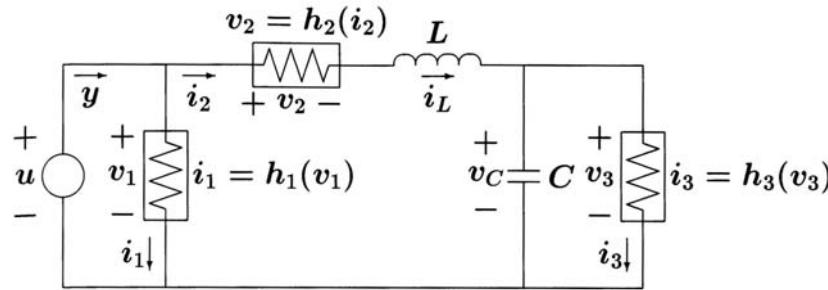


Рис. 6.8. RLC-цепь из примера 6.1.

дуктивности и конденсатор, а также нелинейные резисторы. Резисторы 1 и 3 имеют $u - y$ характеристики $i_1 = h_1(v_1)$ и $i_3 = h_3(v_3)$, а $u - y$ характеристика резистора 2 имеет вид $v_2 = h_2(i_2)$. В качестве входа выступает напряжение u , а в качестве выхода — сила тока y . Произведение uy представляет собой поток мощности (power flow), поступающей в систему. Рассматривая ток x_1 через катушку индуктивности и напряжение x_2 на конденсаторе в качестве переменных состояния, можно записать модель состояния

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= u - h_2(x_1) - x_2 \\ C\dot{x}_2 &= x_1 - h_3(x_2) \\ y &= x_1 + h_1(u). \end{aligned}$$

По сравнению с простой цепью с сопротивлениями, электрическая RLC-цепь имеет новые особенности, связанные с наличием элементов L и C , которые служат в качестве накопителей энергии. Система является пассивной, если энергия, поглощенная цепью за период времени $[0, t]$, больше, либо равна увеличению запаса энергии в цепи за тот же период времени, т. е.

$$\int_0^t u(s)y(s) ds \geq V(x(t)) - V(x(0)), \quad (6.8)$$

где $V(x) = (1/2)Lx_1^2 + (1/2)Cx_2^2$ — энергия, запасенная в цепи. Если вместо (6.8) выполняется строгое неравенство, разность между значением поглощенной в системе энергии и увеличением запаса энергии в системе, должна быть равна количеству энергии, рассеянной в резисторах. Поскольку (6.8) должно выполняться в любой момент времени $t \geq 0$, мгновенное неравенство для мощности

$$u(t)y(t) \geq \dot{V}(x(t), u(t)) \quad (6.9)$$

должно выполняться для всех t , т. е. мощность, поступающая в систему, должна быть больше, либо равна скорости изменения запаса

энергии в системе. Исследуем выполнение неравенства (6.9), вычислив производную функции V вдоль траекторий системы:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= Lx_1\dot{x}_1 + Cx_2\dot{x}_2 = x_1[u - h_2(x_1) - x_2] + x_2[x_1 - h_3(x_2)] = \\ &= x_1[u - h_2(x_1)] - x_2h_3(x_2) = \\ &= [x_1 + h_1(u)]u - uh_1(u) - x_1h_2(x_1) - x_2h_3(x_2) = \\ &= uy - uh_1(u) - x_1h_2(x_1) - x_2h_3(x_2). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$uy = \dot{V} + uh_1(u) + x_1h_2(x_1) + x_2h_3(x_2).$$

Если h_1 , h_2 и h_3 пассивны, то $uy \geq \dot{V}$ и система пассивна. Другие возможные конфигурации рассматриваемой цепи описаны ниже.

Случай 1: Если $h_1 = h_2 = h_3 = 0$, $uy = \dot{V}$ и диссипация энергии в цепи отсутствует, то цепь является системой без потерь.

Случай 2: Если h_2 и h_3 принадлежат сектору $[0, \infty]$, то

$$uy \geq \dot{V} + uh_1(u).$$

Член $uh_1(u)$ представляет собой либо избыток, либо недостаток пассивности. Если $uh_1(u) > 0$ для всех $u \neq 0$, имеет место избыток пассивности, поскольку количество энергии, поглощенной цепью за период времени $[0, t]$, больше увеличения запаса энергии, за исключением случая, когда $u(t)$ тождественно равна нулю. Этот случай соответствует строгой пассивности по входу. С другой стороны, если $uh_1(u)$ принимает отрицательное значение при некоторых u , имеет место недостаток пассивности. Как мы видели при рассмотрении функций без памяти, указанные типы избытка или недостатка пассивности могут быть устранены путем использования в системе прямой связи по входу (см. рисунок 6.4(c)).

Случай 3: Если $h_1 = 0$ и $h_3 \in [0, \infty]$, то

$$uy \geq \dot{V} + yh_2(y).$$

Избыток или недостаток пассивности функции h_2 обуславливает наличие аналогичного свойства для всей цепи. Как и в случае функций без памяти, избыток или недостаток пассивности могут быть устранены путем использования в системе обратной связи по выходу (см. рисунок 6.5(c)). Если $yh_2(y) > 0$ для всех $y \neq 0$, имеет место строгая пассивность по выходу, поскольку количество энергии, поглощенной цепью за период времени $[0, t]$, больше увеличения запаса энергии, за исключением случая, когда $y(t)$ тождественно равна нулю.

Случай 4: Если $h_1 \in [0, \infty]$, $h_2 \in (0, \infty)$ и $h_3 \in (0, \infty)$, то

$$uy \geq \dot{V} + x_1h_2(x_1) + x_2h_3(x_2),$$

где $x_1h_2(x_1) + x_2h_3(x_2)$ — положительно определенная функция от x . Этот случай соответствует строгой пассивности по состоянию, посколь-

ку количество энергии, поглощенной цепью за период времени $[0, t]$, больше увеличения запаса энергии, за исключением случая, когда $x(t)$ тождественно равно нулю. Система, обладающая этим свойством, называется *строго пассивной по состоянию*, или просто *строго пассивной*. Очевидно, невозможно привести соответствующую аналогию с функциями без памяти, т. к. для них состояние не определено. \triangle

Определение 6.3. Система (6.6)–(6.7) называется *пассивной*, если существует непрерывно дифференцируемая положительно полуопределенная функция $V(x)$ (называемая *функцией запаса (storage function)*), такая что

$$u^T y \geq \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u), \quad \forall (x, u) \in R^n \times R^p \quad (6.10)$$

Более того, эта система называется

- системой *без потерь*, если $u^T y = \dot{V}$;
- *пассивной при прямой связи по входу*, если $u^T y \geq \dot{V} + u^T \varphi(u)$ для некоторой функции φ ;
- *строго пассивной по входу*, если $u^T y \geq \dot{V} + u^T \varphi(u)$ и $u^T \varphi(u) > 0, \forall u \neq 0$;
- *пассивной при обратной связи по выходу*, если $u^T y \geq \dot{V} + u^T \rho(y)$ для некоторой функции ρ ;
- *строго пассивной по выходу*, если $u^T y \geq \dot{V} + y^T \rho(y)$ и $y^T \rho(y) > 0, \forall y \neq 0$;
- *строго пассивной*, если $u^T y \geq \dot{V} + \psi(x)$ для некоторой положительно определенной функции ψ .

Во всех случаях неравенство должно быть выполнено для всех (x, u) .

Формулировка определения 6.3 аналогична формулировке определения 6.1 для функций без памяти, за исключением того, что определение 6.3 дано в терминах функции запаса $V(x)$. Если рассматривать $V(x) = 0$ для случая функций без памяти, определение 6.3 может применяться для описания как моделей состояния, так и функций без памяти.

Пример 6.2. Интегратор, изображенный на рисунке 6.9(a) и представимый в виде системы

$$\dot{x} = u, \quad y = x$$

представляет собой систему без потерь, поскольку используя $V(x) = (1/2)x^2$ в качестве функции запаса, получаем $uy = \dot{V}$. В случае, если функция без памяти образует с интегратором параллельное соединение (см. рисунок 6.9(b)), система принимает вид

$$\dot{x} = u, \quad y = x + h(u).$$

Легко видеть, что система является пассивной при прямой связи по входу, поскольку сигнал с параллельной цепи $h(u)$ может быть погашен сигналом с выхода системы. Используя $V(x) = (1/2)x^2$ в качестве функции запаса, получаем $uy = \dot{V} + uh(u)$. Если $h \in [0, \infty]$, система является пассивной. Если $uh(u) > 0$ для всех $u \neq 0$, система является

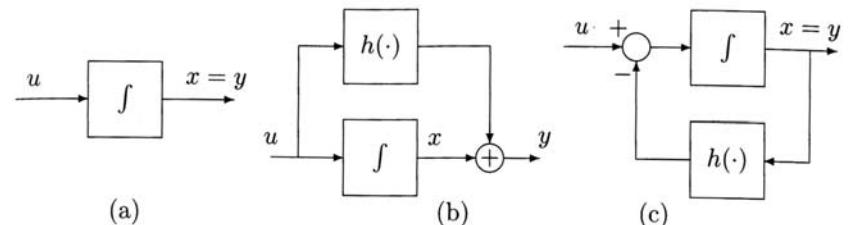


Рис. 6.9. К примеру 6.2

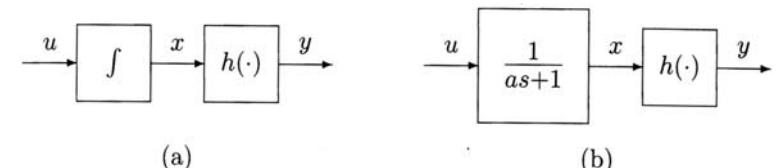


Рис. 6.10. К примеру 6.3

строго пассивной по входу. Если обратная связь по выходу с функцией без памяти охватывает интегратор так, как изображено на рисунке 6.9(c), система принимает вид

$$\dot{x} = -h(x) + u, \quad y = x.$$

В этом случае система является пассивной при обратной связи по выходу, поскольку сигнал в цепи обратной связи может быть погашен сигналом с выхода системы. Используя $V(x) = (1/2)x^2$ в качестве функции запаса, получаем $uy = \dot{V} + yh(y)$. Если $h \in [0, \infty]$, система является пассивной. Если $yh(y) > 0$ для всех $y \neq 0$, система является строго пассивной по входу. \triangle

Пример 6.3. Каскадное соединение интегратора и пассивной функции без памяти, изображенное на рисунке 6.10(a), представимо в виде системы

$$\dot{x} = u, \quad y = h(x).$$

Из пассивности h следует, что $\int_0^x h(\sigma)d\sigma \geq 0$ для всех x . Используя $V(x) = \int_0^x h(\sigma)d\sigma$ в качестве функции запаса, получаем $\dot{V} = h(x)\dot{x} = uy$. Следовательно система является системой без потерь. Предположим теперь, что в системе интегратор заменен на передаточную функцию $1/(as+1)$ с $a > 0$ (см. рисунок 6.10(b)). Тогда система может быть представлена в виде модели состояния

$$a\dot{x} = -x + u, \quad y = h(x).$$

Используя $V(x) = a \int_0^x h(\sigma)d\sigma$ в качестве функции запаса, получаем

$$\dot{V} = h(x)(-x + u) = yu - xh(x) \leq yu$$

Следовательно, система пассивна. Если $xh(x) > 0$ для всех $x \neq 0$, система является строго пассивной. \triangle

6.3. Положительно вещественные передаточные функции

Определение 6.4. Рациональная матричная передаточная функция $G(s)$ размерности $p \times p$ называется положительно вещественной, если

- полюса всех элементов матрицы $G(s)$ расположены в $\text{Re}[s] \leqslant 0$,
- для любой вещественной ω , для которой $j\omega$ не является полюсом какого-либо из элементов матрицы $G(s)$, матрица $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ является положительно полуопределенной, и
- любой чисто мнимый полюс $j\omega$ любого из элементов матрицы $G(s)$ является простым полюсом и матрица вычетов $\lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)G(s)$ является положительно полуопределенной и эрмитовой.

Передаточная функция $G(s)$ называется строго положительно вещественной,¹⁾ если $G(s - \varepsilon)$ является положительно вещественной для некоторой $\varepsilon > 0$.

При $p = 1$ второе условие определения 6.4 сводится к неравенству $\text{Re}[G(j\omega)] \geqslant 0$, $\forall \omega \in R$, которое выполнено в случае, если диаграмма Найквиста для $G(j\omega)$ лежит внутри замкнутой правой половины комплексной плоскости. Это условие, в свою очередь, может быть выполнено только если относительная степень передаточной функции равна нулю или единице.²⁾

В следующей лемме дается альтернативная характеристика строго позитивно вещественных передаточных функций.

Лемма 6.1. Пусть $G(s)$ — рациональная собственная передаточная $[p \times p]$ -матрица. Предположим, что $\det[G(s) + G^T(-s)]$ не равен тождественно нулю.³⁾ Тогда $G(s)$ является строго положительно вещественной, если и только если

- $G(s)$ — гурвицева матрица, т. е. полюса всех ее элементов имеют отрицательные вещественные части;

¹⁾ Существуют различные определения строго положительно вещественной передаточной функции. Эти определения, а также взаимосвязи между ними приведены в работе [206].

²⁾ Относительная степень рациональной передаточной функции $G(s) = n(s)/d(s)$ равна $\deg d - \deg n$. Для собственной передаточной функции относительная степень равна неотрицательному целому числу.

³⁾ Аналогично, $G(s) + G^T(-s)$ имеет нормальный ранг p над полем рациональных функций от s .

- $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ — положительно определенная матрица для всех $\omega \in R$, и
- $G(\infty) + G^T(\infty)$ либо положительно определена,¹⁾ либо положительно полуопределена и $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 M^T [G(j\omega) + G^T(-j\omega)] M$ положительно определена для всех $[p \times (p-q)]$ -матриц M полного ранга, таких что $M^T [G(\infty) + G^T(\infty)] M = 0$, где $q = \text{rank}[G(\infty) + G^T(\infty)]$.

Доказательство: См. приложение C.11.²⁾ \square

Если $G(\infty) + G^T(\infty) = 0$, мы можем положить $M = I$. В скалярном случае ($p = 1$) частотное условие леммы сводится к неравенству $\text{Re}[G(j\omega)] > 0$ для всех $\omega \in R$ и либо $G(\infty) > 0$, либо $G(\infty) = 0$ и $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \text{Re}[G(j\omega)] > 0$.

Пример 6.4. Передаточная функция $G(s) = 1/s$ является положительно вещественной, поскольку она не имеет полюсов в $\text{Re}[s] > 0$, имеет простой полюс в $s = 0$, вычет которого равен 1, и

$$\text{Re}[G(j\omega)] = \text{Re}\left[\frac{1}{j\omega}\right] = 0, \quad \forall \omega \neq 0.$$

Эта функция не является строго положительно вещественной, поскольку $1/(s - \varepsilon)$ имеет полюс в $\text{Re}[s] > 0$ для всех $\varepsilon > 0$. Передаточная функция $G(s) = 1/(s + a)$ с $a > 0$ является положительно вещественной, поскольку она не имеет полюсов в $\text{Re}[s] \geqslant 0$ и

$$\text{Re}[G(j\omega)] = \frac{a}{\omega^2 + a^2} > 0, \quad \forall \omega \in R.$$

Поскольку это равенство выполняется для всех $a > 0$, можно заключить, что для любой $\varepsilon \in (0, a)$ передаточная функция $G(s - \varepsilon) = 1/(s + a - \varepsilon)$ будет положительно вещественной. Следовательно, $G(s) = 1/(s + a)$ — строго положительно вещественная. Аналогичные заключения могут быть получены с использованием леммы 6.1, если заметить, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \text{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega^2 a}{\omega^2 + a^2} = a > 0.$$

¹⁾ Прим. ред. перев. — Значение $G(\infty)$ понимается здесь и далее как предел: $G(\infty) = \lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s)$. Легко показать, что предел существует, поскольку матрица $G(s)$ собственная (ргорег). Матрица рациональных функций называется собственной (ргорег), если степени числителей ее элементов не превосходят степеней соответствующих знаменателей.

²⁾ Прим. ред. перев. — Автор любезно сообщил о неточности в Лемме 6.1, обнаруженной в работе Корлесса и Шортена (M. Corless and R. Shorten): условие « $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 M^T [G(j\omega) + G^T(-j\omega)] M$ положительно определена» из третьего пункта является при $p > 1$ лишь необходимым, но не достаточным. Уточненную формулировку можно извлечь из Теоремы 4 статьи В.А. Якубовича [Д75], см. Дополнение.

Передаточная функция

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

не является положительно вещественной, т.к. ее относительная степень равна двум. Убедиться в этом можно, если вычислить

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{1 - \omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} < 0, \forall |\omega| > 1.$$

Рассмотрим передаточную (2×2) -матрицу

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В этом случае мы не можем применить лемму 6.1, т.к. $\det[G(s) + G^T(-s)] \equiv 0 \forall s$. Однако, проверив условия в определении 6.4, можно заключить, что $G(s)$ является строго положительно вещественной. Заметим, что при $\varepsilon < 1$ полюсы элементов матрицы $G(s - \varepsilon)$ расположены в $\operatorname{Re}[s] < 0$ и матрица

$$G(j\omega - \varepsilon) + G^T(-j\omega - \varepsilon) = \frac{2(1 - \varepsilon)}{\omega^2 + (1 - \varepsilon)^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

является положительно полуопределенной для всех $\omega \in R$. Аналогично можно показать, что 2×2 передаточная матрица

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & 2s+1 \end{bmatrix}$$

является строго положительно вещественной. Однако в этом случае $\det[G(s) + G^T(-s)]$ не равен тождественно нулю. Поэтому мы можем применить лемму 6.1 и прийти к тому же заключению, что и ранее, если принять во внимание то, что матрица $G(\infty) + G^T(\infty)$ положительно определена, а также то, что

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 1} \begin{bmatrix} \omega^2 + 1 & -j\omega \\ j\omega & 2\omega^2 + 1 \end{bmatrix}$$

положительно определена для всех $\omega \in R$. Наконец, для передаточной (2×2) -матрицы

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{-1}{s+2} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}$$

справедливо равенство

$$G(\infty) + G^T(\infty) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega) = \begin{bmatrix} \frac{2(2+\omega^2)}{1+\omega^2} & \frac{-2j\omega}{4+\omega^2} \\ \frac{2j\omega}{4+\omega^2} & \frac{4}{1+\omega^2} \end{bmatrix}$$

является положительно определенной для всех $\omega \in R$. Полагая $M^T = [0 \ 1]$, можно показать, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 M^T [G(j\omega) + G^T(-j\omega)] M = 4.$$

Следовательно, из леммы 6.1 можно заключить, что $G(s)$ является строго положительно вещественной. \triangle

Свойства пассивности положительно вещественных передаточных функций могут быть охарактеризованы с использованием следующих двух лемм, известных в литературе соответственно как **лемма о положительной вещественности** и **лемма Калмана–Якубовича–Попова**.

¹⁾ Эти леммы позволяют получить для передаточных функций алгебраическое описание свойств положительной вещественности и строгой положительной вещественности.

Лемма 6.2 (о положительной вещественности). Пусть $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ — передаточная $(p \times p)$ -матрица, где пары (A, B) и (A, C) являются соответственно управляемой и наблюдаемой. Тогда $G(s)$ является положительно вещественной, если и только если существуют матрицы $P = P^T > 0$, L и W , такие что

$$PA + A^T P = -L^T L \quad (6.11)$$

$$PB = C^T - L^T W \quad (6.12)$$

$$W^T W = D + D^T \quad (6.13)$$

Доказательство: См. приложение С.12. \square

Лемма 6.3 (лемма Калмана–Якубовича–Попова). Пусть $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ — передаточная $p \times p$ -матрица, где пары (A, B) и (A, C) являются соответственно управляемой и наблюдаемой. Тогда $G(s)$ является строго положительно вещественной, если и только если существуют матрицы $P = P^T > 0$, L и W , а также положительная константа ε , такие что

$$PA + A^T P = -L^T L - \varepsilon P \quad (6.14)$$

$$PB = C^T - L^T W \quad (6.15)$$

$$W^T W = D + D^T \quad (6.16)$$

¹⁾ Прим. ред. перев. — Леммы 6.2 и 6.3 являются частными случаями более общих утверждений, доказанных для систем со скалярным входом В.А. Якубовичем в 1962 г., а для систем с векторным входом независимо В.А. Якубовичем и В.М. Поповым в 1964 г. Р.Калман уточнил эти утверждения в 1963 году. Подробнее см. [Д26].

Доказательство: Предположим, что существуют $P = P^T > 0$, L , W и $\varepsilon > 0$, такие что выполнены равенства (6.14)–(6.16). Положим $\mu = \varepsilon/2$. Тогда с учетом того, что $G(s - \mu) = C(sI - \mu I - A)^{-1}B + D$, из (6.14) имеем

$$P(A + \mu I) + (A + \mu I)^T P = -L^T L. \quad (6.17)$$

Из леммы 6.2 следует, что $G(s - \mu)$ является положительно вещественной. Следовательно, $G(s)$ — строго положительно вещественная. С другой стороны, предположим, что $G(s)$ является строго положительно вещественной. Существует $\mu > 0$, такая что $G(s - \mu)$ является положительно вещественной. Из леммы 6.2 следует, что существуют матрицы $P = P^T > 0$, L и W , удовлетворяющие равенствам (6.15)–(6.17). Полагая $\varepsilon = 2\mu$, можно показать, что P , L , W и ε удовлетворяют равенствам (6.14)–(6.16). \square

Лемма 6.4. Минимальная реализация линейной не зависящей от времени системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

если $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ является

- пассивной, если $G(s)$ является положительно вещественной;
- строго пассивной, если $G(s)$ является строго положительно вещественной.

Доказательство: Используя $V(x) = (1/2)x^T Px$ в качестве функции запаса, получаем

$$\begin{aligned} u^T y - \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + Bu) &= u^T(Cx + Du) - x^T P(Ax + Bu) = \\ &= u^T Cx + \frac{1}{2}u^T(D + D^T)u - \frac{1}{2}x^T(PA + A^T P)x - x^T PBu = \\ &= u^T(B^T P + W^T L)x + \frac{1}{2}u^T W^T W u + \\ &\quad + \frac{1}{2}x^T L^T Lx + \frac{1}{2}\varepsilon x^T Px - x^T PBu = \\ &= \frac{1}{2}(Lx + Wu)^T(Lx + Wu) + \frac{1}{2}\varepsilon x^T Px \geq \frac{1}{2}\varepsilon x^T Px. \end{aligned}$$

Используя лемму 6.2 и выбирая $\varepsilon = 0$, заключаем, что система пассивна. Аналогично, используя лемму 6.3 и выбирая $\varepsilon > 0$, заключаем, что система строго пассивна. \square

6.4. \mathcal{L}_2 -устойчивость и устойчивость по Ляпунову

В этом параграфе мы исследуем \mathcal{L}_2 -устойчивость и устойчивость по Ляпунову пассивных систем вида

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (6.18)$$

$$y = h(x, u) \quad (6.19)$$

где $f : R^n \times R^p \rightarrow R^n$ — локально липшицева функция, $h : R^n \times R^p \rightarrow R^p$ — непрерывная функция, $f(0, 0) = 0$ и $h(0, 0) = 0$.

Лемма 6.5. Если система (6.18)–(6.19) является строго пассивной по выходу $y \geq \dot{V} + \delta y^T y$ для некоторой $\delta > 0$, то она является \mathcal{L}_2 -устойчивой с конечным коэффициентом усиления, величина которого меньше либо равна $1/\delta$.

Доказательство: Производная функции запаса $V(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq u^T y - \delta y^T y = -\frac{1}{2\delta}(u - \delta y)^T(u - \delta y) + \frac{1}{2\delta}u^T u - \frac{\delta}{2}y^T y \leq \\ &\leq \frac{1}{2\delta}u^T u - \frac{\delta}{2}y^T y. \end{aligned}$$

Интегрируя левую и правую части этого неравенства на промежутке $[0, \tau]$, получаем

$$\int_0^\tau y^T(t)y(t)dt \leq \frac{1}{\delta^2} \int_0^\tau u^T(t)u(t)dt - \frac{2}{\delta}[V(x(\tau)) - V(x(0))].$$

Тогда

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_2} \leq \frac{1}{\delta}\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_2} + \sqrt{\frac{2}{\delta}V(x(0))},$$

т. к. $V(x) \geq 0$ и $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$ для неотрицательных чисел a and b . \square

Лемма 6.6. Если система (6.18)–(6.19) является пассивной с положительно определенной функцией запаса $V(x)$, то начало координат системы $\dot{x} = f(x, 0)$ устойчиво.

Доказательство: Рассмотрим V в качестве кандидата на роль функции Ляпунова для системы $\dot{x} = f(x, 0)$. Тогда $\dot{V} \leq 0$. \square

Для того, чтобы установить свойство асимптотической устойчивости начала координат системы $\dot{x} = f(x, 0)$, мы должны либо показать, что функция \dot{V} является отрицательно определенной, либо воспользоваться принципом инвариантности. В нижеследующей лемме будет применен принцип инвариантности в случае, когда $\dot{V} = 0$ при $y = 0$, а также при дополнительном требовании на решения (6.18) при $u = 0$

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0. \quad (6.20)$$

Эквивалентным требованием может быть то, что ни одно из решений $\dot{x} = f(x, 0)$, за исключением тривиального решения $x(t) \equiv 0$, не может постоянно оставаться в $S = \{x \in R^n \mid h(x, 0) = 0\}$. Свойство (6.20) может быть интерпретировано как условие наблюдаемости. Напомним, что для линейной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$$

свойство наблюдаемости эквивалентно

$$y(t) = Ce^{At}x(0) \equiv 0 \Leftrightarrow x(0) = 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv 0.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать требование (6.20) в качестве условия наблюдаемости системы.

Определение 6.5. Система (6.18)–(6.19) называется наблюдаемой в нулевом состоянии (*zero-state observable*), если ни одно из решений $\dot{x} = f(x, 0)$, за исключением тривиального решения $x(t) \equiv 0$, не может постоянно оставаться в $S = \{x \in R^n \mid h(x, 0) = 0\}$

Лемма 6.7. Рассмотрим систему (6.18)–(6.19). Начало координат системы $\dot{x} = f(x, 0)$ является асимптотически устойчивым, если система является

- строго пассивной, или
- строго пассивной по выходу и наблюдаемой в нулевом состоянии.

Кроме того, если функция запаса радиально неограничена, то начало координат является глобально асимптотически устойчивым.

Доказательство: Предположим, что система является строго пассивной и функция $V(x)$ является ее функцией запаса. Тогда при $u = 0$, \dot{V} удовлетворяет неравенству $\dot{V} \leq -\psi(x)$, где $\psi(x)$ — положительно определенная. Это неравенство может быть использовано для доказательства положительной определенности функции $V(x)$. В частности, для всех $x \in R^n$ уравнение $\dot{x} = f(x, 0)$ имеет решение $\phi(t; x)$, начинающееся в точке x в момент времени $t = 0$ и определенное на некотором интервале $[0, \delta]$. Интегрируя неравенство $\dot{V} \leq -\psi(x)$, получаем

$$V(\phi(\tau, x)) - V(x) \leq - \int_0^\tau \psi(\phi(t; x)) dt, \quad \forall \tau \in [0, \delta].$$

С учетом того, что $V(\phi(\tau, x)) \geq 0$, имеем

$$V(x) \geq \int_0^\tau \psi(\phi(t; x)) dt.$$

Предположим теперь, что существует точка $\bar{x} \neq 0$, такая что $V(\bar{x}) = 0$. Из предыдущего неравенства следует

$$\int_0^\tau \psi(\phi(t; \bar{x})) dt = 0, \quad \forall \tau \in [0, \delta] \Rightarrow \psi(\phi(t; \bar{x})) \equiv 0 \Rightarrow \phi(t; \bar{x}) \equiv 0 \Rightarrow \bar{x} = 0,$$

что противоречит исходному предположению $\bar{x} \neq 0$. Таким образом, $V(x) > 0$ для всех $x \neq 0$. Следовательно эта функция может рассматриваться в качестве функции Ляпунова. Поскольку $V(x) \leq -\psi(x)$, начало координат асимптотически устойчиво.

Предположим теперь, что система является строго пассивной по выходу и предположим, что $V(x)$ — ее функция запаса. Тогда при $u = 0$, \dot{V} удовлетворяет неравенству $\dot{V} \leq -y^T \rho(y)$, где $y^T \rho(y) > 0$ для всех $y \neq 0$. Рассуждая аналогично тому, как это было сделано выше, мы можем использовать это неравенство для доказательства положительной определенности функции $V(x)$. В частности, для всех $x \in R^n$ имеем

$$V(x) \geq \int_0^\tau h^T(\phi(t; x), 0) \rho(h(\phi(t; x), 0)) dt.$$

Предположим теперь, что существует точка $\bar{x} \neq 0$, такая что $V(\bar{x}) = 0$. Из предыдущего неравенства следует, что

$$\int_0^\tau h^T(\phi(t; \bar{x}), 0) \rho(h(\phi(t; \bar{x}), 0)) dt = 0, \quad \forall \tau \in [0, \delta] \Rightarrow h(\phi(t; \bar{x}), 0) \equiv 0,$$

что в условиях наблюдаемости системы в нулевом состоянии влечет

$$\phi(t; \bar{x}) \equiv 0 \Rightarrow \bar{x} = 0.$$

Следовательно, $V(x) > 0$ для всех $x \neq 0$, т. е. $V(x)$ может рассматриваться в качестве функции Ляпунова. Поскольку $\dot{V}(x) \leq -y^T \rho(y)$ и $y(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$, мы заключаем с использованием принципа инвариантности, что начало координат асимптотически устойчиво. Наконец, если $V(x)$ радиально неограничена, то начало координат глобально асимптотически устойчиво по теореме 4.2 и следствию 4.2. \square

Пример 6.5. Рассмотрим систему с p входами и r выходами¹⁾

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

где f и G — локально липшицевы функции, h — непрерывная функция, $f(0) = 0$ и $h(0) = 0$. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая положительно полуопределенная функция $V(x)$, такая что

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} G(x) = h^T(x).$$

Тогда справедливо равенство

$$u^T y - \frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + G(x)u] = u^T h(x) - \frac{\partial V}{\partial x} f(x) - h^T(x)u = -\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \geq 0,$$

из которого следует, что система пассивна. Если $V(x)$ является положительно определенной, то начало координат системы $\dot{x} = f(x)$ является

¹⁾ L_2 -устойчивость этой системы исследовалась в примерах 5.9. и 5.10.

устойчивым. При выполнении для некоторого $k > 0$ более сильного условия

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq -k h^T(x) h(x), \quad \frac{\partial V}{\partial x} G(x) = h^T(x)$$

получаем

$$u^T y - \frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + G(x)u] \geq k y^T y$$

и система является строго пассивной по выходу с $\rho(y) = ky$. Из леммы 6.54 следует, что система является L_2 -устойчивой с конечным коэффициентом усиления, значение которого меньше либо равно $1/k$. Если, кроме того, система является наблюдаемой в нулевом начальном состоянии, то начало координат системы $\dot{x} = f(x)$ является асимптотически устойчивым. Более того, если $V(x)$ радиально неограничена, начало координат является глобально асимптотически устойчивым. \triangle

Пример 6.6. Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом¹⁾

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_1^3 - kx_2 + u \\ y &= x_2\end{aligned}$$

где a и k — некоторые положительные константы. Рассмотрим также положительно определенную и радиально неограниченную функцию $V(x) = (1/4)ax_1^4 + (1/2)x_2^2$ в качестве кандидата на роль функции запаса рассматриваемой системы. Производная \dot{V} определяется равенством

$$\dot{V} = ax_1^3 x_2 + x_2(-ax_1^3 - kx_2 + u) = -ky^2 + yu.$$

Легко видеть, что система является строго пассивной по выходу с $\rho(y) = ky$. Из леммы 6.5. следует, что система L_2 -устойчива с конечным коэффициентом усиления, значение которого меньше либо равно $1/k$. Более того, при $u = 0$

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow ax_1^3(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0.$$

Следовательно, система является наблюдаемой в нулевом состоянии. Из леммы 6.7 следует, что свободная система глобально асимптотически устойчива. \triangle

6.5. Системы с обратной связью: теоремы о пассивности

Рассмотрим соединение систем с обратной связью (см. рисунок 6.11), состоящее из двух подсистем H_1 и H_2 , каждая из которых

¹⁾ Свойства L_2 -устойчивости и устойчивости по Ляпунову этой системы исследовались в примерах 5.8. и 4.9.

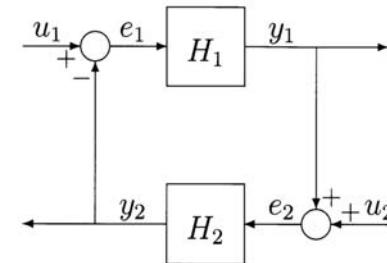


Рис. 6.11. Соединение систем с обратной связью

может быть либо не зависящей от времени динамической системой, представленной в виде модели состояния

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, e_i) \quad (6.21)$$

$$y_i = h_i(x_i, e_i) \quad (6.22)$$

либо функцией без памяти (возможно зависящей от времени)

$$y_i = h_i(t, e_i). \quad (6.23)$$

Заметим, что вектора u_1 , y_1 , u_2 и y_2 могут иметь одинаковые размерности. Нас интересует вопрос о том, как знание свойств пассивности этих двух компонент H_1 и H_2 , может быть использовано для анализа свойств устойчивости соединения систем с обратной связью. Далее будут исследованы свойства L_2 -устойчивости и устойчивости по Ляпунову в предположении, что это соединение систем имеет корректно определенную модель состояния. В случае, когда компоненты H_1 и H_2 представляют собой динамические системы, модель состояния замкнутой системы принимает вид

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (6.24)$$

$$y = h(x, u) \quad (6.25)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Мы будем предполагать, что f — локально липшицева функция, h — непрерывная функция, $f(0, 0) = 0$ и $h(0, 0) = 0$. Легко видеть, что соединение систем с обратной связью будет иметь корректно определенную модель состояния, если уравнения

$$e_1 = u_1 - h_2(x_2, e_2) \quad (6.26)$$

$$e_2 = u_2 + h_1(x_1, e_1) \quad (6.27)$$

имеют единственное решение (e_1, e_2) для всех (x_1, x_2, u_1, u_2) . Выполнение равенств $f(0, 0) = 0$ и $h(0, 0) = 0$ следует из $f_i(0, 0) = 0$ и

$h_i(0, 0) = 0$. Очевидно, что (6.26) и (6.27) всегда имеют единственное решение, если h_1 независима от e_1 или если h_2 независима от e_2 . В этих случаях функции f и h замкнутой модели состояния наследуют свойства гладкости, присущие функциям f_i и h_i компонент соединения систем с обратной связью. В частности, если f_i и h_i являются локально липшицевыми, то этим свойством обладают и функции f и h . В случае линейных систем требование независимости h_i от e_i эквивалентно тому, что передаточная функция H_i является строго собственной.¹⁾

В случае, если одна из компонент, скажем H_1 , является динамической системой, а другая компонента — функцией без памяти, замкнутая модель состояния принимает следующий вид:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (6.28)$$

$$y = h(t, x, u) \quad (6.29)$$

где

$$x = x_1, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Мы будем предполагать, что функция f является кусочно-непрерывной по t и локально липшицевой по (x, u) и что h является кусочно-непрерывной по t и непрерывной по (x, u) , $f(t, 0, 0) = 0$ и $h(t, 0, 0) = 0$.

Соединение систем будет иметь корректно определенную модель состояний, если уравнения

$$e_1 = u_1 - h_2(t, e_2) \quad (6.30)$$

$$e_2 = u_2 + h_1(x_1, e_1) \quad (6.31)$$

имеют единственное решение (e_1, e_2) для всех (x_1, t, u_1, u_2) . Это требование будет выполнено, если h_1 независима от e_1 . Результаты для случая, когда оба компонента соединения систем являются функциями без памяти, следуют тривиальным образом из случая отсутствия в системе состояния x , т. е. когда соединение систем представлено равенством $y = h(t, u)$.

Нижеследующее фундаментальное свойство является стартовой точкой нашего анализа рассматриваемой ситуации.

Теорема 6.1. Соединение двух пассивных подсистем пассивно.

Доказательство: Пусть $V_1(x_1)$ и $V_2(x_2)$ — функции запаса для H_1 и H_2 . Если одна из компонент является функцией без памяти, положим $V_i = 0$. Тогда

$$e_i^T y_i \geq \dot{V}_i.$$

Из рисунка 6.11 видно, что

$$e_1^T y_1 + e_2^T y_2 = (u_1 - y_2)^T y_1 + (u_2 + y_1)^T y_2 = u_1^T y_1 + u_2^T y_2.$$

¹⁾ Вопрос существования решений (6.26) и (6.27) будет рассмотрен в примере 6.12.

Следовательно,

$$u^T y = u_1^T y_1 + u_2^T y_2 \geq \dot{V}_1 + \dot{V}_2.$$

Рассматривая $V(x) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$ в качестве функции запаса для соединения систем, получаем

$$u^T y \geq \dot{V}.$$

□

Используя теорему 6.1 и результаты из предыдущего параграфа о свойствах устойчивости пассивных систем, мы можем непосредственно получить результаты, касающиеся свойств устойчивости соединения систем. Начнем со случая L_2 -устойчивости. Следующая лемма является прямым следствием леммы 6.5.

Лемма 6.8. Соединение систем, состоящее из двух строго пассивных по выходу подсистем с

$$e_i^T y_i \geq \dot{V}_i + \delta_i y_i^T y_i, \quad \delta_i > 0,$$

является L_2 -устойчивым с конечным коэффициентом усиления, значение которого меньше либо равно $1/\min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Доказательство: При $V = V_1 + V_2$ и $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ имеем

$$\begin{aligned} u^T y &= e_1^T y_1 + e_2^T y_2 \geq \dot{V}_1 + \delta_1 y_1^T y_1 + \dot{V}_2 + \delta_2 y_2^T y_2 \geq \\ &\geq \dot{V} + \delta(y_1^T y_1 + y_2^T y_2) = \dot{V} + \delta y^T y. \end{aligned}$$

□

Вспоминая доказательство леммы 6.5, можно заметить, что мы используем неравенство

$$u^T y \geq \dot{V} + \delta y^T y \quad (6.32)$$

для получения неравенства

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2\delta} u^T u - \frac{\delta}{2} y^T y, \quad (6.33)$$

которое, в свою очередь, используется для доказательства L_2 -устойчивости рассматриваемой системы. В лемме 6.8 мы доказали справедливость (6.32) для соединения систем и показали, что выполнено неравенство (6.33). Однако, даже если для соединения систем неравенство (6.32) несправедливо, тем не менее оказывается возможным получить неравенство, по форме совпадающее с неравенством (6.33). Эта идея используется в следующей теореме, в которой доказывается более общий результат, включающий результаты леммы 6.8 в качестве частного случая.

Теорема 6.2. Рассмотрим соединение систем, изображенное на рисунке 6.11, и предположим, что каждая из ее подсистем удовлетворяет неравенству

$$e_i^T y_i \geq \dot{V}_i + \varepsilon_i e_i^T e_i + \delta_i y_i^T y_i, \quad i = 1, 2 \quad (6.34)$$

для некоторой функции запаса $V_i(x_i)$. Тогда отображение $u \mapsto y$ для замкнутой системы является \mathcal{L}_2 -устойчивым с конечным коэффициентом усиления, если

$$\varepsilon_1 + \delta_2 > 0 \quad u \quad \varepsilon_2 + \delta_1 > 0 \quad (6.35)$$

Доказательство: Суммируя неравенства (6.34) при $i = 1, 2$ и учитывая

$$\begin{aligned} e_1^T y_1 + e_2^T y_2 &= u_1^T y_1 + u_2^T y_2 \\ e_1^T e_1 &= u_1^T u_1 - 2u_1^T y_2 + y_2^T y_2 \\ e_2^T e_2 &= u_2^T u_2 + 2u_2^T y_1 + y_1^T y_1 \end{aligned}$$

получаем

$$\dot{V} \leq -y^T Ly - u^T Mu + u^T Ny$$

где

$$\begin{aligned} L &= \begin{bmatrix} (\varepsilon_2 + \delta_1)I & 0 \\ 0 & (\varepsilon_1 + \delta_2)I \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 I & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 I \end{bmatrix}, \\ N &= \begin{bmatrix} I & 2\varepsilon_1 I \\ -2\varepsilon_2 I & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и $V(x) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$. Положим $a = \min\{\varepsilon_2 + \delta_1, \varepsilon_1 + \delta_2\} > 0$, $b = \|N\|_2 \geq 0$ и $c = \|M\|_2 \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -a\|y\|_2^2 + b\|u\|_2\|y\|_2 + c\|u\|_2^2 = \\ &= -\frac{1}{2a}(b\|u\|_2 - a\|y\|_2)^2 + \frac{b^2}{2a}\|u\|_2^2 - \frac{a}{2}\|y\|_2^2 + c\|u\|_2^2 \leq \\ &\leq \frac{k^2}{2a}\|u\|_2^2 - \frac{a}{2}\|y\|_2^2, \end{aligned}$$

где $k^2 = b^2 + 2ac$. Интегрируя на промежутке $[0, \tau]$, и вычисляя квадратный корень с учетом того, что $V(x) \geq 0$, получаем оценку

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_2} \leq \frac{k}{a}\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_2} + \sqrt{2V(x(0))/a},$$

из которой следует утверждение теоремы. \square

Теорема 6.2 сводится к лемме 6.8 в случае, если неравенство (6.34) выполнено с константами $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$. Однако условия (6.35) могут быть выполнены и в других случаях. Например, они выполняются, если обе подсистемы H_1 и H_2 являются строго пассивными по входу и $e_i^T y_i \geq V_i + \varepsilon_i u_i^T u_i$ при некоторой константе $\varepsilon_i > 0$. Оно также справедливо, если одна из подсистем, скажем H_1 , является пассивной, а другая удовлетворяет (6.34) с положительными константами ε_2 и δ_2 . Более того, неравенства (6.35) могут выполняться даже если константы ε_i или δ_i отрицательны. Например, отрицательная константа ε_1 может быть компенсирована положительной константой δ_2 . В этом случае недостаток пассивности (во входном контуре) подсистемы H_1

компенсируется избытком пассивности (в выходном контуре) подсистемы H_2 . Аналогично отрицательная δ_2 может быть компенсирована положительной ε_1 . В этом случае недостаток пассивности (в выходном контуре) подсистемы H_2 компенсируется избытком пассивности (во входном контуре) подсистемы H_1 .

Пример 6.7. Рассмотрим соединение систем с обратной связью с подсистемами

$$H_1 : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)e_1 \\ y_1 = h(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad H_2 : y_2 = ke_2,$$

где $k > 0$ и $e_i, y_i \in R^p$. Предположим, что существует положительно определенная функция $V_1(x)$, такая что

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} f(x) \leq 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} G(x) = h^T(x), \quad \forall x \in R^n.$$

Обе подсистемы пассивны. Более того, H_2 удовлетворяет

$$e_2^T y_2 = ke_2^T e_2 = \gamma k e_2^T e_2 + \frac{(1-\gamma)}{k} y_2^T y_2, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Таким образом, неравенство (6.34) выполнено с константами $\varepsilon_1 = \delta_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \gamma k$ и $\delta_2 = (1-\gamma)/k$. Из этого следует, что условия (6.35) выполнены, и мы можем заключить, что для замкнутой системы отображение вход-выход $u \mapsto y$ является \mathcal{L}_2 -устойчивым с конечным коэффициентом усиления. \triangle

Пример 6.8. Рассмотрим соединение систем с обратной связью для подсистем

$$H_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_1^3 - \sigma(x_2) + e_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad H_2 : y_2 = ke_2,$$

где $\sigma \in [-\alpha, \infty]$, $a > 0$, $\alpha > 0$ и $k > 0$. Если σ принадлежит сектору $[0, \infty]$, можно показать, что H_1 пассивна с функцией запаса $V_1(x) = (a/4)x_1^4 + (1/2)x_2^2$. В случае, если $\sigma \in [-\alpha, \infty]$, мы имеем

$$\dot{V}_1 = ax_1^3 x_2 - ax_1^3 x_2 - x_2 \sigma(x_2) + x_2 e_1 \leq \alpha x_2^2 + x_2 e_1 = \alpha y_1^2 + y_1 e_1.$$

Следовательно, неравенство (6.34) выполнено для подсистемы H_1 с константами $\varepsilon_1 = 0$ и $\delta_1 = -\alpha$. Поскольку

$$e_2 y_2 = ke_2^2 = \gamma k e_2^2 + \frac{(1-\gamma)}{k} y_2^2, \quad 0 < \gamma < 1,$$

неравенство (6.34) выполнено для подсистемы H_2 с константами $\varepsilon_2 = \gamma k$ и $\delta_2 = (1-\gamma)/k$. Если $k > \alpha$, можно выбрать γ так, чтобы $\gamma k > \alpha$. Тогда $\varepsilon_1 + \delta_2 > 0$ и $\varepsilon_2 + \delta_1 > 0$. Таким образом, можно заключить, что отображение вход-выход $u \mapsto y$ является \mathcal{L}_2 -устойчивым с конечным коэффициентом усиления. \triangle

Обратимся к исследованию свойства устойчивости по Ляпунову для соединения систем с обратной связью. Нас интересует вопрос устойчивости и асимптотической устойчивости начала координат замкнутой системы при нулевом входе $u = 0$. Устойчивость начала координат непосредственно следует из теоремы 6.1 и леммы 6.6. Поэтому мы сосредоточим наше внимание на исследовании асимптотической устойчивости. Следующая теорема представляет собой прямое следствие теоремы 6.1 и леммы 6.7.

Теорема 6.3. *Рассмотрим соединение систем, состоящее из двух не зависящих от времени динамических подсистем вида (6.21)–(6.22). Начало координат замкнутой системы (6.24) (при $u = 0$) является асимптотически устойчивым, если*

- обе подсистемы строго пассивны,
- обе подсистемы строго пассивны по выходу и наблюдаемы в нулевом состоянии, или
- одна из подсистем строго пассивна, а другая – строго пассивна по выходу и наблюдаема в нулевом состоянии.

Кроме того, если функции запаса обеих подсистем являются радиально неограниченными, то начало координат глобально асимптотически устойчиво.

Доказательство: Пусть $V_1(x_1)$ и $V_2(x_2)$ – функции запаса для H_1 и H_2 , соответственно. Как и при доказательстве леммы 6.7, мы можем показать, что $V_1(x_1)$ и $V_2(x_2)$ являются положительно определенными функциями. Рассмотрим $V(x) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$ в качестве функции Ляпунова для замкнутой системы. В первом случае, производная \dot{V} удовлетворяет

$$\dot{V} \leq u^T y - \psi_1(x_1) - \psi_2(x_2) = -\psi_1(x_1) - \psi_2(x_2),$$

поскольку $u = 0$. Следовательно, начало координат является асимптотически устойчивым. Во втором случае

$$\dot{V} \leq -y_1^T \rho_1(y_1) - y_2^T \rho_2(y_2),$$

где $y_i^T \rho_i(y_i) > 0$ для всех $y_i \neq 0$. В этом случае функция \dot{V} является отрицательно полуопределенной и $\dot{V} = 0 \Rightarrow y = 0$. Для того, чтобы применить принцип инвариантности, мы должны показать, что $y(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{y}(t) \equiv 0$. Заметим, что $y_2(t) \equiv 0 \Rightarrow e_1(t) \equiv 0$. Тогда из наблюдаемости с нулевым начальным состоянием подсистемы H_1 следует, что $y_1(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$. Аналогично, $y_1(t) \equiv 0 \Rightarrow e_2(t) \equiv 0$ и из наблюдаемости с нулевым начальным состоянием подсистемы H_2 следует, что $y_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) \equiv 0$. Таким образом, начало координат асимптотически устойчиво. В третьем случае (со строго пассивной подсистемой H_1), имеем

$$\dot{V} \leq -\psi_1(x_1) - y_2^T \rho_2(y_2)$$

и из $\dot{V} = 0$ следует, что $x_1 = 0$ и $y_2 = 0$. Заметим, что $y_2(t) \equiv 0 \Rightarrow e_1(t) \equiv 0$, что с учетом $x_1(t) \equiv 0$ влечет $y_1(t) \equiv 0$. Следовательно,

$e_2(t) \equiv 0$ и из наблюдаемости с нулевым начальным состоянием подсистемы H_2 следует, что $y_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) \equiv 0$. Таким образом, начало координат асимптотически устойчиво. Наконец, если $V_1(x_1)$ и $V_2(x_2)$ являются радиально неограниченными, то $V(x)$ также обладает этим свойством и начало координат является глобально асимптотически устойчивым. \square

В представленном доказательстве используется простая идея, заключающаяся в использовании суммы функций запаса для подсистем соединения систем в качестве функции Ляпунова для этой системы. Оставшаяся часть доказательства представляет собой стандартную процедуру анализа системы с использованием методологии Ляпунова. В действительности выполненный анализ представляется слишком ограничительным, поскольку для доказательства выполнения неравенства $\dot{V} = V_1 + \dot{V}_2 \leq 0$ мы потребовали, чтобы $\dot{V}_1 \leq 0$ и $\dot{V}_2 \leq 0$. Очевидно, что это требование чрезмерно жесткое, поскольку возможна ситуация, когда один из членов этой суммы, скажем \dot{V}_1 , является положительным на некоторой области, но сумма этих двух членов остается отрицательной $\dot{V} \leq 0$ на той же области. Это соотносится с идеей о том, что недостаток пассивности одной из подсистем может быть компенсирован избытком пассивности другой подсистемы. Эта идея используется в примерах 6.10 и 6.11, в то время как пример 6.9 представляет собой непосредственное применение теоремы 6.3.

Пример 6.9. Рассмотрим соединение подсистем

$$H_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_1^3 - kx_2 + e_1 \\ y_1 = x_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad H_2 : \begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -bx_3 - x_4^3 + e_2 \\ y_2 = x_4 \end{cases}$$

где a , b и k – положительные константы. Используя $V_1 = (a/4)x_1^4 + (1/2)x_2^2$ в качестве функции запаса для H_1 , получаем

$$\dot{V}_1 = ax_1^3 x_2 - ax_1^3 x_2 - kx_2^2 + x_2 e_1 = -ky_1^2 + y_1 e_1.$$

Следовательно, H_1 строго пассивна по выходу. Кроме того, при $e_1 = 0$ имеем

$$y_1(t) \equiv 0 \Leftrightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0,$$

т. е. H_1 является наблюдаемой с нулевым начальным состоянием. Используя $V_2 = (b/2)x_3^2 + (1/2)x_4^2$ в качестве функции запаса для H_2 , получаем

$$\dot{V}_2 = bx_3 x_4 - bx_3 x_4 - x_4^4 + x_4 e_2 = -y_2^4 + y_2 e_2.$$

Таким образом, H_2 строго пассивна по выходу. Кроме того, при $e_2 = 0$, имеем

$$y_2(t) \equiv 0 \Leftrightarrow x_4(t) \equiv 0 \Rightarrow x_3(t) \equiv 0,$$

т. е. H_2 является наблюдаемой с нулевым начальным состоянием. Таким образом, рассматриваемый пример соответствует второму случаю из

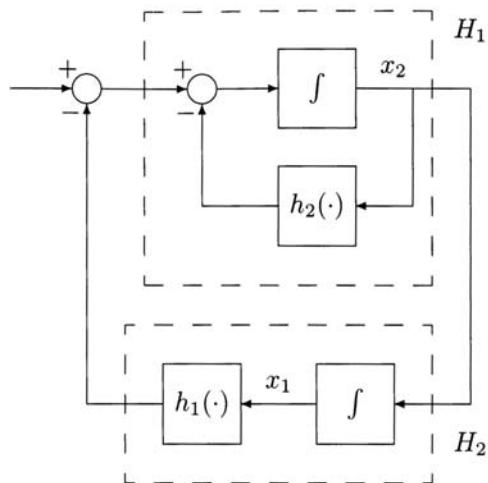


Рис. 6.12. К примеру 6.11

теоремы 6.3 и с учетом того, что функции V_1 и V_2 являются радиально неограниченными, мы можем заключить, что начало координат глобально асимптотически устойчиво. \triangle

Пример 6.10. Рассмотрим соединение систем с обратной связью из предыдущего примера, но в качестве выхода подсистемы H_1 выберем $y_1 = x_2 + e_1$. Из равенства

$$\dot{V}_1 = -kx_2^2 + x_2e_1 = -k(y_1 - e_1)^2 - e_1^2 + y_1e_1$$

видно, что H_1 пассивна, но сделать определенного заключения о строгой пассивности или строгой пассивности этой подсистемы невозможно. Поэтому мы не можем применить теорему 6.3. Используя

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{4}ax_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}bx_3^2 + \frac{1}{2}x_4^2$$

в качестве функции Ляпунова для замкнутой системы, получаем

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -kx_2^2 + x_2e_1 - x_4^4 + x_4e_2 = \\ &= -kx_2^2 - x_2x_4 - x_4^4 + x_4(x_2 - x_4) = \\ &= -kx_2^2 - x_4^4 - x_4^2 \leqslant 0.\end{aligned}$$

Более того, из равенства $\dot{V} = 0$ следует, что $x_2 = x_4 = 0$ и

$$\begin{aligned}x_2(t) \equiv 0 &\Rightarrow ax_1^3(t) - x_4(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0, \\ x_4(t) \equiv 0 &\Rightarrow -bx_3(t) + x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_3(t) \equiv 0.\end{aligned}$$

Таким образом, используя принцип инвариантности и учитывая тот факт, что функция V радиально неограничена, можно заключить, что начало координат глобально асимптотически устойчиво. \triangle

Пример 6.11. Рассмотрим систему из примеров 4.8 и 4.9

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h_1(x_1) - h_2(x_2),\end{aligned}$$

где h_1 и h_2 — локально липшицевы функции, принадлежащие сектору $(0, \infty)$. Эта система может рассматриваться как модель состояния системы, изображенной на рисунке 6.12, где H_1 представляет собой интегратор для x_2 с отрицательной обратной связью h_2 , а H_2 является каскадным соединением интегратора для x_1 и h_1 . В примере 6.2 мы видели, что H_1 является строго пассивной по выходу с функцией запаса $V_1 = (1/2)x_2^2$; в примере 6.3, было показано, что H_2 является подсистемой без потерь с функцией запаса $V_2 = \int_0^{x_1} h_1(\sigma)d\sigma$. В этом случае мы не можем применить теорему 6.3, поскольку H_2 не является строго пассивной или строго пассивной по выходу. Однако, используя $V = V_1 + V_2 = \int_0^{x_1} h_1(\sigma)d\sigma + (1/2)x_2^2$ в качестве функции Ляпунова, мы можем исследовать систему на предмет асимптотической устойчивости начала координат. Этот анализ был выполнен в примерах 4.8 и 4.9, где было показано, что начало координат асимптотически устойчиво; глобальная асимптотическая устойчивость будет иметь место, если $\int_0^y h_1(z)dz \rightarrow \infty$ при $|y| \rightarrow \infty$. Мы не будем повторять этот анализ, но заметим, что если $h_1(y)$ и $h_2(y)$ принадлежат сектору $(0, \infty)$ только при $y \in (-a, a)$, анализ может быть выполнен лишь в некоторой окрестности начала координат, что приведет к получению результатов о локальной асимптотической устойчивости, как в примере 4.8. Это показывает, что свойство пассивности остается полезным в качестве средства для проведения анализа Ляпунова даже в случае, если оно выполнено лишь на конечной области, но не на всем пространстве. \triangle

Если одной из подсистем является динамическая система, а другая подсистема представляет собой функцию без памяти, анализ Ляпунова можно выполнить с использованием в качестве функции Ляпунова функции запаса. Однако важно различать случаи, когда эти функции без памяти зависят или не зависят от времени, т. к. в первом случае замкнутая система будет неавтономной и, следовательно, в отличие от ситуации, рассмотренной в теореме 6.3, невозможно применить принцип инвариантности. В следующих двух теоремах рассматриваются вышеупомянутые два случая.

Теорема 6.4. Рассмотрим соединение двух подсистем, первая из которых является строго пассивной не зависящей от времени динамической системой вида (6.21)–(6.22), а вторая — пассивной (возможно зависящей от времени) функцией без памяти вида (6.23). Тогда начало координат замкнутой системы (6.28) (при $u = 0$) равномерно асимптотически устойчиво. Кроме того, если функция запаса динамической системы радиально неограничена, начало координат глобально асимптотически устойчиво.

Доказательство: Аналогично тому, как это было сделано в лемме 6.7, можно показать, что $V_1(x_1)$ является положительно определенной функцией. Ее производная определяется равенством

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} f_1(x_1, e_1) \leqslant e_1^T y_1 - \psi_1(x_1) = -e_2^T y_2 - \psi_1(x_1) \leqslant -\psi_1(x_1).$$

Тогда утверждение теоремы следует из теоремы 4.9. \square

Теорема 6.5. Рассмотрим соединение двух подсистем, первая из которых является не зависящей от времени динамической системой H_1 вида (6.21)–(6.22), а вторая — не зависящей от времени функцией без памяти H_2 вида (6.23). Предположим, что H_1 наблюдаема с нулевым начальным состоянием и имеет положительно определенную функцию запаса, удовлетворяющую

$$e_1^T y_1 \geqslant \dot{V}_1 + y_1^T \rho_1(y_1). \quad (6.36)$$

Предположим также, что H_2 удовлетворяет

$$e_2^T y_2 \geqslant e_2^T \varphi_2(e_2). \quad (6.37)$$

Тогда начало координат замкнутой системы (6.28) (при $u = 0$) асимптотически устойчиво, если

$$v^T [\rho_1(v) + \varphi_2(v)] > 0, \quad \forall v \neq 0. \quad (6.38)$$

Кроме того, если V_1 радиально неограничена, то начало координат глобально асимптотически устойчиво.

Доказательство: Используя $V_1(x_1)$ в качестве функции Ляпунова, получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} f_1(x_1, e_1) \leqslant e_1^T y_1 - y_1^T \rho_1(y_1) = \\ &= -e_2^T y_2 - y_1^T \rho_1(y_1) \leqslant -[y_1^T \varphi_2(y_1) + y_1^T \rho_1(y_1)]. \end{aligned}$$

Из неравенства (6.38) следует, что $\dot{V}_1 \leqslant 0$ и $\dot{V}_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$. С учетом того, что $y_1(t) \equiv 0 \Rightarrow e_2(t) \equiv 0 \Rightarrow e_1(t) \equiv 0$, можно заключить, что из наблюдаемости с нулевым начальным состоянием подсистемы H_1 следует $x_1(t) \equiv 0$. Тогда утверждение теоремы следует из принципа инвариантности. \square

Пример 6.12. Рассмотрим соединение с обратной связью строго положительно вещественной передаточной функции и пассивной зависящей от времени функции без памяти. Из леммы 6.4 следует, что динамическая система является строго пассивной с положительно определенной функцией запаса вида $V(x) = (1/2)x^T Px$. Используя теорему 6.4, заключаем, что начало координат замкнутой системы является глобально равномерно асимптотически устойчивым. Этот результат представляет собой частный случай кругового критерия, рассмотренного в параграфе 7.1. \triangle

Пример 6.13. Рассмотрим соединение подсистем

$$H_1 : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)e_1 \\ y_1 = h(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad H_2 : y_2 = \sigma(e_2),$$

где $\sigma \in (0, \infty)$ и $e_i, y_i \in R^n$. Предположим, что существует радиально неограниченная положительно определенная функция $V_1(x)$, такая что

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} f(x) \leqslant 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} G(x) = h^T(x), \quad \forall x \in R^n.$$

Предположим также, что подсистема H_1 является наблюдаемой с нулевым начальным состоянием. Обе подсистемы пассивны. Более того, H_2 удовлетворяет

$$e_2^T y_2 = e_2^T \sigma(e_2).$$

Таким образом, неравенство (6.36) выполнено с $\rho_1 = 0$, и неравенство (6.37) выполнено с $\varphi_2 = \sigma$. Поскольку $\sigma \in (0, \infty)$, выполнено неравенство (6.38). Из теоремы 6.5 следует, что начало координат замкнутой системы глобально асимптотически устойчиво. \triangle

Завершим этот параграф рассмотрением преобразований контура. Представленные ниже результаты расширяют сферу применения теорем о пассивности. Рассмотрим систему с обратной связью, в которой одна из подсистем не является пассивной или не удовлетворяет условию, необходимому для применения одной из вышеприведенных теорем. В подобных ситуациях оказывается возможным модифицировать контур в этой системе таким образом, чтобы полученный эквивалентный контур обладал требуемым свойством. Эта процедура может быть проиллюстрирована на примере преобразований с постоянным коэффициентом усиления. Предположим, что H_1 представляет собой не зависящую от времени динамическую систему, а H_2 — функцию без памяти (возможно зависящую от времени), принадлежащую сектору $[K_1, K_2]$, где $K = K_2 - K_1$ — положительно определенная симметричная матрица. В параграфе 6.1 мы видели, что принадлежащая сектору $[K_1, K_2]$ функция может быть преобразована в функцию, принадлежащую сектору $[0, \infty]$, путем применения прямой связи по входу с последующим применением обратной связи по выходу (см. рисунок 6.7). Прямая связь по входу в подсистеме H_2 может быть полностью компенсирована обратной связью по выходу в подсистеме H_1 (см. рисунок 6.13(b)), что приводит к образованию эквивалентной системы с обратной связью, в отношении которой можно рассматривать вопросы асимптотической устойчивости начала координат. Аналогично, умножение слева модифицированной подсистемы H_2 на K^{-1} , может быть компенсировано путем умножения справа модифицированной подсистемы H_1 на K (см. рисунок 6.13(c)). Наконец, обратная связь по выходу в контуре обратной связи подсистемы может быть компенсирована прямой связью по входу в контуре прямой связи подсистемы (см. рисунок 6.13(d)). Модифицированное системой с обратной связью имеет две подсистемы

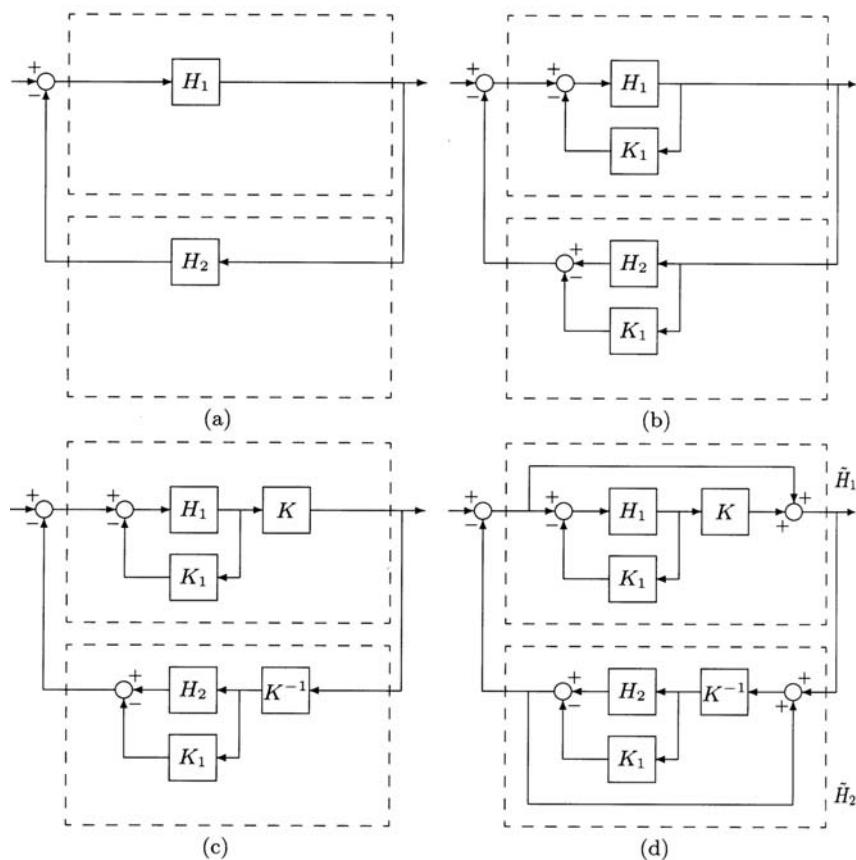


Рис. 6.13. Преобразования контура с постоянными коэффициентами усиления. Функция без памяти H_2 , принадлежащая сектору $K_1, K_2]$, преобразуется в функцию без памяти \tilde{H}_2 , принадлежащую сектору $0, \infty]$.

\tilde{H}_1 и \tilde{H}_2 , где \tilde{H}_2 — функция без памяти, принадлежащая сектору $[0, \infty]$. Таким образом, мы можем применить теоремы 6.4 или 6.5, если H_1 удовлетворяет условиям соответствующих теорем.

Пример 6.14. Рассмотрим систему с обратной связью

$$H_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -h(x_1) + bx_2 + e_1 \\ y_1 = x_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad H_2 : y_2 = \sigma(e_2)$$

где $\sigma \in [\alpha, \beta]$, $h \in [\alpha_1, \infty]$, $b > 0$, $\alpha_1 > 0$ и $k = \beta - \alpha > 0$. Применяя преобразование контура, изображенное на рисунке 6.13(d) (с $K_1 = \alpha$ и

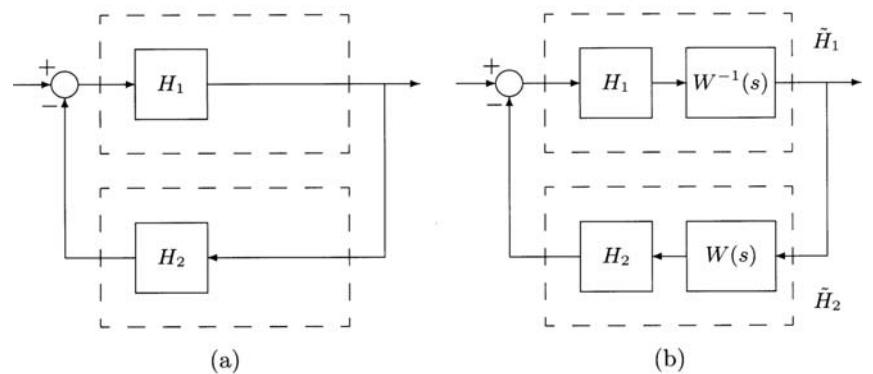


Рис. 6.14. Преобразования контура с динамическими множителями.

$K_2 = \beta$), получаем систему вида

$$\tilde{H}_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -h(x_1) - ax_2 + \tilde{e}_1 \\ \tilde{y}_1 = kx_2 + \tilde{e}_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \tilde{H}_2 : \tilde{y}_2 = \tilde{\sigma}(\tilde{e}_2),$$

где $\tilde{\sigma} \in [0, \infty]$ и $a = \alpha - b$. Если $\alpha > b$, можно показать (см. упражнение 6.4), что \tilde{H}_1 строго пассивна с функцией запаса $V_1 = k \int_0^{x_1} h(s)ds + x^T P x$, где $P = P^T > 0$. Таким образом, из теоремы 6.4 следует, что начало координат системы глобально асимптотически устойчиво. \triangle

Далее будут рассмотрены преобразования контура с динамическими множителями (dynamic multipliers), см. рисунок 6.14. Умножение подсистемы H_2 слева на передаточную функцию $W(s)$ может быть компенсировано умножением подсистемы H_1 справа на $W^{-1}(s)$, при условии, что обратная функция существует. Например, если в качестве H_2 выступает пассивная, не зависящая от времени функция без памяти h , то, как мы видели в примере 6.3, умножение h слева на передаточную функцию $1/(as + 1)$ приводит к строго пассивной динамической системе. Умножение подсистемы H_1 справа на $(as + 1)$ приводит к строго пассивной системе или к строго пассивной по выходу системе, являющейся наблюдаемой в нулевом состоянии. В этом случае мы можем применить теорему 6.3 и доказать асимптотическую устойчивость начала координат. Эта идея иллюстрируется следующими двумя примерами соответственно с линейной и нелинейной подсистемой H_1 .

Пример 6.15. Пусть H_1 — линейная не зависящая от времени система, представленная моделью состояния

$$\dot{x} = Ax + Be_1, \quad y_1 = Cx$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = [1 \ 0].$$

Ее передаточная функция $1/(s^2 + s + 1)$ имеет относительную степень два; следовательно, она не является положительно вещественной. Умножая H_1 справа на $(as + 1)$ приводит к системе \tilde{H}_1 , представленной моделью состояния

$$\dot{x} = Ax + Be_1, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{C}x$$

где $\tilde{C} = C + aCA = [1 \ a]$. Ее передаточная функция $(as + 1)/(s^2 + s + 1)$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1 + j\omega a}{1 - \omega^2 + j\omega} \right] = \frac{1 + (a - 1)\omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} > 0, \quad \forall \omega \in R,$$

и

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1 + j\omega a}{1 - \omega^2 + j\omega} \right] = a - 1 > 0,$$

если $a > 1$. Таким образом, выбрав $a > 1$, мы можем применить леммы 6.1 и 6.4 и заключить, что \tilde{H}_1 строго пассивна с функцией запаса $(1/2)x^T Px$, где P удовлетворяет уравнениям

$$PA + A^T P = -L^T L - \varepsilon P, \quad PB = \tilde{C}^T$$

для некоторых L и $\varepsilon > 0$. С другой стороны, пусть H_2 имеет вид $y_2 = h(e_2)$, где $h \in [0, \infty]$. В примере 6.3 было показано, что умножение h слева на передаточную функцию $1/(as + 1)$ приводит к строго пассивной системе с функцией запаса $a \int_0^{e_2} h(s)ds$. Из теоремы 6.3 следует, что начало координат преобразованной системы, изображенной на рисунке 6.14(b) (с нулевым входом), асимптотически устойчиво и функция Ляпунова имеет вид $V = (1/2)x^T Px + a \int_0^{e_2} h(s)ds$. Заметим, однако, что преобразованная система, изображенная на рисунке 6.14(b), имеет модель состояния размерности три, в то время как исходная система имеет модель состояния размерности два; таким образом, для установления асимптотической устойчивости начала координат исходного соединения систем необходимо выполнить дополнительную работу. Количество этой дополнительной работы можно уменьшить, если использовать преобразованное соединение систем лишь для определения функции Ляпунова V , производную которой можно вычислить вдоль решений исходной системы. Эта производная определяется равенством

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2}x^T P \dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^T Px + ah(e_2)\dot{e}_2 = \\ &= \frac{1}{2}x^T P[Ax - Bh(e_2)] + \frac{1}{2}[Ax - Bh(e_2)]^T Px + ah(e_2)C[Ax - Bh(e_2)] = \\ &= -\frac{1}{2}x^T L^T Lx - (\varepsilon/2)x^T Px - x^T \tilde{C}^T h(e_2) + ah(e_2)CAx = \\ &= -\frac{1}{2}x^T L^T Lx - (\varepsilon/2)x^T Px - x^T [C + aCA]^T h(e_2) + ah(e_2)CAx = \\ &= -\frac{1}{2}x^T L^T Lx - (\varepsilon/2)x^T Px - e_2^T h(e_2) \leq -(\varepsilon/2)x^T Px, \end{aligned}$$

из которого следует, что начало координат асимптотически устойчиво. В действительности, поскольку V радиально неограничена, мы можем

заключить, что начало координат глобально асимптотически устойчиво.

△

Пример 6.16. Рассмотрим систему с обратной связью при

$$H_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -bx_1^3 - kx_2 + e_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad H_2 : y_2 = h(e_2),$$

где $b > 0$, $k > 0$ и $h \in [0, \infty]$. Умножение H_1 справа на $(as + 1)$ приводит к системе \tilde{H}_1 , представленной тем же уравнением состояния, но с новым выходом $\tilde{y}_1 = x_1 + ax_2$. Используя $V_1 = (1/4)bx_1^4 + (1/2)x^T Px$ в качестве функции запаса для системы \tilde{H}_1 , получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= b(1 - p_{22})x_1^3 x_2 - p_{12}bx_1^4 + (p_{11}x_1 + p_{12}x_2)x_2 - \\ &\quad -(p_{12}x_1 + p_{22}x_2)kx_2 + (p_{12}x_1 + p_{22}x_2)e_1. \end{aligned}$$

Полагая $p_{11} = k$, $p_{12} = p_{22} = 1$, $a = 1$ и предполагая, что $k > 1$, получаем равенство

$$\dot{V}_1 = -bx_1^4 - (k - 1)x_2^2 + \tilde{y}_1 e_1,$$

из которого следует, что система \tilde{H}_1 строго пассивна. С другой стороны, умножение h слева на передаточную функцию $1/(s + 1)$ приводит к строго пассивной системе с функцией запаса $\int_0^{e_2} h(s)ds$. Используя функцию запаса преобразованной системы

$$V = (1/4)bx_1^4 + (1/2)x^T Px + \int_0^{e_2} h(s)ds$$

в качестве функции Ляпунова для исходной системы (при $u = 0$), получаем соответствующую производную

$$\begin{aligned} \dot{V} &= bx_1^3 x_2 + (kx_1 + x_2)x_2 + (x_1 + x_2)[-bx_1^3 - kx_2 - h(e_2)] + h(e_2)x_2 = \\ &= -(k - 1)x_2^2 - bx_1^4 - x_1 h(x_1), \end{aligned}$$

являющуюся отрицательно определенной функцией. Поскольку V положительно определена, можно заключить, что начало координат глобально асимптотически устойчиво. △

6.6. Упражнения

6.1 Покажите, что функция, принадлежащая сектору $[K_1, K_2]$, может быть преобразована в функцию, принадлежащую сектору $[0, \infty]$, путем применения прямой связи по входу с последующей обратной связью по выходу (см. рисунок 6.7).

6.2 Рассмотрим систему

$$a\dot{x} = -x + \frac{1}{k}h(x) + u, \quad y = h(x)$$

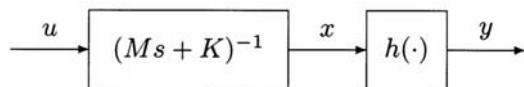


Рис. 6.15. К упражнению 6.5

где a и k — положительные константы и $h \in [0, k]$. Покажите, что система пассивна с функцией запаса $V(x) = a \int_0^x h(\sigma)d\sigma$.

6.3 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -h(x_1) - ax_2 + u, \quad y = \alpha x_1 + x_2,$$

где $0 < \alpha < a$ и $h \in (0, \infty]$. Покажите, что система строго пассивна. Указание: Используйте $V(x)$ из примера 4.5 в качестве функции запаса.

6.4 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -h(x_1) - ax_2 + u, \quad y = kx_2 + u,$$

где $a > 0$, $k > 0$, $h \in [\alpha_1, \infty]$ и $\alpha_1 > 0$. Пусть $V(x) = k \int_0^{x_1} h(s)ds + x^T Px$, где $p_{11} = ap_{12}$, $p_{22} = k/2$ и $0 < p_{12} < \min\{2\alpha_1, ak/2\}$. Используйте $V(x)$ в качестве функции запаса, покажите, что система строго пассивна.

6.5 Рассмотрим систему, представленную блок-диаграммой, изображенной на рисунке 6.15, где u , $y \in R^p$, M и K — положительно определенные симметричные матрицы, $h \in [0, K]$ и $\int_0^x h^T(\sigma)Md\sigma \geq 0$ для всех x . Покажите, что система строго пассивна по выходу.

6.6 Покажите, что параллельное соединение двух пассивных (соответственно, строго пассивных по входу, строго пассивных по выходу, строго пассивных) динамических систем является пассивной (соответственно, строго пассивной по входу, строго пассивной по выходу, строго пассивной) системой.

6.7 Покажите, что передаточная функция $(b_0s + b_1)/(s^2 + a_1s + a_2)$ строго положительно вещественная, если и только если все коэффициенты положительны и $b_1 < a_1b_0$.

6.8 Рассмотрим уравнения (6.14)–(6.16) и предположим, что матрица $(D + D^T)$ невырождена. Покажите, что P удовлетворяет уравнению Риккати

$$PA_0 + A_0^T P - PB_0 P + C_0 = 0,$$

где $A_0 = -(\varepsilon/2)I - A + B(D + D^T)^{-1}C$, $B_0 = B(D + D^T)^{-1}B^T$ и $C_0 = -C^T(D + D^T)^{-1}C$.

6.9 Покажите, что если система является строго пассивной по входу с $\varphi(u) = \varepsilon u$ и \mathcal{L}_2 -устойчива с конечным коэффициентом усиления, то существуют функция запаса V и положительные константы ε_1 и δ_1 , такие что

$$u^T y \geq V + \varepsilon_1 u^T u + \delta_1 y^T y.$$

6.10 Рассмотрим уравнения движения m -звенного манипулятора, рассмотренного в упражнении 1.4. Предположим, что $P(q)$ — положитель-

но определенная функция переменных q и $g(q) = 0$ имеет изолированный корень в $q = 0$.

- (a) Покажите используя полную энергию $V = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + P(q)$ в качестве функции запаса, что отображение $u \mapsto \dot{q}$ пассивно.
- (b) Покажите для $u = -K_d\dot{q} + v$, где K_d — постоянная положительная диагональная матрица, что отображение $v \mapsto \dot{q}$ строго пассивно по выходу.
- (c) Покажите, что $u = -K_d\dot{q}$, где K_d — постоянная положительная диагональная матрица, обеспечивает асимптотическую устойчивость начала координат ($q = 0, \dot{q} = 0$). При каком дополнительном условии, начало координат является глобально асимптотически устойчивым?

6.11 ([151]) Уравнения Эйлера для вращающегося твердого тела имеют вид

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 &= (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + u_1, \\ J_2\dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 + u_2, \\ J_3\dot{\omega}_3 &= (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 + u_3, \end{aligned}$$

где ω_1 , ω_2 и ω_3 — компоненты вектора угловой скорости вдоль главных осей, u_1 , u_2 и u_3 — моменты, приложенные вокруг главных осей, рассматриваемые как входы системы, и J_1 , J_2 и J_3 — главные моменты инерции.

- (a) Покажите, что отображение $u = [u_1, u_2, u_3]^T \mapsto \omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ является отображением без потерь.
- (b) Пусть $u = -K\omega + v$, где K — положительно определенная симметричная матрица. Покажите, что отображение $v \mapsto \omega$ является \mathcal{L}_2 -устойчивым с конечным коэффициентом усиления.
- (c) Покажите, что если $v = 0$, то начало координат $\omega = 0$ глобально асимптотически устойчиво.

6.12 Рассмотрим систему с обратной связью, изображенную на рисунке 6.11, где H_1 и H_2 имеют модели состояния

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + G_i(x_i)e_i, \quad y_i = h_i(x_i) + J_i(x_i)e_i, \quad i = 1, 2$$

Покажите, что система с обратной связью имеет корректно определенную модель состояния, если матрица $I + J_2(x_2)J_1(x_1)$ невырождена для всех x_1 и x_2 .

6.13 Рассмотрим уравнения (6.26)–(6.27) и (6.30)–(6.31). Предположим, что $h_1 = h_1(x_1)$ независима от e_1 . Покажите, что в каждом из рассматриваемых случаев уравнения имеют единственное решение (e_1, e_2) .

6.14 Рассмотрим изображенную на рисунке 6.11 систему при

$$H_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - h_1(x_2) + e_1 \\ y_1 = x_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad H_2 : \begin{cases} \dot{x}_3 = -x_3 + e_2 \\ y_2 = h_2(x_3) \end{cases}$$

где h_1 и h_2 — локально липшицевые функции, удовлетворяющие $h_1 \in (0, \infty]$, $h_2 \in (0, \infty]$ и $|h_2(z)| \geq |z|/(1+z^2)$ для всех z .

(а) Покажите, что система пассивна.

(б) Покажите, что начало координат свободной системы глобально асимптотически устойчиво.

6.15 Выполните предыдущее упражнение для системы с компонентами

$$H_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + e_1 \\ y_1 = x_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad H_2 : \begin{cases} \dot{x}_3 = -x_3 + e_2 \\ y_2 = x_3^3 \end{cases}$$

6.16 ([78]) Рассмотрим изображенную на рисунке 6.11 систему с обратной связью, где H_1 и H_2 — пассивные динамические системы вида (6.21)–(6.22). Предположим, что система имеет корректно определенную модель состояния и последовательное соединение $H_1(-H_2)$ с входом e_2 и выходом y_1 является наблюдаемым в нулевом состоянии. Покажите, что начало координат асимптотически устойчиво, если H_2 является строго пассивной по входу или если H_1 является строго пассивной по выходу.

6.17 ([78]) Рассмотрим изображенную на рисунке 6.11 систему с обратной связью, где H_1 и H_2 — пассивные динамические системы вида (6.21)–(6.22). Предположим, что система имеет корректно определенную модель состояния и последовательное соединение H_2H_1 , с входом e_1 и выходом y_2 является наблюдаемым в нулевом состоянии. Покажите, что начало координат асимптотически устойчиво, если H_1 является строго пассивной по входу или если H_2 является строго пассивной по выходу.

6.18 ([78]) Обобщением концепции пассивности является понятие диссипативности. Динамическая система вида (6.6)–(6.7) называется диссипативной с функцией расхода (supply rate) $w(u, y)$, если существует положительно определенная функция запаса $V(x)$, такая что $\dot{V} \leq w$. Рассмотрим изображенную на рисунке 6.11 систему, где H_1 и H_2 являются наблюдаемыми в нулевом состоянии динамическими системами вида (6.21)–(6.22). Предположим, что каждая из подсистем H_1 и H_2 является диссипативной с функцией запаса $V_i(x_i)$ и функцией расхода $w_i(u_i, y_i) = y_i^T Q_i y_i + 2y_i^T S_i u_i + u_i^T R_i u_i$, где Q_i и R_i — вещественные симметричные матрицы и S_i — вещественная матрица. Покажите, что начало координат устойчиво (соответственно, асимптотически устойчи-

во), если матрица

$$\widehat{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 + \alpha R_2 & -S_1 + \alpha S_2^T \\ -S_1^T + \alpha S_2 & R_1 + \alpha Q_2 \end{bmatrix}$$

является отрицательно полуопределенной (соответственно, отрицательно определенной) для некоторой $\alpha > 0$.

6.19 Рассмотрим систему с обратной связью, компоненты которой являются не зависящими от времени динамическими системами вида (6.21)–(6.22). Предположим, что обе подсистемы являются наблюдаемыми с нулевым начальным состоянием и существуют положительно определенные функции запаса, удовлетворяющие

$$e_i^T y_i \geq \dot{V}_i + e_i^T \varphi_i(e_i) + y_i^T \rho_i(y_i), \quad i = 1, 2$$

Покажите, что начало координат замкнутой системы (6.24) при $u = 0$ асимптотически устойчиво, если

$$v^T [\rho_1(v) + \varphi_2(v)] > 0 \quad \text{и} \quad v^T [\rho_2(v) - \varphi_1(-v)] > 0, \quad \forall v \neq 0.$$

При каких дополнительных условиях начало координат является глобально асимптотически устойчивым?

Глава 7

ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Большинство нелинейных физических систем могут быть представлены в виде системы с обратной связью, состоящего из линейной динамической системы и нелинейной подсистемы (см. Рисунок 7.1).

¹⁾ Процедура преобразования системы к этой форме представления зависит от ее исходного вида. Например, если единственная нелинейность системы имеет вид реле или нелинейности привод/датчик, какие-либо трудности при представлении этой системы в форме системы с обратной связью, изображенной на рисунке 7.1, отсутствуют. В других случаях нахождение соответствующего преобразования может оказаться нетривиальной задачей. Мы будем предполагать, что внешнее входное воздействие отсутствует $r = 0$ и выполним анализ поведения этой свободной системы. Особенностью представленных в этой главе результатов является то, что при их получении используются методы частотного анализа для линейных систем, основанные на классических для теории управления средствах исследования — диаграмме и критерии Найквиста. В параграфе 7.1 рассматриваются вопросы абсолютной устойчивости. Система называется абсолютно устойчивой, если она имеет глобально равномерно асимптотически устойчивую точку равновесия в начале координат для всех нелинейностей из заданного сектора. Круговой критерий и критерий Попова являются достаточными условиями абсолютной устойчивости в частотной области, представленными в форме требования строгой положительной вещественности опреде-

¹⁾ Прим. ред. перев. — Форма, представленная на рисунке 7.1, часто называется *формой Лурье* или *системой Лурье* (Lurie system, Lur'e system) в честь выдающегося петербургско-ленинградского механика Анатолия Исааковича Лурье (1901–1980), впервые изучившего устойчивость таких систем систематически [Д43, Д44].

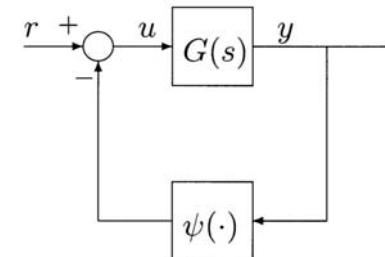


Рис. 7.1. Система с обратной связью

ленных передаточных функций. В случае системы с одним входом и одним выходом оба критерия допускают графическое представление. В параграфе 7.2 используется метод описывающей функции¹⁾ для доказательства существования периодических решений в системах с одним входом и одним выходом. Мы получим частотные условия, которые могут быть проверены графически и позволяющие ответить на вопрос о существовании или отсутствии в системе колебаний, а также получить оценки частоты и амплитуды колебаний, если они имеют место.

7.1. Абсолютная устойчивость

Рассмотрим систему, изображенную на рисунке 7.1. Предположим, что внешнее воздействие отсутствует $r = 0$ и выполним анализ поведения свободной системы, представленной в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (7.1)$$

$$y = Cx + Du \quad (7.2)$$

$$u = -\psi(t, y) \quad (7.3)$$

где $x \in R^n$, $u, y \in R^p$, (A, B) — управляемая пара, (A, C) — наблюдаемая пара и $\psi : [0, \infty) \times R^p \rightarrow R^p$ — нелинейность без памяти (возможно, зависящая от времени), являющаяся кусочно-непрерывной по t и локально липшицевой по y функцией. Будем предполагать, что система имеет корректно определенную модель состояния, что имеет место, если уравнение

$$u = -\psi(t, Cx + Du) \quad (7.4)$$

имеет единственное решение u для всех (t, x) в исследуемой области. Это условие всегда выполнено, если $D = 0$. Передаточная матрица линейной системы

¹⁾ Прим. ред. перев. — В отечественной литературе используется термин «метод гармонического баланса». Далее термин будет переводится в авторском варианте.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (7.5)$$

является квадратной и собственной. Предположения об управляемости и наблюдаемости обеспечивают то, что $\{A, B, C, D\}$ представляет собой минимальную реализацию для $G(s)$. Из теории линейных систем известно, что для любой рациональной и собственной передаточной матрицы $G(s)$ минимальная реализация всегда существует. Мы также будем предполагать, что нелинейность ψ удовлетворяет секторному условию в соответствии с определением 6.2. Секторное условие может быть выполнено глобально, т. е. для всех $y \in R^p$, или выполнено лишь для $y \in Y$, где Y — подмножество R^p , внутренность которого связана и содержит начало координат.

Для всех нелинейностей, удовлетворяющих секторному условию, начало координат $x = 0$ является точкой равновесия системы (7.1)–(7.3). Наша задача заключается в том, чтобы исследовать свойства устойчивости начала координат не для конкретной нелинейности, а для некоторого класса нелинейностей, удовлетворяющих заданному секторному условию. Если мы докажем, что начало координат равномерно асимптотически устойчиво для всех нелинейностей в секторе, то исследуемая система будет называться абсолютно устойчивой. Эта проблема была первоначально сформулирована Лурье¹⁾ и иногда называется задачей Лурье. Традиционно абсолютная устойчивость определяется для случая, когда начало координат глобально равномерно асимптотически устойчиво. Следуя этой традиции, мы будем использовать фразу «абсолютная устойчивость» в случаях, когда секторное условие выполнено глобально и начало координат глобально равномерно асимптотически устойчиво. В противном случае мы будем использовать фразу «абсолютная устойчивость в конечной области».

Определение 7.1. Рассмотрим систему (7.1)–(7.3), где ψ удовлетворяет секторному условию в соответствии с определением 6.2. Эта система называется абсолютно устойчивой, если начало координат глобально равномерно асимптотически устойчиво для всех нелинейностей из заданного сектора. Эта система называется абсолютно устойчивой в конечной области, если начало координат равномерно асимптотически устойчиво.

Мы будем исследовать асимптотическую устойчивость начала координат с использованием методов Ляпунова. Функция Ляпунова может быть найдена с применением средств пассивности, рассмотренных в предыдущей главе. В частности, если замкнутая система может быть представлена в виде соединения с обратной связью, состоящего из двух пассивных систем, то сумма двух соответствующих функций запаса может быть использована в качестве функции Ляпунова для всей замкнутой системы. Использование преобразований контура позволяет выбирать для исследования различные секторы и различные функции

Ляпунова, что приводит нас к рассмотрению кругового критерия и критерия Попова.

7.1.1. Круговой критерий

Теорема 7.1. Система (7.1)–(7.3) является абсолютно устойчивой, если

- $\psi \in [K_1, \infty]$ и $G(s)[I + K_1 G(s)]^{-1}$ является строго положительно вещественной, или
- $\psi \in [K_1, K_2]$, с $K = K_2 - K_1 = K^T > 0$, и $[I + K_2 G(s)][I + K_1 G(s)]^{-1}$ является строго положительно вещественной.

Если секторное условие выполнено лишь на множестве $Y \subset R^p$, вышеприведенные условия обеспечивают абсолютную устойчивость системы в конечной области.

Мы будем называть эту теорему *многомерным круговым критерием*, хотя основание для такого наименования появится лишь тогда, когда мы рассмотрим частный случай этого критерия для скалярной нелинейности. Необходимым условием единственности решения и уравнения (7.4) для всех $\psi \in [K_1, \infty]$ или $\psi \in [K_1, K_2]$ является невырожденность матрицы $(I + K_1 D)$. Убедится в этом можно, если положить $\psi = K_1 y$ в (7.4). Из этого следует, что передаточная матрица $[I + K_1 G(s)]^{-1}$ является собственной.

Доказательство теоремы 7.1: Сначала выполним доказательство для сектора $[0, \infty]$; доказательство для остальных случаев будет получено с использованием преобразований контура. Если $\psi \in [0, \infty]$ и $G(s)$ строго положительно вещественна, мы имеем соединение систем с обратной связью, состоящее из двух пассивных систем. Из леммы 6.4 известно, что функция запаса для линейной динамической системы имеет вид $V(x) = (1/2)x^T P x$, где $P = P^T > 0$ удовлетворяет уравнениям Калмана–Якубовича–Попова

$$PA + A^T P = -L^T L \in P, \quad (7.6)$$

$$PB = C^T - L^T W, \quad (7.7)$$

$$W^T W = D + D^T \quad (7.8)$$

и $\varepsilon > 0$. Используя $V(x)$ в качестве функции Ляпунова, получаем

$$\dot{V} = \frac{1}{2}x^T P \dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^T P x = \frac{1}{2}x^T (PA + A^T P)x + x^T P B u.$$

Используя (7.6) и (7.7), имеем

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2}x^T L^T L x - \frac{1}{2}\varepsilon x^T P x + x^T (C^T - L^T W)u = \\ &= -\frac{1}{2}x^T L^T L x - \frac{1}{2}\varepsilon x^T P x + (Cx + Du)^T u - u^T Du - x^T L^T W u. \end{aligned}$$

Используя (7.8) и учитывая тот факт, что $u^T Du = \frac{1}{2}u^T(D + D^T)u$, получаем

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}\varepsilon x^T P x - \frac{1}{2}(Lx + Wu)^T(Lx + Wu) - y^T \psi(t, y).$$

¹⁾ Прим. ред. перев. — См. примечание на с. 310

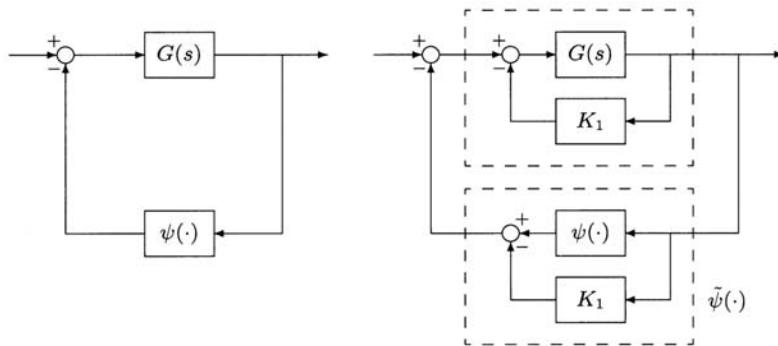


Рис. 7.2. Нелинейность $\psi \in [K_1, \infty]$ преобразована в $\tilde{\psi} \in [0, \infty]$ посредством преобразования контура

Поскольку $y^T \psi(t, y) \geq 0$, имеем оценку

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \in x^T P x,$$

из которой следует, что начало координат глобально экспоненциально устойчиво. Если ψ удовлетворяет секторному условию лишь для $y \in Y$, представленный выше анализ справедлив в некоторой окрестности начала координат и позволяет заключить, что начало координат экспоненциально устойчиво. Случай $\psi \in [K_1, \infty]$ посредством преобразования контура, блок-схема которого изображена на рисунке 7.2, может быть сведен к случаю, когда нелинейность принадлежит сектору $[0, \infty]$. Следовательно, система является абсолютно устойчивой, если $G(s)[I + K_1 G(s)]^{-1}$ является строго положительно вещественной. Случай $\psi \in [K_1, K_2]$ посредством преобразования контура, блок-схема которого изображена на рисунке 7.3, может быть сведен к случаю, когда нелинейность принадлежит сектору $[0, \infty]$. Следовательно, система является абсолютно устойчивой, если

$$I + KG(s)[I + K_1 G(s)]^{-1} = [I + K_2 G(s)][I + K_1 G(s)]^{-1}$$

является строго положительно вещественной. \square

Пример 7.1. Рассмотрим систему (7.1)–(7.3) и предположим, что $G(s)$ гурвицева и строго собственная. Пусть

$$\gamma_1 = \sup_{\omega \in R} \sigma_{\max}[G(j\omega)] = \sup_{\omega \in R} \|G(j\omega)\|_2$$

где $\sigma_{\max}[\cdot]$ обозначает максимальное сингулярное число комплексной матрицы. Постоянная γ_1 конечна, поскольку $G(s)$ гурвицева. Предположим, что ψ удовлетворяет неравенству

$$\|\psi(t, y)\|_2 \leq \gamma_2 \|y\|_2, \quad \forall t \geq 0, \forall y \in R^p. \quad (7.9)$$

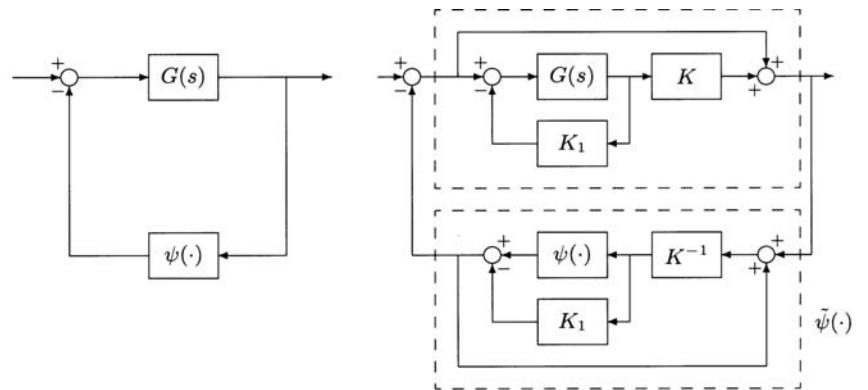


Рис. 7.3. Нелинейность $\psi \in [K_1, K_2]$ преобразована в $\tilde{\psi} \in [0, \infty]$ посредством преобразования контура

Тогда эта нелинейность принадлежит сектору $[K_1, K_2]$ с $K_1 = -\gamma_2 I$ и $K_2 = \gamma_2 I$. Для того, чтобы применить теорему 7.1, нам необходимо показать, что

$$Z(s) = [I + \gamma_2 G(s)][I - \gamma_2 G(s)]^{-1}$$

является строго положительно вещественной. Заметим, что $\det[Z(s) + Z^T(-s)]$ не равен тождественно нулю, поскольку $Z(\infty) = I$. Применим лемму 6.1. Поскольку $G(s)$ гурвицева, $Z(s)$ будет также гурвицевой, если $[I - \gamma_2 G(s)]^{-1}$ гурвицева. Заметим, что¹⁾

$$\sigma_{\min}[I - \gamma_2 G(j\omega)] \geq 1 - \gamma_1 \gamma_2.$$

Тогда, если $\gamma_1 \gamma_2 < 1$, кривая $\det[I - \gamma_2 G(j\omega)]$ не проходит через начало координат, и не очерчивает его. Следовательно, с использованием многомерного критерия Найквиста можно заключить,²⁾ что $[I - \gamma_2 G(s)]^{-1}$ — гурвицева матрица и, следовательно, $Z(s)$ также гурвицева. Далее, покажем, что

$$Z(j\omega) + Z^T(-j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in R.$$

¹⁾ Здесь используются следующие свойства сингулярных чисел комплексной матрицы:

$$\begin{aligned} \det G \neq 0 &\Leftrightarrow \sigma_{\min}[G] > 0, \\ \sigma_{\max}[G^{-1}] &= 1/\sigma_{\min}[G], \quad \text{если} \quad \sigma_{\min}[G] > 0, \\ \sigma_{\min}[I + G] &\geq 1 - \sigma_{\max}[G], \\ \sigma_{\max}[G_1 G_2] &\leq \sigma_{\max}[G_1] \sigma_{\max}[G_2]. \end{aligned}$$

²⁾ Формулировка многомерного критерия Найквиста приведена в работе [33, стр. 160–161].

Левая часть этого неравенства, определяется равенством

$$\begin{aligned} Z(j\omega) + Z^T(-j\omega) &= [I + \gamma_2 G(j\omega)][I - \gamma_2 G(j\omega)]^{-1} + \\ &\quad + [I - \gamma_2 G^T(-j\omega)]^{-1}[I + \gamma_2 G^T(-j\omega)] = \\ &= [I - \gamma_2 G^T(-j\omega)]^{-1}[2I - 2\gamma_2^2 G^T(-j\omega)G(j\omega)] \times \\ &\quad \times [I - \gamma_2 G(j\omega)]^{-1} \end{aligned}$$

Следовательно, $Z(j\omega) + Z^T(-j\omega)$ положительно определена для всех ω , если и только если

$$\sigma_{\min}[I - \gamma_2^2 G^T(-j\omega)G(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in R.$$

В случае $\gamma_1\gamma_2 < 1$ имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}[I - \gamma_2^2 G^T(-j\omega)G(j\omega)] &\geq 1 - \gamma_2^2 \sigma_{\max}[G^T(-j\omega)]\sigma_{\max}[G(j\omega)] \\ &\geq 1 - \gamma_1^2 \gamma_2^2 > 0. \end{aligned}$$

Наконец, $Z(\infty) + Z^T(\infty) = 2I$. Таким образом, все условия леммы 6.1 выполнены и мы можем заключить, что $Z(s)$ является строго положительно вещественной и, следовательно, система является абсолютно устойчивой, если $\gamma_1\gamma_2 < 1$. Этот результат представляет собой свойство робастности, которое показывает, что если гурвицеву передаточную матрицу замкнуть нелинейностью, удовлетворяющей (7.9) с достаточно малым коэффициентом γ_2 , то это не нарушит устойчивости системы.¹⁾ △

В скалярном случае $p = 1$ условия теоремы 7.1 могут быть проверены графически путем анализа кривой Найквиста для $G(j\omega)$. При $\psi \in [\alpha, \beta]$, $\beta > \alpha$, система абсолютно устойчива, если скалярная передаточная функция

$$Z(s) = \frac{1 + \beta G(s)}{1 + \alpha G(s)}$$

строго положительно вещественна. Для того, чтобы проверить для $Z(s)$ выполнение требования о строгой положительной вещественности, мы можем использовать лемму 6.1, в которой утверждается, что $Z(s)$ является строго положительно вещественной, если она является гурвицевой и²⁾

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1 + \beta G(j\omega)}{1 + \alpha G(j\omega)}\right] > 0, \quad \forall \omega \in [-\infty, \infty]. \quad (7.10)$$

Для того, чтобы установить связь между условием (7.10) и кривой Найквиста для $G(j\omega)$, необходимо различать три случая, соответствующие различным знакам при α . Рассмотрим первый случай, когда $\beta > \alpha > 0$.

¹⁾ Неравенство $\gamma_1\gamma_2 < 1$ может быть получено также с использованием теоремы о малом коэффициенте усиления (см. пример 5.13).

²⁾ Прим. ред. перев. — Частотные неравенства при $\omega = \pm\infty$ здесь и далее понимаются как неравенства для пределов при $\omega \rightarrow \pm\infty$.

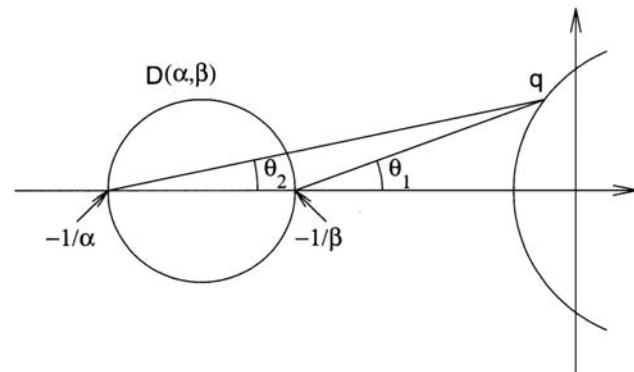


Рис. 7.4. Графическое представление кругового критерия

В этой ситуации условие (7.10) может быть переписано в следующей форме

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\frac{1}{\beta} + G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha} + G(j\omega)}\right], \quad \forall \omega \in [-\infty, \infty]. \quad (7.11)$$

Каждой точке q на кривой Найквиста для $G(j\omega)$ соответствуют два комплексных числа $(1/\beta) + G(j\omega)$ и $(1/\alpha) + G(j\omega)$, определяемых прямыми, соединяющими точку q с точками $-(1/\beta) + j0$ и $-(1/\alpha) + j0$, соответственно (см. рисунок 7.4). Вещественная часть отношения этих двух комплексных чисел положительна, если угол между этими двумя числами на комплексной плоскости меньше $\pi/2$, т. е. если угол $(\theta_1 - \theta_2)$ на рисунке 7.4 меньше $\pi/2$. Обозначим через $D(\alpha, \beta)$ замкнутый круг на комплексной плоскости, диаметр которого представляется собой отрезок, соединяющий точки $-(1/\alpha) + j0$ и $-(1/\beta) + j0$. Тогда легко видеть, что угол $(\theta_1 - \theta_2)$ будет меньше $\pi/2$, если q расположена вне круга $D(\alpha, \beta)$. Поскольку условие (7.11) должно выполняться для всех ω , все точки на кривой Найквиста для $G(j\omega)$ должны находиться строго вне круга $D(\alpha, \beta)$. С другой стороны, $Z(s)$ является гурвицевой, если $G(s)/[1 + \alpha G(s)]$ гурвицева. Из критерия Найквиста следует, что $G(s)/[1 + \alpha G(s)]$ является гурвицевой, если и только если кривая Найквиста для $G(j\omega)$ не проходит через точку $-(1/\alpha) + j0$ и обходит ее против часовой стрелки ровно t раз, где t — число полюсов $G(s)$ в открытой правой полуплоскости комплексной плоскости.¹⁾ Поэтому условия теоремы 7.1 выполнены, если кривая Найквиста для $G(j\omega)$ не входит в круг $D(\alpha, \beta)$ и обходит его против часовой стрелки t раз. Рассмотрим далее случай, когда $\beta > 0$ и $\alpha = 0$. В этой ситуации для использования теоремы 7.1 необходимо, чтобы $1 + \beta G(s)$ была строго

¹⁾ Если $G(s)$ имеет полюсы на мнимой оси, кривая Найквиста как обычно усекается в правой полуплоскости.

положительно вещественной. Это требование будет выполнено, если $G(s)$ гурвицева и

$$\operatorname{Re}[1 + \beta G(j\omega)] > 0, \forall \omega \in [-\infty, \infty].$$

Это условие может быть переписано в следующей форме:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] > -\frac{1}{\beta}, \forall \omega \in [-\infty, \infty],$$

что эквивалентно графическому критерию, заключающемуся в том, что кривая Найквиста для $G(j\omega)$ должна лежать справа от вертикальной прямой, определяемой величиной $\operatorname{Re}[s] = -1/\beta$. Наконец, рассмотрим случай, когда $\alpha < 0 < \beta$. В этой ситуации условие (7.10) эквивалентно неравенству

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\frac{1}{\beta} + G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha} + G(j\omega)}\right] < 0, \forall \omega \in [-\infty, \infty]. \quad (7.12)$$

Знак в этом неравенстве изменен на противоположный, поскольку переходя от (7.10) к (7.12), мы применили умножение на величину α/β , которая в рассматриваемом случае отрицательна. Повторив рассуждения, приведенные выше, можно заключить, что для выполнения (7.12) необходимо, чтобы кривая Найквиста для $G(j\omega)$ лежала внутри круга $D(\alpha, \beta)$. Следовательно, кривая Найквиста не может обойти точку $-(1/\alpha) + j0$. Тогда из критерия Найквиста следует, что $G(s)$ должна быть гурвицевой для того, чтобы была гурвицевой $G(s)/[1 + \alpha G(s)]$. Критерий устойчивости для рассмотренных трех случаев сформулирован в следующей теореме и известен как *круговой критерий*.

Теорема 7.2. Рассмотрим скалярную систему вида (7.1)–(7.3), где $\{A, B, C, D\}$ – минимальное представление для $G(s)$ и $\psi \in [\alpha, \beta]$. Тогда система является абсолютно устойчивой, если выполнено одно из следующих условий:

1. Если $0 < \alpha < \beta$, кривая Найквиста для $G(j\omega)$ не входит в круг $D(\alpha, \beta)$ и обходит его против часовой стрелки t раз, где t – число полюсов $G(s)$ с положительными вещественными частями.
2. Если $0 = \alpha < \beta$, $G(s)$ гурвицева и кривая Найквиста для $G(j\omega)$ лежит справа от вертикальной прямой, определяемой соотношением $\operatorname{Re}[s] = -1/\beta$.
3. Если $\alpha < 0 < \beta$, $G(s)$ гурвицева и кривая Найквиста для $G(j\omega)$ лежит во внутренности круга $D(\alpha, \beta)$.

Если секторное условие выполнено лишь на интервале $[a, b]$, вышеприведенные условия обеспечивают абсолютную устойчивость в конечной области.

Круговой критерий позволяет исследовать абсолютную устойчивость с использованием лишь информации о кривой Найквиста для $G(j\omega)$. Это обстоятельство представляется важным, поскольку кривая Найквиста может быть непосредственно получена из эксперименталь-

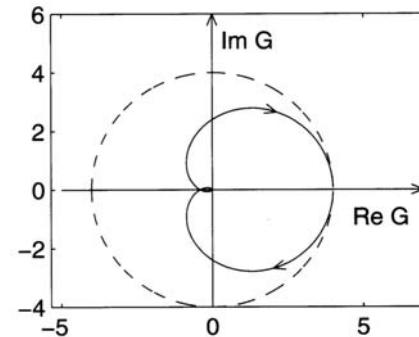


Рис. 7.5. Кривая Найквиста для примера 7.2

ных данных. Имея кривую Найквиста для $G(j\omega)$, мы можем найти секторы для нелинейностей, допустимые с точки зрения обеспечения абсолютной устойчивости. Следующие два примера иллюстрируют использование кругового критерия.

Пример 7.2. Пусть

$$G(s) = \frac{4}{(s+1)(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{3}s+1)}.$$

Кривая Найквиста для $G(j\omega)$ показана на рисунке 7.5. Поскольку $G(s)$ гурвицева, мы можем выбрать α отрицательной и использовать третий случай из теоремы о круговом критерии. Таким образом, нам необходимо определить круг $D(\alpha, \beta)$, который включает кривую Найквиста. Очевидно, что эта задача имеет неединственное решение. Предположим, что мы решили расположить центр круга в начале координат комплексной плоскости. Это соответствует выбору круга вида $D(-\gamma_2, \gamma_2)$ с подлежащим определению радиусом $(1/\gamma_2) > 0$. Кривая Найквиста будет лежать внутри этого круга, если $|G(j\omega)| < 1/\gamma_2$. В частности, если мы положим $\gamma_1 = \sup_{\omega \in R} |G(j\omega)|$, то величина γ_2 должна быть выбрана так, чтобы было выполнено неравенство $\gamma_1 \gamma_2 < 1$. Это условие совпадает с тем, что было найдено в примере 7.1. Нетрудно заметить, что $|G(j\omega)|$ достигает максимума при $\omega = 0$ и $\gamma_1 = 4$. Таким образом, величина γ_2 должна быть меньше 0.25. Следовательно, можно заключить, что система является абсолютно устойчивой для всех нелинейностей из сектора $[-0.25 + \varepsilon, 0.25 - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ может быть произвольно малой. Из анализа кривой Найквиста и круга $D(-0.25, 0.25)$ на рисунке 7.5 можно сделать вывод, что выбор круга с центром в начале координат не является наилучшим. Расположив центр круга в другой точке, мы можем сделать так, чтобы этот круг окружил кривую Найквиста более плотно. Например, расположим центр в точке $1.5 + j0$. В этом случае максимальное расстояние от этой точки до кривой Найквиста равно 2.834. Следовательно, если радиус круга выбрать равным 2.9,

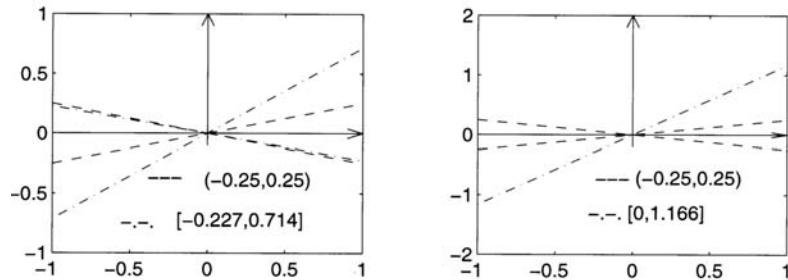


Рис. 7.6. Секторы в примере 7.2

то кривая Найквиста будет лежать внутри круга $D(-1/4.4, 1/1.4)$ и, следовательно, рассматриваемая система будет абсолютно устойчивой для всех нелинейностей из сектора $[-0.227, 0.714]$. Сравнение этого сектора с предыдущим (см. рисунок 7.6) показывает, что ослабив требования на нижнюю границу сектора, мы получаем значительный выигрыш в отношении верхней границы этого сектора. Действительно, в этом случае мы получаем большую свободу при оптимизации выбора места расположения центра круга. Однако в данном примере преследовалась другая цель. Здесь мы хотели показать, что графическое представление, используемое в круговом критерии, дает исследователю более ясное понимание сути исследуемой задачи, нежели оценки норм, полученные в примере 7.1. Более того, графическое представление позволило получить менее консервативные оценки на границы сектора нелинейностей.

Другим вариантом использования кругового критерия является выбор величины α , равной нулю и применение второго случая из теоремы 7.2. Кривая Найквиста лежит справа от вертикальной прямой $\text{Re}[s] = -0.857$. Следовательно, мы можем заключить, что система является абсолютно устойчивой для всех нелинейностей в секторе $[0, 1.166]$. Этот сектор изображен на рисунке 7.6 вместе с двумя другими секторами, полученными выше. Этот сектор позволяет получить наилучшую оценку величины β , которая достигается, если на класс нелинейностей наложить дополнительное требование — принадлежность к первому и третьему квадрантам. Для того, чтобы показать, насколько может быть удобен круговой критерий при анализе приложений, исследуем вопрос устойчивости изображенной на рисунке 7.7 системы, в состав которой входят ограничитель или нелинейность насыщения (типичная нелинейность в системах с обратной связью, обусловленная наличием ограничений на физические переменные). Нелинейность насыщения принадлежит сектору $[0, 1]$. Поэтому она принадлежит также сектору $[0, 1.166]$, но не принадлежит секторам $(-0.25, 0.25)$ или $[-0.227, 0.714]$. Таким образом, используя утверждение кругового критерия для второго случая, можно заключить, что система с обратной связью, изображен-

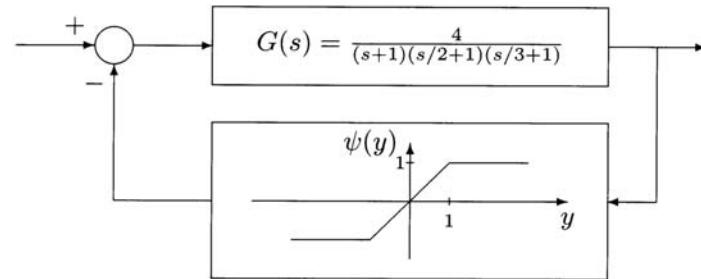


Рис. 7.7. Взаимосвязанная система с нелинейностью насыщения

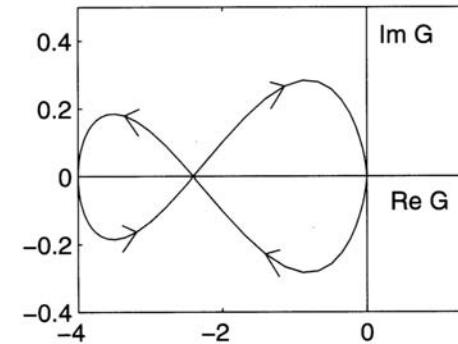


Рис. 7.8. Кривая Найквиста в примере 7.3

ная на рисунке 7.7, имеет глобально асимптотически устойчивую точку равновесия в начале координат. \triangle

Пример 7.3. Пусть

$$G(s) = \frac{4}{(s-1)(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{3}s+1)}.$$

Эта передаточная функция не является гурвицевой, т. к. она имеет полюсы в открытой правой полуплоскости. Поэтому мы должны ограничиться рассмотрением ситуации, когда α положительна, и применить круговой критерий для первого случая. Кривая Найквиста для $G(j\omega)$ показана на рисунке 7.8. Из кругового критерия известно, что кривая Найквиста должна обойти против часовой стрелки круг $D(\alpha, \beta)$ один раз. Анализ кривой Найквиста показывает, что круг может быть обойден кривой Найквиста только если он полностью содержится в одной из долей кривой Найквиста в левой полуплоскости. Круг в правой доле обходится по часовой стрелке один раз и, следовательно, он не удовлетворяет круговому критерию. Круг в левой доле обходится против часовой стрелки один раз. Таким образом, нам необходимо выбрать α

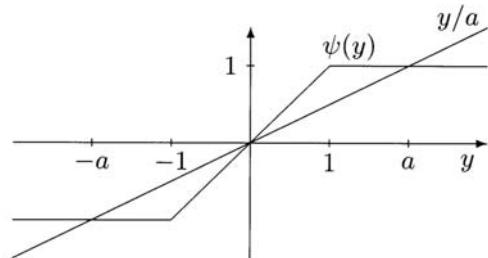


Рис. 7.9. Сектор в примере 7.4

и β так, чтобы круг $D(\alpha, \beta)$ располагался в левой доле. Расположим центр круга в точке $-3.2 + j0$, приблизительно посередине между двумя концами доли на вещественной оси. Минимальное расстояние от этой точки до кривой Найквиста равно 0.1688. Следовательно, выбрав радиус круга равным 0.168, мы обеспечим абсолютную устойчивость системы для всех нелинейностей в секторе $[0.2969, 0.3298]$. \triangle

В примерах 7.1–7.3 рассматривались случаи, когда секторное условие выполнено глобально. В следующем примере секторное условие справедливо лишь на конечном интервале.

Пример 7.4. Рассмотрим соединение систем с обратной связью, изображенное на рисунке 7.1, с линейной системой, представленной передаточной функцией

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)}$$

и нелинейным элементом $\psi(y) = \text{sat}(y)$. Нелинейность глобально принадлежит сектору $[0, 1]$. Однако поскольку $G(s)$ не является гурвицевой, мы должны воспользоваться первым условием кругового критерия, согласно которому секторное условие должно выполняться с положительной α . Таким образом, мы не можем установить абсолютную устойчивость системы с использованием кругового критерия.¹⁾ Самое большое, на что мы можем рассчитывать — это установить абсолютную устойчивость системы в конечной области. Из рисунка 7.9 видно, что на интервале $[-a, a]$, нелинейность ψ принадлежит сектору $[\alpha, \beta]$ с $\alpha = 1/a$ и $\beta = 1$. Поскольку $G(s)$ имеет полюс с положительной вещественной частью, кривая Найквиста для $G(j\omega)$, показанная на рисунке 7.10, должна обойти круг $D(\alpha, 1)$ один раз против часовой стрелки. Аналитически можно показать, что условие (7.10) выполняется при $\alpha > 0.5359$. Таким образом, при $\alpha = 0.55$ секторное условие выполняется на интервале $[-1.818, 1.818]$ и круг $D(0.55, 1)$ обходится кривой Найквиста один раз против часовой стрелки. Используя первое

¹⁾ В действительности, начало координат не является глобально асимптотически устойчивым, поскольку система имеет три точки равновесия.

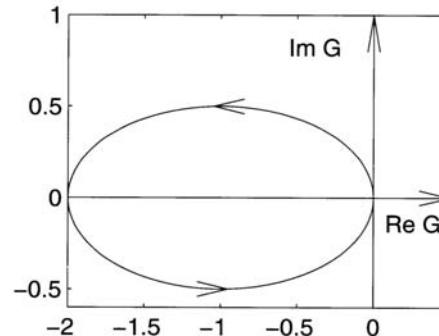


Рис. 7.10. Кривая Найквиста в примере 7.4

условие кругового критерия, мы можем заключить, что система абсолютно устойчива в конечной области. Для оценки области притяжения может быть использована квадратичная функция Ляпунова $V(x) = x^T P x$. Рассмотрим модель состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u, \\ y &= 2x_1 + x_2, \\ u &= -\psi(y). \end{aligned}$$

Преобразование контура, изображенное на рисунке 7.3, определяется равенствами

$$\begin{aligned} u &= -\alpha y + \tilde{u} = -0.55y + \tilde{u}, \\ \tilde{y} &= (\beta - \alpha)y + \tilde{u} = 0.45y + \tilde{u}. \end{aligned}$$

Тогда преобразованная линейная система, принимает следующий вид:

$$\dot{x} = Ax + B\tilde{u}, \quad \tilde{y} = Cx + D\tilde{u}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.55 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0.90\ 4.5] \quad \text{и} \quad D = 1.$$

Матрица P представляет собой решение уравнений (7.6)–(7.8). Легко проверить,¹⁾ что

$$\varepsilon = 0.02, \quad P = \begin{bmatrix} 0.4946 & 0.4834 \\ 0.4834 & 1.0774 \end{bmatrix},$$

¹⁾ Константа ε выбирается так, чтобы $G(s - \varepsilon/2)$ была положительно вещественной и $[(\varepsilon/2)I + A]$ гурвицевой, где $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Тогда P вычисляется как решение уравнения Риккати (см. упражнение 6.8).

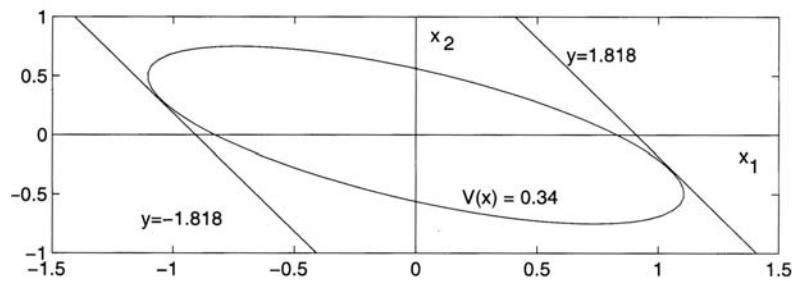


Рис. 7.11. Область притяжения в примере 7.4

$$L = \begin{bmatrix} 0.2946 & -0.4436 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad W = \sqrt{2}$$

удовлетворяют (7.6)–(7.8). Тогда $V(x) = x^T Px$ — функция Ляпунова для рассматриваемой системы. Оценка области притяжения имеет вид

$$\Omega_c = \{x \in R^2 \mid V(x) \leq c\},$$

где $c \leq \min_{\{|y|=1.818\}} V(x) = 0.3445$ выбрана таким образом, чтобы область Ω_c содержалась в множестве $\{|y| \leq 1.818\}$. При $c = 0.34$ получаем область притяжения, изображенную на рисунке 7.11. \triangle

7.1.2. Критерий Попова

Рассмотрим специальный случай системы (7.1)–(7.3):

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (7.13)$$

$$y = Cx, \quad (7.14)$$

$$u_i = -\psi_i(y_i), \quad 1 \leq i \leq p, \quad (7.15)$$

где $x \in R^n$, $u, y \in R^p$, (A, B) — управляемая пара, (A, C) — наблюдаемая пара и $\psi_i : R \rightarrow R$ — локально липшицевая безынерционная нелинейность, принадлежащая сектору $[0, k_i]$. В этом случае передаточная функция $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ является строго собственной и ψ зависит от времени и разделена относительно выходов, т. е. $\psi_i(y) = \psi_i(y_i)$. Поскольку $D = 0$, система с обратной связью имеет корректно определенную модель состояния. Следующая теорема известна как многомерный критерий Попова. Она может быть доказана с использованием функции Ляпунова–Лурье $V = (1/2)x^T Px + \sum \gamma_i \int_0^{y_i} \psi_i(\sigma)d\sigma$, выбор которой мотивирован применением преобразования контура, приводящим систему (7.13)–(7.15) к системе с обратной связью, состоящей из двух пассивных динамических систем.

Теорема 7.3. Система (7.13)–(7.15) абсолютно устойчива, если для $1 \leq i \leq p$ выполнено $\psi_i \in [0, k_i]$, $0 < k_i \leq \infty$ и существуют константы $\gamma_i \geq 0$, такие что $(1 + \lambda_k \gamma_i) \neq 0$ для каждого собственного значения λ_k матрицы A , матрица $M + (I + s\Gamma)G(s)$ строго положительно вещественная, где $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ и $M =$

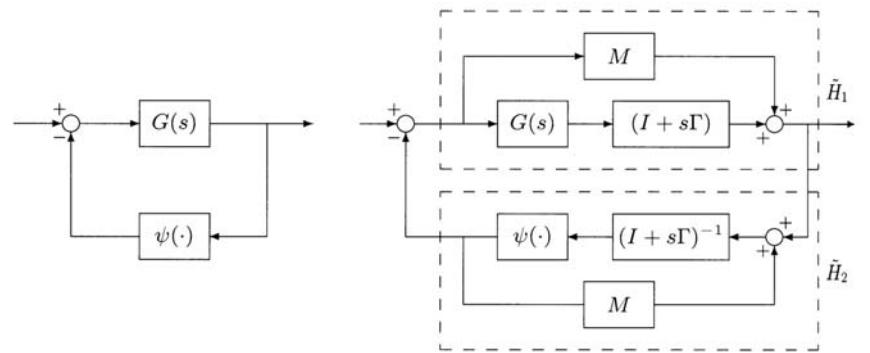


Рис. 7.12. Преобразование контура

$= \text{diag}(1/k_1, \dots, 1/k_p)$. Если секторное условие $\psi_i \in [0, k_i]$ выполнено лишь на множестве $Y \subset R^p$, вышеприведенные условия обеспечивают абсолютную устойчивость системы в конечной области.

Доказательство: Преобразование контура, изображенное на рисунке 7.12, приводит к системе с обратной связью \tilde{H}_1 и \tilde{H}_2 , где \tilde{H}_1 — линейная система, передаточная функция которой имеет вид

$$\begin{aligned} M + (I + s\Gamma)G(s) &= M + (I + s\Gamma)C(sI - A)^{-1}B = \\ &= M + C(sI - A)^{-1}B + \Gamma C(sI - A)^{-1}B = \\ &= M + C(sI - A)^{-1}B + \Gamma C(sI - A + A)(sI - A)^{-1}B = \\ &= M + (C + \Gamma CA)(sI - A)^{-1}B + \Gamma CB. \end{aligned}$$

Таким образом, $M + (I + s\Gamma)G(s)$ может быть реализована моделью состояния $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$, где $\mathcal{A} = A$, $\mathcal{B} = B$, $\mathcal{C} = C + \Gamma CA$ и $\mathcal{D} = M + \Gamma CB$. Пусть λ_k — собственное значение матрицы A и v_k — соответствующий собственный вектор. Тогда

$$(C + \Gamma CA)v_k = (C + \Gamma C\lambda_k)v_k = (I + \lambda_k\Gamma)Cv_k.$$

Из условия $(1 + \lambda_k\gamma_i) \neq 0$ следует, что пара $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ наблюдаема и, следовательно, реализация $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ является минимальной. Если $M + (I + s\Gamma)G(s)$ строго положительно вещественна, мы можем применить лемму Калмана–Якубовича–Попова и заключить, что существуют матрицы $P = P^T > 0$, L и W , а также положительная константа ε , удовлетворяющие

$$PA + A^T P = -L^T L - \varepsilon P, \quad (7.16)$$

$$PB = (C + \Gamma CA)^T - L^T W, \quad (7.17)$$

$$W^T W = 2M + \Gamma C B + B^T C^T \Gamma \quad (7.18)$$

и $V = (1/2)x^T Px$ — функция запаса для \tilde{H}_1 . С другой стороны, можно показать (см. упражнение 6.2), что \tilde{H}_2 пассивна с функцией запаса

$\sum_{i=1}^p \gamma_i \int_0^{y_i} \psi_i(\sigma) d\sigma$. Таким образом, функция запаса для преобразованной системы с обратной связью, изображенной на рисунке 7.12, имеет вид

$$V = \frac{1}{2}x^T Px + \sum_{i=1}^p \gamma_i \int_0^{y_i} \psi_i(\sigma) d\sigma.$$

Используем V в качестве функции Ляпунова для исходной системы (7.13)–(7.15). Тогда производная \dot{V} определяется равенством

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{2}x^T Px + \frac{1}{2}\dot{x}^T Px + \psi^T(y)\Gamma\dot{y} = \\ &= \frac{1}{2}x^T(PA + A^TP)x + x^T PBu + \psi^T(y)\Gamma C(Ax + Bu).\end{aligned}$$

Используя (7.16) и (7.17), получаем

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\frac{1}{2}x^T L^T Lx - \frac{1}{2}\varepsilon x^T Px + x^T(C^T + A^T C^T \Gamma - L^T W)u + \\ &\quad + \psi^T(y)\Gamma CAx + \psi^T(y)\Gamma CBu.\end{aligned}$$

Подставляя $u = -\psi(y)$ и используя (7.18), получаем равенство

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\frac{1}{2}\varepsilon x^T Px - \frac{1}{2}(Lx + Wu)^T(Lx + Wu) - \psi(y)^T[y - M\psi(y)] \leqslant \\ &\leqslant -\frac{1}{2}\varepsilon x^T Px,\end{aligned}$$

которое показывает, что начало координат глобально асимптотически устойчиво. Если ψ удовлетворяет секторному условию лишь для $y \in Y$, выполненный анализ справедлив в некоторой окрестности начала координат, т. е. начало координат асимптотически устойчиво. \square

Для того, чтобы $M + (I + s\Gamma)G(s)$ была строго положительно вещественной, необходимо чтобы $G(s)$ была гурвицовой. Так же как и в случае кругового критерия, это ограничение на $G(s)$ может быть снято с использованием преобразование контура, обеспечивающим замену $G(s)$ на $G(s)[I + K_1 G(s)]^{-1}$. Мы не будем приводить здесь применение этой идеи, но проиллюстрируем ее на примере. В скалярном случае $p = 1$ мы можем проверить графически то, что $Z(s) = (1/k) + (1 + s\gamma)G(s)$ является строго положительно вещественной. Из леммы 6.1 следует, что $Z(s)$ является строго положительно вещественной, если $G(s)$ гурвицева и

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[G(j\omega)] - \gamma\omega\operatorname{Im}[G(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in [-\infty, \infty], \quad (7.19)$$

где $G(j\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] + j\operatorname{Im}[G(j\omega)]$. Условие (7.19) выполнено, если график зависимости между $\operatorname{Re}[G(j\omega)]$ и $\omega\operatorname{Im}[G(j\omega)]$ с ω в качестве параметра лежит справа от прямой, проходящей через точку $-(1/k) + j0$ и имеющей тангенс угла наклона $1/\gamma$. (См. рисунок 7.13.) Эта кривая известна как кривая Попова, которая отличается от кривой Найквиста, поскольку последняя представляет собой зависимость между $\operatorname{Re}[G(j\omega)]$ и $\operatorname{Im}[G(j\omega)]$. Если условие (7.19) выполнено лишь для $\omega \in (-\infty, \infty)$ и

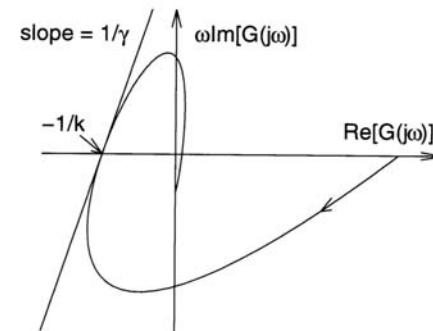


Рис. 7.13. Кривая Попова (slope — угловой коэффициент)

левая часть предыдущего неравенства стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$, то необходимо аналитически проверить выполнение неравенства

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \left\{ \frac{1}{k} + \operatorname{Re}[G(j\omega)] - \gamma\omega\operatorname{Im}[G(j\omega)] \right\} > 0.$$

Этому случаю соответствует ситуация, когда $k = \infty$ и $G(s)$ имеет относительную степень, равную двум.

При $\gamma = 0$ условие (7.19) сводится к круговому критерию $\operatorname{Re}[G(j\omega)] > -1/k$, т. е. для системы (7.13)–(7.15) условия критерия Попова являются более слабыми по сравнению с условиями кругового критерия. Другими словами, при $\gamma > 0$ свойство абсолютной устойчивости может быть установлено при менее жестких условиях.

Пример 7.5. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - h(y), \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

Эта система принимает форму (7.13)–(7.15) если положить $\psi = h$, но при этом матрица A не является гурвицовой. Прибавив и вычтя из правой части второго равенства член αy , где $\alpha > 0$, и определив нелинейность равенством $\psi(y) = h(y) - \alpha y$, мы можем привести систему к виду (7.13)–(7.15), где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что h принадлежит сектору $[\alpha, \beta]$, где $\beta > \alpha$. Тогда ψ принадлежит сектору $[0, k]$, где $k = \beta - \alpha$. Условие (7.19) принимает вид

$$\frac{1}{k} + \frac{\alpha - \omega^2 + \gamma\omega^2}{(\alpha - \omega^2)^2 + \omega^2} > 0, \quad \forall \omega \in [-\infty, \infty].$$

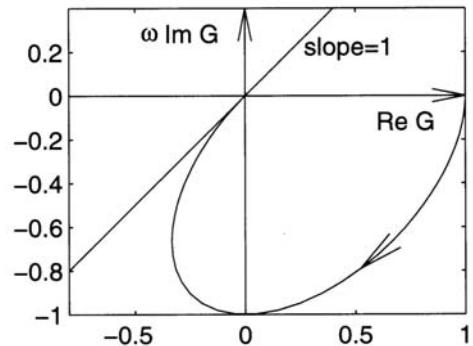


Рис. 7.14. Кривая Попова в примере 7.5 (slope — угловой коэффициент)

Это неравенство справедливо при всех конечных положительных значениях α и k , если $\gamma > 1$. Более того, предыдущее неравенство выполнено при $k = \infty$ для всех $\omega \in (-\infty, \infty)$ и

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega^2(\alpha - \omega^2 + \gamma\omega^2)}{(\alpha - \omega^2)^2 + \omega^2} = \gamma - 1 > 0.$$

Таким образом, система является абсолютно устойчивой при всех нелинейностях h из сектора $[\alpha, \infty]$, где α может быть выбрана произвольно малой. На рисунке 7.14 показана кривая Попова для $G(j\omega)$ при $\alpha = 1$. Кривая изображена только для $\omega \geq 0$, поскольку $\text{Re}[G(j\omega)]$ и $\omega \text{Im}[G(j\omega)]$ являются четными функциями от ω . Кривая Попова расположена справа и асимптотически стремится к прямой, проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент, равный единице. Поэтому она лежит правее любой другой прямой, имеющей угловой коэффициент меньше единицы и пересекающей вещественную ось в начале координат; при этом она асимптотически стремится к этой прямой при $\omega \rightarrow \infty$. Для того, чтобы убедиться в целесообразности выбора положительной γ , положим $\gamma = 0$ и применим круговой критерий. Из второго пункта теоремы 7.2 следует, что система является абсолютно устойчивой, если кривая Найквиста для $G(j\omega)$ лежит справа от вертикальной прямой $\text{Re}[s] = -1/k$. Поскольку кривая Найквиста частично расположена в левой полуплоскости, величина k не может быть произвольно большой. Максимальное допустимое значение k может быть вычислено аналитически из условия

$$\frac{1}{k} + \frac{\alpha - \omega^2}{(\alpha - \omega^2)^2 + \omega^2} > 0, \quad \forall \omega \in [-\infty, \infty],$$

из которого следует, что $k < 1 + 2\sqrt{\alpha}$. Таким образом, используя круговой критерий мы можем заключить лишь то, что система является абсолютно устойчивой для всех нелинейностей h из сектора $[\alpha, 1 + \alpha + 2\sqrt{\alpha} - \varepsilon]$, где $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ могут быть произвольно малыми. \triangle

7.2. Метод описывающей функции

Рассмотрим нелинейную систему с одним входом и одним выходом, представленную в виде соединения систем с обратной связью, изображенного на рисунке 7.1, где $G(s)$ — строго собственная рациональная передаточная функция и ψ — зависящая от времени нелинейность без памяти. Предположим, что внешнее входное воздействие отсутствует ($r = 0$) и рассмотрим вопрос о существовании в системе периодических решений. Периодическое решение удовлетворяет равенству $y(t + 2\pi/\omega) = y(t)$ для всех t , где ω — частота колебаний. Мы будем использовать общий метод поиска периодических решений, известный как *метод гармонического баланса*. Идея этого метода заключается в том, чтобы представить периодическое решение в виде ряда Фурье и определить частоту ω и коэффициенты Фурье, с учетом того, что это решение должно удовлетворять уравнению системы. Предположим, что $y(t)$ — периодическая функция, равенство

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(jk\omega t)$$

представляет собой ее разложение Фурье, где a_k — комплексные коэффициенты,¹⁾ $a_k = \bar{a}_{-k}$ и $j = \sqrt{-1}$. Поскольку $\psi(\cdot)$ — зависящая от времени нелинейность, $\psi(y(t))$ также является периодической функцией с той же частотой ω и она может быть представлена в следующей форме:

$$\psi(y(t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(jk\omega t),$$

где каждый комплексный коэффициент c_k представляет собой функцию от всех a_i . Для того, чтобы функция $y(t)$ являлась решением системы с обратной связью, необходимо чтобы она удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$d(p)y(t) + n(p)\psi(y(t)) = 0,$$

где p — дифференциальный оператор $p(\cdot) = d(\cdot)/dt$ и $n(s)$ и $d(s)$ — полиномы, являющиеся соответственно числителем и знаменателем $G(s)$. Поскольку

$$p \exp(jk\omega t) = \frac{d}{dt} \exp(jk\omega t) = jk\omega \exp(jk\omega t),$$

¹⁾ Надчеркивание над комплексной величиной обозначает ее комплексное сопряжение.

имеем

$$d(p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(jk\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(jk\omega) a_k \exp(jk\omega t)$$

и

$$n(p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(jk\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n(jk\omega) c_k \exp(jk\omega t).$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение, получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [d(jk\omega) a_k + n(jk\omega) c_k] \exp(jk\omega t) = 0.$$

С учетом того, что функции $\exp(jk\omega t)$ ортогональны при различных значениях k , можно утверждать, что коэффициенты Фурье должны удовлетворять равенствам

$$G(jk\omega) c_k + a_k = 0 \quad (7.20)$$

для всех целых чисел k . Поскольку $G(jk\omega) = \overline{G}(-jk\omega)$, $a_k = \bar{a}_{-k}$ и $c_k = \bar{c}_{-k}$, достаточно рассмотреть (7.20) при $k \geq 0$. Уравнение (7.20) является бесконечномерным уравнением, найти решение которого вряд ли возможно. Поэтому необходимо найти его конечномерную аппроксимацию. Поскольку передаточная функция $G(s)$ является строго собственной, т. е. $G(j\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$, разумно предположить, что существует целое число $q > 0$, такое что при всех $k > q$ и достаточно малых $|G(jk\omega)|$, можно заменить $G(jk\omega)$ (и, следовательно, a_k) на 0. Эта аппроксимация позволяет свести (7.20) к конечномерной задаче

$$G(jk\omega) \hat{c}_k + \hat{a}_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, q, \quad (7.21)$$

где «крышки» над коэффициентами Фурье поставлены для того, чтобы подчеркнуть, что решение уравнения (7.21) является лишь аппроксимацией решения уравнения (7.20). Сложность уравнения (7.21) возрастает с увеличением q и при больших q эта конечномерная задача может также оказаться достаточно сложной. Простейший случай этой задачи возникает при $q = 1$. Для ее решения, разумеется, требуется, чтобы передаточная функция $G(s)$ имела крутую характеристику «фильтра низких частот», что позволяет аппроксимировать $G(jk\omega)$ нулем при всех $k > 1$. Однако даже если нам известна $G(s)$, мы не можем быть уверены в том, что эта аппроксимация является адекватной, поскольку мы не знаем частоты колебаний ω . Тем не менее, в классическом методе описывающей функции используется эта аппроксимация и полагается $\hat{a}_k = 0$ при $k > 1$ для того, чтобы свести задачу к решению двух уравнений

$$G(0) \hat{c}_0(\hat{a}_0, \hat{a}_1) + \hat{a}_0 = 0, \quad (7.22)$$

$$G(j\omega) \hat{c}_1(\hat{a}_0, \hat{a}_1) + \hat{a}_1 = 0. \quad (7.23)$$

Заметим, что (7.22) и (7.23) представляют собой систему из одного вещественного уравнения (7.22) и одного комплексного уравнения (7.23) относительно двух вещественных неизвестных ω и \hat{a}_0 , и одной комплексной неизвестной \hat{a}_1 . В вещественных величинах эта задача эквивалентна решению трех уравнений относительно четырех переменных. Это обусловлено тем, что для автономной системы начало отсчета времени может быть выбрано произвольно и, следовательно, если (\hat{a}_0, \hat{a}_1) удовлетворяет уравнению, то для произвольной вещественной θ пара $(\hat{a}_0, \hat{a}_1 e^{j\theta})$ представляет собой другое решение. Для того, чтобы учесть эту «неединственность», выберем в качестве первой гармоники $y(t)$ функцию $a \sin \omega t$, $a \geq 0$. Тем самым мы выбираем начало отсчета времени так, чтобы фаза первой гармоники была равна нулю. Используя

$$a \sin \omega t = \frac{a}{2j} [\exp(j\omega t) - \exp(-j\omega t)] \Rightarrow \hat{a}_1 = \frac{a}{2j}$$

перепишем (7.22) и (7.23) в следующем виде:

$$G(0) \hat{c}_0 \left(\hat{a}_0, \frac{a}{2j} \right) + \hat{a}_0 = 0, \quad (7.24)$$

$$G(j\omega) \hat{c}_1 \left(\hat{a}_0, \frac{a}{2j} \right) + \frac{a}{2j} = 0. \quad (7.25)$$

Поскольку левая часть (7.24) не зависит от ω , это уравнение может быть разрешено относительно \hat{a}_0 и полученное решение будет функцией от a . Заметим, что если $\psi(\cdot)$ является нечетной функцией, т. е.

$$\psi(-y) = -\psi(y),$$

то $\hat{a}_0 = \hat{c}_0 = 0$ — решение (7.24), поскольку

$$\hat{c}_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \psi(\hat{a}_0 + a \sin \omega t) dt.$$

Для простоты изложения ограничимся рассмотрением случая, когда нелинейности представлены нечетными функциями и положим $\hat{a}_0 = \hat{c}_0 = 0$. Тогда уравнение (7.25) может быть переписано в следующей форме

$$G(j\omega) \hat{c}_1 \left(0, \frac{a}{2j} \right) + \frac{a}{2j} = 0. \quad (7.26)$$

Коэффициент $\hat{c}_1(0, a/2j)$ представляет собой комплексный коэффициент Фурье при первой гармонике на выходе нелинейности, если на вход этой нелинейности подается синусоидальный сигнал $a \sin \omega t$. Этот

коэффициент определяется равенством

$$\begin{aligned}\hat{c}_1(0, a/2j) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \psi(a \sin \omega t) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [\psi(a \sin \omega t) \cos \omega t - j\psi(a \sin \omega t) \sin \omega t] dt.\end{aligned}$$

Первый член подынтегрального выражения является нечетной функцией, а второй — четной. Поэтому интеграл от первого члена по полному периоду равен нулю и, следовательно, предыдущее выражение упрощается

$$\hat{c}_1(0, a/2j) = -j \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} \psi(a \sin \omega t) \sin \omega t dt.$$

Определим функцию $\Psi(a)$ равенством

$$\Psi(a) = \frac{\hat{c}_1(0, a/2j)}{a/2j} = \frac{2\omega}{\pi a} \int_0^{\pi/\omega} \psi(a \sin \omega t) \sin \omega t dt. \quad (7.27)$$

Тогда (7.26) может быть переписано в виде

$$[G(j\omega)\Psi(a) + 1]a = 0. \quad (7.28)$$

Поскольку нас не интересует решение при $a = 0$, мы можем ограничиться нахождением всех решений уравнения

$$G(j\omega)\Psi(a) + 1 = 0. \quad (7.29)$$

Уравнение (7.29) известно как *уравнение гармонического баланса первого порядка*, или просто *уравнение гармонического баланса*. Функция $\Psi(a)$, определяемая равенством (7.27), называется *описывающей функцией* нелинейности ψ . Она может быть найдена путем подачи синусоидального сигнала $a \sin \omega t$ на вход нелинейности и вычислением отношения коэффициента Фурье первой гармоники на выходе нелинейности и коэффициента a . Эта функция может рассматриваться как «эквивалентный коэффициент усиления» линейного не зависящего от времени элемента, реакцией которого на вход $a \sin \omega t$ является $\Psi(a)a \sin \omega t$. Эта концепция эквивалентного коэффициента усиления, иногда называемая *эквивалентной линеаризацией*, может быть использована и при анализе систем с зависящими от времени нелинейностями более общего вида или с нелинейностями с памятью, например

нелинейностями гистерезисного типа или нелинейностями с люфтом.¹⁾ В этих ситуациях описывающая функция может быть комплексной и зависеть от a и ω . Далее мы будем рассматривать лишь описывающие функции для нечетных не зависящих от времени нелинейностей без памяти, для которых функция $\Psi(a)$ является вещественной, зависит только от a и задается выражением вида

$$\Psi(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi \psi(a \sin \theta) \sin \theta d\theta, \quad (7.30)$$

которое может быть получено из (7.27) путем замены переменной интегрирования t на $\theta = \omega t$.

Сущность метода описывающей функции (describing function method) заключается в следующих импликациях. Если (7.29) имеет решение (a_s, ω_s) , то «возможно» существует периодическое решение системы с частотой и амплитудой (на входе нелинейности) близкими к ω_s и a_s . Обратно, если (7.29) не имеет решений, то система «возможно» не имеет периодического решения. Для того, чтобы заменить слово «возможно» на слово «определенено», а также для того, чтобы прояснить смысл выражения «близко к ω_s и a_s » в случае существования периодического решения, необходимо выполнить дополнительный анализ. Этот анализ будет представлен в конце этого параграфа. Здесь мы сосредоточимся на задачах нахождения описывающей функции и решения уравнения гармонического баланса (7.29). Следующие три примера иллюстрируют процедуру определения описывающей функции для нечетных нелинейностей.

Пример 7.6. Рассмотрим реле $\psi(y) = \text{sign}(y)$. Описывающая функция определяется равенством

$$\Psi(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi \psi(a \sin \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4}{\pi a}$$

△

Пример 7.7. Рассмотрим кусочно-линейную функцию, график которой изображен на рисунке 7.15. Если синусоидальный сигнал на входе этой нелинейности имеет амплитуду $a \leq \delta$, нелинейность действует как линейный усилитель и на ее выходе появится синусоидальный

¹⁾ См. работы [18] и [85]. Прим. ред. перев. — Метод гармонического баланса для исследования колебаний в нелинейных системах был предложен для частного случая систем 2-го порядка в 1920-е гг. Б. Ван-дер-Полем и получил далеко идущие обобщения в работах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [Д18]. В теорию управления был введен Л.С. Гольдфарбом [Д24] в 1940-е гг. Подробнее о методе и о его дальнейшем развитии см. учебники [Д13, Д54, Д58].

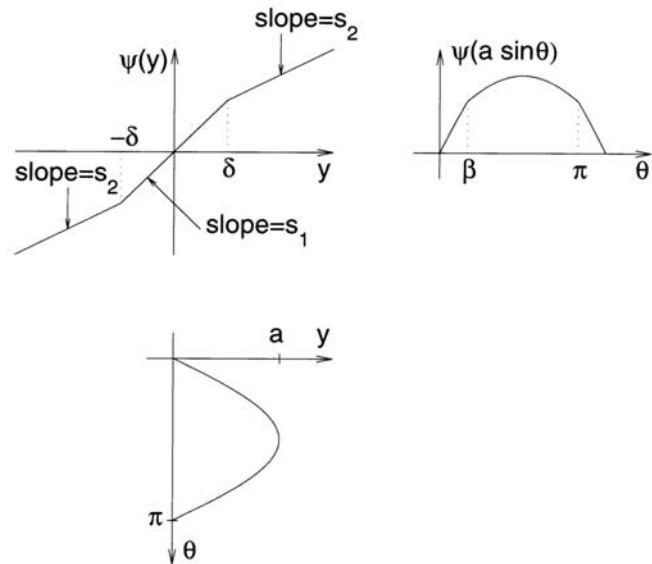


Рис. 7.15. Кусочно-линейная функция (slope — угловой коэффициент)

сигнал с амплитудой $s_1 a$. Следовательно, описывающая функция будет иметь вид $\Psi(a) = s_1$, т. е. эта функция не будет зависеть от a . При $a > \delta$ мы можем разделить интеграл (7.30) на части, каждая из которых соответствует очередному линейному сегменту $\psi(\cdot)$. Далее, с учетом нечетности сигнала на выходе можно упростить процедуры интегрирования:

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi \psi(a \sin \theta) \sin \theta d\theta = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} \psi(a \sin \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{4}{\pi a} \int_0^\beta a s_1 \sin 2\theta d\theta + \frac{4}{\pi a} \int_\beta^{\pi/2} [\delta s_1 + s_2(a \sin \theta - \delta)] \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{2s_1}{\pi} \left(\beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right) + \frac{4\delta(s_1 - s_2)}{\pi a} \left(\cos \beta - \cos \frac{\pi}{2} \right) + \\ &\quad + \frac{2s_2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi - \beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right) = \\ &= \frac{2(s_1 - s_2)}{\pi} \left(\beta + \frac{\delta}{a} \cos \beta \right) + s_2, \end{aligned}$$

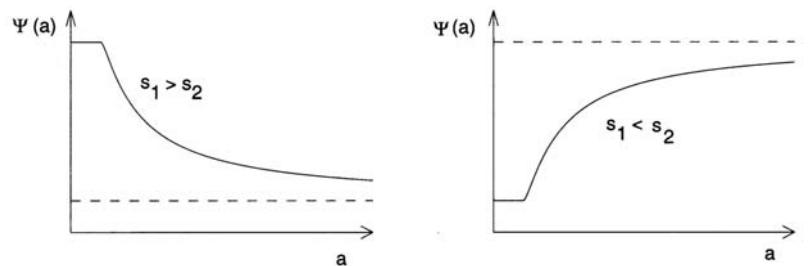


Рис. 7.16. Описывающая функция для кусочно-линейной функции, изображенной на рисунке 7.15

где $\beta = \sin^{-1} \left(\frac{\delta}{a} \right)$. Таким образом,

$$\Psi(a) = \frac{2(s_1 - s_2)}{\pi} \left[\sin^{-1} \left(\frac{\delta}{a} \right) + \frac{\delta}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{a} \right)^2} \right] + s_2.$$

График полученной описывающей функции показан на рисунке 7.16. Выбирая значения δ и угловые коэффициенты s_1 и s_2 , можно получить описывающие функции для нелинейностей различного типа. Например, нелинейность насыщения является частным случаем кусочно-линейной функции на рисунке 7.15 при $\delta = 1$, $s_1 = 1$ и $s_2 = 0$. Ее описывающая функция определяется равенством

$$\Psi(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq a \leq 1 \\ \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1} \left(\frac{1}{a} \right) + \frac{1}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{a} \right)^2} \right], & \text{если } a > 1 \end{cases}$$

△

Пример 7.8. Рассмотрим нечетную нелинейность, удовлетворяющую секторному условию

$$\alpha y^2 \leq y\psi(y) \leq \beta y^2$$

для всех $y \in R$. Описывающая функция $\Psi(a)$ удовлетворяет оценке снизу

$$\Psi(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi \psi(a \sin \theta) \sin \theta d\theta \geq \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \alpha$$

и оценке сверху

$$\Psi(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi \psi(a \sin \theta) \sin \theta d\theta \leq \frac{2\beta}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \beta.$$

Поэтому,

$$\alpha \leq \Psi(a) \leq \beta, \forall a \geq 0.$$

△

Поскольку описывающая функция $\Psi(a)$ является вещественной, выражение (7.29) может быть переписано в следующем виде:

$$\{\operatorname{Re}[G(j\omega)] + j \operatorname{Im}[G(j\omega)]\} \Psi(a) + 1 = 0.$$

Это уравнение эквивалентно двум вещественным уравнениям

$$1 + \Psi(a) \operatorname{Re}[G(j\omega)] = 0, \quad (7.31)$$

$$\operatorname{Im}[G(j\omega)] = 0. \quad (7.32)$$

Поскольку (7.32) не зависит от a , мы можем решить это уравнение относительно ω , определив возможные частоты колебания. После этого для каждого такого решения ω мы можем решить (7.31) относительно a . Заметим, что возможные частоты колебания определяются исключительно передаточной функцией $G(s)$; эти частоты не зависят от нелинейности $\psi(\cdot)$. Нелинейность определяет соответствующее значение a — возможную амплитуду колебания. Эта процедура может быть выполнена аналитически для передаточных функций, полиномы которых имеют малый порядок. Следующие примеры иллюстрируют этот подход.

Пример 7.9. Пусть

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}.$$

Рассмотрим две нелинейности: реле и нелинейность насыщения. Нетрудно представить $G(j\omega)$ в следующем виде:

$$G(j\omega) = \frac{-3\omega - j(2 - \omega^2)}{9\omega^3 + \omega(2 - \omega^2)^2}.$$

Уравнение (7.32) принимает следующую форму

$$\frac{(2 - \omega^2)}{9\omega^3 + \omega(2 - \omega^2)^2} = 0$$

и имеет один положительный корень $\omega = \sqrt{2}$. Заметим, что для каждого положительного корня (7.32) существует отрицательный корень равный по абсолютной величине. Мы будем рассматривать только положительный корень. Заметим также, что корень $\omega = 0$ не рассматривается, поскольку ему не соответствует нетривиальное периодическое решение. Вычисляя $\operatorname{Re}[G(j\omega)]$ при $\omega = \sqrt{2}$ и подставляя полученный результат в (7.31), получаем $\Psi(a) = 6$. Вся эта информация была получена без конкретизации имеющейся в системе нелинейности $\psi(\cdot)$. Рассмотрим теперь случай, когда нелинейность представлена в виде реле. В примере 7.6 было показано, что $\Psi(a) = 4/\pi a$. Поэтому, уравнение $\Psi(a) = 6$ имеет единственное решение $a = 2/3\pi$. Мы можем сказать, что нелинейная система с передаточной функцией $G(s)$ и нелинейностью типа реле будет «возможно» иметь периодическое решение с частотой,

близкой к $\sqrt{2}$ и амплитудой (на входе нелинейности), близкой к $2/3\pi$. Рассмотрим теперь случай нелинейности с насыщением. В примере 7.7 было показано, что $\Psi(a) \leq 1$ для всех a . Поэтому, $\Psi(a) = 6$ не имеет решений и, следовательно, мы можем ожидать, что в нелинейной системе с передаточной функцией $G(s)$ и нелинейностью насыщения незатухающие колебания будут отсутствовать. △

Пример 7.10. Пусть

$$G(s) = \frac{-s}{s^2 + 0.8s + 8}.$$

Рассмотрим две нелинейности: «насыщение» (saturation) и «зона нечувствительности» (dead-zone). Последняя является частным случаем кусочно-линейной функции из примера 7.7 с $s_1 = 0$, $s_2 = 0.5$, и $\delta = 1$. Функцию $G(j\omega)$ можно представить в следующем виде:

$$G(j\omega) = \frac{-0.8\omega^2 - j\omega(8 - \omega^2)}{0.64\omega^2 + (8 - \omega^2)^2}.$$

Уравнение (7.32) имеет единственный положительный корень $\omega = 2\sqrt{2}$. Вычисляя $\operatorname{Re}[G(j\omega)]$ при $\omega = 2\sqrt{2}$ и подставляя полученное значение в (7.31), получаем $\Psi(a) = 0.8$. Для случая нелинейности насыщения описывающая функция приведена в примере 7.7 и уравнение $\Psi(a) = 0.8$ имеет единственное решение $a = 1.455$. Поэтому мы можем ожидать, что нелинейная система с передаточной функцией $G(s)$ и нелинейностью насыщения будет иметь периодическое решение с частотой, близкой к $2\sqrt{2}$ и амплитудой (на входе нелинейности), близкой к 1.455. При нелинейности типа «зона нечувствительности» описывающая функция $\Psi(a)$ меньше 0.8 для всех a . Таким образом, $\Psi(a) = 0.8$ не имеет решений и мы можем ожидать, что в нелинейной системе с передаточной функцией $G(s)$ и нелинейностью типа «зона нечувствительности» незатухающие колебания будут отсутствовать. В этом примере мы докажем отсутствие незатухающих колебаний тем, что система является абсолютно устойчивой для класса нелинейностей из сектора, включающего рассматриваемую нелинейность типа «зона нечувствительности». Легко показать, что

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] \geq -1.25, \forall \omega \in R.$$

Поэтому, с использованием кругового критерия (теорема 7.2) можно показать, что система абсолютно устойчива для нелинейностей из сектора $[0, \beta]$, $\beta < 0.8$. Рассматриваемая в этом примере нелинейность типа «зона нечувствительности» принадлежит этому сектору. Следовательно, начало координат пространства состояния является глобально асимптотически устойчивым и система не может иметь незатухающих колебаний. △

Пример 7.11. Рассмотрим уравнение Релея (Raleigh)

$$\ddot{z} + z = \varepsilon(\dot{z} - \frac{1}{3}z^3)$$

где ε — положительная константа. Для исследования вопроса о существовании у этого уравнения периодических решений мы представим его в виде системы с обратной связью, изображенной на рисунке 7.1. Пусть $u = -\dot{z}^3/3$, тогда уравнение системы можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned}\ddot{z} - \varepsilon \dot{z} + z &= \varepsilon u, \\ u &= -\frac{1}{3} \dot{z}^3.\end{aligned}$$

Первое уравнение представляет собой линейную систему. Выбрав $y = \dot{z}$ в качестве ее выхода, получаем передаточную функцию

$$G(s) = \frac{\varepsilon s}{s^2 - \varepsilon s + 1}.$$

Второе уравнение определяет нелинейность $\psi(y) = y^3/3$. Эти два уравнения в совокупности представляют собой систему с обратной связью, изображенную на рисунке 7.1. Описывающая функция для $\psi(y) = y^3/3$ определяется равенством

$$\Psi(a) = \frac{2}{3\pi a} \int_0^\pi (a \sin \theta)^3 \sin \theta d\theta = \frac{1}{4} a^2.$$

Функция $G(j\omega)$ может быть записана в виде

$$G(j\omega) = \frac{j\varepsilon\omega[(1-\omega^2) + j\varepsilon\omega]}{(1-\omega^2)^2 + \varepsilon^2\omega^2}.$$

Уравнение $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$ приводит к $\omega(1-\omega^2) = 0$ и, следовательно, существует единственное положительное решение $\omega = 1$. Тогда

$$1 + \Psi(a) \text{Re}[G(j)] = 0 \Rightarrow a = 2.$$

Поэтому мы можем ожидать, что уравнение Релея имеет периодическое решение с частотой около 1 рад/с и амплитудой колебания величины \dot{z} около 2. \triangle

Если передаточная функция имеет высокий порядок, нахождение решения уравнения гармонического баланса (7.29) может оказаться непростой задачей. Разумеется, всегда можно прибегнуть к использованию численных методов. Однако мощь метода описывающей функции заключается не в возможности нахождения решения уравнения (7.29) с использованием аналитических или численных методов, а в том, что это решение может быть получено графически, что сделало этот метод очень популярным. Равенство (7.29) может быть переписано в следующем виде:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{\Psi(a)} \quad (7.33)$$

или

$$\frac{1}{G(j\omega)} = -\Psi(a). \quad (7.34)$$

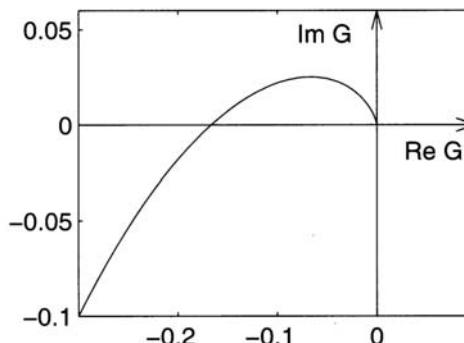


Рис. 7.17. Кривая Найквиста в примере 7.12

Из равенства (7.33) видно, что мы можем решить (7.29), изобразив кривую Найквиста для $G(j\omega)$ при $\omega > 0$ и годограф $-1/\Psi(a)$ для $a \geq 0$. Точки пересечения этих линий и представляют собой решения уравнения (7.29). Поскольку $\Psi(a)$ вещественна для нечетных нелинейностей, годограф $-1/\Psi(a)$ на комплексной плоскости расположен на вещественной оси. Из равенства (7.34) видно, что аналогичная процедура может быть выполнена в отношении «обратной» кривой Найквиста для $G(j\omega)$, т. е. годографа на комплексной плоскости $1/G(j\omega)$ при различных ω , а также годографа $-\Psi(a)$. Кривые Найквиста имеют важную роль в классической теории управления и описанное графическое представление метода описывающей функции очень популярно среди инженеров, имеющих дело с нелинейными элементами.

Пример 7.12. Рассмотрим передаточную функцию $G(s)$ из примера 7.9. Кривая Найквиста для $G(j\omega)$ изображена на рисунке 7.17. Эта кривая пересекает вещественную ось в точке $(-1/6, 0)$. При нечетных нелинейностях уравнение (7.29) имеет решение, если годограф $-1/\Psi(a)$ на вещественной оси содержит эту точку пересечения. \triangle

Обратимся к вопросу обоснования метода описывающей функции. Являясь приближенным методом решения бесконечномерного уравнения (7.20), метод описывающей функции может быть обоснован оценками ошибки аппроксимации. Для простоты мы выполним этот анализ, если нелинейности характеризуются следующими двумя особенностями:¹⁾

- Нечетная нелинейность, т. е. $\psi(y) = -\psi(-y)$, $\forall y \neq 0$.

¹⁾ Теория для нелинейностей более общего вида описана в работах [24], [129] и [189]. Прим. ред. перев. — На русском языке имеется целый ряд результатов по обоснованию метода гармонического баланса, см. например [Д16, Д17].

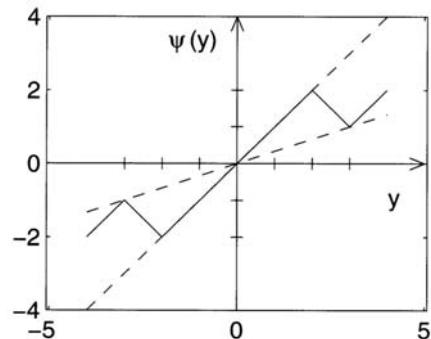


Рис. 7.18. Нелинейность в примере 7.13

- Скалярная нелинейность, удовлетворяющая неравенству

$$\alpha(y_2 - y_1) \leq [\psi(y_2) - \psi(y_1)] \leq \beta(y_2 - y_1)$$

для всех вещественных чисел y_1 и $y_2 > y_1$.

Нелинейность $\psi(\cdot)$ с этими свойствами принадлежит сектору $[\alpha, \beta]$. Следовательно, с использованием результатов примера 7.8 можно утверждать, что соответствующая описывающая функция удовлетворяет $\alpha \leq \Psi(a) \leq \beta$ для всех $a \geq 0$. Следует однако заметить, что ограничение на угол наклона не эквивалентно секторному условию. Нелинейность может удовлетворять ограничению на углы с указанными границами α и β , и принадлежать сектору $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$ с другими границами $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$.¹⁾ Подчеркнем, что при последующем анализе мы будем использовать ограничения на угол наклона α и β , но не границы сектора $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$.

Пример 7.13. Рассмотрим кусочно-линейную нечетную нелинейность

$$\psi(y) = \begin{cases} y, & \text{при } 0 \leq y \leq 2, \\ 4 - y, & \text{при } 2 \leq y \leq 3, \\ y - 2, & \text{при } y \geq 3, \end{cases}$$

показанную на рисунке 7.18. Нелинейность удовлетворяет ограничению на угол наклона

$$-1 \leq \frac{\psi(y_2) - \psi(y_1)}{y_2 - y_1} \leq 1$$

и секторному условию

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\psi(y)}{y} \leq 1.$$

В последующем анализе следует положить $\alpha = -1$ и $\beta = 1$. \triangle

¹⁾ Проверьте, что $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \subset [\alpha, \beta]$.

Мы ограничимся рассмотрением вопроса о существовании полуволновых симметричных периодических решений,¹⁾ т.е. периодических решений, имеющих только нечетные гармоники. Это ограничение представляется разумным, поскольку мы рассматриваем нелинейности ψ с нечетной симметрией. Коэффициенты Фурье нечетной гармоники периодического решения $y(t)$ удовлетворяют (7.20) при $k = 1, 3, 5, \dots$. Основная идея, лежащая в основе анализа ошибки аппроксимации, заключается в разделении периодического решения $y(t)$ на первую гармонику $y_1(t)$ и более высокие гармоники $y_h(t)$. Выберем начальный отсчет времени так, чтобы фаза первой гармоники была равна нулю, т.е. $y_1(t) = a \sin \omega t$. Тогда,

$$y(t) = a \sin \omega t + y_h(t).$$

С использованием этого представления можно получить коэффициенты Фурье первой гармоники для $y(t)$ и $\psi(y(t))$:

$$a_1 = \frac{a}{2j},$$

$$c_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} \psi(a \sin \omega t + y_h(t)) \exp(-j\omega t) dt.$$

Из (7.20) при $k = 1$ имеем

$$G(j\omega)c_1 + a_1 = 0.$$

Введя в рассмотрение функцию

$$\Psi^*(a, y_h) = \frac{c_1}{a_1} = j \frac{2\omega}{\pi a} \int_0^{\pi/\omega} \psi(a \sin \omega t + y_h(t)) \exp(-j\omega t) dt,$$

мы можем переписать уравнение в следующем виде:

$$\frac{1}{G(j\omega)} + \Psi^*(a, y_h) = 0. \quad (7.35)$$

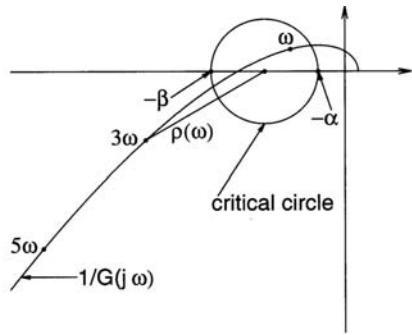
Прибавив $\Psi(a)$ к обеим частям (7.35), можно переписать это уравнение:

$$\frac{1}{G(j\omega)} + \Psi(a) = \delta\Psi, \quad (7.36)$$

где

$$\delta\Psi = \Psi(a) - \Psi^*(a, y_h).$$

¹⁾ Это сделано лишь для простоты изложения. Общий случай рассмотрен в работе [128].

Рис. 7.19. Нахождение $\rho(\omega)$ (critical circle — критический круг)

При $y_h = 0$, справедливо $\Psi^*(a, 0) = \Psi(a)$. Таким образом, $\delta\Psi = 0$ и (7.36) сводится к уравнению гармонического баланса

$$\frac{1}{G(j\omega)} + \Psi(a) = 0. \quad (7.37)$$

Уравнение гармонического баланса (7.37) представляет собой аппроксимацию точного решения (7.36). Ошибка аппроксимации $\delta\Psi$ не может быть определена аналитически, но ее величину можно оценить. Нашей задачей является найти верхнюю границу для $\delta\Psi$. Определим с этой целью две функции $\rho(\omega)$ и $\sigma(\omega)$. Изобразим на комплексной плоскости годограф (locus — геометрическое место точек) $1/G(j\omega)$, а также (критический) круг, диаметром которого служит интервал на вещественной оси $[-\beta, -\alpha]$. Заметим, что геометрическое место точек $-\Psi(a)$ расположено на вещественной оси внутри этой окружности, т. к. $\alpha \leq \Psi(a) \leq \beta$. Рассмотрим ω , такие что точки $1/G$, соответствующие $k\omega$ ($k > 1$ и нечетные), расположены вне критической окружности (см. рисунок 7.19). Расстояние от любой из этих точек до центра критической окружности равно

$$\left| \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{G(jk\omega)} \right|.$$

Определим

$$\rho(\omega) = \inf_{k>1, k \text{ нечетные}} \left| \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{G(jk\omega)} \right|. \quad (7.38)$$

Заметим, что мы определили $\rho(\omega)$ только для тех ω , при которых значения $1/G(jk\omega)$ расположены вне критической окружности для всех $k = 3, 5, \dots$, т. е. для ω , принадлежащих множеству

$$\Omega = \{ \omega \mid \rho(\omega) > \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \}.$$

На каждом связном подмножестве Ω' множества Ω определим

$$\sigma(\omega) = \frac{\left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)^2}{\rho(\omega) - \frac{\beta - \alpha}{2}}. \quad (7.39)$$

В следующей лемме утверждается, что положительная величина $\sigma(\omega)$ представляет собой ошибку $\delta\Psi$.

Лемма 7.1. В условиях сделанных предположений

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} y_h^2(t) dt \leq \left[\frac{2\sigma(\omega)a}{\beta - \alpha} \right]^2, \quad \forall \omega \in \Omega', \quad (7.40)$$

$$|\delta\Psi| \leq \sigma(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega'. \quad (7.41)$$

Доказательство: См. приложение С.13. \square

Доказательство леммы 7.1 основано на анализе уравнения $y_h = T(y_h)$ для $y_h(t)$. Показав, что $T(\cdot)$ является сжимающим отображением, мы можем вычислить верхнюю границу (7.40), которая, в свою очередь, используется для вычисления оценки сверху членов ошибки (7.41). Ограничения на угол наклона для нелинейности ψ используются при доказательстве того факта, что $T(\cdot)$ является сжимающим отображением. С использованием оценки (7.41) и неравенства (7.36) можно показать, что необходимым условием существования полуволнового симметричного периодического решения с $\omega \in \Omega'$, является выполнение неравенства

$$\left| \frac{1}{G(j\omega)} + \Psi(a) \right| \leq \sigma(\omega).$$

С геометрической точки зрения это неравенство означает, что точка $-\Psi(a)$ должна быть расположена в круге с центром в $1/G(j\omega)$ и радиусом $\sigma(\omega)$. Такой круг для ошибки можно построить для каждого $\omega \in \Omega' \subset \Omega$. Огибающая всех этих кругов на связном множестве Ω' образует частотную полосу неопределенности. Основанием для использования подмножества Ω является то, что при приближении ω к границе Ω круги ошибки становятся произвольно большими и перестают быть источником полезной информации. Подмножество Ω' должно быть выбрано так, чтобы полоса частот была как можно более узкой. Если $G(j\omega)$ обладает крутой характеристикой фильтрации низких частот, полоса неопределенности может быть достаточно узкой на Ω' . Заметим, что $\rho(\omega)$ является мерой крутизны характеристики фильтра низких частот для $G(j\omega)$; из (7.38) видно, что чем меньше $|G(jk\omega)|$, $k > 1$, тем больше $\rho(\omega)$. Из (7.39) видно, что при больших $\rho(\omega)$ радиус круга ошибки $\sigma(\omega)$ становится малым.

Рассмотрим пересечение частотной полосы неопределенности с годографом $-P\psi(a)$. Если полоса неопределенности не пересекается с $-\Psi(a)$, то очевидно (7.36) не имеет решений при $\omega \in \Omega'$. Если полоса

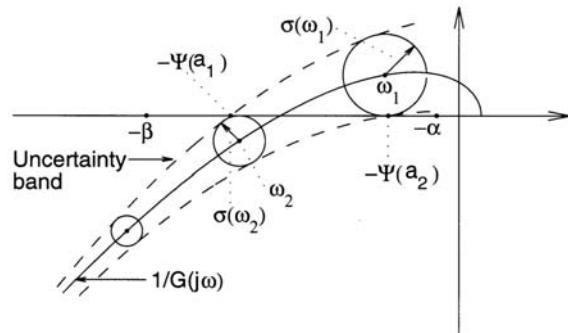


Рис. 7.20. Полное пересечение (uncertainty band — полоса неопределенности)

полностью содержит годограф \$-\Psi(a)\$ (см. рисунок 7.20), то можно ожидать, что существует решение, если при этом исключить некоторые вырожденные случаи. Мы можем найти границы ошибки при анализе указанных пересечений. Пусть \$a_1\$ и \$a_2\$ — амплитуды, соответствующие пересечениям границы частотной полосы неопределенности с годографом \$-\Psi(a)\$ и \$\omega_1\$ и \$\omega_2\$ — частоты, соответствующие кругам ошибки, касающихся годографа \$-\Psi(a)\$ с обеих его сторон и имеющих радиусы соответственно \$\sigma(\omega_1)\$ и \$\sigma(\omega_2)\$. Определим на плоскости \$(\omega, a)\$ прямоугольник \$\Gamma\$

$$\Gamma = \{(\omega, a) | \omega_1 < \omega < \omega_2, a_1 < a < a_2\}.$$

Этот прямоугольник содержит точку \$(\omega_s, a_s)\$, в которой пересекаются годографы \$1/G\$ и \$-\Psi\$, и эта точка является решением уравнения гармонического баланса (7.37). Оказывается, что при выполнении некоторых условий регулярности можно показать, что (7.36) имеет решение в замыкании \$\Gamma\$. Этими условиями регулярности являются следующие выражения:

$$\frac{d}{da}\Psi(a)\Big|_{a=a_s} \neq 0; \quad \frac{d}{d\omega}\text{Im}[G(j\omega)]\Big|_{\omega=\omega_s} \neq 0.$$

Полное пересечение полосы неопределенности и годографа \$-\Psi(a)\$ может быть точно определено, когда годограф \$1/G(j\omega)\$ пересекает годограф \$-\Psi(a)\$; как было показано, конечное множество \$\Gamma\$ может быть определено так, что точка \$(\omega_s, a_s)\$ является единственной точкой пересечения в \$\Gamma\$ и выполнены условия регулярности.

Наконец, заметим, что при высоких частотах, для которых всем гармоникам (включая первую) соответствуют точки \$1/G(j\omega)\$, расположенные вне критического круга, нам не нужно находить полосу неопределенности. Поэтому определим множество

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \omega \mid \left| \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{G(jk\omega)} \right| > \frac{\beta - \alpha}{2}, k = 1, 3, 5, \dots \right\},$$

рассмотрим наименьшую частоту в \$\tilde{\Omega}\$ в качестве наибольшей частоты в \$\Omega'\$ и будем уменьшать \$\omega\$ до тех пор, пока круги ошибок не станут слишком большими.

Следующая теорема представляет собой обоснование метода описывающей функции и является основным результатом этого параграфа.

Теорема 7.4. Рассмотрим систему, изображенную на рисунке 7.1, и предположим, что нелинейность \$\psi(\cdot)\$ является скалярной нечетной не зависящей от времени функцией без памяти, удовлетворяющей ограничению на углы наклона с границами \$\alpha\$ и \$\beta\$. Изобразим на комплексной плоскости годографы \$1/G(j\omega)\$ и \$-\Psi(a)\$ и построим критический круг, а также частотную полосу неопределенности так, как описано выше. Тогда

- система не имеет полу волновых симметричных периодических решений с собственной частотой \$\omega \in \tilde{\Omega}\$;
- система не имеет полу волновых симметричных периодических решений с собственной частотой \$\omega \in \Omega'\$, если соответствующий круг ошибки не пересекается с годографом \$-\Psi(a)\$;
- для каждого полного пересечения, определяющегося на плоскости \$(\omega, a)\$ множеством \$\Gamma\$, существует по крайней мере одно полу волновое симметричное периодическое решение

$$y(t) = a \sin \omega t + y_h(t)$$

с \$(\omega, a)\$ в \$\Gamma\$. При этом \$y_h(t)\$ удовлетворяет оценке (7.40).

Доказательство: См. приложение C.14. \square

Заметим, что в этой теореме дается достаточное условие существования колебаний и достаточное условие отсутствия колебаний. Однако эти условия не покрывают все возможные ситуации, и существуют такие, когда мы не можем дать определенного ответа на вопрос о существовании или отсутствии в системе колебаний.

Пример 7.14. Рассмотрим систему с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{-s}{s^2 + 0.8s + 8}$$

и нелинейностью насыщения. В примере 7.10 мы видели, что уравнение гармонического баланса имеет единственное решение \$\omega_s = 2\sqrt{2} \approx 2.83\$ и \$a_s = 1.455\$. Нелинейность насыщения удовлетворяет ограничениям на угол наклона с границами \$\alpha = 0\$ и \$\beta = 1\$. Поэтому центр критического круга расположен в \$-0.5\$ и его радиус равен \$0.5\$. Функция \$1/G(j\omega)\$ определяется равенством

$$\frac{1}{G(j\omega)} = -0.8 + j \frac{8 - \omega^2}{\omega}.$$

Следовательно, годограф \$1/G(j\omega)\$ расположен на прямой \$\text{Re}[s] = -0.8\$ (см. рисунок 7.21). Радиус круга ошибки \$\sigma(\omega)\$ был вычислен для восьми значений частоты, лежащих в пределах от \$\omega = 2.65\$ до \$\omega = 3.0\$ с шагом 0.05. Центры кругов ошибки располагаются

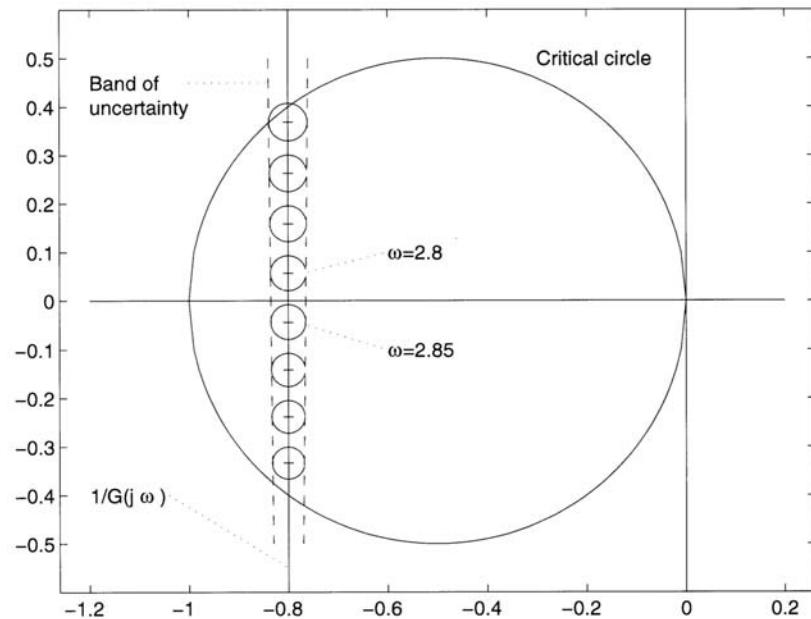


Рис. 7.21. Полоса неопределенности в примере 7.14 (uncertainty band — полоса неопределенности, critical circle — критический круг)

на прямой $\text{Re}[s] = -0.8$ внутри критического круга. Значения $\sigma(\omega)$ при $\omega = 2.65$ равно 0.0388, при $\omega = 3.0$ равно 0.0321, при этом значения $\sigma(\omega)$ монотонно изменяются на всем промежутке рассматриваемых частот. Во всех случаях ближайшей к критическому кругу гармоникой является третья и, следовательно, наименьшее значение в (7.38) достигается при $k = 3$. Границы полосы неопределенности почти вертикальны. Полоса неопределенности пересекается с годографом $-\Psi(a)$ в точках $a_1 = 1.377$ и $a_2 = 1.539$. Вещественная ось почти касается расположенного ниже круга ошибки, соответствующего значению $\omega = 2.85$ и поэтому мы можем положить $\omega_2 = 2.85$. Круг ошибки, соответствующий $\omega = 2.8$, является ближайшим кругом, почти касающимся вещественной оси сверху. Из этого следует, что $\omega_1 > 2.8$. При $\omega = 2.81$ мы получаем круг, который почти касается вещественной оси. Вышеприведенные данные позволяют определить множество Γ :

$$\Gamma = \{(\omega, a) \mid 2.81 < \omega < 2.85, 1.377 < a < 1.539\}.$$

В Γ существует лишь одна точка пересечения. Нам необходимо проверить выполнение условий регулярности. Значение производной

$$\frac{d}{da} \Psi(a) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{da} \left[\sin^{-1} \left(\frac{1}{a} \right) + \frac{1}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{a} \right)^2} \right] = -\frac{4}{\pi a^3} \sqrt{a^2 - 1}$$

отлично от нуля при $a = 1.455$ и

$$\left. \frac{d}{d\omega} \text{Im}[G(j\omega)] \right|_{\omega=\sqrt{8}} = \frac{2}{(0.8)^2} \neq 0.$$

Таким образом, из теоремы 7.4 следует, что система действительно имеет периодическое решение. Более того, можно утверждать, что частота колебаний ω принадлежит интервалу $[2.81, 2.85]$ и амплитуда первой гармоники на входе нелинейности принадлежит интервалу $[1.377, 1.539]$. Из оценки (7.40) видно, что член высших гармоник $y_h(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} y_h^2(t) dt \leqslant 0.0123, \quad \forall (\omega, a) \in \Gamma.$$

из которого видно, что форма волны сигнала на входе нелинейности близка к форме первой гармоники $a \sin \omega t$. \triangle

Пример 7.15. Рассмотрим систему из примера 7.9 с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

и нелинейностью насыщения, удовлетворяющей ограничению на угол наклона с границами $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. Обратная кривая Найквиста для $G(j\omega)$, показанная на рисунке 7.22, лежит вне критического круга для всех $\omega > 0$. Следовательно, $\bar{\Omega} = (0, \infty)$ и мы можем заключить, что колебания в системе отсутствуют. \triangle

7.3. Упражнения

7.1 С использованием кругового критерия исследуйте вопрос об абсолютной устойчивости систем с нижеследующими передаточными функциями. В каждом случае определите сектор $[\alpha, \beta]$, в котором система

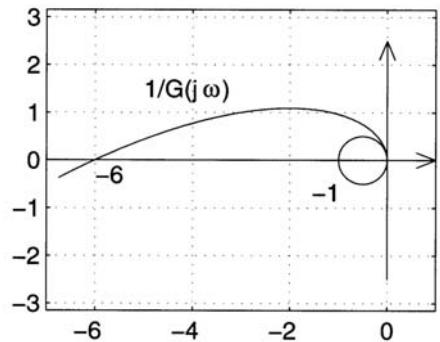


Рис. 7.22. Обратная кривая Найквиста и критический круг в примере 7.15

является абсолютно устойчивой.

- (1) $G(s) = \frac{s}{s^2 - s + 1}.$
- (2) $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}.$
- (3) $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}.$
- (4) $G(s) = \frac{s^2 - 1}{(s+1)(s^2 + 1)}.$
- (5) $G(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}.$
- (6) $G(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2(s-1)}.$
- (7) $G(s) = \frac{1}{(s+1)^4}.$
- (8) $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2}.$

7.2 Рассмотрим систему, изображенную на рисунке 7.1, при передаточной функции $G(s) = 2s/(s^2 + s + 1)$.

- (a) Покажите, что система абсолютно устойчива для нелинейностей из сектора $[0, 1]$.
- (b) Покажите, что система не имеет предельных циклов при $\psi(y) = \text{sat}(y)$.

7.3 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 - h(x_1 + x_2), \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - 2h(x_1 + x_2),$$

где h — гладкая функция, удовлетворяющая

$$yh(y) \geq 0, \quad \forall y \in R, \quad h(y) = \begin{cases} c, & \text{если } y \geq a_2 \\ 0, & \text{если } |y| \leq a_1 \\ -c, & \text{если } y \leq -a_2 \end{cases}$$

$$|h(y)| \leq c \quad \text{при } a_1 < y < a_2 \quad \text{и} \quad -a_2 < y < -a_1$$

- (a) Покажите, что начало координат является единственной точкой равновесия.

- (b) Покажите с использованием кругового критерия, что начало координат глобально асимптотически устойчиво.

7.4 ([201]) Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(\mu^2 + a^2 - q \cos \omega t)x_1 - 2\mu x_2,$$

где μ, a, q и ω — положительные константы. Представьте систему в форме соединения систем с обратной связью, изображенного на рисунке 7.1, с $\psi(t, y) = qy \cos \omega t$ и используйте круговой критерий для получения условий на μ, a, q и ω , обеспечивающих экспоненциальную устойчивость начала координат.

7.5 Рассмотрим линейную не зависящую от времени систему $\dot{x} = [A + BE(t)C]x$, где A — гурвицева матрица, $\|E(t)\|_2 \leq 1$, $\forall t \geq 0$ и $\sup_{\omega \in R} \sigma_{\max}[C(j\omega I - A)^{-1}B] < 1$. Покажите, что начало координат равномерно асимптотически устойчиво.

7.6 Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + Bu$. Пусть $u = -Fx$ — стабилизирующая обратная связь, т. е. матрица $(A - BF)$ — гурвицева. Предположим, что вследствие наличия в системе физических ограничений мы должны использовать в цепи обратной связи ограничитель вида $|u_i(t)| \leq L$. Замкнутая система может быть представлена в виде $\dot{x} = Ax - BL \text{sat}(Fx/L)$, где $\text{sat}(v)$ — вектор, i -й элемент которого представлен функцией насыщения.

- (a) Покажите, что система может быть представлена в виде соединения систем с обратной связью, изображенного на рисунке 7.1 с $G(s) = F(sI - A + BF)^{-1}B$ и $\psi(y) = L \text{sat}(y/L) - y$.
- (b) Определите условия асимптотической устойчивости начала координат с использованием многомерного кругового критерия.
- (c) Примените полученный результат к системе с

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F = [12] \quad \text{и} \quad L = 1$$

и оцените область притяжения.

7.7 Выполните упражнение 7.1 с использованием критерия Попова.

7.8 В этом упражнении будет получен вариант критерия Попова для скалярной передаточной функции $G(s)$, все полюсы которой расположены

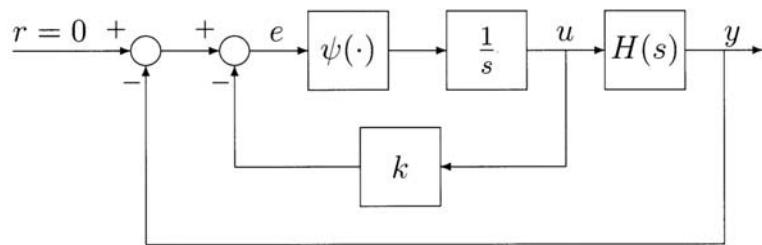


Рис. 7.23. Система в упражнении 7.9

ны в открытой левой полуплоскости, за исключением одного простого полюса на мнимой оси с положительным вычетом. Система имеет вид

$$\dot{z} = Az - B\psi(y), \quad \dot{v} = -\psi(y) \quad \text{и} \quad y = Cz + dv,$$

где $d > 0$, A — гурвицева матрица, (A, B) — управляемая пара, (A, C) — наблюдаемая пара и ψ принадлежит сектору $(0, k]$. Пусть $V(z, v) = z^T P z + a(y - Cz)^2 + b \int_0^y \psi(\sigma) d\sigma$, где $P = P^T > 0$, $a > 0$ и $b \geq 0$.

(a) Покажите, что функция V является положительно определенной и радиально неограниченной.

(b) Покажите, что \dot{V} удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} \leq z^T (PA + A^T P)z - 2z^T (PB - w)\psi(y) - \gamma\psi^2(y),$$

где $w = adC^T + (1/2)bA^T C^T$ и $\gamma = (2ad/k) + b(d + CB)$. Предположите, что b выбрана так, что $\gamma \geq 0$.

(c) Покажите, что система абсолютно устойчива, если

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega\eta)G(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in R, \quad \text{где} \quad \eta = \frac{b}{2ad}.$$

7.9 ([85]) Система с обратной связью, изображенная на рисунке 7.23, является системой управления, в состав которой входит объект управления со (скалярной) передаточной функцией $H(s)$ и внутренний контур, представляющий исполнительное устройство (актуатор). Пусть $H(s) = (s + 6)/(s + 2)(s + 3)$ и предположим, что $k \geq 0$ и ψ принадлежит сектору $(0, \beta]$, где β может быть произвольно большой, но конечной.

(a) Покажите, что система может быть представлена в виде системы с обратной связью, изображенной на рисунке 7.1 с нулевым выходом e , нулевым входом и с $G(s) = [H(s) + k]/s$.

(b) Используя вариант критерия Попова, рассмотренный в упражнении 7.8, найдите такую нижнюю границу k_c , что система является абсолютно устойчивой для всех $k > k_c$.

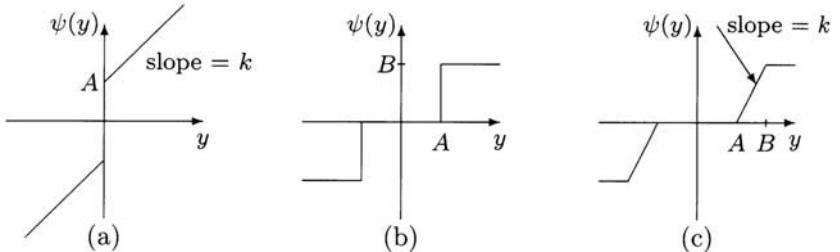


Рис. 7.24. К упражнению 7.10

7.10 Проверьте, что каждой из нижеследующих нелинейностей $\psi(y)$ соответствует указанная описывающая функция $\Psi(a)$:

- (1) $\psi(y) = y^5; \Psi(a) = 5a^4/8$
- (2) $\psi(y) = y^3|y|; \Psi(a) = 32a^3/15\pi$
- (3) $\psi(y) :$ Рисунок 7.24(a); $\Psi(a) = k + \frac{4A}{\pi a}$
- (4) $\psi(y) :$ Рисунок 7.24(b);

$$\Psi(a) = \begin{cases} 0, & \text{при } a \leq A \\ (4B/\pi a)[1 - (A/a)^2]^{1/2}, & \text{при } a \geq A \end{cases}$$
- (5) $\psi(y) :$ Рисунок 7.24(c);

$$\Psi(a) = \begin{cases} 0, & \text{при } a \leq A \\ k[1 - N(a/A)], & \text{при } A \leq a \leq B \\ k[N(a/B) - N(a/A)], & \text{при } a \geq B \end{cases}$$

где

$$N(x) = \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x} \right)^2} \right].$$

7.11 С использованием метода описывающей функции исследуйте вопрос о существовании периодических решений и определите частоту и амплитуду колебаний в изображенном на рисунке 7.1 системе с нижеследующими передаточными функциями:

- (1) $G(s) = (1 - s)/s(s + 1)$ и $\psi(y) = y^5$.
- (2) $G(s) = (1 - s)/s(s + 1)$ и ψ — нелинейность из упражнения 7.10(5) с $A = 1$, $B = 3/2$ и $k = 2$.
- (3) $G(s) = 1/(s + 1)^6$ и $\psi(y) = \operatorname{sign}(y)$.
- (4) $G(s) = (s + 6)/s(s + 2)(s + 3)$ и $\psi(y) = \operatorname{sign}(y)$.
- (5) $G(s) = s/(s^2 - s + 1)$ и $\psi(y) = y^5$.
- (6) $G(s) = 5(s + 0.25)/s^2(s + 2)^2$ и ψ — нелинейность из упражнения 7.10(3) с $A = 1$ и $k = 2$.

- (7) $G(s) = 5(s + 0.25)/s^2(s + 2)^2$ и ψ — нелинейность из упражнения 7.10(4) с $A = 1$ и $B = 1$.
- (8) $G(s) = 5(s + 0.25)/s^2(s + 2)^2$ и ψ — нелинейность из упражнения 7.10(5) с $A = 1$, $B = 3/2$ и $k = 2$.
- (9) $G(s) = 1/(s + 1)^3$ и $\psi(y) = \text{sgn}(y)$.
- (10) $G(s) = 1/(s + 1)^3$ и $\psi(y) = \text{sat}(y)$.

7.12 Примените метод описывающей функции при исследовании существования периодических решений в генераторе с отрицательным сопротивлением (см. параграф 1.2.4) с $h(v) = -v + v^3 - v^5/5$ и $\varepsilon = 1$. Для каждого периодического решения найдите оценки частоты и амплитуды колебания. С использованием компьютерного моделирования определите, насколько точны полученные результаты.

7.13 Рассмотрим изображенную на рисунке 7.1 систему с $G(s) = -2bs/(s^2 - bs + 1)$ и $\psi(y) = \text{sat}(y)$. С использованием метода описывающей функции покажите, что при достаточно малой $b > 0$ система имеет периодическое решение. Докажите полученное утверждение с использованием теоремы 7.4 и сделайте оценки частоты и амплитуды колебания.

7.14 Рассмотрим изображенное на рисунке 7.1 соединение систем с

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^2(s + 2)^2}, \quad \psi(y) = \begin{cases} by, & -1 \leq by \leq 1 \\ \text{sign}(y), & b|y| > 1 \end{cases}$$

где $b > 0$.

- (a) С использованием кругового критерия найдите максимальную b , при которой начало координат замкнутой системы глобально асимптотически устойчиво.
- (b) С использованием критерия Попова найдите максимальную b , при которой начало координат замкнутой системы глобально асимптотически устойчиво.
- (c) С использованием метода описывающей функции найдите минимальную b , при которой в системе существуют колебания и оцените частоту этих колебаний.
- (d) При $b = 10$ исследуйте с использованием теоремы 7.4 вопрос о существовании периодических решений. Для каждого такого решения (если оно существует)
- найдите интервал частот $[\omega_1, \omega_2]$ и интервал амплитуд $[a_1, a_2]$;
 - используя лемму 7.1, найдите верхнюю границу энергоемкости (energy content) высокочастотных гармоник и выразите эту величину в процентах от энергоемкости первой гармоники; и
 - выполните компьютерное моделирование системы и сравните эти результаты с полученными выше аналитическими результатами.
- (e) Выполните пункт (d) при $b = 30$.

7.15 Выполните пункты (a)–(c) предыдущего упражнения при $G(s) = -10/(s + 1)^2(s + 2)$.

7.16 Рассмотрим изображенную на рисунке 7.1 систему с $G(s) = 1/(s + 1)^3$ и кусочно-линейной функцией $\psi(y)$ с $\delta = 1/k$, $s_1 = k$ и $s_2 = 0$, график которой изображен на рисунке 7.15.

(a) С использованием метода описывающей функции исследуйте вопрос о существовании периодических решений и определите их частоты и амплитуды при $k = 10$.

(b) При $k = 10$ примените к системе теорему 7.4. Для каждого периодического решения (если оно существует) найдите интервал частот $[\omega_1, \omega_2]$ и интервал амплитуд $[a_1, a_2]$.

(c) Каково максимальное значение углового коэффициента $k > 0$, при котором по теореме 7.4 в системе отсутствуют периодические решения?

7.17 В каждом из следующих случаев примените теорему 7.4 и исследуйте вопрос о существовании периодических решений в системе, изображенной на рисунке 7.1. Для каждого периодического решения (если оно существует) найдите интервал частот $[\omega_1, \omega_2]$ и интервал амплитуд $[a_1, a_2]$.

- (1) $G(s) = 2(s - 1)/s^3(s + 1)$ и $\psi(y) = \text{sat}(y)$.
- (2) $G(s) = -s/(s^2 + 0.8s + 8)$ и $\psi(y) = (1/2)\sin y$.
- (3) $G(s) = -s/(s^2 + 0.8s + 8)$ и $\psi(y)$ — нелинейность из примера 7.13.
- (4) $G(s) = -24/s^2(s + 1)^3$ и $\psi(y)$ — нечетная нелинейность

$$\psi(y) = \begin{cases} y^3 + y/2, & \text{при } 0 \leq y \leq 1 \\ 2y - 1/2, & \text{при } y \geq 1 \end{cases}$$

Г л а в а 8

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ

В главе 4 были представлены основные концепции теории устойчивости Ляпунова. В настоящей главе эти концепции будут рассмотрены более подробно, а также будут предложены обобщения и новые версии этих результатов.

В главе 4 было показано, как можно использовать метод линеаризации автономных систем для исследования устойчивости их точек равновесия. Мы также убедились, что этот метод неприменим в случаях, когда матрица Якоби, вычисленная в точках равновесия, имеет некоторые собственные числа с нулевыми вещественными частями и не имеет собственных чисел с положительными вещественными частями. В параграфе 8.1 мы сформулируем теорему о центральном многообразии и используем ее для исследования устойчивости точек равновесия автономных систем в критических случаях, когда метод линеаризации оказывается неприменим.

Концепция области притяжения асимптотически устойчивой точки равновесия была введена в параграфе 4.1. В параграфе 8.2 мы разработаем расширенную версию этой концепции и представим некоторые идеи, позволяющие оценить область притяжения. Принцип инвариантности Ла-Салля, сформулированный для автономных систем в теореме 4.4, очень полезен при исследовании приложений. Для неавтономной системы общего вида аналогичного принципа инвариантности не существует. Однако существуют теоремы, в которых задействованы некоторые идеи принципа инвариантности. Две таких теоремы представлены в параграфе 8.3. В первой теореме идет речь о сходимости траекторий к некоторому множеству, а во второй — о равномерной асимптотической устойчивости начала координат.

Наконец в параграфе 8.4 мы введем понятия устойчивости периодических решений и инвариантных множеств.

8.1. Теорема о центральном многообразии

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (8.1)$$

где $f : D \rightarrow R^n$ — непрерывно дифференцируемая функция и $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая начало координат $x = 0$. Предположим, что начало координат является точкой равновесия системы (8.1). В теореме 4.7 утверждается, что если все собственные числа матрицы

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0}$$

имеют отрицательные вещественные части, то начало координат асимптотически устойчиво; если некоторые из этих собственных числа имеют положительные вещественные части, то начало координат неустойчиво. Если некоторые собственные числа A имеют нулевые вещественные части и остальные вещественные числа имеют отрицательные вещественные части, то с использованием метода линеаризации невозможно ответить на вопрос об устойчивости начала координат. В этом параграфе мы более подробно рассмотрим последний случай, т. е. когда метод линеаризации оказывается неприменим. В подобных ситуациях единственное, что нам остается — это выполнить анализ исходной нелинейной системы n -го порядка (8.1). На следующих нескольких страницах будет представлен интересный результат, заключающийся в том, что свойства устойчивости начала координат этой системы могут быть установлены на основе анализа нелинейной системы меньшего порядка — системы, размерность которой равна числу собственных чисел матрицы A с нулевыми собственными частями. Это будет сделано с использованием теории центрального многообразия (central manifold).

¹⁾

Существует строгое математическое определение понятия многообразия размерности k в пространстве R^n ($1 \leq k < n$).²⁾ Для наших целей достаточно рассматривать многообразие размерности k как решение уравнения

$$\eta(x) = 0$$

где $\eta : R^n \rightarrow R^{n-k}$ — достаточно гладкая (т. е. достаточно много раз непрерывно дифференцируемая) функция. Например, единичная окружность

$$\{x \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

¹⁾ Теория центрального многообразия имеет несколько приложений в области теории динамических систем. В этой книге она представлена лишь в контексте анализа свойств устойчивости начала координат. Более общий обзор приведен в работе [34].

²⁾ См., например, работу [71].

является многообразием размерности 1 в R^2 . Аналогично, единичная сфера

$$\{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$$

является многообразием размерности $(n - 1)$ в R^n . Многообразие $\{\eta(x) = 0\}$ называется инвариантным многообразием для (8.1), если

$$\eta(x(0)) = 0 \Rightarrow \eta(x(t)) \equiv 0, \forall t \in [0, t_1] \subset R,$$

где $[0, t_1]$ — интервал времени, на котором определено решение $x(t)$.

Предположим, что $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Уравнение (8.1) может быть представлено в следующей форме:

$$\dot{x} = Ax + \left[f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(0)x \right] = Ax + \tilde{f}(x)$$

где функция

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(0)x$$

является дважды непрерывно дифференцируемой и

$$\tilde{f}(0) = 0; \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0) = 0.$$

Поскольку нас интересует ситуация, когда метод линеаризации неприменим, предположим, что матрица A имеет k собственных чисел с нулевыми вещественными частями и $m = n - k$ собственных чисел с отрицательными вещественными частями. Мы всегда можем найти преобразование подобия T , преобразующее A в блочно-диагональную матрицу, т. е.

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

где все собственные числа A_1 имеют нулевые вещественные части и все собственные числа A_2 имеют отрицательные вещественные части. Очевидно, что матрицы A_1 и A_2 имеют размерности соответственно $k \times k$ и $m \times m$. Замена переменных

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = Tx; \quad y \in R^k; \quad z \in R^m$$

преобразует (8.1) к следующему виду

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + g_1(y, z), \\ \dot{z} &= A_2 z + g_2(y, z), \end{aligned} \quad (8.2) \quad (8.3)$$

где g_1 и g_2 наследуют свойства \tilde{f} . В частности, эти функции являются дважды непрерывно дифференцируемыми и

$$g_i(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial g_i}{\partial y}(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial g_i}{\partial z}(0, 0) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (8.4)$$

Если $z = h(y)$ — инвариантное многообразие для (8.2)–(8.3) и h — гладкая функция, то оно называется *центральным многообразием*, если

$$h(0) = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial y}(0) = 0$$

Теорема 8.1. Если g_1 и g_2 — дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие (8.4), все собственные числа A_1 имеют нулевые вещественные части и все собственные числа A_2 имеют отрицательные вещественные части, то существуют константа $\delta > 0$ и непрерывно дифференцируемая функция $h(y)$, определенная для всех $\|y\| < \delta$, такие что $z = h(y)$ является центральным многообразием для (8.2)–(8.3).

Доказательство: См. приложение C.15. \square

Если начальное состояние системы (8.2)–(8.3) принадлежит центральному многообразию, т. е. $z(0) = h(y(0))$, то решение $(y(t), z(t))$ будет принадлежать этому многообразию для всех $t \geq 0$, т. е. $z(t) \equiv h(y(t))$. В этом случае движение системы на центральном многообразии определяется дифференциальным уравнением порядка k

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, h(y)), \quad (8.5)$$

которое мы будем называть *редуцированной системой*. Если $z(0) \neq h(y(0))$, разность $z(t) - h(y(t))$ представляет собой отклонение траектории от центрального многообразия в момент времени t . Замена переменных

$$\begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z - h(y) \end{bmatrix}$$

преобразует (8.2)–(8.3) в

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, w + h(y)), \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{w} &= A_2[w + h(y)] + g_2(y, w + h(y)) - \\ &\quad - \frac{\partial h}{\partial y}(y)[A_1 y + g_1(y, w + h(y))]. \end{aligned} \quad (8.7)$$

В новых координатах центральное многообразие задается равенством $w = 0$. Движение на многообразии характеризуется свойством

$$w(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{w}(t) \equiv 0.$$

Подставляя эти тождества в (8.7), получаем

$$0 = A_2 h(y) + g_2(y, h(y)) - \frac{\partial h}{\partial y}(y)[A_1 y + g_1(y, h(y))]. \quad (8.8)$$

Поскольку это равенство должно быть выполнено для любого решения, принадлежащего центральному многообразию, можно утверждать, что функция $h(y)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных (8.8). Прибавляя и вычитая $g_1(y, h(y))$ к правой части (8.6) и вычитая (8.8) из (8.7), мы можем переписать уравнение в новых координатах:

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, h(y)) + N_1(y, w), \quad (8.9)$$

$$\dot{w} = A_2 w + N_2(y, w), \quad (8.10)$$

где

$$N_1(y, w) = g_1(y, w + h(y)) - g_1(y, h(y))$$

и

$$N_2(y, w) = g_2(y, w + h(y)) - g_2(y, h(y)) - \frac{\partial h}{\partial y}(y) N_1(y, w).$$

Легко показать, что N_1 и N_2 являются дважды непрерывно дифференцируемыми и

$$N_i(y, 0) = 0, \quad \frac{\partial N_i}{\partial w}(0, 0) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, в области

$$\left\| \begin{array}{c} y \\ w \end{array} \right\|_2 < \rho$$

N_1 и N_2 удовлетворяют неравенствам

$$\|N_i(y, w)\|_2 \leq k_i \|w\|, \quad i = 1, 2,$$

где положительные константы k_1 и k_2 могут быть сделаны произвольно малыми выбором достаточно малой ρ . Из этих неравенств, а также из гурвицевости матрицы A_2 следует, что свойства устойчивости начала координат определяются редуцированной системой (8.5). Это утверждение, известное как *принцип редукции*, сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема 8.2. *Если в условиях теоремы 8.1 начало координат $y = 0$ редуцированной системы (8.5) является асимптотически устойчивым (соответственно, неустойчивым), то начало координат всей системы (8.2), (8.3) также является асимптотически устойчивым (соответственно, неустойчивым).*

Доказательство: Замена координат $(y, z) \mapsto (y, w)$ не влияет на свойства устойчивости начала координат (см. упражнение 4.26). Поэтому мы можем ограничиться анализом системы (8.9), (8.10). Если начало координат редуцированной системы (8.5) неустойчиво, то начало координат (8.9), (8.10) также неустойчиво, т. к. любому решению $y(t)$ уравнения (8.5) соответствует решение $(y(t), 0)$ системы (8.9), (8.10). Предположим теперь, что начало координат редуцированной системы (8.5) является асимптотически устойчивым. По обратной теореме Ляпунова 4.16 существует непрерывно дифференцируемая функция $V(y)$,

являющаяся положительно определенной и удовлетворяющая в окрестности начала координат неравенствам

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y}[A_1 y + g_1(y, h(y))] &\leq -\alpha_3(\|y\|_2), \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial y} \right\|_2 &\leq \alpha_4(\|y\|_2) \leq k, \end{aligned}$$

где α_3 и α_4 — функции класса \mathcal{K} . С другой стороны, поскольку A_2 гурвицева, уравнение Ляпунова

$$P A_2 + A_2^T P = -I$$

имеет единственное положительно определенное решение P . Рассмотрим

$$\nu(y, w) = V(y) + \sqrt{w^T P w}$$

в качестве функции Ляпунова¹⁾ для всей системы (8.9), (8.10). Производная ν вдоль траекторий системы удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} \dot{\nu}(y, w) &= \frac{\partial V}{\partial y}[A_1 y + g_1(y, h(y)) + N_1(y, w)] + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{w^T P w}}[w^T(PA_2 + A_2^T P)w + 2w^T P N_2(y, w)] \leqslant \\ &\leqslant -\alpha_3(\|y\|_2) + kk_1\|w\|_2 - \frac{\|w\|_2}{2\sqrt{\lambda_{\max}(P)}} + \frac{k_2\lambda_{\max}(P)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\|w\|_2 = \\ &= -\alpha_3(\|y\|_2) - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_{\max}(P)}}\|w\|_2 - \\ &- \left[\frac{1}{4\sqrt{\lambda_{\max}(P)}} - kk_1 - k_2 \frac{\lambda_{\max}(P)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \right] \|w\|_2. \end{aligned}$$

Уменьшая область вокруг начала координат, мы можем сделать величины k_1 и k_2 сколь угодно малыми, обеспечив этим выполнение неравенства

$$\frac{1}{4\sqrt{\lambda_{\max}(P)}} - kk_1 - k_2 \frac{\lambda_{\max}(P)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} > 0.$$

Следовательно,

$$\dot{\nu}(y, w) \leq -\alpha_3(\|y\|_2) - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_{\max}(P)}}\|w\|_2$$

¹⁾ Функция $\nu(y, w)$ является непрерывно дифференцируемой во всей окрестности начала координат, за исключением многообразия $w = 0$. Функции $\nu(y, w)$ и $\dot{\nu}(y, w)$ определены и непрерывны в окрестности начала координат. Легко показать, что утверждение теоремы 4.1 остается в этих условиях верным.

и из этого неравенства следует, что $\dot{v}(y, w)$ — отрицательно определенная функция, т. е. начало координат всей системы (8.9)–(8.10) асимптотически устойчиво. \square

Читателю предлагается (упражнения 8.1 и 8.2) обобщить это доказательство и показать, что следующие утверждения справедливы.

Следствие 8.1. *Если в условиях теоремы 8.1 начало координат $y = 0$ редуцированной системы (8.5) устойчиво и существует непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $V(y)$, такая что неравенство¹⁾*

$$\frac{\partial V}{\partial y}[A_1y + g_1(y, h(y))] \leq 0$$

выполнено в некоторой окрестности $y = 0$, то начало координат всей системы (8.2)–(8.3) также является устойчивым.

Следствие 8.2. *В условиях теоремы 8.1 начало координат редуцированной системы (8.5) асимптотически устойчиво, если и только если начало координат всей системы (8.2)–(8.3) асимптотически устойчиво.*

Для того, чтобы применить теорему 8.2, нам необходимо найти центральное многообразие $z = h(y)$. Функция h является решением дифференциального уравнения в частных производных

$$N(h(y)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial h}{\partial y}(y)[A_1y + g_1(y, h(y))] - A_2h(y) - g_2(y, h(y)) = 0 \quad (8.11)$$

с граничными условиями

$$h(0) = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial y}(0) = 0. \quad (8.12)$$

В большинстве случаев это уравнение для h не может быть решено аналитически (для этого необходимо знать решение всей системы (8.2)–(8.3)), но его решение может быть аппроксимировано с требуемой точностью рядом Тейлора для y .

Теорема 8.3. *Если некоторая непрерывно дифференцируемая функция $\phi(y)$, $\phi(0) = 0$, $[\partial\phi/\partial y](0) = 0$ удовлетворяет $N(\phi(y)) = O(\|y\|^p)$ для некоторой $p > 1$, то для достаточно малой величины $\|y\|$*

$$h(y) - \phi(y) = O(\|y\|^p)$$

¹⁾ Существование функции Ляпунова $V(y)$ не может быть доказано с использованием обратной теоремы Ляпунова. Обратная теорема Ляпунова для случая устойчивости [72, 107] гарантирует существование функции Ляпунова $V(t, y)$, производная которой удовлетворяет $\dot{V}(t, y) \leq 0$. В общем случае эта функция не может быть сделана независимой от t . (См. [72, стр. 228].) Даже если мы можем выбрать $V(t, y)$ непрерывно дифференцируемой по своим аргументам, невозможно гарантировать, что частные производные $\partial V/\partial y_i$, $\partial V/\partial t$ будут равномерно ограничены в окрестности начала координат при всех $t \geq 0$. (См. [107, стр. 53].)

и редуцированная система может быть представлена в виде

$$\dot{y} = A_1y + g_1(y, \phi(y)) + O(\|y\|^{p+1})$$

Доказательство: См. приложение C.15. \square

Обозначение $O(\cdot)$ будет формально введено в главе 10. Здесь достаточно рассматривать соотношение $f(y) = O(\|y\|^p)$ как утверждение о том, что $\|f(y)\| \leq k\|y\|^p$ для достаточно малых $\|y\|$. В качестве иллюстрации применения центрального многообразия рассмотрим несколько примеров. В первых двух примерах мы увидим, что для скалярного уравнения состояния

$$\dot{y} = ay^p + O(|y|^{p+1}),$$

где p — положительное целое число, начало координат является асимптотически устойчивой точкой равновесия, если p нечетное и $a < 0$. Начало координат является неустойчивым, если p нечетное и $a > 0$, или если p четное и $a \neq 0$.¹⁾

Пример 8.1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + ax_1^2 + bx_1x_2, \end{aligned}$$

где $a \neq 0$. Эта система имеет единственную точку равновесия в начале координат. Линеаризованная система в начале координат имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

с собственными значениями 0 и -1 . Пусть M — матрица, столбцами которой являются собственные вектора A , т. е.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Положим $T = M^{-1}$. Тогда

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Замена координат

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

приводит систему к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= a(y+z)^2 - b(yz+z^2), \\ \dot{z} &= -z - a(y+z)^2 + b(yz+z^2). \end{aligned}$$

¹⁾ См. упражнение 4.2.

Уравнение центрального многообразия (8.11) с граничным условием (8.12) имеет вид

$$\begin{aligned} N(h(y)) &= h'(y)[a(y+h(y))^2 - b(yh(y)+h^2(y))] + h(y) + \\ &+ a(y+h(y))^2 - b(yh(y)+h^2(y)) = 0, \quad h(0) = h'(0) = 0. \end{aligned}$$

Положим $h(y) = h_2y^2 + h_3y^3 + \dots$ и подставим этот ряд в уравнение центрального многообразия. Приравнивая коэффициенты при равных степенях в аналогичном ряде для y , находим неизвестные коэффициенты h_2, h_3, \dots (т. к. это уравнение тождественно выполнено для y). Следует отметить, что нам не известно заранее, сколько потребуется использовать членов ряда. Начнем анализ с простейшей аппроксимации: $h(y) \approx 0$. Подставим $h(y) = O(|y|^2)$ в редуцированную систему и исследуем вопрос об устойчивости ее начала координат. Если в этом случае свойства устойчивости начала координат могут быть установлены, наш анализ закончен. В противном случае необходимо вычислить коэффициент h_2 , подставить $h(y) = h_2y^2 + O(|y|^3)$ и снова исследовать вопрос об устойчивости начала координат редуцированной системы. Если и в этом случае невозможно установить свойства устойчивости начала координат, выполняем описанную выше процедуру для $h(y) \approx h_2y^2 + h_3y^3$, и так далее. Применим эту стратегию к нашему примеру и рассмотрим аппроксимацию $h(y) \approx 0$. В этом случае редуцированная система имеет вид

$$\dot{y} = ay^2 + O(|y|^3).$$

Заметим, что ошибка аппроксимации $h(y)$ порядка $O(|y|^2)$ приводит к ошибке порядка $O(|y|^3)$ для правой части редуцированной системы. Это обусловлено тем, что функция $g_1(y, z)$, присутствующая в правой части редуцированной системы (8.5) в виде $g_1(y, h(y))$, имеет равную нулю в начале координат частную производную по z . Очевидно, это выполнено и для аппроксимаций большего порядка, т. е. ошибка $h(y)$ порядка $O(|y|^k)$ приводит к ошибке порядка $O(|y|^{k+1})$ для $g_1(y, h(y))$ при $k \geq 2$. Член ay^2 является доминирующим в правой части редуцированной системы и поэтому при $a \neq 0$ начало координат редуцированной системы неустойчиво. Следовательно, по теореме 8.2. начало координат всей системы также неустойчиво. \triangle

Пример 8.2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{y} &= yz, \\ \dot{z} &= -z + ay^2, \end{aligned}$$

уже представленную в (y, z) -координатах. Уравнение центрального многообразия (8.11) с граничным условием (8.12) имеет вид

$$h'(y)[yh(y)] + h(y) - ay^2 = 0, \quad h(0) = h'(0) = 0.$$

Рассмотрим простейшую аппроксимацию $\phi(y) = 0$. Редуцированная система имеет вид

$$\dot{y} = O(|y|^3).$$

Очевидно, что мы не можем сделать определенное заключение об устойчивости начала координат этой системы. Поэтому подставим $h(y) = h_2y^2 + O(|y|^3)$ в уравнение центрального многообразия и путем сопоставления с коэффициентами разложения y^2 найдем $h_2 = a$. Редуцированная система¹⁾

$$\dot{y} = ay^3 + O(|y|^4).$$

Поэтому начало координат асимптотически устойчиво, если $a < 0$ и неустойчиво, если $a > 0$. Следовательно, по теореме 8.2 начало координат всей системы асимптотически устойчиво, если $a < 0$ и неустойчиво, если $a > 0$. Если $a = 0$, уравнение центрального многообразия (8.11) с граничным условием (8.12) сводится к следующему:

$$h'(y)[yh(y)] + h(y) = 0, \quad h(0) = h'(0) = 0.$$

Это уравнение имеет точное решение $h(y) = 0$. Начало координат редуцированной системы $\dot{y} = 0$ устойчиво и соответствующая функция Ляпунова имеет вид $V(y) = y^2$. Поэтому, с использованием следствия 8.1 мы можем заключить, что начало координат всей системы устойчиво, если $a = 0$. \triangle

Пример 8.3. Рассмотрим систему (8.2)–(8.3) при

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} -y_1^3 \\ -y_2^3 + z^2 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= -1, \quad g_2 = y_1^3 - 3y_1^5 + 3y_1^2y_2. \end{aligned}$$

Можно показать, что при $\phi(y) = 0$ выполнено $N(\phi(y)) = O(\|y\|_2^3)$ и

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ -y_1 - y_2^3 \end{bmatrix} + O(\|y\|_2^4).$$

Используя $V(y) = (y_1^2 + y_2^2)/2$ в качестве функции Ляпунова, получаем оценку

$$\dot{V} = -y_1^4 - y_2^4 + y^T O(\|y\|_2^4) \leq -\frac{1}{2}\|y\|_2^4 + k\|y\|_2^5,$$

выполненную в некоторой окрестности начала координат при $k > 0$. Следовательно,

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{4}\|y\|_2^4 \quad \text{при} \quad \|y\|_2 < \frac{1}{4k}.$$

Из этого неравенства следует, что начало координат редуцированной системы асимптотически устойчиво. Поэтому начало координат всей системы также асимптотически устойчиво. \triangle

Заметим, что в предыдущем примере недостаточно лишь исследовать систему

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ -y_1 - y_2^3 \end{bmatrix}.$$

¹⁾ В действительности ошибка правой части редуцированной системы имеет порядок $O(|y|^5)$, поскольку при $h(y) = h_2y^2 + h_3y^3 + \dots$ получаем $h_3 = 0$.

Необходимо также найти функцию Ляпунова, с помощью которой можно доказать асимптотическую устойчивость начала координат при всех возмущениях порядка $O(\|y\|_2^4)$. Важность этого замечания иллюстрируется следующим примером.

Пример 8.4. Рассмотрим предыдущий пример, в котором матрица A_1 заменена на

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При $\phi(y) = 0$ редуцированная система может быть представлена в следующем виде:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ -y_2^3 \end{bmatrix} + O(\|y\|_2^4).$$

При отсутствии члена возмущений $O(\|y\|_2^4)$ начало координат этой системы является асимптотически устойчивым.¹⁾ Однако, если попытаться найти функцию Ляпунова $V(y)$, гарантирующую асимптотическую устойчивость при наличии этого члена возмущений, нас постигнет неудача. Действительно, можно показать, что уравнение центрального многообразия (8.11) с граничным условием (8.12) имеет точное решение $h(y) = y_1^3$ и редуцированная система определяется уравнением

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ y_1^6 - y_2^3 \end{bmatrix},$$

начало координат которого является неустойчивой точкой равновесия.²⁾

△

8.2. Область притяжения

Очень часто бывает недостаточно установить факт асимптотической устойчивости точки равновесия исследуемой системы и требуется найти область притяжения этой точки или, по крайней мере, получить ее оценки. Важность задачи определения области притяжения может быть выявлена при анализе событий, происходящих при функционировании нелинейной системы. Предположим, что нелинейная система имеет асимптотически устойчивую точку равновесия x_{pr} (см. рисунок 8.1). Предположим также, что система x_{pr} управляет в устойчивом режиме функционирования, соответствующем этой точке равновесия. Пусть в момент времени t_0 происходит сбой, нарушающий нормальную работу системы, например короткое замыкание в электрической цепи. Предположим, что система в состоянии неисправности не имеет точек равновесия в точке x_{pr} или в ее окрестности. Траектория системы

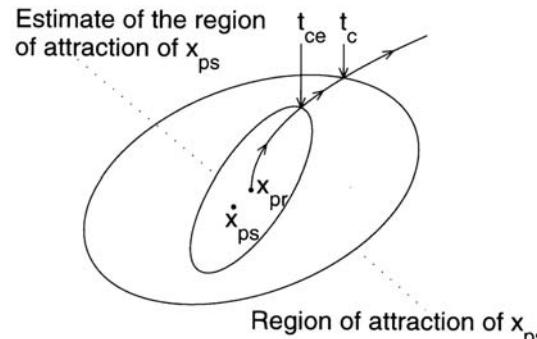


Рис. 8.1. Критическое время на устранение неисправности (estimate of the region of attraction — оценка области притяжения; region of attraction — область притяжения).

будет выведена из точки равновесия x_{pr} . Предположим далее, что неисправность устранена в момент времени t_1 и система после возникновения неисправности имеет асимптотически устойчивую точку равновесия x_{ps} , где $x_{ps} = x_{pr}$ или x_{ps} достаточно близка к x_{pr} , так что возможен устойчивый режим функционирования в состоянии x_{ps} . В момент времени t_1 состояние системы $x(t_1)$ может находиться далеко от точки равновесия системы после возникновения неисправности x_{ps} . Ответ на вопрос о том вернется или не вернется система к устойчивому режиму функционирования в состоянии x_{ps} зависит от выполнения условия принадлежности $x(t_1)$ области притяжения x_{ps} , что определяется, в свою очередь, уравнением системы после возникновения неисправности. Критическим фактором при определении допустимой удаленности $x(t_1)$ от состояния x_{ps} является время, необходимое для устранения неисправности, т. е. величина $(t_1 - t_0)$. Если $(t_1 - t_0)$ очень мало, то с учетом непрерывности решения по t можно с большой долей вероятности утверждать, что $x(t_1)$ будет находиться в области притяжения состояния x_{ps} . Однако, на выявление и устранение неисправности может потребоваться значительное время, что может являться критическим фактором. При проектировании подобных систем важно определить «критическое время на устранение неисправности» t_c .¹⁾ Очевидно, что величина $(t_1 - t_0)$ должна быть меньше t_c . Если область притяжения x_{ps} известна, мы можем найти t_c интегрируя уравнения системы в режиме неисправности при ее движении из состояния равновесия до возникновения неисправности x_{pr} до момента достижения траектории системы границы области при-

¹⁾ См. упражнение 4.56.

²⁾ См. упражнение 4.13.

¹⁾ Прим. перев. — В электротехнике термин «critical fault clearance time» переводится как «предельное время отключения цепи (при коротком замыкании)».

тяжения. Время, необходимое для достижения этой границы, может рассматриваться как критическое время на устранение неисправности, поскольку если неисправность устранена в течение этого промежутка времени, состояние $x(t_1)$ будет находиться в области притяжения. Разумеется, мы должны предположить, что x_{pr} принадлежит области притяжения x_{ps} . Если действительная область притяжения неизвестна и оценка t_{ce} времени t_c получена с использованием оценки области притяжения, то $t_{ce} < t_c$, поскольку граница оценки области притяжения будет находиться внутри границы действительной области притяжения. (См. рисунок 8.1.) Описанная ситуация представляет собой пример, когда нахождение области притяжения является необходимым этапом проектирования нелинейной системы. Этот пример также показывает важность нахождения оценок области притяжения, не являющихся слишком консервативными. Излишне консервативная оценка области притяжения может привести к тому, что величина t_{ce} окажется слишком малой и потому бесполезной. Дополнительным мотивирующим фактором для рассмотрения подобных задач является то, описанная ситуация не является гипотетической и представляет собой существование задачи устойчивости переходных процессов в реальных энергетических системах.¹⁾

Пусть начало координат $x = 0$ является асимптотически устойчивой точкой равновесия нелинейной системы

$$\dot{x} = f(x), \quad (8.13)$$

где $f : D \rightarrow R^n$ — локально липшицевая функция и $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая начало координат. Пусть $\phi(t; x)$ — решение системы (8.13), начинающееся в начальном состоянии x в момент времени $t = 0$. Область притяжения начала координат, обозначенная R_A , определяется равенством

$$R_A = \{x \in D \mid \phi(t; x) \text{ определено } \forall t \geq 0 \text{ и } \phi(t; x) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty\}.$$

Свойства области притяжения сформулированы в следующей лемме, доказательство которой приведено в приложении С.16.

Лемма 8.1. *Если $x = 0$ — асимптотически устойчивая точка равновесия системы (8.13), то ее область притяжения R_A является открытым, связным, инвариантным множеством. Более того, граница области R_A сформирована траекториями системы.*

Из леммы 8.1 следует, что одним из путей определения области притяжения является нахождение тех траекторий, что лежат на границе области R_A . Существует несколько методов решения этой задачи, но в них используются геометрические понятия из теории динамических систем, которые не предполагается вводить в этой книге. Поэтому

¹⁾ Задача устойчивости переходных процессов в энергетических системах рассмотрена в книге [170].

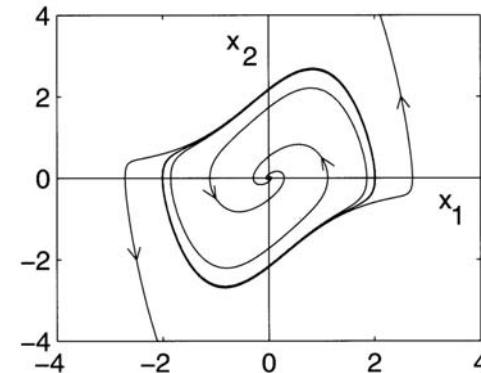


Рис. 8.2. Фазовый портрет из примера 8.5

мы не будем рассматривать этот класс методов.¹⁾ Однако в случае двумерных систем ($n = 2$) мы можем дать геометрическую интерпретацию этих методов с использованием фазовых портретов. В примерах 8.5 и 8.6 рассмотрены типичные случаи для пространства состояния, являющегося плоскостью. В первом из этих двух примеров границей области притяжения является предельный цикл, а во втором граница сформирована устойчивыми траекториями, проходящими через седловые точки. В примере 8.7 рассматривается необычный случай, когда границей является замкнутая кривая, точками которой являются точки равновесия.

Пример 8.5. Система второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 \end{aligned}$$

представляет собой систему Ван дер Поля, представленную в обратном времени, т. е. при t замененном на $-t$. Эта система имеет точку равновесия в начале координат и один неустойчивый предельный цикл, что видно из фазового портрета, изображенного на рисунке 8.2. Легко видеть, что начало координат является устойчивым фокусом и, следовательно, асимптотически устойчиво. Это может быть доказано с использованием соответствующей линеаризованной системы. Действительно, матрица

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

имеет собственные значения $-1/2 \pm j\sqrt{3}/2$. Очевидно, что область притяжения ограничена, т. к. траектории, начинающиеся вне предельного цикла, не могут пересечь его и достигнуть начала координат.

¹⁾ См. работы [36] и [216].

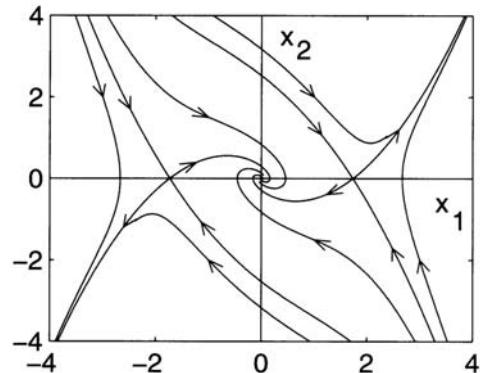


Рис. 8.3. Фазовый портрет из примера 8.6

Поскольку другие точки равновесия в системе отсутствуют, в качестве границы области R_A должен служить предельный цикл. Анализ фазового портрета показывает, что все траектории, начинающиеся внутри предельного цикла сходятся по спирали к началу координат. \triangle

Пример 8.6. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2.\end{aligned}$$

Эта система имеет три изолированных точки равновесия $(0,0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ и $(-\sqrt{3}, 0)$. Фазовый портрет системы показан на рисунке 8.3. Легко видеть, что начало координат представляет собой устойчивый фокус, а другие две точки равновесия являются седловыми точками. Таким образом, начало координат асимптотически устойчиво, другие две точки равновесия неустойчивы. Это утверждение может быть подтверждено с использованием анализа линеаризованной системы. Из фазового портрета также видно, что устойчивые траектории седловых точек образуют две сепаратрисы, формирующие границы области притяжения. Эта область ограничена. \triangle

Пример 8.7. Система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= -x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

имеет изолированную точку равновесия в начале координат и континuum точек равновесия, являющийся единичной окружностью, т. е. каждая точка на единичной окружности представляет собой точку равновесия системы. Очевидно, что область R_A должна содержаться во внутренности единичной окружности. Траекториями системы являются радиусы единичного круга. В этом можно убедиться, если представить

систему в полярных координатах. Замена координат

$$x_1 = \rho \cos \theta, \quad x_2 = \rho \sin \theta$$

приводит систему к следующему виду:

$$\dot{\rho} = -\rho(1 - \rho^2), \quad \dot{\theta} = 0.$$

Все траектории, начинающиеся в точках с $\rho < 1$ стремятся к началу координат при $t \rightarrow \infty$. Поэтому область R_A является внутренностью единичной окружности. \triangle

Для нахождения области притяжения R_A или для ее оценки может быть использован метод Ляпунова. Основным способом нахождения границы области R_A является использование теоремы Зубова, формулировка которой приведена в упражнении 8.10. Однако эта теорема является утверждением о существовании некоторых функций и требует решения дифференциального уравнения в частных производных. Оценки области R_A могут быть найдены с использованием более простой процедуры, основанной на методе Ляпунова. Под оценкой области R_A мы понимаем множество $\Omega \subset R_A$, такое что каждая траектория, начинаящаяся в Ω , стремится к началу координат при $t \rightarrow \infty$. Далее в этом параграфе мы обсудим некоторые аспекты задачи оценки R_A . Сначала покажем, что открытая область D в теореме 4.1 (или в следствии 4.1) не является оценкой R_A . В теореме 4.1 и следствии 4.1 было показано, что если D является открытой областью, содержащей начало координат, и если существует функция Ляпунова $V(x)$ положительно определенная на D , производная которой $\dot{V}(x)$ отрицательно определена на D или отрицательно полуопределенна, но не существует решения, постоянно остающегося в множестве $\{\dot{V}(x) = 0\}$, за исключением тривиального $x = 0$, то начало координат асимптотически устойчиво. Исходя из этого результата, можно было бы предположить, что D представляет собой оценку области притяжения R_A . Однако этот вывод неверен и это иллюстрируется следующим примером.

Пример 8.8. Рассмотрим систему из примера 8.6:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2.\end{aligned}$$

Эта система представляет собой частный случай системы, рассмотренной в примере 4.5, если положить

$$h(x_1) = x_1 - \frac{1}{5}x_1^5 \quad \text{и} \quad a = 1.$$

Поэтому функция Ляпунова определяется равенством

$$\begin{aligned}V(x) &= \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x + \int_0^{x_1} (y - \frac{1}{5}y^5) dy = \\ &= \frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{12}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2\end{aligned}$$

и

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x_1^2(1 - \frac{1}{3}x_1^2) - \frac{1}{2}x_2^2.$$

Определив открытую область D равенством

$$D = \{x \in R^2 \mid -\sqrt{3} < x_1 < \sqrt{3}\},$$

можно легко показать, что $V(x) > 0$ и $\dot{V}(x) < 0$ на $D - \{0\}$. Анализ фазового портрета, изображенного на рисунке 8.3, показывает, что D не является подмножеством R_A . \triangle

Из этого примера становится понятно, почему D из теоремы 4.1 и следствия 4.1 не является оценкой R_A . Даже если траектория, начинающаяся в D , перейдет с одной поверхности Ляпунова $V(x) = c_1$ на внутреннюю поверхность Ляпунова $V(x) = c_2$, $c_2 < c_1$, нет гарантии, что эта траектория останется навсегда в D . Если траектория покинет D , нет гарантии, что $\dot{V}(x)$ будет отрицательно определенной. Следовательно, все рассуждения о стремлении значений $V(x)$ к нулю, являются полностью неверными. Эта проблема не возникает, если в качестве оценки области притяжения R_A фигурирует компактное положительно инвариантное подмножество D , т. е. компактное множество $\Omega \subset D$, такое что каждая траектория, начинающаяся в Ω , остается в Ω во все будущие моменты времени. Из теоремы 4.4 следует, что Ω является подмножеством R_A . В качестве простейшей такой оценки может выступать множество¹⁾

$$\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c\},$$

если Ω_c ограничено и содержится в D . Для квадратичной функции Ляпунова $V(x) = x^T Px$ и $D = \{\|x\|_2 < r\}$ мы можем гарантировать, что $\Omega_c \subset D$ если

$$c < \min_{\|x\|_2=r} x^T Px = \lambda_{\min}(P)r^2.$$

¹⁾ Множество $\{V(x) \leq c\}$ может состоять из более чем одного компонента, но в D должен содержаться лишь один из них. Этот компонент должен быть замкнутым и именно этот компонент и используется при анализе. Например, если $V(x) = x^2/(1+x^4)$ и $D = \{|x| < 1\}$, то множество $\{V(x) \leq 1/4\}$ имеет два компонента: $\{|x| \leq \sqrt{2-\sqrt{3}}\}$ и $\{|x| \geq \sqrt{2+\sqrt{3}}\}$. Исследование следует проводить для первого компонента.

При $D = \{|b^T x| < r\}$, где $b \in R^{n,1}$

$$\min_{|b^T x|=r} x^T Px = \frac{r^2}{b^T P^{-1} b}.$$

Поэтому, множество $\{x^T Px \leq c\}$ является подмножеством $D = \{|b_i^T x| < r_i, i = 1, \dots, p\}$, если

$$c < \min_{1 \leq i \leq p} \frac{r_i^2}{b_i^T P^{-1} b_i}.$$

Выбор $\Omega_c = \{x^T Px \leq c\}$ в качестве оценки области притяжения имеет важную связь с результатами о линеаризации, представленными в параграфе 4.3. Мы видели, что если матрица Якоби

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$$

является гурвицевой, то квадратичная функция Ляпунова $V(x) = x^T Px$ может быть всегда найдена как решение уравнения Ляпунова $PA + A^T P = -Q$ при любой положительно определенной матрице Q . С учетом этого результата можно заключить, что если A гурвицева, то мы всегда можем легко оценить область притяжения начала координат. Это утверждение иллюстрируется следующим примером.

Пример 8.9. Система второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 \end{aligned}$$

рассматривалась в примере 8.5. Было показано, что начало координат является асимптотически устойчивым, т. к. матрица

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

является гурвицевой. Функция Ляпунова для исследуемой системы может быть найдена как решение P уравнения Ляпунова при $Q = I$

$$PA + A^T P = -I.$$

¹⁾ Согласно [122, параграф 10.3], лагранжиан в соответствующей задаче оптимизации с заданными ограничениями имеет вид $\mathcal{L}(x, \lambda) = x^T Px + \lambda[(b^T x)^2 - r^2]$. Необходимые условия первого порядка имеют вид $2Px + 2\lambda(b^T x)b = 0$ и $(b^T x)^2 - r^2 = 0$. Можно показать, что решения $\lambda = -1/(b^T P^{-1} b)$ и $x = \pm rP^{-1}b/(b^T P^{-1} b)$ обеспечивают минимизацию значения $r^2/(b^T P^{-1} b)$.

Единственным решением этого уравнения является положительно определенная матрица

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Квадратичная функция $V(x) = x^T Px$ является в некоторой окрестности начала координат функцией Ляпунова для рассматриваемой системы. Поскольку нас интересует оценка области притяжения, необходимо определить содержащую начало координат открытую область D , такую что в этой области производная $\dot{V}(x)$ отрицательно определена, а также константу $c > 0$ такую, что множество $\Omega_c = \{V(x) \leq c\}$ является подмножеством D . Мы заинтересованы в том, чтобы множество Ω_c было максимально большим, что означает необходимость определения максимального значения константы c . Заметим, что нам не следует доказывать положительную определенность $V(x)$ в D , поскольку $V(x)$ положительно определена для всех x . Более того, $V(x)$ радиально неограничена и, следовательно, Ω_c ограничено для любой $c > 0$. Производная функции $V(x)$ вдоль траекторий системы определяется равенством

$$\dot{V}(x) = -(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^3 x_2 - 2x_1^2 x_2^2).$$

Правая часть выражения для $\dot{V}(x)$ представляет собой сумму двух членов. Первый член $-\|x\|_2^2$ представляет собой вклад линейной части Ax , а второй — вклад нелинейного члена $g(x) = f(x) - Ax$. Поскольку

$$\frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|x\|_2 \rightarrow 0,$$

существует открытый шар $D = \{x \in R^2 \mid \|x\|_2 < r\}$, такой что $\dot{V}(x)$ отрицательно определена в D . Если этот шар будет найден, множество $\Omega_c \subset D$ может быть определено неравенством

$$c < \min_{\|x\|_2=r} V(x) = \lambda_{\min}(P)r^2.$$

Таким образом, для того, чтобы максимально увеличить оценку области притяжения, нам необходимо найти наибольший шар, в котором функция $\dot{V}(x)$ является отрицательно определенной. С учетом неравенств $|x_1| \leq \|x\|_2$, $|x_1 x_2| \leq \|x\|_2^2/2$ и $|x_1 - 2x_2| \leq \sqrt{5}\|x\|_2$, можно показать, что

$$\dot{V}(x) \leq -\|x\|_2^2 + |x_1||x_1 x_2||x_1 - 2x_2| \leq -\|x\|_2^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\|x\|_2^4.$$

Тогда $\dot{V}(x)$ отрицательно определена в шаре D с радиусом $r^2 = 2/\sqrt{5} = 0.8944$. В этом примере анализа системы второго порядка можно

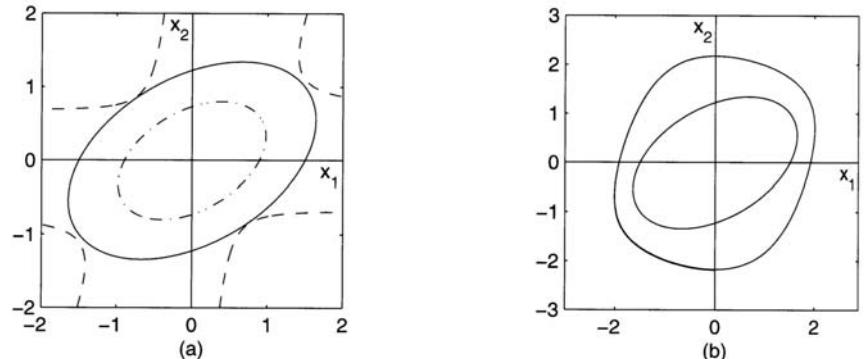


Рис. 8.4. (а) Кривые $\dot{V}(x) = 0$ (пунктир), $V(x) = 0.8$ (пунктир с точкой) и $V(x) = 2.25$ (непрерывная линия) в примере 8.9; (б) сравнение области притяжения с ее оценкой.

получить менее консервативную оценку множества Ω_c , если искомый шар D определить в полярных координатах. Полагая

$$x_1 = \rho \cos \theta, \quad x_2 = \rho \sin \theta$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\rho^2 + \rho^4 \cos^2 \theta \sin \theta (2 \sin \theta - \cos \theta) \leqslant \\ &\leqslant -\rho^2 + \rho^4 |\cos^2 \theta \sin \theta| \cdot |2 \sin \theta - \cos \theta| \leqslant \\ &\leqslant -\rho^2 + \rho^4 \times 0.3849 \times 2.2361 \leqslant \\ &\leqslant -\rho^2 + 0.861\rho^4 < 0 \quad \text{при} \quad \rho^2 < \frac{1}{0.861}. \end{aligned}$$

Используя этот результат, а также неравенство $\lambda_{\min}(P) \geq 0.69$, получаем искомую величину

$$c = 0.8 < \frac{0.69}{0.861} = 0.801.$$

Множество Ω_c при $c = 0.8$ может быть выбрано в качестве оценки области притяжения. Менее консервативная оценка (т. е. большее множество) может быть получена с использованием графиков для $\dot{V}(x) = 0$ и $V(x) = c$, где константа c увеличивается до тех пор, пока не будет получено максимальное значение c , для которого кривая $V(x) = c$ содержитя в $\{\dot{V}(x) < 0\}$. Эта процедура показана на рисунке 8.4(а), из которого определено максимальное значение $c = 2.25$. Рисунок 8.4(б) представляет собой сравнение полученной выше оценки с областью притяжения, границей которой является предельный цикл. \triangle

Оценка области притяжения множеством $\Omega_c = \{V(x) \leq c\}$ является простым, но часто слишком консервативным решением. Согласно теореме Ла-Салля (теорема 4.4), мы можем работать с любым компактным множеством $\Omega \subset D$, если покажем, что оно является положительно

инвариантным. Для этого обычно требуется исследовать векторное поле системы на границе множества Ω и показать, что траектории, начинающиеся в Ω , не могут покинуть это множество. Следующий пример иллюстрирует вышеизложенную идею.

Пример 8.10. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -4(x_1 + x_2) - h(x_1 + x_2),\end{aligned}$$

где $h : R \rightarrow R$ — локально липшицева функция, удовлетворяющая условию

$$h(0) = 0; \quad uh(u) \geq 0, \quad \forall |u| \leq 1.$$

Рассмотрим квадратичную функцию

$$V(x) = x^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

в качестве функции Ляпунова.¹⁾ Производная $\dot{V}(x)$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= (4x_1 + 2x_2)\dot{x}_1 + 2(x_1 + x_2)\dot{x}_2 = \\ &= -2x_1^2 - 6(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2)h(x_1 + x_2) \leqslant \\ &\leqslant -2x_1^2 - 6(x_1 + x_2)^2 \quad \forall |x_1 + x_2| \leqslant 1.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\dot{V}(x) \leqslant -x^T \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} x \quad \forall x_1, x_2 : |x_1 + x_2| \leqslant 1.$$

Таким образом, $\dot{V}(x)$ отрицательно определена в множестве

$$G = \{x \in R^2 \mid |x_1 + x_2| \leqslant 1\}$$

и мы можем заключить, что начало координат асимптотически устойчиво. Для получения оценки области притяжения R_A , начнем анализ с рассмотрения оценки вида $\Omega_c = \{V(x) \leqslant c\}$. Наибольшая константа $c > 0$, при которой $\Omega_c \subset G$, определяется равенством

$$c = \min_{|x_1+x_2|=1} x^T P x = \frac{1}{b^T P^{-1} b} = 1,$$

где $b^T = [1 \ 1]$. Таким образом, Ω_c при $c = 1$ представляет собой оценку R_A . (См. рисунок 8.5.) В этом примере мы можем получить лучшую оценку для R_A не ограничиваясь рассмотрением оценок вида Ω_c . Ключевым обстоятельством при последующем анализе будет тот

¹⁾ Эта функция Ляпунова может быть получена с использованием метода переменного градиента или кругового критерия и леммы Калмана–Якубовича–Попова.

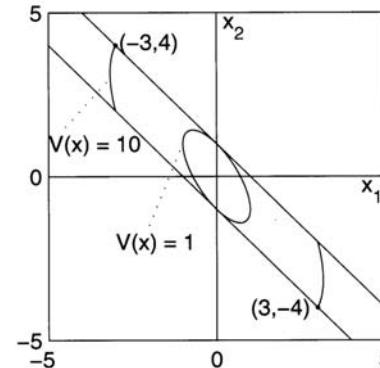


Рис. 8.5. Оценки области притяжения в примере 8.10

факт, что траектории внутри G не могут покинуть его через определенные сегменты границы $|x_1 + x_2| = 1$. В этом можно убедиться, если исследовать векторное поле на границе или с использованием следующего анализа. Положим

$$\sigma = x_1 + x_2.$$

Тогда граница G определяется равенствами $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$. Производная σ^2 вдоль траекторий системы удовлетворяет оценке

$$\frac{d}{dt} \sigma^2 = 2\sigma(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 2\sigma x_2 - 8\sigma^2 - 2\sigma h(\sigma) \leqslant 2\sigma x_2 - 8\sigma^2, \quad \forall |\sigma| \leqslant 1$$

и на границе $\sigma = 1$ выполнено неравенство

$$\frac{d}{dt} \sigma^2 \leqslant 2x_2 - 8 \leqslant 0, \quad \forall x_2 \leqslant 4.$$

Из этого следует, что когда траектория проходит через какую-либо точку с $x_2 \leqslant 4$ на сегменте границы, она не может выйти за пределы множества G , поскольку в этой точке функция σ^2 является неубывающей. Аналогично, на границе $\sigma = -1$,

$$\frac{d}{dt} \sigma^2 \leqslant -2x_2 - 8 \leqslant 0, \quad \forall x_2 \geqslant -4$$

и, следовательно, траектория не может покинуть множество G через сегмент границы $\sigma = -1$ через точки с $x_2 \geqslant -4$. Эта информация может быть использована для определения замкнутого, ограниченного, положительно инвариантного множества Ω , удовлетворяющего условиям теоремы 4.4. Для того, чтобы сделать множество Ω замкнутым, нам необходимо определить в дополнение к полученным выше двум сегментам его границы еще два сегмента. Эти сегменты также должны обладать тем свойством, что траектории системы не могут покинуть через них множество Ω . В качестве этих сегментов мы возьмем сегмен-

ты поверхности Ляпунова. Поверхность Ляпунова $V(x) = c_1$ пересекает границу $x_1 + x_2 = 1$ при $x_2 = 4$ в точке $(-3, 4)$. (См. рисунок 8.5.) Поверхность Ляпунова $V(x) = c_2$ пересекает границу $x_1 + x_2 = -1$ при $x_2 = -4$ в точке $(3, -4)$. Искомая поверхность Ляпунова имеет вид $V(x) = \min\{c_1, c_2\}$. Константы c_1 и c_2 определяются равенствами

$$c_1 = V(x)|_{x_1=-3, x_2=4} = 10, \quad c_2 = V(x)|_{x_1=3, x_2=-4} = 10.$$

Поэтому мы можем положить $c = 10$, что окончательно определит множество Ω :

$$\Omega = \{x \in R^2 \mid V(x) \leq 10 \text{ и } |x_1 + x_2| \leq 1\}.$$

Это множество замкнуто, ограничено и положительно инвариантно. Более того, $\dot{V}(x)$ отрицательно определена в Ω , поскольку $\Omega \subset G$. Таким образом, все условия теоремы 4.4. выполнены и мы можем заключить, что все траектории, начинающиеся в Ω , стремятся к началу координат при $t \rightarrow \infty$, т. е. $\Omega \subset R_A$. \triangle

8.3. Теоремы инвариантности

В случае автономных систем из теоремы Ла-Салля о инвариантности (теорема 4.4) следует, что траектория системы стремится к наибольшему инвариантному множеству в E , где E — множество всех точек в Ω , в которых $V(x) = 0$. В случае неавтономных систем задача определения множества E может оказаться непростой, поскольку $\dot{V}(t, x)$ является функцией не только от x , но и от t . Ситуация упрощается, если можно показать, что

$$\dot{V}(t, x) \leq -W(x) \leq 0,$$

т. к. в этом случае в качестве множества E можно взять множество точек, удовлетворяющих равенству $W(x) = 0$. Можно ожидать, что траектории системы будут стремится к E при $t \rightarrow \infty$. Эта идея представляет собой существование нижеследующей теоремы, но прежде чем она будет сформулирована мы представим лемму, которая будет использоваться при доказательстве этой теоремы. Лемма представляет собой результат, который интересен сам по себе и известен как лемма Барбалата.

Лемма 8.2. Пусть $\phi : R \rightarrow R$ — равномерно непрерывная функция на $[0, \infty)$. Предположим, что интеграл $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau$ существует и конечен. Тогда

$$\phi(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$$

Доказательство: Если утверждение леммы неверно, то существует положительная константа k_1 , такая что для любого $T > 0$ можно найти $T_1 \geq T$, удовлетворяющий неравенству $|\phi(T_1)| \geq k_1$. Поскольку $\phi(t)$ рав-

номерно непрерывна, существует положительная константа k_2 , такая что $|\phi(t + \tau) - \phi(t)| < k_1/2$ для всех $t \geq 0$ и $0 \leq \tau \leq k_2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &= |\phi(t) - \phi(T_1) + \phi(T_1)| \geq \\ &\geq |\phi(T_1)| - |\phi(t) - \phi(T_1)| > \\ &> k_1 - \frac{1}{2}k_1 = \frac{1}{2}k_1, \quad \forall t \in [T_1, T_1 + k_2]. \end{aligned}$$

Поэтому,

$$\left| \int_{T_1}^{T_1+k_2} \phi(t) dt \right| = \int_{T_1}^{T_1+k_2} |\phi(t)| dt > \frac{1}{2}k_1 k_2.$$

В представленном выше выражении равенство выполняется вследствие того, что $\phi(t)$ сохраняет знак при $T_1 \leq t \leq T_1 + k_2$. Таким образом, $\int_0^t \phi(\tau) d\tau$ не может иметь конечный предел при $t \rightarrow \infty$, что противоречит сделанному предположению. \square

Теорема 8.4. Пусть $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая $x = 0$ и $f(t, x)$ — функция, являющаяся кусочно-непрерывной по t и локально липшицевой по x равномерно по t на $[0, \infty) \times D$. Предположим также, что $f(t, 0)$ равномерно ограничена для всех $t \geq 0$. Пусть $V : [0, \infty) \times D \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая что

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x),$$

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W(x)$$

для всех $t \geq 0$ и всех $x \in D$, где $W_1(x)$ и $W_2(x)$ — непрерывные положительно определенные функции и $W(x)$ — непрерывная положительно полуопределенная функция на D . Выберем $r > 0$ так, чтобы $B_r \subset D$ и положим $\rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$. Тогда все решения уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальными данными $x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$ ограничены и удовлетворяют

$$W(x(t)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Кроме того, если все условия выполнены глобально и $W_1(x)$ радиально неограничена, то утверждение теоремы выполнено для всех $x(t_0) \in R^n$.

Доказательство: Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 4.8, можно показать, что

$$x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\} \Rightarrow x(t) \in \Omega_{t, \rho} \subset \{x \in B_r \mid W_1(x) \leq \rho\}, \quad \forall t \geq t_0,$$

поскольку $\dot{V}(t, x) \leq 0$. Следовательно, $\|x(t)\| < r$ для всех $t \geq t_0$. Так как $V(t, x(t))$ является монотонно неубывающей и отделенной снизу от

нуля функцией, она сходится при $t \rightarrow \infty$. Далее,

$$\int_{t_0}^t W(x(\tau)) d\tau \leq - \int_{t_0}^t \dot{V}(\tau, x(\tau)) d\tau = V(t_0, x(t_0)) - V(t, x(t)).$$

Поэтому $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t W(x(\tau)) d\tau$ существует и конечен. Поскольку $x(t)$ ограничена, $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ ограничена равномерно по t для всех $t \geq t_0$. Следовательно, $x(t)$ равномерно непрерывна по t на $[t_0, \infty)$. Тогда $W(x(t))$ является равномерно непрерывной по t на $[t_0, \infty)$, т. к. $W(x)$ равномерно непрерывна по x на компактном множестве B_r . Используя лемму 8.2, заключаем, что $W(x(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если все предположения выполнены глобально и $W_1(x)$ радиально неограничена, то для любой $x(t_0)$ можно найти достаточно большую константу ρ , такую что $x(t_0) \in \{x \in R^n | W_2(x) \leq \rho\}$. \square

Из $W(x(t)) \rightarrow 0$ следует, что $x(t)$ стремится к E при $t \rightarrow \infty$, где

$$E = \{x \in D \mid W(x) = 0\}.$$

Поэтому положительно предельным множеством для $x(t)$ является подмножество множества E . Результат о стремлении $x(t)$ к множеству E представляется более слабым по сравнению с принципом инвариантности для автономных систем, согласно которому $x(t)$ стремится к наибольшему инвариантному множеству в E . Наличие более сильного утверждения для случая автономных систем обусловлено тем, что эти системы обладают свойством, сформулированным в лемме 4.1 и заключающимся в том, что положительно предельное множество является инвариантным множеством. Существуют классы неавтономных систем, для которых положительно предельные множества обладают в некотором смысле свойством инвариантности.¹⁾ Однако для неавтономной системы общего вида положительно предельное множество, вообще говоря, не является инвариантным. В случае автономной системы стремление траектории $x(t)$ к наибольшему инвариантному множеству в E , позволило доказать следствие 4.1, в котором асимптотическая устойчивость начала координат была установлена на основании того, что множество E не содержит целой траектории системы, отличной от тривиального решения. Однако для случая неавтономных систем не существует обобщения следствия 4.1, из которого бы следовала равномерная асимптотическая устойчивость. Тем не менее, в следующей теореме устанавливается это свойство, если в дополнение к выполне-

¹⁾ В качестве примера таких систем можно указать периодические системы, почти периодические системы и асимптотически автономные системы. Теоремы инвариантности для этих классов систем приведены в работе [154, глава 8]. Другое обобщение принципа инвариантности рассмотрено в работе [136].

нию условия $\dot{V}(t, x) \leq 0$ можно показать, что функция V убывает на интервале $[t, t + \delta]$.¹⁾

Теорема 8.5. Пусть $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая $x = 0$. Предположим, что $f(t, x)$ — кусочно-непрерывная по t и локально липшицева по x для всех $t \geq 0$ функция и $x \in D$. Пусть $x = 0$ — точка равновесия для $\dot{x} = f(t, x)$ при $t = 0$. Пусть $V : [0, \infty) \times D \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая что

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x),$$

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0,$$

$$V(t + \delta, \phi(t + \delta; t, x)) - V(t, x) \leq -\lambda V(t, x), \quad 0 < \lambda < 1,$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$ при некоторой $\delta > 0$, где $W_1(x)$ и $W_2(x)$ — непрерывные положительно определенные функции на D и $\phi(t; t, x)$ — решение системы, начинающееся в (t, x) . Тогда начало координат равномерно асимптотически устойчиво. Если все условия выполнены глобально и $W_1(x)$ радиально неограничена, то начало координат глобально равномерно асимптотически устойчиво. Если

$$W_1(x) \geq k_1 \|x\|^c, \quad W_2(x) \leq k_2 \|x\|^c, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad c > 0,$$

то начало координат экспоненциально устойчиво.

Доказательство: Выберем $r > 0$ так, чтобы $B_r \subset D$. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 4.8, можно показать, что

$$x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\} \Rightarrow x(t) \in \Omega_{t, \rho}, \quad \forall t \geq t_0,$$

где $\rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$, поскольку $\dot{V}(t, x) \leq 0$. Далее, для всех $t \geq t_0$ имеем

$$V(t + \delta, x(t + \delta)) \leq V(t, x(t)) - \lambda V(t, x(t)) = (1 - \lambda)V(t, x(t)).$$

Более того, из $\dot{V}(t, x) \leq 0$ следует, что

$$V(\tau, x(\tau)) \leq V(t, x(t)), \quad \forall \tau \in [t, t + \delta].$$

¹⁾ В работе [1] показано, что равномерная асимптотическая устойчивость может быть установлена в условиях, когда вместо неравенства $\dot{V} \leq 0$ выполнено

$$V(t + \delta, \phi(t + \delta; t, x)) - V(t, x) \leq -\gamma(\|x\|)$$

для некоторой \mathcal{K} -функции γ .

²⁾ Не умаляя общности можно предположить, что $\lambda < 1$. Тогда, если это неравенство выполнено при $\lambda_1 \geq 1$, то оно также выполнено при любой положительной константе $\lambda < 1$, т. к. $-\lambda_1 V \leq -\lambda V$. Заметим однако, что это неравенство не может быть выполнено при $\lambda > 1$, т. к. $V(t, x) > 0, \forall x \neq 0$.

Для всех $t \geq t_0$ выберем наименьшее положительное число N , так чтобы $t \leq t_0 + N\delta$. Разделим интервал $[t_0, t_0 + (N - 1)\delta]$ на $N - 1$ равных отрезков длины δ . Тогда

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) &\leq V(t_0 + (N - 1)\delta, x(t_0 + (N - 1)\delta)) \leq \\ &\leq (1 - \lambda)V(t_0 + (N - 2)\delta, x(t_0 + (N - 2)\delta)) \leq \\ &\vdots \\ &\leq (1 - \lambda)^{(N-1)}V(t_0, x(t_0)) \leq \\ &\leq \frac{1}{(1 - \lambda)}(1 - \lambda)^{(t-t_0)/\delta}V(t_0, x(t_0)) = \\ &= \frac{1}{(1 - \lambda)}e^{-b(t-t_0)}V(t_0, x(t_0)), \end{aligned}$$

где

$$b = \frac{1}{\delta} \ln \frac{1}{(1 - \lambda)}.$$

Полагая

$$\sigma(r, s) = \frac{r}{(1 - \lambda)}e^{-bs},$$

можно показать, что функция $\sigma(r, s)$ принадлежит классу \mathcal{KL} и функция $V(t, x(t))$ удовлетворяет

$$V(t, x(t)) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0), \quad \forall V(t_0, x(t_0)) \in [0, \rho].$$

Далее доказательство может быть проведено аналогично тому, как это было сделано в теореме 4.9. Доказательство утверждений про глобальную равномерную асимптотическую устойчивость и экспоненциальную устойчивость может быть выполнено аналогично тому, как это было сделано в теоремах 4.9 и 4.10. \square

Пример 8.11. Рассмотрим линейную зависящую от времени систему

$$\dot{x} = A(t)x,$$

где $A(t)$ — непрерывная по $t \geq 0$ матрица. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая симметричная матрица $P(t)$, удовлетворяющая неравенству

$$0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I, \quad \forall t \geq 0,$$

и дифференциальному уравнению

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + C^T(t)C(t),$$

где $C(t)$ — непрерывная по t . Производная квадратичной функции

$$V(t, x) = x^T P(t)x$$

вдоль траекторий системы удовлетворяет оценке

$$\dot{V}(t, x) = -x^T C^T(t)C(t)x \leq 0.$$

Решение линейной системы имеет вид $\phi(\tau; t, x) = \Phi(\tau, t)x$, где $\Phi(\tau, t)$ — переходная матрица состояния. Поэтому

$$\begin{aligned} V(t + \delta, \phi(t + \delta; t, x)) - V(t, x) &= \int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, \phi(\tau; t, x))d\tau = \\ &= -x^T \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau x = \\ &= -x^T W(t, t + \delta)x, \end{aligned}$$

где

$$W(t, t + \delta) = \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau.$$

Предположим, что существует положительная константа $k < c_2$, такая что

$$W(t, t + \delta) \geq kI, \quad \forall t \geq 0.$$

Тогда

$$V(t + \delta, \phi(t + \delta; t, x)) - V(t, x) \leq -k\|x\|_2^2 \leq -\frac{k}{c_2}V(t, x).$$

Таким образом, все предположения теоремы 8.5 выполнены глобально при

$$W_i(x) = c_i\|x\|_2^2, \quad i = 1, 2, \quad \lambda = \frac{k}{c_2} < 1$$

и мы можем заключить, что начало координат глобально экспоненциально устойчиво. Читатели, знакомые с линейной теорией, могут заметить, что матрица $W(t, t + \delta)$ является матрицей наблюдаемости пары $(A(t), C(t))$ и что неравенство $W(t, t + \delta) \geq kI$ следует из равномерной наблюдаемости $(A(t), C(t))$. При сравнении этого примера с примером 4.21 можно заметить, что теорема 8.5 позволяет заменить требование положительной определенности матрицы $Q(t)$ (4.28) на более слабое требование $Q(t) = C^T(t)C(t)$ при условии, что пара $(A(t), C(t))$ является равномерно наблюдаемой. \triangle

Теоремы 8.4 и 8.5, а также их приложения к линейным системам, например как в примере 8.11, часто используются при анализе адаптивных систем управления.¹⁾ В качестве иллюстрирующего примера мы рассмотрим адаптивную систему управления из параграфа 1.2.6.

Пример 8.12. В параграфе 1.2.6 мы видели, что уравнения замкнутой адаптивной системы управления для объекта управления $\dot{y}_p =$

¹⁾ См., например, работы [87] и [168].

$= a_p y_p + k_p u$ с эталонной моделью $\dot{y}_m = a_m y_m + k_m r$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{e}_o &= a_m e_o + k_p \phi_1 r(t) + k_p \phi_2 [e_o + y_m(t)], \\ \dot{\phi}_1 &= -\gamma e_o r(t), \\ \dot{\phi}_2 &= -\gamma e_o [e_o + y_m(t)],\end{aligned}$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент усиления адаптивной системы, $e_o = y_p - y_m$ — выходная ошибка и ϕ_1, ϕ_2 — параметрические ошибки. Предполагается, что $k_p > 0$ и, разумеется, для эталонной модели выполнено $a_m < 0$. Далее мы будем предполагать, что функция $r(t)$ является кусочно-непрерывной и ограниченной. Используя

$$V = \frac{1}{2} \left[\frac{e_o^2}{k_p} + \frac{1}{\gamma} (\phi_1^2 + \phi_2^2) \right]$$

в качестве функции Ляпунова, получаем

$$\dot{V} = \frac{a_m}{k_p} e_o^2 + e_o (\phi_1 r + \phi_2 e_o + \phi_2 y_m) - \phi_1 e_o r - \phi_2 e_o (e_o + y_m) = \frac{a_m}{k_p} e_o^2 \leq 0.$$

Применяя терему 8.4, заключаем, что для любой $c > 0$ и для всех начальных состояний из множества $\{V \leq c\}$, все переменные состояния ограничены при всех $t \geq t_0$, при этом $\lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) = 0$. Из этого следует, что выход системы управления y_p отслеживает желаемый выход эталонной модели y_m , однако мы ничего не можем сказать о сходимости параметрических ошибок ϕ_1 и ϕ_2 к нулю. В действительности они могут не сходится к нулю. Например, если r и y_m — ненулевые постоянные сигналы, то замкнутая система будет иметь подпространство состояний равновесия $\{e_o = 0, \phi_2 = (a_m/k_m)\phi_1\}$ и, следовательно, в общем случае ϕ_1 и ϕ_2 не сходятся к нулю. Для того чтобы получить условия сходимости ϕ_1 и ϕ_2 к нулю, применим теорему 8.5 и докажем равномерную асимптотическую устойчивость начала координат $(e_o = 0, \phi_1 = 0, \phi_2 = 0)$. Поскольку мы уже показали, что все состояния ограничены, мы можем представить замкнутую систему в виде линейной зависящей от времени системы:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_m & k_p r(t) & k_p y_p(t) \\ -\gamma r(t) & 0 & 0 \\ -\gamma y_p(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \quad \text{где } x = \begin{bmatrix} e_o \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что эталонный сигнал $r(t)$ имеет устойчивое значение $r_{ss}(t)$, т. е. $\lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - r_{ss}(t)] = 0$. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} [y_m(t) - y_{ss}(t)] = 0$, где $y_{ss}(t)$ — устойчивый выход эталонной модели. Из существования этих пределов, а также из $\lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) = 0$, следует, что линейная система может быть представлена в следующем виде:

$$\dot{x} = [A(t) + B(t)]x,$$

где

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_m & k_p r_{ss}(t) & k_p y_{ss}(t) \\ -\gamma r_{ss}(t) & 0 & 0 \\ -\gamma y_{ss}(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0.$$

Если мы покажем, что начало координат системы $\dot{x} = A(t)x$ равномерно асимптотически устойчиво, мы сможем использовать свойство $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$ и доказать равномерную асимптотическую устойчивость начала координат системы $\dot{x} = [A(t) + B(t)]x$.¹⁾ Поэтому мы сконцентрируем наше внимание на анализе системы $\dot{x} = A(t)x$. Используя V в качестве функции Ляпунова, получаем

$$\dot{V} = \frac{a_m}{k_p} e_o^2 = -x^T C^T C x, \quad \text{где } C = \sqrt{\frac{-a_m}{k_p}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В примере 8.12 было показано, что начало координат равномерно асимптотически устойчиво, если пара $(A(t), C)$ равномерно наблюдаема. Равномерная наблюдаемость $(A(t), C)$ эквивалентна равномерной наблюдаемости $(A(t) - K(t)C, C)$ для любой кусочно-непрерывной, ограниченной матрицы $K(t)$.²⁾ Положим

$$K(t) = \sqrt{\frac{k_p}{-a_m}} \begin{bmatrix} a_m & -\gamma r_{ss}(t) & -\gamma y_{ss}(t) \end{bmatrix}^T,$$

что упрощает исследуемую пару:

$$A(t) - K(t)C = \begin{bmatrix} 0 & k_p r_{ss}(t) & k_p y_{ss}(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \sqrt{\frac{-a_m}{k_p}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проведя анализ наблюдаемости этой пары для заданного эталонного сигнала, мы сможем ответить на вопрос о выполнении условий теоремы 8.5. Например, если r — ненулевой постоянный сигнал, можно легко показать, что эта пара не является наблюдаемой. В этом нет ничего удивительного, поскольку в этом случае, как было показано ранее, начало координат не является равномерно асимптотически устойчивым. С другой стороны, если $r(t) = a \sin \omega t$ с положительными константами a и ω , то $r_{ss}(t) = r(t)$ и $y_{ss}(t) = aM \sin(\omega t + \delta)$, где M и δ определяются передаточной функцией эталонной модели. Легко показать, что в этом случае пара является равномерно наблюдаемой и, следовательно, начало координат $(e_o = 0, \phi_1 = 0, \phi_2 = 0)$ является равномерно асимптотически устойчивым; при этом параметрические ошибки $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.³⁾ \triangle

¹⁾ См. пример 9.6.

²⁾ См. [87, лемма 4.8.1].

³⁾ В этом случае эталонный сигнал $r(t) = a \sin \omega t$ является сигналом с постоянным возбуждением. Постоянный сигнал не является сигналом с по-

8.4. Устойчивость периодических решений

В главе 4 была разработана теория устойчивости точек равновесия. В этом параграфе мы рассмотрим соответствующую проблему для периодических решений. Пусть функция $u(t)$ является периодическим решением системы

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (8.14)$$

Что можно сказать о решениях, начинающихся произвольно близко от $u(t)$? Будут ли они оставаться в окрестности $u(t)$ для всех t , или даже стремится к $u(t)$? Эти свойства устойчивости периодического решения $u(t)$ могут быть охарактеризованы и исследованы с помощью методов Ляпунова. Пусть

$$y = x - u(t),$$

что делает начало координат $y = 0$ точкой равновесия неавтономной системы

$$\dot{y} = f(t, y + u(t)) - f(t, u(t)). \quad (8.15)$$

Поведение решений системы (8.14) вблизи $u(t)$ эквивалентно поведению решений системы (8.15) вблизи $y = 0$. Поэтому мы можем охарактеризовать свойства устойчивости $u(t)$, исследовав свойства устойчивости точки равновесия $y = 0$. В частности, мы будем говорить, что периодическое решение $u(t)$ равномерно асимптотически устойчиво, если $y = 0$ является равномерно асимптотически устойчивой точкой равновесия системы (8.15). Аналогичные заключения можно сделать и в отношении других свойств устойчивости, например о равномерной устойчивости. Таким образом, исследование устойчивости решения $u(t)$ сводится к рассмотренной в главе 4 задаче исследования свойств устойчивости точки равновесия неавтономной системы. Понятие равномерной асимптотической устойчивости периодических решений в смысле Ляпунова окажется весьма полезным при исследовании неавтономных систем, зависящих от малых параметров (см. главу 10). Однако, это понятие является достаточно ограничительным при анализе периодических решений автономных систем. Это утверждение подтверждается следующим примером.

Пример 8.13. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \left[\frac{(1-x_1^2-x_2^2)^3}{x_1^2+x_2^2} \right] - x_2 \left[1 + (1-x_1^2-x_2^2)^2 \right], \\ \dot{x}_2 &= x_2 \left[\frac{(1-x_1^2-x_2^2)^3}{x_1^2+x_2^2} \right] + x_1 \left[1 + (1-x_1^2-x_2^2)^2 \right],\end{aligned}$$

стоящим возбуждением. Постоянное возбуждение сигнала более детально рассматривается в работах [5], [15], [87], [139], [168], а также в параграфе 13.4 второго издания этой книги.

которая может быть представлена в полярных координатах

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

с использованием замены переменных

$$\dot{r} = \frac{(1-r^2)^3}{r}, \quad \dot{\theta} = 1 + (1-r^2)^2.$$

Решение, начинающееся в (r_0, θ_0) , определяется равенством

$$\begin{aligned}r(t) &= \left[1 - \frac{1-r_0^2}{\sqrt{1+4t(1-r_0^2)^2}} \right]^{1/2}, \\ \theta(t) &= \theta_0 + t + \frac{1}{4} \ln[1+4t(1-r_0^2)^2].\end{aligned}$$

Из этих равенств видно, что система имеет периодическое решение

$$\bar{x}_1(t) = \cos t, \quad \bar{x}_2(t) = \sin t.$$

Соответствующей периодической орбитой является единичная окружность $r = 1$. Все начинающиеся вблизи нее решения спирально стремятся к этой периодической орбите при $t \rightarrow \infty$. Спиральная сходимость является, очевидно, разновидностью поведения асимптотически устойчивой системы, и этого следовало ожидать при наличии в системе периодической орбиты. Периодическая орбита известна в классической литературе как устойчивый предельный цикл. Однако периодическое решение $\bar{x}(t)$ не является равномерно асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова. Напомним, что для равномерной асимптотической устойчивости решения необходимо, чтобы

$$[r(t) \cos \theta(t) - \cos t]^2 + [r(t) \sin \theta(t) - \sin t]^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

при достаточно малой величине $[r_0 \cos \theta_0 - 1]^2 + [r_0 \sin \theta_0]^2$. Поскольку $r(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, должно быть справедливо условие

$$|1 - \cos(\theta(t) - t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

что очевидно не выполнено при $r_0 \neq 1$, т. к. $(\theta(t) - t)$ является монотонно возрастающей функцией от t . \triangle

Вышеприведенное утверждение, иллюстрируемое этим примером, справедливо и в более общей ситуации. Например, нетривиальное периодическое решение автономной системы может никогда не быть асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова.¹⁾

Свойства устойчивости периодической орбиты из примера 8.13 могут быть установлены, если обобщить понятие устойчивости в смысле

¹⁾ Доказательство этого утверждения приведено в работе [72, теорема 81.1].

Ляпунова для точки равновесия на аналогичное понятие для инвариантного множества. Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (8.16)$$

где $f : D \rightarrow R^n$ — непрерывно дифференцируемое отображение из области $D \subset R^r$ в R^n . Пусть $M \subset D$ — замкнутое инвариантное множество для (8.16). Определим ε -окрестность множества M равенством

$$U_\varepsilon = \{x \in R^n \mid \text{dist}(x, M) < \varepsilon\},$$

где $\text{dist}(x, M)$ — минимальное расстояние от x до точек из M , т. е.

$$\text{dist}(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Определение 8.1. Замкнутое инвариантное множество M системы (8.16) является

- устойчивым, если для любой $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такая что

$$x(0) \in U_\delta \Rightarrow x(t) \in U_\varepsilon, \quad \forall t \geq 0;$$

- асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и константа δ может быть выбрана таким образом, что

$$x(0) \in U_\delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), M) = 0.$$

Это определение сводится к определению 4.1, если M представляет собой точку равновесия. Теория устойчивости Ляпунова для точек равновесия, представленная в главе 4, может быть обобщена на случай инвариантных множеств.¹⁾ Например, следуя доказательству теоремы 4.1, можно убедиться в том, что если существует функция $V(x)$, равная нулю на M и положительная в некоторой окрестности D множества M , исключая само M , и если производная $\dot{V}(x) = [\partial V / \partial x]f(x) \leq 0$ в D , то M устойчиво. Более того, если $\dot{V}(x)$ отрицательна в D , исключая M , то множество M асимптотически устойчиво.

Устойчивость и асимптотическая устойчивость инвариантных множеств — это концепции, представляющие самостоятельный интерес. Мы применяем их в этом параграфе для анализа специфического случая, когда в качестве инвариантного множества выступает замкнутая орбита, соответствующая периодическому решению. Пусть $u(t)$ — нетривиальное периодическое решение автономной системы (8.16) с периодом T , и пусть γ — замкнутая орбита, определенная равенством

$$\gamma = \{x \in R^n \mid x = u(t), 0 \leq t \leq T\}.$$

¹⁾ Этот вопрос всесторонне исследован в работах [213] и [221]; в [118] приведены некоторые интересные результаты, касающиеся соответствующих обратных теорем Ляпунова.

Периодическая орбита представляет собой образ $u(t)$ в пространстве состояний. Она является инвариантным множеством, свойства устойчивости которого даны в определении 8.1. Общепринято, особенно в контексте систем второго порядка, называть асимптотически устойчивые периодические орбиты устойчивыми предельными циклами.

Пример 8.14. Гармонический осциллятор

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$

имеет континuum периодических орбит, представляющих собой концентрические окружности с центром в начале координат. Каждая из этих периодических орбит устойчива. Рассмотрим, например, периодическую орбиту γ_c , определенную равенством

$$\gamma_c = \{x \in R^2 \mid r = c > 0\}, \quad \text{где } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Окрестность U_ε периодической орбиты γ_c представляет собой кольцевую область

$$U_\varepsilon = \{x \in R^2 \mid c - \varepsilon < r < c + \varepsilon\}.$$

Эта кольцевая область является инвариантным множеством. Таким образом, для заданной константы $\varepsilon > 0$ мы можем положить $\delta = \varepsilon$ и показать, что любое решение, начинающееся при $t = 0$ в окрестности U_δ останется в U_ε при всех $t \geq 0$. Следовательно, периодическая орбита γ_c устойчива. Однако, она не является асимптотически устойчивой, поскольку решение, начинающееся в окрестности U_δ периодической орбиты γ_c , не стремится при $t \rightarrow \infty$ к γ_c и это свойство имеет место при сколь угодно малой константе δ . Устойчивость периодической орбиты $\{r = c\}$ может быть доказана с использованием функции Ляпунова

$$V(x) = (r^2 - c^2)^2 = (x_1^2 + x_2^2 - c^2)^2,$$

производная которой вдоль траекторий системы определяется равенством

$$\dot{V}(x) = 4(r^2 - c^2)rr' = 0.$$

△

Пример 8.15. Рассмотрим систему из примера 8.13. Она имеет изолированную периодическую орбиту

$$\gamma = \{x \in R^2 \mid r = 1\}, \quad \text{где } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

При $x \notin \gamma$, имеем

$$\text{dist}(x, \gamma) = \inf_{y \in \gamma} \|x - y\|_2 = \inf_{y \in \gamma} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = |r - 1|.$$

С учетом того, что

$$r(t) = \left[1 - \frac{1 - r_0^2}{\sqrt{1 + 4t(1 - r_0^2)^2}} \right]^{1/2},$$

можно легко показать, что условия устойчивости на языке $\varepsilon - \delta$ выполнены и

$$\text{dist}(x(t), \gamma) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Следовательно, периодическая орбита асимптотически устойчива. Тот же вывод можно сделать с использованием функции Ляпунова

$$V(x) = (r^2 - 1)^2 = (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2,$$

производная которой вдоль траекторий системы имеет вид

$$\dot{V}(x) = 4(r^2 - 1)r\dot{r} = -4(r^2 - 1)^4 < 0 \text{ при } r \neq 1.$$

△

Определив свойства устойчивости периодических орбит, мы можем определить свойства устойчивости периодических решений.

Определение 8.2. Нетривиальное периодическое решение $u(t)$ системы (8.16) является

- орбитально устойчивым, если замкнутая орбита γ , соответствующая $u(t)$, устойчива.
- асимптотически орбитально устойчивым, если замкнутая орбита γ , соответствующая $u(t)$, асимптотически устойчива.

Заметим, что в литературе используется различная терминология, в зависимости от того, говорится ли о периодическом решении, или же о соответствующей ему периодической орбите. В примере 8.15 мы говорили, что единичная окружность является асимптотически устойчивой периодической орбитой, а периодическое решение $(\cos t, \sin t)$ называли орбитально асимптотически устойчивым.

8.5. Упражнения

8.1 Докажите следствие 8.1.

8.2 Докажите следствие 8.2.

8.3 Предположим, что условия теоремы 8.1 выполнены для случая, когда $g_1(y, 0) = 0$, $g_2(y, 0) = 0$ и $A_1 = 0$. Покажите, что начало координат всей системы устойчиво.

8.4 Рассмотрим пример 8.1 при $a = 0$. Покажите, что начало координат устойчиво.

8.5 ([88]) Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= f_a(x_a, x_b) \\ \dot{x}_b &= A_b x_b + f_b(x_a, x_b) \end{aligned}$$

где $\dim(x_a) = n_1$, $\dim(x_b) = n_2$, A_b гурвицева, f_a и f_b непрерывно дифференцируемы, $[\partial f_b / \partial x_b](0, 0) = 0$ и $f_b(x_a, 0) = 0$ в окрестности $x_a = 0$.

(a) Покажите, что если $x_a = 0$ экспоненциально устойчивая точка равновесия системы $\dot{x}_a = f_a(x_a, 0)$, то $(x_a, x_b) = (0, 0)$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия всей системы.

(b) Покажите, что если $x_a = 0$ асимптотически (но не экспоненциально) устойчивая точка равновесия системы $\dot{x}_a = f_a(x_a, 0)$, то $(x_a, x_b) = (0, 0)$ — асимптотически устойчивая точка равновесия всей системы.

8.6 ([70]) Для каждой из следующих систем исследуйте устойчивость начала координат с использованием теоремы о центральном многообразии:

- (1) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 + x_1 x_2 \end{aligned}$
- (2) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1^2 - x_2^2, \quad a \neq 0 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 + x_1 x_2 \end{aligned}$
- (3) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 - (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 \end{aligned}$
- (4) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2 \end{aligned}$
- (5) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1^2 + 2x_1^8 \end{aligned}$
- (6) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^3(x_1 + x_2 - 1) \\ \dot{x}_2 &= x_2^3(x_1 + x_2 - 1) \end{aligned}$
- (7) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + ax_1^3/(1 + x_1^2), \quad a \neq 0 \end{aligned}$
- (8) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1^2 + x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 \end{aligned}$

8.7 ([34]) Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2 + ax_1^3 + bx_1 x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + cx_1^2 + dx_1^2 x_2.$$

Исследуйте устойчивость начала координат с использованием теоремы о центральном многообразии для каждого из следующих случаев:

- (1) $a + c > 0$.
- (2) $a + c < 0$.

(3) $a + c = 0$ и $cd + bc^2 < 0$.

(4) $a + c = 0$ и $cd + bc^2 > 0$.

(5) $a + c = cd + bc^2 = 0$.

8.8 ([34]) Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = ax_1^3 + x_1^2x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1^3.$$

Исследуйте устойчивость начала координат с использованием теоремы о центральном многообразии для всех возможных случаев выбора значений вещественного параметра a .

8.9 ([88]) Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = ax_1x_2 - x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + bx_1x_2 + cx_1^2.$$

Исследуйте устойчивость начала координат с использованием теоремы о центральном многообразии для всех возможных случаев выбора значений вещественных констант a, b и c .

8.10 (теорема Зубова) Рассмотрим систему (8.13) и пусть $G \subset R^n$ — открытая область, содержащая начало координат. Предположим, что существуют две функции $V : G \rightarrow R$ и $h : R^n \rightarrow R$ со следующими свойствами:

- V непрерывно дифференцируема и положительно определена на G и удовлетворяет

$$0 < V(x) < 1, \quad \forall x \in G - \{0\}.$$

- При приближении x к границе G , или при $\|x\| \rightarrow \infty$ в случае неограниченного G , выполнено $\lim V(x) = 1$.
- h непрерывна и положительно определена на R^n .
- При $x \in G$ функция $V(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) = -h(x)[1 - V(x)] \quad (8.17)$$

Покажите, что точка $x = 0$ асимптотически устойчива и G — область притяжения.

8.11 ([72]) Рассмотрим систему второго порядка

$$\dot{x}_1 = -h_1(x_1) + g_2(x_2), \quad \dot{x}_2 = -g_1(x_1),$$

где

$$h_1(0) = 0, \quad zh_1(z) > 0 \quad \forall -a_1 < z < b_1,$$

$$g_i(0) = 0, \quad zg_i(z) > 0 \quad \forall -a_i < z < b_i,$$

$$\int_0^z g_i(\sigma) d\sigma \rightarrow \infty \quad \text{при } z \rightarrow -a_i \text{ или } z \rightarrow b_i$$

для некоторых положительных констант a_i, b_i (допустимо $a_i = \infty$ или $b_i = \infty$). Докажите, применив теорему Зубова, что областью притяже-

ния является множество $\{x \in R^2 \mid -a_i < x_i < b_i\}$.

Указание: Положите $h(x) = g_1(x_1)h_1(x_1)$ и найдите решение дифференциального уравнения в частных производных (8.17) в виде $V(x) = 1 - W_1(x_1)W_2(x_2)$. Заметим, что при указанном выборе функции h производная $V'(x)$ является отрицательно полуопределенной. Примените принцип инвариантности Ла-Салля.

8.12 Найдите область притяжения системы

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -\operatorname{tg}(x_1).$$

Указание: Используйте результаты предыдущего примера.

8.13 Пусть Ω — открытое, положительно инвариантное множество, содержащее начало координат. Предположим, что каждая траектория в Ω стремится к началу координат при $t \rightarrow \infty$. Покажите, что Ω связно.

8.14 Рассмотрим систему второго порядка $\dot{x} = f(x)$ с асимптотически устойчивым началом координат. Пусть $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ и $D = \{x \in R^2 \mid |x_2| < 1, |x_1 - x_2| < 1\}$. Предположим, что $[\partial V / \partial x]f(x)$ отрицательно определена на D . Оцените область притяжения.

8.15 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - (2x_2 + x_1)(1 - x_2^2).$$

(а) Покажите, используя $V(x) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$, что начало координат асимптотически устойчиво.

(б) Пусть

$$S = \{x \in R^2 \mid V(x) \leq 5\} \cap \{x \in R^2 \mid |x_2| \leq 1\}.$$

Покажите, что S представляет собой оценку области притяжения.

8.16 Покажите, что начало координат системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 + x_1^3$$

асимптотически устойчиво и оцените область притяжения.

8.17 Рассмотрим систему второго порядка $\dot{x} = f(x)$ и функцию Ляпунова $V(x)$. Предположим, что $\dot{V}(x) < 0$ для всех $x_1^2 + x_2^2 \geq a^2$. На рисунке 8.6 показаны четыре различных направления векторного поля системы в точке на окружности $x_1^2 + x_2^2 = a^2$. Какие из этих направлений возможны, а какие невозможны? Обоснуйте свои ответы.

8.18 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - \sin x_1 - 2 \operatorname{sat}(x_1 + x_2).$$

(а) Покажите, что начало координат является единственной точкой равновесия.

(б) С использованием линеаризации системы покажите, что начало координат асимптотически устойчиво.

(с) Пусть $\sigma = x_1 + x_2$. Покажите, что $\sigma\dot{\sigma} \leq -|\sigma|$ при $|\sigma| \geq 1$.

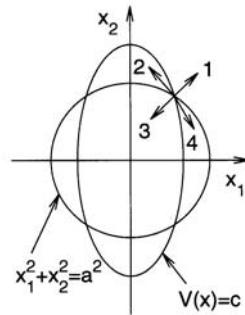


Рис. 8.6. К упражнению 8.17.

- (д) Пусть $V(x) = x_1^2 + 0.5x_2^2 + 1 - \cos x_1$. Покажите, что множество

$$M_c = \{x \in R^2 \mid V(x) \leq c\} \cap \{x \in R^2 \mid |\sigma| \leq 1\}, \quad c > 0$$

является положительно инвариантным и траектории в M_c стремятся к началу координат при $t \rightarrow \infty$.

- (е) Покажите, что начало координат глобально асимптотически устойчиво.

8.19 Рассмотрим модель синхронного генератора, описанную в упражнении 1.8. Пусть переменные состояния и параметры выбраны так, как в пунктах (а) и (б) этого упражнения. Кроме того, положим $\tau = 6.6 \text{ sec}$, $M = 0.0147$ (на единицу мощности) $\times \text{sec}^2/\text{рад}$ и $D/M = 4 \text{ sec}^{-1}$.

- (а) Найдите все точки равновесия в области $-\pi \leq x_1 \leq \pi$ и выполните анализ свойств устойчивости каждой из найденных точек равновесия с использованием линеаризации системы.

- (б) Оцените область притяжения каждой асимптотически устойчивой точки равновесия.

8.20 ([113]) Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - g(t)x_2,$$

где $g(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $0 < k_1 \leq g(t) \leq k_2$ для всех $t \geq 0$.

- (а) Покажите, что начало координат экспоненциально устойчиво.

- (б) Будет ли выполнен пункт (а), если $g(t)$ не ограничена? Рассмотрите частный случай $g(t) = 2 + \exp(t)$.

8.21 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 - g(t)x_2,$$

где $g(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $0 < k_1 \leq g(t) \leq k_2$ для всех $t \geq 0$. Покажите, что начало координат экспоненциально

устойчиво.

Указание: Используйте результаты предыдущего упражнения.

8.22 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 - \alpha(t)x_3, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = \alpha(t)x_1,$$

где $\alpha(t) = \sin t + \sin 2t$. Покажите, что начало координат экспоненциально устойчиво.

8.23 Рассмотрим нелинейную систему с одним входом и одним выходом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{x}_n &= f_0(x) + (\theta^*)^T f_1(x) + g_0(x)u, \end{aligned}$$

где f_0, f_1 и g_0 — известные гладкие функции переменной x , определенные для всех $x \in R^n$ и $\theta^* \in R^p$ — вектор неизвестных постоянных параметров. Функция $g_0(x)$ отделена от нуля, т. е. $|g_0(x)| \geq k_0 > 0$ для всех $x \in R^n$. Предположим, что все переменные состояния измеримы. Необходимо разработать адаптивную систему управления с обратной связью по состоянию, такую что x_1 асимптотически отслеживает желаемый командный сигнал $r(t)$, где функция r и ее производные $r^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ — непрерывны и ограничены для всех $t \geq 0$.

- (а) Положив $e_i = x_i - r^{(i-1)}$ и $e = [e_1, \dots, e_n]^T$, покажите, что e удовлетворяет уравнению

$$\dot{e} = Ae + B[f_0(x) + (\theta^*)^T f_1(x) + g_0(x)u - r^{(n)}],$$

где (A, B) — управляемая пара.

- (б) Определите K , так чтобы матрица $A - BK$ была гурвицовой и P — положительно определенное решение уравнения Ляпунова $P(A - BK) + (A - BK)^T P = -I$. Используя функцию Ляпунова $V = e^T Pe + \phi^T \Gamma^{-1} \phi$, где $\phi = \theta - \theta^*$ и Γ — симметричная положительно определенная матрица, покажите, что адаптивный закон управления

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{g_0(x)} \left[-f_0(x) - \theta^T f_1(x) + r^{(n)} - Ke \right], \\ \dot{\theta} &= \Gamma f_1(x) e^T PB \end{aligned}$$

обеспечивает ограниченность всех переменных состояния и выполнение $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

- (с) Пусть

$$\bar{A}(t) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & -B f_1^T(\mathcal{R}) \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times p} \end{bmatrix}$$

где $\mathcal{R} = [r, \dots, r^{(n-1)}]^T$. Покажите, что если $(\bar{A}(t), C)$ — равномерно наблюдаемая пара, то параметрическая ошибка ϕ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Глава 9

УСТОЙЧИВОСТЬ ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x), \quad (9.1)$$

где $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $g : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — кусочно непрерывные по t и локально липшицевы по x на $[0, \infty) \times D$ функции и $D \subset \mathbb{R}^n$ — открытая область, содержащая начало координат $x = 0$. Мы будем рассматривать эту систему как возмущение номинальной системы

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (9.2)$$

Наличие члена возмущения $g(t, x)$ может быть обусловлено ошибками в определении модели, изменениями со временем параметров или другими неопределенностями и возмущениями, которые всегда имеют место в реальных системах. В типичной ситуации нам неизвестна функция $g(t, x)$, однако некоторая информация о ней доступна для нас, например верхнее значение величины $\|g(t, x)\|$. Здесь мы ввели возмущение в виде аддитивного члена в правой части уравнения состояния. Неопределенности, которые не изменяют порядок системы, всегда могут быть представлены таким образом. В этом случае, если возмущенная правая часть системы представлена некоторой функцией $\tilde{f}(t, x)$, то прибавляя и вычитая $f(t, x)$, мы можем переписать правую часть в следующем виде:

$$\tilde{f}(t, x) = f(t, x) + [\tilde{f}(t, x) - f(t, x)]$$

и определить

$$g(t, x) = \tilde{f}(t, x) - f(t, x).$$

Предположим, что номинальная система (9.2) имеет равномерно асимптотически устойчивую точку равновесия в начале координат. Что можно сказать в этом случае о свойствах устойчивости возмущенной

системы? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, представляется разумным использовать функцию Ляпунова номинальной системы для анализа возмущенной системы. Именно этот прием был использован при анализе метода линеаризации в параграфах 4.3 и 4.6. Элемент новизны, представленный в этой главе, заключается в том, что член возмущений может иметь более общий вид по сравнению с членом возмущения, возникающим при исследовании линеаризованной системы. Заключение, к которому мы можем прийти в ходе нашего анализа системы, существенно зависит от ответа на вопрос о равенстве нулю члена возмущений в начале координат. Если $g(t, 0) = 0$, то возмущенная система (9.2) имеет точку равновесия в начале координат. В этом случае мы можем выполнить анализ свойств устойчивости начала координат, рассматривая эту точку в качестве точки равновесия возмущенной системы. Если $g(t, 0) \neq 0$, начало координат не является точкой равновесия возмущенной системы. В этом случае мы можем исследовать возмущенную систему на предмет предельной ограниченности ее решений.

Случай, когда возмущение равно нулю и не равно нулю исследованы соответственно в параграфах 9.1 и 9.2. В параграфе 9.3 мы сконцентрируем наше внимание на случае, когда номинальная система имеет экспоненциально устойчивую точку равновесия в начале координат и используем лемму сравнения для получения более определенных результатов об асимптотическом поведении решения возмущенной системы. В параграфе 9.4 будет представлен результат о продолжимости решения уравнения состояния на бесконечном интервале времени.

В последних двух параграфах этой главы рассматриваются взаимосвязанные системы и медленно меняющиеся системы. В этих случаях анализ устойчивости может быть упрощен, если рассматривать эти системы как возмущение более простых систем. В случае взаимосвязанных систем упрощение достигается при разложении исходной системы на несвязанные друг с другом системы меньшего порядка. Упрощение анализа медленно меняющихся систем может быть достигнуто, если исходная неавтономная система с медленно меняющимися входами аппроксимируется автономной системой, в которой медленно меняющиеся входы рассматриваются как постоянные параметры.

9.1. Возмущение, исчезающее в начале координат

Начнем наше исследование со случая, когда $g(t, 0) = 0$. Предположим, что $x = 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия номинальной системы (9.2) и пусть $V(t, x)$ — функция Ляпунова, удовлетворяющая

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2 \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2 \quad (9.4)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\| \quad (9.5)$$

для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ и некоторых положительных констант c_1, c_2, c_3 и c_4 . Существование функции Ляпунова, удовлетворяющей (9.3)–(9.5), гарантируется теоремой 4.14 при выполнении некоторых дополнительных требований. Предположим, что член возмущений $g(t, x)$ удовлетворяет линейному ограничению на рост

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\|, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in D, \quad (9.6)$$

где γ — неотрицательная константа. Наличие такого ограничения представляется естественным условием в силу принятых предположений о функции $g(t, x)$. В действительности, любая функция $g(t, x)$, которая становится равной нулю в начале координат и является локально липшицевой по x равномерно по t для всех $t \geq 0$ в ограниченной окрестности начала координат, удовлетворяет (9.6) в этой окрестности.¹⁾ Для исследования устойчивости начала координат как точки равновесия возмущенной системы (9.1) мы будем использовать в качестве функции Ляпунова функцию V . Производная V вдоль траекторий системы (9.1) определяется равенством

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x).$$

Первые два члена в правой части представляют собой отрицательно определенную и удовлетворяющую (9.4) производную $V(t, x)$ вдоль траекторий номинальной системы. Наличие третьего члена $[\partial V / \partial x]g$ обусловлено наличием возмущения. Поскольку функция g в общем случае неизвестна мы не можем судить о влиянии этого члена на выполнение условия отрицательной определенности $V(t, x)$. Поскольку ограничение на рост (9.6) — это единственная доступная для нас информация о функции g , мы должны рассмотреть наихудший случай, т. е. когда $[\partial V / \partial x]g$ ограничена неотрицательной величиной. Используя (9.4)–(9.6), получаем

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t, x)\| \leq -c_3 \|x\|^2 + c_4 \gamma \|x\|^2.$$

Если константа γ достаточно мала, так что выполнено

$$\gamma < \frac{c_3}{c_4}, \quad (9.7)$$

то

$$\dot{V}(t, x) \leq -(c_3 - \gamma c_4) \|x\|^2, \quad (c_3 - \gamma c_4) > 0.$$

¹⁾ Заметим, однако, что линейное ограничение на рост (9.6) становится ограничительным требованием в глобальной постановке задачи, поскольку это влечет необходимость наложения требования о глобальной липшицевости функции g по x .

Таким образом, с использованием теоремы 4.10 мы получаем следующую лемму.

Лемма 9.1. Пусть $x = 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия номинальной системы (9.2) и $V(t, x)$ — функция Ляпунова номинальной системы, удовлетворяющая (9.3)–(9.5) в $[0, \infty) \times D$. Предположим, что член возмущений $g(t, x)$ удовлетворяет (9.6) и (9.7). Тогда начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия возмущенной системы (9.1). Кроме того, если все предположения выполнены глобально, то начало координат глобально экспоненциально устойчиво.

Эта лемма важна с концептуальной точки зрения, поскольку она показывает, что экспоненциальная устойчивая в начале координат система робастна для класса возмущений, удовлетворяющих (9.6) и (9.7). Для установления этого свойства робастности нам не требуется знать соответствующую функцию Ляпунова. Нам достаточно доказать, что номинальная система экспоненциально устойчива в начале координат. Иногда мы можем доказать экспоненциальную устойчивость системы в начале координат без нахождения явного вида функции Ляпунова, удовлетворяющей (9.3)–(9.5).¹⁾ Вне зависимости от того, какой метод используется для доказательства экспоненциальной устойчивости начала координат, мы можем гарантировать существование $V(t, x)$, удовлетворяющей (9.3)–(9.5), с использованием теоремы 4.14 (при условии, что матрица Якоби $[\partial f / \partial x]$ ограничена). Однако, если нам неизвестна функция Ляпунова $V(t, x)$, мы не можем вычислить границу (9.7). Таким образом, когда мы говорим об экспоненциальной устойчивости начала координат для всех возмущений, удовлетворяющих

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\|$$

с достаточно малой константой γ , наше заключение о робастности становится качественной характеристикой системы. С другой стороны, если функция $V(t, x)$ нам известна, мы можем определить границу (9.7), что само по себе представляет собой дополнительную информацию о системе. При этом следует быть внимательным, поскольку можно переоценить значимость этой оценки для нашего анализа в случае, если она окажется слишком консервативной для определенного возмущения $g(t, x)$. Избыточный консерватизм этой оценки может быть обусловлен тем, что мы изначально сделали предположения для наихудшей ситуации.

Пример 9.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + g(t, x),$$

¹⁾ Это возможно, например, в случае, когда экспоненциальная устойчивость начала координат устанавливается с использованием теоремы 8.5.

где A — гурвицева матрица и $\|g(t, x)\|_2 \leq \gamma \|x\|_2$ для всех $t \geq 0$ и всех $x \in R^n$. Пусть $Q = Q^T > 0$. Решим уравнение Ляпунова

$$PA + A^T P = -Q$$

относительно P . Из теоремы 4.6 следует, что существует единственное решение $P = P^T > 0$. Квадратичная функция Ляпунова $V(x) = x^T Px$ удовлетворяет (9.3)–(9.5). В частности,

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(P) \|x\|_2^2 &\leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|_2^2, \\ \frac{\partial V}{\partial x} Ax &= -x^T Q x \leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2, \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|_2 &= \|2x^T P\|_2 \leq 2\|P\|_2 \|x\|_2 = 2\lambda_{\max}(P) \|x\|_2. \end{aligned}$$

Производная функции $V(x)$ вдоль траекторий возмущенной системы удовлетворяет

$$\dot{V}(t, x) \leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2 + 2\lambda_{\max}(P)\gamma \|x\|_2^2.$$

Следовательно, начало координат глобально экспоненциально устойчиво, если $\gamma < \lambda_{\min}(Q)/2\lambda_{\max}(P)$. Поскольку эта оценка зависит от выбора Q , необходимо выбрать Q так, чтобы максимизировать отношение $\lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)$. Оказывается, что эта величина достигает максимума при $Q = I$ (см. упражнение 9.1). \triangle

Пример 9.2. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 2x_2 + \beta x_2^3, \end{aligned}$$

с неизвестной константой $\beta \geq 0$. Рассмотрим эту систему как возмущенную систему (9.1) с

$$f(x) = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta x_2^3 \end{bmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A равны $-1 \pm j\sqrt{3}$, и следовательно, A — гурвицева. Решение уравнения Ляпунова $PA + A^T P = -I$ имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}.$$

Как мы видели в примере 9.1, функция Ляпунова $V(x) = x^T Px$ удовлетворяет неравенствам (9.3)–(9.5) с константами $c_3 = 1$ и

$$c_4 = 2\lambda_{\max}(P) = 2 \times 1.513 = 3.026.$$

Член возмущений $g(x)$ удовлетворяет

$$\|g(x)\|_2 = \beta|x_2|^3 \leq \beta k_2^2 |x_2| \leq \beta k_2^2 \|x\|_2$$

для всех $|x_2| \leq k_2$. Заметим, что нам не известна точная оценка $x_2(t)$, но мы знаем, что величина $x_2(t)$ ограничена, если траектория $x(t)$ принадлежит компактному множеству. Оставим k_2 неопределенной и продолжим наш анализ. Используя $V(x)$ в качестве функции Ляпунова для возмущенной системы, получаем

$$\dot{V}(x) \leq -\|x\|_2^2 + 3.026\beta k_2^2 \|x\|_2^2.$$

Следовательно, $\dot{V}(x)$ будет отрицательно определенной, если

$$\beta < \frac{1}{3.026k_2^2}.$$

Для того, чтобы получить оценку k_2 , положим $\Omega_c = \{x \in R^2 \mid V(x) \leq c\}$. Для любой положительной константы c множество Ω_c замкнуто и ограничено. Граница множества Ω_c — поверхность Ляпунова

$$V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{5}{16}x_2^2 = c.$$

Наибольшее значение величины $|x_2|$ на поверхности $V(x) = c$ может быть определено путем дифференцирования уравнения поверхности по x_1 . Это приводит к следующему результату:

$$3x_1 + \frac{1}{4}x_2 = 0.$$

Тогда экстремум величины x_2 достигается в точке пересечения прямой $x_1 = -x_2/12$ с поверхностью Ляпунова. Легко показать, что максимальное значение x_2^2 на поверхности Ляпунова равно $96c/29$. Таким образом, все точки внутри Ω_c удовлетворяют оценке

$$|x_2| \leq k_2, \quad \text{где} \quad k_2^2 = \frac{96c}{29}.$$

Тогда, при

$$\beta < \frac{29}{3.026 \times 96c} \approx \frac{0.1}{c}$$

производная $\dot{V}(x)$ будет отрицательно определена на Ω_c и мы можем заключить, что начало координат $x = 0$ экспоненциально устойчиво и Ω_c представляет собой оценку области притяжения. Неравенство $\beta < 0.1/c$ показывает взаимосвязь между оценками области притяжения и верхней границы β . Чем меньше верхняя граница β , тем больше оценка области притяжения. Наличие взаимосвязи компромиссного характера между этими двумя величинами представляется естественным фактом. Действительно, замена переменных

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\frac{3\beta}{2}} x_2, \\ z_2 &= \sqrt{\frac{3\beta}{8}} (4x_1 + 2x_2 - \beta x_2^3) = -\sqrt{\frac{3\beta}{8}} \dot{x}_2, \end{aligned}$$

$$\tau = 2t$$

приводит уравнение состояния к следующему виду:

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{d\tau} &= -z_2, \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= z_1 + (z_1^2 - 1)z_2.\end{aligned}$$

В примере 8.5 было показано, что область притяжения этой системы ограничена и окружена неустойчивым предельным циклом. Область притяжения, представленная в x -координатах, увеличивается с уменьшением β и уменьшается с увеличением β .

Этот пример может служить в качестве иллюстрации нашего замечания о консервативности оценки (9.7). С использованием этого ограничения можно получить оценку $\beta < 1/3.026k_2^2$, из которой следует, что в качестве члена возмущений $g(t, x)$ может выступать любой двумерный вектор, удовлетворяющий неравенству $\|g(t, x)\|_2 \leq \beta k_2^2 \|x\|_2$. Этот класс возмущений представляется более общим по сравнению с возмущением, имеющим место в рассматриваемом конкретном примере и обладающим структурной особенностью — первый компонент вектора возмущений g равен нулю. Проведенный анализ показывает, что можно рассмотреть возмущения общего вида, когда все компоненты вектора g могут изменяться. Однако подобное пренебрежение спецификой возмущения обычно приводит к консервативным оценкам. Повторим наш анализ, на этот раз принимая во внимание структуру возмущения. В этом случае вместо того, чтобы использовать оценку общего вида (9.7), мы вычислим производную $\dot{V}(t, x)$ вдоль траекторий возмущенной системы:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= -\|x\|_2^2 + 2x^T Pg(x) = \\ &= -\|x\|_2^2 + 2\beta x_2^2 (\frac{1}{8}x_1 x_2 + \frac{5}{16}x_2^2) \leqslant \\ &\leqslant -\|x\|_2^2 + 2\beta x_2^2 (\frac{1}{16}\|x\|_2^2 + \frac{5}{16}\|x\|_2^2) \leqslant \\ &\leqslant -\|x\|_2^2 + \frac{3}{4}\beta k_2^2 \|x\|_2^2.\end{aligned}$$

Таким образом, $\dot{V}(x)$ отрицательно определена при $\beta < 4/3k_2^2$. Используя снова тот факт, что для всех $x \in \Omega_c$ выполнено $|x_2|^2 \leq k_2^2 = 96c/29$, получаем оценку $\beta < 0.4/c$, которая в четыре раза больше соответствующей оценки, полученной с использованием (9.7). \triangle

В случае, когда начало координат номинальной системы (9.2) равномерно асимптотически устойчиво, но не экспоненциально устойчиво, анализ устойчивости возмущенной системы становится более сложным. Предположим, что номинальная система имеет положительно определенную, убывающую функцию Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющую неравенству

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x)$$

для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times D$, где $W_3(x)$ — положительно определенная и непрерывная функция. Производная \dot{V} вдоль траекторий системы (9.1) удовлетворяет

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, x) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \leqslant \\ &\leqslant -W_3(x) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \right\|.\end{aligned}$$

Наша задача — доказать, что выполнено неравенство

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \right\| < W_3(x)$$

для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times D$. Эта цель не может быть достигнута с использованием лишь простой оценки сверху на $\|g(t, x)\|$, как это было сделано в случае экспоненциальной устойчивости. Оценка роста для $\|g(t, x)\|$ зависит от выбора функции Ляпунова номинальной системы. Одним из классов функций Ляпунова, для которых анализ почти так же прост, как и в случае экспоненциальной устойчивости, является класс положительно определенных, убывающих функций, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \phi^2(x), \quad (9.8)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \phi(x) \quad (9.9)$$

для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ и некоторых положительных констант c_3 и c_4 , где $\phi : R^n \rightarrow R$ — положительно определенная и непрерывная функция. Функция Ляпунова, удовлетворяющая (9.8) и (9.9), обычно называется *функцией Ляпунова квадратичного типа*. Очевидно, что функция Ляпунова, удовлетворяющая (9.3)–(9.5), является функцией квадратичного типа. Функция Ляпунова квадратичного типа может существовать для системы даже в случаях, когда начало координат не является экспоненциально устойчивым. Этот утверждение можно проиллюстрировать небольшим примером. Если номинальная система (9.2) имеет функцию Ляпунова $V(t, x)$ квадратичного типа, то производная этой функции вдоль траекторий (9.1) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3 \phi^2(x) + c_4 \phi(x) \|g(t, x)\|.$$

Предположим, что член возмущений удовлетворяет оценке

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \phi(x), \quad \gamma < \frac{c_3}{c_4}.$$

Тогда

$$\dot{V}(t, x) \leq -(c_3 - c_4 \gamma) \phi^2(x).$$

Это неравенство показывает, что $\dot{V}(t, x)$ отрицательно определена.

Пример 9.3. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x} = -x^3 + g(t, x).$$

Номинальная система

$$\dot{x} = -x^3$$

имеет глобально асимптотически устойчивую точку равновесия в начале координат, однако, как мы видели в примере 4.23, оно не является экспоненциально устойчивым. Таким образом, не существует функции Ляпунова, удовлетворяющей (9.3)–(9.5). С другой стороны, функция Ляпунова $V(x) = x^4$ удовлетворяет (9.8) и (9.9) с $\phi(x) = |x|^3$, $c_3 = 4$ и $c_4 = 4$. Предположим, что член возмущений $g(t, x)$ удовлетворяет оценке $|g(t, x)| \leq \gamma|x|^3$ для всех x при $\gamma < 1$. Тогда для производной функции V вдоль траекторий возмущенной системы справедливо неравенство

$$\dot{V}(t, x) \leq -4(1 - \gamma)\phi^2(x).$$

Следовательно, начало координат является глобально равномерно асимптотически устойчивой точкой равновесия возмущенной системы. \triangle

Важно отметить, что в отличие от случая экспоненциальной устойчивости, номинальная система с равномерно асимптотически устойчивым, но не экспоненциально устойчивым началом координат, не является робастной относительно гладких возмущений с произвольно малой границей линейного роста (9.6). Это утверждение иллюстрируется следующим примером.¹⁾

Пример 9.4. Рассмотрим скалярную систему из предыдущего примера с возмущением $g = \gamma x$, где $\gamma > 0$, т. е.

$$\dot{x} = -x^3 + \gamma x.$$

Можно легко показать с использованием линеаризации этой системы, что для любой $\gamma > 0$ начало координат неустойчиво при произвольно малой γ . \triangle

9.2. Возмущения, не исчезающие в начале координат

Обратимся к рассмотрению более общей ситуации, когда условие $g(t, 0) = 0$ не выполняется и, следовательно, начало координат $x = 0$ не является точкой равновесия возмущенной системы (9.1). В этом случае мы не можем исследовать устойчивость начала координат как точки равновесия системы и не можем ожидать, что решение возмущенной системы будет стремиться к началу координат при $t \rightarrow \infty$. Максимум, на что мы можем рассчитывать, — это то, что решение $x(t)$ будет предельно ограничено малой величиной, если возмущения $g(t, x)$ малы в некотором смысле. Начнем наше исследование со случая, когда на-

¹⁾ См. также упражнение 9.7.

чало координат номинальной системы (9.2) является экспоненциально устойчивым.

Лемма 9.2. Пусть $= 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия номинальной системы (9.2) и $V(t, x)$ — функция Ляпунова номинальной системы, удовлетворяющая (9.3)–(9.5) на $[0, \infty) \times D$, где $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$. Предположим, что член возмущения $g(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|g(t, x)\| \leq \delta < \frac{c_3}{c_4} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \theta r \quad (9.10)$$

для всех $t \geq 0$, $x \in D$ и некоторой положительной константы $\theta < 1$. Тогда для всех $\|x(t_0)\| < \sqrt{c_1/c_2}r$ решение $x(t)$ возмущенной системы (9.1) удовлетворяет оценкам

$$\|x(t)\| \leq k \exp[-\gamma(t - t_0)]\|x(t_0)\|, \quad \forall t_0 \leq t < t_0 + T$$

и

$$\|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T$$

для некоторого конечного момента времени T , где

$$k = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \quad \gamma = \frac{(1 - \theta)c_3}{2c_2}, \quad b = \frac{c_4}{c_3} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \frac{\delta}{\theta}$$

Доказательство: Используем $V(t, x)$ в качестве функции Ляпунова для возмущенной системы (9.1). Производная функции $V(t, x)$ вдоль траекторий системы (9.1) удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq -c_3\|x\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t, x)\| \leq \\ &\leq -c_3\|x\|^2 + c_4\delta\|x\| = \\ &= -(1 - \theta)c_3\|x\|^2 - \theta c_3\|x\|^2 + c_4\delta\|x\| \leq, \quad 0 < \theta < 1 \\ &\leq -(1 - \theta)c_3\|x\|^2, \quad \forall \|x\| \geq \delta c_4/\theta c_3. \end{aligned}$$

Применив теорему 4.18 и используя результаты упражнения 4.51, мы завершаем доказательство. \square

Заметим, что предельная граница b в лемме 9.2 пропорциональна верхней оценке возмущений δ . Этот результат может рассматриваться как свойство робастности номинальных систем с экспоненциально устойчивым началом координат. Действительно, произвольно малые (равномерно ограниченные) возмущения не приводят к значительным отклонениям от установленного начала координат.

Пример 9.5. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 2x_2 + \beta x_2^3 + d(t), \end{aligned}$$

где $\beta \geq 0$ — неизвестная константа и $d(t)$ — равномерно ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству $|d(t)| \leq \delta$ для всех $t \geq 0$.

Эта система совпадает с той, что мы исследовали в примере 9.2, за исключением того, что в новой системе имеется дополнительный член возмущения $d(t)$. Эта система может рассматриваться как возмущение номинальной линейной системы, функция Ляпунова которой имеет вид $V(x) = x^T Px$, где

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}.$$

Эту функцию $V(x)$ можно рассматривать в качестве функции Ляпунова для возмущенной системы, но при этом анализ влияния двух членов возмущения βx_2^3 и $d(t)$ следует проводить по отдельности, поскольку первый член равен в начале координат нулю, а второй нет. Вычисляя производную $V(x)$ вдоль траекторий возмущенной системы, получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= -\|x\|_2^2 + 2\beta x_2^2 \left(\frac{1}{8}x_1x_2 + \frac{5}{16}x_2^2 \right) + 2d(t) \left(\frac{1}{8}x_1 + \frac{5}{16}x_2 \right) \leqslant \\ &\leqslant -\|x\|_2^2 + \frac{3}{4}\beta k_2^2 \|x\|_2^2 + \frac{\sqrt{29}\delta}{8} \|x\|_2. \end{aligned}$$

При получении этой оценки мы использовали неравенство

$$|2x_1 + 5x_2| \leqslant \|x\|_2 \sqrt{4 + 25},$$

а также то, что k_2 является верхней границей $|x_2|$. Предположим, что $\beta \leqslant 4(1 - \zeta)/3k_2^2$, где $0 < \zeta < 1$. Тогда

$$\dot{V}(t, x) \leqslant -\zeta \|x\|_2^2 + \frac{\sqrt{29}\delta}{8} \|x\|_2 \leqslant -(1 - \theta)\zeta \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 \geqslant \mu = \frac{\sqrt{29}\delta}{8\zeta\theta},$$

где $0 < \theta < 1$. Как было показано в примере 9.2, величина $|x_2|^2$ ограничена на Ω_c значением $96c/29$. Таким образом, если $\beta \leqslant 0.4(1 - \zeta)/c$ и константа δ мала настолько, что выполнено $\mu^2 \lambda_{\max}(P) < c$, то $B_\mu \subset \Omega_c$ и все траектории, начинающиеся в Ω_c , останутся для всех будущих моментов времени в Ω_c . Кроме того, условия теоремы 4.18 выполнены в Ω_c и, следовательно, решения возмущенной системы равномерно предельно ограничены величиной

$$b = \frac{\sqrt{29}\delta}{8\zeta\theta} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$$

△

В более общем случае, когда для номинальной системы (9.2) начало координат $x = 0$ не экспоненциально устойчиво, а лишь равномерно асимптотически устойчиво, анализ возмущенной системы выполняется аналогичным образом.

Лемма 9.3. Пусть $x = 0$ — равномерно асимптотически устойчивая точка равновесия номинальной системы (9.2). Пусть $V(t, x)$ —

функция Ляпунова номинальной системы, удовлетворяющая неравенствам¹⁾

$$\alpha_1(\|x\|) \leqslant V(t, x) \leqslant \alpha_2(\|x\|), \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leqslant -\alpha_3(\|x\|), \quad (9.12)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leqslant \alpha_4(\|x\|) \quad (9.13)$$

на $[0, \infty) \times D$, где $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ и $\alpha_i(\cdot)$, $i = 1, 2, 3, 4$, — функции класса \mathcal{K} . Предположим, что член возмущения $g(t, x)$ удовлетворяет равномерной оценке

$$\|g(t, x)\| \leqslant \delta < \frac{\theta \alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))}{\alpha_4(r)} \quad (9.14)$$

для всех $t \geqslant 0, x \in D$ и некоторой положительной константы $\theta < 1$. Тогда для всех $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ решение $x(t)$ возмущенной системы (9.1) удовлетворяет неравенствам

$$\|x(t)\| \leqslant \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leqslant t < t_0 + T$$

и

$$\|x(t)\| \leqslant \rho(\delta), \quad \forall t \geqslant t_0 + T$$

для некоторой \mathcal{KL} -функции β и некоторого конечного момента времени T ; ρ — \mathcal{K} -функция от δ , определяемая равенством

$$\rho(\delta) = \alpha_1^{-1} \left(\alpha_2 \left(\alpha_3^{-1} \left(\frac{\delta \alpha_4(r)}{\theta} \right) \right) \right)$$

Доказательство: Используем $V(t, x)$ в качестве функции Ляпунова для возмущенной системы (9.1). Производная $V(t, x)$ вдоль траекторий системы (9.1) удовлетворяет

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leqslant -\alpha_3(\|x\|) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t, x)\| \leqslant \\ &\leqslant -\alpha_3(\|x\|) + \delta \alpha_4(\|x\|) \leqslant \\ &\leqslant -(1 - \theta)\alpha_3(\|x\|) - \theta \alpha_3(\|x\|) + \delta \alpha_4(r) \leqslant, \quad 0 < \theta < 1 \\ &\leqslant -(1 - \theta)\alpha_3(\|x\|), \quad \forall \|x\| \geqslant \alpha_3^{-1} \left(\frac{\delta \alpha_4(r)}{\theta} \right). \end{aligned}$$

Применив теорему 4.18, завершаем доказательство. □

Эта лемма аналогична той, что мы доказали ранее для случая экспоненциальной устойчивости, при анализе которого использовалась некоторая особенность, которая не имеет соответствующего аналога в ана-

¹⁾ Существование функции Ляпунова, удовлетворяющей этим неравенствам (в ограниченной области) гарантируется теоремой 4.16 при некоторых дополнительных предположениях.

лизе более общей ситуации равномерной асимптотической устойчивости. Именно, при исследовании экспоненциальной устойчивости предполагалось, что δ удовлетворяет (9.10). Правая часть (9.10) стремится к ∞ при $r \rightarrow \infty$. Поэтому, если это предположение выполнено глобально, мы можем заключить, что для всех равномерно ограниченных возмущений решения возмущенной системы будут равномерно ограничены. Это утверждение верно, поскольку для любой δ мы можем выбрать достаточно большую r так, чтобы было выполнено (9.10). С другой стороны, в случае равномерной асимптотической устойчивости предполагается, что δ удовлетворяют (9.14). Анализ (9.14) показывает, что без дополнительной информации о свойствах \mathcal{K} -функций мы ничего не можем сказать о предельных значениях правой части этого неравенства при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, мы не можем определенно утверждать, что при возникновении равномерно ограниченных возмущений в номинальной системе с равномерно асимптотически устойчивой точкой равновесия в начале координат ее решения останутся ограниченными вне зависимости от величины действующих возмущений. Разумеется, тот факт, что мы не можем доказать это, еще не означает, что система не может обладать этим свойством. Тем не менее, оказывается, что это утверждение действительно неверно. Можно привести примеры систем (см. упражнение 9.13), для которых начало координат является глобально равномерно асимптотически устойчивой точкой равновесия, но ограниченные возмущения приводят к тому, что решения возмущенной системы уходят на бесконечность.

9.3. Метод сравнения

Рассмотрим возмущенную систему (9.1). Пусть $V(t, x)$ — функция Ляпунова для номинальной системы (9.2) и предположим, что производная функции V вдоль траекторий системы (9.1) удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{V} \leq h(t, V).$$

Из леммы сравнения 3.4 следует, что

$$V(t, x(t)) \leq y(t),$$

где $y(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{y} = h(t, y), \quad y(t_0) = V(t_0, x(t_0)).$$

Этот подход особенно полезен в ситуациях, когда приведенное дифференциальное неравенство является линейным, т. е. когда $h(t, V) = a(t)V + b(t)$. В этом случае мы можем получить явное представление решения y соответствующего линейного дифференциального уравнения первого порядка. Линейное дифференциальное неравенство также может быть получено в ситуациях, когда начало координат номи-

нальной системы (9.2) является экспоненциально устойчивым. Пусть $V(t, x)$ — функция Ляпунова номинальной системы (9.2), удовлетворяющая (9.3)–(9.5) для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times D$, где $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$. Предположим, что член возмущения $g(t, x)$ удовлетворяет оценке

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma(t)\|x\| + \delta(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in D, \quad (9.15)$$

где $\gamma : R \rightarrow R$ — неотрицательная и непрерывная функция для всех $t \geq 0$, и $\delta : R \rightarrow R$ — неотрицательная, непрерывная и ограниченная функция для всех $t \geq 0$. Производная функции V вдоль траекторий системы (9.1) удовлетворяет

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}g(t, x) \leq \\ &\leq -c_3\|x\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t, x)\| \leq \\ &\leq -c_3\|x\|^2 + c_4\gamma(t)\|x\|^2 + c_4\delta(t)\|x\|. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Используя (9.3), можно получить верхнюю границу \dot{V} :

$$\dot{V} \leq - \left[\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_4}{c_1}\gamma(t) \right] V + c_4\delta(t)\sqrt{\frac{V}{c_1}}.$$

Для того, чтобы получить линейное дифференциальное неравенство, положим $W(t) = \sqrt{V(t, x(t))}$ и используем тот факт, что $\dot{W} = \dot{V}/2\sqrt{V}$ при $V \neq 0$. Тогда

$$\dot{W} \leq -\frac{1}{2} \left[\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_4}{c_1}\gamma(t) \right] W + \frac{c_4}{2\sqrt{c_1}}\delta(t) \quad (9.17)$$

В случае, если $V = 0$, можно показать,¹⁾ что $D^+W(t) \leq c_4\delta(t)/2\sqrt{c_1}$. Следовательно, $D^+W(t)$ удовлетворяет (9.17) для всех значений функции V . Из леммы сравнения следует, что $W(t)$ удовлетворяет неравенству

$$W(t) \leq \phi(t, t_0)W(t_0) + \frac{c_4}{2\sqrt{c_1}} \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)\delta(\tau)d\tau, \quad (9.18)$$

где переходная функция $\phi(t, t_0)$ определяется равенством

$$\phi(t, t_0) = \exp \left[-\frac{c_3}{2c_2}(t - t_0) + \frac{c_4}{2c_1} \int_{t_0}^t \gamma(\tau)d\tau \right].$$

¹⁾ См. упражнение 9.14.

Используя (9.3) и (9.18), получаем

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \phi(t, t_0) \|x(t_0)\| + \frac{c_4}{2c_1} \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) \delta(\tau) d\tau. \quad (9.19)$$

Далее, предположим, что $\gamma(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \leq \varepsilon(t - t_0) + \eta \quad (9.20)$$

для некоторых неотрицательных констант ε и η , где

$$\varepsilon < \frac{c_1 c_3}{c_2 c_4}. \quad (9.21)$$

Определив константы α и ρ равенствами

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{c_3}{c_2} - \varepsilon \frac{c_4}{c_1} \right] > 0, \quad \rho = \exp \left(\frac{c_4 \eta}{2c_1} \right) \geq 1 \quad (9.22)$$

и подставляя (9.20) и (9.21) в (9.19), получаем

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \rho \|x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{c_4 \rho}{2c_1} \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau. \quad (9.23)$$

Для выполнения этой оценки необходимо обеспечить $\|x(t)\| < r$ для всех $t \geq t_0$. Заметим, что¹⁾

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \rho \|x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{c_4 \rho}{2\alpha c_1} \left[1 - e^{-\alpha(t-t_0)} \right] \sup_{t \geq t_0} \delta(t) \leq \\ &\leq \max \left\{ \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \rho \|x(t_0)\|, \frac{c_4 \rho}{2\alpha c_1} \sup_{t \geq t_0} \delta(t) \right\}. \end{aligned}$$

Тогда условие $\|x(t)\| < r$ выполнено, если

$$\|x(t_0)\| < \frac{r}{\rho} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \quad (9.24)$$

и

$$\sup_{t \geq t_0} \delta(t) < \frac{2c_1 \alpha r}{c_4 \rho}. \quad (9.25)$$

Суммируем полученные результаты в следующей лемме.

¹⁾ При этом мы использовали тот факт, что функция $a e^{-\alpha t} + b(1 - e^{-\alpha t})$, где a, b и α — положительные константы, монотонно изменяет свои значения от начального a до конечного b . Следовательно, она ограничена величиной, равной максимуму из этих двух чисел.

Лемма 9.4. Пусть $x = 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия номинальной системы (9.2). Пусть $V(t, x)$ — функция Ляпунова номинальной системы, удовлетворяющая (9.3)–(9.5) на $[0, \infty) \times D$, где $D = \{x \in R^n \mid \|x\|_2 < r\}$. Предположим, что для члена возмущения $g(t, x)$ выполнено (9.15), где $\gamma(t)$ удовлетворяет (9.20) и (9.21). Тогда при условии, что $x(t_0)$ удовлетворяет (9.24) и выполнено (9.25), для решения возмущенной системы (9.1) справедлива оценка (9.23). Кроме того, если все условия выполнены глобально, то оценка (9.23) справедлива для всех $x(t_0)$ и любой ограниченной $\delta(t)$.

Рассматривая предыдущую лемму в частном случае, когда возмущения становятся в начале координат равными нулю, т. е. когда $\delta(t) \equiv 0$, мы получаем следующий результат:

Следствие 9.1. Пусть $x = 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия номинальной системы (9.2). Предположим, что $V(t, x)$ — функция Ляпунова номинальной системы, удовлетворяющая (9.3)–(9.5) на $[0, \infty) \times D$. Предположим также, что для возмущения $g(t, x)$ выполнено

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma(t) \|x\|,$$

где $\gamma(t)$ удовлетворяет (9.20) и (9.21). Тогда начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия возмущенной системы (9.1). Кроме того, если все предположения выполнены глобально, то начало координат глобально экспоненциально устойчиво.

Если $\gamma(t) \equiv \gamma = \text{const}$, то для выполнения условий следствия 9.1 необходимо, чтобы γ удовлетворяла оценке $\gamma < c_1 c_3 / c_2 c_4$, что совпадает с условием леммы 9.1 $\gamma < c_3 / c_4$, поскольку $(c_1 / c_2) \leq 1$. В действительности, если $(c_1 / c_2) < 1$, то указанная оценка будет более консервативной (т. е. верхняя грань будет меньше) по сравнению с соответствующей оценкой из леммы 9.1. Следствие 9.1 применяется в случаях, когда интеграл от $\gamma(t)$ удовлетворяет условиям (9.20) и (9.21), но величина $\sup_{t \geq t_0} \gamma(t)$ недостаточно мала в том смысле, что не удовлетворяет $\sup_{t \geq t_0} \gamma(t) < c_3 / c_4$. Три подобных случая рассматриваются в следующей лемме.

Лемма 9.5.

1. Если

$$\int_0^\infty \gamma(\tau) d\tau \leq k,$$

то (9.20) выполнено при $\varepsilon = 0$ и $\eta = k$.

2. Если

$$\gamma(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

то для любой $\varepsilon > 0$ существует $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, такая что выполнено (9.20).

3. Если существуют константы $\Delta > 0$, $T \geq 0$, и $\varepsilon_1 > 0$, такие что

$$\frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} \gamma(\tau) d\tau \leq \varepsilon_1, \quad \forall t \geq T,$$

то (9.20) выполнено при $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\eta = \varepsilon_1\Delta + \int_0^T \gamma(t) dt$.

Доказательство: Доказательство первого случая очевидно. Рассматривая второй случай, заметим, что поскольку $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0$ для любой $\varepsilon > 0$, то существует момент времени $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$, такой что $\gamma(t) < \varepsilon$ для всех $t \geq T_1$. Пусть $\eta = \int_0^{T_1} \gamma(t) dt$. Если $t_0 \geq T_1$, то

$$\int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \leq \int_{t_0}^t \varepsilon d\tau = \varepsilon(t - t_0).$$

Если $t \leq T_1$, то

$$\int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \leq \int_0^{T_1} \gamma(\tau) d\tau = \eta.$$

Если $t_0 \leq T_1 \leq t$, то

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^{T_1} \gamma(\tau) d\tau + \int_{T_1}^t \gamma(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \int_0^{T_1} \gamma(\tau) d\tau + \varepsilon(t - T_1) \leq \eta + \varepsilon(t - t_0). \end{aligned}$$

В третьем случае, если $t \leq T$, то

$$\int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \leq \int_0^T \gamma(\tau) d\tau < \eta.$$

При $t \geq t_1 \geq T$ положим N — целое число, при котором $(N-1)\Delta \leq t - t_1 \leq N\Delta$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^t \gamma(\tau) d\tau &= \sum_{i=0}^{i=N-2} \int_{t_1+i\Delta}^{t_1+(i+1)\Delta} \gamma(\tau) d\tau + \int_{t_1+(N-1)\Delta}^t \gamma(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{i=N-2} \varepsilon_1\Delta + \varepsilon_1\Delta \leq \varepsilon_1(t - t_1) + \varepsilon_1\Delta. \end{aligned}$$

Это неравенство используется далее при $t_1 = t_0$, когда $t \geq t_0 \geq T$, и при $t_1 = T$, когда $t_0 \leq T \leq t$. Если $t \geq t_0 \geq T$, то

$$\int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \leq \varepsilon_1(t - t_0) + \varepsilon_1\Delta < \varepsilon_1(t - t_0) + \eta.$$

Если $t_0 \leq T \leq t$, то

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^T \gamma(\tau) d\tau + \int_T^t \gamma(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \int_0^T \gamma(\tau) d\tau + \varepsilon_1(t - T) + \varepsilon_1\Delta \leq \varepsilon_1(t - t_0) + \eta. \end{aligned}$$

□

В первом случае предыдущей леммы условие (9.20) выполнено при $\varepsilon = 0$, а во втором случае — при произвольно малой ε . Поэтому, в обоих случаях условие (9.21) всегда выполняется и начало координат возмущенной системы (9.2) экспоненциально устойчиво. В третьем случае леммы устанавливается граница величины скользящего среднего для функции $\gamma(t)$ при достаточно больших t . Начало координат возмущенной системы (9.2) будет экспоненциально устойчиво, если эта граница достаточно мала.

Пример 9.6. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = [A(t) + B(t)]x,$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы и $A(t)$ ограничена на $[0, \infty)$. Предположим, что начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия номинальной системы

$$\dot{x} = A(t)x$$

и

$$B(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Из теоремы 4.12 следует, что существует квадратичная функция Ляпунова $V(t, x) = x^T P(t)x$, для которой глобально выполнены неравенства (9.3)–(9.5). Член возмущения $B(t)x$ удовлетворяет неравенству

$$\|B(t)x\| \leq \|B(t)\| \|x\|.$$

Поскольку $\|B(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, мы можем заключить с использованием следствия 9.1 и второго случая из леммы 9.5, что начало координат является глобально экспоненциально устойчивой точкой равновесия возмущенной системы. △

Аналогичные заключения могут быть сделаны и в случае, когда $\int_0^\infty \|B(t)\| dt < \infty$ (см. упражнение 9.15) и $\int_0^\infty \|B(t)\|^2 dt < \infty$ (см.

упражнение 9.16). Случай, когда возмущения не становятся равными нулю в начале координат, т. е. если $\delta(t) \not\equiv 0$, рассматривается в следующей лемме. В ней формулируются результаты, касающиеся асимптотического поведения $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Лемма 9.6. Предположим, что условия леммы 9.4 выполнены, и пусть $x(t)$ — решение возмущенной системы (9.1).

1. Если выполнена оценка

$$\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau \leq \beta, \quad \forall t \geq t_0$$

для некоторой положительной константы β , то $x(t)$ равномерно предельно ограничено с предельной границей

$$b = \frac{c_4 \rho \beta}{2 c_1 \theta},$$

где $\theta \in (0, 1)$ — произвольная константа.

2. Если выполнено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \delta_\infty > 0,$$

то $x(t)$ равномерно предельно ограничено с предельной границей

$$b = \frac{c_4 \rho \delta_\infty}{2 \alpha c_1 \theta},$$

где $\theta \in (0, 1)$ — произвольная константа.

3. Если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0, \quad \text{то} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Если условия леммы 9.4 выполнены глобально, то вышеприведенные утверждения выполнены для любого начального состояния $x(t_0)$.

Доказательство: Результаты всех трех случаев следуют из неравенства (9.23). Для доказательства первых двух случаев достаточно использовать тот факт, что если $u(t) = w(t) + a$ при $a > 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$, то $u(t)$ предельно ограничено величиной a/θ для любой положительной $\theta < 1$. Действительно, существует конечный момент времени T , такой что выполнено неравенство $|w(t)| \leq a(1 - \theta)/\theta$ для всех $t \geq T$. Далее, для доказательства последнего свойства мы используем тот факт, что если $u(t) = \int_{t_0}^t \exp(-\alpha(t-\tau)) w(\tau) d\tau$, где $w(t)$ ограничена и $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = w_\infty$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = w_\infty/\alpha$.¹⁾ \square

9.4. Непрерывность решений на бесконечном интервале

¹⁾ См. [33, теорему 3.3.2.33].

В параграфе 3.2 мы исследовали свойство непрерывной зависимости решений уравнения состояния от начальных данных и параметров. В частности, в теореме 3.4 рассматривалась номинальная система

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (9.26)$$

и возмущенная система

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x) \quad (9.27)$$

в условиях предположения о том, что неравенство $\|g(t, x)\| \leq \delta$ выполнено в рассматриваемой области. Используя неравенство Громуолла–Беллмана можно получить следующий результат: если $y(t)$ и $z(t)$ — хорошо определенные решения соответственно номинальной и возмущенной систем, то

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(t_0) - z(t_0)\| \exp[L(t - t_0)] + \frac{\delta}{L} \{\exp[L(t - t_0)] - 1\}, \quad (9.28)$$

где L — константа Липшица для функции f . Эта оценка верна только на компактном интервале времени, поскольку экспоненциальный член $\exp[L(t - t_0)]$ неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$. В действительности, эта оценка представляет интерес лишь при анализе системы на интервале $[t_0, t_1]$ где t_1 — достаточно мало, т. к. в противном случае, т. е. если t_1 велико, оценка будет слишком консервативной и потому бесполезной. В этом нет ничего удивительного, поскольку так же как и в параграфе 3.2, мы не накладываем каких-либо требований на устойчивость системы. В этом параграфе мы используем лемму 9.4 для вычисления оценки разности решений систем (9.26) и (9.27), которая является равномерной по t для всех $t \geq t_0$.

Теорема 9.1. Пусть $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая начало координат. Предположим, что

- $f(t, x)$ и ее первые частные производные по x непрерывны, ограничены и липшицевы по x равномерно по t для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times D_0$, где $D_0 \subset D$ — компактное множество;
- $g(t, x)$ — кусочно-непрерывная функция от t , локально липшицева по x и

$$\|g(t, x)\| \leq \delta, \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times D; \quad (9.29)$$

- начало координат $x = 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия номинальной системы (9.26);
- существует функция Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 4.9 для номинальной системы (9.26) при $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ и $\{W_1(x) \leq c\}$ — компактное подмножество D .

Пусть $y(t)$ и $z(t)$ — решения соответственно номинальной системы (9.26) и возмущенной системы (9.27). Тогда для любого компактного множества $\Omega \subset \{W_2(x) \leq \rho c, 0 < \rho < 1\}$ существуют

положительные константы β , γ , η , μ и k , не зависящие от δ и такие, что если $y(t_0) \in \Omega$, $\delta < \eta$ и $\|z(t_0) - y(t_0)\| < \mu$, то решения $y(t)$ и $z(t)$ равномерно ограничены для всех $t \geq t_0 \geq 0$ и

$$\|z(t) - y(t)\| \leq ke^{-\gamma(t-t_0)}\|z(t_0) - y(t_0)\| + \beta\delta. \quad (9.30)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае, когда начало координат экспоненциально устойчиво, на функцию Ляпунова V накладываются требования, соответствующие равномерной асимптотической устойчивости системы, но не (более жесткие) условия, соответствующие ее экспоненциальной устойчивости. В результате мы получаем более консервативные оценки множества Ω . В случае, когда номинальная система (9.26) является автономной, существование функции V гарантируется теоремой 4.17 и в качестве множества Ω может быть выбрано любое компактное подмножество области притяжения. Свойство экспоненциальной устойчивости системы используется лишь локально, когда ошибка $z(t) - y(t)$ достаточно мала.

Доказательство теоремы 9.1: Производная функции V вдоль траекторий возмущенной системы (9.27) удовлетворяет равенству

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}g(t, x) \leq -W_3(x) + k_1\delta$$

для всех $x \in \{W_1(x) \leq c\}$, где k_1 — верхняя граница $\partial V / \partial x$, вычисленная на множестве $\{W_1(x) \leq c\}$. Пусть $k_2 > 0$ — минимальное значение функции $W_3(x)$ на компактном множестве $\Lambda = \{W_1(x) \leq c \text{ и } W_2(x) \geq c\}$. Тогда

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}W_3(x) - \frac{1}{2}k_2 + k_1\delta \leq -\frac{1}{2}W_3(x), \quad \forall x \in \Lambda, \forall \delta \leq \frac{k_2}{2k_1}.$$

Из этой оценки видно, что \dot{V} отрицательна на $V(t, x) = c$ и, следовательно, множество $\{V(t, x) \leq c\}$ положительно инвариантно. Поэтому для всех $z(t_0) \in \{W_2(x) \leq c\}$ решение $z(t)$ системы (9.27) равномерно ограничено. Поскольку Ω находится внутри множества $\{W_2(x) \leq c\}$, существует $\mu_1 > 0$, такое что $z(t_0) \in \{W_2(x) \leq c\}$ при $y(t_0) \in \Omega$ и $\|z(t_0) - y(t_0)\| \leq \mu_1$. Также легко показать, что при $y(t_0) \in \Omega$ решение $y(t)$ равномерно ограничено и $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, равномерно по t_0 . Ошибка $e(t) = z(t) - y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{e} = \dot{z} - \dot{y} = f(t, z) + g(t, z) - f(t, y) = f(t, e) + \Delta(t, e) + g(t, z), \quad (9.31)$$

где

$$\Delta(t, e) = f(t, y(t) + e) - f(t, y(t)) - f(t, e).$$

Исследуем уравнение ошибки (9.31) в шаре $\{\|e\| \leq r\} \subset D$. Уравнение (9.31) может рассматриваться как возмущение системы

$$\dot{e} = f(t, e),$$

начало координат которой экспоненциально устойчиво. По теореме 4.14 существует функция Ляпунова $V(t, e)$, удовлетворяющая (9.3)–(9.5) при $\|e\| < r_0 < r$. С использованием теоремы о среднем значении можно представить член ошибки Δ_i в следующем виде:

$$\Delta_i(t, e) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(t, \lambda_1 e + y) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, \lambda_2 e) \right] e,$$

где $0 < \lambda_i < 1$. Поскольку матрица Якоби $[\partial f / \partial x]$ липшицева по x равномерно по t , член возмущения $(\Delta + g)$ удовлетворяет

$$\|\Delta(t, e) + g(t, z)\| \leq L_1\|e\|^2 + L_2\|e\|\|y(t)\| + \delta,$$

где $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по t_0 . Следовательно,

$$\|\Delta(t, e) + g(t, z)\| \leq \{L_1r_1 + L_2\|y(t)\|\}\|e\| + \delta$$

для всех $\|e\| \leq r_1 < r_0$. Это неравенство принимает форму (9.15) при

$$\gamma(t) = \{L_1r_1 + L_2\|y(t)\|\} \quad \text{и} \quad \delta(t) \equiv \delta.$$

Для любой $\varepsilon_1 > 0$ существует момент времени $T_1 > 0$, такой что $\|y(t)\| \leq \varepsilon_1$ для всех $t \geq t_0 + T_1$. Поэтому, (9.20) выполнено с

$$\int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \leq (\varepsilon_1 + L_1r_1)(t - t_0) + T_1 \max_{t \geq t_0} L_2\|y(t)\|.$$

Выбирая ε_1 и r_1 достаточно малыми, мы можем обеспечить выполнение (9.21). Таким образом, все предположения леммы 9.4 выполнены и (9.30) следует из (9.23). \square

9.5. Взаимосвязанные системы

Сложность анализа устойчивости нелинейной динамической системы быстро возрастает с увеличением ее порядка. Это служит мотивацией для поиска путей упрощения анализа. Если модель системы может быть представлена в виде взаимосвязанных подсистем более низкого порядка, мы можем разделить анализ устойчивости на два этапа. На первом шаге мы выполняем декомпозицию системы на изолированные подсистемы меньшего порядка и для каждой из них проводим соответствующее исследование свойств устойчивости. На втором шаге мы используем полученные на первом шаге результаты и информацию о взаимных связях между этими подсистемами для того, чтобы определить свойства устойчивости всей взаимосвязанной системы. В этом параграфе мы покажем, как этот подход может быть использован для нахождения функций Ляпунова для взаимосвязанных систем.

Рассмотрим взаимосвязанную систему

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i) + g_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (9.32)$$

где $x_i \in R^{n_i}$, $n_1 + \dots + n_m = n$ и $x = [x_1^T, \dots, x_m^T]^T$. Предположим, что f_i и g_i — функции, достаточно гладкие для того, чтобы обеспечивалось существование и единственность решения этого уравнения для всех его начальных условий из исследуемой области. Предположим также, что

$$f_i(t, 0) = 0, \quad g_i(t, 0) = 0, \quad \forall i,$$

т. е. начало координат $x = 0$ является точкой равновесия системы. Если не учитывать перекрестные члены g_i , система разбивается на m изолированных подсистем:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i), \quad (9.33)$$

каждая из которых имеет точку равновесия в соответствующем начале координат $x_i = 0$. Предположим, что найдены функции Ляпунова, которые гарантируют равномерную асимптотическую устойчивость начала координат каждой из изолированных подсистем, т. е. существуют положительно определенные убывающие функции Ляпунова $V_i(t, x_i)$, производные которых вдоль траекторий изолированных подсистем отрицательно определены. Функция

$$V(t, x) = \sum_{i=1}^m d_i V_i(t, x_i), \quad d_i > 0$$

называется *композитной функцией Ляпунова* совокупности m изолированных подсистем для всех значений положительных констант d_i . Рассматривая взаимосвязанную систему (9.32) как возмущение совокупности изолированных подсистем (9.33), разумно попытаться использовать $V(t, x)$ в качестве функции Ляпунова для (9.32). Производная $V(t, x)$ вдоль траекторий (9.32) определяется равенством

$$\dot{V}(t, x) = \sum_{i=1}^m d_i \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(t, x_i) \right] + \sum_{i=1}^m d_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} g_i(t, x).$$

Первый член в правой части этого равенства отрицательно определен, поскольку V_i — функция Ляпунова для i -й изолированной подсистемы, но знак второго члена в общем случае не определен. Таким образом, мы находимся в ситуации, аналогичной той, что возникла при анализе возмущенных систем в параграфе 9.1. С использованием этого подхода мы можем исследовать взаимосвязанную систему в предположении, что член $[\partial V_i / \partial x_i] g_i$ ограничен неотрицательной верхней границей. Это может быть сделано с использованием функции Ляпунова квадратичного типа, предложенной в параграфе 9.1. Предположим, что при $i = 1, 2, \dots, m$ функция $V_i(t, x_i)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(t, x_i) \leq -\alpha_i \phi_i^2(x_i), \quad (9.34)$$

$$\left\| \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right\| \leq \beta_i \phi_i(x_i) \quad (9.35)$$

для всех $t \geq 0$ и $\|x\| < r$ и некоторых положительных констант α_i и β_i , где $\phi_i : R^{n_i} \rightarrow R$ — положительно определенные и непрерывные функции. Далее, предположим, что перекрестные члены $g_i(t, x)$ удовлетворяют оценкам

$$\|g_i(t, x)\| \leq \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \phi_j(x_j) \quad (9.36)$$

для всех $t \geq 0$ и $\|x\| < r$ и некоторых неотрицательных констант γ_{ij} . Тогда производная функции $V(t, x) = \sum_{i=1}^m d_i V_i(t, x_i)$ вдоль траекторий взаимосвязанной системы (9.32) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(t, x) \leq \sum_{i=1}^m d_i \left[-\alpha_i \phi_i^2(x_i) + \sum_{j=1}^m \beta_i \gamma_{ij} \phi_i(x_i) \phi_j(x_j) \right].$$

Правая часть этого неравенства представляет собой квадратичную форму по ϕ_1, \dots, ϕ_m . Тогда

$$\dot{V}(t, x) \leq -\frac{1}{2} \phi^T (DS + S^T D) \phi$$

где

$$\phi = [\phi_1, \dots, \phi_m]^T, \quad D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$$

и S — $(m \times m)$ -матрица с элементами

$$s_{ij} = \begin{cases} \alpha_i - \beta_i \gamma_{ii}, & i = j \\ -\beta_i \gamma_{ij}, & i \neq j \end{cases} \quad (9.37)$$

Если существует положительная диагональная матрица D , такая что

$$DS + S^T D > 0,$$

то $\dot{V}(t, x)$ отрицательно определена, поскольку $\phi(x) = 0$ если и только если $x = 0$. Напомним, что $\phi_i(x_i)$ — положительно определенные функции от x_i . Таким образом, достаточным условием равномерной асимптотической устойчивости начала координат взаимосвязанной системы является существование положительной диагональной матрицы D , такой что матрица $DS + S^T D$ является положительно определенной. Матрица S имеет специальный вид: ее внедиагональные элементы не положительны. Следующая лемма применима именно к этому классу матриц.

Лемма 9.7. Для существования положительной диагональной матрицы D , такой что матрица $DS + S^T D$ положительно опре-

делена, необходимо и достаточно чтобы матрица S была M -матрицей, т. е. ее ведущие главные миноры положительны:

$$\det \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1k} \\ s_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ s_{k1} & \cdots & \cdots & s_{kk} \end{bmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Доказательство: См. [57]. \square

Условие принадлежности к классу M -матриц может быть интерпретировано как требование на диагональные элементы матрицы S , заключающееся в том, что они должны быть «больше в своей совокупности», чем внедиагональные элементы. Можно показать (см. упражнение 9.22), что матрицы с диагональным доминированием и не положительными внедиагональными элементами принадлежат классу M -матриц. Своебразной мерой для диагональных элементов матрицы S является «степень устойчивости» изолированных подсистем в том смысле, что константа α_i представляет собой нижнюю границу скорости убывания функции Ляпунова V_i по отношению к $\phi_i^2(x_i)$. Внедиагональные элементы S представляют собой «силу взаимных связей между подсистемами» в том смысле, что они представляют собой верхнюю границу $g_i(t, x)$ по отношению к $\phi_j(x_j)$, $j = 1, \dots, m$. Таким образом, условие принадлежности к классу M -матриц может быть сформулировано следующим образом: если степень устойчивости изолированных подсистем больше в своей совокупности, чем сила взаимных связей между изолированными подсистемами, то взаимосвязанная система имеет равномерно асимптотически устойчивую точку равновесия в начале координат. Суммируем полученный результат в следующей теореме.

Теорема 9.2. Рассмотрим систему (9.32) и предположим, что существуют положительно определенные убывающие функции Ляпунова $V_i(t, x_i)$, удовлетворяющие (9.34) и (9.35). Предположим также, что $g_i(t, x)$ удовлетворяет (9.36) для всех $t \geq 0$ и $\|x\| < r$ и матрица S , определенная равенством (9.37), принадлежит классу M -матриц. Тогда начало координат равномерно асимптотически устойчиво. Более того, если все условия выполнены глобально и $V_i(t, x_i)$ радиально неограничены, начало координат глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Пример 9.7. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - 1.5x_1^2x_2^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + 0.5x_1^2x_2^2. \end{aligned}$$

Система может быть представлена в форме (9.32) с

$$f_1(x_1) = -x_1, \quad g_1(x) = -1.5x_1^2x_2^3, \quad f_2(x_2) = -x_2^3, \quad g_2(x) = 0.5x_1^2x_2^2.$$

Первая изолированная система $\dot{x}_1 = -x_1$ имеет функцию Ляпунова $V_1(x_1) = x_1^2/2$, которая удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} f_1(x_1) = -x_1^2 = -\alpha_1 \phi_1^2(x_1),$$

где $\alpha_1 = 1$ и $\phi_1(x_1) = |x_1|$. Вторая изолированная система $\dot{x}_2 = -x_2^3$ имеет функцию Ляпунова $V_2(x_2) = x_2^4/4$, которая удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_2} f_2(x_2) = -x_2^6 = -\alpha_2 \phi_2^2(x_2),$$

где $\alpha_2 = 1$ и $\phi_2(x_2) = |x_2|^3$. Функции Ляпунова удовлетворяют (9.35) с $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Для перекрестного члена $g_1(x)$ справедливо неравенство

$$|g_1(x)| = 1.5x_1^2|x_2|^3 \leq 1.5c_1^2\phi_2(x_2)$$

для всех $|x_1| \leq c_1$. Для перекрестного члена $g_2(x)$ справедливо неравенство

$$|g_2(x)| = 0.5x_1^2x_2^2 \leq 0.5c_1c_2^2\phi_1(x_1)$$

для всех $|x_1| \leq c_1$ и $|x_2| \leq c_2$. Таким образом, если ограничиться рассмотрением множества

$$G = \{x \in R^2 \mid |x_1| \leq c_1, |x_2| \leq c_2\},$$

можно заключить, что перекрестные члены удовлетворяют (9.36) с

$$\gamma_{11} = 0, \quad \gamma_{12} = 1.5c_1^2, \quad \gamma_{21} = 0.5c_1c_2^2 \quad \text{и} \quad \gamma_{22} = 0.$$

Матрица

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1.5c_1^2 \\ -0.5c_1c_2^2 & 1 \end{bmatrix}$$

принадлежит классу M -матриц, если $0.75c_1^3c_2^2 < 1$. Это имеет место например при $c_1 = c_2 = 1$. Таким образом, начало координат асимптотически устойчиво. Если нас интересует оценка области притяжения, нам необходимо знать композитную функцию Ляпунова $V = d_1V_1 + d_2V_2$, т. е. нам необходимо найти положительную диагональную матрицу D , такую что $DS + S^T D > 0$. Полагая $c_1 = c_2 = 1$, получаем матрицу

$$DS + S^T D = \begin{bmatrix} 2d_1 & -1.5d_1 - 0.5d_2 \\ -1.5d_1 - 0.5d_2 & 2d_2 \end{bmatrix},$$

которая является положительно определенной при $1 < d_2/d_1 < 9$. Поскольку, не умаляя общности можно умножать функцию Ляпунова на любую положительную константу, мы положим $d_1 = 1$ и запишем композитную функцию Ляпунова в следующем виде:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}d_2x_2^4, \quad 1 < d_2 < 9.$$

Тогда оценка области притяжения определяется равенством

$$\Omega_c = \{x \in R^2 \mid V(x) \leq c\},$$

где $c \leq \min\{1/2, d_2/4\}$ и этот выбор определяется тем, что множество Ω_c должно быть расположено внутри прямоугольника $|x_i| \leq 1$. Заметим, что поверхность $V(x) = c$ пересекает x_1 - и x_2 -оси соответственно в точках $\sqrt{2c}$ и $(4c/d_2)^{1/4}$. Тогда минимум расстояния между этими точками достигается при $d_2 = 2$ и $c = 0.5$. \triangle

Пример 9.8. Математическая модель нейронной сети была введена в параграфе 1.2.5 и ее свойства устойчивости исследовались в примере 4.11 с использованием принципа инвариантности Ла-Салля в условиях предположения о симметричности матрицы T , т. е. $T_{ij} = T_{ji}$. Это условие позволило представить правую часть уравнения состояния в виде градиента скалярной функции. Здесь мы опустим это предположение и исследуем свойства устойчивости сети, рассматривая ее как взаимосвязанную систему, состоящую из подсистем, каждая из которых представляет отдельный нейрон. Уравнения этой системы удобно представить в терминах входных напряжений на усилителях u_i , определяемых уравнениями

$$C_i \dot{u}_i = \sum_j T_{ij} g_j(u_j) - \frac{1}{R_i} u_i + I_i$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ и $g_i(\cdot)$ — сигмоидальные функции, I_i — постоянная сила тока в усилителях, $R_i > 0$ и $C_i > 0$. Мы будем предполагать, что система имеет конечное число изолированных точек равновесия. Каждая такая точка равновесия u^* удовлетворяет уравнению

$$0 = \sum_j T_{ij} g_j(u_j^*) - \frac{1}{R_i} u_i^* + I_i$$

Для того, чтобы исследовать свойства устойчивости определенной точки равновесия u^* , переместим начало координат в эту точку. Пусть $x_i = u_i - u_i^*$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{1}{C_i} \dot{u}_i = \frac{1}{C_i} \left[\sum_j T_{ij} g_j(x_j + u_j^*) - \frac{1}{R_i} (x_i + u_i^*) + I_i \right] = \\ &= \frac{1}{C_i} \left[\sum_j T_{ij} \eta_j(x_j) - \frac{1}{R_i} x_i \right], \end{aligned}$$

где

$$\eta_i(x_i) = g_i(x_i + u_i^*) - g_i(u_i^*).$$

Предположим, что $\eta_i(\cdot)$ удовлетворяет секторному условию

$$\sigma^2 k_{i1} \leq \sigma \eta_i(\sigma) \leq \sigma^2 k_{i2}, \quad \sigma \in [-r_i, r_i],$$

где k_{i1} и k_{i2} — положительные константы. Из рисунка 9.1 видно, что это условие действительно выполняется, если $g_i(u_i) =$

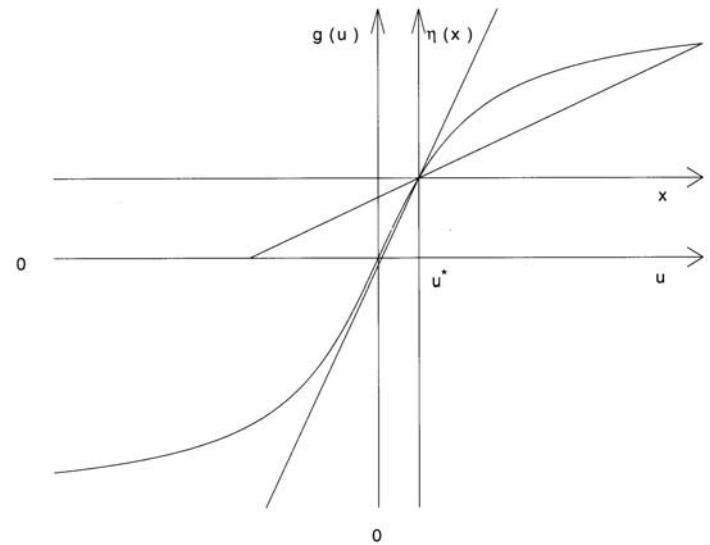


Рис. 9.1. Секторная нелинейность $\eta_i(x_i)$ в примере 9.8.

$= (2V_M/\pi) \operatorname{tg}^{-1}(\lambda \pi u_i / 2V_M)$, $\lambda > 0$. Эта система может быть представлена в виде (9.32) с

$$f_i(x_i) = -\frac{1}{C_i R_i} x_i + \frac{1}{C_i} T_{ii} \eta_i(x_i), \quad g_i(x) = \frac{1}{C_i} \sum_{j \neq i} T_{ij} \eta_j(x_j).$$

Используя

$$V_i(x_i) = \frac{1}{2} C_i x_i^2$$

в качестве функции Ляпунова для i -й изолированной системы, получаем

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(x_i) = -\frac{1}{R_i} x_i^2 + T_{ii} x_i \eta_i(x_i).$$

Если $T_{ii} \leq 0$, то

$$T_{ii} x_i \eta_i(x_i) \leq -|T_{ii}| k_{i1} x_i^2$$

и

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(x_i) \leq -\left(\frac{1}{R_i} + |T_{ii}| k_{i1}\right) x_i^2.$$

Легко видеть, что правая часть этого неравенства отрицательно определена. Если $T_{ii} > 0$, то

$$T_{ii} x_i \eta_i(x_i) \leq T_{ii} k_{i2} x_i^2$$

и

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(x_i) \leq -\left(\frac{1}{R_i} - T_{ii} k_{i2}\right) x_i^2.$$

В этом случае мы предположим, что $T_{ii}k_{i2} < 1/R_i$. Тогда производная функции V_i отрицательно определена. Для упрощения обозначений положим

$$\delta_i = \begin{cases} |T_{ii}|k_{i1}, & \text{если } T_{ii} \leq 0, \\ -T_{ii}k_{i2}, & \text{если } T_{ii} > 0. \end{cases}$$

Тогда $V_i(x_i)$ удовлетворяет (9.34) и (9.35) на интервале $[-r_i, r_i]$ с

$$\alpha_i = \left(\frac{1}{R_i} + \delta_i \right), \quad \beta_i = C_i, \quad \phi_i(x_i) = |x_i|,$$

где α_i — положительны по предположению. Перекрестный член $g_i(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|g_i(x)| \leq \frac{1}{C_i} \sum_{j \neq i} |T_{ij}| \eta_j(x_j) \leq \frac{1}{C_i} \sum_{j \neq i} |T_{ij}| k_{j2} |x_j|.$$

Таким образом, $g_i(x)$ удовлетворяет (9.36) с $\gamma_{ii} = 0$ и $\gamma_{ij} = k_{j2}|T_{ij}|/C_i$ при $i \neq j$. Теперь мы можем определить элементы матрицы S :

$$s_{ij} = \begin{cases} \delta_i + 1/R_i, & \text{при } i = j, \\ -|T_{ij}|k_{j2}, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Точка равновесия u^* является асимптотически устойчивой, если S принадлежит классу M -матриц. Оценка области притяжения имеет следующий вид:

$$\Omega_c = \left\{ x \in R^n \mid \sum_{i=1}^n d_i V_i(x_i) \leq c \right\},$$

где $c \leq 0.5 \min_i \{d_i C_i r_i^2\}$ и этот выбор обусловлен тем требованием, что множество Ω_c должно находиться внутри множества $|x_i| \leq r_i$. Приведенный выше анализ должен быть выполнен для каждой асимптотически устойчивой точки равновесия. Оценки, полученные в этом примере, являются более консервативными по сравнению с результатами, полученными с использованием принципа инвариантности Ласалля. При этом мы наложили дополнительные условия на коэффициенты перекрестных связей T_{ij} , так чтобы было выполнено требование принадлежности S классу M -матриц. Кроме того, в этом примере мы получили лишь локальные оценки областей притяжения для изолированных точек равновесия. Объединение этих оценок не покрывает всю исследуемую область. С другой стороны, мы избавились от требования $T_{ij} = T_{ji}$. \triangle

9.6. Медленно меняющиеся системы

Систему

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad (9.38)$$

где $x \in R^n$ и $u(t) \in \Gamma \subset R^m$ для всех $t \geq 0$, рассматривают как медленно меняющуюся, если $u(t)$ непрерывно дифференцируема и $\|\dot{u}(t)\|$ «достаточно мала». Компонентами вектора $u(t)$ могут быть переменные входа или зависящие от времени параметры. При анализе (9.38) функция u обычно рассматривается как фиксированный параметр и предполагается, что для каждого фиксированного $u = \alpha \in \Gamma$ соответствующая система имеет изолированную точку равновесия, определяемую равенством $x = h(\alpha)$. Если $x = h(\alpha)$ выполнено равномерно по α , то разумно ожидать, что медленно меняющаяся система (9.38) будет обладать тем же свойством. Подобные системы характерны тем, что их движение зависит в большей степени от начальных данных, нежели от входных воздействий или изменений параметров. В этом параграфе мы покажем, как теория устойчивости Ляпунова может быть использована при анализе медленно меняющихся систем.

Предположим, что $f(x, u)$ локально липшицева на $R^n \times \Gamma$, и для каждого $u \in \Gamma$ уравнение

$$0 = f(x, u)$$

имеет непрерывно дифференцируемый корень $x = h(u)$, т. е.

$$0 = f(h(u), u).$$

Далее, предположим, что

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial u} \right\| \leq L, \quad \forall u \in \Gamma. \quad (9.39)$$

Для того, чтобы выполнить анализ свойств устойчивости фиксированной точки равновесия $x = h(\alpha)$, переместим начало координат в эту точку с использованием замены переменных $z = x - h(\alpha)$. В результате получим уравнение

$$\dot{z} = f(z + h(\alpha), \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} g(z, \alpha). \quad (9.40)$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти функцию Ляпунова и доказать с ее использованием, что $z = 0$ является асимптотически устойчивой точкой равновесия. Поскольку $g(z, \alpha)$ зависит от параметра α , функция Ляпунова для системы может в общем случае зависеть от α . Предположим, что мы нашли функцию Ляпунова $V(z, \alpha)$, удовлетворяющую условиям

$$c_1 \|z\|^2 \leq V(z, \alpha) \leq c_2 \|z\|^2, \quad (9.41)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} g(z, \alpha) \leq -c_3 \|z\|^2, \quad (9.42)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial z} \right\| \leq c_4 \|z\|, \quad (9.43)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right\| \leq c_5 \|z\|^2 \quad (9.44)$$

для всех $z \in D = \{z \in R^n \mid \|z\| < r\}$ и $\alpha \in \Gamma$, где c_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ — положительные константы, не зависящие от α . Неравенства (9.41) и (9.42) представляют собой стандартные условия положительной определенности и убывания функции V , а также отрицательной определенности ее производной вдоль траекторий системы (9.40). Кроме того, из этих неравенств следует, что начало координат $z = 0$ экспоненциально устойчиво. В этом параграфе мы будем предполагать, что эти неравенства выполнены равномерно по α . Неравенства (9.43) и (9.44) необходимы для анализа возмущений системы (9.40), обусловленных тем, что $u(t)$ является зависящей от времени функцией. Дальнейший анализ системы (9.38) будет проведен с использованием $V(z, u)$ в качестве функции Ляпунова. Замена переменных $z = x - h(u)$ приводит систему (9.38) к следующему виду:

$$\dot{z} = g(z, u) - \frac{\partial h}{\partial u} \dot{u}, \quad (9.45)$$

где зависимость u обуславливает возникновение члена возмущений в системе (9.40). Производная функции $V(z, u)$ вдоль траекторий (9.45) определяется равенством

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial V}{\partial u} \dot{u}(t) = \\ &= \frac{\partial V}{\partial z} g(z, u) + \left[\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial u} \right] \dot{u}(t) \leqslant \\ &\leqslant -c_3 \|z\|^2 + c_5 \|z\|^2 \|\dot{u}(t)\| + c_4 L \|z\| \|\dot{u}(t)\|. \end{aligned}$$

Полагая

$$\gamma(t) = \frac{c_5}{c_4} \|\dot{u}(t)\| \quad \text{и} \quad \delta(t) = L \|\dot{u}(t)\|,$$

можно переписать последнее неравенство в виде

$$\dot{V} \leqslant -c_3 \|z\|^2 + c_4 \gamma(t) \|z\|^2 + c_4 \delta(t) \|z\|,$$

совпадающим по форме с неравенством (9.16) из параграфа 9.3. Поэтому, применяя также как и в параграфе 9.3 лемму сравнения, можно показать, что если $\dot{u}(t)$ удовлетворяет

$$\int_{t_0}^t \|\dot{u}(\tau)\| d\tau \leqslant \varepsilon_1(t - t_0) + \eta_1, \quad \text{где} \quad \varepsilon_1 < \frac{c_1 c_3}{c_2 c_5} \quad (9.46)$$

и

$$\|z(0)\| < \frac{r}{\rho_1} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}; \quad \sup_{t \geqslant 0} \|\dot{u}(t)\| \leqslant \frac{2c_1 \alpha_1 r}{c_4 \rho_1 L},$$

где α_1 и ρ_1 определяются равенствами

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{c_3}{c_2} - \varepsilon_1 \frac{c_5}{c_1} \right] > 0, \quad \rho_1 = \exp \left(\frac{c_5 \eta_1}{2c_1} \right) \geqslant 1,$$

то $z(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|z(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \rho_1 \|z(0)\| e^{-\alpha_1 t} + \frac{c_4 \rho_1 L}{2c_1} \int_0^t e^{-\alpha_1(t-\tau)} \|\dot{u}(\tau)\| d\tau. \quad (9.47)$$

С использованием этого неравенства можно получить несколько результатов, в зависимости от предположений, сделанных относительно $\|\dot{u}\|$. Некоторые из этих результатов сформулированы в следующей теореме.

Теорема 9.3. Рассмотрим систему (9.45). Предположим, что $[\partial h / \partial u]$ удовлетворяет (9.39), $\|\dot{u}(t)\| \leqslant \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$. Предположим также, что существует функция Ляпунова, удовлетворяющая (9.41)–(9.44). Если

$$\varepsilon < \frac{c_1 c_3}{c_2 c_5} \times \frac{r}{r + c_4 L / c_5},$$

то для любых $\|z(0)\| < r \sqrt{c_1 / c_2}$, решения системы (9.45) равномерно ограничены для всех $t \geqslant 0$ и равномерно предельно ограничены с границей

$$b = \frac{c_2 c_4 L \varepsilon}{\theta(c_1 c_3 - \varepsilon c_2 c_5)}$$

где $\theta \in (0, 1)$ — произвольная константа. Если, кроме того, $\dot{u}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то $z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Наконец, если $h(u) = 0$ для всех $u \in \Gamma$ и $\varepsilon < c_3 / c_5$, то $z = 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия системы (9.45). Эквивалентно, $x = 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия системы (9.38).

Доказательство: Поскольку $\|\dot{u}(t)\| \leqslant \varepsilon < c_1 c_3 / c_2 c_5$, неравенство (9.46) выполнено при $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и $\eta_1 = 0$. Следовательно,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{c_3}{c_2} - \varepsilon \frac{c_5}{c_1} \right], \quad \rho_1 = 1$$

Задав верхнюю границу ε , получаем

$$\begin{aligned} \frac{2c_1 \alpha_1 r}{c_4 L} &= \frac{c_1 r}{c_4 L} \left[\frac{c_3}{c_2} - \varepsilon \frac{c_5}{c_1} \right] > \\ &> \frac{c_1 r}{c_4 L} \left[\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_3}{c_2} \times \frac{r}{r + c_4 L / c_5} \right] = \\ &= \frac{c_1 c_3}{c_2 c_5} \times \frac{r}{r + c_4 L / c_5} > \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство $\sup_{t \geqslant 0} \|\dot{u}(t)\| < 2c_1 \alpha_1 r / c_4 L$ выполнено и из (9.47) получаем

$$\|z(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|z(0)\| e^{-\alpha_1 t} + \frac{c_4 L}{2c_1} \int_0^t e^{-\alpha_1(t-\tau)} \varepsilon d\tau \leqslant$$

$$\leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|z(0)\| e^{-\alpha_1 t} + \frac{c_4 L \varepsilon}{2 c_1 \alpha_1} = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|z(0)\| e^{-\alpha_1 t} + b \theta.$$

По прошествии конечного промежутка времени экспоненциально убывающий член станет меньше $(1 - \theta)b$ и, следовательно, $z(t)$ предельно ограничено величиной b . Если, кроме того, $\dot{u}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то из (9.47) видно, что $z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если $h(u) = 0$ для всех $u \in \Gamma$, мы можем положить $L = 0$. Тогда выражение для верхней границы V упрощается и принимает вид

$$\dot{V} \leq -(c_3 - c_5 \varepsilon) \|z\|^2,$$

из которого видно, что $z = 0$ экспоненциально устойчивая точка равновесия, если $\varepsilon < c_3/c_5$. \square

В теореме требуется существование для системы (9.40) функции Ляпунова $V(z, \alpha)$, удовлетворяющей неравенствам (9.41)–(9.44). Из леммы 9.8 следует, что такая функция действительно существует при выполнении некоторых условий гладкости и если эта система экспоненциально устойчива равномерно по α . Это может быть доказано с использованием функции Ляпунова, существование которой гарантируется обратными теоремами Ляпунова из параграфа 4.7.

Лемма 9.8. *Рассмотрим систему (9.40) и предположим, что $g(z, \alpha)$ — непрерывно дифференцируемая функция и матрицы Якоби $[\partial g / \partial z]$ и $[\partial g / \partial \alpha]$ удовлетворяют неравенствам*

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial z}(z, \alpha) \right\| \leq L_1, \quad \left\| \frac{\partial g}{\partial \alpha}(z, \alpha) \right\| \leq L_2 \|z\|$$

для всех $(z, \alpha) \in D \times \Gamma$, где $D = \{z \in R^n \mid \|z\| < r\}$. Пусть k, γ и r_0 — положительные константы и $r_0 < r/k$. Определим $D_0 = \{z \in R^n \mid \|z\| < r_0\}$. Предположим, что траектории системы удовлетворяют оценкам

$$\|z(t)\| \leq k \|z(0)\| e^{-\gamma t}, \quad \forall z(0) \in D_0, \alpha \in \Gamma, t \geq 0.$$

Тогда существует функция $V : D_0 \times \Gamma \rightarrow R$, удовлетворяющая (9.41)–(9.44). Кроме того, если все предположения выполнены глобально (по z), то $V(z, \alpha)$ определена и удовлетворяет (9.41)–(9.44) на $R^n \times \Gamma$.

Доказательство: Вследствие эквивалентности норм достаточно доказать лемму для случая 2-нормы. Пусть $\phi(t; z, \alpha)$ — решение (9.40), начинающееся в $(0, z)$, т. е. $\phi(0; z, \alpha) = z$. Это обозначение подчеркивает факт зависимости решения от параметра α . Пусть

$$V(z, \alpha) = \int_0^T \phi^T(t; z, \alpha) \phi(t; z, \alpha) dt,$$

где $T = \ln(2k^2)/2\gamma$. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 4.14, можно показать, что $V(z, \alpha)$ удовлетворяет (9.41)–(9.43) с $c_1 = [1 - \exp(-2L_1 T)]/2L_1$, $c_2 = k^2[1 - \exp(-2\gamma T)]/2\gamma$, $c_3 = 1/2$ и $c_4 = 2k\{1 - \exp[-(\gamma - L_1)T]\}/(\gamma - L_1)$. Для того чтобы доказать выполнение (9.44) для $V(z, \alpha)$, заметим, что функция чувствительности $\phi_\alpha(t; z, \alpha)$ удовлетворяет уравнению чувствительности

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_\alpha = \frac{\partial g}{\partial z}(\phi(t; z, \alpha), \alpha) \phi_\alpha + \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\phi(t; z, \alpha), \alpha), \quad \phi_\alpha(0; z, \alpha) = 0,$$

из которого можно получить следующую оценку

$$\begin{aligned} \|\phi_\alpha(t; z, \alpha)\|_2 &\leq \int_0^t L_1 \|\phi_\alpha(\tau; z, \alpha)\|_2 d\tau + \int_0^t L_2 \|\phi(\tau; z, \alpha)\|_2 d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t L_1 \|\phi_\alpha(\tau; z, \alpha)\|_2 d\tau + \int_0^t L_2 k e^{-\gamma \tau} d\tau \|z\|_2 \leq \\ &\leq \int_0^t L_1 \|\phi_\alpha(\tau; z, \alpha)\|_2 d\tau + \frac{L_2 k}{\gamma} \|z\|_2. \end{aligned}$$

Используя неравенство Гронуолла–Беллмана, получаем

$$\|\phi_\alpha(t; z, \alpha)\|_2 \leq \frac{L_2 k}{\gamma} \|z\|_2 e^{L_1 t}.$$

Следовательно, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right\|_2 &= \left\| \int_0^T 2\phi^T(t; z, \alpha) \phi_\alpha(t; z, \alpha) dt \right\|_2 \leq \\ &\leq \int_0^T 2k e^{-\gamma t} \|z\|_2 \left(\frac{L_2 k}{\gamma} \right) e^{L_1 t} \|z\|_2 dt \leq \\ &\leq \frac{2k^2 L_2}{\gamma(\gamma - L_1)} \left[1 - e^{-(\gamma - L_1)T} \right] \|z\|_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} c_5 \|z\|_2^2, \end{aligned}$$

из которых следует утверждение теоремы. \square

В случае, если система (9.40) линейна, функция Ляпунова, удовлетворяющая (9.41)–(9.44), может быть явно определена путем решения параметризованного уравнения Ляпунова. Это утверждение формулируется в виде следующей леммы.

Лемма 9.9. *Рассмотрим систему $\dot{z} = A(\alpha)z$, где $\alpha \in \Gamma$ и $A(\alpha)$ — непрерывно дифференцируемая матрица. Предположим, что элемен-*

ты матрицы A и их первые частные производные по α равномерно ограничены, т. е.

$$\|A(\alpha)\|_2 \leq c, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \alpha_i} A(\alpha) \right\|_2 \leq b_i, \quad \forall \alpha \in \Gamma, \quad \forall 1 \leq i \leq m.$$

Предположим также, что $A(\alpha)$ гурвицева равномерно по α , т. е.

$$\operatorname{Re}[\lambda(A(\alpha))] \leq -\sigma < 0, \quad \forall \alpha \in \Gamma.$$

Тогда уравнение Ляпунова

$$PA(\alpha) + A^T(\alpha)P = -I \quad (9.48)$$

имеет единственное положительно определенное решение $P(\alpha)$ для каждой $\alpha \in \Gamma$. Кроме того, $P(\alpha)$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} c_1 z^T z &\leq z^T P(\alpha) z \leq c_2 z^T z \\ \left\| \frac{\partial}{\partial \alpha_i} P(\alpha) \right\|_2 &\leq \mu_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

для всех $(z, \alpha) \in R^n \times \Gamma$, где c_1, c_2 и μ_i — не зависящие от α положительные константы. Тогда $V(z, \alpha) = z^T P(\alpha) z$ удовлетворяет (9.42)–(9.44) (для 2-норм) с $c_3 = 1$, $c_4 = 2c_2$ и $c_5 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \mu_i^2}$.

Доказательство: Из равномерной гурвицевости матрицы $A(\alpha)$ следует, что матричная экспонента $\exp[tA(\alpha)]$ удовлетворяет неравенству

$$\|\exp[tA(\alpha)]\| \leq k(A)e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \forall \alpha \in \Gamma,$$

где $\beta > 0$ не зависит от α , но $k(A) > 0$ зависит от α . То, что свойство экспоненциального убывания границы выполняется равномерно по α , следует из ограниченности величины $\|A(\alpha)\|$. Множество матриц, удовлетворяющих неравенствам $\operatorname{Re}[\lambda(A(\alpha))] \leq -\sigma$ и $\|A(\alpha)\| \leq c$, компактно. Обозначим это множество через S . Пусть A и B — два любых элемента множества S . Рассмотрим¹⁾

$$\exp[t(A+B)] = \exp[tA] + \int_0^t \exp[(t-\tau)A]B \exp[\tau(A+B)] d\tau.$$

¹⁾ Это матричное тождество может быть доказано, если записать $\dot{x} = (A + B)x$ в виде $\dot{x} = Ax + Bx$ и рассмотреть Bx в качестве входа системы. Подставляя $x(t) = \exp[t(A+B)]x_0$ в Bx , получаем решение системы

$$\exp[t(A+B)]x_0 = \exp[tA]x_0 + \int_0^t \exp[(t-\tau)A]B \exp[\tau(A+B)]x_0 d\tau.$$

Поскольку это выражение выполнено для всех $x_0 \in R^n$, получаем требуемое матричное тождество.

С учетом того, что граница $\exp[tA]$ экспоненциально убывает, имеем

$$\|\exp[t(A+B)]\| \leq k(A)e^{-\beta t} + \int_0^t k(A)e^{-\beta(t-\tau)}\|B\| \|\exp[\tau(A+B)]\| d\tau.$$

Умножая это неравенство на $e^{\beta t}$, получаем

$$e^{\beta t}\|\exp[t(A+B)]\| \leq k(A) + k(A)\|B\| \int_0^t e^{\beta\tau}\|\exp[\tau(A+B)]\| d\tau.$$

Используем неравенство Гронуолла–Беллмана:

$$\|\exp[t(A+B)]\| \leq k(A)e^{-(\beta-k(A)\|B\|)t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Следовательно, существуют положительная константа $\gamma < \beta$ и некоторая окрестность $N(A)$ матрицы A , такие что если $C \in N(A)$, то

$$\|\exp[tC]\| \leq k(A)e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Поскольку S компактно, оно покрывается конечным числом таких окрестностей. Следовательно, мы можем найти не зависящую от α положительную константу k , такую что

$$\|\exp[tA(\alpha)]\| \leq ke^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0, \forall \alpha \in \Gamma.$$

Рассмотрим уравнение Ляпунова (9.48). Существование единственного положительно определенного решения для всех $\alpha \in \Gamma$ гарантируется теоремой 4.6. Кроме того, из доказательства этой теоремы следует, что

$$P(\alpha) = \int_0^\infty \left[e^{tA(\alpha)} \right]^T \left[e^{tA(\alpha)} \right] dt.$$

Поскольку $A(\alpha)$ непрерывно дифференцируема, этим же свойством обладает и матрица $P(\alpha)$. Имеем

$$z^T P(\alpha) z \leq \int_0^\infty k^2 e^{-2\gamma t} \|z\|_2^2 dt = \frac{k^2}{2\gamma} \|z\|_2^2 \Rightarrow c_2 = \frac{k^2}{2\gamma}.$$

Пусть $y(t) = e^{tA(\alpha)}z$. Тогда $\dot{y} = A(\alpha)y$,

$$-y^T(t)\dot{y}(t) = -y^T(t)A(\alpha)y(t) \leq \|A(\alpha)\|_2 y^T(t)y(t) \leq c y^T(t)y(t)$$

и

$$z^T P(\alpha)z = \int_0^\infty y^T(t)y(t) dt \geq \int_0^\infty \frac{-1}{c} y^T(t)\dot{y}(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2c} \int_0^\infty \frac{d}{dt}[-y^T(t)y(t)] dt = \frac{1}{2c}[-y^T(t)y(t)]|_0^\infty = \\
&= \frac{1}{2c}y^T(0)y(0) = \frac{1}{2c}z^T z \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2c}.
\end{aligned}$$

Найдем частную производную $P(\alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)P(\alpha) = -I$ по каждому из компонентов α_i вектора α и обозначим производную $P(\alpha)$ через $P'(\alpha)$. Тогда

$$P'(\alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)P'(\alpha) = -\{P(\alpha)A'(\alpha) + [A'(\alpha)]^T P(\alpha)\}$$

и $P'(\alpha)$ определяется равенством

$$P'(\alpha) = \int_0^\infty \left[e^{tA(\alpha)} \right]^T \{P(\alpha)A'(\alpha) + [A'(\alpha)]^T P(\alpha)\} \left[e^{tA(\alpha)} \right] dt.$$

Следовательно,

$$\|P'(\alpha)\|_2 \leq \int_0^\infty k^2 e^{-2\gamma t} 2 \frac{k^2}{2\gamma} b_i dt = \frac{b_i k^4}{2\gamma^2} \Rightarrow \mu_i = \frac{b_i k^4}{2\gamma^2},$$

что завершает доказательство леммы. \square

Следует заметить, что множество Γ в лемме 9.9 не обязательно является компактным. Если Γ компактно, ограниченность $A(\alpha)$ и ее первых производных следует из предположения о том, что $A(\alpha)$ непрерывно дифференцируема.

Пример 9.9. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(\varepsilon t)x,$$

где $\varepsilon > 0$. Если ε достаточно мала, мы можем исследовать эту систему как медленно меняющуюся. Она представлена в форме (9.38) с $u = \varepsilon t$ и $\Gamma = [0, \infty)$. Для любого $u \in \Gamma$ начало координат $x = 0$ является точкой равновесия системы. Следовательно, этот пример соответствует частному случаю предыдущей леммы для $h(u) = 0$. Предположим, что $\text{Re}[\lambda(A(\alpha))] \leq -\sigma < 0$ и $A(\alpha)$, $A'(\alpha)$ равномерно ограничены для всех $\alpha \in \Gamma$. Тогда решение уравнения Ляпунова (9.48) обладает свойствами, установленными в лемме 9.9. Используя $V(x, u) = x^T P(u)x$ в качестве функции Ляпунова для системы $\dot{x} = A(u)x$, получаем

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x) &= x^T [P(u(t))A(u(t)) + A^T(u(t))P(u(t))]x + x^T P'(u(t))\dot{u}(t)x \leq \\
&\leq -x^T x + \varepsilon c_5 \|x\|_2^2 = -(1 - \varepsilon c_5) \|x\|_2^2,
\end{aligned}$$

где c_5 — верхняя граница $\|P'(\alpha)\|_2$. Поэтому для всех $\varepsilon < 1/c_5$ начало координат $x = 0$ является экспоненциально устойчивой точкой равновесия системы $\dot{x} = A(\varepsilon t)x$. \triangle

9.7. Упражнения

9.1 ([150]) Рассмотрим уравнение Ляпунова $PA + A^T P = -Q$, где $Q = Q^T > 0$ и A — гурвицева матрица. Пусть $\mu(Q) = \lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)$.

(а) Покажите, что $\mu(kQ) = \mu(Q)$ для любой положительной константы k .

(б) Пусть $\widehat{Q} = \widehat{Q}^T > 0$ имеет $\lambda_{\min}(\widehat{Q}) = 1$. Покажите, что $\mu(I) \geq \mu(\widehat{Q})$.

(с) Покажите, что $\mu(I) \geq \mu(Q), \forall Q = Q^T > 0$.

Указание: В пункте (б) пусть P_1 и P_2 — решения уравнения Ляпунова для $Q = I$ и $Q = \widehat{Q}$, соответственно. Покажите, что

$$P_1 - P_2 = \int_0^\infty \exp(A^T t)(I - \widehat{Q}) \exp(At) dt \leq 0.$$

9.2 Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + Bu$ и пусть $u = -Fx$ — стабилизирующая обратная связь по состоянию, т. е. матрица $(A - BF)$ является гурвицевой. Предположим, что вследствие физических условий значения u_i ограничены $|u_i(t)| \leq L$. Замкнутая система может быть представлена в виде системы $\dot{x} = Ax - BL \text{sat}(Fx/L)$, где $\text{sat}(v)$ — вектор, i -е компоненты которого являются функциями насыщения. Прибавляя и вычитая BFx , можно переписать уравнение состояния замкнутой системы в виде $\dot{x} = (A - BF)x - Bh(Fx)$, где $h(v) = L \text{sat}(v/L) - v$. Тогда указанные ограничения могут рассматриваться как возмущение номинальной системы без ограничений.

(а) Покажите, что

$$|h_i(v)| \leq \frac{\delta}{(1 + \delta)} |v_i|, \forall |v_i| \leq L(1 + \delta),$$

где $\delta > 0$.

(б) Пусть P — решение уравнения

$$P(A - BF) + (A - BF)^T P = -I.$$

Покажите, что производная функции $V(x) = x^T Px$ вдоль траекторий замкнутой системы отрицательно определена в области $|(Fx)_i| \leq L(1 + \delta), \forall i$ при условии, что $\delta/(1 + \delta) < 1/(2\|PB\|_2\|F\|_2)$.

(с) Покажите, что начало координат асимптотически устойчиво и обсудите пути определения области притяжения.

(д) Примените полученный в пункте (с) результат к случаю

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad L = 1$$

и оцените область притяжения.

9.3 Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x) + Bu, \quad y = Cx \quad \text{и} \quad u = -g(t, y),$$

где $f(t, 0) = 0$, $g(t, 0) = 0$ и $\|g(t, y)\| \leq \gamma \|y\|$ для всех $t \geq 0$. Предположим, что начало координат системы $\dot{x} = f(t, x)$ глобально экспоненциально устойчиво и пусть $V(t, x)$ — функция Ляпунова, глобально удовлетворяющая (9.3)–(9.5). Найдите границу γ^* для γ , такую что начало координат этой системы глобально экспоненциально устойчиво при $\gamma < \gamma^*$.

9.4 Рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x} = Ax + B[u + g(t, x)],$$

где $g(t, x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая неравенству $\|g(t, x)\|_2 \leq k\|x\|_2$, $\forall t \geq 0$, $\forall x \in B_r$ для некоторой $r > 0$. Пусть $P = P^T > 0$ — решение уравнения Риккати

$$PA + A^T P + Q - PBB^T P + 2\alpha P = 0,$$

где $Q \geq k^2 I$ и $\alpha > 0$. Покажите, что закон управления $u = -B^T Px$ стабилизирует начало координат возмущенной системы.

9.5 ([101]) Рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dg(t, y), \quad y = Cx,$$

где $g(t, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая неравенству $\|g(t, y)\|_2 \leq k\|y\|_2$, $\forall t \geq 0$, $\forall \|y\|_2 \leq r$ для некоторой $r > 0$. Предположим, что уравнение

$$PA + A^T P + \varepsilon Q - \frac{1}{\varepsilon} PBB^T P + \frac{1}{\gamma} PDD^T P + \frac{1}{\gamma} C^T C = 0,$$

где $Q = Q^T > 0$, $\varepsilon > 0$ и $0 < \gamma < 1/k$, имеет положительно определенное решение $P = P^T > 0$. Покажите, что $u = -(1/2\varepsilon)B^T Px$ стабилизирует начало координат возмущенной системы.

9.6 Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha x_1 - \omega x_2 + (\beta x_1 - \gamma x_2)(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 - \alpha x_2 + (\gamma x_1 + \beta x_2)(x_1^2 + x_2^2), \end{aligned}$$

где $\alpha > 0$, β , γ и $\omega > 0$ — некоторые константы.

(а) Рассматривая эту систему как возмущение линейной системы

$$\dot{x}_1 = -\alpha x_1 - \omega x_2, \quad \dot{x}_2 = \omega x_1 - \alpha x_2,$$

покажите, что начало координат возмущенной системы экспоненциально устойчиво и множество $\{\|x\|_2 \leq r\}$ содержитя в области притяжения, если $|\beta|$ и $|\gamma|$ достаточно малы. Найдите верхние границы для $|\beta|$ и $|\gamma|$ в терминах r .

- (б)** Используя $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ в качестве функции Ляпунова для возмущенной системы, покажите, что начало координат глобально экспоненциально устойчиво, если $\beta \leq 0$, и экспоненциально устойчиво и множество $\{\|x\|_2 < \sqrt{\alpha}/\beta\}$ содержитя в области притяжения, если $\beta > 0$.

- (с)** Сравните результаты пунктов (а) и (б) и прокомментируйте консервативный характер результата в пункте (а).

9.7 Рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x} = f(x) + g(x).$$

Предположим, что начало координат номинальной системы $\dot{x} = f(x)$ асимптотически (но не экспоненциально) устойчиво. Покажите, что для любой $\gamma > 0$ существует функция $g(x)$, удовлетворяющая в некоторой окрестности начала координат неравенству $\|g(x)\| \leq \gamma \|x\|$, такая что начало координат возмущенной системы неустойчиво.

9.8 ([66]) Рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x} = f(x) + g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции и $\|g(x)\| \leq \gamma \|x\|$ для всех $\|x\| < r$. Предположим, что начало координат номинальной системы $\dot{x} = f(x)$ асимптотически устойчиво и существует функция Ляпунова $V(x)$, удовлетворяющая неравенствам (9.11)–(9.13) для всех $\|x\| < r$. Пусть $\Omega = \{V(x) \leq c\}$, где $c < \alpha_1(r)$.

- (а)** Покажите, что существует положительная константа γ^* , такая что при $\gamma < \gamma^*$ решения возмущенной системы, начинающиеся в Ω , остаются в Ω для всех $t \geq 0$ и предельно ограничены \mathcal{K} -функцией γ .

- (б)** Предположим, что номинальная система характеризуется дополнительным свойством, заключающимся в том, что $A = [\partial f / \partial x](0)$ является гурвицевой. Покажите, что существует γ_1^* , такая что при $\gamma < \gamma_1^*$ решения возмущенной системы, начинающиеся в Ω , стремятся к началу координат при $t \rightarrow \infty$.

- (с)** Будет ли верен результат пункта (б), если A не является гурвицевой? Рассмотрите частный случай, когда

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{bmatrix} -x_2 & -(2x_1 + x_3)^3 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}, \\ g(x) &= a \begin{bmatrix} x_1 - x_3 - (2x_1 + x_3)^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a \neq 0. \end{aligned}$$

Указание: Для примера из пункта (с), используйте

$$V(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_3$$

для доказательства того, что начало координат системы $\dot{x} = f(x)$ асимптотически устойчиво и примените теорему 4.16 с целью определения функции Ляпунова, удовлетворяющей (9.11)–(9.13).

9.9 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^5 - \gamma x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^5 + \gamma(x_1 + x_2), \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$$

- (a) При $\gamma = 0$ покажите, что начало координат глобально асимптотически устойчиво. Является ли оно экспоненциально устойчивым?
- (b) При $0 < \gamma \leq 1/2$ покажите, что начало координат неустойчиво и решения системы глобально предельно ограничены предельной границей, являющейся некоторой \mathcal{K} -функцией от γ .

9.10 ([19]) Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - bx_1 - cx_2 - \gamma(cx_1 + 2x_2) + q(t) \cos x_1,$$

где $a, b > a$, c и γ — положительные константы и $q(t)$ — непрерывная функция.

- (a) При $q(t) \equiv 0$ используйте функцию

$$V(x) = (b + \frac{1}{2}c^2)x_1^2 + cx_1x_2 + x_2^2 + 2a(1 - \cos x_1)$$

и покажите, что начало координат глобально экспоненциально устойчиво.

- (b) Исследуйте свойства устойчивости системы при $q(t) \neq 0$ и $|q(t)| \leq k$ для всех $t \geq 0$.

9.11 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = [(\sin x_2)^2 - 1]x_1, \quad \dot{x}_2 = -bx_1 - (1+b)x_2.$$

- (a) При $b = 0$ покажите, что начало координат экспоненциально устойчиво и глобально асимптотически устойчиво.
- (b) При $b \neq 0$ покажите, что начало координат экспоненциально устойчиво при достаточно малой величине $|b|$, но не является глобально асимптотически устойчивым вне зависимости от того, насколько мала $|b|$.
- (c) Обсудите результаты пунктов (a) и (b) в контексте задачи робастности, рассмотренной в параграфе 9.1, и покажите, что при $b = 0$ начало координат не является глобально экспоненциально устойчивым.

9.12 ([8]) Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + (x_1 + a)x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1(x_1 + a) + bx_2, \quad a \neq 0$$

- (a) Пусть $b = 0$. Покажите, что начало координат глобально асимптотически устойчиво. Является ли оно экспоненциально устойчивым?
- (b) Пусть $b > 0$. Покажите, что начало координат экспоненциально устойчиво при $b < \min\{1, a^2\}$.

- (c) Покажите, что начало координат не является глобально асимптотически устойчивым при любой $b > 0$.

- (d) Обсудите результаты пунктов (a)–(c) в контексте задачи робастности, рассмотренной в параграфе 9.1, и покажите, что при $b = 0$ начало координат не является глобально экспоненциально устойчивым.

Указание: В пункте (d) матрица Якоби номинальной системы не является глобально ограниченной.

9.13 Рассмотрим скалярную систему $\dot{x} = -x/(1+x^2)$ и $V(x) = x^4$.

- (a) Покажите, что неравенства (9.11)–(9.13) выполнены глобально при

$$\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^4, \quad \alpha_3(r) = \frac{4r^4}{1+r^2}, \quad \alpha_4(r) = 4r^3.$$

- (b) Покажите, что эти функции принадлежат классу \mathcal{K}_∞ .

- (c) Покажите, что правая часть (9.14) стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$.

- (d) Рассмотрим возмущенную систему $\dot{x} = -x/(1+x^2) + \delta$, где δ — положительная константа. Покажите, что при $\delta > 1/2$ решение $x(t)$ стремится к бесконечности при любом начальном состоянии системы $x(0)$.

9.14 Покажите, что $D^+W(t)$ удовлетворяет (9.17) при $V = 0$.

Указание: Покажите, что $V(t+h, x(t+h)) \leq 0.5c_4h^2\|g(t, 0)\|^2 + h o(h)$, где $o(h)/h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Далее используйте тот факт, что $\sqrt{c_4}/2c_1 \geq 1$.

- (e) Рассмотрим линейную систему из примера 9.6, но заменим сделанное для $B(t)$ предположение на следующее: $\int_0^\infty \|B(t)\|dt < \infty$. Покажите, что начало координат экспоненциально устойчиво.

- (f) Рассмотрим линейную систему из примера 9.6, но заменим сделанное для $B(t)$ предположение на следующее: $\int_0^\infty \|B(t)\|^2dt < \infty$. Покажите, что начало координат экспоненциально устойчиво.

Указание: Используйте неравенство

$$\int_a^b v(t)dt \leq \sqrt{(b-a) \int_a^b v^2(t)dt}, \quad \forall v(t) \geq 0,$$

которое следует из неравенства Коши–Шварца.

- (g) Рассмотрим систему $\dot{x} = A(t)x$, где $A(t)$ — непрерывная матрица. Предположим, что $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t)\bar{A}$ существует и \bar{A} гурвицева. Покажите, что начало координат экспоненциально устойчиво.

- (h) Выполните пункт (b) упражнения 9.10 в случае, когда $q(t)$ ограничена и $q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

9.19 Рассмотрим систему $\dot{x} = f(t, x)$, где $\|f(t, x) - f(0, x)\|_2 \leq \gamma(t)\|x\|_2$ для всех $t \geq 0, x \in R^2, \gamma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$,

$$f(0, x) = Ax - (x_1^2 + x_2^2)Bx, \quad A = \begin{bmatrix} -\alpha & -\omega \\ \omega & -\alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta & \Omega \\ -\Omega & \beta \end{bmatrix}$$

и $\alpha, \beta, \omega, \Omega$ — положительные константы. Покажите, что начало координат глобально экспоненциально устойчиво.

9.20 Рассмотрим систему $\dot{x} = f(x) + G(x)u + w(t)$, где $\|w(t)\|_2 \leq a + ce^{-t}$. Предположим, что существует симметричная положительно определенная матрица P , положительно полуопределенная функция $W(x)$ и положительные константы γ и σ , такие что

$$2x^T Pf(x) + \gamma x^T Px + W(x) - 2\sigma x^T PG(x)G^T(x)Px \leq 0, \quad \forall x \in R^n.$$

Покажите, что при $u = -\sigma G^T(x)Px$ траектории замкнутой системы равномерно предельно ограничены величиной $2ak\lambda_{\max}(P)/\gamma\lambda_{\min}(P)$ для некоторой $k > 1$.

9.21 Рассмотрим возмущенную систему (9.1). Предположим, что существует функция Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющая (9.11)–(9.13). Пусть член возмущения удовлетворяет неравенству $\|g(t, x)\| \leq \delta(t), \forall t \geq 0, \forall x \in D$. Покажите, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$ существуют $\eta > 0$ и $\rho > 0$, такие что при $(1/\Delta) \int \int^{+\Delta} \delta(\tau) d\tau < \eta$ любое решение возмущенной системы с $\|x(t_0)\| < \rho$ удовлетворяет $\|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$.

(Этот результат известен как свойство устойчивости при постоянно действующих ограниченных в среднем возмущениях [107].)

Указание: Пусть $W = \sqrt{V}$, выберите на интервале времени точки $t_0 + i\Delta, i = 0, 1, 2, \dots$ и покажите, что $W(t_0 + i\Delta)$ удовлетворяет разностному неравенству

$$W(t_0 + (i+1)\Delta) \leq e^{-\sigma\Delta}W(t_0 + i\Delta) + k\eta\Delta.$$

9.22 Пусть A — $(n \times n)$ -матрица, такая что $a_{ij} \leq 0$ для всех $i \neq j$ и $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$. Покажите, что A принадлежит классу M -матриц.

Указание: Покажите, что $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0, i = 1, \dots, n$ и, используя метод математической индукции, докажите, что все ведущие главные миноры положительны.

9.23 Предположим, что условия теоремы 9.3 выполнены при

$$\phi_i(x_i) = \|x_i\|, \quad c_{i1}\|x_i\|^2 \leq V_i(t, x_i) \leq c_{i2}\|x_i\|^2.$$

Покажите, что начало координат экспоненциально устойчиво.

9.24 ([132]) Исследуйте свойства устойчивости начала координат системы

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - 1.5x_1|x_2|^3, \quad \dot{x}_2 = -x_2^5 + x_1^2x_2^2$$

с использованием композитной функции Ляпунова.

9.25 Исследуйте свойства устойчивости начала координат системы

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_2x_3^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_1^2, \quad \dot{x}_3 = x_1 + x_2 - x_3^3$$

с использованием композитной функции Ляпунова.

9.26 Рассмотрим линейную взаимосвязанную систему

$$\dot{x}_i = A_{ii}x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^m A_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где x_i — векторы размерности n_i и A_{ii} — гурвицевы матрицы. Исследуйте свойства устойчивости начала координат системы с использованием композитной функции Ляпунова.

9.27 [175]) Сложная взаимосвязанная система может быть подвержена структурным возмущениям, что приводит в процессе ее функционирования к тому, что группы подсистем подключаются друг к другу или отключаются друг от друга. Система с подобными структурными возмущениями может быть представлена в виде

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i) + g_i(t, e_{i1}x_1, \dots, e_{im}x_m), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где e_{ij} — бинарная переменная, принимающая значение 1, если j -я подсистема действует на i -ю подсистему, и значение 0 в противном случае. Начало координат взаимосвязанной системы называется коннективно (connective) асимптотически устойчивым, если оно асимптотически устойчиво для всех конфигураций соединений во взаимосвязанной системе, т. е. для всех возможных значений бинарных переменных e_{ij} . Предположим, что все условия теоремы 9.2 выполнены для неравенства (9.36), принимающего в этом случае вид

$$\|g_i(t, e_{i1}x_1, \dots, e_{im}x_m)\| \leq \sum_{j=1}^m e_{ij}\gamma_{ij}\phi_j(x_j).$$

Покажите, что начало координат коннективно асимптотически устойчиво.

9.28 ([49]) Выход $y(t)$ линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

должен отслеживать эталонное входное воздействие r . Рассмотрим интегральный регулятор

$$\dot{z} = r - Cx, \quad u = -F_1x - F_2z.$$

Предполагается, что состояние x может измеряться и матрицы F_1 и F_2 выбраны таким образом, что матрица

$$\begin{bmatrix} A - BF_1 & -BF_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

гурвицева.

- (а) Покажите, что если $r = \text{const}$, то $y(t) \rightarrow r$ при $t \rightarrow \infty$.
 (б) Исследуйте свойства устойчивости системы, если $r(t)$ является медленно меняющимся входным воздействием.

9.29 ([86]) Выход $y(t)$ нелинейной системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x)$$

должен отслеживать эталонное входное воздействие r . Рассмотрим интегральный регулятор

$$\dot{z} = r - h(x), \quad u = \gamma(x, z, r)$$

Предполагается, что состояние x может измеряться и функция γ выбрана таким образом, что замкнутая система

$$\dot{x} = f(x, \gamma(x, z, r)), \quad \dot{z} = r - h(x)$$

имеет экспоненциально устойчивую точку равновесия (\bar{x}, \bar{z}) и функции f , h и γ дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам.

- (а) Покажите, что если $r = \text{const}$ и начальное состояние $(x(0), z(0))$ достаточно близко к (\bar{x}, \bar{z}) , то $y(t) \rightarrow r$ при $t \rightarrow \infty$.
 (б) Исследуйте свойства устойчивости системы, если $r(t)$ является медленно меняющимся входным воздействием.

9.30 ([86]) Рассмотрим задачу слежения из примера 9.29, но предположим, что измерению доступен лишь выход системы $y = h(x)$. Рассмотрим интегральный контроллер с наблюдателем

$$\dot{z}_1 = f(z_1, u) + G(r)[y - h(z_1)], \quad \dot{z}_2 = r - y \quad \text{и} \quad u = \gamma(z_1, z_2, r).$$

Предположим, что γ и G выбраны таким образом, что замкнутая система имеет экспоненциально устойчивую точку равновесия $(\bar{x}, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$. Исследуйте свойства устойчивости системы, если

- (1) $r = \text{const}$. (2) $r(t)$ медленно меняющееся воздействие.

9.31 Рассмотрим линейную систему $\dot{x} = A(t)x$, где $\|A(t)\| \leq k$ и собственные значения матрицы $A(t)$ удовлетворяют $\operatorname{Re}[\lambda(t)] \leq -\sigma$ для всех $t \geq 0$. Предположим, что $\int_0^\infty \|A(t)\|^2 dt \leq \rho$. Покажите, что начало координат системы $\dot{x} = A(t)x$ экспоненциально устойчиво.

Глава 10

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И УСРЕДНЕНИЕ

Решения нелинейных дифференциальных уравнений удается получить в явном виде лишь для некоторых классов дифференциальных уравнений. В общем случае приходится довольствоваться лишь аппроксимацией этих решений. Существует две различные категории методов аппроксимации, которые доступны для использования инженерами и учеными в задачах анализа нелинейных систем: (1) численные методы получения решения и (2) асимптотические методы. В этой и следующей главах мы рассмотрим некоторые асимптотические методы анализа нелинейных дифференциальных уравнений.¹⁾

Рассмотрим уравнение состояния

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon)$$

где ε — «малый» скалярный параметр. Предположим, что при некоторых условиях это уравнение имеет решение $x(t, \varepsilon)$, определенное в явном виде. Уравнения этого типа возникают в различных приложениях. Целью асимптотического метода является получение аппроксимирующего решения $\tilde{x}(t, \varepsilon)$, такого что ошибка аппроксимации $x(t, \varepsilon) - \tilde{x}(t, \varepsilon)$ мала в некоторой норме при малой $|\varepsilon|$. При этом приближенное решение $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ должно быть представлено в терминах уравнений, которые проще исходного уравнения. С практической точки зрения важность асимптотических методов заключается в том, что они позволяют выявить внутренние структурные свойства, присущие исходному уравнению состояния при малой $|\varepsilon|$. В параграфе 10.1 мы рассмотрим

¹⁾ Численные методы решения дифференциальных уравнений не рассматриваются в этой книге, т. к. предполагается, что студенты знакомы с этими подходами из учебных курсов по дифференциальным уравнениям и численному анализу.

примеры, в которых асимптотические методы позволяют обнаружить слабое взаимодействие между изолированными подсистемами, а также исследовать роль слабой нелинейности, имеющейся в системе. Более важным аспектом использования асимптотических методов является то, что они позволяют исследовать системы, в которых присутствуют структуры с различными постоянными временем. Очень часто решение уравнения состояния демонстрирует поведение, характеризующееся тем, что некоторые переменные изменяются быстрее других, что приводит при рассмотрении подобных систем к разделению переменных на «быстрые» и «медленные». Методы усреднения, рассмотренные в этой главе, и методы сингулярных возмущений, которые будут рассмотрены в следующей главе, учитывают характер взаимодействия этих быстрых и медленных переменных.

В параграфе 10.1 представлен классический метод возмущений, используемый при нахождении приближенного решения в виде конечного ряда Тейлора для точного решения. Достоверность этого метода в асимптотике обосновывается для конечного интервала времени в параграфе 10.1, а для бесконечного — в параграфе 10.3. В параграфе исследуется автономная система, подвергающаяся воздействию слабого периодического возмущения. Результаты этих первых трех параграфов интересны не только сами по себе, но также и тем, что они представляют собой теоретический базис для метода усреднения. В параграфе 10.4 будет введен метод усреднения для простейшего случая, когда функция в правой части уравнения является периодической по времени. Этот вариант метода иногда называют методом «периодического усреднения». В параграфе 10.5 рассматривается применение метода усреднения для исследования периодических решений слабо нелинейной системы второго порядка. Наконец, более общая форма метода усреднения будет представлена в параграфе 10.6.

10.1. Метод возмущений

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \quad (10.1)$$

где $f : [t_0, t_1] \times D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow R^n$ — функция, «достаточно гладкая» по своим аргументам, заданная в области $D \subset R^n$. Условия гладкости будут конкретизированы по мере изложения. Предположим, что необходимо найти решение уравнение состояния (10.1) для заданного начального состояния

$$x(t_0) = \eta(\varepsilon), \quad (10.2)$$

которое может «гладко» зависеть от ε . Решение задачи (10.1) и (10.2) зависит от параметра ε и это подчеркивается введенными обозначениями для решения системы $x(t, \varepsilon)$. При использовании метода усреднения «малость» параметра ε используется при нахождении приближенного решения, которое аппроксимирует точное при малой величине $|\varepsilon|$.

Простейшие приближенные результаты могут быть получены, если положить $\varepsilon = 0$ в (10.1) и (10.2). Это приводит к номинальной (или невозмущенной) системе вида

$$\dot{x} = f(t, x, 0), \quad x(t_0) = \eta_0, \quad (10.3)$$

где $\eta_0 = \eta(0)$. Предположим, что эта задача имеет единственное решение $x_0(t)$, определенное на $[t_0, t_1]$ и $x_0(t) \in D$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Предположим также, что f непрерывна по (t, x, ε) и локально липшицева по (x, ε) равномерно по t ; функция η локально липшицева по ε для (t, x, ε) из $[t_0, t_1] \times D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Близость решений возмущенной системы к решениям невозмущенной системы следует из непрерывности решений по начальным данным и параметрам. В частности, из теоремы 3.5 следует, что существует положительная константа $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, такая что для всех $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ задача (10.1) и (10.2) имеет единственное решение $x(t, \varepsilon)$, определенное на $[t_0, t_1]$. Далее, из теоремы 3.4 следует, что существует положительная константа k , такая что

$$\|x(t, \varepsilon) - x_0(t)\| \leq k|\varepsilon|, \quad \forall |\varepsilon| < \varepsilon_1, \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (10.4)$$

Если ошибка аппроксимации удовлетворяет оценке (10.4), мы будем говорить, что эта ошибка имеет порядок $O(\varepsilon)$ и писать

$$x(t, \varepsilon) - x_0(t) = O(\varepsilon).$$

Это обозначение для порядка малости, которое будет часто использоваться на протяжении этой и следующей глав, определяется следующим образом.

Определение 10.1. $\delta_1(\varepsilon) = O(\delta_2(\varepsilon))$, если существуют положительные константы k и c , такие что

$$|\delta_1(\varepsilon)| \leq k|\delta_2(\varepsilon)|, \quad \forall |\varepsilon| < c$$

Пример 10.1.

- $\varepsilon^n = O(\varepsilon^m)$ для всех $n \geq m$, т. к.

$$|\varepsilon|^n = |\varepsilon|^m |\varepsilon|^{n-m} < |\varepsilon|^m, \quad \forall |\varepsilon| < 1.$$

- $\varepsilon^2/(0.5 + \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, т. к.

$$\left| \frac{\varepsilon^2}{0.5 + \varepsilon} \right| < \frac{1}{0.5 - c} |\varepsilon|^2, \quad \forall |\varepsilon| < c < 0.5.$$

- $1 + 2\varepsilon = O(1)$, т. к.

$$|1 + 2\varepsilon| < 1 + 2c, \quad \forall |\varepsilon| < c.$$

- $\exp(-c/\varepsilon)$, где c и ε — положительные константы, имеет порядок $O(\varepsilon^n)$ для любого положительного числа n , т. к.

$$\frac{e^{-c/\varepsilon}}{\varepsilon^n} \leq \left(\frac{n}{c}\right)^n e^{-n}, \forall \varepsilon > 0.$$

△

Что можно сказать о значении ошибки аппроксимации $x(t, \varepsilon) - x_0(t)$ при заданном значении ε , когда ошибка имеет порядок $O(\varepsilon)$? К сожалению, не существует прямого метода получения на основе информации о порядке величины $O(\varepsilon)$ численного значения величины ошибки. Если ошибка имеет порядок $O(\varepsilon)$, это означает, что ее норма меньше чем $k|\varepsilon|$ для некоторой положительной константы k , не зависящей от ε . Однако нам не известно значение k — оно может быть равно 1, 10, или любому другому положительному числу.¹⁾ Тот факт, что k не зависит от ε , гарантирует лишь то, что значение $k|\varepsilon|$ монотонно убывает при уменьшении $|\varepsilon|$. Поэтому, при достаточно малой $|\varepsilon|$ ошибка будет мала. Точнее говоря, задав некоторый допустимый предел δ , мы можем быть уверены в том, что норма ошибки будет меньше δ для всех $|\varepsilon| < \delta/k$. Если этот предел слишком мал для того, чтобы можно было получить решение для константы ε со значениями, требуемыми существом исследуемой задачи, необходимо увеличить степень достоверности приближенного решения с использованием аппроксимации более высоких порядков. Аппроксимация порядка $O(\varepsilon^2)$ будет приемлемой при допустимом пределе достоверности решения δ для всех $|\varepsilon| < \sqrt{\delta/k_2}$, аппроксимация порядка $O(\varepsilon^3)$ будет приемлемой для всех $|\varepsilon| < (\delta/k_3)^{1/3}$ и так далее. Несмотря на то, что константы k, k_2, k_3, \dots не обязательно должны быть равны, длины этих интервалов для ε увеличиваются, поскольку значение предела достоверности δ обычно меньше единицы. Другой подход к рассмотрению аппроксимации более высокого порядка заключается в следующем: для заданного «достаточно малого» значения ε ошибка порядка $O(\varepsilon^n)$ будет меньше ошибки порядка $O(\varepsilon^m)$, определенной для $m < n$, поскольку

$$\frac{k_1|\varepsilon|^n}{k_2|\varepsilon|^m} < 1, \forall |\varepsilon| < \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{1/(n-m)}.$$

Аппроксимации высокого порядка для решений задачи (10.1) и (10.2) могут быть получены непосредственными вычислениями, если функции f и η достаточно гладкие. Предположим, что f и η имеют при $(t, x, \varepsilon) \in$

¹⁾ Следует заметить, однако, что в хорошо сформулированной задаче на возмущения, в которой переменные нормализованы так, что переменные состояния, времени и параметр возмущения являются безразмерными, следует ожидать, что значение k будет не намного превышать единицу. В примере 10.4 мы рассмотрим подобную нормализацию. Другие примеры приведены в работах [98] и [141].

$\in [t_0, t_1] \times D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ непрерывные частные производные по (x, ε) до порядка N включительно. Для того, чтобы получить аппроксимацию высокого порядка для $x(t, \varepsilon)$, выпишем конечный ряд Тейлора

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t) \varepsilon^k + \varepsilon^N R_x(t, \varepsilon). \quad (10.5)$$

Далее необходимо выполнить две операции. Первое, необходимо вычислить члены x_0, x_1, \dots, x_{N-1} . Одновременно с этим будет показано, что эти члены хорошо определены. Второе, необходимо показать, что оставшийся член R_x также хорошо определен и ограничен на $[t_0, t_1]$. Тогда величина $\sum_{k=0}^{N-1} x_k(t) \varepsilon^k$ будет аппроксимацией $x(t, \varepsilon)$ порядка $O(\varepsilon^N)$ (N -го порядка). По теореме Тейлора¹⁾ требование гладкости для начального состояния $\eta(\varepsilon)$ гарантирует существование конечного ряда Тейлора для $\eta(\varepsilon)$, т. е.

$$\eta(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k \varepsilon^k + \varepsilon^N R_\eta(\varepsilon).$$

Тогда

$$x_k(t_0) = \eta_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Подставляя (10.5) в (10.1), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{x}_k(t) \varepsilon^k + \varepsilon^N \dot{R}_x(t, \varepsilon) &= f(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} h(t, \varepsilon) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k(t) \varepsilon^k + \varepsilon^N R_h(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (10.6)$$

где в качестве коэффициентов ряда Тейлора $h(t, \varepsilon)$ выступают функции от коэффициентов ряда Тейлора для $x(t, \varepsilon)$. Поскольку (10.6) выполнено для всех достаточно малых ε , оно должно выполняться тождественно по ε . Следовательно, коэффициенты при соответствующих степенях ε должны быть равны. Приравнивая эти коэффициенты, получаем систему уравнений, которым должны удовлетворять x_0, x_1 и так далее. Прежде чем выполнить этот шаг, мы должны определить коэффициенты ряда Тейлора для $h(t, \varepsilon)$. Член нулевого порядка $h_0(t)$ определяется равенством

$$h_0(t) = f(t, x_0(t), 0).$$

Приравнивая эту величину коэффициенту при ε^0 в (10.6), мы заключаем, что $x_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}_0 = f(t, x_0, 0), \quad x_0(t_0) = \eta_0,$$

¹⁾ См. [10, теорема 5-14].

которая, разумеется, представляет собой невозмущенную систему (10.3). Член первого порядка $h_1(t)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon) \right\} \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), 0) x_1(t) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t, x_0(t), 0). \end{aligned}$$

Приравнивая эту величину коэффициенту при ε^1 в (10.6), мы заключаем, что $x_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), 0) x_1 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t, x_0(t), 0), \quad x_1(t_0) = \eta_1.$$

Введем обозначения

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), 0), \quad g_1(t, x_0(t)) = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t, x_0(t), 0)$$

и перепишем уравнение для x_1 в виде

$$\dot{x}_1 = A(t)x_1 + g_1(t, x_0(t)), \quad x_1(t_0) = \eta_1$$

Это линейное уравнение имеет единственное решение, определенное на $[t_0, t_1]$.

Эта процедура может быть продолжена, в результате чего будут получены уравнения, которым удовлетворяют x_2, x_3 и так далее. Следует заметить, что для этого потребуется вычислять производные высоких порядков функции f по x , что, вообще говоря, может быть затруднительно. Нет смысла выписывать эти уравнения в общем случае, но для конкретной задачи это может быть сделано. Тем не менее, в целях выявления существа рассматриваемой проблемы, мы получим, рискуя утомить читателя, уравнение для x_2 . Коэффициент при второй степени в ряде Тейлора для $h(t, \varepsilon)$ определяется равенством

$$h_2(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} h(t, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} h(t, \varepsilon) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \varepsilon) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t, x, \varepsilon) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \varepsilon)[x_1(t) + 2\varepsilon x_2(t) + \dots] + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t, x, \varepsilon). \end{aligned}$$

В целях упрощения обозначений положим

$$\psi(t, x, \varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \varepsilon)x_1(t)$$

и вычислим вторую производную функции h по ε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} h(t, \varepsilon) &= \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x, \varepsilon) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \varepsilon)x_1(t) + \\ &+ 2 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \varepsilon)x_2(t) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t, x, \varepsilon) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}(t, x, \varepsilon) + \varepsilon[\cdot]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$h_2(t) = A(t)x_2(t) + g_2(t, x_0(t), x_1(t)),$$

где

$$\begin{aligned} g_2(t, x_0(t), x_1(t)) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x_0(t), 0)x_1(t) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), 0)x_1(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}(t, x_0(t), 0). \end{aligned}$$

Приравнивая в (10.6) коэффициенты при ε^2 , получаем

$$\dot{x}_2 = A(t)x_2 + g_2(t, x_0(t), x_1(t)), \quad x_2(t_0) = \eta_2.$$

Суммируя результаты, заключаем, что коэффициенты ряда Тейлора x_0, x_1, \dots, x_{N-1} могут быть получены как решения уравнений

$$\dot{x}_0 = f(t, x_0, 0), \quad x_0(t_0) = \eta_0, \quad (10.7)$$

$$\dot{x}_k = A(t)x_k + g_k(t, x_0(t), \dots, x_{k-1}(t)), \quad x_k(t_0) = \eta_k, \quad (10.8)$$

где $k = 1, 2, \dots, N-1$, $A(t)$ — матрица Якоби $[\partial f / \partial x]$, вычисленная при $x = x_0(t)$ и $\varepsilon = 0$; член $g_k(t, x_0(t), x_1(t), \dots, x_{k-1}(t))$ представляет собой полином относительно x_1, \dots, x_{k-1} с коэффициентами, зависящими от t и $x_0(t)$. Из предположения о том, что $x_0(t)$ определено на $[t_0, t_1]$, следует, что $A(t)$ определена на том же интервале и, следовательно, линейные уравнения (10.8) имеют единственные решения, определенные на $[t_0, t_1]$. Проиллюстрирует процедуру вычисления коэффициентов ряда Тейлора на примере системы второго порядка.

Пример 10.2. 10.2 Рассмотрим уравнение Ван дер Поля

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= \eta_1(\varepsilon), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2, & x_2(0) &= \eta_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

Предположим, что необходимо построить ряд Тейлора для $N = 3$. Пусть

$$x_i = x_{i0} + \varepsilon x_{i1} + \varepsilon^2 x_{i2} + \varepsilon^3 R_{x_i}, \quad i = 1, 2$$

и

$$\eta_i = \eta_{i0} + \varepsilon \eta_{i1} + \varepsilon^2 \eta_{i2} + \varepsilon^3 R_{\eta_i}, \quad i = 1, 2.$$

Подставляя ряды для x_1 и x_2 в уравнение состояния, получаем

$$\begin{aligned}\dot{x}_{10} + \varepsilon \dot{x}_{11} + \varepsilon^2 \dot{x}_{12} + \varepsilon^3 \dot{R}_{x_1} &= x_{20} + \varepsilon x_{21} + \varepsilon^2 x_{22} + \varepsilon^3 R_{x_1}, \\ \dot{x}_{20} + \varepsilon \dot{x}_{21} + \varepsilon^2 \dot{x}_{22} + \varepsilon^3 \dot{R}_{x_2} &= -x_{10} - \varepsilon x_{11} - \varepsilon^2 x_{12} - \varepsilon^3 R_{x_1} + \\ &\quad + \varepsilon [1 - (x_{10} + \varepsilon x_{11} + \varepsilon^2 x_{12} + \varepsilon^3 R_{x_1})^2] \times \\ &\quad \times (x_{20} + \varepsilon x_{21} + \varepsilon^2 x_{22} + \varepsilon^3 R_{x_2}).\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при ε^0 , получаем систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_{10} = x_{20}, \quad x_{10}(0) &= \eta_{10}, \\ \dot{x}_{20} = -x_{10}, \quad x_{20}(0) &= \eta_{20},\end{aligned}$$

представляющую собой невозмущенную систему при $\varepsilon = 0$. Далее, приравнивая коэффициенты при ε , получаем

$$\begin{aligned}\dot{x}_{11} = x_{21}, \quad x_{11}(0) &= \eta_{11}, \\ \dot{x}_{21} = -x_{11} + (1 - x_{10}^2)x_{20}, \quad x_{21}(0) &= \eta_{21},\end{aligned}$$

и выполняя аналогичную процедуру для ε^2 , получаем

$$\begin{aligned}\dot{x}_{12} = x_{22}, \quad x_{12}(0) &= \eta_{12}, \\ \dot{x}_{22} = -x_{12} + (1 - x_{10}^2)x_{21} - 2x_{10}x_{11}x_{20}, \quad x_{22}(0) &= \eta_{22}.\end{aligned}$$

Последние две системы уравнений представлены в виде (10.8) при $k = 1, 2$. \triangle

После вычисления членов x_0, x_1, \dots, x_{N-1} нашей следующей задачей является доказательство того, что $\sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k$ действительно является аппроксимацией $x(t, \varepsilon)$ порядка $O(\varepsilon^N)$. Рассмотрим ошибку аппроксимации

$$e = x - \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k. \quad (10.9)$$

Дифференцируя правую и левую части (10.9) по t и подставляя производные x и x_k из (10.1), (10.7) и (10.8), можно показать, что e удовлетворяет уравнению

$$\dot{e} = A(t)e + \rho_1(t, e, \varepsilon) + \rho_2(t, \varepsilon), \quad e(t_0) = \varepsilon^N R_\eta(\varepsilon), \quad (10.10)$$

где

$$\begin{aligned}\rho_1(t, e, \varepsilon) &= f(t, e + \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k, \varepsilon) - f(t, \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k, \varepsilon) - A(t)e, \\ \rho_2(t, \varepsilon) &= f(t, \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k, \varepsilon) - f(t, x_0(t), 0) - \sum_{k=1}^{N-1} [A(t)x_k(t) + g_k(\cdot)]\varepsilon^k.\end{aligned}$$

По предположению $x_0(t)$ ограничено и принадлежит D для всех $t \in [t_0, t_1]$. Следовательно, существуют $\lambda > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, такие что $x_0(t)$,

$\sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k$ и $e + \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k$ принадлежат компактному подмножеству D для всех $\|e\| \leq \lambda$ и $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$. Можно легко показать, что

$$\rho_1(t, 0, \varepsilon) = 0, \quad (10.11)$$

$$\|\rho_1(t, e_2, \varepsilon) - \rho_1(t, e_1, \varepsilon)\| \leq k_1 \|e_2 - e_1\|, \quad (10.12)$$

$$\|\rho_2(t, \varepsilon)\| \leq k_2 |\varepsilon|^N \quad (10.13)$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$, $e_1, e_2 \in B_\lambda$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ и некоторых положительных констант k_1 и k_2 . Уравнение (10.10) может рассматриваться как возмущение уравнения

$$\dot{e}_0 = A(t)e_0 + \rho_1(t, e_0, \varepsilon), \quad e_0(t_0) = 0, \quad (10.14)$$

которое имеет единственное решение $e_0(t, \varepsilon) \equiv 0$ при $t \in [t_0, t_1]$. Из теоремы 3.5 следует, что (10.10) имеет единственное решение, определенное на $[t_0, t_1]$ для достаточно малого $|\varepsilon|$. Кроме того, из теоремы 3.4 следует, что

$$\|e(t, \varepsilon)\| = \|e(t, \varepsilon) - e_0(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^N).$$

Полученные результаты могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 10.1. Предположим, что

- f и ее частные производные по (x, ε) до порядка N включительно но непрерывны по (t, x, ε) при $(t, x, \varepsilon) \in [t_0, t_1] \times D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$;
- η и ее производные до порядка N включительно непрерывны при $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$;
- номинальная система (10.3) имеет единственное решение $x_0(t)$, определенное на $[t_0, t_1]$ и $x_0(t) \in D$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Тогда существует $\varepsilon^* > 0$, такое что для любого $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ задача (10.1) и (10.2) имеет единственное решение $x(t, \varepsilon)$, определенное на $[t_0, t_1]$ и удовлетворяющее

$$x(t, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k = O(\varepsilon^N).$$

При аппроксимации $x(t, \varepsilon)$ функцией $x_0(t)$ нам необходимо знать значение параметра ε , однако это может быть невозможно, поскольку этот параметр часто представляет собой отклонение параметров системы от их номинальных значений. При использовании аппроксимации высокого порядка $\sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k$ при $N \geq 2$, нам также необходимо знать значение ε для того, чтобы построить аппроксимирующий ряд, но в практических ситуациях при вычислении членов x_1, x_2 и так далее это значение не требуется. С учетом того, что для построения аппроксимирующего ряда Тейлора нам необходимо знать ε , прежде, чем приступить к решению задачи, следует сравнить вычислительную трудоемкость процедуры аппроксимации решения с использованием ряда Тейлора с трудоемкостью нахождения точного решения. Точное решение $x(t, \varepsilon)$ может быть получено путем решения нелинейного

уравнения состояния (10.1), а приближенное решение — путем решения нелинейного уравнения состояния (10.7) и нескольких линейных уравнений (10.8), число которых зависит от порядка исследуемой системы. Поскольку в обоих случаях необходимо решать нелинейное уравнение состояния порядка n , можно поставить вопрос: Каков выигрыш мы получим, решая (10.7), вместо (10.1)? Одной из ситуаций, когда аппроксимация решения с использованием ряда Тейлора является более предпочтительным способом решения задачи, является случай нахождения решения для нескольких значений ε . При использовании аппроксимации рядом Тейлора уравнения (10.7) и (10.8) решаются только один раз, после чего строятся различные ряды Тейлора, соответствующие различным значениям ε . Кроме этого специального случая необходимости нахождения решения для нескольких значений ε , подход с использованием рядов Тейлора представляется эффективным в ситуациях, когда

- невозмущенное уравнение состояния (10.7) существенно проще зависящего от ε уравнения состояния (10.1), и
- ε настолько мала, что приемлемая точность аппроксимации может быть достигнута при небольшом количестве членов ряда Тейлора.

В большинстве инженерных приложений, использующих метод возмущений, вполне адекватные аппроксимации могут быть получены при $N = 2$ или 3. Более того, если положить $\varepsilon = 0$, это существенно упрощает уравнение состояния. В следующих двух примерах мы увидим, что полагая $\varepsilon = 0$, мы можем существенно уменьшить сложность уравнения состояния. В первом примере мы рассмотрим уравнение Ван дер Поля из примера 10.2, которым может быть описан широкий класс «слабо нелинейных систем», становящихся линейными при $\varepsilon = 0$. В этом случае для построения ряда Тейлора необходимо лишь решить линейные уравнения. Во втором примере мы рассмотрим взаимосвязанную систему, состоящую их подсистем с «слабыми» связями (ε -связями). При $\varepsilon = 0$ система декомпозируется на независимые подсистемы меньшего порядка. При построении аппроксимирующего ряда Тейлора мы всегда решаем независимые системы меньшего порядка, что может быть проще решения исходного уравнения высокого порядка (10.1).

Пример 10.3. Предположим, что необходимо решить уравнение Ван дер Поля

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= 1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2, & x_2(0) &= 0\end{aligned}$$

на интервале времени $[0, \pi]$. Положим $\varepsilon = 0$ и получим линейное невозмущенное уравнение

$$\begin{aligned}\dot{x}_{10} &= x_{20}, & x_{10}(0) &= 1, \\ \dot{x}_{20} &= -x_{10}, & x_{20}(0) &= 0,\end{aligned}$$

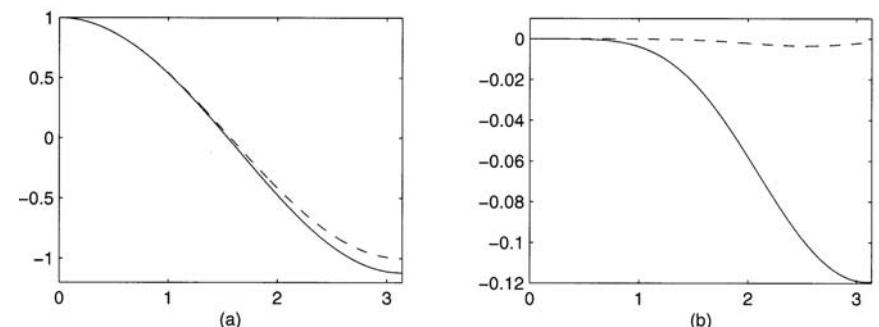


Рис. 10.1. К примеру 10.3. При $\varepsilon = 0.1$: (а) $x_1(t, \varepsilon)$ (непрерывная линия) и $x_{10}(t)$ (пунктирная линия), (б) $x_1(t, \varepsilon) - x_{10}(t)$ (непрерывная линия) и $x_1(t, \varepsilon) - x_{10}(t) - \varepsilon x_{11}(t)$ (пунктирная линия).

решение которого имеет вид

$$x_{10}(t) = \cos t, \quad x_{20}(t) = -\sin t.$$

Все предположения теоремы 10.1 выполнены и мы можем заключить, что ошибка аппроксимации $x(t, \varepsilon) - x_0(t)$ имеет порядок $O(\varepsilon)$. Вычислив численно $x(t, \varepsilon)$ при трех различных значениях ε и используя

$$E_0 = \max_{0 \leq t \leq \pi} \|x(t, \varepsilon) - x_0(t)\|_2$$

в качестве меры ошибки аппроксимации, находим $E_0 = 0.0112$, 0.0589 и 0.1192 при $\varepsilon = 0.01$, 0.05 и 0.1 , соответственно. Полученные значения показывают, что ошибка ограничена при $\varepsilon \leq 0.1$ величиной 1.2ε . На рисунке 10.1(а) показаны точная и приближенная траектории первого компонента вектора состояния при $\varepsilon = 0.1$. Предположим, что необходимо увеличить точность аппроксимации при $\varepsilon = 0.1$. В примере 10.2 было показано, что x_{11} и x_{21} удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_{11} &= x_{21}, & x_{11}(0) &= 0, \\ \dot{x}_{21} &= -x_{11} - (1 - \cos^2 t) \sin t, & x_{21}(0) &= 0,\end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned}x_{11}(t) &= -\frac{9}{32} \sin t - \frac{1}{32} \sin 3t + \frac{3}{8} t \cos t, \\ x_{21}(t) &= \frac{3}{32} \cos t - \frac{3}{32} \cos 3t - \frac{3}{8} t \sin t.\end{aligned}$$

Из теоремы 10.1 следует, что аппроксимация $x_0(t) + \varepsilon x_{11}(t)$ имеет порядок $O(\varepsilon^2)$ и близка к точному решению при достаточно малом ε . Для того, чтобы сравнить приближенное решение с точным при $\varepsilon = 0.1$, вычислим

$$E_1 = \max_{0 \leq t \leq \pi} \|x(t, 0.1) - x_0(t) - 0.1x_{11}(t)\|_2 = 0.0057.$$

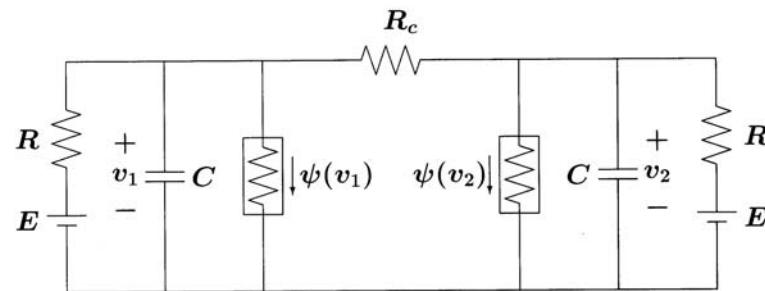


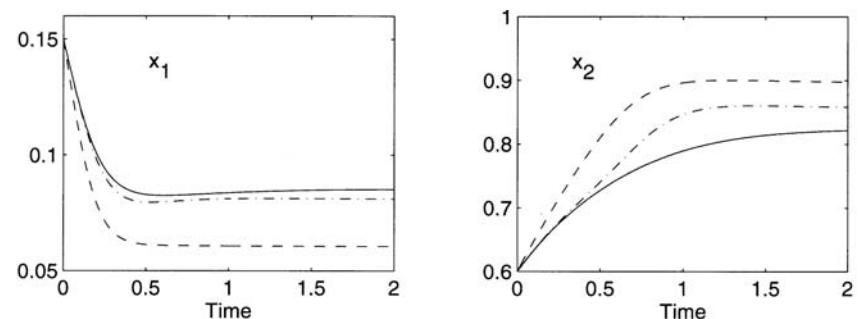
Рис. 10.2. Электрическая цепь в примере 10.4.

Таким образом, что ошибка аппроксимации уменьшилась почти на порядок. На рисунке 10.1(b) показаны ошибки аппроксимации первого компонента вектора состояния для аппроксимации первого порядка x_0 и аппроксимации второго порядка $x_0 + \varepsilon x_1$ при $\varepsilon = 0.1$. \triangle

Пример 10.4. В состав показанной на рисунке 10.2 электрической цепи входят нелинейные резисторы с I - V -характеристикой $i = \psi(v)$. Дифференциальные уравнения для напряжений на конденсаторах имеют вид

$$\begin{aligned} C \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{R}(E - v_1) - \psi(v_1) - \frac{1}{R_c}(v_1 - v_2), \\ C \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{R}(E - v_2) - \psi(v_2) - \frac{1}{R_c}(v_2 - v_1). \end{aligned}$$

Электрическая цепь имеет два RC -контура, соединенных через резистор R_c . Если R_c «относительно велико», связь между этими двумя контурами становится «слабой». В частности, если $R_c = \infty$, эти два контура становятся полностью независимыми. Рассматриваемая цепь представляет собой систему с ε -связью, в которой связь между двумя контурами может быть параметризована малым параметром ε . На первый взгляд в качестве параметра ε следует выбрать $\varepsilon = 1/R_c$. Действительно, при таком выборе перекрестные члены в вышеприведенных уравнениях оказываются умноженными на ε . Однако в этом случае параметр ε становится зависимым от абсолютной величины физического параметра, значение которого вне зависимости то того, мало оно или велико, не представляет какого-либо самостоятельного смысла без одновременного учета значений других физических параметров системы. В хорошо сформулированной задаче с возмущениями параметр ε должен быть выбран в виде отношения физических параметров, и это отношение должно быть действительно «мало» по смыслу задачи. Для того, чтобы сделать именно такой осмысленный выбор параметра ε , обычно сначала выбирают переменные состояния и/или независимую переменную (время) так, чтобы эти переменные были безразмерными величинами. В рассматриваемом примере очевидным

Рис. 10.3. К примеру 10.4: точное решение (непрерывная линия), аппроксимация первого порядка (пунктирная линия) и аппроксимация второго порядка (штрихпунктирная линия) при $\varepsilon = 0.3$.

выбором переменных состояния являются величины v_1 и v_2 . Однако вместо этого, мы масштабируем их так, чтобы экстремальные значения масштабированных переменных были близки к ± 1 . Вследствие того, что в рассматриваемой задаче контуры одинаковы и связаны между собой слабой связью, масштабирующий коэффициент α для обеих переменных состояния должен быть один и тот же. Определим переменные состояния следующим образом: $x_1 = v_1/\alpha$ и $x_2 = v_2/\alpha$. Выбрав безразмерное время $\tau = t/RC$, получаем с учетом того, что $dx/dt = \dot{x}$, уравнение состояния рассматриваемой системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{E}{\alpha} - x_1 - \frac{R}{\alpha}\psi(\alpha x_1) - \frac{R}{R_c}(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 &= \frac{E}{\alpha} - x_2 - \frac{R}{\alpha}\psi(\alpha x_2) - \frac{R}{R_c}(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Теперь видно, что в качестве малого параметра ε разумно выбрать величину R/R_c . Предположим, что $R = 1.5 \times 10^3 \Omega$, $E = 1.2V$ и в качестве нелинейных резисторов используются туннельные диоды с

$$\psi(v) = 10^{-3} \times (17.76v - 103.79v^2 + 229.62v^3 - 226.31v^4 + 83.72v^5).$$

Пусть $\alpha = 1$. Тогда уравнения состояния принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1.2 - x_1 - h(x_1) - \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 &= 1.2 - x_2 - h(x_2) - \varepsilon(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

где $h(v) = 1.5 \times 10^3 \times \psi(v)$. Предположим, что необходимо решить это уравнение с начальными данными

$$x_1(0) = 0.15; \quad x_2(0) = 0.6.$$

Полагая $\varepsilon = 0$, получаем развязанные уравнения

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1.2 - x_1 - h(x_1), & x_1(0) &= 0.15, \\ \dot{x}_2 &= 1.2 - x_2 - h(x_2), & x_2(0) &= 0.6,\end{aligned}$$

которые могут быть решены независимо друг от друга. Пусть $x_{10}(t)$ и $x_{20}(t)$ — соответствующие решения. Из теоремы 10.1 следует, что при достаточно малом параметре ε эти решения представляют собой аппроксимации точного решения порядка $O(\varepsilon)$. Для того, чтобы получить аппроксимацию порядка $O(\varepsilon^2)$, выпишем уравнения для x_{11} и x_{21} :

$$\begin{aligned}\dot{x}_{11} &= -[1 + h'(x_{10}(t))]x_{11} - [x_{10}(t) - x_{20}(t)], & x_{11}(0) &= 0, \\ \dot{x}_{21} &= -[1 + h'(x_{20}(t))]x_{21} - [x_{20}(t) - x_{10}(t)], & x_{21}(0) &= 0,\end{aligned}$$

где $h'(\cdot)$ — производная $h(\cdot)$. На рисунке 10.3 показано точное решение, а также его аппроксимации первого и второго порядков при $\varepsilon = 0.3$. \triangle

Серьезным ограничением теоремы 10.1 является то, что оценка ошибки аппроксимации порядка $O(\varepsilon^N)$ верна лишь на конечных (попарядка $O(1)$) интервалах времени $[t_0, t_1]$. Она неверна, например, на интервалах $[t_0, T/\varepsilon]$ и на бесконечном интервале $[t_0, \infty)$. Это обусловлено тем, что константа k в оценке $k|\varepsilon|^N$ зависит от t_1 и, следовательно, величина этой оценки неограниченно возрастает с увеличением t_1 . Появление константы k в выражении для оценки обусловлено тем, что мы воспользовались теоремой 3.4. В частности, если обратится к формулировке этой теоремы, можно убедиться в том, что развернутое выражение для этой оценки будет содержать член $\exp(Lt_1)$. В следующем разделе мы увидим, как можно использовать информацию об устойчивости системы для того, чтобы обобщить результаты теоремы 10.1 на случай бесконечного интервала времени. Если определенные условия устойчивости не выполняются, аппроксимация может оказаться неверной при больших t , даже если она верна на интервалах времени порядка $O(1)$. На рисунке 10.4 показаны точные и приближенные решения уравнения Ван дер Поля из примера 10.3 на большом интервале времени при $\varepsilon = 0.1$. При большом t нельзя сказать, что ошибка $x_1(t, \varepsilon) - x_{10}(t)$ имеет порядок $O(\varepsilon)$. Более того, ошибка $x_1(t, \varepsilon) - x_{10}(t) - \varepsilon x_{11}(t)$ неограниченно возрастает вследствие того, что компонента $x_{11}(t)$ содержит член $t \cos t$.

10.2. Метод возмущений на бесконечном интервале времени

Результаты теоремы 10.1 могут быть перенесены на бесконечный интервал времени $[t_0, \infty)$ при выполнении некоторых дополнительных условий на свойства устойчивости рассматриваемой системы. В следующей теореме будет предполагаться, что номинальная система (10.7) имеет экспоненциально устойчивую точку равновесия в начале координат. При этом соответствующая функция Ляпунова будет ис-

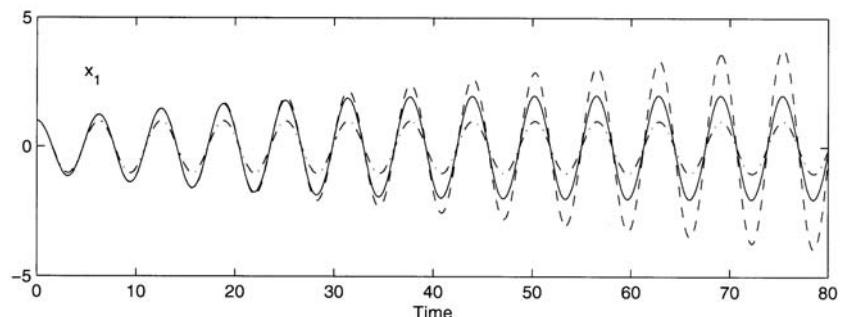


Рис. 10.4. Точное решение (непрерывная линия), аппроксимация первого порядка (пунктирная линия) и аппроксимация второго порядка (штрихпунктирная линия) для уравнения Ван дер Поля на большом интервале времени.

пользоваться для оценки области притяжения. Не умаляя общности можно считать, что точка равновесия расположена в начале координат, поскольку начало координат может быть всегда перемещено в эту точку путем соответствующей замены координат.

Теорема 10.2. Пусть $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая начало координат. Предположим, что

- f и ее частные производные по (x, ε) до порядка N включительно непрерывны и ограничены для $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D_0 \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ для любого компактного множества $D_0 \subset D$; если $N = 1$, то $[\partial f / \partial x](t, x, \varepsilon)$ липшицева по (x, ε) равномерно по t ;
- η и ее производные до порядка N включительно непрерывны для $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$;
- начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия номинальной системы (10.7);
- существует функция Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 4.9 для номинальной системы (10.7) при $(t, x) \in [0, \infty) \times D$; $\{W_1(x) \leq c\}$ — компактное подмножество множества D .

Тогда для любого компактного множества $\Omega \subset \{W_2(x) \leq \rho c, 0 < \rho < 1\}$ существует положительная константа ε^* , такая что для всех $t_0 \geq 0, \eta_0 \in \Omega$ и $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ уравнения (10.1) и (10.2) имеют единственное решение $x(t, \varepsilon)$ равномерно ограниченное на $[t_0, \infty)$ и

$$x(t, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t) \varepsilon^k = O(\varepsilon^N)$$

где условие $O(\varepsilon^N)$ выполняется равномерно по t для всех $t \geq t_0$.

Если номинальная система (10.7) автономна, то в качестве множества Ω в теореме 10.2 можно выбрать любое компактное подмножество области притяжения начала координат. Это утверждение является следствием обратной теоремы Ляпунова 4.17, т. к. для функции Ляпунова

нова $V(x)$ из формулировки теоремы выполнено свойство, заключающееся в том, что любое компактное подмножество области притяжения может быть включено во внутренность компактного множества вида $\{V(x) \leq c\}$.

Доказательство теоремы 10.2: Применяя теорему 9.1, можно показать, что существует $\varepsilon_1 > 0$, такая что для всех $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ решение $x(t, \varepsilon)$ равномерно ограничено и $x(t, \varepsilon) - x_0(t)$ имеет порядок $O(\varepsilon)$ равномерно по t для всех $t \geq t_0$. Также очевидно, что при $\eta_0 \in \Omega$ функция $x_0(t)$ равномерно ограничена и $\lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t) = 0$. Рассмотрим линейные уравнения (10.8). Из теоремы 5.1 (об устойчивости «ограниченный вход – ограниченный выход») следует, что решение системы (10.8) будет равномерно ограничено, если начало координат системы $\dot{z} = A(t)z$ экспоненциально устойчиво и выступающая в качестве входа системы функция g_k ограничена. Функция g_k представляет собой полином по x_1, \dots, x_{k-1} с коэффициентами, зависящими от t и $x_0(t)$. Зависимость от t обусловлена зависимостью частных производных f от t , которые ограничены на компактных подмножествах множества D . Поскольку $x_0(t)$ ограничена, коэффициенты полинома также ограничены для всех $t \geq t_0$. Следовательно, ограниченность g_k следует из ограниченности x_1, \dots, x_{k-1} . Матрица $A(t)$ определяется равенством

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), 0),$$

где $x_0(t)$ – решение номинальной системы (10.7). Покажем, что для любого решения $x_0(t)$, начинающегося в множестве Ω , экспоненциальная устойчивость начала координат как точки равновесия системы (10.7) гарантирует экспоненциальную устойчивость начала координат системы $\dot{z} = A(t)z$. Для того чтобы убедиться в этом, положим

$$A_0(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0, 0)$$

и запишем

$$A(t) = A_0(t) + [A(t) - A_0(t)] \stackrel{\text{def}}{=} A_0(t) + B(t).$$

Таким образом, линейная система $\dot{z} = A(t)z$ может рассматриваться как возмущение системы $\dot{y} = A_0(t)y$. Поскольку $[\partial f / \partial x](t, x, 0)$ липшицева по x равномерно по t , имеем

$$\|B(t)\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0, 0) \right\| \leq L \|x_0(t)\|.$$

С другой стороны, с учетом экспоненциальной устойчивости начала координат системы (10.7) и с использованием теоремы 4.15 можно показать, что начало координат линейной системы $\dot{y} = A_0(t)y$ экспоненциально устойчиво. Поэтому, аналогично тому, как это было сделано в примере 9.6, мы можем показать с учетом $\lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t) = 0$, что начало координат линейной системы $\dot{z} = A(t)z$ экспоненциально устойчиво.

Поскольку $\|x_0(t)\|$ ограничена и $g_1(t, x_0(t)) = [\partial f / \partial \varepsilon](t, x_0(t), 0)$, функция g_1 ограничена для всех $t \geq t_0$. Следовательно, из теоремы 5.1 следует, что $x_1(t)$ ограничена. Аналогично можно показать что $x_2(t), \dots, x_{k-1}(t)$ также ограничены.

Таким образом, мы показали, что точное решение $x(t, \varepsilon)$ и приближенное решение $\sum_{k=0}^{N-1} x_k(t) \varepsilon^k$ равномерно ограничены на $[t_0, \infty)$ при достаточно малой $|\varepsilon|$. Для того, чтобы завершить анализ, нам необходимо оценить ошибку $e = x - \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t) \varepsilon^k$. Это может быть сделано аналогично тому, как это было сделано в параграфе 10.1. Ошибка удовлетворяет (10.10), где ρ_1 и ρ_2 удовлетворяют (10.11), (10.13) и

$$\left\| \frac{\partial \rho_1}{\partial e}(t, e, \varepsilon) \right\| \leq k_1 (\|e\| + |\varepsilon|)$$

для всех $(t, e, \varepsilon) \in [t_0, \infty) \times B_\lambda \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ при достаточно малой ε_1 . Уравнение ошибки (10.10) может рассматриваться как возмущение системы $\dot{e} = A(t)e$, где возмущение удовлетворяет неравенствам

$$\|\rho_1(t, e, \varepsilon) + \rho_2(t, \varepsilon)\| \leq k_1 (\|e\| + |\varepsilon|) \|e\| + k_2 |\varepsilon|^N \leq k_1 (\lambda + |\varepsilon|) \|e\| + k_2 |\varepsilon|^N.$$

С учетом того, что $\|e(t_0, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^N)$, с использованием леммы 9.4 заключаем, что для достаточно малой $|\varepsilon|$ выполнено $\|e(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^N)$ для всех $t \geq t_0$. \square

Пример 10.5. Электрическая цепь из примера 10.4 описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1.2 - x_1 - h(x_1) - \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 &= 1.2 - x_2 - h(x_2) - \varepsilon(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

где

$$h(v) = 1.5(17.76v - 103.79v^2 + 229.62v^3 - 226.31v^4 + 83.72v^5).$$

При $\varepsilon = 0$ невозмущенная система распадается на две изолированных подсистемы первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1.2 - x_1 - h(x_1), \\ \dot{x}_2 &= 1.2 - x_2 - h(x_2). \end{aligned}$$

Можно показать, что каждая из подсистем имеет три точки равновесия: 0.063, 0.285, и 0.884. Матрица Якоби $-1 + h'(x_i)$ отрицательна при $x_i = 0.063$ и $x_i = 0.884$ и положительна при $x_i = 0.285$. Следовательно, точки равновесия в 0.063 и 0.884 экспоненциально устойчивы, а точка равновесия в 0.285 неустойчива. При совместном функционировании подсистем единая система второго порядка имеет девять точек равновесия. Лишь четыре из них экспоненциально устойчивы: (0.063, 0.063), (0.063, 0.884), (0.884, 0.063) и (0.884, 0.884). Из теоремы 10.2 следует, что если начальное состояние $x(0)$ принадлежит компактному подмножеству области притяжения одной из этих точек равновесия,

приближенное решение, найденное в примере 10.4, будет верно для всех $t \geq 0$. На рисунке 10.3 показаны результаты компьютерного моделирования, проведенного на интервале времени, достаточно продолжительном для того, чтобы решение системы стало установившимся. В рассмотренном частном случае в качестве начального состояния была взята точка $(0.15, 0.6)$, принадлежащая области притяжения точки равновесия $(0.063, 0.884)$. \triangle

Полученная в теореме 10.2 оценка порядка $O(\varepsilon^N)$ верна лишь в тех случаях, когда начало координат экспоненциально устойчиво. Этот результат не обязательно остается верным в случае, когда имеет место не экспоненциальная, но асимптотическая устойчивость. Это утверждение иллюстрируется следующим примером.

Пример 10.6. Рассмотрим систему первого порядка

$$\dot{x} = -x^3 + \varepsilon x$$

и предположим, что $\varepsilon > 0$. Начало координат невозмущенной системы

$$\dot{x} = -x^3$$

глобально асимптотически устойчиво, но не является экспоненциально устойчивым. (См. пример 4.23.) Возмущенная система имеет три точки равновесия в $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$. Точка равновесия $x = 0$ неустойчива, а другие две точки равновесия асимптотически устойчивы. Находя решения этих двух систем при одном и том же положительном начальном состоянии $x(0) = a$, можно показать, что

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow \sqrt{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x_0(t) \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$. Поскольку порядок $\sqrt{\varepsilon}$ не равен $O(\varepsilon)$, порядок ошибки аппроксимации $x(t, \varepsilon) - x_0(t)$ также не равен $O(\varepsilon)$ для всех $t \geq 0$. Тем не менее, так как начало координат асимптотически устойчиво, мы можем получить некоторые результаты об асимптотическом поведении аппроксимации при $t \rightarrow \infty$, но они будут более слабые по сравнению с утверждением теоремы 10.2. Поскольку начало координат невозмущенной системы асимптотически устойчиво, решение $x_0(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Иными словами, для любой $\delta > 0$ существует $T_1 > 0$, такой что

$$\|x_0(t)\| < \delta/2, \quad \forall t \geq T_1.$$

Решения возмущенной системы предельно ограничены с границей, которая уменьшается с уменьшением ε . Поэтому для любой $\delta > 0$ существуют $T_2 > 0$ и $\varepsilon^* > 0$, такие что

$$\|x(t, \varepsilon)\| < \delta/2, \quad \forall t \geq T_2, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon^*.$$

С учетом этих двух оценок мы можем заключить, что для любой $\delta > 0$ ошибка аппроксимации удовлетворяет

$$\|x(t, \varepsilon) - x_0(t)\| < \delta, \quad \forall t \geq T, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon^*,$$

где $T = \max\{T_1, T_2\}$. Из теоремы 10.1 следует, что на интервале времени $[0, T]$ порядка $O(1)$ ошибка аппроксимации имеет порядок $O(\varepsilon)$. Поэтому мы можем сказать, что для любой $\delta > 0$ существует $\varepsilon^{**} > 0$, такая что

$$\|x(t, \varepsilon) - x_0(t)\| < \delta, \quad \forall t \in [0, \infty), \quad \forall \varepsilon < \varepsilon^{**}.$$

Последнее неравенство эквивалентно тому, что ошибка аппроксимации стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по t для всех $t \geq 0$ и этот результат в общем случае является наиболее сильным результатом, который может быть получен при отсутствии экспоненциальной устойчивости. Разумеется, в этом конкретном примере мы можем получить $x_0(t)$ и $x(t, \varepsilon)$ в явном виде и показать, что в действительности ошибка аппроксимации имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$. \triangle

10.3. Периодические возмущения автономных систем

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon), \quad (10.15)$$

где f , g и их первые частные производные по x непрерывны и ограничены для всех $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D_0 \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ для любого компактного множества $D_0 \subset D$, где $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая начало координат. Предположим, что начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия автономной системы

$$\dot{x} = f(x), \quad (10.16)$$

что эквивалентно¹⁾ тому, что матрица $A = [\partial f / \partial x](0)$ является гурвицовой. Поскольку g ограничена, мы можем использовать теорему 4.14 и лемму 9.2 и показать, что существуют $r > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, такие что для всех $\|x(0)\| \leq r$ и $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ решение системы (10.15) равномерно предельно ограничено с предельной границей, пропорциональной величине $|\varepsilon|$. Другими словами, при $t \rightarrow \infty$ все решения стремятся к $O(\varepsilon)$ -окрестности начала координат. Это утверждение остается верным для любой ограниченной g . В этом параграфе мы исследуем поведение системы в этой $O(\varepsilon)$ -окрестности, если g является T -периодической по t , т. е.

$$g(t + T, x, \varepsilon) = g(t, x, \varepsilon), \quad \forall (t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0].$$

В частности, мы исследуем вопрос о существовании T -периодического решения в $O(\varepsilon)$ -окрестности начала координат.

Пусть $\phi(t; t_0, x_0, \varepsilon)$ — решение (10.15), начинающееся в (t_0, x_0) , т. е. $x_0 = \phi(t_0; t_0, x_0, \varepsilon)$. Для всех $\|x\| < r$ определим отображение $P_\varepsilon(x)$

$$P_\varepsilon(x) = \phi(T; 0, x, \varepsilon).$$

¹⁾ Эквивалентность следует из теоремы 4.15.

Т. е. $P_\varepsilon(x)$ — состояние системы в момент времени T , имеющей начальное состояние x в нулевой момент времени. Это отображение играет ключевую роль при исследовании вопроса о существовании периодических решений системы (10.15).¹⁾

Лемма 10.1. В условиях принятых предположений уравнение (10.15) имеет T -периодическое решение, если и только если уравнение

$$x = P_\varepsilon(x) \quad (10.17)$$

имеет решение.

Доказательство: Поскольку g является T -периодической по t , решение (10.15) инвариантно относительно сдвига времени на величину, кратную T . В частности,

$$\phi(t+T; T, x, \varepsilon) = \phi(t; 0, x, \varepsilon), \quad \forall t \geq 0. \quad (10.18)$$

Это устанавливается с использованием замены времени $t \mapsto \tau = t - T$, которая приводит к системе

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x) + \varepsilon g(\tau + T, x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon g(\tau, x, \varepsilon).$$

С другой стороны, из единственности решения следует, что

$$\phi(t+T; 0, x, \varepsilon) = \phi(t+T; T, \phi(T; 0, x, \varepsilon), \varepsilon), \quad \forall t \geq 0. \quad (10.19)$$

Для того, чтобы доказать достаточность, положим

$$p_\varepsilon = P_\varepsilon(p_\varepsilon) = \phi(T; 0, p_\varepsilon, \varepsilon).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \phi(t+T; 0, p_\varepsilon, \varepsilon) &= \phi(t+T; T, \phi(T; 0, p_\varepsilon, \varepsilon), \varepsilon) = \\ &= \phi(t+T; T, p_\varepsilon, \varepsilon) = \\ &= \phi(t; 0, p_\varepsilon, \varepsilon), \end{aligned} \quad (10.20)$$

где первое равенство следует из (10.19), а последнее — из (10.18). Уравнение (10.20) показывает, что решение, начинающееся в $(0, p_\varepsilon)$, является T -периодическим. Для того, чтобы доказать необходимость, предположим, что $\bar{x}(t)$ — T -периодическое решение (10.15). Пусть $y = \bar{x}(0)$. Тогда

$$\phi(t+T; 0, y, \varepsilon) = \phi(t; 0, y, \varepsilon), \quad \forall t \geq 0.$$

При $t = 0$ получаем равенство

$$\phi(T; 0, y, \varepsilon) = \phi(0; 0, y, \varepsilon) = y,$$

¹⁾ Это отображение может быть интерпретировано [см. 70, параграф 4.1] как отображение Пуанкаре для автономной системы размерности $(n+1)$

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(\theta, x, \varepsilon), \quad \dot{\theta} = 1.$$

из которого следует, что y является решением (10.17). \square

Лемма 10.2. В условиях принятых предположений существуют положительные константы k и ε_2 , такие что (10.17) имеет единственное решение в $\|x\| < k|\varepsilon|$ для всех $|\varepsilon| < \varepsilon_2$.

Доказательство: При $\varepsilon = 0$, $\phi(t; 0, x, 0)$ является решением невозмущенной системы (10.16), начинающимся в $(0, x)$. Поскольку $x = 0$ — точка равновесия для (10.16), $0 = \phi(t; 0, 0, 0)$ для всех $t \geq 0$. Следовательно,

$$P_0(0) = \phi(T; 0, 0, 0) = 0.$$

Из теоремы о неявной функции следует, что если матрица Якоби

$$J = I - \left. \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial x} \right|_{x=0, \varepsilon=0}$$

невырождена, то существует положительная константа ε_2 , такая что уравнение (10.17) имеет единственное решение p_ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_2$. Невырожденность матрицы Якоби устанавливается следующим образом. Напомним, что решение $\phi(t; 0, x, \varepsilon)$ определяется равенством

$$\phi(t; 0, x, \varepsilon) = x + \int_0^t [f(\phi(\tau; 0, x, \varepsilon)) + \varepsilon g(\tau, \phi(\tau; 0, x, \varepsilon), \varepsilon)] d\tau.$$

Дифференцируя по x , получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(t; 0, x, \varepsilon) = I + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot) \frac{\partial \phi}{\partial x}(\cdot) + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x}(\cdot) \frac{\partial \phi}{\partial x}(\cdot) \right] d\tau.$$

Пусть

$$U(t) = \left. \frac{\partial}{\partial x} \phi(t; 0, x, \varepsilon) \right|_{x=0, \varepsilon=0}.$$

Тогда

$$U(t) = I + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(0) U(\tau) d\tau = I + \int_0^t A U(\tau) d\tau$$

и

$$\frac{d}{dt} U(t) = AU(t), \quad U(0) = I.$$

Таким образом, $U(t) = \exp(At)$ и, следовательно,

$$I - \left. \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial x} \right|_{x=0, \varepsilon=0} = I - \exp(AT).$$

Поскольку A гурвицева, все собственные значения $\exp(AT)$ расположены строго внутри единичной окружности.¹⁾ Тогда J невырождена и, следовательно, (10.17) имеет единственное решение p_ε , $\forall |\varepsilon| < \varepsilon_2$. С другой стороны, т. к. при $t \rightarrow \infty$ все решения (10.15) стремятся к $O(\varepsilon)$ -окрестности начала координат, должно быть справедливо то, что p_ε имеет порядок $O(\varepsilon)$, поскольку при $t \rightarrow \infty$ соответствующее периодическое решение проходит через p_ε бесконечно много раз. \square

Теперь становится очевидно, что при достаточно малой ε возмущенная система (10.15) имеет T -периодическое решение в $O(\varepsilon)$ -окрестности начала координат. В действительности это периодическое решение должно быть единственным, вследствие единственности решения уравнения (10.17). С учетом гурвицевости A можно продолжить рассуждения и показать, что периодическое решение является экспоненциально устойчивым.

Лемма 10.3. *В условиях принятых предположений если $\bar{x}(t, \varepsilon)$ является некоторым T -периодическим решением (10.15), таким что $\|\bar{x}(t, \varepsilon)\| \leq k|\varepsilon|$, то $\bar{x}(t, \varepsilon)$ экспоненциально устойчиво.*

Доказательство: Систематическая процедура исследования устойчивости $\bar{x}(t, \varepsilon)$ состоит в том, что выполняется замена переменных $z = x - \bar{x}(t, \varepsilon)$ и затем исследуется устойчивость точки равновесия $z = 0$. Новая переменная z удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z + \bar{x}(t, \varepsilon)) - f(\bar{x}(t, \varepsilon)) + \varepsilon[g(t, z + \bar{x}(t, \varepsilon), \varepsilon) - g(t, \bar{x}(t, \varepsilon), \varepsilon)] \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}(t, z). \end{aligned}$$

Линеаризация в окрестности $z = 0$ приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{z=0} + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{z=0} = \\ &= A + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t, \varepsilon)) - A \right] + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x}(t, \bar{x}(t, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

Из непрерывности $[\partial f / \partial x]$ следует, что для любой $\delta > 0$ существует $\varepsilon^* > 0$, такая что

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t, \varepsilon)) - \frac{\partial f}{\partial x}(0) \right\| < \delta$$

при $\varepsilon < \varepsilon^*$. Поскольку A гурвицева и $[\partial g / \partial x](t, \bar{x}, \varepsilon)$ имеет порядок $O(1)$, мы можем заключить, что при достаточно малой ε линейная система

$$\dot{y} = \left[A + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t, \varepsilon)) - A \right) + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x}(t, \bar{x}(t, \varepsilon), \varepsilon) \right] y$$

¹⁾Этот хорошо известный в теории импульсных систем результат может быть доказан преобразованием A к жордановой форме.

имеет экспоненциально устойчивую точку равновесия в $y = 0$. Поэтому из теоремы 4.13 следует, что $z = 0$ — экспоненциально устойчивая точка равновесия. \square

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 10.3. *Предположим, что*

- f, g и их первые частные производные по x непрерывны и ограничены для всех $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D_0 \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ для любого компактного множества $D_0 \subset D$, где $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая начало координат;
- начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия автономной системы (10.16);
- $g(t, x, \varepsilon)$ — T -периодическая по t .

Тогда существуют положительные константы ε^* и k , такие что для всех $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ уравнение (10.15) имеет единственное T -периодическое решение $\bar{x}(t, \varepsilon)$, обладающее свойством $\|\bar{x}(t, \varepsilon)\| \leq k|\varepsilon|$. Более того, это решение является экспоненциально устойчивым.

Если $g(t, 0, \varepsilon) = 0$, то начало координат представляет собой точку равновесия возмущенной системы (10.15). Из единственности периодического решения $\bar{x}(t, \varepsilon)$ следует, что $\bar{x}(t, \varepsilon)$ является тривиальным решением $x = 0$. В этом случае теорема гарантирует, что начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия возмущенной системы (10.15).

10.4. Метод усреднения

Метод усреднения применяется при анализе систем вида

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon),$$

где ε — малый положительный параметр и $f(t, x, \varepsilon)$ — T -периодическая по t функция, т. е.

$$f(t + T, x, \varepsilon) = f(t, x, \varepsilon), \quad \forall (t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D \times [0, \varepsilon_0]$$

для некоторой области $D \subset R^n$. С использованием этого метода решение системы аппроксимируется решением «усредненной системы», получаемой усреднением $f(t, x, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$. Для мотивации метода усреднения рассмотрим скалярный пример.

Пример 10.7. Рассмотрим линейную систему первого порядка

$$\dot{x} = \varepsilon a(t, \varepsilon)x, \quad x(0) = \eta, \quad (10.21)$$

где ε — положительный параметр, a — достаточно гладкая по своим аргументам функция и $a(t + T, \varepsilon) = a(t, \varepsilon)$ для всех $t \geq 0$. Для получения приближенного решения, верного при малом значении ε , можно

применить метод возмущений, рассмотренный в параграфе 10.1. При $\varepsilon = 0$ получаем невозмущенную систему

$$\dot{x} = 0, \quad x(0) = \eta,$$

которая имеет постоянное решение $x_0(t) = \eta$. В соответствии с теоремой 10.1 ошибка этой аппроксимации будет иметь порядок $O(\varepsilon)$ на $O(1)$ -интервалах времени. Невозмущенная система не удовлетворяет условиям теоремы 10.2. Поэтому неясно, является ли эта аппроксимация верной на интервалах, больших чем $O(1)$ -интервалы. Поскольку в этом примере можно выписать точное решение в явном виде, оценим ошибку аппроксимации с помощью непосредственных вычислений. Решение уравнения (10.21) имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \exp \left[\varepsilon \int_0^t a(\tau, \varepsilon) d\tau \right] \eta.$$

Следовательно, ошибка аппроксимации определяется равенством

$$x(t, \varepsilon) - x_0(t) = \left\{ \exp \left[\varepsilon \int_0^t a(\tau, \varepsilon) d\tau \right] - 1 \right\} \eta.$$

Для того, чтобы исследовать изменение этой ошибки аппроксимации при увеличении t необходимо оценить в предыдущем равенстве интегральный член. Функция $a(t, \varepsilon)$ является периодической по t . Пусть ее среднее определяется равенством

$$\bar{a}(\varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T a(\tau, \varepsilon) d\tau.$$

Перепишем $a(t, \varepsilon)$ в следующем виде:

$$a(t, \varepsilon) = \bar{a}(\varepsilon) + [a(t, \varepsilon) - \bar{a}(\varepsilon)].$$

Член в скобках представляет собой T -периодическую функцию времени с нулевым средним. Поэтому интеграл

$$\int_0^t [a(\tau, \varepsilon) - \bar{a}(\varepsilon)] d\tau \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(t, \varepsilon)$$

также является T -периодической функцией и, следовательно, ограничен при всех $t \geq 0$. С другой стороны, при интегрировании члена $\bar{a}(\varepsilon)$ на $[0, t]$ получаем $t\bar{a}(\varepsilon)$. Таким образом,

$$x(t, \varepsilon) - x_0(t) = \{ \exp[\varepsilon t\bar{a}(\varepsilon)] \exp[\varepsilon \Delta(t, \varepsilon)] - 1 \} \eta.$$

За исключением случая $\bar{a}(\varepsilon) = 0$, ошибка аппроксимации имеет порядок $O(\varepsilon)$ только на $O(1)$ -интервалах времени. Тщательный анализ ошибки аппроксимации показывает, что лучшим приближением для $x(t, \varepsilon)$ является $\exp[\varepsilon t\bar{a}(\varepsilon)]\eta$ или даже $\exp[\varepsilon t\bar{a}(0)]\eta$, поскольку $\bar{a}(\varepsilon) - \bar{a}(0) = O(\varepsilon)$. Рассмотрим $\bar{x}(\varepsilon t) = \exp[\varepsilon t\bar{a}(0)]\eta$ в качестве альтернативной аппроксимации. Тогда ошибка аппроксимации определяется равенством

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) - \bar{x}(\varepsilon t) &= \{ \exp[\varepsilon t\bar{a}(\varepsilon)] \exp[\varepsilon \Delta(t, \varepsilon)] - \exp[\varepsilon t\bar{a}(0)] \} \eta = \\ &= \exp[\varepsilon t\bar{a}(0)] \{ \exp[\varepsilon t(\bar{a}(\varepsilon) - \bar{a}(0))] \exp[\varepsilon \Delta(t, \varepsilon)] - 1 \} \eta. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \exp[\varepsilon \Delta(t, \varepsilon)] &= 1 + O(\varepsilon), \quad \forall t \geq 0, \\ \exp[\varepsilon t(\bar{a}(\varepsilon) - \bar{a}(0))] &= \exp[tO(\varepsilon^2)] = 1 + O(\varepsilon), \quad \forall t \in [0, b/\varepsilon] \\ \exp[\varepsilon t\bar{a}(0)] &= O(1), \quad \forall t \in [0, b/\varepsilon] \end{aligned}$$

для любого положительного $b > 0$. Тогда $x(t, \varepsilon) - \bar{x}(\varepsilon t) = O(\varepsilon)$ на интервалах времени порядка $O(1/\varepsilon)$, что подтверждает утверждение о том, что аппроксимация $\bar{x}(\varepsilon t) = \exp[\varepsilon t\bar{a}(0)]\eta$ лучше аппроксимации $x_0(t) = \eta$. Заметим, что $\bar{x}(\varepsilon t)$ — решение усредненной системы

$$\dot{x} = \varepsilon \bar{a}(0)x, \quad x(0) = \eta, \quad (10.22)$$

правая часть которой представляет собой усреднение правой части (10.21) при $\varepsilon = 0$. \triangle

В этом примере мы получили усредненную систему (10.22) с использованием выражения в явном виде для точного решения уравнения (10.21). Это выражение в явном виде можно получить лишь в частных случаях. Однако применимость метода усреднения распространяется не только на конкретные примеры. Рассмотрим идею метода усреднения с другой стороны. Правая часть (10.21) умножается на положительную константу ε . Если ε мала, решение x изменяется с течением времени «медленно» по сравнению с периодическими флуктуациями $a(t, \varepsilon)$. Интуитивно понятно, что отклик системы изменяется более медленно, чем возбуждающее воздействие и поэтому этот отклик определяется преимущественно усреднением этого возбуждения. Эта догадка имеет свои корни в теории линейных систем, из которой известно, что если полоса пропускания системы существенно меньше диапазона частот на входе, то система функционирует как фильтр низких частот, отсекающий высокочастотные компоненты входного сигнала. Если решение (10.21) в основном определяется усреднением флуктуации $a(t, \varepsilon)$, разумно при получении $O(\varepsilon)$ -аппроксимации заменить функцию $a(t, \varepsilon)$ на ее усреднение. Эта интерпретация метода усреднения с двойным масштабированием по времени никак не зависит от специфических особенностей системы в примере 10.7 и при таком подходе никак не используется линейность системы. Как мы увидим далее, эта идея применима и к более общим ситуациям.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon), \quad (10.23)$$

где f и ее частные производные по (x, ε) до второго порядка включительно непрерывны и ограничены при $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D_0 \times [0, \varepsilon_0]$ для любого компактного множества $D_0 \subset D$, где $D \subset R^n$ — некоторая открытая область. Предположим, что $f(t, x, \varepsilon)$ является T -периодической по t для некоторого $T > 0$ и положительного параметра ε . Мы будем ассоциировать с системой (10.23) автономную усредненную систему

$$\dot{x} = \varepsilon f_{\text{av}}(x), \quad (10.24)$$

где

$$f_{\text{av}}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x, 0) d\tau. \quad (10.25)$$

При использовании метода усреднения основной задачей является получение ответа на вопрос, в каком смысле поведение автономной системы (10.24) аппроксимирует поведение неавтономной системы (10.23). С использованием замены переменных можно показать, что неавтономная система (10.23) может быть представлена в виде возмущения автономной системы (10.24). Для этого определим

$$u(t, x) = \int_0^t h(\tau, x) d\tau, \quad (10.26)$$

где

$$h(t, x) = f(t, x, 0) - f_{\text{av}}(x). \quad (10.27)$$

Поскольку $h(t, x)$ является T -периодической по t и имеет нулевое среднее, функция $u(t, x)$ также является T -периодической по t . Следовательно, $u(t, x)$ ограничена для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times D_0$. Более того, $\partial u / \partial t$ и $\partial u / \partial x$, определяемые равенствами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h(t, x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^t \frac{\partial h}{\partial x}(\tau, x) d\tau$$

являются T -периодическими по t и ограниченными на $[0, \infty) \times D_0$. Здесь мы использовали тот факт, что $\partial h / \partial x$ является T -периодической по t и имеет нулевое среднее. Рассмотрим замену переменных

$$x = y + \varepsilon u(t, y). \quad (10.28)$$

Дифференцируя левую и правую части по t , получаем

$$\dot{x} = \dot{y} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, y) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \dot{y}.$$

Подставив в это равенство \dot{x} из (10.23), заключаем, что новая переменная состояния y удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \left[I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right] \dot{y} &= \varepsilon f(t, y + \varepsilon u, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \\ &= \varepsilon f(t, y + \varepsilon u, \varepsilon) - \varepsilon f(t, y, 0) + \varepsilon f_{\text{av}}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon f_{\text{av}}(y) + \varepsilon p(t, y, \varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$p(t, y, \varepsilon) = [f(t, y + \varepsilon u, \varepsilon) - f(t, y, \varepsilon)] + [f(t, y, \varepsilon) - f(t, y, 0)].$$

Функция $p(t, y, \varepsilon)$ является T -периодической по t . С использованием теоремы о среднем значении мы можем представить ее в следующем виде:

$$p(t, y, \varepsilon) = F_1(t, y, \varepsilon u, \varepsilon) \varepsilon u + F_2(t, y, \varepsilon) \varepsilon.$$

Поскольку $\partial u / \partial y$ ограничена на $[0, \infty) \times D_0$, матрица $I + \varepsilon \partial u / \partial y$ невырождена при достаточно малой ε и

$$\left[I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right]^{-1} = I + O(\varepsilon).$$

Поэтому уравнение состояния для y имеет вид

$$\dot{y} = \varepsilon f_{\text{av}}(y) + \varepsilon^2 q(t, y, \varepsilon), \quad (10.29)$$

где $q(t, y, \varepsilon)$ является T -периодической по t и f_{av}, q и их первые частные производные по (y, ε) непрерывны и ограничены на $[0, \infty) \times D_0$ при достаточно малой ε . Это уравнение представляет собой возмущенную систему для усредненной системы (10.24). Применяя результаты предыдущих трех параграфов к рассматриваемой задаче, получаем теоретический базис для аппроксимации решений (10.29) решениями усредненной системы (10.24).

Замена времени $s = \varepsilon t$ приводит (10.29) к виду

$$\frac{dy}{ds} = f_{\text{av}}(y) + \varepsilon q(s/\varepsilon, y, \varepsilon), \quad (10.30)$$

где $q(s/\varepsilon, y, \varepsilon)$ является εT -периодической по s и ограниченной на $[0, \infty) \times D_0$ при достаточно малой ε . Применяя теоремы 3.4 и 3.5 о непрерывности решений по начальным данным и параметрам, заключаем, что если усредненная система

$$\frac{dy}{ds} = f_{\text{av}}(y)$$

имеет единственное решение $\bar{y}(s)$, определенное на $[0, b]$, $\bar{y}(s) \in D$ для всех $s \in [0, b]$ и $y(0, \varepsilon) - x_{\text{av}}(0) = O(\varepsilon)$, то существует константа $\varepsilon^* > 0$, такая что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ возмущенная система (10.30) имеет единственное решение, определенное для всех $s \in [0, b]$ и близость этих

двух решений имеет порядок $O(\varepsilon)$. Поскольку $t = s/\varepsilon$ и $x - y = O(\varepsilon)$ (см. (10.28)), решение усредненной системы (10.24) представляет собой $O(\varepsilon)$ -аппроксимацию решения (10.23) на интервале времени $[0, b/\varepsilon]$ временой шкалы t .

Предположим, что усредненная система (10.24) имеет экспоненциально устойчивую точку равновесия в начале координат и D — некоторая открытая область, содержащая начало координат. Пусть $V(y)$ — функция Ляпунова, существование которой гарантируется обратной теоремой Ляпунова 4.17. Тогда для любого компактного подмножества Ω области притяжения начала координат существует константа $c > 0$, такая что Ω принадлежит внутренности компактного множества $\{V(y) \leq c\}$. Предположим, что $y_{av}(0) \in \Omega$ и $y(0, \varepsilon) - y_{av}(0) = O(\varepsilon)$. Из теоремы 9.1 следует, что $O(\varepsilon)$ -аппроксимация будет верна для всех $s \geq 0$, т. е. для всех $t \geq 0$.

Наконец, из теоремы 10.3 следует, что (10.30) имеет единственное, экспоненциально устойчивое, (εT) -периодическое решение $\bar{y}(s/\varepsilon, \varepsilon)$ в $O(\varepsilon)$ -окрестности начала координат. Периодическое решение имеет период εT во временной шкале s , т. е. период T во временной шкале t . Из (10.28) видно, что (10.23) имеет T -периодическое решение

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = \bar{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, \bar{y}(t, \varepsilon)).$$

Поскольку u ограничена, периодическое решение $\bar{x}(t, \varepsilon)$ принадлежит $O(\varepsilon)$ -окрестности начала координат. Суммируем полученные результаты в следующей теореме.

Теорема 10.4. *Пусть $f(t, x, \varepsilon)$ и ее частные производные по (x, ε) до второго порядка включительно непрерывны и ограничены при $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D_0 \times [0, \varepsilon_0]$ для любого компактного множества $D_0 \subset D$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая открытая область. Предположим, что f является T -периодической по t для некоторого $T > 0$ и некоторого положительного параметра ε . Пусть $x(t, \varepsilon)$ и $x_{av}(\varepsilon t)$ — соответственно решения (10.23) и (10.24).*

- Если $x_{av}(\varepsilon t) \in D \forall t \in [0, b/\varepsilon]$ и $x(0, \varepsilon) - x_{av}(0) = O(\varepsilon)$, то существует константа $\varepsilon^* > 0$, такая что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ функция $x(t, \varepsilon)$ определена и

$$x(t, \varepsilon) - x_{av}(\varepsilon t) = O(\varepsilon) \quad \text{на } [0, b/\varepsilon].$$

- Если начало координат $x = 0 \in D$ является экспоненциально устойчивой точкой равновесия усредненной системы (10.24), $\Omega \subset D$ — компактное подмножество ее области притяжения, $x_{av}(0) \in \Omega$ и $x(0, \varepsilon) - x_{av}(0) = O(\varepsilon)$, то существует $\varepsilon^* > 0$, такая что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ функция $x(t, \varepsilon)$ определена и

$$x(t, \varepsilon) - x_{av}(\varepsilon t) = O(\varepsilon) \quad \text{для всех } t \in [0, \infty).$$

- Если начало координат $x = 0 \in D$ является экспоненциально устойчивой точкой равновесия усредненной системы (10.24), то существуют положительные константы ε^* и k , такие что

для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ система (10.23) имеет единственное, экспоненциально устойчивое T -периодическое $\bar{x}(t, \varepsilon)$, обладающее свойством $\|\bar{x}(t, \varepsilon)\| \leq k\varepsilon$.

Если $f(t, 0, \varepsilon) = 0$ для всех $(t, \varepsilon) \in [0, \infty) \times [0, \varepsilon_0]$, то начало координат является точкой равновесия системы (10.23). Из единственности T -периодического решения $\bar{x}(t, \varepsilon)$ следует, что $\bar{x}(t, \varepsilon)$ является тривиальным решением $x = 0$. В этом случае теорема гарантирует, что начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия системы (10.23).

Пример 10.8. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = \varepsilon A(t)x,$$

где $A(t+T) = A(t)$ и $\varepsilon > 0$. Пусть

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \int_0^T A(\tau) d\tau.$$

Усредненная система имеет вид

$$\dot{x} = \varepsilon \bar{A}x.$$

Она имеет точку равновесия в $x = 0$. Предположим, что матрица \bar{A} гурвицева. Тогда из теоремы 10.4 следует, что при достаточно малой константе ε система $\dot{x} = \varepsilon A(t)x$ имеет единственное T -периодическое решение в $O(\varepsilon)$ -окрестности начала координат $x = 0$. Заметим однако, что $x = 0$ — точка равновесия системы. Следовательно, периодическое решение является тривиальным решением $x(t) = 0$. Поэтому мы можем заключить, что при достаточно малой ε точка $x = 0$ является экспоненциально устойчивым состоянием равновесия неавтономной системы $\dot{x} = \varepsilon A(t)x$. \triangle

Пример 10.9. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x} = \varepsilon(x \sin^2 t - 0.5x^2) = \varepsilon f(t, x).$$

Функция $f(t, x)$ является π -периодической по t . Усредненная функция $f_{av}(x)$ имеет вид

$$f_{av}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \sin^2 t - 0.5x^2) dt = 0.5(x - x^2).$$

Усредненная система

$$\dot{x} = 0.5\varepsilon(x - x^2)$$

имеет две точки равновесия в $x = 0$ и $x = 1$. Якобиан df_{av}/dx , вычисленный в этих точках, определяется равенствами

$$\left. \frac{df_{av}}{d} \right|_{x=0} = (0.5 - x)|_{x=0} = 0.5,$$

$$\frac{df_{\text{avv}}}{d} \Big|_{x=1} = (0.5 - x)|_{x=1} = -0.5.$$

Таким образом, при достаточно малой ε система имеет экспоненциально устойчивое π -периодическое решение в $O(\varepsilon)$ -окрестности точки $x = 1$. Нарисовав график функции $x - x^2$ можно увидеть, что областью притяжения точки $x = 1$ является $(0, \infty)$. Следовательно, найдя решение усредненной системы с теми же начальными состояниями, что и для исходной системы, при условии, что эти начальные состояния принадлежат компактному интервалу $[a, b] \subset (0, \infty)$, получаем аппроксимацию

$$x(t, \varepsilon) - x_{\text{av}}(\varepsilon t) = O(\varepsilon), \quad \forall t \geq 0.$$

Пусть теперь необходимо найти аппроксимацию второго порядка. Для этого следует применить замену переменных (10.28), рассмотреть стандартную задачу с возмущениями и вычислить соответствующее приближенное решение в соответствии с процедурой, представленной в параграфе 10.1. С учетом (10.26) заключаем, что функция $u(t, x)$ определяется равенством

$$u(t, x) = \int_0^t (x \sin^2 \tau - 0.5x^2 - 0.5x + 0.5x^2) d\tau = -\frac{1}{4}x \sin 2t.$$

Замена переменных (10.28) принимает в рассматриваемом случае вид

$$x = y - \frac{1}{4}\varepsilon y \sin 2t = (1 - \frac{1}{4}\varepsilon \sin 2t)y.$$

Дифференцируя по t , получаем

$$\dot{x} = (1 - \frac{1}{4}\varepsilon \sin 2t)\dot{y} - \frac{1}{2}\varepsilon y \cos 2t.$$

Следовательно,

$$\dot{y} = \frac{\varepsilon}{1 - (\varepsilon/4) \sin 2t} (x \sin^2 t - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y \cos 2t).$$

Подставляя представление x в терминах y и раскладывая член $1/[1 - (\varepsilon/4) \sin 2t]$ в степенной ряд

$$\frac{1}{1 - (\varepsilon/4) \sin 2t} = 1 + \frac{1}{4}\varepsilon \sin 2t + O(\varepsilon^2),$$

получаем уравнение

$$\dot{y} = \frac{1}{2}\varepsilon(y - y^2) + \frac{1}{16}\varepsilon^2(y \sin 4t + 2y^2 \sin 2t) + O(\varepsilon^3).$$

Таким образом, система представлена в виде возмущения усредненной системы. Для того, чтобы найти аппроксимацию второго порядка, необходимо представить y_0 и y_1 в виде конечного ряда Тейлора

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 R_y.$$

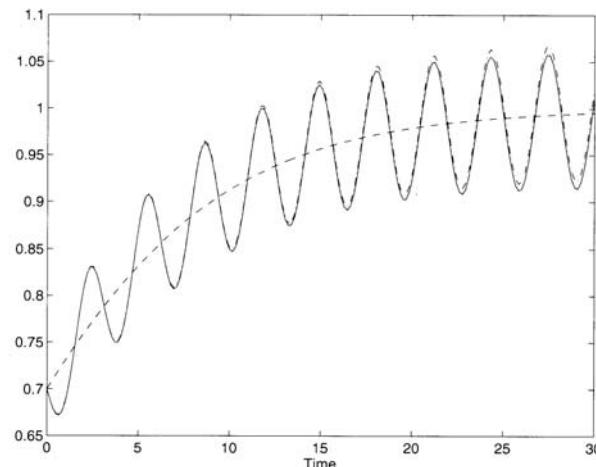


Рис. 10.5. Точное решение (непрерывная линия), усреднение (пунктирная линия) и аппроксимация второго порядка (штрихпунктирная линия) в примере 10.9 при $\varepsilon = 0.3$.

Известно, что $y_0 = x_{\text{av}}$ является решением усредненной системы. Уравнение для y_1 имеет вид

$$\dot{y}_1 = \varepsilon \left[\left(\frac{1}{2} - y_0(t) \right) y_1 + \frac{1}{16} y_0(t) \sin 4t + \frac{1}{8} y_0^2(t) \sin 2t \right], \quad y_1(0) = 0.$$

Это уравнение получено в предположении, что начальное состояние $x(0)$ не зависит от ε . С учетом (10.28), получаем аппроксимацию второго порядка для x :

$$x = (1 - \frac{1}{4}\varepsilon \sin 2t) x_{\text{av}}(\varepsilon t) + \varepsilon y_1(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

На рисунке 10.5 показаны решение неусредненной системы, решение усредненной системы и аппроксимация решения второго порядка при $x(0) = 0.7$ и $\varepsilon = 0.3$. Из этого рисунка видно, насколько точно решение усредненной системы приближает точное решение. Аппроксимация второго порядка практически неотличима от точного решения, но по мере того, как система приходит в установившийся режим, разность между этими функциями становится более заметной. \triangle

Пример 10.10. Рассмотрим маятник из параграфа 1.2.1 и предложим, что точка подвеса подвержена высокочастотным вертикальным колебаниям малой амплитуды, которые имеют вид $\sin \omega t$, где a — амплитуда и ω — частота. Уравнение Ньютона, описывающее движение подвешенной массы в направлении перпендикулярном стержню маят-

ника, имеет следующий вид:¹⁾

$$m(l\ddot{\theta} - a\omega^2 \sin \omega t \sin \theta) = -mg \sin \theta - k(l\dot{\theta} + a\omega \cos \omega t \sin \theta).$$

Предположим также, что $a/l \ll 1$ и $\omega_0/\omega \ll 1$, где $\omega_0 = \sqrt{g}/l$ — частота свободных колебаний маятника вблизи нижнего положения равновесия $\theta = 0$. Пусть $\varepsilon = a/l$ и $\omega_0/\omega = \alpha\varepsilon$, где $\alpha = \omega_0 l / \omega a$. Положим $\beta = k/m\omega_0$ и сделаем замену времени $\tau = \omega t$. В новом временном масштабе уравнения движения принимают следующий вид:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \alpha\beta\varepsilon \frac{d\theta}{d\tau} + (\alpha^2\varepsilon^2 - \varepsilon \sin \tau) \sin \theta + \alpha\beta\varepsilon^2 \cos \tau \sin \theta = 0.$$

Рассматривая

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\theta}{d\tau} + \cos \tau \sin \theta$$

в качестве переменных состояния, получаем уравнение состояния:

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f(\tau, x), \quad (10.31)$$

где

$$f_1(\tau, x) = x_2 - \sin x_1 \cos \tau,$$

$$f_2(\tau, x) = -\alpha\beta x_2 - \alpha^2 \sin x_1 + x_2 \cos x_1 \cos \tau - \sin x_1 \cos x_1 \cos 2\tau.$$

Функция $f(\tau, x)$ является (2π) -периодической по τ . Усредненная система имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f_{av}(x), \quad (10.32)$$

где

$$f_{av1}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\tau, x) d\tau = x_2,$$

$$f_{av2}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\tau, x) d\tau = -\alpha\beta x_2 - \alpha^2 \sin x_1 - \frac{1}{4} \sin 2x_1.$$

При получении этих выражений мы использовали тот факт, что усреднение $\cos \tau$ равно нулю, а усреднение $\cos^2 \tau$ равно $1/2$. Исходная неусредненная система (10.31) и усредненная система (10.32) имеют

¹⁾ Для того, чтобы получить это уравнение необходимо выписать выражения для x - и y -координат массы: $x = l \sin \theta$ и $y = l \cos \theta - a \sin \omega t$. Далее, получаем выражения для скорости и ускорения массы в направлении перпендикулярном стержню маятника: $(l\dot{\theta} + a\omega \cos \omega t \sin \theta)$ и $(l\ddot{\theta} - a\omega^2 \sin \omega t \sin \theta)$, соответственно. В качестве модели силы трения выбираем модель вязкого трения, согласно которой сила трения пропорциональна скорости движения массы; соответствующий коэффициент пропорциональности обозначаем через k .

точки равновесия $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ и $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$, которые соответствуют положениям равновесия маятника $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Если точка подвеса неподвижна, положение равновесия $\theta = 0$ экспоненциально устойчиво, а положение равновесия $\theta = \pi$ неустойчиво. Исследуем влияние вертикального колебания точки подвеса. Для того, чтобы применить теорему 10.4, необходимо выполнить анализ свойств устойчивости точки равновесия усредненной системы (10.32). Это можно сделать с использованием метода линеаризации. Матрица Якоби $f_{av}(x)$ имеет вид

$$\frac{\partial f_{av}}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 \cos x_1 - 0.5 \cos 2x_1 & -\alpha\beta \end{bmatrix}.$$

В точке равновесия $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ якобиан

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 - 0.5 & -\alpha\beta \end{bmatrix}$$

является гурвицевой матрицей для всех положительных значений α и β . Тогда из теоремы 10.4 следует, что при достаточно малой ε исходная система (10.31) имеет единственное экспоненциально устойчивое (2π) -периодическое решение в $O(\varepsilon)$ -окрестности начала координат. Поскольку начало координат является точкой равновесия исходной системы, периодическое решение является тривиальным решением $x = 0$. В этом случае из теоремы 10.4 следует, что при достаточно малой ε начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия исходной системы (10.31). Другими словами, экспоненциальная устойчивость нижнего положения равновесия маятника сохраняется при колебании (с малой амплитудой и высокой частотой) точки подвеса. В точке равновесия $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$, якобиан

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 - 0.5 & -\alpha\beta \end{bmatrix}$$

является гурвицевой матрицей при $0 < \alpha < 1/\sqrt{2}$ и $\beta > 0$. Заметим, что $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$ является точкой равновесия исходной системы. Тогда с использованием теоремы 10.4 заключаем, что если $\alpha < 1/\sqrt{2}$, то верхнее положение равновесия $\theta = \pi$ является экспоненциально устойчивой точкой равновесия исходной системы (10.31) при достаточно малой ε . Этот результат представляется интересным, поскольку из него следует, что неустойчивое положение равновесия маятника может быть стабилизировано вертикальным колебанием (с малой амплитудой и высокой частотой) точки подвеса.¹⁾ △

¹⁾ Идея введения высокочастотных колебаний с нулевым средним в параметры динамической системы для целенаправленной модификации свойств этой системы обобщена в виде принципа вибрационного управления в работах [22] и [127].

10.5. Осцилляторы второго порядка со слабой нелинейностью

Рассмотрим систему второго порядка

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \varepsilon g(y, \dot{y}), \quad (10.33)$$

где $g(\cdot, \cdot)$ — достаточно гладкая функция, такая что $|g|$ ограничена величинами $k|y|$ или $k|\dot{y}|$ на компактных множествах точек (y, \dot{y}) ; k — некоторая положительная константа. Выбрав $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{y}/\omega$ в качестве переменных состояния, получаем уравнение состояния

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega x_1 + \frac{\varepsilon}{\omega} g(x_1, \omega x_2).\end{aligned}$$

Представление этой системы в полярных координатах

$$x_1 = r \sin \phi, \quad x_2 = r \cos \phi$$

имеет вид

$$\dot{r} = \frac{1}{r}(x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2) = \frac{\varepsilon}{\omega} g(r \sin \phi, \omega r \cos \phi) \cos \phi, \quad (10.34)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{r^2}(x_2 \dot{x}_1 - x_1 \dot{x}_2) = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega r} g(r \sin \phi, \omega r \cos \phi) \sin \phi. \quad (10.35)$$

Второй член в правой части (10.35) имеет порядок $O(\varepsilon)$ на ограниченных множествах значений r , что является следствием предположения о том, что $|g|$ ограничена величинами $k|y|$ или $k|\dot{y}|$. Следовательно, правая часть (10.35) положительна при достаточно малой ε . Разделим (10.34) на (10.35):

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\varepsilon g(r \sin \phi, \omega r \cos \phi) \cos \phi}{\omega^2 - (\varepsilon/r) g(r \sin \phi, \omega r \cos \phi) \sin \phi}.$$

Это уравнение может быть переписано в следующей форме:

$$\frac{dr}{d\phi} = \varepsilon f(\phi, r, \varepsilon), \quad (10.36)$$

где

$$f(\phi, r, \varepsilon) = \frac{g(r \sin \phi, \omega r \cos \phi) \cos \phi}{\omega^2 - (\varepsilon/r) g(r \sin \phi, \omega r \cos \phi) \sin \phi}.$$

Если рассмотреть ϕ как независимую переменную, то (10.36) примет вид (10.23), где $f(\phi, r, \varepsilon)$ — (2π) -периодическая по ϕ функция. Функция $f_{av}(r)$ определяется равенством

$$f_{av}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi, r, 0) d\phi = \frac{1}{2\pi \omega^2} \int_0^{2\pi} g(r \sin \phi, \omega r \cos \phi) \cos \phi d\phi.$$

Предположим, что усредненная система

$$\frac{dr}{d\phi} = \varepsilon f_{av}(r) \quad (10.37)$$

имеет точку равновесия r^* , где $[\partial f_{av}/\partial r](r^*) < 0$. Тогда существует такой $\varepsilon^* > 0$, что для любого ε , удовлетворяющего $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, уравнение (10.36) имеет единственное экспоненциально устойчивое (2π) -периодическое решение $r = R(\phi, \varepsilon)$ в $O(\varepsilon)$ -окрестности r^* . Из этого результата вообще говоря не следует, что (10.33) имеет периодическое решение для t . Для того, чтобы получить этот результат необходимо выполнить дополнительный анализ. Подставляя $r = R(\phi, \varepsilon)$ в (10.35), получаем

$$\dot{\phi} = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega R(\phi, \varepsilon)} g(R(\phi, \varepsilon) \sin \phi, \omega R(\phi, \varepsilon) \cos \phi) \sin \phi.$$

Пусть $\phi^*(t, \varepsilon)$ — решение этого уравнения, начинающееся в $\phi^*(0, \varepsilon) = 0$. Для того, чтобы показать, что (10.33) имеет периодическое решение необходимо доказать, что существует момент времени $T = T(\varepsilon) > 0$, вообще говоря, зависящий от ε , такой что

$$\phi^*(t + T, \varepsilon) = 2\pi + \phi^*(t, \varepsilon), \forall t \geq 0. \quad (10.38)$$

Рассмотрим с этой целью равенство

$$R(\phi^*(t + T, \varepsilon), \varepsilon) = R(2\pi + \phi^*(t, \varepsilon), \varepsilon) = R(\phi^*(t, \varepsilon), \varepsilon),$$

из которого следует, что $R(\phi^*(t, \varepsilon), \varepsilon)$ — T -периодическая функция по t . Поскольку

$$\phi^*(t + \tau, \varepsilon) = \phi^*(t, \varepsilon) + \omega \tau + O(\varepsilon)$$

для ограниченных $\tau \geq 0$, можно легко показать, что при достаточно малой ε , уравнение (10.38) имеет единственное решение $T(\varepsilon) = 2\pi/\omega + O(\varepsilon)$.

График решения $r = R(\phi^*(t, \varepsilon), \varepsilon)$ на (x_1, x_2) -плоскости представляет собой замкнутую орбиту в окрестности окружности $r = r^*$. Поскольку периодическое решение $r = R(\phi, \varepsilon)$ экспоненциально устойчиво, эта замкнутая орбита притягивает все решения из этой окрестности, т. е. замкнутая орбита является устойчивым предельным циклом.

Пример 10.11. Уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{y} + y = \varepsilon \dot{y}(1 - y^2)$$

представляет собой частный случай системы (10.33) с $\omega = 1$ и $g(y, \dot{y}) = \dot{y}(1 - y^2)$. Функция $f_{av}(r)$ определяется равенством

$$f_{av}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - r^2 \sin^2 \phi) r \cos^2 \phi d\phi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \cos^2 \phi d\phi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \phi \cos^2 \phi d\phi = \\
&= \frac{1}{2}r - \frac{1}{8}r^3.
\end{aligned}$$

Усредненная система

$$\frac{dr}{d\phi} = \varepsilon\left(\frac{1}{2}r - \frac{1}{8}r^3\right)$$

имеет три точки равновесия в $r = 0$, $r = 2$ и $r = -2$. Поскольку по определению $r \geq 0$, отрицательный корень не рассматривается. Свойства устойчивости будут установлены с использованием метода линеаризации. Матрица Якоби имеет вид

$$\frac{df_{av}}{dr} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}r^2.$$

Тогда

$$\frac{df_{av}}{dr} \Big|_{r=0} = \frac{1}{2} > 0; \quad \frac{df_{av}}{dr} \Big|_{r=2} = -1 < 0.$$

Таким образом, точка равновесия $r = 2$ экспоненциально устойчива. Поэтому при достаточно малом ε уравнение Ван дер Поля имеет устойчивый предельный цикл в $O(\varepsilon)$ -окрестности $r = 2$. Отклонение периода колебаний от 2π имеет порядок $O(\varepsilon)$. Этот устойчивый предельный цикл был исследован с использованием компьютерного моделирования в примере 2.6. \triangle

Заметим в заключение этого параграфа, что представленная процедура может быть также использована для доказательства существования в системе неустойчивого предельного цикла. Это может быть сделано, если рассмотреть (10.33) в обратном времени, т. е. при замене переменной времени t на новую $\tau = -t$. Если система имеет устойчивый предельный цикл в обратном времени, то она имеет неустойчивый предельный цикл в прямом времени.

10.6. Метод усреднения для общего случая

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon), \quad (10.39)$$

где f и ее частные производные по (x, ε) до второго порядка включительно непрерывны и ограничены при $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D_0 \times [0, \varepsilon_0]$ для любого компактного множества $D_0 \subset D$. Параметр ε является положительной константой и $D \subset R^n$ — некоторая открытая область. Метод усреднения может быть применен к системе (10.39) не только когда функция $f(t, x, \varepsilon)$ является периодической по t , но и в более общих случаях. В частности, этот метод применим, если в соответствии

со следующим определением функция $f(t, x, 0)$ имеет хорошо определенное среднее.

Определение 10.2. Непрерывная, ограниченная функция $g : [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$ имеет среднее (average) $g_{av}(x)$, если предел

$$g_{av}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} g(\tau, x) d\tau$$

существует и

$$\left\| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} g(\tau, x) d\tau - g_{av}(x) \right\| \leq k\sigma(T), \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times D_0$$

для любого компактного множества $D_0 \subset D$, где k — некоторая положительная константа (возможно зависящая от D_0). Строго убывающая, непрерывная, ограниченная функция $\sigma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, такая что $\sigma(T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$, называется функцией сходимости (convergency function).¹⁾

Пример 10.12.

- Пусть $g(t, x) = \sum_{k=1}^N g_k(t, x)$, где $g_k(t, x)$ — периодическая по t функция с периодом T_k , $T_i \neq T_j$ при $i \neq j$. Функция g не является периодической²⁾ по t , но она имеет среднее

$$g_{av}(x) = \sum_{k=1}^N g_{kav}(x),$$

где g_{kav} — среднее периодической функции $g_k(t, x)$, определенное в параграфе 10.4. Функция сходимости σ имеет порядок $O(1/T)$ при $T \rightarrow \infty$. В качестве такой функции может быть взята $\sigma(T) = 1/(T + 1)$.

- Среднее для функции

$$g(t, x) = \frac{1}{1+t} h(x)$$

равно нулю и в качестве функции сходимости σ можно взять $\sigma(T) = (1/T) \ln(1 + T)$. \triangle

Предположим, что $f(t, x, 0)$ имеет среднее $f_{av}(x)$ с функцией сходимости σ . Пусть

$$h(t, x) = f(t, x, 0) - f_{av}(x). \quad (10.40)$$

¹⁾ Прим. ред. перев. — Точнее было бы называть $\sigma(\tau)$ функцией скорости сходимости. Следовало бы также показать, что предел не зависит от t (что, впрочем, легко сделать).

²⁾ Эта функция называется почти периодической. Теория почти периодических функций изложена в работах [59] и [75].

Функция $h(t, x)$ имеет нулевое среднее с функцией сходимости σ . Предположим, что матрица Якоби $\partial h / \partial x$ имеет нулевое среднее с той же функцией сходимости σ . Определим

$$w(t, x, \eta) = \int_0^t h(\tau, x) \exp[-\eta(t - \tau)] d\tau \quad (10.41)$$

для некоторой положительной константы η . При $\eta = 0$ функция $w(t, x, 0)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \|w(t + \delta, x, 0) - w(t, x, 0)\| &= \left\| \int_0^{t+\delta} h(\tau, x) d\tau - \int_0^t h(\tau, x) d\tau \right\| = \\ &= \left\| \int_t^{t+\delta} h(\tau, x) d\tau \right\| \leq k\delta\sigma(\delta). \end{aligned} \quad (10.42)$$

Из этого равенства в частности следует, что

$$\|w(t, x, 0)\| \leq kt\sigma(t), \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times D_0,$$

т. к. $w(0, x, 0) = 0$. Вычисляя интеграл в правой части (10.41) по частям, получаем

$$\begin{aligned} w(t, x, \eta) &= w(t, x, 0) - \eta \int_0^t \exp[-\eta(t - \tau)] w(\tau, x, 0) d\tau = \\ &= \exp(-\eta t) w(t, x, 0) - \eta \int_0^t \exp[-\eta(t - \tau)] [w(\tau, x, 0) - w(t, x, 0)] d\tau. \end{aligned}$$

Второе равенство было получено путем прибавления и вычитания

$$\eta \int_0^t \exp[-\eta(t - \tau)] d\tau w(t, x, 0)$$

к правой части равенства. С учетом (10.42), получаем

$$\|w(t, x, \eta)\| \leq kt \exp(-\eta t) \sigma(t) + k\eta \int_0^t \exp[-\eta(t - \tau)] (t - \tau) \sigma(t - \tau) d\tau. \quad (10.43)$$

Это неравенство может быть использовано при доказательстве того, что функция $\eta\|w(t, x, \eta)\|$ равномерно ограничена величиной $k\alpha(\eta)$ для

некоторой \mathcal{K} -функции α . Например, если $\sigma(t) = 1/(t + 1)$, то

$$\eta\|w(t, x, \eta)\| \leq k\eta \exp(-\eta t) + k\eta^2 \int_0^t \exp[-\eta(t - \tau)] d\tau = k\eta.$$

Определив $\alpha(\eta) = \eta$, получаем $\eta\|w(t, x, \eta)\| \leq k\alpha(\eta)$. Если $\sigma(t) = 1/(t^r + 1)$, где $0 < r < 1$, то

$$\begin{aligned} \eta\|w(t, x, \eta)\| &\leq k\eta t^{(1-r)} e^{-\eta t} + k\eta^2 \int_0^t e^{-\eta(t-\tau)} (t - \tau)^{(1-r)} d\tau \leq \\ &\leq k\eta \left(\frac{1-r}{\eta}\right)^{1-r} e^{-(1-r)} + k\eta^2 \int_0^\infty e^{-\eta s} s^{(1-r)} ds \leq \\ &\leq k\eta \left(\frac{1-r}{\eta}\right)^{1-r} e^{-(1-r)} + k\eta^2 \frac{\Gamma(2-r)}{\eta^{(2-r)}} \leq kk_1\eta^r, \end{aligned}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — стандартная гамма-функция. Определив $\alpha(\eta) = k_1\eta^r$, получаем $\eta\|w(t, x, \eta)\| \leq k\alpha(\eta)$. В общем случае можно показать (см. упражнение 10.19), что существует \mathcal{K} -функция α , такая что

$$\eta\|w(t, x, \eta)\| \leq k\alpha(\eta), \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times D_0. \quad (10.44)$$

Не уменьшая общности, можно выбрать $\alpha(\eta)$ такую, что $\alpha(\eta) \geq c\eta$ при $\eta \in [0, 1]$, где c — положительная константа. Частные производные $[\partial w / \partial t]$ и $[\partial w / \partial x]$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= h(t, x) - \eta w(t, x, \eta), \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \int_0^t \frac{\partial h}{\partial x}(\tau, x) \exp[-\eta(t - \tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку $[\partial h / \partial x]$ характеризуется теми же свойствами, что и h , мы можем повторить действия, которые позволили получить (10.44), и показать, что

$$\eta \left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\| \leq k\alpha(\eta), \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times D_0. \quad (10.45)$$

Не уменьшая общности, можно использовать в (10.44) и (10.45) одну и ту же \mathcal{K} -функцию, т. к. две соответствующие оценки будут отличаться лишь положительной константой при члене, зависящем от η . Поэтому в качестве коэффициента в выражении, определяющем α , можно использовать максимум из этих двух констант.

Определенная выше функция $w(t, x, \eta)$ обладает всеми ключевыми свойствами, характеризующими функцию $u(t, x)$ в параграфе 10.4.

Единственным отличием будет то, что параметризация функции w параметром η такова, что границы для w и $[\partial w / \partial x]$ имеют вид $k\alpha(\eta)/\eta$, где α — некоторая \mathcal{K} -функция. Необходимость параметризации функции w каким-либо параметром отсутствует. В действительности функция $u(t, x)$ представляет собой функцию $w(t, x, \eta)$, вычисленную при $\eta = 0$. В этом нет ничего удивительно, поскольку в периодическом случае функция сходимости имеет вид $\sigma(t) = 1/(t+1)$ и, следовательно, $\alpha(\eta)/\eta = 1$.

Дальнейший анализ будет почти полностью аналогичен тому, что был выполнен в параграфе 10.4. Определим замену переменных

$$x = y + \varepsilon w(t, y, \varepsilon). \quad (10.46)$$

Член $\varepsilon w(t, y, \varepsilon)$ имеет порядок $O(\alpha(\varepsilon))$. Таким образом, при достаточно малой ε замена переменных (10.46) хорошо определена, т. к. матрица $[I + \varepsilon \partial w / \partial y]$ невырождена. В частности,

$$\left[I + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} \right] - 1 = I + O(\alpha(\varepsilon)).$$

Продолжая анализ аналогично тому, как это было сделано в параграфе 10.4, можно показать, что уравнение состояния для y имеет вид

$$\dot{y} = \varepsilon f_{av}(y) + \varepsilon \alpha(\varepsilon) q(t, y, \varepsilon), \quad (10.47)$$

где функция $q(t, y, \varepsilon)$ ограничена на $[0, \infty) \times D_0$ при достаточно малой ε . При получении (10.47) использовался тот факт, что $\alpha(\varepsilon) \geq c\varepsilon$. Уравнение (10.47) представляет собой возмущение усредненной системы

$$\dot{x} = \varepsilon f_{av}(x) \quad (10.48)$$

и аналогично (10.29) с учетом того, что в рассматриваемом здесь случае вместо коэффициента ε^2 при q стоит $\varepsilon \alpha(\varepsilon)$. С учетом этого обстоятельства мы можем получить аналогичный теореме 10.4 результат, в котором $O(\varepsilon)$ -оценки из этой теоремы будут заменены на $O(\alpha(\varepsilon))$ -оценки.

Теорема 10.5. Пусть $f(t, x, \varepsilon)$ и ее частные производные по (x, ε) до второго порядка включительно непрерывны и ограничены при $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D_0 \times [0, \xi_0]$ для любого компактного множества $D_0 \subset D$, где $\varepsilon > 0$ и $D \subset R^n$ — некоторая открытая область. Предположим, что $f(t, x, 0)$ имеет среднее $f_{av}(x)$ на $[0, \infty) \times D$ и якобиан функции $h(t, x) = f(t, x, 0) - f_{av}(x)$ имеет нулевое среднее с функцией сходимости, равной функции сходимости для f . Пусть $x(t, \varepsilon)$ и $x_{av}(\varepsilon t)$ — решения (10.39) и (10.48), соответственно, и α — \mathcal{K} -функция, фигурирующая в оценках (10.44) и (10.45).

- Если $x_{av}(\varepsilon t) \in D \forall t \in [0, b/\varepsilon]$ и $x(0, \xi) - x_{av}(0) = O(\alpha(\varepsilon))$, то существует $\varepsilon^* > 0$, такая что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $x(t, \varepsilon)$ определено и

$$x(t, \varepsilon) - x_{av}(\varepsilon t) = O(\alpha(\varepsilon)) \quad \text{на } [0, b/\varepsilon].$$

- Если начало координат $x = 0 \in D$ является экспоненциально устойчивой точкой равновесия усредненной системы (10.48), $\Omega \subset D$ — компактное подмножество области притяжения этой точки, $x_{av}(0) \in \Omega$ и $x(0, \varepsilon) - x_{av}(0, \varepsilon) = O(\alpha(\varepsilon))$, то существует $\varepsilon^* > 0$, такая что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $x(t, \varepsilon)$ определено и

$$x(t, \varepsilon) - x_{av}(\varepsilon t) = O(\alpha(\varepsilon)) \quad \text{для всех } t \in [0, \infty).$$

- Если начало координат $x = 0 \in D$ является экспоненциально устойчивой точкой равновесия усредненной системы (10.48) и $f(t, 0, \varepsilon) = 0$ для всех $(t, \varepsilon) \in [0, \infty) \times [0, \varepsilon_0]$, то существует $\varepsilon^* > 0$, такая что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия исходной неусредненной системы (10.39).

Доказательство: Выразив (10.47) во временному масштабе $s = \varepsilon t$, применив теоремы 3.4 и 3.5 и выполнив замену переменных (10.46), получаем результат, соответствующий первой части утверждения теоремы. Для доказательства второй части применим теорему 9.1 о непрерывности решений на бесконечном интервале времени. Далее, с учетом того, что $h(t, 0) = 0$, $w(t, 0, \eta) = 0$ и $\|\partial w / \partial x\| \leq k\alpha(\eta)/\eta$ получаем новую версию оценки для w

$$\eta \|w(t, x, \eta)\| \leq k\alpha(\eta) \|x\|.$$

Из предположения $f(t, 0, \varepsilon) = 0$ и дифференцируемости f по ε следует, что $f(t, x, \varepsilon)$ липшицева по ε линейно по x , т. е.

$$\|f(t, x, \varepsilon) - f(t, x, 0)\| \leq L_1 \varepsilon \|x\|.$$

С использованием полученных оценок можно показать, что функция $q(t, y, \varepsilon)$ в (10.47) удовлетворяет неравенству $\|q(t, y, \varepsilon)\| \leq L \|y\|$ с некоторой положительной константой L для всех $(t, y, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D_1 \times [0, \varepsilon_1]$, где $D_1 = \{\|y\| < r_1\}$ и r_1, ε_1 достаточно малы. Из обратной теоремы Ляпунова 4.14 и леммы 9.1 следует, что при достаточно малой ε начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия исходной системы (10.39). \square

Пример 10.13. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = \varepsilon A(t)x,$$

где $\varepsilon > 0$. Предположим, что $A(t)$ и ее производные до второго порядка включительно непрерывны и ограничены. Предположим также, что $A(t)$ имеет среднее

$$A_{av} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} A(\tau) d\tau$$

в смысле определения 10.2. Усредненная система определяется равенством

$$\dot{x} = \varepsilon A_{av}x.$$

Предположим, что A_{av} гурвицева. С использованием теоремы 10.5 заключаем, что начало координат исходной зависящей от времени системы экспоненциально устойчиво при достаточно малой ε . Предположим также, что матрица $A(t) = A_{tr}(t) + A_{ss}(t)$ является суммой переходной составляющей $A_{tr}(t)$ и установившейся составляющей $A_{ss}(t)$. Переходная составляющая экспоненциально убывает до нуля, т. е.

$$\|A_{tr}(t)\| \leq k_1 \exp(-\gamma t), \quad k_1 > 0, \quad \gamma > 0,$$

а элементы установившейся составляющей представляют собой конечные суммы синусоид с различными частотами. Среднее переходной компоненты равно нулю, т. к.

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|A_{tr}(\tau)\| d\tau \leq \frac{1}{T} \int_t^{t+T} k_1 e^{-\gamma \tau} d\tau = \frac{k_1 e^{-\gamma t}}{\gamma T} [1 - e^{-\gamma T}] \leq \frac{k_1}{T+1}.$$

С учетом результатов первого пункта примера 10.12 можно заключить, что функция сходимости, соответствующая усреднению функции $A(t)$, имеет вид $\sigma(T) = 1/(T+1)$. Следовательно, \mathcal{K} -функция из теоремы 10.5 имеет вид $\alpha(\eta) = \eta$. Пусть $x(t, \varepsilon)$ и $x_{av}(\varepsilon t)$ — соответственно решения исходной и усредненной систем, начинающиеся в одной и той же начальной точке. Из теоремы 10.5 следует, что

$$x(t, \varepsilon) - x_{av}(\varepsilon t) = O(\varepsilon), \quad \forall t \geq 0.$$

△

10.7. Упражнения

10.1 Если $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, является ли она также функцией порядка $O(\varepsilon^{1/2})$ или $O(\varepsilon^{3/2})$?

10.2 Если $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{1/n}$, где $n > 1$ — положительное число, существует ли положительное целое число N , такое что $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon^N)$?

10.3 Рассмотрим задачу с начальными данными

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(0.2 + \varepsilon)x_1 + \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}^{-1} x_1 + \varepsilon \operatorname{tg}^{-1} x_2, \quad x_1(0) = \eta_1, \\ \dot{x}_2 &= -(0.2 + \varepsilon)x_2 + \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}^{-1} x_2 + \varepsilon \operatorname{tg}^{-1} x_1, \quad x_2(0) = \eta_2. \end{aligned}$$

(a) Найдите $O(\varepsilon)$ -аппроксимацию.

(b) Найдите $O(\varepsilon^2)$ -аппроксимацию.

(c) Исследуйте вопрос достоверности аппроксимации на бесконечном интервале времени.

(d) Используя компьютерное моделирование, найдите точное решение, $O(\varepsilon)$ -аппроксимацию и $O(\varepsilon^2)$ -аппроксимацию при $\varepsilon = 0.1$, $\eta_1 = 0.5$ и $\eta_2 = 1.5$ на интервале времени $[0, 3]$. Прокомментируйте точность аппроксимации.

Указание: В пунктах (a) и (b) достаточно выписать уравнения, определяющие аппроксимации. Необходимость в нахождении аналитической выражения аппроксимации в явном виде отсутствует.

10.4 Выполните упражнение 10.3 для системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + \varepsilon x_1^3.$$

В пункте (d) положите $\varepsilon = 0.1$, $\eta_1 = 1.0$, $\eta_2 = 0.0$ и в качестве интервала времени рассмотрите $[0, 5]$.

10.5 Выполните упражнение 10.3 для системы

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \varepsilon x_1 - x_2 - \frac{1}{3}x_2^3.$$

В пункте (d) положите $\varepsilon = 0.2$, $\eta_1 = 1.0$, $\eta_2 = 0.0$ и в качестве интервала времени рассмотрите $[0, 4]$.

10.6 ([166]) Выполните упражнение 10.3 для системы

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1^2 + \varepsilon x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_2 - x_2^2 - \varepsilon x_1 x_2.$$

В пункте (d) положите $\varepsilon = 0.2$, $\eta_1 = 0.5$, $\eta_2 = 1.0$ и в качестве интервала времени рассмотрите $[0, 4]$.

10.7 Выполните упражнение 10.3 для системы

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2(1 + x_1) + \varepsilon(1 + x_1)^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1(x_1 + 1).$$

В пункте (d) положите $\varepsilon = -0.1$, $\eta_1 = -1$ и $\eta_2 = 2$. Выполните дополнительные вычисления при $\varepsilon = -0.05$ и $\varepsilon = -0.2$ и прокомментируйте точность аппроксимации.

10.8 Рассмотрим задачу с начальными данными

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \varepsilon x_2, \quad x_1(0) = \eta, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \varepsilon x_1, \quad x_2(0) = \eta. \end{aligned}$$

Найдите $O(\varepsilon)$ -аппроксимацию. Определите точное и приближенное решения при $\varepsilon = 0.1$ и двух различных начальных условиях: (1) $\eta = 1$, (2) $\eta = 10$. Прокомментируйте точность аппроксимации. Объясните несовместность полученных результатов с теоремой 10.1.

10.9 [70]) Исследуйте с использованием метода усреднения следующие скалярные системы:

$$\begin{array}{ll} (1) & \dot{x} = \varepsilon(x - x^2) \sin^2 t \\ (3) & \dot{x} = \xi(-x + \cos^2 t) \end{array} \quad \begin{array}{ll} (2) & \dot{x} = \varepsilon(x \cos^2 t - \frac{1}{2}x^2) \\ (4) & \dot{x} = -\varepsilon x \cos t \end{array}$$

10.10 Для каждой из следующих систем покажите, что при достаточно малой $\varepsilon > 0$ начало координат экспоненциально устойчиво:

- (1) $\dot{x}_1 = \varepsilon x_2$
 $\dot{x}_2 = -\varepsilon(1 + 2 \sin t)x_2 - \varepsilon(1 + \cos t) \sin x_1$
- (2) $\dot{x}_1 = \varepsilon[(-1 + 1.5 \cos^2 t)x_1 + (1 - 1.5 \sin t \cos t)x_2]$
 $\dot{x}_2 = \varepsilon[(-1 - 1.5 \sin t \cos t)x_1 + (-1 + 1.5 \sin^2 t)x_2]$
- (3) $\dot{x} = \varepsilon(-x \sin^2 t + x^2 \sin t + xe^{-t}), \quad \varepsilon > 0$

10.11 Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varepsilon[(-1 + 1.5 \cos^2 t)x_1 + (1 - 1.5 \sin t \cos t)x_2], \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon[(-1 - 1.5 \sin t \cos t)x_1 + (-1 + 1.5 \sin^2 t)x_2] + e^{-t}.\end{aligned}$$

Покажите, что существует $\varepsilon^* > 0$, такая что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ и всех $x(0) \in R^2$ выполнено $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

10.12 Рассмотрим систему $\dot{y} = Ay + \varepsilon g(t, y, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, где $(n \times n)$ -матрица A имеет только простые собственные значения на мнимой оси.

- (a) Покажите, что $\exp(At)$ и $\exp(-At)$ ограничены для всех $t \geq 0$.
- (b) Покажите, что замена переменных $y = \exp(At)x$ преобразует систему к виду $\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$, где $f = \exp(-At)g(t, \exp(At)x, \varepsilon)$.

10.13 ([166]) Исследуйте уравнение Матье $\ddot{y} + (1 + 2\varepsilon \cos 2t)y = 0$, $\varepsilon > 0$, используя метод усреднения.

Указание: Воспользуйтесь результатами упражнения 10.12.

10.14 ([166]) Исследуйте уравнение $\ddot{y} + y = 8\varepsilon(\dot{y})^2 \cos t$, используя метод усреднения.

Указание: Воспользуйтесь результатами упражнения 10.12.

10.15 Примените метод усреднения при исследовании вопроса о существовании предельных циклов для каждой из следующих систем второго порядка. В случае, если предельный цикл существует, найдите его месторасположение на координатной плоскости состояний и соответствующий период колебания, а также определите является ли этот цикл устойчивым или неустойчивым?

- | | |
|---|---|
| (1) $\ddot{y} + y = -\varepsilon \dot{y}(1 - y^2)$ | (2) $\ddot{y} + y = \varepsilon \dot{y}(1 - y^2) - \varepsilon y^3$ |
| (3) $\ddot{y} + y = -\varepsilon(1 - \frac{3\pi}{4} y)\dot{y}$ | (4) $\ddot{y} + y = -\varepsilon(1 - \frac{3\pi}{4} \dot{y})\dot{y}$ |
| (5) $\ddot{y} + y = -\varepsilon(\dot{y} - y^3)$ | (6) $\ddot{y} + y = \varepsilon \dot{y}(1 - y^2 - y^2)$ |

10.16 Рассмотрим систему второго порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon[x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)], \quad \varepsilon > 0.$$

- (a) Покажите, что при достаточно малой ε система имеет устойчивый предельный цикл.
- (b) Покажите, что система не имеет периодических орбит при $\varepsilon > 1$.

10.17 Рассмотрим уравнение Рэлея

$$m \frac{d^2u}{dt^2} + ku = \lambda \left[1 - \alpha \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right] \frac{du}{dt},$$

где m, k, λ и α — положительные константы.

- (a) С использованием нормированных переменных $y = u/u^*$, $\tau = t/t^*$ и $\varepsilon = \lambda/\lambda^*$, где $(u^*)^2 \alpha k = m/3$, $t^* = \sqrt{m}/k$ и $\lambda^* = \sqrt{km}$ покажите, что уравнение может быть приведено к нормализованной форме

$$\ddot{y} + y = \varepsilon(\dot{y} - \frac{1}{3}\dot{y}^3)$$

где \dot{y} — производная y по τ .

- (b) Примените метод усреднения и покажите, что нормализованное уравнение Рэлея имеет устойчивый предельный цикл. Оцените местоположение предельного цикла на плоскости (y, \dot{y}) .
- (c) С использованием численных методов получите фазовые портреты нормализованного уравнения Рэлея на плоскости (y, \dot{y}) при
 - (i) $\varepsilon = 1$,
 - (ii) $\varepsilon = 0.1$
 - и (iii) $\varepsilon = 0.01$.

Сравните полученный результат с предельным циклом из пункта (b).

10.18 Рассмотрим уравнение Дуффинга

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + ka^2y^3 = A \cos \omega t,$$

где A , a , c , k , m и ω — положительные константы.

- (a) Положив $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $\tau = \omega t$ и $\varepsilon = 1/\omega$ покажите, что это уравнение может быть представлено в виде $dx/d\tau = \varepsilon f(\tau, x, \varepsilon)$.
- (b) Покажите, что система имеет экспоненциально устойчивое периодическое решение при достаточно большой ω . Оцените частоту колебаний в системе и местоположение периодической орбиты в фазовом пространстве.

10.19 Докажите (10.44).

Указание: Рассмотрите (10.43) и используйте тот факт, что при $t \leq 1/\sqrt{\eta}$ функция $\sigma(t)$ ограничена, а при $t \geq 1/\sqrt{\eta}$ выполнено $\sigma(t) \leq \sigma(1/\sqrt{\eta})$.

10.20 Используйте метод усреднения для общего случая при исследовании скалярной системы

$$\dot{x} = \varepsilon(\sin^2 t + \sin 1.5t + e^{-t})x.$$

10.21 ([168]) Выход линейной не зависящей от времени системы n -го порядка с одним входом и одним выходом может быть представлен в виде $y(t) = \theta^T w(t)$, где θ — вектор размерности $(2n+1)$, компонентами которого являются постоянные параметры системы и $w(t)$ — дополнительный сигнал, который может быть синтезирован на основе информации о входе и выходе системы при неизвестном векторе θ . Предположим, что вектор θ неизвестен и обозначим его истинное значение через θ^* . В процессе идентификации системы значения параметра $\theta(t)$ изменяются с использованием закона адаптации вида $\dot{\theta} = -\varepsilon e(t)w(t)$, где $e(t) = [\theta(t) - \theta^*]^T w(t)$ — рассогласование между действительным выходом системы и выходом системы, который соответствует текущим значениям вектора параметров $\theta(t)$. Пусть $\phi(t) = \theta(t) - \theta^*$ — параметрическая ошибка.

- (a) Покажите, что $\dot{\phi} = \varepsilon A(t)\phi$, где $A(t) = -w(t)w^T(t)$.
- (b) Используя метод усреднения для общего случая, получите условия на $w(t)$, обеспечивающие при достаточно малой ε выполнение $\theta(t) \rightarrow \theta^*$ при $t \rightarrow \infty$.

Глава 11

СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Рассмотренный в параграфе 10.1 метод возмущений применяется к уравнениям состояния, которые гладко зависят от малого параметра ε . В этой главе мы рассмотрим более сложную задачу с возмущениями в которой зависимость свойств исследуемой системы от параметра возмущения ε не является непрерывной. Мы выполним анализ так называемой *стандартной модели с сингулярными возмущениями*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, z, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{z} &= g(t, x, z, \varepsilon).\end{aligned}$$

Если в этой системе положить $\varepsilon = 0$, это приводит к фундаментальному и внезапному изменению динамических свойств системы, т. к. дифференциальное уравнение $\varepsilon \dot{z} = g$ превращается в алгебраическое или трансцендентное уравнение

$$0 = g(t, x, z, 0).$$

Существо представленной в этой главе теории заключается в том, что нарушение непрерывности решений, обусловленное наличием в системе сингулярных возмущений, может быть успешно исследовано при его рассмотрении во временному масштабе, отличном от временного масштаба всей системы. Подход, в рамках которого при исследовании системы используются различные временные шкалы, является фундаментальной особенностью метода сингулярных возмущений.

В параграфе 11.1 мы дадим определение стандартной формы модели с сингулярными возмущениями и приведем несколько физически мотивированных примеров. В параграфе 11.2 будут исследованы свойства стандартной модели и получены аппроксимации ее траекторий с использованием декомпозиции этой модели на две подмодели: редуци-

рованную (медленную) и пограничную (быструю). Эти приближенные результаты распространяются в параграфе 11.3 на случай бесконечного интервала времени. Декомпозиция системы на основе введения различных временных шкал становится интуитивно более понятной, если использовать геометрический подход, изложенный в параграфе 11.4. Введенная в параграфе 11.2 временная декомпозиция используется в параграфе 11.5 при анализе свойств устойчивости точки равновесия по методу Ляпунова.

11.1. Стандартная форма модели с сингулярными возмущениями

Модель динамической системы с сингулярными возмущениями представляет собой модель состояния, в которой производные некоторых переменных состояния умножаются на малый положительный параметр ε :

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), \quad (11.1)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon). \quad (11.2)$$

Мы будем предполагать, что функции f и g непрерывно дифференцируемы по своим аргументам при $(t, x, z, \varepsilon) \in [0, t_1] \times D_x \times D_z \times [0, \varepsilon_0]$, где $D_x \subset R^n$ и $D_z \subset R^m$ — открытые связные множества. Если в (11.1) и (11.2) положить $\varepsilon = 0$, размерность уравнения состояния уменьшается с $n + m$ до n , т. к. дифференциальное уравнение (11.2) становится алгебраическим уравнением

$$0 = g(t, x, z, 0). \quad (11.3)$$

Мы будем говорить, что модель (11.1)–(11.2) представлена в стандартной форме, если (11.3) имеет $k \geq 1$ изолированных вещественных корней

$$z = h_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (11.4)$$

при любых $(t, x) \in [0, t_1] \times D_x$. Из этого предположения следует, что каждому корню (11.3) будет соответствовать корректно определенная редуцированная модель размерности n . Для того, чтобы получить i -ю редуцированную модель, подставим (11.4) в (11.1) при $\varepsilon = 0$. В результате получим

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0). \quad (11.5)$$

В этом уравнении в функции h нижний индекс i опущен для упрощения обозначений. Из контекста понятно, что при этом используется корень уравнения (11.3). Эту модель иногда называют квазиустановившейся моделью состояния, поскольку величина z , скорость которой $\dot{z} = g/\varepsilon$ может быть большой при малой ε и при $g \neq 0$, может быстро стремится к значению корня уравнения (11.3), являющемуся точкой равновесия системы (11.2). Модель (11.5) называют медленной моделью. В следу-

ющем параграфе мы исследуем свойства системы (11.1), (11.2), характеризующейся подобным двойным масштабированием по времени.

Представление физических систем в стандартной форме с сингулярными возмущениями, может оказаться непростой задачей. Не всегда ясно, как можно выбрать параметры так, чтобы при дальнейшем исследовании их можно было рассматривать как малые. К счастью, во многих прикладных случаях наше понимание происходящих в системе процессов, а также дополнительные знания о компонентах системы, помогают нам выбрать правильный путь.¹⁾ Представленные ниже четыре примера, иллюстрируют четыре «стандартных» подхода, применяемых при выборе параметра ε . В первом примере в качестве ε выбирается малая постоянная времени. Такой выбор приводит к возникновению сингулярно возмущенных моделей и исторически этот подход мотивировал интерес к исследованию сингулярных возмущений. Малые постоянные времени, массы, емкости и подобные им «паразитные» параметры, увеличивающие размерность модели, часто появляются в физических моделях. В целях упрощения исходной модели исследователи обычно пренебрегают этими паразитными параметрами, что уменьшает порядок рассматриваемой системы. Теория сингулярных возмущений позволяет обосновать это преднамеренное упрощение модели и предоставляет средства улучшения чрезмерно упрощенных моделей. Во втором примере в качестве параметра ε выбрана обратная величина к коэффициенту обратной связи системы управления. Этот пример принадлежит к очень важному классу сингулярно возмущенных моделей. Использование в системах управления сильной обратной связи, или, точнее говоря, параметров, асимптотически стремящихся к бесконечности, является общепринятым приемом. Типичный подход, используемый при анализе и разработке систем с сильной обратной связью, заключается в построении их моделей в форме стандартной модели с сингулярными возмущениями. В третьем примере параметром ε является паразитное сопротивление резистора в электрической цепи. Исключение этого резистора из цепи приводит к уменьшению порядка модели, однако эта процедура приводит модель к форме, несколько отличающейся от той, что была получена при пренебрежении паразитной малой постоянной времени в первом примере. Моделирование системы, представленной в стандартной форме с сингулярными возмущениями, сопряжено с тщательным выбором переменных состояния. В четвертом примере параметром ε является отношение собственной частоты корпуса автомобиля к собственной частоте подвески. Особенностью этого примера является то, что представленная в нем модель не может быть представлена в

¹⁾ Моделирование физических систем, представленных в стандартной форме с сингулярными возмущениями, рассмотрено в работах [38], [105, глава 1] и [104, глава 4].

стандартной форме с сингулярными возмущениями без применения к переменным состояния зависящего от ε масштабирования.

Пример 11.1. Модель электродвигателя постоянного тока с якорным управлением, представлена в виде уравнения состояния второго порядка

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} &= ki, \\ L \frac{di}{dt} &= -k\omega - Ri + u, \end{aligned}$$

где i , u , R и L — ток в обмотке якоря, напряжение, сопротивление и индуктивность, J — момент инерции, ω — угловая скорость, ki и $k\omega$ — соответственно момент и противоэлектродвижущая сила, возникающая под воздействием постоянного поля подмагничивания. Первое уравнение состояния представляет собой уравнение механического момента, а второе — уравнение, описывающее переходный электрический процесс в обмотке якоря. Обычно величина L является «малой» и играет роль параметра ε . Введя переменные состояния $\omega = x$ и $i = z$, получаем при $R \neq 0$ модель мотора в стандартной форме (11.1)–(11.2). Положив $L = 0$, решаем уравнение

$$0 = -k\omega - Ri + u$$

и получаем единственный корень

$$i = \frac{u - k\omega}{R}.$$

Подставляем полученный результат в уравнение момента и приходим к следующей модели

$$J\dot{\omega} = -\frac{k^2}{R}\omega + \frac{k}{R}u,$$

которая представляет собой хорошо известную модель электродвигателя постоянного тока. Как было установлено в главе 10, в качестве параметра возмущения ε следует использовать безразмерное отношение каких-либо двух физических параметров. Применяя этот подход, определим безразмерные переменные

$$\omega_r = \frac{\omega}{\Omega}; \quad i_r = \frac{iR}{k\Omega}; \quad u_r = \frac{u}{k\Omega}$$

и перепишем уравнение состояния в виде

$$\begin{aligned} T_m \frac{d\omega_r}{dt} &= i_r, \\ T_e \frac{di_r}{dt} &= -\omega_r - i_r + u_r, \end{aligned}$$

где $T_m = JR/k^2$ — постоянная времени для механической подсистемы и $T_e = L/R$ — постоянная времени для электрической подсистемы.

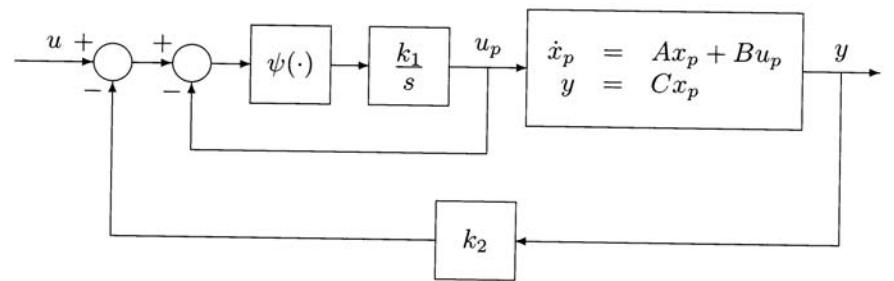


Рис. 11.1. Управление приводом с сильной обратной связью

Поскольку $T_m \gg T_e$, выберем T_m в качестве единицы времени, т. е. введем безразмерную переменную времени $t_r = t/T_m$. Тогда уравнение состояния принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_r}{dt_r} &= i_r, \\ \frac{T_e}{T_m} \frac{di_r}{dt_r} &= -\omega_r - i_r + u_r. \end{aligned}$$

Выполненное масштабирование по времени приводит рассматриваемую систему к стандартной форме модели с физически значимым безразмерным параметром

$$\varepsilon = \frac{T_e}{T_m} = \frac{Lk^2}{JR^2}.$$

△

Пример 11.2. Рассмотрим систему управления с обратной связью, изображенную на рисунке 11.1. Внутренний контур представляет собой управление приводом с сильной обратной связью. Параметром сильной обратной связи является константа k_1 в блоке интегратора. Объект управления представляет собой систему n -го порядка с одним входом и одним выходом, которая описывается моделью состояния $\{A, B, C\}$. Нелинейность характеризуется свойством $\psi(\cdot) \in (0, \infty]$, т. е.

$$\psi(0) = 0 \quad \text{и} \quad y\psi(y) > 0, \quad \forall y \neq 0.$$

Уравнение состояния замкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= Ax_p + Bu_p, \\ \frac{1}{k_1} \dot{u}_p &= \psi(u - u_p - k_2 C x_p). \end{aligned}$$

При $\varepsilon = 1/k_1$, $x_p = x$ и $u_p = z$ модель принимает форму (11.1)–(11.2). Полагая $\varepsilon = 0$, что эквивалентно $k_1 = \infty$, получаем уравнение

$$\psi(u - u_p - k_2 C x_p) = 0,$$

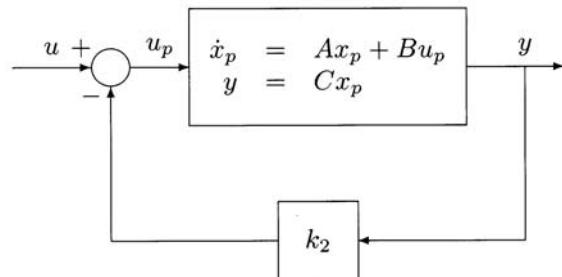


Рис. 11.2. Блок-схема, являющаяся упрощением блок-схемы, изображенной на рисунке 11.1

единственным корнем которого является

$$u_p = u - k_2 C x_p.$$

Единственность корня обусловлена тем, что $\psi(\cdot)$ равна нулю в начале координат. Упрощенная блок-схема соответствующей редуцированной модели

$$\dot{x}_p = (A - Bk_2C)x_p + Bu$$

изображена на рисунке 11.2. На этой схеме внутренний контур управления приводом (см. рисунок 11.1) заменен на прямое соединение. \triangle

Пример 11.3. Рассмотрим электрическую цепь из примера 10.4, показанную на рисунке 10.2. Дифференциальные уравнения, описывающие изменение напряжений на конденсаторах, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C\dot{v}_1 &= \frac{1}{R}(E - v_1) - \psi(v_1) - \frac{1}{R_c}(v_1 - v_2), \\ C\dot{v}_2 &= \frac{1}{R}(E - v_2) - \psi(v_2) - \frac{1}{R_c}(v_2 - v_1). \end{aligned}$$

В примере 10.4 было выполнено исследование цепи при «большом» значении сопротивления R_c , что представляет собой идеализацию ситуации, когда эта цепь становится незамкнутой, если величину $1/R_c$ положить равной нулю. На этот раз мы исследуем случай, когда R_c «мало». При $R_c = 0$ в электрической цепи происходит замена резистора на прямое соединение, что делает два конденсатора подключеными параллельно. В корректно определенной модели этой упрощенной цепи два подключенных параллельно конденсатора следует рассматривать как один эквивалентный по емкости конденсатор. Это приводит к упрощению модели и ее порядок становится равным единице. Для того, чтобы получить модель системы в форме, для которой описанное упрощение модели и уменьшение ее размерности соответствует сингулярному возмущению, выберем в качестве малого параметра величину

$\varepsilon = R_c$ и перепишем уравнение состояния в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{v}_1 &= \frac{\varepsilon}{CR}(E - v_1) - \frac{\varepsilon}{C}\psi(v_1) - \frac{1}{C}(v_1 - v_2), \\ \varepsilon \dot{v}_2 &= \frac{\varepsilon}{CR}(E - v_2) - \frac{\varepsilon}{C}\psi(v_2) - \frac{1}{C}(v_2 - v_1). \end{aligned}$$

Если бы эта модель была представлена в форме (11.1)–(11.2), переменные v_1 и v_2 могли бы рассматриваться как z -переменные и уравнение (11.3) свелось бы к следующему:

$$v_1 - v_2 = 0.$$

Однако корни этого уравнения не являются изолированными и, следовательно, основное требование к корням уравнения (11.3) не выполняется. Поэтому вышеприведенная модель не является моделью, представленной в стандартной форме системы с сингулярными возмущениями, и нам следует сделать другой выбор переменных состояния. Положим¹⁾

$$x = \frac{1}{2}(v_1 + v_2); z = \frac{1}{2}(v_1 - v_2).$$

Тогда в новых переменных уравнение состояния перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{CR}(E - x) - \frac{1}{2C}[\psi(x+z) + \psi(x-z)], \\ \varepsilon \dot{z} &= -\left(\frac{\varepsilon}{CR} + \frac{2}{C}\right)z - \frac{\varepsilon}{2C}[\psi(x+z) - \psi(x-z)]. \end{aligned}$$

В этом случае единственным корнем (11.3) является $z = 0$ и мы получаем соответствующую редуцированную модель

$$\dot{x} = -\frac{1}{CR}(E - x) - \frac{1}{C}\psi(x).$$

В упрощенной блок-схеме этой модели, изображенной на рисунке 11.3, каждая пара аналогичных параллельных участков цепи заменена на единый эквивалентный элемент цепи. Для того, чтобы получить параметр ε в безразмерном виде, нормализуем x , z , и ψ :

$$x_r = \frac{x}{E}; \quad z_r = \frac{z}{E}; \quad \psi_r(v) = \frac{R}{E}\psi(Ev).$$

Тогда сингулярно возмущенная модель, представленная в нормализованном времени $t_r = t/CR$, имеет следующий вид:

$$\frac{dx_r}{dt_r} = 1 - x_r - \frac{1}{2}[\psi_r(x_r + z_r) + \psi_r(x_r - z_r)],$$

¹⁾Этот выбор переменных состояния следует из систематической процедуры, описанной в работе [38].

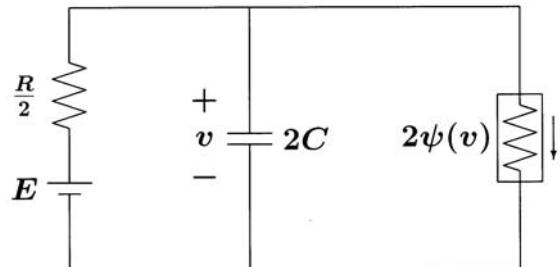
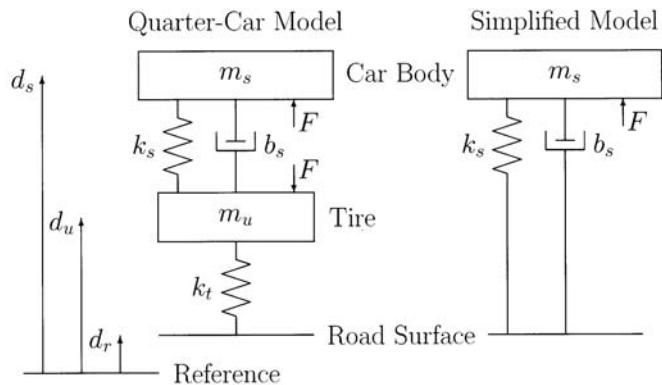
Рис. 11.3. Упрощенная электрическая цепь при $R_c = 0$ 

Рис. 11.4. Схема автомобильной подвески четырехколесного автомобиля (reference — базовая система координат, road surface — поверхность дороги, tire — шина, car body — корпус автомобиля, quarter-car model — «quarter-car»-модель, simplified model — упрощенная модель.)

$$\varepsilon \frac{dz_r}{dt_r} = -(\varepsilon + 2)z_r - \frac{\varepsilon}{2}[\psi_r(x_r + z_r) - \psi_r(x_r - z_r)],$$

где $\varepsilon = R_c/R$ — безразмерная величина. \triangle

Пример 11.4. Схема автомобильной подвески четырехколесного автомобиля изображена на рисунке 11.4. Здесь m_s и m_u — массы корпуса автомобиля и шины колеса, k_s и k_t — жесткость пружин стойки шины и самой шины, b_s — константа демпфера ударов и F — сила, развиваемая приводом активной или полуактивной подвески. При $F = 0$ эта схема соответствует традиционной пассивной подвеске. Длины d_s , d_u и d_r — высота расположения стойки шины, самой шины, а также высота поверхности дороги, отсчитанные от некоторой базовой точки. Закон Ньютона, который описывает баланс сил, действующих на массы m_s и m_u , можно записать в виде следующих уравнений:

$$m_s \ddot{d}_s + b_s(\dot{d}_s - \dot{d}_u) + k_s(d_s - d_u) = F,$$

$$m_u \ddot{d}_u + b_s(\dot{d}_u - \dot{d}_s) + k_s(d_u - d_s) + k_t(d_u - d_r) = -F.$$

В типичном автомобиле собственная частота шины $\sqrt{k_t/m_u}$ приблизительно в 10 раз больше собственной частоты стойки шины и корпуса автомобиля $\sqrt{k_s/m_s}$. Поэтому в качестве малого параметра разумно выбрать следующий:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{k_s/m_s}{k_t/m_u}} = \sqrt{\frac{k_s m_u}{k_t m_s}}.$$

Рассматриваемая система типа «груз на пружине» интересна тем, что она не может быть преобразована в стандартную форму сингулярной модели без масштабирования переменных состояния, зависящего от параметра ε . Жесткость шины $k_t = O(1/\varepsilon^2)$ стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для того, чтобы обеспечить ограниченность потенциальной энергии шины $k_t(d_u - d_r)^2/2$, необходимо, чтобы смещение $d_u - d_r$ было порядка $O(\varepsilon)$, т. е. чтобы масштабированное смещение $(d_u - d_r)/\varepsilon$ оставалось конечной величиной. В дополнение к этому масштабированию мы выполним нормализацию переменных, обеспечивающую их безразмерность: все длины поделим на некоторую величину ℓ , имеющую размерность длины, скорости поделим на $\ell \sqrt{k_s/m_s}$, силы поделим на ℓk_s и время поделим на $\sqrt{m_s/k_s}$. Далее, для того, чтобы представить систему в стандартной форме сингулярно возмущенной системы, введем медленные и быстрые переменные:

$$x = \begin{bmatrix} (d_s - d_u)/\ell \\ (\dot{d}_s/\ell)\sqrt{m_s/k_s} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} (d_u - d_r)/(\varepsilon\ell) \\ (\dot{d}_r/\ell)\sqrt{m_s/k_s} \end{bmatrix}.$$

Пусть $u = F/(k_s \ell)$ — вход системы (управление), $w = (\dot{d}_r/\ell)\sqrt{m_s/k_s}$ — возмущение входа системы и $t_r = t\sqrt{k_s/m_s}$ — безразмерное время. Тогда сингулярно возмущенная модель имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_r} &= x_2 - z_2, \\ \frac{dx_2}{dt_r} &= -x_1 - \beta(x_2 - z_2) + u, \\ \varepsilon \frac{dz_1}{dt_r} &= z_2 - w, \\ \varepsilon \frac{dz_2}{dt_r} &= \alpha x_1 - \alpha \beta(z_2 - x_2) - z_1 - \alpha u, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{k_s m_s}{k_t m_u}}, \quad \beta = \frac{b_s}{\sqrt{k_s m_s}}.$$

В случае пассивной подвески параметры α , β и ε принимают значения в пределах [0.6, 1.2], [0.5, 0.8] и [0.08, 0.135], соответственно. При активной/полуактивной подвеске константа демпфера может быть умень-

шена, поскольку привод обеспечивает дополнительное демпфирование. При $\varepsilon = 0$ получаем редуцированную модель

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt_r} &= x_2 - w, \\ \frac{dx_2}{dt_r} &= -x_1 - \beta(x_2 - w) + u,\end{aligned}$$

которая соответствует упрощенной модели с одной степенью свободы, схема которой изображена на рисунке 11.4. \triangle

11.2. Временные свойства стандартной модели

При управлении динамической системой с сингулярными возмущениями в ней возникают переходные процессы, в которых имеют место как медленные, так и быстрые составляющие. Вольно говоря, медленная составляющая реакции системы на входное воздействие приближенно определяется редуцированной моделью (11.5), а быстрая составляющая переходного процесса соответствует разности между реакцией редуцированной модели и реакцией всей системы (11.1)–(11.2). Для получения более строгих результатов, рассмотрим уравнение состояния

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), \quad x(t_0) = \xi(\varepsilon), \quad (11.6)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon), \quad z(t_0) = \eta(\varepsilon), \quad (11.7)$$

где $\xi(\varepsilon)$ и $\eta(\varepsilon)$ гладко зависят от ε и $t_0 \in [0, t_1]$. Пусть $x(t, \varepsilon)$ и $z(t, \varepsilon)$ — решения задачи (11.6) и (11.7). Если мы поставим соответствующую задачу для редуцированной модели (11.5), мы можем задать лишь n начальных данных, т. к. эта модель будет иметь порядок n . Разумеется, в редуцированной задаче нам следует использовать соответствующие начальные данные для x :

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0), \quad x(t_0) = \xi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \xi(0). \quad (11.8)$$

Обозначим решение (11.8) через $\bar{x}(t)$. Поскольку переменная z исключена из редуцированной модели путем ее замены на «квазиустановившееся состояние» $h(t, x)$, единственное что мы можем получить при решении (11.8), — это функция

$$\bar{z}(t) \stackrel{\text{def}}{=} h(t, \bar{x}(t)),$$

описывающая квазиустановившееся поведение переменной z при $x = \bar{x}$. Для первоначальной переменной z задавалось при t_0 начальное значение $\eta(\varepsilon)$, но для квазиустановившегося состояния \bar{z} такое начальное состояние не может быть свободно назначено и соответствующая разность между начальным значением $\bar{z}(t_0) = h(t_0, \xi_0)$ и заданным начальным значением $\eta(\varepsilon)$ для переменной z может быть большой. Та-

ким образом, функция $\bar{z}(t)$ не может служить в качестве равномерной аппроксимации функции $z(t, \varepsilon)$. Самое большое, что мы можем ожидать в этой ситуации, — это то, что оценка

$$z(t, \varepsilon) - \bar{z}(t) = O(\varepsilon)$$

будет выполнена на интервале времени, не включающем момент t_0 , т. е. при $t \in [t_b, t_1]$, где $t_b > t_0$. С другой стороны, можно рассчитывать на то, что оценка

$$x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon)$$

будет выполнена равномерно для всех $t \in [t_0, t_1]$, поскольку

$$x(t_0, \varepsilon) - \bar{x}(t_0) = \xi(\varepsilon) - \xi(0) = O(\varepsilon).$$

Если ошибка $z(t, \varepsilon) - \bar{z}(t)$ действительно имеет порядок $O(\varepsilon)$ на $[t_b, t_1]$, то на начальном «пограничном» интервале времени $[t_0, t_b]$ переменная z должна стремиться к \bar{z} . Напомним, что скорость z может быть большой, поскольку $\dot{z} = g/\varepsilon$. На практике, положив $\varepsilon = 0$ в (11.2), мы должны получить для переменной z мгновенный переходный процесс, если $g \neq 0$. С учетом выполненного выше исследования свойств устойчивости точки равновесия, становится ясно, что мы не можем рассчитывать на то, что z будет стремиться к квазиустановившемуся состоянию \bar{z} , если не будут выполнены определенные условия устойчивости. Эти условия устанавливаются при дальнейшем анализе системы.

Для последующего исследования полезно выполнить замену переменных

$$y = z - h(t, x), \quad (11.9)$$

которая обеспечивает перенос начала координат в квазиустановившееся состояние переменной z . В новых переменных (x, y) рассматриваемая задача имеет следующий вид:

$$\dot{x} = f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), \quad x(t_0) = \xi(\varepsilon), \quad (11.10)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{y} &= g(t, x, y + h(t, x), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} - \\ &- \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), \quad y(t_0) = \eta(\varepsilon) - h(t_0, \xi(\varepsilon)).\end{aligned} \quad (11.11)$$

Квазиустановившимся состоянием для (11.11) является $y = 0$, при подстановке которого в (11.10) мы получаем редуцированную модель (11.8). При анализе (11.11) следует учитывать, что величина $\varepsilon \dot{y}$ может оставаться конечной, даже если ε стремится к нулю и \dot{y} стремится к бесконечности. Положим

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \quad \text{и, следовательно,} \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}$$

и рассмотрим $\tau = 0$ в качестве начального значения при $t = t_0$. Новая переменная времени $\tau = (t - t_0)/\varepsilon$ представляет собой «растянутое» время, т. е. если ε стремится к нулю, то τ стремится к бесконечности,

даже если конечное t больше t_0 на небольшую, не зависящую от ε , величину. При τ -масштабировании времени уравнение (11.11) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= g(t, x, y + h(t, x), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} - \\ &- \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), \quad y(0) = \eta(\varepsilon) - h(t_0, \xi(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (11.12)$$

В этом уравнении переменные t и x являются медленными, поскольку в масштабе времени τ они определяются равенствами

$$t = t_0 + \varepsilon\tau, \quad x = x(t_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon).$$

Задавая $\varepsilon = 0$ мы замораживаем эти переменные на фиксированных значениях $t = t_0$ и $x = \xi_0$, что делает уравнение (11.12) автономной системой

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t_0, \xi_0, y + h(t_0, \xi_0), 0), \quad y(0) = \eta(0) - h(t_0, \xi_0) \stackrel{\text{def}}{=} \eta_0 - h(t_0, \xi_0), \quad (11.13)$$

которая имеет точку равновесия $y = 0$. Если эта точка равновесия является асимптотически устойчивой и $y(0)$ принадлежит ее области притяжения, то можно ожидать, что решение (11.13) достигнет $O(\varepsilon)$ -окрестности начала координат в течение пограничного интервала времени. Для анализа свойств решения за пределами этого интервала нам необходимо убедиться в том, что это решение обладает свойствами устойчивости, которые гарантируют близость $y(\tau)$ к нулю при отклонении значений медленно меняющихся параметров (t, x) от их начальных значений (t_0, ξ_0) . Для анализа этой ситуации мы допустим изменение замороженных параметров в пределах области медленно меняющихся параметров (t, x) .¹⁾ Предположим, что решение $\bar{x}(t)$ редуцированной задачи определено при $t \in [0, t_1]$ и $\bar{x}(t) \in D_x \subset R^n$ для некоторой области D_x . Запишем (11.13) в виде

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t, x, y + h(t, x), 0), \quad (11.14)$$

где $(t, x) \in [0, t_1] \times D_x$ рассматриваются как фиксированные параметры. Мы будем называть (11.14) пограничной моделью или пограничной системой.²⁾ Иногда мы будем называть пограничной моделью и (11.13). При этом следует быть внимательным, т. к. (11.13) представляет собой (11.14) при заданных начальном моменте времени и начальном состо-

¹⁾ В параграфе 9.6 было показано, что если начало координат системы (11.13) экспоненциально устойчиво равномерно по фиксированным параметрам (t_0, ξ_0) , то оно остается экспоненциально устойчивым при их замене на медленно меняющиеся переменные (t, x) .

²⁾ Прим. ред. перев. — В отечественной литературе используется термин «присоединенная система».

яния. Нам важно установить для системы (11.14) свойство экспоненциальной устойчивости ее начала координат, которое выполнялось бы равномерно по замороженным параметрам. Это свойство определяется следующим образом.

Определение 11.1. Точка равновесия $y = 0$ пограничной системы (11.14) является экспоненциально устойчивой равномерно по $(t, x) \in [0, t_1] \times D_x$, если существуют положительные константы k , γ и ρ_0 , такие что решения (11.14) удовлетворяют неравенству

$$\|y(\tau)\| \leq k \|y(0)\| \exp(-\gamma\tau), \quad \forall \|y(0)\| < \rho_0, \quad \forall (t, x) \in [0, t_1] \times D_x, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (11.15)$$

За исключением тривиальных случаев, когда решение пограничной модели могут быть получены в явном виде, проверка выполнения свойства экспоненциальной устойчивости начала координат должна проводиться либо с использованием метода линеаризации, либо методом Ляпунова. Можно показать (см. упражнение 11.5), что если собственные значения матрицы Якоби $[\partial g / \partial y]$ удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \left[\lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial y}(t, x, h(t, x), 0) \right\} \right] \leq -c < 0, \quad \forall (t, x) \in [0, t_1] \times D_x, \quad (11.16)$$

то существуют константы k , γ и ρ_0 , для которых выполнено (11.15). Этот результат разумеется является лишь локальным, т. е. константа ρ_0 может быть очень малой. Альтернативно можно показать (см. упражнение 11.6), что если существует функция Ляпунова $V(t, x, y)$, удовлетворяющая

$$c_1 \|y\|^2 \leq V(t, x, y) \leq c_2 \|y\|^2 \quad (11.17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} g(t, x, y + h(t, x), 0) \leq -c_3 \|y\|^2 \quad (11.18)$$

при $(t, x, y) \in [0, t_1] \times D_x \times D_y$, где $D_y \subset R^m$ — некоторая открытая область, содержащая начало координат, то условие (11.15) выполнено с оценками

$$\rho_0 = \rho \sqrt{c_1} / c_2, \quad k = \sqrt{c_2} / c_1, \quad \gamma = c_3 / 2c_2, \quad (11.19)$$

где $B_\rho \subset D_y$.

Теорема 11.1. Рассмотрим задачу с сингулярным возмущением (11.6), (11.7) и пусть $z = h(t, x)$ — изолированный корень (11.3). Предположим, что следующие условия выполнены для всех

$$[t, x, z - h(t, x), \varepsilon] \in [0, t_1] \times D_x \times D_y \times [0, \varepsilon_0]$$

для некоторых областей $D_x \subset R^n$ и $D_y \subset R^m$, где D_x выпукла и D_y содержит начало координат:

- Функции f , g , их первые частные производные по (x, z, ε) , и первая частная производная g по t непрерывны; функция $h(t, x)$ и якобиан $[\partial g(t, x, z, 0) / \partial z]$ имеют непрерывные первые частные производные по их аргументам; начальные данные $\xi(\varepsilon)$ и $\eta(\varepsilon)$ являются гладкими функциями от ε .

- Редуцированная задача (11.8) имеет единственное решение $\bar{x}(t) \in S$ при $t \in [t_0, t_1]$, где S — компактное подмножество D_x .
- Начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия пограничной модели (11.14) равномерно по (t, x) ; пусть $\mathcal{R}_y \subset D_y$ — область притяжения (11.13) и Ω_y — компактное подмножество \mathcal{R}_y .

Тогда существует положительная константа ε^* , такая что для всех $\eta_0 - h(t_0, \xi_0) \in \Omega_y$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ задача с сингулярными возмущениями (11.6) и (11.7) имеет единственное решение $x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)$ на $[t_0, t_1]$ и равенства

$$x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon), \quad (11.20)$$

$$z(t, \varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) - \hat{y}((t - t_0)/\varepsilon) = O(\varepsilon) \quad (11.21)$$

выполнены равномерно при $t \in [t_0, t_1]$, где $\hat{y}(\tau)$ — решение пограничной модели (11.13). Более того, для любого заданного $t_b > t_0$ существует $\varepsilon^{**} \leq \varepsilon^*$, такая что равенство

$$z(t, \varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) = O(\varepsilon), \quad (11.22)$$

выполнено равномерно по $t \in [t_b, t_1]$, если $\varepsilon < \varepsilon^{**}$.

Доказательство: См. приложение C.17. \square

Эта теорема известна как теорема Тихонова.¹⁾ При ее доказательстве свойства устойчивости пограничной модели используются для того, чтобы показать справедливость неравенства

$$\|y(t, \varepsilon)\| \leq k_1 \exp \left[\frac{-\alpha(t - t_0)}{\varepsilon} \right] + \varepsilon \delta.$$

С использованием этой оценки и (11.10) доказывается выполнение равенства (11.20), что представляется правдоподобным, поскольку $\int_0^t \exp(-\alpha s/\varepsilon) ds$ имеет порядок $O(\varepsilon)$. Доказательство завершается анализом ошибки (11.11) в τ -масштабе времени, результатом которого являются равенства (11.21) и (11.22).

Пример 11.5. Рассмотрим задачу с сингулярными возмущениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z, & x(0) &= \xi_0 \\ \varepsilon \dot{z} &= -x - z + u(t), & z(0) &= \eta_0, \end{aligned}$$

которая соответствует модели электродвигателя постоянного тока из примера 11.1. Предположим, что $u(t) = t$ при $t \geq 0$. Нам необходимо решить уравнение состояния на интервале $[0, 1]$. Единственным корнем (11.3) является $h(t, x) = -x + t$ и пограничная модель (11.14) имеет вид

$$\frac{dy}{d\tau} = -y.$$

¹⁾ Существуют другие версии теоремы Тихонова, в которых используются несколько другие условия. (См. например, [105, Chapter 1, Theorem 3.1].) Прим. ред. перев. — На русском языке имеется обширная литература по методу сингулярных возмущений (см. [Д19, Д50]).

Легко показать, что начало координат пограничной системы является глобально экспоненциально устойчивым. Редуцированная задача

$$\dot{x} = -x + t, \quad x(0) = \xi_0$$

имеет единственное решение

$$\bar{x}(t) = t - 1 + (1 + \xi_0) \exp(-t).$$

Пограничная задача

$$\frac{dy}{d\tau} = -y, \quad y(0) = \eta_0 + \xi_0$$

имеет единственное решение

$$\hat{y}(\tau) = (\eta_0 + \xi_0) \exp(-\tau).$$

Из теоремы 11.1 следует, что

$$x - [t - 1 + (1 + \xi_0) \exp(-t)] = O(\varepsilon),$$

$$z - \left[(\eta_0 + \xi_0) \exp \left(\frac{-t}{\varepsilon} \right) + 1 - (1 + \xi_0) \exp(-t) \right] = O(\varepsilon)$$

для всех $t \in [0, 1]$. Переходный процесс для $O(\varepsilon)$ -аппроксимации переменной z имеет две составляющие различного временного масштаба. Эволюция системы начинается с быстрого переходного процесса $(\eta_0 + \xi_0) \exp(-t/\varepsilon)$. Это поведение соответствует так называемой пограничной части решения. После затухания этого процесса z остается близкой к $[1 - (1 + \xi_0) \exp(-t)]$ и эта часть переходного процесса соответствует медленной части решения, когда система достигла квазиустановившегося состояния. Подобное поведение с двумя временными шкалами характерно лишь для переменной z , в то время как переменная x остается преимущественно медленной. В действительности, x испытывает быстрый (пограничный) переходный процесс, но он имеет порядок $O(\varepsilon)$. Поскольку эта система линейна, мы можем исследовать ее поведение с использованием модального анализа. Легко видеть, что система имеет одно медленное собственное значение λ_1 , близость которого к собственному значению редуцированной модели имеет порядок $O(\varepsilon)$, т. е. $\lambda_1 = -1 + O(\varepsilon)$, и одно быстрое собственное значение $\lambda_2 = \lambda/\varepsilon$, где близость λ к собственному значению пограничной модели имеет порядок $O(\varepsilon)$, т. е. $\lambda_2 = [-1 + O(\varepsilon)]/\varepsilon$. Точными решениями x и z являются линейные комбинации медленной моды $\exp(\lambda_1 t)$, быстрой моды $\exp(\lambda_2 t/\varepsilon)$ и установившегося компонента, соответствующего входу системы $u(t) = t$. Если модальная декомпозиция может быть получена в явном виде, можно показать, что коэффициент при быстрой моде по x имеет порядок $O(\varepsilon)$. В случае линейной системы это исследование может быть выполнено аналитически. (См. упражнение 11.14.) \triangle

Пример 11.6. Рассмотрим задачу с сингулярными возмущениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bz, & x(0) &= \xi_0, \\ \varepsilon \dot{z} &= \psi(u(t) - z - k_2 Cx), & z(0) &= \eta_0\end{aligned}$$

для системы управления с сильной обратной связью из примера 11.2. Предположим, что $u(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\psi(\cdot) = \operatorname{tg}^{-1}(\cdot)$. Единственным корнем (11.3) является $h(t, x) = 1 - k_2 Cx$ и пограничная модель (11.14) имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{tg}^{-1}(-y) = -\operatorname{tg}^{-1}(y).$$

Якобиан

$$\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{1}{1+y^2} \Big|_{y=0} = -1$$

является гурвицевой матрицей и, следовательно, начало координат пограничной модели экспоненциально устойчиво. Очевидно также, что начало координат является глобально асимптотически устойчивым. Редуцированная система

$$\dot{x} = (A - Bk_2 C)x + B, \quad x(0) = \xi_0$$

линейна и все предположения теоремы 11.1 выполнены. Следовательно мы можем получить аппроксимации x и z в терминах решений этих редуцированной и пограничной моделей. \triangle

Пример 11.7. Рассмотрим задачу с сингулярными возмущениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2(1+t)/z, & x(0) &= 1, \\ \varepsilon \dot{z} &= -[z + (1+t)x]z[z - (1+t)], & z(0) &= \eta_0.\end{aligned}$$

Уравнение (11.3) принимает в рассматриваемом примере вид

$$0 = -[z + (1+t)x]z[z - (1+t)]$$

и имеет три изолированных корня

$$z = -(1+t)x, \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = 1+t$$

в области $\{t \geq 0 \text{ и } x > k\}$, $0 < k < 1$. Рассмотрим первый корень $z = -(1+t)x$. Пограничная модель (11.14) имеет следующий вид:

$$\frac{dy}{dt} = -y[y - (1+t)x][y - (1+t)x - (1+t)].$$

Из графика функции (см. рисунок 11.5(a)), определяемой правой частью этого равенства, видно, что начало координат асимптотически устойчиво при $y < (1+t)x$ и эта область является областью притяжения этой точки. Положив $V(y) = y^2$, можно легко показать, что V удовлетворяет (11.17) и (11.18) при $y \leq \rho < (1+t)x$. Редуцированная задача

$$\dot{x} = -x, \quad x(0) = 1$$

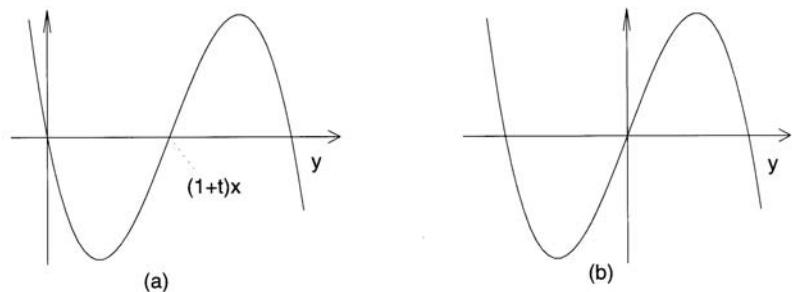


Рис. 11.5. Правая часть пограничной задачи: (a) $z = -(1+t)x$, (b) $z = 0$.

имеет единственное решение $\bar{x}(t) = \exp(-t)$ для всех $t \geq 0$. Пограничная задача при $t = 0$ и $x = 1$

$$\frac{dy}{dt} = -y(y-1)(y-2), \quad y(0) = \eta_0 + 1$$

имеет единственное затухающее решение $\hat{y}(\tau)$ при $\eta_0 < 0$. Рассмотрим следующий корень $z = 0$. Пограничная модель (11.14) имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = -[y + (1+t)x]y[y - (1+t)].$$

Из графика функции (см. рисунок 11.5(b)), определяемой правой частью этого равенства, видно, что начало координат является неустойчивым. Следовательно, в этом случае применить теорему 11.1 невозможно. Наконец, пограничная модель для третьего корня $z = 1+t$ имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = -[y + (1+t) + (1+t)x][y + (1+t)]y.$$

Аналогично тому, как это было сделано в первом случае, можно показать, что начало координат экспоненциально устойчиво равномерно по (t, x) . Редуцированная задача

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1$$

имеет единственное решение $\bar{x}(t) = 1/(1-t)$ для всех $t \in [0, 1]$. Заметим, что $\bar{x}(t)$ уходит на бесконечность за конечное время при $t = 1$. Тем не менее, теорема 11.1 в рассматриваемом случае применима при $t \in [0, t_1]$, $t_1 < 1$. Пограничная задача при $t = 0$ и $x = 1$,

$$\frac{dy}{dt} = -(y+2)(y+1)y, \quad y(0) = \eta_0 - 1$$

имеет единственное решение $\hat{y}(\tau)$ при $\eta_0 > 0$. Из всех трех корней (11.3) лишь два корня $h = -(1+t)x$ и $h = 1+t$ приводят к требуемой редуцированной модели. Теорема 11.1 применяется в случае первого корня $h = -(1+t)x$, если $\eta_0 < 0$ и в случае второго корня $h = 1+t$, если $\eta_0 > 0$. На рисунках 11.6 и 11.7 показаны результаты компьютер-

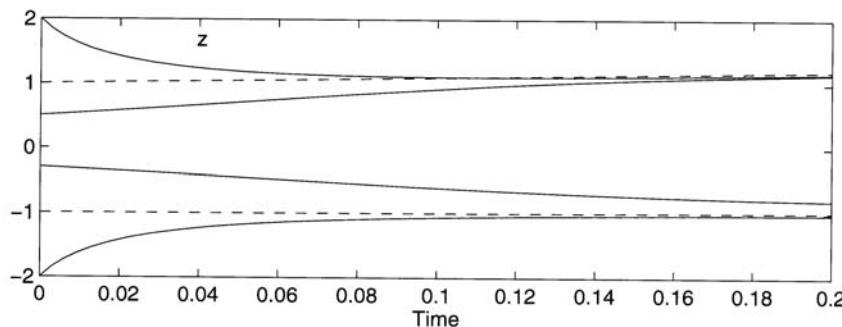


Рис. 11.6. Результаты компьютерного моделирования для z из примера 11.7 при $\varepsilon_j = 0.1$: пунктирная линия — решение редуцированной задачи, непрерывная линия — точное решение задачи

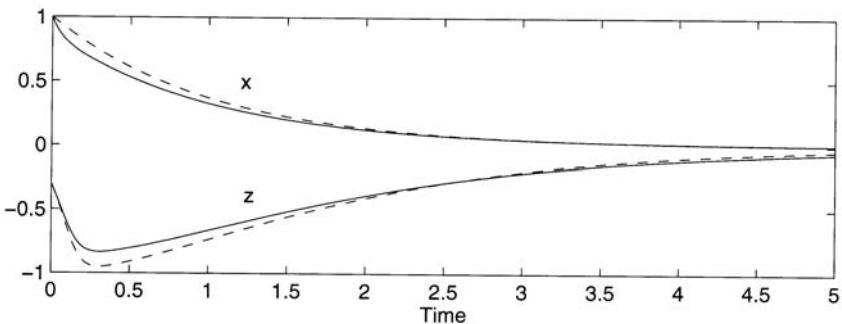


Рис. 11.7. Точное (непрерывная линия) и приближенное (пунктирная линия) решения из примера 11.7 при $\varepsilon = 0.1$

ного моделирования при $\varepsilon = 0.1$. На рисунке 11.6 показан график z для двух пар значений η_0 (для каждой из двух редуцированных моделей соответствующая пара значений). На рисунке 11.7 показаны точное и приближенное решения x и z при $\eta_0 = -0.3$. Из рисунка 11.6 легко видеть, что переходный процесс имеет две компоненты, эволюционирующие в двух различных временных шкалах. Быстрая компонента решения $z(t, \varepsilon)$ начинается в η_0 и стремится к $\bar{z}(t)$. После затухания этого переходного процесса траектория остается вблизи $\bar{z}(t)$. В случае, когда $\eta_0 = -0.3$, сходимость к $\bar{z}(t)$ не заметна на протяжении интервала времени $[0, 0.2]$. Однако если рассмотреть этот процесс на протяжении более длительного интервала времени (см. рисунок 11.7), можно заметить, что $z(t, \varepsilon)$ стремится к $\bar{z}(t)$. Рисунок 11.7 иллюстрирует результат теоремы Тихонова, касающейся асимптотической $O(\varepsilon)$ -апроксимации. \triangle

11.3. Сингулярные возмущения на бесконечном интервале времени

Как видно из доказательства теоремы 11.1, она верна лишь на $O(1)$ -интервалах времени. В частности, в соответствии с (C.81), имеем оценку

$$\|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t)\| \leq \varepsilon k_3 [1 + t_1 - t_0] \exp[L_6(t_1 - t_0)].$$

Для любого конечного t_1 предыдущая оценка имеет порядок $O(\varepsilon)$, но ее порядок не равен $O(\varepsilon)$ равномерно по t для всех $t \geq t_0$. Для того, чтобы это требование было выполнено, необходимо показать, что

$$\|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t)\| \leq \varepsilon k, \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

Это может быть сделано при выполнении некоторых дополнительных условий устойчивости. В следующей теореме на редуцированную систему (11.5) будет наложено требование экспоненциальной устойчивости начала координат и для оценки области притяжения этой точки будет использована теория функций Ляпунова.

Теорема 11.2. Рассмотрим задачу с сингулярными возмущениями (11.6) и (11.7). Пусть $z = h(t, x)$ — изолированный корень (11.3). Предположим, что следующие условия выполнены для всех

$$[t, x, z - h(t, x), \varepsilon] \in [0, \infty) \times D_x \times D_y \times [0, \varepsilon_0]$$

для некоторых областей $D_x \subset R^n$ и $D_y \subset R^m$, содержащих соответствующие начала координат:

- На любом компактном подмножестве $D_x \times D_y$ функции f , g их первые частные производные по (x, z, ε) и первая частная производная g по t непрерывны и ограничены, $h(t, x)$ и $[\partial g(t, x, z, 0)/\partial z]$ имеют ограниченные первые частные производные по своим аргументам, и $[\partial f(t, x, h(t, x), 0)/\partial x]$ липшицева по x равномерно по t ; начальные данные $\xi(\varepsilon)$ и $\eta(\varepsilon)$ являются гладкими функциями параметра ε ;
- начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия редуцированной системы (11.5); существует функция Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 4.9 для (11.5) при $(t, x) \in [0, \infty) \times D_x$ и для $\{W_1(x) \leq c\}$ — компактного подмножества D_x ;
- начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия пограничной системы (11.14) равномерно по (t, x) ; пусть $\mathcal{R}_y \subset D_y$ — область притяжения (11.13) и Ω_y — компактное подмножество \mathcal{R}_y .

Тогда для любого компактного множества $\Omega_x \subset \{W_2(x) \leq \rho c, 0 < \rho < 1\}$ существует положительная константа ε^* , такая что для всех $t_0 \geq 0, \xi_0 \in \Omega_x, \eta_0 - h(t_0, \xi_0) \in \Omega_y$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ задача с сингулярными

возмущениями (11.6) и (11.7) имеет единственное решение $x(t, \varepsilon)$, $z(t, \varepsilon)$ на $[t_0, \infty)$ и равенства

$$x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon), \quad (11.23)$$

$$z(t, \varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) - \hat{y}((t - t_0)/\xi) = O(\varepsilon) \quad (11.24)$$

выполнены равномерно по $t \in [t_0, \infty)$, где $\bar{x}(t)$ и $\hat{y}(\tau)$ — решения редуцированной и пограничной задач (11.8) и (11.13). Более того, для любого заданного $t_b > t_0$ существует $\varepsilon^{**} \leq \varepsilon^*$, такая что равенство

$$z(t, \varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) = O(\varepsilon) \quad (11.25)$$

выполнено равномерно для $t \in [t_b, \infty)$, если $\varepsilon < \varepsilon^{**}$.

Доказательство: См. приложение C.18. \square

В случае, когда редуцированная система (11.5) автономна, в качестве множества Ω_x в теореме 11.2 можно взять любое компактное подмножество его области притяжения. Это утверждение является следствием обратной теоремы Ляпунова 4.17, которая гарантирует существование функции Ляпунова $V(x)$, такой что любое компактное подмножество области притяжения принадлежит внутренности компактного множества вида $\{V(x) \leq c\}$.

Пример 11.8. Рассмотрим задачу с сингулярными возмущениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - x - \frac{1}{2}[\psi(x+z) + \psi(x-z)], \quad x(0) = \xi_0, \\ \varepsilon \dot{z} &= -(\varepsilon+2)z - \frac{\varepsilon}{2}[\psi(x+z) - \psi(x-z)], \quad z(0) = \eta_0. \end{aligned}$$

Эта модель соответствует электрической цепи, рассмотренной в примере 11.3. Предположим, что

$$\psi(v) = a \left[\exp\left(\frac{v}{b}\right) - 1 \right], \quad a > 0, b > 0.$$

Для того, чтобы упростить здесь запись соответствующих уравнений из примера 11.3, мы опустили нижний индекс r . Условия теоремы 11.2, касающиеся дифференцируемости и липшицевости, выполнены на любом компактном множестве точек (x, z) . Редуцированная модель

$$\dot{x} = 1 - x - a \left[\exp\left(\frac{x}{b}\right) - 1 \right] \stackrel{\text{def}}{=} f_o(x)$$

имеет единственную точку равновесия в $x = p^*$, где p^* — единственный корень уравнения $f_o(p^*) = 0$. Легко видеть, что $0 < p^* < 1$. Якобиан

$$\left. \frac{df_o}{dx} \right|_{x=p^*} = -1 - \frac{a}{b} \exp\left(\frac{p^*}{b}\right) < -1$$

отрицателен и, следовательно, точка равновесия $x = p^*$ является экспоненциально устойчивой. Более того, нарисовав график функции $f_o(x)$, можно заметить, что $x = p^*$ является глобально асимптотически устой-

чивой точкой. Замена переменных $\tilde{x} = x - p^*$ перемещает точку равновесия в начало координат. Пограничная модель

$$\frac{dz}{dt} = -2z$$

не зависит от x и ее начало координат является глобально экспоненциально устойчивым. Таким образом, все условия теоремы 11.2 выполнены глобально и оценки (11.23)–(11.25) при $h = 0$ выполнены для всех $t \geq 0$ и для любого ограниченного начального состояния (ξ_0, η_0) . \triangle

Пример 11.9. Рассмотрим адаптивное управление объектом, заданным передаточной функцией второго порядка

$$\tilde{P}(s) = \frac{k_p}{(s - a_p)(\varepsilon s + 1)},$$

где a_p , $k_p > 0$ и $\varepsilon > 0$ — неизвестные параметры. Параметр ε представляет собой малую «паразитную» постоянную времени. Предположим, что мы положили $\varepsilon = 0$ и упростили тем самым передаточную функцию:

$$P(s) = \frac{k_p}{s - a_p}.$$

Разработаем адаптивный регулятор для системы, задаваемой этой передаточной функцией первого порядка. В параграфе 1.2.6 была предложена адаптивный регулятор с эталонной моделью вида

$$\begin{aligned} u &= \theta_1 r + \theta_2 y_p, \\ \dot{\theta}_1 &= -\gamma(y_p - y_m)r, \\ \dot{\theta}_2 &= -\gamma(y_p - y_m)y_p, \end{aligned}$$

где y_p , u , r и y_m — выход объекта управления, входное управляющее воздействие, эталонный вход и эталонный выход, соответственно. В параграфе 1.2.6 было показано, что для рассматриваемой здесь модели первого порядка и для эталонной модели

$$\dot{y}_p = a_p y_p + k_p u$$

и

$$\dot{y}_m = a_m y_m + k_m r, \quad k_m > 0,$$

уравнение состояния замкнутой адаптивной системы управления имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{e}_o &= a_m e_o + k_p \phi_1 r + k_p \phi_2 (e_o + y_m), \\ \dot{\phi}_1 &= -\gamma e_o r, \\ \dot{\phi}_2 &= -\gamma e_o (e_o + y_m), \end{aligned}$$

где $e_o = y_p - y_m$, $\phi_1 = \theta_1 - \theta_1^*$, $\phi_2 = \theta_2 - \theta_2^*$, $\theta_1^* = k_m/k_p$ и $\theta_2^* = (a_m - a_p)/k_p$. Определим вектор состояния

$$\mathbf{x} = [e_o \ \phi_1 \ \phi_2]^T$$

и перепишем уравнение состояния в следующей форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = f_0(t, \mathbf{x}),$$

где $f_0(t, 0) = 0$. Мы будем называть это уравнение состояния первого порядка номинальной адаптивной системой управления и используем его при исследовании свойств устойчивости рассматриваемой системы. При этом мы будем предполагать, что начало координат модели является экспоненциально устойчивым.¹⁾ При использовании адаптивного регулятора в неупрощенной системе второго порядка, соответствующая замкнутая модель будет отличаться от номинальной модели. Представим рассматриваемую задачу в форме задачи с сингулярными возмущениями. Неупрощенная модель второго порядка может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{y}_p &= a_p y_p + k_p z, \\ \varepsilon \dot{z} &= -z + u.\end{aligned}$$

Используя предложенный в параграфе 1.2.6 подход, можно представить неупрощенную адаптивную систему управления в виде модели с сингулярными возмущениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_0(t, x) + K[z - h(t, x)], \\ \varepsilon \dot{z} &= -z + h(t, x),\end{aligned}$$

где

$$h(t, x) = u = (\theta_1^* + \phi_1)r(t) + (\theta_2^* + \phi_2)(e_o + y_m(t)), \quad K = [k_p, 0, 0]^T.$$

Сигнал $y_m(t)$ представляет собой выход системы с гурвицовой передаточной функцией с входом $r(t)$. Поэтому он имеет те же свойства

¹⁾ В примере 8.12 было показано, что это предположение будет выполнено при наличии в системе постоянного возбуждения. В частности, начало координат будет экспоненциально устойчивым, если $r(t) = a \sin \omega t$. Заметим, что анализ в этом примере выполняется в предположении, что $r(t)$ фиксировано, и исследование асимптотического поведения системы проводится при малой ε . Как только мы зафиксировали значение параметра ε и положили его равным некоторой малой константе, сделанное предположение накладывает ограничение на $r(t)$ и в частности на частоту входного сигнала ω . При увеличении ω мы можем оказаться в ситуации, когда результаты рассматриваемого примера становятся неверны, т. к. высокочастотный вход может привести к тому, что изменение медленной переменной x перестанет быть медленным. Например, сигнал $\dot{r}(t)$, имеющий порядок $O(\omega)$, может привести к нарушению нашего предположения о том, что \dot{r} имеет порядок $O(1)$ по ε .

гладкости и ограниченности, которыми обладает $r(t)$. В частности, если $r(t)$ имеет непрерывные и ограниченные производные до порядка N включительно, то это свойство будет выполнено и для $y_m(t)$. Исследуем полученную систему с сингулярными возмущениями. При $\varepsilon = 0$ имеем $z = h(t, x)$ и редуцированная модель принимает вид уравнения

$$\dot{x} = f_0(t, x),$$

являющегося замкнутой моделью номинальной адаптивной системы управления. Мы предположили, что начало координат модели является экспоненциально устойчивым. Пограничная модель

$$\frac{dy}{d\tau} = -y$$

не зависит от (t, x) и ее начало координат глобально экспоненциально устойчиво. Если эталонный входной сигнал $r(t)$ и его производная $\dot{r}(t)$ ограничены, то все предположения теоремы 11.2 будут выполнены на любом компактном множестве точек (x, z) . Обозначим через \bar{x} решение номинальной адаптивной системы управления, а через $x(t, \varepsilon)$ — решение неупрощенной адаптивной системы управления и предположим, что начальные условия для этих решений совпадают. С использованием теоремы 11.2 заключаем, что существует $\varepsilon^* > 0$, такая что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ выполнено

$$x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon),$$

равномерно по t для всех $t \geq t_0$. Этот результат показывает, что рассматриваемая адаптивная система управления является робастной относительно немоделируемой быстрой динамики объекта. \triangle

11.4. Медленные и быстрые многообразия

В этом параграфе мы дадим геометрическое представление о поведении решений (11.1)–(11.2), являющихся траекториями в R^{n+m} и характеризующихся тем, что соответствующие процессы в системе протекают в двух временных шкалах. Для того, чтобы использовать концепцию инвариантных многообразий,¹⁾ ограничимся рассмотрением автономных систем. Кроме того, для упрощения обозначений мы предположим, что f и g не зависят от ε . Таким образом, в этом параграфе мы будем рассматривать системы с сингулярными возмущениями (11.1)–(11.2) следующего вида:

$$\dot{x} = f(x, z), \tag{11.26}$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(x, z). \tag{11.27}$$

¹⁾ Инвариантные многообразия были введены в параграфе 8.1.

Пусть $z = h(x)$ — изолированный корень уравнения $0 = g(x, z)$ и предположим, что для этого корня выполнены условия теоремы 11.1. Уравнение $z = h(x)$ задает многообразие размерности n в пространстве состояний (x, z) размерности $(n + m)$. Оно является инвариантным для системы

$$\dot{x} = f(x, z), \quad (11.28)$$

$$0 = g(x, z), \quad (11.29)$$

поскольку траектория системы (11.28)–(11.29), начинающаяся на многообразии $z = h(x)$, остается на этом многообразии для всех будущих моментов времени (для которых это решение определено). Движение на этом многообразии описывается редуцированной моделью

$$\dot{x} = f(x, h(x)).$$

Из теоремы 11.1 следует, что траектории системы (11.26)–(11.27), начинающиеся в $O(\varepsilon)$ -окрестности $z = h(x)$, останутся в $O(\varepsilon)$ -окрестности $z = h(x)$. Этот результат мотивирует постановку следующего вопроса: Существует ли аналог инвариантного многообразия $z = h(x)$ при $\varepsilon > 0$? Оказывается, что в условиях предположений теоремы 11.1 существует инвариантное многообразие для (11.26)–(11.27), которое лежит в $O(\varepsilon)$ -окрестности $z = h(x)$. Далее мы будем искать это инвариантное многообразие для (11.26)–(11.27) в виде

$$z = H(x, \varepsilon), \quad (11.30)$$

где H — достаточно гладкая (т. е. достаточно много раз непрерывно дифференцируемая) функция от x и ε . Выражение (11.30) определяет в пространстве состояний (x, z) размерности $(n + m)$ многообразие размерности n , зависящее от ε . Для того, чтобы $z = H(x, \varepsilon)$ было инвариантным многообразием для (11.26)–(11.27), должно быть выполнено $z(0, \varepsilon) - H(x(0, \varepsilon), \varepsilon) = 0 \Rightarrow z(t, \varepsilon) - H(x(t, \varepsilon), \varepsilon) \equiv 0, \forall t \in J \subset [0, \infty)$,

где J — любой интервал времени, на котором существует решение $[x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)]$. Дифференцируя (11.30) по t , умножая на ε и подставляя \dot{x} , $\varepsilon\dot{z}$ и z из (11.26), (11.27) и (11.30), соответственно, получаем *уравнение многообразия*

$$0 = g(x, H(x, \varepsilon)) - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial x} f(x, H(x, \varepsilon)), \quad (11.31)$$

которому должна удовлетворять функция $H(x, \varepsilon)$ для всех x из рассматриваемой области и для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. При $\varepsilon = 0$ дифференциальное уравнение в частных производных (11.31) сводится к следующему уравнению

$$0 = g(x, H(x, 0)),$$

из которого следует, что $H(x, 0) = h(x)$. Поскольку уравнение $0 = g(x, z)$ может иметь неединственный изолированный корень $z =$

$= h(x)$, можно искать инвариантное многообразие для (11.26)–(11.27) в окрестности каждого такого корня. Можно показать,¹⁾ что существуют $\varepsilon^* > 0$ и функция $H(x, \varepsilon)$, удовлетворяющая уравнению многообразия (11.31) для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$, и такая что

$$H(x, \varepsilon) - h(x) = O(\varepsilon)$$

для ограниченных x . Инвариантное многообразие $z = H(x, \varepsilon)$ называется *медленным многообразием* для системы (11.26)–(11.27). Каждому медленному многообразию соответствует медленная модель

$$\dot{x} = f(x, H(x, \varepsilon)), \quad (11.32)$$

описывающая движение на этом многообразии.

В большинстве случаев мы не можем получить решение уравнение многообразия (11.31) в явном виде, но можем аппроксимировать $H(x, \varepsilon)$ с произвольной точностью, используя ряд Тейлора в $\varepsilon = 0$. Процедура получения приближенного решения начинается с подстановки в (11.31) ряда Тейлора для $H(x, \varepsilon)$

$$H(x, \varepsilon) = H_0(x) + \varepsilon H_1(x) + \varepsilon^2 H_2(x) + \dots$$

Далее вычисляются $H_0(x), H_1(x)$ и так далее путем приравнивания соответствующих членов при равных степенях ε . Для этого необходимо, чтобы функции f и g были непрерывно дифференцируемы по своим аргументам достаточное количество раз. Очевидно, что $H_0(x) = H(x, 0) = h(x)$. Уравнение для $H_1(x)$ принимает вид

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, h(x)) H_1(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x, h(x))$$

и имеет единственное решение, если якобиан $[\partial g / \partial z]$, вычисленный в $z = h(x)$, является невырожденной матрицей. Невырожденность якобиана следует из условия на собственные значения (11.16). Аналогично только что рассмотренному случаю для H_1 , уравнения для членов высшего порядка будут линейными и разрешимыми, если якобиан $[\partial g / \partial z]$ является невырожденным.

Для того, чтобы ввести понятие быстрого многообразия, рассмотрим (11.26)–(11.27) во временной шкале $\tau = t/\varepsilon$. При $\varepsilon = 0$, $x(\tau) \equiv x(0)$, а $z(\tau)$ эволюционирует в соответствии с уравнением

$$\frac{dz}{d\tau} = g(x(0), z)$$

¹⁾ Здесь мы не доказываем существование инвариантного многообразия. Доказательство этого факта по форме совпадает с доказательством теоремы 8.1 (о центральном многообразии), представленным в приложении С.15. (См. [34, параграф 2.7].) Доказательство существования этого многообразия в условиях предположений теоремы 11.1 может быть найдено в работе [102].

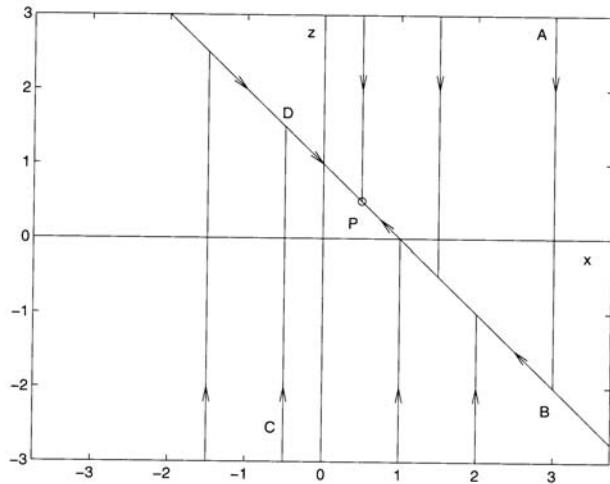


Рис. 11.8. Аппроксимация фазового портрета системы из примера 11.10

стремясь к точке равновесия $z = h(x(0))$. Это движение соответствует траекториям (x, z) в R^{n+m} , принадлежащим для любого заданного $x(0)$ быстрому многообразию F_x , которое определяется равенством $x = x(0) = \text{const}$. Эти траектории быстро сходятся к многообразию $z = h(x)$. Если параметр ε больше нуля, но мал, быстрые многообразия представляют собой «расслоение» решений, быстро стремящихся к медленному многообразию. Проиллюстрируем описанную ситуацию двумя примерами систем второго порядка.

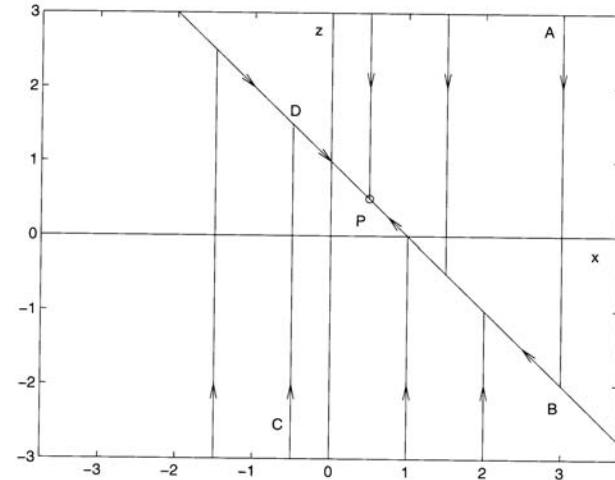
Пример 11.10. Рассмотрим систему с сингулярными возмущениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + z, \\ \varepsilon \dot{z} &= \operatorname{tg}^{-1}(1 - z - x).\end{aligned}$$

При $\varepsilon = 0$ медленное многообразие определяется уравнением $z = h(x) = 1 - x$. Соответствующая медленная модель

$$\dot{x} = -2x + 1$$

имеет асимптотически устойчивую точку равновесия в $x = 0.5$. Поэтому траектории на многообразии $z = 1 - x$ движутся в направлении к точке $P = (0.5, 0.5)$, как это показано стрелками на рисунке 11.8. Заметим, что $(0.5, 0.5)$ является точкой равновесия всей системы. При $\varepsilon = 0$ быстрые многообразия параллельны z -оси и траектории на них стремятся к медленному многообразию $z = 1 - x$. С учетом этой информации мы можем построить фазовый портрет системы. Например, траектория, начинающаяся в точке A , проходит вертикально вниз до тех пор, пока не достигает многообразия $z = 1 - x$ в точке B . Из точки B траектория движется вдоль многообразия к точке равновесия P .

Рис. 11.9. Фазовый портрет системы из примера 11.10 при $\varepsilon = 0.1$

Аналогично, траектория, начинающаяся в точке C проходит вертикально вверх до точки D и далее проходит вдоль многообразия до точки равновесия P . Если параметр $\varepsilon > 0$, но мал, фазовый портрет системы будет близок к аппроксимации, полученной при $\varepsilon = 0$. На рисунке 11.9 показан фазовый портрет при $\varepsilon = 0.1$. Схожесть этих двух фазовых портретов отчетливо видна. \triangle

Пример 11.11. Рассмотрим уравнение Ван дер Поля

$$\frac{d^2v}{ds^2} - \mu(1 - v^2) \frac{dv}{ds} + v = 0$$

при $\mu \gg 1$. Используя

$$x = -\frac{1}{\mu} \frac{dv}{ds} + v - \frac{1}{3}v^3; \quad z = v$$

в качестве переменных состояния, $t = s/\mu$ в качестве переменной времени и полагая $\varepsilon = 1/\mu^2$, мы можем представить систему в стандартной форме модели с сингулярными возмущениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z, \\ \varepsilon \dot{z} &= -x + z - \frac{1}{3}z^3.\end{aligned}$$

В примере 2.9 мы установили с использованием теоремы Пуанкаре–Бендинкса, что уравнение Ван дер Поля имеет устойчивый предельный цикл. В рассматриваемом здесь примере мы хотим использовать метод сингулярных возмущений для получения лучшей оценки местоположения этого цикла.

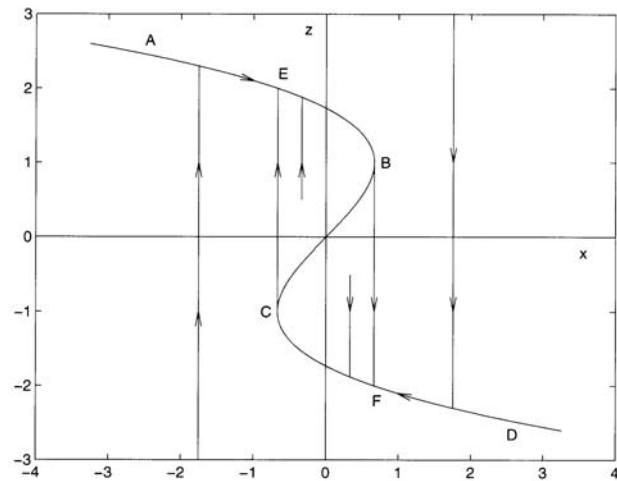


Рис. 11.10. Аппроксимация фазового портрета уравнения Ван дер Поля

положения предельного цикла. При $\varepsilon = 0$ нам необходимо найти корни уравнения $z = h(x)$, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$0 = -x + z - \frac{1}{3}z^3.$$

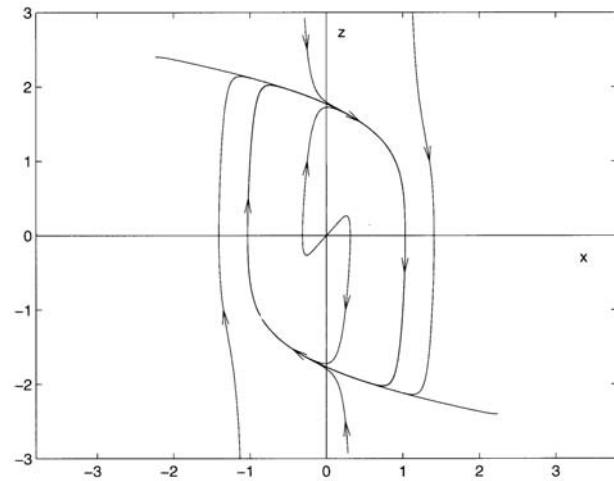
Кривая $-x + z - z^3/3 = 0$, являющаяся медленным многообразием при $\varepsilon = 0$, изображена на рисунке 11.10. При $x < -2/3$ существует лишь один корень на участке кривой AB . При $-2/3 < x < 2/3$ существует три корня, расположенные соответственно на участках AB , BC и CD . При $x > 2/3$ существует один корень на участке CD . Для корней на участке кривой AB якобиан удовлетворяет

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 1 - z^2 < 0 \quad \text{при } z^2 > 1.$$

Таким образом, корни на участке AB (исключая окрестность точки B) являются экспоненциально устойчивыми. Аналогичное утверждение справедливо и для корней на участке CD (исключая окрестность точки C). С другой стороны, корни на участке BC неустойчивы, т. к. они принадлежат области $z^2 < 1$. Построим аппроксимацию фазового портрета с использованием метода сингулярных возмущений. Для этого разделим пространство состояний равновесия (плоскость) на три области, каждая из которых соответствует определенным значениям x . Траектории, начинающиеся в области $x < -2/3$, движутся параллельно оси z и приближаются к участку AB медленного многообразия. Траектории, начинающиеся в области $-2/3 < x < 2/3$, также параллельны оси z , но приближаются либо к участку AB , либо к участку CD , в зависимости от начального значения z . Если начальная точка расположена выше

участка BC , траектория приближается к AB ; в противном случае она приближается к участку CD . Наконец, траектории, начинающиеся в области $x > 2/3$ приближаются к участку CD . Траектории на медленном многообразии движутся вдоль этого многообразия. Направление этого движения может быть определено с учетом знака векторного поля (см. рисунок 11.10). В частности, поскольку $\dot{x} = z$, траектории на участке AB движутся вниз по этому многообразию, а на участке CD — вверх. Нет необходимости в том, чтобы проводить исследование траекторий на участке BC , поскольку редуцированные модели, соответствующие неустойчивым корням на этом участке, отсутствуют. Таким образом, мы построили приближенный фазовый портрет на всех областях, исключая участок BC и окрестности точек B и C . В этих областях мы не можем использовать теорию сингулярных возмущений для построения фазового портрета. Исследуем поведение системы в окрестности B , когда значение ε положительно, но мало. Траектории, движущиеся вдоль участка AB по направлению к точке B в действительности движутся вдоль точно определенного медленного многообразия $z = H(x, \varepsilon)$. Поскольку траектория движется к B , должно быть выполнено $g < 0$. Следовательно, точное медленное многообразие должно лежать выше участка AB . Исследование векторного поля в окрестности B показывает, что траектория пересекает проходящую через B (т. е. при $x = 2/3$) вертикальную прямую, выше точки B . Как только траектория пересекает эту прямую, она оказывается в области притяжения устойчивого корня на участке CD и поэтому эта траектория быстро вертикально поднимается в направлении участка CD . Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что движущаяся вдоль участка CD траектория пересекает проходящую через C вертикальную прямую ниже точки C и далее движется вертикально по направлению к участку AB . Эти последние штрихи завершают наше построение аппроксимации фазового портрета системы. Траектории, начинающиеся в какой-либо точке пространства состояния, движутся вертикально и притягиваются к одному из двух участков AB или CD . Оказавшись на медленном многообразии, траектории движутся к замкнутой кривой $E - B - F - C - E$ (если изначально на ней не находились), накручиваются на нее и наконец циклически движутся вдоль этой кривой. Точно определенный предельный цикл уравнения Ван дер Поля расположен в $O(\varepsilon)$ -окрестности этой замкнутой кривой. Это утверждение подтверждается видом фазового портрета при $\varepsilon = 0.1$, показанным на рисунке 11.11.

Можно также оценить период колебания периодического решения. Замкнутая кривая $E - B - F - C - E$ имеет два медленных участка и два быстрых. Пренебрегая временем быстрых переходных процессов движения от точки B к точке F , а также от C к E , оценим величину $t_{EB} + t_{FC}$ в качестве искомого периода колебания. Оценка времени

Рис. 11.11. Фазовый портрет уравнения Ван дер Поля при $\varepsilon = 0.1$

t_{EB} может быть получена с использованием редуцированной модели

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z, \\ 0 &= -x + z - \frac{1}{3}z^3.\end{aligned}$$

Дифференцируя второе уравнение по t и исключая из этих двух уравнений \dot{x} , получаем

$$\dot{z} = \frac{z}{1 - z^2}.$$

Интегрируя это уравнение на участке от E до B , получаем $t_{EB} = (3/2) - \ln 2$. Оценка времени t_{FC} может быть получена аналогичным образом, вследствие имеющейся симметрии. В результате получаем $t_{EB} = t_{FC}$. Таким образом, период колебания, приближенно вычисленный при малой значении параметра ε , равен $3 - 2 \ln 2$. \triangle

11.5. Анализ устойчивости

Рассмотрим автономную систему с сингулярными возмущениями

$$\dot{x} = f(x, z), \quad (11.33)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(x, z) \quad (11.34)$$

и предположим, что начало координат $(x = 0, z = 0)$ является изолированный точкой равновесия и функции f и g являются локально липшицевыми в области, содержащей начало координат. Тогда

$$f(0, 0) = 0, \quad g(0, 0) = 0.$$

Наша цель в этом параграфе заключается в том, чтобы исследовать свойства устойчивости начала координат с использованием редуцированной и пограничной моделей. Пусть $z = h(x)$ — изолированный корень уравнения

$$0 = g(x, z),$$

определенного для всех $x \in D_x \subset R^n$, где D_x — открытая область, содержащая $x = 0$. Предположим, что $h(0) = 0$. Если для уравнения $0 = g$ корень $z = h(x)$ является единственным, то он должен быть равен нулю в начале координат, т. к. $g(0, 0) = 0$. Если существует два или более изолированных корней, то один из них должен быть равен нулю при $x = 0$ и именно для этого корня мы и будем далее проводить анализ. Удобно ввести (x, y) -координаты, где

$$y = z - h(x),$$

поскольку при таком выборе переменных точка равновесия пограничной модели перемещается в начало координат. В новых координатах система с сингулярными возмущениями принимает следующий вид:

$$\dot{x} = f(x, y + h(x)), \quad (11.35)$$

$$\varepsilon \dot{y} = g(x, y + h(x)) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(x, y + h(x)) \quad (11.36)$$

В предположении, что $\|h(x)\| \leq \zeta(\|x\|)$ для всех $x \in D_x$, где ζ — некоторая \mathcal{K} -функция, отображение $y = z - h(x)$ сохраняет свойства устойчивости системы, т. е. начало координат (11.33)–(11.34) является асимптотически устойчивым, если и только если начало координат (11.35)–(11.36) является асимптотически устойчивым. Редуцированная система

$$\dot{x} = f(x, h(x)) \quad (11.37)$$

имеет точку равновесия в $x = 0$ и пограничная система

$$\frac{dy}{d\tau} = g(x, y + h(x)), \quad (11.38)$$

где $\tau = t/\varepsilon$ и x рассматривается как фиксированный параметр, имеет точку равновесия в $y = 0$. Дальнейший анализ будет проведен в условиях основного предположения, заключающегося в том, что для каждой из этих двух систем соответствующее начало координат является асимптотически устойчивым и что нам известны соответствующие функции Ляпунова, удовлетворяющие условиям теоремы Ляпунова. В случае пограничной задачи будет также предполагаться, что свойство асимптотической устойчивости начала координат выполняется равномерно по фиксированному параметру x . Ранее мы определили это свойство в случае экспоненциально устойчивого начала координат (см. определение 11.1). Здесь и далее мы будем говорить, что начало

координат системы (11.38) асимптотически устойчиво равномерно по x , если решения (11.38) удовлетворяют

$$\|y(\tau)\| \leq \beta(y(0), \tau), \quad \forall \tau \geq 0, \forall x \in D_x,$$

где β — \mathcal{KL} -функция. Выполнение этих условий будут следовать из предположений, которые будут сделаны ниже в отношении функции Ляпунова для (11.38). Рассматривая систему с сингулярными возмущениями (11.35)–(11.36) как взаимосвязанную систему, компонентами которой являются редуцированная и пограничная системы, мы построим композитную функцию Ляпунова для всей системы в виде линейной комбинации функций Ляпунова для редуцированной и пограничной систем. Далее мы вычислим производную композитной функции Ляпунова вдоль траекторий всей системы и убедимся в том, что при некоторых условиях роста, накладываемых на функции f и g , композитная функция Ляпунова удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова для достаточно малой ε .

Пусть $V(x)$ — функция Ляпунова для редуцированной системы (11.37), такая что

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, h(x)) \leq -\alpha_1 \psi_1^2(x) \quad (11.39)$$

для всех $x \in D_x$, где $\psi_1 : R^n \rightarrow R$ — положительно определенная функция, т. е. $\psi_1(0) = 0$ и $\psi_1(x) > 0$ для всех $x \in D_x - \{0\}$. Пусть $W(x, y)$ — функция Ляпунова для пограничной системы (11.38), такая что

$$\frac{\partial W}{\partial y} g(x, y + h(x)) \leq -\alpha_2 \psi_2^2(y) \quad (11.40)$$

для всех $(x, y) \in D_x \times D_y$, где $D_y \subset R^m$ — открытая область, содержащая $y = 0$, и $\psi_2 : R^m \rightarrow R$ — положительно определенная функция, т. е. $\psi_2(0) = 0$ и $\psi_2(y) > 0$ для всех $y \in D_y - \{0\}$. Исследование будет выполнено в предположении, что функция Ляпунова W может зависеть от x . Это условие является естественным, поскольку x — параметр системы. Поэтому функция Ляпунова может, вообще говоря, зависеть от этого параметра (и других). С учетом того, что в действительности x не является постоянным параметром, мы должны будем иметь виду при дальнейшем анализе эту зависимость W от x . Для того, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость начала координат системы (11.38) и равномерное выполнение этого свойства по x , мы предположим, что $W(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$W_1(y) \leq W(x, y) \leq W_2(y), \quad \forall (x, y) \in D_x \times D_y \quad (11.41)$$

для некоторых положительно определенных непрерывных функций W_1 и W_2 . Рассмотрим композитную функцию Ляпунова

$$\nu(x, y) = (1 - d)V(x) + dW(x, y), \quad 0 < d < 1, \quad (11.42)$$

где константа d подлежит определению. Вычисляя производную ν вдоль траекторий всей системы (11.35)–(11.36), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= (1 - d) \frac{\partial V}{\partial x} f(x, y + h(x)) + \frac{d}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial y} g(x, y + h(x)) - \\ &\quad - d \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} f(x, y + h(x)) + d \frac{\partial W}{\partial x} f(x, y + h(x)) = \\ &= (1 - d) \frac{\partial V}{\partial x} f(x, h(x)) + \frac{d}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial y} g(x, y + h(x)) + \\ &\quad + (1 - d) \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, y + h(x)) - f(x, h(x))] + \\ &\quad + d \left[\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right] f(x, y + h(x)). \end{aligned}$$

Легко видеть, что производная $\dot{\nu}$ является суммой четырех членов. Первые два члена представляют собой соответственно производные V и W вдоль траекторий редуцированной и пограничной систем. Из неравенств (11.39) и (11.40) следует, что эти два члена отрицательно определены соответственно по x и y . Оставшиеся два члена обусловлены взаимосвязью между медленной и быстрой динамикой, которой мы пренебрегаем при $\varepsilon = 0$. Знак этих членов, вообще говоря, не определен. Первый из оставшихся членов

$$\frac{\partial V}{\partial x} [f(x, y + h(x)) - f(x, h(x))]$$

соответствует отклонению (11.35) от редуцированной системы (11.37). Второй член

$$\left[\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right] f(x, y + h(x))$$

соответствует отклонению (11.36) от пограничной системы (11.38), а также обусловлен эффектом фиксации x во время анализа пограничной системы. Предположим, что эти члены возмущений удовлетворяют неравенствам

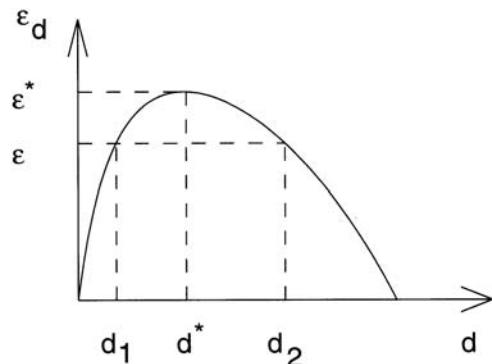
$$\frac{\partial V}{\partial x} [f(x, y + h(x)) - f(x, h(x))] \leq \beta_1 \psi_1(x) \psi_2(y) \quad (11.43)$$

и

$$\left[\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right] f(x, y + h(x)) \leq \beta_2 \psi_1(x) \psi_2(y) + \gamma \psi_2^2(y) \quad (11.44)$$

для некоторых неотрицательных констант β_1 , β_2 и γ . С использованием (11.39), (11.40), (11.43) и (11.44), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &\leq -(1 - d) \alpha_1 \psi_1^2(x) - \frac{d}{\varepsilon} \alpha_2 \psi_2^2(y) + (1 - d) \beta_1 \psi_1(x) \psi_2(y) + \\ &\quad + d \beta_2 \psi_1(x) \psi_2(y) + d \gamma \psi_2^2(y) = \end{aligned}$$

Рис. 11.12. Верхняя граница для ε

$$= -\psi^T(x, y)\Lambda\psi(x, y),$$

где

$$\psi(x, y) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(y) \end{bmatrix}$$

и

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (1-d)\alpha_1 & -\frac{1}{2}(1-d)\beta_1 - \frac{1}{2}d\beta_2 \\ -\frac{1}{2}(1-d)\beta_1 - \frac{1}{2}d\beta_2 & d((\alpha_2/\varepsilon) - \gamma) \end{bmatrix}.$$

Правая часть последнего неравенства имеет вид квадратичной формы по ψ . Эта квадратичная форма отрицательно определена, если выполнено неравенство

$$d(1-d)\alpha_1 \left(\frac{\alpha_2}{\varepsilon} - \gamma\right) > \frac{1}{4}[(1-d)\beta_1 + d\beta_2]^2,$$

или эквивалентное

$$\varepsilon < \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\gamma + \frac{1}{4d(1-d)}[(1-d)\beta_1 + d\beta_2]^2} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_d. \quad (11.45)$$

График зависимости ε_d от d изображен на рисунке 11.12. Легко видеть, что максимальное значение ε_d достигается при $d^* = \beta_1/(\beta_1 + \beta_2)$ и равно

$$\varepsilon^* = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\gamma + \beta_1\beta_2}. \quad (11.46)$$

Следовательно, начало координат (11.35)–(11.36) асимптотически устойчиво для всех $\varepsilon < \varepsilon^*$. В следующей теореме суммируются полученные результаты.

Теорема 11.3. Рассмотрим систему с сингулярными возмущениями (11.35) и (11.36). Предположим, что существуют функции Ляпунова $V(x)$ и $W(x, y)$, удовлетворяющие (11.39)–(11.41), (11.43) и (11.44). Пусть ε_d и ε^* определяются равенствами (11.45) и (11.46). Тогда начало координат (11.35) и (11.36) асимптотически устойчиво

для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$. Кроме того, функция $u(x, y)$, определенная равенством (11.42), является функцией Ляпунова при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_d)$.

Анализ устойчивости, посредством которого был получен результат теоремы 11.3, позволяет наметить этапы процедуры построения функций Ляпунова для систем с сингулярными возмущениями (11.35)–(11.36). Процедура начинается с исследования редуцированной и пограничной систем и нахождения функций Ляпунова $V(x)$ и $W(x, y)$, удовлетворяющих (11.39)–(11.41). Далее проверяется выполнение неравенств (11.43) и (11.44), которые мы называем условиями на взаимосвязь указанных двух систем. Для нахождения требуемых функций Ляпунова может потребоваться проверить несколько функций-кандидатов. В качестве руководства для этого поиска может служить то, что условия на взаимосвязь выполняются, если

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq k_1 \psi_1(x); \quad \|f(x, h(x))\| \leq k_2 \psi_1(x) \\ \|f(x, y + h(x)) - f(x, h(x))\| &\leq k_3 \psi_2(y) \\ \left\| \frac{\partial W}{\partial y} \right\| &\leq k_4 \psi_2(y); \quad \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \leq k_5 \psi_2(y). \end{aligned}$$

Напомним, что функция Ляпунова $V(x)$, удовлетворяющая (11.39) и $\|\partial V / \partial x\| \leq k_1 \psi_1(x)$, называется функцией Ляпунова квадратичного типа, а функция ψ_1 называется *функцией сравнения*. Таким образом, поиск подходящих функций Ляпунова будет успешным, если мы сможем найти функции Ляпунова квадратичного типа V и W и функции сравнения ψ_1 и ψ_2 , такие что $\|f(x, h(x))\|$ ограничена функцией $\psi_1(x)$ и $\|f(x, y + h(x)) - f(x, h(x))\|$ ограничена функцией $\psi_2(y)$. При этом мы можем заключить, что начало координат асимптотически устойчиво при $\varepsilon < \varepsilon^*$. Каждой заданной константе $\varepsilon < \varepsilon^*$ соответствует некоторый интервал (d_1, d_2) (см. рисунок 11.12), такой что для любой $d \in (d_1, d_2)$ функция $\nu(x, y) = (1-d)V(x) + dW(x, y)$ является искомой функцией Ляпунова для всей системы. Свобода при выборе значения d позволяет обеспечить выполнение дополнительных целей, например, улучшить оценки областей притяжения.

Пример 11.12. Система второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, z) = x - x^3 + z, \\ \varepsilon \dot{z} &= g(x, z) = -x - z \end{aligned}$$

имеет единственную точку равновесия в начале координат. Положим $y = z - h(x) = z + x$ и перепишем систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + y, \\ \varepsilon \dot{y} &= -y + \varepsilon(-x^3 + y). \end{aligned}$$

Для редуцированной системы

$$\dot{x} = -x^3$$

выберем функцию Ляпунова $V(x) = (1/4)x^4$, удовлетворяющую (11.39) с $\psi_1(x) = |x|^3$ и $\alpha_1 = 1$. Для пограничной системы

$$\frac{dy}{d\tau} = -y$$

выберем функцию Ляпунова $W(y) = (1/2)y^2$, удовлетворяющую (11.41) с $\psi_2(y) = |y|$ и $\alpha_2 = 1$. Условия взаимосвязи (11.43) и (11.44) принимают следующую форму:

$$\frac{\partial V}{\partial x}[f(x, y + h(x)) - f(x, h(x))] = x^3y \leq \psi_1\psi_2$$

и

$$\frac{\partial W}{\partial y}f(x, y + h(x)) = y(-x^3 + y) \leq \psi_1\psi_2 + \psi_2^2.$$

Заметим, что $\partial W/\partial x = 0$. Следовательно, (11.43) и (11.44) выполнены с $\beta_1 = \beta_2 = \gamma = 1$. Поэтому начало координат асимптотически устойчиво при $\varepsilon < \varepsilon^* = 0.5$. В действительности, поскольку все условия выполнены глобально и $\nu(x, y) = (1-d)V(x) + dW(y)$ радиально неограничена, начало координат является глобально асимптотически устойчивым при $\varepsilon < 0.5$. Для определения степени консервативности полученных оценок заметим, что из характеристического уравнения для линеаризованной в начале координат системы

$$\lambda^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\lambda = 0,$$

видно, что начало координат неустойчиво при $\varepsilon > 1$. В рассматриваемом простом примере мы можем вычислить производную функцию Ляпунова

$$\nu(x, y) = \frac{1-d}{4}x^4 + \frac{d}{2}y^2$$

вдоль траекторий всей системы с сингулярными возмущениями и попытаться получить менее консервативную оценку на ε (по сравнению с соответствующей оценкой, получаемой с использованием теоремы 11.3):

$$\begin{aligned}\dot{\nu} &= (1-d)x^3(-x^3 + y) - \frac{d}{\varepsilon}y^2 + dy(-x^3 + y) = \\ &= -(1-d)x^6 + (1-2d)x^3y - d\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)y^2.\end{aligned}$$

Легко видеть, что при $d = 1/2$ перекрестные произведения исключаются и мы получаем выражение для производной

$$\dot{\nu} = -\frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)y^2,$$

являющейся отрицательно определенной для всех $\varepsilon < 1$. Эта оценка действительно менее консервативна по сравнению с оценкой из теоремы

11.3. Более того, эта оценка действительно определяет границы ε для которых начало координат асимптотически устойчиво. \triangle

Пример 11.13. Система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + z, \\ \varepsilon\dot{z} &= \operatorname{tg}^{-1}(1-x-z)\end{aligned}$$

имеет точку равновесия в $(0.5, 0.5)$. Замена переменных

$$\tilde{x} = x - 0.5; \quad \tilde{z} = z - 0.5$$

перемещает точку равновесия в начало координат. Для упрощения обозначений опустим тильды и перепишем уравнение состояния в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + z, \\ \varepsilon\dot{z} &= -\operatorname{tg}^{-1}(x+z).\end{aligned}$$

Уравнение

$$0 = -\operatorname{tg}^{-1}(x+z)$$

имеет единственный корень $z = h(x) = -x$. Выполним замену переменных $y = z + x$, в результате которой получаем

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + y, \\ \varepsilon\dot{y} &= -\operatorname{tg}^{-1}y + \varepsilon(-2x+y).\end{aligned}$$

Для редуцированной системы выберем $V(x) = (1/2)x^2$, удовлетворяющую (11.39) с $\alpha_1 = 2$ и $\psi_1(x) = |x|$. Для пограничной системы выберем $W(y) = (1/2)y^2$. Тогда (11.40) принимает вид равенства

$$\frac{dW}{dy}[-\operatorname{tg}^{-1}y] = -y\operatorname{tg}^{-1}y \leq -\frac{\operatorname{tg}^{-1}\rho}{\rho}y^2,$$

выполненного при всех $y \in D_y = \{y \mid |y| < \rho\}$. Таким образом, (11.41) выполнено с $\alpha_2 = (\operatorname{tg}^{-1}\rho)/\rho$ и $\psi_2(y) = |y|$. Условия взаимосвязи (11.43) и (11.44) выполнены глобально с $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$ и $\gamma = 1$. Следовательно, начало координат асимптотически устойчиво для всех $\varepsilon < \varepsilon^* = (\operatorname{tg}^{-1}\rho)/2\rho$. В действительности, начало координат экспоненциально устойчиво, т. к. и отрицательно определенная оценка сверху на \dot{U} являются квадратичными формами по (x, y) . \triangle

Представленный выше ляпуновский анализ может быть обобщен на случай неавтономных систем. Мы не будем детально рассматривать здесь этот вопрос,¹⁾ но рассмотрим случай экспоненциальной устойчивости и используем обратные теоремы Ляпунова для доказательства результата, имеющего концептуальное значение.

¹⁾ Детальное исследование неавтономного случая выполнено в работе [105, параграф 7.5].

Теорема 11.4. Рассмотрим систему с сингулярными возмущениями

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), \quad (11.47)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon). \quad (11.48)$$

Предположим, что следующие предположения выполнены для всех

$$(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times B_r \times [0, \varepsilon_0]$$

- $f(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$ и $g(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$.

Уравнение

$$0 = g(t, x, z, 0)$$

имеет изолированный корень $z = h(t, x)$, такой что $h(t, 0) = 0$.

- Функции f, g, h и их частные производные до второго порядка включительно ограничены при $z - h(t, x) \in B_\rho$.

- Начало координат редуцированной системы

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0)$$

экспоненциально устойчиво.

- Начало координат пограничной системы

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y + h(t, x), 0)$$

экспоненциально устойчиво равномерно по (t, x) .

Тогда существует константа $\varepsilon^* > 0$, такая что для всех $\varepsilon < \varepsilon^*$ начало координат системы (11.47)–(11.48) экспоненциально устойчиво.

Доказательство: По теореме 4.14 для редуцированной системы существует функция Ляпунова, удовлетворяющая неравенствам

$$\begin{aligned} c_1 \|x\|^2 &\leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, h(t, x), 0) &\leq -c_3 \|x\|^2, \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq c_4 \|x\| \end{aligned}$$

для некоторых положительных констант c_i , $i = 1, \dots, 4$ и для $x \in B_{r_0}$, где $r_0 \leq r$. По лемме 9.8 для пограничной системы существует функция Ляпунова $W(t, x, y)$, удовлетворяющая неравенствам

$$\begin{aligned} b_1 \|y\|^2 &\leq W(t, x, y) \leq b_2 \|y\|^2, \\ \frac{\partial W}{\partial y} g(t, x, y + h(t, x), 0) &\leq -b_3 \|y\|^2, \\ \left\| \frac{\partial W}{\partial y} \right\| &\leq b_4 \|y\|, \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial W}{\partial t} \right\| \leq b_5 \|y\|^2; \quad \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \leq b_6 \|y\|^2$$

для некоторых положительных констант b_i , $i = 1, \dots, 6$ и для $y \in B_{\rho_0}$, где $\rho_0 \leq \rho$. При замене переменных

$$y = z - h(t, x)$$

система (11.47)–(11.48) принимает вид

$$\dot{x} = f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), \quad (11.49)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{y} &= g(t, x, y + h(t, x), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} - \\ &- \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon). \end{aligned} \quad (11.50)$$

Далее мы намерены использовать функцию

$$\nu(t, x, y) = V(t, x) + W(t, x, y)$$

в качестве функции Ляпунова для системы (11.49)–(11.50). Но прежде чем сделать это, отметим некоторые свойства, выполненные в окрестности начала координат. Поскольку функции f и g равны нулю в начале координат для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, они являются липшицевыми по ε линейно по вектору состояния (x, y) . В частности,

$$\|f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon) - f(t, x, y + h(t, x), 0)\| \leq \varepsilon L_1 (\|x\| + \|y\|),$$

$$\|g(t, x, y + h(t, x), \varepsilon) - g(t, x, y + h(t, x), 0)\| \leq \varepsilon L_2 (\|x\| + \|y\|).$$

Кроме того,

$$\|f(t, x, y + h(t, x), 0) - f(t, x, h(t, x), 0)\| \leq L_3 \|y\|,$$

$$\|f(t, x, h(t, x), 0)\| \leq L_4 \|x\|,$$

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\| \leq k_1 \|x\|; \quad \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\| \leq k_2.$$

При получении этих неравенств мы использовали тот факт, что $f(t, x, h(t, x), 0)$ и $h(t, x)$ равны нулю при $x = 0$ для всех t . С использованием этих оценок, а также свойств функций V и W , можно показать, что производная ν вдоль траекторий системы (11.49)–(11.50) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &\leq -a_1 \|x\|^2 + \varepsilon a_2 \|x\|^2 - \frac{a_3}{\varepsilon} \|y\|^2 + a_4 \|y\|^2 + \\ &+ a_5 \|x\| \|y\| + a_6 \|x\| \|y\|^2 + a_7 \|y\|^3 \end{aligned}$$

с положительными a_1 и a_3 и неотрицательными константами a_2 и a_4 - a_7 . Для всех $\|y\| \leq \rho_0$ это неравенство можно переписать в более простой форме:

$$\begin{aligned}\dot{\nu} &\leq -a_1\|x\|^2 + \varepsilon a_2\|x\|^2 - \frac{a_3}{\varepsilon}\|y\|^2 + a_8\|y\|^2 + 2a_9\|x\|\|y\| = \\ &= -\left[\begin{array}{c} \|x\| \\ \|y\| \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{cc} a_1 - \varepsilon a_2 & -a_9 \\ -a_9 & (a_3/\varepsilon) - a_8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \|x\| \\ \|y\| \end{array}\right].\end{aligned}$$

Таким образом, существует $\varepsilon^* > 0$, такая что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ выполнено

$$\dot{\nu} \leq -2\gamma\nu$$

для некоторой $\gamma > 0$. Тогда

$$\nu(t, x(t), y(t)) \leq \exp[-2\gamma(t - t_0)]\nu(t_0, x(t_0), y(t_0))$$

и с учетом свойств V и W получаем

$$\left\| \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\| \leq K_1 \exp[-\gamma(t - t_0)] \left\| \begin{array}{c} x(t_0) \\ y(t_0) \end{array} \right\|.$$

Поскольку $y = z - h(t, x)$ и $\|h(t, x)\| \leq k_2\|x\|$, получаем

$$\left\| \begin{array}{c} x(t) \\ z(t) \end{array} \right\| \leq K_2 \exp[-\gamma(t - t_0)] \left\| \begin{array}{c} x(t_0) \\ z(t_0) \end{array} \right\|.$$

Эти неравенства завершают доказательство теоремы. \square

Теорема 11.4 имеет важное концептуальное значение, поскольку в ней сформулировано утверждение о робастности экспоненциально устойчивой системы по отношению к немоделируемой быстрой (высокочастотной) динамике. При анализе динамических систем очень часто используются модели пониженного порядка, получаемые при пренебрежении малыми «паразитными» параметрами. Модель пониженного порядка может быть представлена в виде системы с сингулярными возмущениями, в которой нередуцированная модель с сингулярными возмущениями представляет собой действительную систему с паразитными параметрами, а редуцированная модель представляет собой упрощенную модель, используемую при анализе. Разумно предположить, что пограничная модель имеет экспоненциально устойчивое начало координат. В действительности, если бы связанные с паразитными элементами динамика была неустойчивой, нам не следовало бы пренебречь ею на первом этапе анализа. Предположение о экспоненциальной устойчивости, но не о асимптотической устойчивости, или предположение о равномерности свойства экспоненциальной устойчивости являются вполне естественными в большинстве приложений. В этой связи достаточно вспомнить хотя бы то, что эти предположения автоматически выполняются, если быстрая динамика является линейной. Если начало координат редуцированной модели экспоненциально устойчиво, теорема 11.4 гарантирует экспоненциальную устойчивость

начала координат нередуцированной системы при условии, что быстрая динамика, которой мы пренебрегли, является достаточно быстрой. Следующий пример иллюстрирует, как эти свойства робастности могут быть использованы при исследовании задач управления.

Пример 11.14. Рассмотрим задачу стабилизации с помощью обратной связи системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, v), \\ \varepsilon \dot{z} &= Az + Bu, \\ v &= Cz,\end{aligned}$$

где $f(t, 0, 0) = 0$ и A — гурвицева матрица. Неуправляемая система имеет точку равновесия в начале координат и задача заключается в том, чтобы построить закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий стабилизацию начала координат. Линейная часть этой модели представляет собой динамику привода, которая обычно является более быстрой по сравнению с динамикой объекта управления, представленной нелинейным уравнением $\dot{x} = f$. Для упрощения нашей задачи, пренебрежем динамикой привода, положив $\varepsilon = 0$ и подставив $v = -CA^{-1}Bu$ в уравнение объекта управления. Для упрощения обозначений предположим, что $-CA^{-1}B = I$. Тогда редуцированная модель имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x, u).$$

Эта модель будет использована при построении закона управления $u = \gamma(t, x)$ с обратной связью по состоянию, обеспечивающего экспоненциальную устойчивость начала координат замкнутой модели

$$\dot{x} = f(t, x, \gamma(t, x)).$$

Мы будем называть эту модель номинальной замкнутой системой. Будет ли этот закон управления стабилизировать действительную систему, в которой динамика привода присутствует? Если закон управления применить к действительной системе, соответствующее замкнутое уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, Cz), \\ \varepsilon \dot{z} &= Az + B\gamma(t, x).\end{aligned}$$

Таким образом, мы свели нашу задачу к задаче с сингулярными возмущениями, в которой нередуцированной моделью с сингулярными возмущениями является действительная замкнутая система, а редуцированной моделью — номинальная замкнутая система. По построению, начало координат редуцированной модели экспоненциально устойчиво. Пограничная модель

$$\frac{dy}{d\tau} = Ay$$

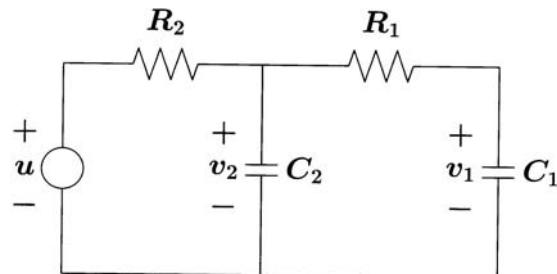


Рис. 11.13. К упражнениям 11.1 и 11.2

не зависит от (t, x) и ее начало координат экспоненциально устойчиво, т. к. матрица A гурвицева. В предположении, что f и γ достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям теоремы 11.4, мы можем заключить, что начало координат действительной замкнутой системы экспоненциально устойчиво при достаточно малой константе ε . Этот результат обосновывает выполненное упрощение модели путем пренебрежения динамикой привода. \triangle

11.6. Упражнения

11.1 Рассмотрим электрическую RC -цепь (см. рисунок 11.13) и предположим, что емкость конденсатора C_2 мала по сравнению с емкостью конденсатора C_1 и $R_1 = R_2 = R$. Представьте систему в стандартной форме с сингулярными возмущениями.

11.2 Рассмотрим электрическую RC -цепь (см. рисунок 11.13) и предположим, что сопротивление резистора R_1 мало по сравнению с сопротивлением резистора R_2 и $C_1 = C_2 = C$. Представьте систему в стандартной форме с сингулярными возмущениями.

11.3 Рассмотрим электрическую цепь с туннельным диодом, представленную в параграфе 1.2.2, и предположим, что индуктивность L мала по сравнению с постоянной времени, так что константа L/R существенно меньше постоянной времени CR . Представьте систему в стандартной форме с сингулярными возмущениями при $\varepsilon = L/CR^2$.

11.4 ([105]) Система с обратной связью, изображенная на рисунке 11.14, имеет усилитель с сильной обратной связью с коэффициентом усиления k , а также нелинейный элемент ψ . Представьте систему в стандартной форме с сингулярными возмущениями при $\varepsilon = 1/k$.

11.5 Покажите, что если якобиан $[\partial g / \partial y]$ удовлетворяет условию на собственные значения (11.16), то существуют константы k , γ и ρ_0 для которых выполнено неравенство (11.15).

11.6 Покажите, что если существует функция Ляпунова, удовлетворяющая (11.17) и (11.18), то неравенство (11.15) выполнено с оценками (11.19).

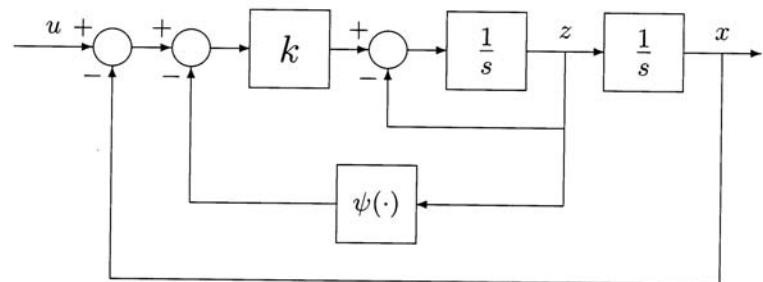


Рис. 11.14. К упражнению 11.4

11.7 Рассмотрим задачу с сингулярными возмущениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + z, \quad x(0) = \xi, \\ \varepsilon \dot{z} &= x^2 - z + 1, \quad z(0) = \eta.\end{aligned}$$

- (a) Найдите $O(\varepsilon)$ -аппроксимации x и z на интервале времени $[0, 1]$.
 (b) Пусть $\xi = \eta = 0$. Выполните компьютерное моделирование и получите графики для x и z при

$$(1) \quad \varepsilon = 0.1 \quad \text{и} \quad (2) \quad \varepsilon = 0.05.$$

Сравните полученные результаты с аппроксимациями, полученными в пункте (a). При проведении компьютерного моделирования примите во внимание то обстоятельство, что система уходит на бесконечность за конечное время вскоре после момента времени $t = 1$.

11.8 Рассмотрим задачу с сингулярными возмущениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + z, \quad x(0) = \xi, \\ \varepsilon \dot{z} &= -\frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\pi}{2}(2x + z) \right), \quad z(0) = \eta.\end{aligned}$$

- (a) Найдите $O(\varepsilon)$ -аппроксимации x и z на промежутке времени $[0, 1]$.
 (b) Пусть $\xi = \eta = 1$. Выполните компьютерное моделирование и получите графики для x и z при

$$(1) \quad \varepsilon = 0.2 \quad \text{и} \quad (2) \quad \varepsilon = 0.1.$$

Сравните полученные результаты с аппроксимациями, полученными в пункте (a).

11.9 Рассмотрим систему с сингулярными возмущениями

$$\dot{x} = z, \quad \varepsilon \dot{z} = -x - \varepsilon z - \exp(z) + 1 + u(t).$$

Постройте редуцированную и пограничную модели и исследуйте свойства устойчивости пограничной модели.

11.10 ([105]) Рассмотрим систему с сингулярными возмущениями

$$\dot{x} = \frac{x^2 t}{z}, \quad \varepsilon \dot{z} = -(z + xt)(z - 2)(z - 4).$$

- (a) Сколько редуцированных моделей может иметь эта система?
 - (b) Исследуйте свойства устойчивости каждой пограничной модели.
 - (c) Пусть $x(0) = 1$ и $z(0) = a$. Найдите $O(\varepsilon)$ -аппроксимацию для x и z на интервале времени $[0, 1]$ для всех значений a в интервале $[-2, 6]$.
- 11.11** Примените теорему 11.2 для исследования асимптотического поведения системы

$$\dot{x} = -x + z - \sin t, \quad \varepsilon \dot{z} = -z + \sin t$$

при $t \rightarrow \infty$.

11.12 ([105]) Найдите точное выражение для медленного многообразия системы

$$\dot{x} = xz^3, \quad \varepsilon \dot{z} = -z - x^{4/3} + \frac{4}{3}\varepsilon x^{16/3}.$$

11.13 ([105]) Сколько медленных многообразий имеет следующая система? Какие из этих многообразий притягивают траектории системы?

$$\dot{x} = -xz, \quad \varepsilon \dot{z} = -(z - \sin^2 x)(z - e^{ax})(z - 2e^{2ax}), \quad a > 0.$$

11.14 ([105]) Рассмотрим линейную автономную систему с сингулярными возмущениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}x + A_{12}z, \\ \varepsilon \dot{z} &= A_{21}x + A_{22}z, \end{aligned}$$

где $x \in R^n$, $z \in R^m$ и A_{22} — гурвицева матрица.

- (a) Покажите, что при достаточно малой ε система имеет медленное многообразие, точное выражение для которого имеет вид $z = -L(\varepsilon)x$, где L удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$-\varepsilon L(A_{11} - A_{12}L) = A_{21} - A_{22}L.$$

- (b) Покажите, что замена переменных $\eta = z + L(\varepsilon)x$ приводит систему к блочно-диагональному виду.

- (c) Покажите, что собственные значения системы разделяются на две группы: n медленных собственных значений порядка $O(1)$ и m быстрых собственных значений порядка $O(1/\varepsilon)$.

- (d) Пусть $H(\varepsilon)$ — решение линейного уравнения

$$\varepsilon(A_{11} - A_{12}L)H - H(A_{22} + \varepsilon LA_{12}) + A_{12} = 0.$$

Покажите, что преобразование подобия

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - \varepsilon HL & -\varepsilon H \\ L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

приводит систему к блочной модальной форме

$$\dot{\xi} = A_s(\varepsilon)\xi, \quad \varepsilon \dot{\eta} = A_f(\varepsilon)\eta,$$

где собственными значениями матриц A_s и A_f/ε являются, соответственно, медленные и быстрые собственные значения всей системы с сингулярными возмущениями.

- (e) Покажите, что быстрая компонента x имеет порядок $O(\varepsilon)$.
- (f) Предложите альтернативное доказательство теоремы Тихонова для рассматриваемого случая.

11.15 Рассмотрим линейную систему с сингулярными возмущениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}x + A_{12}z + B_1u(t), \quad x(0) = \xi, \\ \varepsilon \dot{z} &= A_{21}x + A_{22}z + B_2u(t), \quad z(0) = \eta, \end{aligned}$$

где $x \in R^n$, $z \in R^m$, $u \in R^p$, A_{22} — гурвицева и $u(t)$ равномерно ограничена для всех $t \geq 0$. Пусть $\bar{x}(t)$ — решение редуцированной системы

$$\dot{x} = A_0x + B_0u(t), \quad x(0) = \xi,$$

где $A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ и $B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$.

- (a) Покажите, что $x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon)$ на любом компактном интервале $[0, t_1]$.

- (b) Покажите, что если A_0 гурвицева, то $x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon)$ для всех $t \geq 0$.

Указание: Используйте преобразование системы из предыдущего упражнения.

11.16 Рассмотрим систему с сингулярными возмущениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + z, \quad \varepsilon \dot{z} = \operatorname{tg}^{-1}(1 - x_1 - z).$$

- (a) Найдите редуцированную и пограничную модели.

- (b) Исследуйте свойства устойчивости пограничной модели.

- (c) Пусть $x_1(0) = x_2(0) = z(0) = 0$. Найдите $O(\varepsilon)$ -аппроксимацию решения. Найдите с использованием численных методов точное и приближенное решения на интервале времени $[0, 10]$ при $\varepsilon = 0.1$.

- (d) Исследуйте вопрос о достоверности аппроксимации на бесконечном интервале времени.

- (e) Покажите, что система имеет единственную точку равновесия и исследуйте ее свойства устойчивости с использованием метода сингулярных возмущений. Является ли эта точка асимптотически устойчивой? Является ли эта точка глобально асимптотически устойчивой? Является ли эта точка экспоненциально устойчивой? Вычислите верхнюю границу ε^* для значений константы ε , при которых результаты исследования устойчивости остаются верными.

11.17 Выполните упражнение 11.16 для системы с сингулярными возмущениями

$$\dot{x} = -2x + x^2 + z, \quad \varepsilon \dot{z} = x - x^2 - z.$$

В пункте (с) положите $x(0) = z(0) = 1$ и в качестве интервала времени возьмите $[0, 5]$.

11.18 Выполните упражнение 11.16 для системы с сингулярными возмущениями

$$\dot{x} = xz^3, \quad \varepsilon \dot{z} = -2x^{4/3} - 2z.$$

В пункте (с) положите $x(0) = z(0) = 1$ и в качестве интервала времени возьмите $[0, 1]$.

11.19 Выполните упражнение 11.16 для системы с сингулярными возмущениями

$$\dot{x} = -x^3 + \operatorname{tg}^{-1}(z), \quad \varepsilon \dot{z} = -x - z.$$

В пункте (с) положите $x(0) = -1, z(0) = 2$ и в качестве интервала времени возьмите $[0, 2]$.

11.20 Выполните упражнение 11.16 для системы с сингулярными возмущениями

$$\dot{x} = -x + z_1 + z_2 + z_1 z_2, \quad \varepsilon \dot{z}_1 = -z_1, \quad \varepsilon \dot{z}_2 = -z_2 - (x + z_1 + x z_1).$$

В пункте (с) положите $x(0) = z_1(0) = z_2(0) = 1$ и в качестве интервала времени возьмите $[0, 2]$.

11.21 Рассмотрим электрический двигатель постоянного тока из упражнения 1.17. Пусть $v_a = V_a = \text{const}$ и $v_f = U = \text{const}$.

(а) Покажите, что система имеет единственную точку равновесия в

$$I_f = \frac{U}{R_f}, \quad I_a = \frac{c_3 V_a}{c_3 R_a + c_1 c_2 U^2 / R_f^2}, \quad \Omega = \frac{c_2 V_a U / R_f}{c_3 R_a + c_1 c_2 U^2 / R_f^2}.$$

Далее (I_f, I_a, Ω) будет рассматриваться в качестве номинальной рабочей точки.

(б) В типичном случае постоянная времени для тока в обмотке якоря $T_a = L_a / R_a$ существенно меньше постоянной времени цепи поля возбуждения $T_f = L_f / R_f$ и постоянной времени механической подсистемы. Поэтому модель системы может быть получена в виде модели с сингулярными возмущениями, в которой переменные i_f и ω являются медленными, а i_a — быстрой. Полагая $x_1 = i_f / I_f$, $x_2 = \omega / \Omega$, $z = i_a / I_a$, $u = v_f / U$, $\varepsilon = T_a / T_f$ и используя $t' = t / T_f$ в качестве новой переменной времени, покажите, что модель с сингулярными возмущениями имеет вид

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u, \quad \dot{x}_2 = a(x_1 z - x_2), \quad \varepsilon \dot{z} = -z - b x_1 x_2 + c,$$

где $a = L_f c_3 / R_f J$, $b = c_1 c_2 U^2 / c_3 R_a R_f^2$, $c = V_a / I_a R_a$ и (\cdot) обозначает производную по t' .

(с) Найдите редуцированную и пограничную модли.

(д) Исследуйте свойства устойчивости пограничной модели.

(е) Найдите $O(\varepsilon)$ -аппроксимации для x и z .

(ф) Исследуйте вопрос о достоверности аппроксимации на бесконечном интервале времени.

(г) С использованием численных методов вычислите при $\varepsilon = 0.2$ и $\varepsilon = 0.1$ точное и приближенное решения при входе u , имеющим вид единичной ступенчатой функции, и при нулевых начальных состояниях. В качестве интервала времени возьмите $[0, 10]$. Значения констант определяются равенствами $c_1 = c_2 = \sqrt{2} \times 10^{-2}$ Н·м/А, $c_3 = 6 \times 10^{-6}$ Н·м·с/рад, $J = 10^{-6}$ Н·м·с²/рад, $R_a = R_f = 1$ Ом, $L_f = 0.2$ Гн, $V_a = 1$ В и $U = 0.2$ В.

11.22 ([105]) Рассмотрим систему с сингулярными возмущениями

$$\dot{x} = -\eta(x) + az, \quad \varepsilon \dot{z} = -\frac{x}{a} - z,$$

где a — положительная константа и η — гладкая нелинейная функция, удовлетворяющая

$$\eta(0) = 0 \quad \text{и} \quad x\eta(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in (-\infty, b) - \{0\}$$

при некоторой константе $b > 0$. Исследуйте свойства устойчивости начала координат при малой ε с использованием метода сингулярных возмущений.

11.23 ([105]) Система с сингулярными возмущениями

$$\dot{x} = -2x^3 + z^2, \quad \varepsilon \dot{z} = x^3 - \operatorname{tg} z$$

имеет изолированную точку равновесия в начале координат.

(а) Покажите, что асимптотическая устойчивость начала координат не может быть установлена с использованием линеаризации системы.

(б) Покажите с использованием метода сингулярных возмущений, что начало координат асимптотически устойчиво при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$. Найдите оценку для ε^* и области притяжения.

11.24 ([105]) Пусть условия теоремы 11.3 выполнены с $\psi_1(x) = \|x\|$ и $\psi_2(y) = \|y\|$. Предположим также, что $V(x)$ и $W(x, y)$ удовлетворяют

$$\begin{aligned} k_1 \|x\|^2 &\leq V(x) \leq k_2 \|x\|^2 \\ k_3 \|y\|^2 &\leq W(x, y) \leq k_4 \|y\|^2 \end{aligned}$$

$\forall (x, y) \in D_x \times D_y$, где k_1, k_2, k_3, k_4 — положительные константы. Покажите, что утверждения теоремы 11.3, в которых асимптотическая устойчивость заменена на экспоненциальную устойчивость, выполнены.

11.25 ([191]) Рассмотрим систему с сингулярными возмущениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \varepsilon \dot{y} &= Ay + \varepsilon g_1(x, y), \end{aligned}$$

где A — гурвицева и f и g_1 — достаточно гладкие функции, обращающиеся в ноль в начале координат. Предположим, что существует функция Ляпунова $V(x)$, такая что в рассматриваемой области выполнено $[\partial V / \partial x]f(x, 0) \leq -\alpha_1 \phi(x)$, где $\alpha_1 > 0$ и $\phi(x)$ — положительно определена. Пусть P — решение уравнения Ляпунова $PA + A^T P = -I$. Положим $W(y) = y^T P y$.

- (a) Предположим, что f и g_1 удовлетворяют в рассматриваемой области неравенствам

$$\|g_1(x, 0)\|_2 \leq k_1 \phi^{1/2}(x), \quad k_1 \geq 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}[f(x, y) - f(x, 0)] \leq k_2 \phi^{1/2}(x) \|y\|_2, \quad k_2 \geq 0.$$

Покажите с использованием функции Ляпунова $\nu(x, y) = (1 - d)V(x) + dW(y)$, $0 < d < 1$ и метода исследования, представленного перед формулировкой теоремы 11.3, что начало координат асимптотически устойчиво при достаточно малой ε .

- (b) В качестве альтернативы формулировки теоремы 11.3 предположим, что f и g_1 удовлетворяют в рассматриваемой области неравенствам

$$\|g_1(x, 0)\|_2 \leq k_3 \phi^a(x), \quad k_3 \geq 0, \quad 0 < a \leq \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}[f(x, y) - f(x, 0)] \leq k_4 \phi^b(x) \|y\|_2^c, \quad k_4 \geq 0, \quad 0 < b < 1, \quad c = \frac{1-b}{a}.$$

Покажите с использованием функции Ляпунова $\nu(x, y) = V(x) + (y^T P y)^\gamma$, где $\gamma = 1/2a$, что начало координат асимптотически устойчиво при достаточно малой ε .

Указание: С использованием неравенства Янга

$$uw \leq \frac{1}{\mu} u^p + \mu^{\frac{1}{p-1}} w^{\frac{p}{p-1}}, \quad \forall u \geq 0, w \geq 0, \mu > 0, p > 1$$

покажите, что $\dot{\nu} \leq -c_1 \phi - c_2 \|y\|_2^{2\gamma}$. Далее покажите, что при достаточно малой ε коэффициенты c_1 и c_2 могут быть сделаны положительными.

- (c) Приведите пример, в котором условия взаимосвязи для случая (b) выполнены, а для случая (a) — нет.

11.26 ([99]) Рассмотрим систему с многопараметрическими сингулярными возмущениями

$$\dot{x} = f(x, z_1, \dots, z_m),$$

$$\varepsilon_i \dot{z}_i = \eta_i(x) + \sum_{j=1}^m a_{ij} z_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

где x — вектор размерности n , z_i — скалярные переменные и ε_i — малые положительные параметры. Пусть $\varepsilon = \max_i \varepsilon_i$. Это уравнение может быть переписано в следующем виде:

$$\dot{x} = f(x, z),$$

$$\varepsilon D \dot{z} = \eta(x) + Az,$$

где z и η — векторы размерности m , компонентами которых являются соответственно z_i и η_i , A — $(m \times m)$ -матрица с элементами a_{ij} и D — диагональная $(m \times m)$ -матрица с диагональными элементами $\varepsilon_i/\varepsilon$. Диагональные элементы матрицы D положительны и ограничены единицей. Предположим, что начало координат редуцированной системы $\dot{x} = f(x, -A^{-1}\eta(x))$ асимптотически устойчиво и существует функция Ляпунова $V(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 11.3. Предположим также, что существует диагональная матрица P с положительными элементами, такая что

$$PA + A^T P = -Q, \quad Q > 0.$$

Используя функцию

$$\nu(x, z) = (1 - d)V(x) + d(z + A^{-1}\eta(x))^T PD(z + A^{-1}\eta(x)), \quad 0 < d < 1$$

в качестве функции Ляпунова, исследуйте свойства устойчивости начала координат. Сформулируйте и докажите теорему для многопараметрического случая, аналогичную теореме 11.3. Этот результат должен допускать произвольный выбор параметров ε_i , ограниченный лишь единственным условием, заключающимся в том, что они должны быть достаточно малыми.

11.27 ([105]) Система с сингулярными возмущениями

$$\dot{x}_1 = (a + x_2)x_1 + 2z, \quad \dot{x}_2 = bx_1^2, \quad \varepsilon \dot{z} = -x_1 x_2 - z,$$

где $a > 0$ и $b > 0$, имеет множество точек равновесия $\{x_1 = 0, z = 0\}$. Исследуйте асимптотическое поведение решения при малой ε , используя принцип инвариантности Ла-Салля.

Указание: Асимптотическое поведение редуцированной модели было исследовано в примере 4.10. Используйте композитную функцию Ляпунова и выполните исследование, аналогичное тому, что было выполнено в параграфе 11.5. Заметим однако, что теорема 11.3 не применима к этому случаю.

11.28 Покажите, что начало координат системы

$$\dot{x}_1 = x_2 + e^{-t} z, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + z, \quad \varepsilon \dot{z} = -(x_1 + z) - (x_1 + z)^3$$

глобально экспоненциально устойчиво при достаточно малой ε .

11.29 Рассмотрим систему с сингулярными возмущениями

$$\dot{x} = -x + \operatorname{tg}^{-1} z, \quad \varepsilon \dot{z} = -x - z + u.$$

- (a) Найдите ε^* , такую что $\forall \varepsilon < \varepsilon^*$ начало координат свободной системы глобально асимптотически устойчиво.

- (b) Покажите, что для любой $\varepsilon < \varepsilon^*$ система является устойчивой по входу-состоянию.

11.30 Рассмотрим систему с обратной связью, изображенную на рисунке 7.1, в которой линейная подсистема является системой с сингулярными возмущениями:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + z, \\ \varepsilon \dot{z} &= -z + u, \\ y &= 2x_1 + x_2,\end{aligned}$$

где ψ — гладкая, не зависящая от времени нелинейность без памяти, принадлежащая сектору $[0, k]$ для некоторой $k > 0$.

- (a) Представьте замкнутую систему в виде системы с сингулярными возмущениями и найдите ее редуцированную и пограничную модели.
- (b) Покажите, что для любой $k > 0$ существует $\varepsilon^* > 0$, такая что система является абсолютно устойчивой для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$.

Глава 12

УПРАВЛЕНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

В последних трех главах этой книги рассматривается задача нахождения закона управления с обратной связью. Для построения нелинейного закона управления предлагается несколько подходов, включая метод построения закона управления с использованием линеаризованной модели, метод нахождения интегрального закона управления, метод настройки обратной связи,¹⁾ метод линеаризации системы обратной связью, метод нахождения закона управления в скользящем режиме, метод Ляпунова, метод бэкстеппинга, метод управления на основе пассивности системы и метод построения наблюдателей с сильной обратной связью. Средства нелинейного анализа, предложенные в предыдущих главах, используются в последующих трех главах для построения различных законов управления и это способствует лучшему пониманию рассмотренных теоретических результатов. Настоящая глава начинается с водного для всех трех глав параграфа, в котором дается постановка задачи управления. В последующих четырех параграфах этой главы рассматриваются важные в прикладных задачах классические средства, такие как метод линеаризации, метод построения интегрального управления и метод настройки обратной связи. Метод линеаризации системы обратной связью представлен в главе 13, а другие подходы к задаче построения нелинейных законов управления рассматриваются в главе 14.

¹⁾ Прим. ред. перев. — Методы настройки (планирования) коэффициентов регулятора (*gain scheduling*) в отечественной литературе называются «настройка регулятора по разомкнутому контуру», в отличие от методов настройки в замкнутом контуре или самонастройки, относящихся к адаптивному управлению.

12.1. Задача управления

Существует множество задач, для решения которых требуется построить закон управления в виде обратной связи. Цели, преследуемые при разработке закона управления, определяют различные формулировки соответствующих задач управления. Задачи стабилизации, слежения, компенсации и подавления возмущений (и различные их комбинации) приводят к постановке различных задач управления. В каждом из этих случаев может быть сформулирована задача построения обратной связи по состоянию, когда все эти переменные доступны для измерения, или же задача построения обратной связи по выходу, когда может измеряться лишь вектор выхода, размерность которого обычно меньше размерности вектора состояния. В типичной задаче управления ставятся дополнительные цели управления, например, обеспечение выполнения определенных требований на характер переходных процессов в системе, или выполнение некоторых ограничений на управляющее воздействие. При построении закона управления эти требования могут оказаться противоречивыми. Для нахождения компромиссного решения формулируются различные задачи оптимального управления. Если модель обладает некоторой неопределенностью, возникают вопросы, связанные с чувствительностью системы и ее робастности. Задача построения закона управления с обратной связью, обеспечивающего достижение цели управления для широкого класса неопределенности моделей, формулируется в виде задач робастного или адаптивного управления. В задаче робастного управления неопределенность модели выступает в роли возмущения номинальной модели. Номинальная модель может рассматриваться как точка в некотором пространстве, а ее возмущенные модели представляют собой другие точки, содержащиеся в шаре, включающем точку номинальной модели. Робастное управление строится таким образом, чтобы цель управления была выполнена для любой модели из «шара неопределенности». С другой стороны, при построении адаптивного управления неопределенность параметризуется в терминах неизвестных параметров и обратная связь используется для того, чтобы оценить эти параметры в процессе функционирования системы (*on-line*). В более сложной схеме адаптивного управления регулятор может распознавать неизвестные параметры, а некоторые нелинейные функции. Существуют также и другие формулировки, допускающие одновременное достижение робастных и адаптивных целей управления. В этом параграфе будет приведена формулировка задачи управления, которую мы будем исследовать в этой и в последующих двух главах. Обсуждение будет ограничено основными задачами управления — стабилизация, слежение и компенсация возмущений. Сначала будет рассмотрена задача стабилизации с использованием обратной связи по состоянию и по выходу. Далее будут рассмотрены задачи

слежения и компенсации возмущений. Некоторые задачи робастного управления будут рассмотрены в главе 14.

Задача стабилизации с использованием обратной связи по состоянию для системы

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

заключается в том, чтобы построить закон управления с обратной связью по состоянию

$$u = \gamma(t, x),$$

такой что начало координат $x = 0$ является равномерно асимптотически устойчивой точкой равновесия замкнутой системы

$$\dot{x} = f(t, x, \gamma(t, x)).$$

Обратную связь $u = \gamma(t, x)$ обычно называют «статической обратной связью» по состоянию (static state feedback), поскольку она задается функцией без памяти от переменных x . Иногда используется динамическая обратная связь по состоянию (dynamic state feedback)

$$u = \gamma(t, x, z),$$

где z — решение динамической системы, входом которой является x , т. е.

$$\dot{z} = g(t, x, z).$$

В качестве примеров систем с динамической обратной связью можно указать рассмотренную в параграфе 12.3 систему с интегральным управлением и адаптивную систему управления, исследованную в параграфе 1.2.6.

Задача стабилизации с использованием обратной связи по выходу для системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u), \\ y &= h(t, x, u),\end{aligned}$$

заключается в том, чтобы построить статический закон управления с обратной связью по выходу (static output feedback)

$$u = \gamma(t, y),$$

или динамический закон управления с обратной связью по выходу (dynamic output feedback)

$$\begin{aligned}u &= \gamma(t, y, z), \\ \dot{z} &= g(t, y, z),\end{aligned}$$

такой что начало координат является равномерно асимптотически устойчивой точкой равновесия замкнутой системы. В случае динамической обратной связи стабилизируемым началом координат является точка ($x = 0, z = 0$). Динамическая обратная связь обычно применяется в схемах управления по выходу, т. к. в этих случаях отсутствие

возможности измерения некоторых переменных состояния может быть компенсировано использованием в регуляторе «наблюдателей» или аналогичных компонентов.

Поскольку задача стабилизации в стандартной постановке предполагает стабилизацию точки равновесия в начале координат, мы можем использовать полностью аналогичную формулировку для задачи стабилизации системы в произвольной точке x_{ss} . Для этого нам необходимо установить факт существования функции входа u_{ss} , такой что замкнутая система имеет точку равновесия в x_{ss} , т. е.

$$0 = f(t, x_{ss}, u_{ss}), \forall t \geq 0.$$

Замена переменных

$$x_\delta = x - x_{ss}, \quad u_\delta = u - u_{ss}$$

приводит систему к следующему виду:

$$\dot{x}_\delta = f(t, x_{ss} + x_\delta, u_{ss} + u_\delta) \stackrel{\text{def}}{=} f_\delta(t, x_\delta, u_\delta),$$

где $f_\delta(t, 0, 0) \equiv 0$ для всех $t \geq 0$. В случае задачи стабилизации по выходу, вектор выхода переопределяется:

$$\begin{aligned} y_\delta &= y - h(t, x_{ss}, u_{ss}) = \\ &= h(t, x_{ss} + x_\delta, u_{ss} + u_\delta) - h(t, x_{ss}, u_{ss}) \stackrel{\text{def}}{=} h_\delta(t, x_\delta, u_\delta), \end{aligned}$$

где $h_\delta(t, 0, 0) \equiv 0$ для всех $t \geq 0$. Таким образом, мы приходим к рассмотрению стандартной задачи стабилизации для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= f_\delta(t, x_\delta, u_\delta), \\ y_\delta &= h_\delta(t, x_\delta, u_\delta), \end{aligned}$$

где u_δ — обратная связь по переменным x_δ или y_δ . Окончательный закон управления $u = u_\delta + u_{ss}$ имеет компонент обратной связи u_δ и компонент прямой связи u_{ss} . Разумеется задача стабилизации становится существенно проще, если система является линейной и не зависит от времени:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du. \end{aligned}$$

В этом случае закон управления с обратной связью $u = -Kx$ сохраняет свойство линейности системы и начало координат замкнутой системы

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

является асимптотически устойчивым, если и только если матрица $A - BK$ гурвицева. Таким образом, задача стабилизации системы статической обратной связью сводится к задаче нахождения матрицы K , такой что собственные значения матрицы $A - BK$ расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости. Линейная теория управления

позволяет¹⁾ решить эту задачу и назначить собственным значениям матрицы $A - BK$ произвольные значения (с единственным ограничением, заключающимся в том, что комплексные собственные значения должны образовывать сопряженные пары) при условии, что пара (A, B) является управляемой. Даже когда некоторые из собственных значений не управляемы, стабилизация системы возможна, если эти неуправляемые собственные значения имеют отрицательные вещественные части. В этом случае пара (A, B) называется стабилизуемой и неуправляемые (для разомкнутой системы) собственные значения матрицы A являются (для замкнутой системы) собственными значениями матрицы $A - BK$. Если измерению доступен лишь вектор выходов y , для стабилизации системы можно применить динамическую компенсацию в виде регулятора с наблюдателем

$$\begin{aligned} u &= -K\hat{x}, \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + H(y - C\hat{x} - Du). \end{aligned}$$

В этом случае обратная связь имеет вид обратной связи по состоянию с коэффициентом усиления K , подобранным таким образом, чтобы матрица $A - BK$ была гурвицевой, в то время, как коэффициент усиления в наблюдателе H подбирается так, чтобы обеспечить гурвицевость матрицы $A - HC$. Собственными значениями замкнутой системы являются собственные значения матриц $A - BK$ и $A - HC$.²⁾ Стабилизация $A - HC$ является дуальной задачей по отношению к стабилизации $A - BK$ и для решения этой задачи требуется наблюдаемость (или по крайней мере различимость (detectability)) пары (A, C) .

В случае нелинейной системы общего вида рассматриваемая задача стабилизации становится более сложной. С практической точки зрения наиболее простым подходом для решения этой задачи является использование результатов, имеющихся для линейных систем, т. е. использование метода линеаризации. В параграфе 12.2 закон управления будет построен посредством линеаризации системы в окрестности желаемой точки равновесия в виде обратной связи для соответствующей линеаризованной системы. Применимость этого подхода обусловлена первым методом Ляпунова, сформулированным в виде теорем 4.7 и 4.13. Очевидно, что результаты, полученные с использованием этого подхода, будут иметь локальный характер, т. е. он гарантирует лишь асимптотическую устойчивость замкнутой системы, но не позволяет в общем случае определить область притяжения или обеспечить глобальную асимптотическую устойчивость. В параграфе 12.5 будет предложен

¹⁾ См., например, работы [9], [35], [110] и [158].

²⁾ Этот факт известен как «принцип разделения» (separation principle), т. к. назначение собственных значений для замкнутой системы может быть выполнено по отдельности в задачах нахождения коэффициентов усиления для обратной связи и для наблюдателя.

метод настройки обратной связи, позволяющий расширить сферу применимости метода линеаризации за счет решения задачи стабилизации в различных рабочих точках и последовательного гладкого или скачкообразного перехода регулятора с одного режима на другой. В главе 13 будет предложен другой метод линеаризации для специального класса нелинейных систем, которые могут быть преобразованы в линейные системы заменой входных функций и (при необходимости) переменных состояния. После выполнения этого преобразования можно построить линейную обратную связь для полученной линейной системы. Этот метод линеаризации отличается от рассмотренного выше стандартного метода линеаризации тем, что он является в определенном смысле точным методом, т. к. при этом нет какой-либо аппроксимации. Однако для получения этого результата необходимо знать точное уравнение состояния системы, т. к. именно это точное знание позволяет исключить нелинейности системы. Поскольку невозможно допустить в общем случае, что эволюция системы точно описывается рассматриваемым при решении задачи уравнением состояния, применение этого метода почти всегда приводит к анализу замкнутой системы, являющейся возмущением номинальной системы, начало координат которой является экспоненциально устойчивой точкой равновесия. Применимость этого метода вытекает из теории Ляпунова для возмущенных систем (см. главу 9) и в частности из робастности свойства экспоненциальной устойчивости.

При стабилизации линейной системы обратной связью начало координат соответствующей замкнутой системы является глобально асимптотически устойчивым. Этот результат не верен для нелинейных систем общего вида, для которых могут быть ведены различные понятия стабилизации. Если нелинейная система стабилизируется с использованием метода линеаризации, начало координат замкнутой системы становится асимптотически устойчивым. Без дополнительного анализа системы невозможно определить область притяжения начала координат. В этом случае мы будем говорить, что закон управления с обратной связью обеспечивает *локальную стабилизацию*. Если этот закон управления гарантирует, что существует некоторое множество, принадлежащее области притяжения, или если имеется оценка области притяжения, то мы будем говорить, что закон управления обеспечивает *стабилизацию в области*. Если начало координат замкнутой системы глобально асимптотически устойчиво, мы будем говорить, что закон управления обеспечивает *глобальную стабилизацию*. Если закон управления не обеспечивает глобальной стабилизации, но при этом сколь угодно большое множество можно включить в область притяжения, мы будем говорить, что закон управления обеспечивает *полуглобальную стабилизацию* (*semiglobal stabilization*). Эти четыре понятия стабилизации иллюстрируются в следующем примере.

Пример 12.1. Предположим, что задача заключается в стабилизации скалярной системы

$$\dot{x} = x^2 + u$$

с использованием обратной связи по состоянию. Линеаризация в окрестности начала координат приводит к линейной системе $\dot{x} = u$, которая может быть стабилизирована обратной связью $u = -kx$, где $k > 0$. Если этот закон управления применить в исходной нелинейной системе, получаем

$$\dot{x} = -kx + x^2.$$

Линеаризация этого уравнения в окрестности начала координат приводит к уравнению $\dot{x} = -kx$. Таким образом, по теореме 4.7 начало координат является асимптотически устойчивыми и мы можем сказать, что $u = -kx$ обеспечивает локальную стабилизацию. В этом примере нетрудно получить область притяжения: $\{x < k\}$. С учетом этого результата мы можем сказать, что $u = -kx$ обеспечивает стабилизацию в области. Увеличивая k , можно расширить область притяжения. Фактически для любого компактного множества $B_r = \{|x| \leq r\}$ мы можем обеспечить его вхождение в область притяжения, выбрав $k > r$. Следовательно, $u = -kx$ обеспечивает полуглобальную стабилизацию. Важно отметить, что $u = -kx$ не обеспечивает глобальную стабилизацию. Действительно, для любого конечного коэффициента k существует подмножество пространства состояний (т. е. $x \geq k$), которое не содержится в области притяжения. Несмотря на то, что при полуглобальной стабилизации любое компактное множество может быть включено в область притяжения, закон управления зависит от этого множества и может оказаться неработоспособным для большего множества. Для любого заданного r можно выбрать $k > r$. При фиксированном коэффициенте усиления регулятора k решение $x(t)$ может уйти на бесконечность, если начальное состояние принадлежит множеству $\{x > k\}$. Тем не менее, глобальная стабилизация может быть обеспечена с использованием нелинейной обратной связи

$$u = -x^2 - kx,$$

которая исключает нелинейность разомкнутой системы и приводит замкнутую линейную систему к виду $\dot{x} = -kx$. \triangle

Перейдем к рассмотрению более общей задачи управления — задаче слежения при наличии возмущений. Модель системы имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u, w), \\ y &= h(t, x, u, w), \\ y_m &= h_m(t, x, u, w),\end{aligned}$$

где x — состояние, u — управление, w — возмущение, y — выход системы, по которому осуществляется управление, и y_m — измеряемый

выход. Задача состоит в том, чтобы построить закон управления, такой что выход системы y отслеживает некоторый заданный сигнал r , т. е.

$$e(t) = y(t) - r(t) \approx 0, \forall t \geq t_0,$$

где t_0 — момент времени, когда начинается процесс управления. Поскольку начальное значение выхода y зависит от начального состояния $x(t_0)$, для выполнения этого требования для всех $t \geq t_0$ необходимо предопределять либо $x(t_0)$, либо начальное значение командного сигнала, что предполагает знание $x(t_0)$. Во многих приложениях это невозможно. Поэтому в качестве цели управления выступает требование асимптотического слежения по выходу, заключающееся в том, что ошибка слежения e стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, т. е.

$$e(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Если асимптотическое слежение по выходу обеспечено при наличии возмущений в канале входа, мы будем говорить, что достигнута цель асимптотической компенсации возмущения. Если внешние сигналы r и w генерируются известной моделью (например, если эти сигналы имеют постоянные значения или являются синусоидальными колебаниями известной частоты), цели асимптотического слежения по выходу или асимптотической компенсации возмущения могут быть достигнуты путем включения этой известной модели в разрабатываемый регулятор с обратной связью.¹⁾ Это может быть сделано даже если модель системы содержит неизвестные параметры. В специальном случае, когда внешние сигналы постоянны и целью управления является обеспечение асимптотического стремления выхода y к «контрольной точке» r , асимптотическое регулирование и компенсация возмущений могут быть достигнуты путем включения в регулятор «интегрального действия». Этот способ асимптотического регулирования представляется единственным способом достижения цели в случае, когда в системе имеются параметрические неопределенности и это объясняет популярность в промышленном применении ПИ- и ПИД-регуляторов (соответственно, пропорционально-интегральных (ПИ) (proportional-integral) и пропорционально-интегрально дифференциальных (ПИД) (proportional-integral-derivative)). Принцип использования интегрального действия никак не связан со свойством линейности системы. В параграфе 12.3 интегральное управление будет представлено для нелинейной системы общего вида. Далее в параграфе 12.4 мы покажем, как метод линеаризации может быть использован для нахождения стабилизирующего компонента интегрального регулятора. В параграфах 14.1.4 и 14.5.3 главы 14 мы покажем, как ПИ- и ПИД-регуляторы могут быть применены в робастной системе управления для класса нелинейных систем.

¹⁾Этот факт известен как «принцип внутренней модели» (internal model principle). (См. [32].)

В случае, когда возмущение во входном канале представлено функцией времени общего вида $w(t)$, обеспечить выполнение цели асимптотической компенсации возмущений невозможно. В подобной ситуации можно попытаться обеспечить цель подавления возмущений (disturbances attenuation), которая эквивалентна требованию предельной ограниченности ошибки слежения с заданным допуском, т. е.

$$\|e(t)\| \leq \varepsilon, \forall t \geq T,$$

где ε — заданная (малая) положительная константа. С другой стороны, можно рассмотреть задачу подстройки вход-выходного отображения замкнутой системы, действующего от возмущения в канале управления w к ошибке слежения e . Например, если w является L_2 -сигналом, то в качестве цели управления можно рассмотреть минимизацию коэффициента усиления L_2 -устойчивого вход-выходного отображения $w \mapsto e$ замкнутой системы, или, как минимум, обеспечение требования, что этот коэффициент будет меньше заданного допустимого значения.¹⁾

Законы управления с обратной связью для задач слежения могут быть классифицированы аналогично тому, как это было сделано для задач стабилизации. Если состояние x измеряется, то мы говорим о построении обратной связи по состоянию и в этом случае $u_m = x$; в противном случае мы говорим о построении обратной связи по выходу. Кроме того, в этих случаях обратная связь может быть статической или динамической. Цель управления может быть сформулирована как локальное, полуглобальное и глобальное слежение, или слежение в области. Новым элементом в этих формулировках является то, что в них говорится не только о переменных состояния, но и о внешних сигналах r и w . Например, в типичной задаче локального слежения цель управления достигается для достаточно малых отклонениях начальных состояний и при достаточно малых внешних сигналах, а в задаче глобального слежения цель управления достигается для любого начального состояния и для любых (r, w) , принадлежащих заданному классу внешних сигналов.

12.2. Стабилизация посредством линеаризации.

В этом параграфе мы проиллюстрируем процедуру построения закона управления с использованием метода линеаризации на примере задачи стабилизации. Сначала будет рассмотрен вопрос построения статической обратной связи по состоянию, а затем — вопрос построения обратной связи по выходу.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (12.1)$$

¹⁾Эта формулировка соответствует задаче нахождения H_∞ -управления. (См., например, работы [20], [54], [61], [90], [199] и [219].)

где $f(0, 0) = 0$ и $f(x, u)$ — непрерывно дифференцируемые функции в области $D_x \times D_u \subset R^n \times R^p$, содержащей начало координат $(x = 0, u = 0)$. Наша цель заключается в построении закона управления с обратной связью по состоянию $u = \gamma(x)$, обеспечивающего стабилизацию системы. Линеаризация (12.1) в окрестности $(x = 0, u = 0)$ приводит к линейной системе

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (12.2)$$

где

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right|_{x=0, u=0}; \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right|_{x=0, u=0}.$$

Предположим, что пара (A, B) управляема или по крайней мере стабилизуема. Найдем матрицу K , такую что желаемые собственные значения матрицы $A - BK$ расположены в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости. Применим линейную обратную связь по состоянию $u = -Kx$ к нелинейной системе (12.1). Замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = f(x, -Kx). \quad (12.3)$$

Очевидно начало координат является точкой равновесия замкнутой системы. Линеаризация (12.3) в окрестности начала координат $x = 0$ приводит к системе

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, -Kx) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, -Kx)(-K) \right]_{x=0} x = (A - BK)x.$$

Поскольку $A - BK$ гурвицева, из теоремы 4.7 следует, что начало координат является асимптотически устойчивой точкой равновесия замкнутой системы (12.3). В действительности в соответствии с теоремой 4.13 начало координат является экспоненциально устойчивым. При использовании подхода линеаризации мы можем попутно получить функцию Ляпунова для замкнутой системы. Пусть Q — положительно определенная симметричная матрица. Решим уравнение Ляпунова

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P = -Q$$

относительно P . Поскольку $(A - BK)$ гурвицева, уравнение Ляпунова имеет единственное положительно определенное решение (см. теорему 4.6). Квадратичная функция $V(x) = x^T Px$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы в окрестности начала координат. Этую функцию можно использовать для оценки области притяжения.

Пример 12.2. Рассмотрим уравнение маятника

$$\ddot{\theta} = -a \sin \theta - b \dot{\theta} + cT,$$

где $a = g/l > 0$, $b = k/m \geq 0$, $c = 1/ml^2 > 0$ и θ — угол между стержнем маятника и вертикальной осью, T — вращательный момент, приложенный к маятнику. Пусть этот момент рассматривается в качестве управляющего воздействия системы и предположим, что наша

цель заключается в стабилизации положения маятника, соответствующего углу $\theta = \delta$. Для того, чтобы точкой равновесия маятника было положение $\theta = \delta$, вращательный момент должен иметь составляющую T_{ss} , удовлетворяющую равенству

$$0 = -a \sin \delta + cT_{ss}.$$

Выберем в качестве переменных состояния $x_1 = \theta - \delta$, $x_2 = \dot{\theta}$, а в качестве переменной управления $u = T - T_{ss}$. Тогда уравнение состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - bx_2 + cu \end{aligned}$$

представлено в стандартной форме (12.1), где $f(0, 0) = 0$. Линеаризация системы в окрестности начала координат приводит к линейной системе с

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos(x_1 + \delta) & -b \end{bmatrix}_{x_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta & -b \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}.$$

Пара (A, B) управляема. Пусть $K = [k_1 \ k_2]$. Тогда легко показать, что $A - BK$ гурвицева при

$$k_1 > -\frac{a \cos \delta}{c}, \quad k_2 > -\frac{b}{c}.$$

Управляющий момент определяется равенством

$$T = \frac{a \sin \delta}{c} - Kx = \frac{a \sin \delta}{c} - k_1(\theta - \delta) - k_2 \dot{\theta}.$$

Читателю предлагается (упражнение 12.1) выполнить анализ устойчивости замкнутой системы. \triangle

Обратимся к задаче стабилизации системы с помощью обратной связи по выходу. Модель системы имеет вид

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (12.4)$$

$$y = h(x), \quad (12.5)$$

где $f(0, 0) = 0$, $h(0) = 0$ и $f(x, u), h(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции в области $D_x \times D_u \subset R^n \times R^p$, содержащей начало координат $(x = 0, u = 0)$. Наша цель заключается в построении закона управления с обратной связью по выходу (т. е. используя доступный для измерения вектор y), обеспечивающего стабилизацию системы. Линеаризация (12.4)–(12.5) в окрестности $(x = 0, u = 0)$ приводит к линейной системе

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (12.6)$$

$$y = Cx, \quad (12.7)$$

где A и B определяются равенствами, приведенными после (12.2); вектор C определяется равенством

$$C = \frac{\partial h}{\partial x}(x) \Big|_{x=0}.$$

Предположим, что (A, B) — стабилизируемая пара и (A, C) — различимая пара. Построим линейный динамический регулятор с обратной связью по выходу

$$\dot{z} = Fz + Gy, \quad (12.8)$$

$$u = Lz + My, \quad (12.9)$$

такой что матрица замкнутой системы

$$\begin{bmatrix} A + BMC & BL \\ GC & F \end{bmatrix} \quad (12.10)$$

является гурвицевой. Одним из решений этой задачи является регулятор с наблюдателем с

$$z = \hat{x}, \quad F = A - BK - HC, \quad G = H, \quad L = -K, \quad M = 0,$$

где K и H выбраны так, чтобы матрицы $A - BK$ и $A - HC$ были гурвицевыми. Нелинейная система (12.4)–(12.5), замкнутая регулятором (12.8)–(12.9), имеет следующий вид:

$$\dot{x} = f(x, Lz + Mh(x)), \quad (12.11)$$

$$\dot{z} = Fz + Gh(x). \quad (12.12)$$

Легко показать, что начало координат $(x = 0, z = 0)$ является точкой равновесия замкнутой системы (12.11)–(12.12) и ее линеаризация в окрестности начала координат приводит к линейной системе с гурвицевой матрицей (12.10). Таким образом, мы можем заключить, что начало координат является экспоненциально устойчивой точкой равновесия замкнутой системы (12.11)–(12.12). Функция Ляпунова для замкнутой системы может быть получена в виде решения уравнения Ляпунова для гурвицевой матрицы (12.10).

Пример 12.3. Рассмотрим уравнения маятника из примера 12.2 и предположим, что измерению доступен угол θ , но угловая скорость $\dot{\theta}$ не измеряется. В качестве переменной выхода y можно взять $y = x_1 = \theta - \delta$. Регулятор с обратной связью по состоянию из примера 12.2 может быть реализован с использованием наблюдателя

$$\hat{x} = Ax + Bu + H(y - \hat{x}_1).$$

Положим $H = [h_1 \ h_2]^T$. Тогда можно показать, что матрица $A - HC$ является гурвицевой, если

$$h_1 + b > 0, \quad h_1 b + h_2 + a \cos \delta > 0.$$

Управляющий момент определяется равенством

$$T = \frac{a \sin \delta}{c} - K\hat{x}. \quad \triangle$$

12.3. Интегральное управление

В примере 12.2 была рассмотрена задача управления маятником и целью управления являлось обеспечение постоянного значения δ угла наклона θ . Сведем эту задачу к стандартной задаче стабилизации, переместив желаемую точку равновесия в начало координат. Этот подход применим, если параметры системы известны, но не может быть использован при наличии параметрических возмущений. Закон управления

$$T = \frac{a \sin \delta}{c} - k_1(\theta - \delta) - k_2\dot{\theta}$$

включает составляющую $T_{ss} = (a/c) \sin \delta$, которая соответствует уставновившемуся состоянию θ_{ss} угла наклона θ , при желаемом угле δ , а также составляющую обратной связи $-Kx$, такой что матрица $A - BK$ гурвицева. Несмотря на то, что вычисление обеих составляющих зависит от параметров системы, составляющая обратной связи может быть найдена так, чтобы система была робастна по отношению к широкому классу параметрических возмущений. В частности, если нам известна верхняя оценка отношения a/c , скажем если $a/c \leqslant \rho$, можно обеспечить гурвицевость матрицы $A - BK$, выбрав коэффициенты k_1 и k_2 с учетом выполнения неравенств

$$k_1 > \rho, \quad k_2 > 0.$$

Однако вычисление составляющей T_{ss} может быть чувствительно к параметрическим возмущениям. Предположим, что T_{ss} вычисляется с использованием номинальных значений a_0 и c_0 величин a и c . Точка равновесия замкнутой системы определяется равенством

$$a \sin \theta_{ss} = c \left[\frac{a_0}{c_0} \sin \delta - k_1(\theta_{ss} - \delta) \right].$$

Если $\delta = 0$ или $\delta = \pi$ (т. е. маятник стабилизируется в одной из точек равновесия разомкнутой системы), из $T_{ss} = 0$ и предыдущего равенства следует, что $\theta_{ss} = \delta$. В этом случае используемый в примере 12.2 подход будет робастным по отношению к параметрическим возмущениям. Для других значений δ разность между углом наклона и желаемым его значением будет слишком большой. Например, если $\delta = 45^\circ$, $c = c_0/2$ (удвоение массы) при $a = a_0$ и $k_1 = 3a_0/c_0$ будем иметь $\theta_{ss} \approx 36^\circ$.

В этом параграфе мы представим метод интегрального управления, который обеспечивает асимптотическое регулирование системы при наличии в ней параметрических возмущений с сохранением свойств

устойчивости замкнутой системы. Метод интегрального управления применим не только к линейным системам и не обусловлен применением линеаризации системы для построения регулятора с обратной связью. Этот подход будет представлен в этом параграфе для нелинейной системы общего вида, а в следующем параграфе будет показано, как линеаризация системы может быть использована для построения регулятора с обратной связью.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u, w), \quad (12.13)$$

$$y = h(x, w), \quad (12.14)$$

$$y_m = h_m(x, w), \quad (12.15)$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния, $u \in R^p$ — вектор управления, $y \in R^p$ — управляемый выход, $y_m \in R^m$ — измеряемый выход и $w \in R^l$ — вектор неизвестных постоянных параметров и возмущений. Функции f , h и h_m предполагаются непрерывно дифференцируемыми по (x, u) и непрерывными по w в области $D_x \times D_u \times D_w \subset R^n \times R^p \times R^l$. Пусть $r \in D_r \subset R^p$ — известный постоянный командный сигнал. Положим

$$v = \begin{bmatrix} r \\ w \end{bmatrix} \in D_v \stackrel{\text{def}}{=} D_r \times D_w.$$

Наша цель заключается в построении обратной связи, такой что

$$y(t) \rightarrow r \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Предположим, что y доступен для измерения, т.е. y является подмножеством y_m . Цель управления заключается в стабилизации системы к точке равновесия $y = r$. Предположим, что для любого $v \in D_v$ существует единственная пара (x_{ss}, u_{ss}) , непрерывно зависящая от v и удовлетворяющая уравнениям

$$0 = f(x_{ss}, u_{ss}, w), \quad (12.16)$$

$$r = h(x_{ss}, w), \quad (12.17)$$

и такая что x_{ss} — желаемая точка равновесия и u_{ss} — компонент управления, соответствующий установившемуся режиму в точке равновесия x_{ss} . Для введение в управление компонента интегрального действия рассмотрим ошибку $e = y - r$, удовлетворяющую уравнению

$$\dot{e} = e.$$

Добавим к уравнению состояния (12.13) интегратор:

$$\dot{x} = f(x, u, w), \quad (12.18)$$

$$\dot{e} = h(x, w) - r. \quad (12.19)$$

В случае нескалярного управления ($p > 1$), интегратор представляет собой стек из p интеграторов для каждого элемента вектора e . Легко

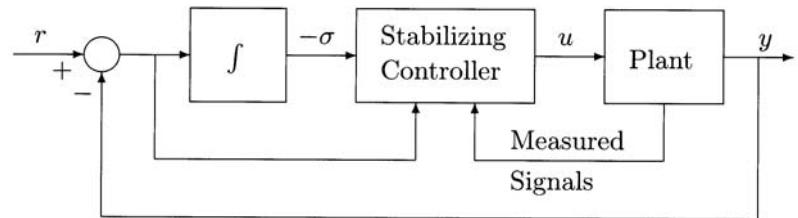


Рис. 12.1. Интегральное управление

видеть, что для выполнения интегрирования в режиме реального времени располагать значениями y и r . Таким образом, нам необходимо построить закон управления, обеспечивающий стабилизацию расширенной модели состояния (12.18)–(12.19) в точке равновесия (x_{ss}, σ_{ss}) , где σ_{ss} соответствует желаемому u_{ss} . На рисунке 12.1 показана блок-схема интегрального управления.

В состав интегрального управления входят два компонента: интегратор и стабилизирующий регулятор. Интегратор иногда называют внутренней моделью, т. к. она дублирует модель, представленную уравнением $\dot{v} = 0$ и генерирующую внешний постоянный сигнал v . Структура стабилизирующего регулятора зависит от характера измеряемого сигнала. Например, в случае обратной связи по состоянию, т. е. при $y_m = x$, стабилизирующий регулятор принимает следующий вид:

$$u = \gamma(x, \sigma, e),$$

где γ выбрана таким образом, что существует единственная σ_{ss} , удовлетворяющая уравнению

$$\gamma(x_{ss}, \sigma_{ss}, 0) = u_{ss}$$

и замкнутая система

$$\dot{x} = f(x, \gamma(x, \sigma, h(x, w) - r), w),$$

$$\dot{\sigma} = h(x, w) - r$$

имеет асимптотически устойчивую точку равновесия в (x_{ss}, σ_{ss}) . В точке равновесия $y = r$ и это свойство выполнено для любого значения w . Следовательно, асимптотическое регулирование обеспечивается для всех начальных состояний в области притяжения точки (x_{ss}, σ_{ss}) .

Тот факт, что изображенный на рисунке 12.1 регулятор является робастным по отношению к любым параметрическим возмущениям, не нарушающим свойств устойчивости замкнутой системы, может быть интуитивно обоснован следующим образом. Регулятор с обратной связью создает асимптотически устойчивую точку равновесия. В этой точке все сигналы должны быть постоянными. Для того, чтобы интегратор $\dot{e} = e$ имел постоянный выход σ , его вход e должен быть нулевым. Таким образом, введение в схему управления интегратора приводит

к тому, что ошибка регулирования становится равной нулю в точке равновесия. Параметрические возмущения изменяют точку равновесия, но условие $e = 0$ остается выполненным в точке равновесия. Поскольку возмущенная точка равновесия остается асимптотически устойчивой, обеспечивается выполнение цели управления.

Разработка стабилизирующего регулятора — это нетривиальная задача, поскольку уравнение замкнутой системы зависит от неизвестного вектора w . В следующем параграфе будет предложен непосредственный метод разрешения этой дилеммы с использованием линеаризации системы, но этот подход обеспечивает лишь локальное регулирование. Нелинейное регулирование может быть обеспечено с использованием способов, описанных в главе 14. Пример применения подобного подхода рассмотрен в параграфе 14.1.4.

12.4. Построение интегрального управления с использованием линеаризации

В этом параграфе будет разработан интегральный регулятор с обратной связью, после чего будет рассмотрена задача построения обратной связи по выходу. Наша цель заключается в нахождении закона управления $u = \gamma(x, \sigma, e)$, стабилизирующего расширенную модель состояния (12.18)–(12.19) в точке (x_{ss}, σ_{ss}) , где $u_{ss} = \gamma(x_{ss}, \sigma_{ss}, 0)$. Поскольку мы собираемся использовать подход линеаризации, разумно рассмотреть линейное управление в виде обратной связи

$$u = -K_1x - K_2\sigma - K_3e. \quad (12.20)$$

Замыкая управлением (12.20) систему (12.18)–(12.19), получаем

$$\dot{x} = f(x, -K_1x - K_2\sigma - K_3(h(x, w) - r), w), \quad (12.21)$$

$$\dot{\sigma} = h(x, w) - r. \quad (12.22)$$

Точки равновесия $(\bar{x}, \bar{\sigma})$ системы (12.21)–(12.22) удовлетворяют уравнениям

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u}, w),$$

$$0 = h(\bar{x}, w) - r,$$

$$\bar{u} = -K_1\bar{x} - K_2\bar{\sigma}.$$

С учетом предположения о том, что равновесные уравнения (12.16) и (12.17) имеют единственное решение (x_{ss}, u_{ss}) в рассматриваемой области, заключаем, что $\bar{x} = x_{ss}$ и $\bar{u} = u_{ss}$. Выбрав невырожденную матрицу K_2 , гарантируем, что существует единственное решение σ_{ss} уравнения

$$u_{ss} = -K_1x_{ss} - K_2\sigma_{ss}.$$

12.4. Построение интегрального управления с использованием линеаризации

Наша цель заключается в стабилизации точки равновесия (x_{ss}, σ_{ss}) . Линеаризация замкнутой системы (12.21)–(12.22) в окрестности (x_{ss}, σ_{ss}) приводит к линейной системе

$$\dot{\xi}_\delta = (\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K})\xi_\delta$$

где

$$\begin{aligned} \xi_\delta &= \begin{bmatrix} x - x_{ss} \\ \sigma - \sigma_{ss} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K} = [K_1 + K_3C \quad K_2] \\ \mathcal{A} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, w) \right|_{x=x_{ss}, u=u_{ss}}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u, w) \right|_{x=x_{ss}, u=u_{ss}}, \\ C &= \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x, w) \right|_{x=x_{ss}}. \end{aligned}$$

Матрицы A , B и C в общем случае зависят от v . Предположим, что пара (A, B) управляема (соответственно, стабилизируема) и¹⁾

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p. \quad (12.23)$$

Тогда пара (A, B) управляема (соответственно, стабилизируема).²⁾ Найдем не зависящую от w матрицу \mathcal{K} такую, что матрица $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}$ гурвицева для всех $v \in D_v$.³⁾ Для любой такой матрицы матрица K_2 будет невырожденной.⁴⁾ Таким образом, (x_{ss}, σ_{ss}) является экспоненциально устойчивой точкой равновесия замкнутой системы (12.21)–(12.22) и все решения, начинающиеся в ее области притяжения, стремятся к ней при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, $y(t) - r \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что при стабилизации точки (x_{ss}, u_{ss}) можно обеспечить $K_3 = 0$. Поэтому мы можем положить $K_3 = 0$ или же мы можем использовать эту матрицу по своему усмотрению для улучшения переходных процессов в системе.

¹⁾ Из рангового условия (12.23) следует, что линейная модель состояния (A, B, C) не имеет передаточных нулей в начале координат.

²⁾ См. упражнение 12.3.

³⁾ Это соответствует задаче робастной стабилизации, всесторонне исследованной в литературе по линейной теории управления (См., например, работы [48] и [69].) Заметим, что если \mathcal{K} выбрана так, чтобы стабилизировать систему с матрицей $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}$ для некоторых значений номинальных параметров, то матрица $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}$ останется гурвицевой в некоторой окрестности этих номинальных параметров вследствие непрерывной зависимости собственных значений матрицы от ее элементов.

⁴⁾ Если K_2 вырождена, то $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}$ также вырождена, что противоречит тому, что $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}$ гурвицева.

Суммируя все вышесказанное, можно заключить, что если пара (A, B) стабилизуема и выполнено ранговое условие (12.23), то управление с обратной связью по состоянию может быть выбрано в виде:

$$\begin{aligned} u &= -K_1x - K_2\sigma, \\ \dot{\sigma} &= e = y - r, \end{aligned}$$

где матрица $\mathcal{K} = [K_1 \ K_2]$ такова, что $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}$ является гурвицевой матрицей.

Пример 12.4. Рассмотрим уравнение маятника

$$\ddot{\theta} = -a \sin \theta - b\dot{\theta} + cT,$$

где $a = g/l > 0$, $b = k/m \geq 0$, $c = 1/ml^2 > 0$, θ — угол между стержнем маятника и вертикальной осью и T — вращательный момент, приложенный к маятнику. Пусть T рассматривается как управляющее воздействие и предположим, что мы хотим обеспечить стабилизацию θ в точке δ . Положив $x_1 = \theta - \delta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $u = T$ и $y = x_1$, запишем уравнение состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1 + \delta) - bx_2 + cu, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Легко показать, что желаемая точка равновесия определяется равенством

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{ss} = \frac{a}{c} \sin \delta.$$

Матрицы A , B и C имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta & -b \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0].$$

Поскольку $c > 0$, можно показать, что пара (A, B) управляема и ранговое условие (12.23) выполнено. Полагая $K_1 = [k_1 \ k_2]$ и $K_2 = k_3$ и используя критерий Рауса–Гурвица, заключаем, что матрица $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}$ является гурвицевой, если

$$b + k_2c > 0, \quad (b + k_2c)(a \cos \delta + k_1c) - k_3c > 0 \quad \text{и} \quad k_3c > 0.$$

Предположим, что нам не известны точные значения параметров $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$, но известны верхние оценки ρ_1 и ρ_2 для отношений a/c и $1/c$, соответственно. Тогда выбор

$$k_2 > 0, \quad k_3 > 0 \quad \text{и} \quad k_1 > \rho_1 + \frac{k_3}{k_2} \rho_2 \quad (12.24)$$

обеспечивает гурвицевость матрицы $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}$. Закон управления с обратной связью определяется равенством

$$\begin{aligned} u &= -k_1(\theta - \delta) - k_2\dot{\theta} - k_3\sigma, \\ \dot{\sigma} &= \theta - \delta \end{aligned}$$

и имеет вид классического ПИД-регулятора. Сравнивая этот закон управления с законом управления, полученным в примере 12.2, видим, что в рассматриваемом здесь случае нам не нужно вычислять момент для установившегося режима, необходимый для фиксации системы в равновесном положении. Цель управления достигается для всех параметрических возмущений, удовлетворяющих неравенству $(b + k_2c)(a \cos \delta + k_1c) - k_3c > 0$. На рисунке 12.2 представлены результаты компьютерного моделирования управления маятником при $\delta = \pi/4$ при введении в схему управления интегрального действия (см. пример 12.4) и без применения этого интегрального действия (см. пример 12.2). В первом случае выбранным коэффициентам усиления обратной связи $k_1 = 8$, $k_2 = 2$ и $k_3 = 10$ соответствуют собственные значения -15.93 , -2.93 и -2.14 . Во втором случае выбранным коэффициентам усиления обратной связи $k_1 = 3$, $k_2 = 0.7$ соответствуют собственные значения $-4 \pm j4.59$. В обоих случаях в качестве номинальных параметров взяты $a = c = 10$ и $b = 1$. В случае наличия возмущений в качестве значений b и c взяты 0.5 и 5, что соответствует удвоению массы. Из этих результатов моделирования видно, что при введении в схему управления интегрального действия имеет место улучшение характеристик установившегося режима, но это достигается за счет увеличения длительности переходного процесса и значений управляющего момента в этот период. \triangle

В задаче нахождения обратной связи по выходу интегральный регулятор имеет вид

$$\dot{\sigma} = e = y - r, \quad (12.25)$$

$$\dot{z} = Fz + G_1\sigma + G_2y_m, \quad (12.26)$$

$$u = Lz + M_1\sigma + M_2y_m + M_3e, \quad (12.27)$$

где F , G_1 , G_2 , L , M_1 , M_2 и M_3 не зависят от w и такие, что матрица

$$A_c = \begin{bmatrix} A + BM_2C_m + BM_3C & BM_1 & BL \\ C & 0 & 0 \\ G_2C_m & G_1 & F \end{bmatrix}$$

является гурвицевой для всех $v \in D_v$; $C_m = [\partial h_m / \partial x](x_{ss}, w)$. При этом обеспечивается невырожденность матрицы

$$\begin{bmatrix} M_1 & L \\ G_1 & F \end{bmatrix}$$

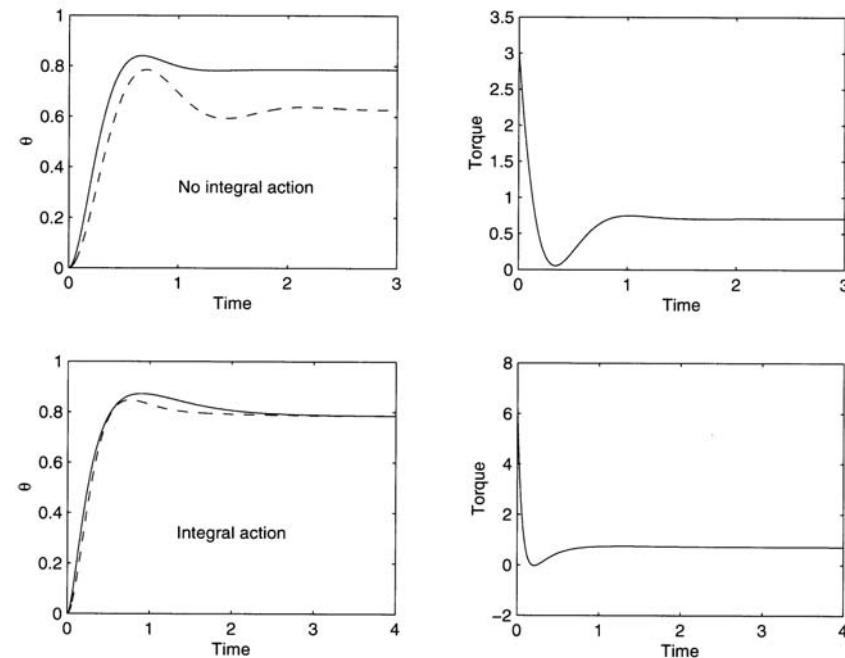


Рис. 12.2. Результаты компьютерного моделирования процесса управления маховиком при номинальных (непрерывная линия) и возмущенных (пунктирная линия) параметрах, при введении в схему управления интегрального действия (пример 12.4) и без такового (пример 12.2)

и, следовательно, уравнение

$$\begin{bmatrix} M_1 & L \\ G_1 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{ss} \\ z_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ss} - M_2 h_m(x_{ss}, w) \\ -G_2 h_m(x_{ss}, w) \end{bmatrix}$$

имеет единственное решение (σ_{ss}, z_{ss}) . Таким образом, $(x_{ss}, \sigma_{ss}, z_{ss})$ — единственная точка равновесия замкнутой системы в которой $u = u_{ss}$ и $e = 0$. Можно показать, что матрица A_c является матрицей линеаризованной замкнутой системы в окрестности $(x_{ss}, \sigma_{ss}, z_{ss})$. Следовательно, указанная точка равновесия является экспоненциально устойчивой и все решения, начинаящиеся в ее области притяжения, стремятся к ней при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, $y(t) - r \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

12.5. Метод настройки обратной связи

Основным ограничением метода построения закона управления с использованием линеаризации системы является то, что построенный закон управления применим лишь в некоторой окрестности рабочей точки (точки равновесия). В этом параграфе мы представим *метод*

настройки обратной связи, позволяющий расширить применимость метода линеаризации на случай нескольких рабочих точек. Во многих ситуациях известно, как изменяется динамика системы при смене рабочих точек. Более того, иногда оказывается возможным построить модель системы, в которой рабочие точки параметризуются одной или несколькими переменными, которые мы будем называть *настроичными переменными*. В этих случаях мы можем выполнить линеаризацию системы в окрестностях нескольких точек равновесия, построить законы управления в каждой из этих окрестностей и реализовать полученное семейство линейных законов управления в виде единого регулятора, параметры которого изменяются в ходе мониторинга настроичных переменных. Подобный регулятор называется *регулятором с настраиваемой обратной связью*.

Концепция настройки обратной связи была изначально предложена при разработке систем управления полетом.¹⁾ Нелинейные уравнения движения самолета или ракеты линеаризовывались в окрестности выбранных рабочих точек, соответствующих различным эксплуатационным режимам полета. Далее строились линейные регуляторы, которые обеспечивали требуемые свойства устойчивость и желаемые эксплуатационные характеристики линеаризованных систем в окрестности выбранных рабочих точек. Затем параметры регуляторов интерполировались функциями от настроичных переменных. В качестве этих переменных обычно выступали динамическое давление, число Маха, высота полета и угол атаки. Наконец построенный регулятор с настраиваемой обратной связью применялся в исходной нелинейной системе. Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий идею настройки обратной связи.

Пример 12.5. Рассмотрим систему резервуаров из упражнения 1.19, в которой площадь поперечного сечения A изменяется при изменении уровня жидкости. Модель этой системы может быть представлена уравнением

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^h A(y) dy \right) = w_i - k \sqrt{\rho g h},$$

где h — высота уровня жидкости в резервуаре, w_i — скорость потока поступающей жидкости, ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения и k — некоторая положительная константа. Рассматривая $x = h$ в качестве переменной состояния и $u = w_i$ в качестве

¹⁾ В работе [159] приведен обзор метода настройки обратной связи и его приложений в области систем управления полетом и автомобильными двигателями.

управления системы, получаем модель состояния

$$\dot{x} = \frac{1}{A(x)}(u - c\sqrt{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, u),$$

где постоянная $c = k\sqrt{\rho g}$ будет рассматриваться в качестве неизвестного параметра. Предположим, что нам необходимо построить регулятор, такой что x отслеживает некоторый командный сигнал r . Пусть $y = x$ — управляемый выход и r — настроенная переменная. При $r = \alpha$ (некоторая положительная константа) управление должно обеспечивать стремление выхода y к α . С учетом наличия в системе параметрической неопределенности c разумно использовать интегральное управление. Уравнения равновесия (12.16) и (12.17) принимают в рассматриваемой ситуации вид

$$0 = u_{ss} - c\sqrt{x_{ss}}, \quad \alpha = x_{ss}.$$

Следовательно, $x_{ss} = \alpha$ и $u_{ss} = c\sqrt{\alpha}$. Дополняя уравнение состояния интегратором $\dot{\sigma} = e = y - r$, получаем

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \\ \dot{\sigma} &= x - r.\end{aligned}$$

Используем ПИ-регулятор

$$u = -k_1(\alpha)e - k_2(\alpha)\sigma$$

для стабилизации расширенного уравнения состояния в точке (x_{ss}, σ_{ss}) , где $\sigma_{ss} = -u_{ss}/k_2(\alpha)$ при условии, что $k_2 \neq 0$. Замкнутая система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, -k_1(\alpha)(x - r) - k_2(\alpha)\sigma), \\ \dot{\sigma} &= x - r.\end{aligned}$$

При $r = \alpha$ система имеет точку равновесия в (x_{ss}, σ_{ss}) . Линеаризация замкнутой системы в окрестности $(x, \sigma) = (x_{ss}, \sigma_{ss})$ и $r = \alpha$ приводит к линейной системе

$$\dot{\xi}_\delta = \begin{bmatrix} a(\alpha) - b(\alpha)k_1(\alpha) & -b(\alpha)k_2(\alpha) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xi_\delta + \begin{bmatrix} b(\alpha)k_1(\alpha) \\ -1 \end{bmatrix} r_\delta, \quad y_\delta = x_\delta,$$

где $\xi_\delta = [x_\delta \ \sigma_\delta]^T$, $x_\delta = x - \alpha$, $\sigma_\delta = \sigma - \sigma_{ss}$, $r_\delta = r - \alpha$,

$$\begin{aligned}a(\alpha) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\alpha, u=c\sqrt{\alpha}} = \left[\frac{1}{A(x)} \left(\frac{-c}{2\sqrt{x}} \right) - \frac{A'(x)}{A^2(x)}(u - c\sqrt{x}) \right]_{x=\alpha, u=c\sqrt{\alpha}} = \\ &= -\frac{c\sqrt{\alpha}}{2\alpha A(\alpha)}\end{aligned}$$

и

$$b(\alpha) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=\alpha, u=c\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{A(\alpha)}.$$

В предположении, что нам известна верхняя оценка величины c , выберем k_1 и k_2 :

$$k_1(\alpha) = \frac{2\zeta\omega_n}{b(\alpha)}, \quad k_2(\alpha) = \frac{\omega_n^2}{b(\alpha)},$$

где $0 < \zeta < 1$ и $2\zeta\omega_n \gg |a(\alpha)|$. Этот выбор обусловлен тем, что при этом собственные значения замкнутой системы (приблизительно) равны корням уравнения

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0.$$

Таким образом, линеаризация замкнутой системы, полученной применением регулятора с обратной связью при фиксированной r , приводит к линейной системе

$$\dot{\xi}_\delta = A_f(\alpha)\xi_\delta + B_f r_\delta, \quad y_\delta = C_f \xi_\delta,$$

где

$$A_f(\alpha) = \begin{bmatrix} a(\alpha) - 2\zeta\omega_n & -\omega_n^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 2\zeta\omega_n \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C_f = [1 \ 0].$$

Передаточная функция замкнутой системы от входа r_δ к выходу y_δ имеет вид

$$\frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + [2\zeta\omega_n - a(\alpha)]s + \omega_n^2}.$$

Перейдем от рассмотрения гипотетической ситуации, когда предполагалось, что r является константой, к случаю зависящей от времени r . ПИ-регулятор с настраиваемой обратной связью имеет вид

$$u = -k_1(r)e - k_2(r)\sigma, \quad \dot{\sigma} = e = x - r,$$

где α заменена на r и, следовательно, коэффициенты усиления k_1 и k_2 изменяются вместе с r . Нелинейная система, замкнутая регулятором с настраиваемой обратной связью, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, -k_1(r)(x - r) - k_2(r)\sigma), \\ \dot{\sigma} &= x - r.\end{aligned}$$

При $r = \alpha$ система имеет точку равновесия в (x_{ss}, σ_{ss}) . Из этого следует, что нелинейная система, замкнутая регулятором с настраиваемой обратной связью, стабилизируется в желаемой рабочей точке при любой α . Линеаризация в окрестности $(x, \sigma) = (x_{ss}, \sigma_{ss})$ и $r = \alpha$ приводит к линейной системе

$$\dot{\xi}_\delta = A_s(\alpha)\xi_\delta + B_s(\alpha)r_\delta, \quad y_\delta = C_s \xi_\delta,$$

где

$$A_s(\alpha) = \begin{bmatrix} a(\alpha) - 2\zeta\omega_n & -\omega_n^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_s(\alpha) = \begin{bmatrix} 2\zeta\omega_n + \gamma(\alpha) \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и $\gamma(\alpha) = -b(\alpha)k'_2(\alpha)\sigma_{ss}(\alpha) = A'(\alpha)c\sqrt{\alpha}/A^2(\alpha)$. Передаточная функция замкнутой системы от входа r_δ к выходу y_δ имеет вид

$$\frac{[2\zeta\omega_n + \gamma(\alpha)]s + \omega_n^2}{s^2 + [2\zeta\omega_n - a(\alpha)]s + \omega_n^2}.$$

Отметим различия между двумя линейными моделями (A_f, B_f, C_f) и (A_s, B_s, C_s) . Первая модель представляет собой линеаризацию замкнутой системы для регулятора с фиксированной обратной связью, а вторая модель — линеаризацию замкнутой системы для регулятора с настраиваемой обратной связью. В обоих случаях линеаризация выполняется в окрестности желаемой рабочей точки. Ситуация была бы идеальной, если бы эти две модели были эквивалентны, т. к. в этом случае мы были бы уверены в том, что локальное поведение замкнутой системы вблизи желаемой рабочей точки соответствовало бы поведению, предсказанному нашей моделью управления. Сравнивая две модели, можно заметить, что $A_s = A_f$ и $C_s = C_f$, но $B_s \neq B_f$, что приводит к различным расположениям нулей передаточных функций соответствующих замкнутых систем. За исключением этого различия, две передаточные функции имеют одни и те же полюса, а также нулевые установившиеся ошибки при ступенчатых входах. Если выполнение этих характеристик является единственной целью управления, мы можем принять построенный регулятор с настраиваемой обратной связью как приемлемый. С другой стороны, если требуется обеспечить какие-либо другие характеристики (например, соблюдение специальных условий при переходных процессах между переключениями режимов управления), зависящие от расположения нулей передаточной функции, то необходимо исследовать эффект смещения нулей с помощью анализа соответствующей линейной системы или с использованием компьютерного моделирования модели (A_s, B_s, C_s) (или обеих моделей). Альтернативным подходом является модификация регулятора с настраиваемой обратной связью, которая осуществляется с целью получения линейной модели, которая была бы эквивалентна (A_f, B_f, C_f) для любой α . Это может быть сделано путем замены регулятора с настраиваемой обратной связью¹⁾ на следующий:

$$u = -k_1(r)e + \eta, \quad \dot{\eta} = -k_2(r)e.$$

При постоянном коэффициенте усиления k_2 эта модификация может быть интерпретирована как коммутирование коэффициента усиления $-k_2$ с интегратором. (См. рисунок 12.3.) Нелинейная система, замкну-

¹⁾ Эта модификация называется алгоритмом скоростей (velocity algorithm) и была предложена в [96]. Другая подобная модификация рассмотрена в работе [114].

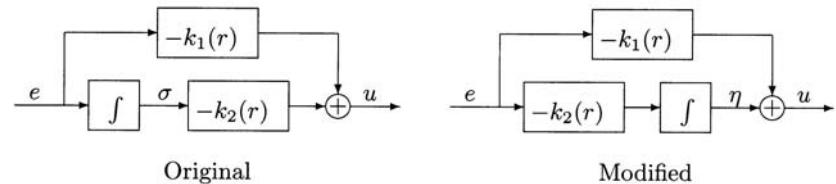


Рис. 12.3. Модификация ПИ-регулятора с настраиваемой обратной связью из примера 12.5.

тая модифицированным регулятором с настраиваемой обратной связью, имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, -k_1(r)(x - r) + \eta), \\ \dot{\eta} &= -k_2(r)(x - r).\end{aligned}$$

При $r = \alpha$ система имеет точку равновесия в $x = x_{ss}$ и $\eta = u_{ss}$. Линеаризация в окрестности $(x, \eta) = (x_{ss}, u_{ss})$ и $r = \alpha$ приводит к линейной системе

$$\dot{z}_\delta = A_{ms}(\alpha)z_\delta + B_{ms}(\alpha)r_\delta, \quad y_\delta = C_{ms}z_\delta,$$

где

$$\begin{aligned}A_{ms}(\alpha) &= \begin{bmatrix} a(\alpha) - 2\zeta\omega_n & b(\alpha) \\ -\omega_n^2/b(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{ms}(\alpha) = \begin{bmatrix} 2\zeta\omega_n \\ \omega_n^2/b(\alpha) \end{bmatrix}, \\ C_{ms} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

и $z_\delta = [x_\delta \ \eta_\delta]^T$, $\eta_\delta = \eta - u_{ss}$. Производная k'_2 не присутствует в этой модели, т. к. k_2 умножается на e , равную нулю в точке равновесия. Легко видеть, что модели (A_f, B_f, C_f) и (A_{ms}, B_{ms}, C_{ms}) эквивалентны и соответствующее преобразование подобия задается равенством

$$\xi_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -b(\alpha)/\omega_n^2 \end{bmatrix} z_\delta.$$

Следовательно, обе модели имеют одну и ту же передаточную функцию от r_δ к y_δ . \triangle

С учетом результатов этого примера можно предложить процедуру построения стабилизирующего регулятора с настраиваемой обратной связью. Эта процедура состоит из следующих шагов:

1. Линеаризация нелинейной модели в окрестности семейства рабочих точек (точек равновесия), параметризованных настроечными переменными.
2. С использованием линеаризованных систем находится параметризованное семейство линейных стабилизирующих регуляторов, обеспечивающих желаемые характеристики поведения системы в каждой из рабочих точек.
3. Построение регулятора с настраиваемой обратной связью, такого что

- для каждого постоянного значения внешнего входного сигнала замкнутая регулятором с настраиваемой обратной связью система имеет ту же точку равновесия, что и система, замкнутая регулятором с фиксированной обратной связью;
 - линеаризация системы, замкнутой регулятором с настраиваемой обратной связью, эквивалентна линеаризации системы, замкнутой регулятором с фиксированной обратной связью.
4. Проверка достижения цели управления при нелокальном применении регулятора с настраиваемой обратной связью путем моделирования замкнутой нелинейной модели.

Второй шаг может быть выполнен путем нахождения соответствующих законов управления для семейства линейных моделей, непрерывно зависящих от настроекенных переменных (аналогично тому, как было сделано в предыдущем примере), или путем решения этой задачи лишь для конечного числа рабочих точек с использованием регулятора, имеющего для каждой из этих точек аналогичную структуру, но с учетом возможности изменения параметров регулятора при переключении системы управления с одной рабочей точки на другую. После этого параметры регулятора интерполируются в промежуточных рабочих точках, что приводит к получению параметризованного семейства линейных регуляторов. Этот интерполяционный процесс в каждом конкретном случае специфичен по своей природе и связан с физикой рассматриваемой системы.¹⁾ В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая, когда задача построения стабилизирующего регулятора для семейства линейных моделей уже решена и эти модели непрерывно зависят от настроекенных переменных.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u, v, w), \quad (12.28)$$

$$y = h(x, w), \quad (12.29)$$

$$y_m = h_m(x, w), \quad (12.30)$$

где f , h и h_m — дважды непрерывно дифференцируемые функции от (x, u, v) и непрерывные по w в области $D_x \times D_u \times D_v \times D_w \subset R^n \times R^p \times R^q \times R^l$; x — вектор состояния, u — вектор управления, v — измеряемый внешний сигнал, w — вектор неизвестных постоянных параметров и возмущений, $y \in R^p$ — управляемый выход и $y_m \in R^m$ — измеряемый выход. Предположим, что y может быть измерен, т. е. y является подмножеством y_m . Пусть $r \in D_r \subset R^p$ — командный сигнал. Необходимо разработать регулятор с обратной связью по выходу,

¹⁾ Более подробное обсуждение этого интерполяционного процесса приведено в работе [159].

который обеспечивает малую ошибку слежения $e = y - r$ при внешнем входном сигнале

$$\rho = \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} \in D_\rho \stackrel{\text{def}}{=} D_r \times D_v.$$

Для обеспечения в установившемся режиме нулевой ошибки при $\rho = \alpha$ (некоторый постоянный вектор) используем интегральное управление и применим регулятор с настраиваемой обратной связью для обеспечения малой ошибки отслеживания медленно меняющегося вектора ρ . Разобьем вектор α следующим образом: $\alpha = [\alpha_r^T, \alpha_v^T]^T$, где α_r и α_v — постоянные значения для r и v , соответственно. Вектор ρ будет рассматриваться как вектор настроекенных переменных.¹⁾ При разработке интегрального управления мы будем предполагать, что существует единственная пара $(x_{ss}, u_{ss}) : D_\rho \times D_w \rightarrow D_x \times D_u$, элементы которой непрерывно дифференцируемы по α и непрерывны по w и такая, что

$$0 = f(x_{ss}(\alpha, w), u_{ss}(\alpha, w), \alpha_v, w), \quad (12.31)$$

$$\alpha_r = h(x_{ss}(\alpha, w), w) \quad (12.32)$$

для всех $(\alpha, w) \in D_\rho \times D_w$. При $\rho = \alpha$ можно аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе, выполнить линеаризацию и построить интегральный регулятор вида

$$\dot{\sigma} = e = y - r, \quad (12.33)$$

$$\dot{z} = F(\alpha)z + G_1(\alpha)\sigma + G_2(\alpha)y_m, \quad (12.34)$$

$$u = L(\alpha)z + M_1(\alpha)\sigma + M_2(\alpha)y_m + M_3(\alpha)e, \quad (12.35)$$

где коэффициенты усиления регулятора F , G_1 , G_2 , L , M_1 , M_2 и M_3 являются непрерывно дифференцируемыми функциями от α , выбранными так, чтобы матрица

$$\mathcal{A}_c(\alpha, w) = \begin{bmatrix} A + BM_2C_m + BM_3C & BM_1 & BL \\ C & 0 & 0 \\ G_2C_m & G_1 & F \end{bmatrix}$$

была гурвицевой для всех $(\alpha, w) \in D_\rho \times D_w$. В этой матрице

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad C = \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{и} \quad C_m = \frac{\partial h_m}{\partial x}$$

где все матрицы Якоби вычислены в точке $(x, u, v) = (x_{ss}, u_{ss}, \alpha_v)$. В рассматриваемом в этом параграфе случае новым аспектом является то, что коэффициенты усиления регулятора могут зависеть от α (т. е. от фиксированного значения настроекной переменной ρ). В случае построения обратной связи по состоянию можно опустить z и уравне-

¹⁾ В литературе, посвященной методу настройки обратной связи, рассмотрен также случай, когда настроекная переменная может зависеть от измеряемого выхода y_m . (См., например, [159]).

ние состояния для этой переменной (12.34) и положить $y_m = x$, $L = 0$, $M_1 = -K_2$, $M_2 = -K_1$ и $M_3 = 0$, где $K = [K_1 \ K_2]$ такова, что матрица

$$\begin{bmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

является гурвицевой для всех $(\alpha, w) \in D_\rho \times D_w$.

Замкнутая регулятором с фиксированной обратной связью система (12.33)–(12.35) имеет вид

$$\dot{x} = f(x, Lz + M_1\sigma + M_2 h_m(x, w) + M_3 e, v, w), \quad (12.36)$$

$$\dot{\sigma} = e = h(x, w) - r, \quad (12.37)$$

$$\dot{z} = Fz + G_1\sigma + G_2h_m(x, w), \quad (12.38)$$

$$y = h(x, w). \quad (12.39)$$

При $\rho = \alpha$ система имеет точку равновесия $(x_{ss}, \sigma_{ss}, z_{ss})$, в которой $e = 0$. Линеаризация в окрестности $(x, \sigma, z) = (x_{ss}, \sigma_{ss}, z_{ss})$ и $\rho = \alpha$ приводит к линейной системе

$$\dot{\xi}_\delta = A_f(\alpha, w)\xi_\delta + B_f(\alpha, w)\rho_\delta, \quad (12.40)$$

$$y_\delta = C_f(\alpha, w)\xi_\delta, \quad (12.41)$$

где

$$\xi_\delta = \begin{bmatrix} x - x_{\text{ss}} \\ \sigma - \sigma_{\text{ss}} \\ z - z_{\text{ss}} \end{bmatrix}, \quad \rho_\delta = \rho - \alpha = \begin{bmatrix} r_\delta \\ v_\delta \end{bmatrix}, \quad y_\delta = y - \alpha_r,$$

$$A_f = \mathcal{A}_c, \quad B_f = \begin{bmatrix} -BM_3 & E \\ -I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_f = [C \ 0 \ 0],$$

$$E = \left. \frac{\partial f}{\partial v}(x, u, v, w) \right|_{x=x_0, u=u_0, v=\alpha_0}.$$

Следовательно, при $\rho = \alpha$ точка равновесия $(x_{ss}, \sigma_{ss}, z_{ss})$ экспоненциально устойчива.

Регулятор с настраиваемой обратной связью может быть получен на основе регулятора с фиксированной обратной связью (12.33)–(12.35), если в качестве коэффициентов усиления F , G_1 , G_2 , L , M_1 , M_2 и M_3 выбрать функции от настроенной переменной ρ , т. е. путем замены α на ρ . Можно показать, что система, замкнутая таким регулятором, будет иметь желаемую точку равновесия и ее линеаризация приведет к линейной системе $(A_s(\alpha, w), B_s(\alpha, w), C_s(\alpha, w))$ с $A_s = A_f = \mathcal{A}_c$, $C_s = C_f$, однако в общем случае $B_s \neq B_f$, что обусловлено выполнением частного дифференцирования указанных коэффициентов усиления по ρ . Поскольку матрица $\mathcal{A}_c(\alpha, w)$ является гурвицевой для всех $(\alpha, w) \in D_\rho \times D_w$, применение регулятора с настраиваемой обратной связью приведет к образованию экспоненциально устойчивой точки равновесия.

сия, в которой установившаяся ошибка слежения будет равна нулю при $\rho = \alpha$. Однако следует иметь ввиду, что передаточная функция замкнутой системы от ρ_δ к y_δ может отличаться от соответствующей передаточной функции модели, на основе которой строится закон управления. Поэтому следует проверять локальную применимость регулятора с настраиваемой обратной связью путем дополнительного анализа или с использованием компьютерного моделирования. Если этот регулятор оказывается приемлемым, можно продолжить выполнение процедуры построения регулятора с настраиваемой обратной связью. Следует отметить однако, что можно добиться большего. Подобно тому, как это было сделано в примере 12.5, можно модифицировать регулятор с настраиваемой обратной связью так, чтобы обеспечить эквивалентность линеаризованных замкнутых систем для регулятора с фиксированной обратной связью и для регулятора с настраиваемой обратной связью. В упомянутом примере мы выполнили коммутирование обратной связи k_2 с интегратором, т. е. интегратор был перемещен из входного канала регулятора в его выходной канал. Поэтому оба коэффициента усиления k_1 и k_2 умножались на ошибку e , равную нулю в установившемся режиме. В рассматриваемой здесь ситуации следует выполнить аналогичную операцию для регулятора (12.33)–(12.35), однако в этом случае имеется дополнительная сложность, связанная с наличием динамического уравнения (12.34), в котором σ и y_m играют роль входов. Вектор σ представляет собой выход интегратора и, следовательно, имеет смысл рассмотреть вопрос о перемещении интегратора в выходной канал регулятора, однако y_m не является выходом интегратора. Эта проблема может быть решена, если имеется возможность измерять \dot{y}_m , производную y_m . В этом случае регулятор (12.33)–(12.35) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \psi, \\ \dot{z} &= F(\alpha)z + G(\alpha)\lambda, \\ u &= L(\alpha)z + M(\alpha)\lambda + M_3(\alpha)e,\end{aligned}$$

где

$$\psi = \begin{bmatrix} e \\ i_m \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}.$$

Передаточная функция от ψ к $u = M_3(\alpha)e$

$$\{L(\alpha)[sI - F(\alpha)]^{-1}G(\alpha) + M(\alpha)\}\frac{1}{s}$$

эквивалентна

$$\frac{1}{s}\{L(\alpha)[sI - F(\alpha)]^{-1}G(\alpha) + M(\alpha)\}.$$

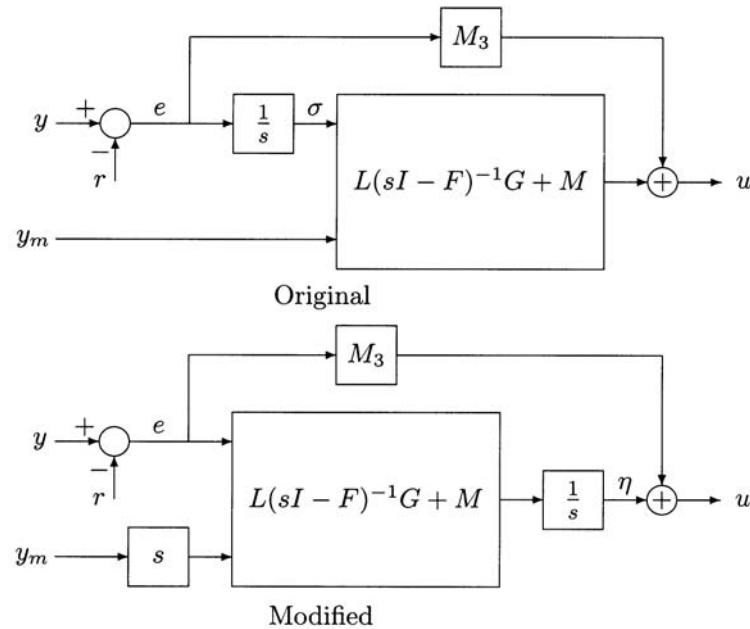


Рис. 12.4. Модификация регулятора с настраиваемой обратной связью (original — исходный регулятор, modified — модифицированный регулятор)

Следовательно, регулятор может быть реализован следующей системой:

$$\dot{\varphi} = F(\alpha)\varphi + G(\alpha)\psi,$$

$$\dot{\eta} = L(\alpha)\varphi + M(\alpha)\psi,$$

$$u = \eta + M_3(\alpha)e.$$

На рисунке 12.4 показаны исходная и модифицированная реализации регулятора с фиксированной обратной связью. Если в качестве коэффициентов усиления \$F\$, \$G\$, \$L\$, \$M\$ и \$M_3\$ в модифицированной реализации взять функции от настроенной переменной \$\rho\$, получим регулятор с настраиваемой обратной связью:

$$\dot{\varphi} = F(\rho)\varphi + G_1(\rho)e + G_2(\rho)\dot{y}_m, \quad (12.42)$$

$$\dot{\eta} = L(\rho)\varphi + M_1(\rho)e + M_2(\rho)\dot{y}_m, \quad (12.43)$$

$$u = \eta + M_3(\rho)e. \quad (12.44)$$

Применив этот регулятор в нелинейной системе (12.28)–(12.30), получаем замкнутую систему

$$\dot{\mathcal{X}} = g(\mathcal{X}, \rho, w), \quad (12.45)$$

$$y = h(x, w), \quad (12.46)$$

где

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad g(\mathcal{X}, \rho, w) = \begin{bmatrix} f(x\eta + M_3(\rho)e, v, w) \\ F(\rho)\varphi + G_1(\rho)e + G_2(\rho)\dot{y}_m \\ L(\rho)\varphi + M_1(\rho)e + M_2(\rho)\dot{y}_m \end{bmatrix}$$

$$e = h(x, w) - r, \quad \dot{y}_m = \frac{\partial h_m}{\partial x}(x, w)f(x, \eta + M_3(\rho)e, v, w).$$

При \$\rho = \alpha\$ система (12.45)–(12.46) имеет единственную точку равновесия

$$\mathcal{X}_{ss}(\alpha, w) = \begin{bmatrix} x_{ss}(\alpha, w) \\ 0 \\ u_{ss}(\alpha, w) \end{bmatrix}, \quad (12.47)$$

в которой \$y = \alpha_r\$. Линеаризация (12.45)–(12.46) в окрестности \$\mathcal{X} = \mathcal{X}_{ss}\$ и \$\rho = \alpha\$ приводит к линейной системе¹⁾

$$\dot{\mathcal{X}}_\delta = A_{ms}(\alpha, w)\mathcal{X}_\delta + B_{ms}(\alpha, w)\rho_\delta, \quad (12.48)$$

$$y_\delta = C_{ms}(\alpha, w)\mathcal{X}_\delta, \quad (12.49)$$

где

$$\mathcal{X}_\delta = \mathcal{X} - \mathcal{X}_{ss}, \quad A_{ms} = \begin{bmatrix} A + BM_3C & 0 & B \\ G_1C + G_2C_m(A + BM_3C) & F & G_2C_mB \\ M_1C + M_2C_m(A + BM_3C) & L & M_2C_mB \end{bmatrix},$$

$$B_{ms} = \begin{bmatrix} -BM_3 & E \\ -G_1 - G_2C_mB M_3 & G_2C_mE \\ -M_1 - M_2C_mB M_3 & M_2C_mE \end{bmatrix}, \quad C_{ms} = [C \quad 0 \quad 0].$$

Читателю предлагается в качестве упражнения (см. упражнение 12.6) проверить невырожденность матрицы

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ G_2C_m & G_1 & F \\ M_2C_m & M_1 & L \end{bmatrix} \quad (12.50)$$

и выполнение равенств

$$P^{-1}A_{ms}P = A_f, \quad P^{-1}B_{ms} = B_f \quad \text{и} \quad C_{ms}P = C_f. \quad (12.51)$$

Следовательно, линейная модель (12.48)–(12.49) эквивалентна линейной модели (12.40)–(12.41).

До этого момента исследование замкнутой системы для регулятора с настраиваемой обратной связью касалось лишь локального поведения системы в окрестности постоянной рабочей точки. Можно ли получить

¹⁾ При вычислении матриц \$A_{ms}\$ и \$B_{ms}\$ следует иметь в виду, что частные производные в коэффициентах при \$\varphi\$, \$e\$ и \$f\$ обращаются в нуль в рабочей точке.

какие-либо результаты, касающиеся нелинейной системы? Что изменится, если настроечная переменная не является постоянной? В практических применениях оказывается возможным настройка зависящих от времени переменных при условии, что их изменение происходит достаточно медленно по сравнению с динамикой системы. Этот факт может быть обоснован следующей теоремой.

Теорема 12.1. Рассмотрим замкнутую систему (12.45)–(12.46) в условиях принятых предположений. Предположим, что $\rho(t)$ непрерывно дифференцируемая функция, $\rho(t) \in S$ (некоторое компактное подмножество D_ρ), и $\|\dot{\rho}(t)\| \leq \mu$ для всех $t \geq 0$. Тогда существуют положительные константы k_1, k_2, k и T , такие что если $\mu < k_1$ и $\|\bar{X}(0) - \bar{X}_{ss}(\rho(0), w)\| < k_2$, то $\bar{X}(t)$ будет равномерно ограничено для всех $t \geq 0$ и

$$\|e(t)\| \leq k\mu, \quad \forall t \geq T.$$

Более того, если $\rho(t) \rightarrow \rho_{ss}$ и $\dot{\rho}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$\dot{e}(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Доказательство: См. приложение C.19. \square

Из этой теоремы следует, что если настроечная переменная является медленно меняющейся и начальное состояния достаточно близко в начальный момент времени к точке равновесия, то ошибка слежения будет иметь в асимптотике порядок производной настроечной переменной и будет стремиться к нулю, если настроечная переменная стремится к постоянному пределу.

Если \dot{y}_m недоступна для измерения, можно использовать регулятор с настраиваемой обратной связью

$$\dot{\varphi} = F(\rho)\varphi + G_1(\rho)e + G_2(\rho)\vartheta, \quad (12.52)$$

$$\dot{\eta} = L(\rho)\varphi + M_1(\rho)e + M_2(\rho)\vartheta, \quad (12.53)$$

$$u = \eta + M_3(\rho)e, \quad (12.54)$$

где \dot{y}_m заменена на ее оценку ϑ , получаемую на выходе фильтра

$$\varepsilon\dot{\zeta} = -\zeta + y_m, \quad (12.55)$$

$$\vartheta = \frac{1}{\varepsilon}(-\zeta + y_m), \quad (12.56)$$

где ε — «достаточно малая» положительная константа. Предполагается, что начальным значением этого фильтра всегда является $\zeta(0)$, такое что

$$\|\zeta(0) - y_m(0)\| \leq k\varepsilon \quad (12.57)$$

для некоторой $k > 0$. Поскольку y_m доступно для измерения, выполнение этого условия всегда можно обеспечить. Более того, если эволюция системы начинается в точке равновесия, условие (12.57) автоматически выполнено, т. к. в точке равновесия $y_m = \zeta$. Фильтр (12.55)–(12.56) действует как устройство аппроксимации производной (аппроксиматор

производной) при условии, что ε достаточно мала. Это утверждение следует из того, что передаточная функция

$$\frac{s}{\varepsilon s + 1} I$$

аппроксирует передаточную функцию дифференцирующего устройства sI , функционирующего при частотах существенно меньших, чем $1/\varepsilon$.¹⁾ Система, замкнутая регулятором с настраиваемой обратной связью (12.52)–(12.56), принимает вид системы с сингулярными возмущениями

$$\dot{\bar{X}} = g(\bar{X}, \rho, w) + N(\rho)(\vartheta - \dot{y}_m), \quad (12.58)$$

$$\varepsilon\dot{\vartheta} = -\vartheta + \dot{y}_m, \quad (12.59)$$

$$y = h(x, w), \quad (12.60)$$

где

$$\dot{y}_m = \frac{\partial h_m}{\partial x}(x, w)f(x, \eta + M_3(\rho)e, v, w), \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ G_2 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

Полагая $\varepsilon = 0$, получаем $\vartheta = \dot{y}_m$ и система (12.58)–(12.60) сводится к системе (12.45)–(12.46). Следующая теорема обосновывает использование фильтра (12.55)–(12.56) при достаточно малой ε .

Теорема 12.2. Рассмотрим замкнутую систему (12.58)–(12.60) в условиях принятых предположений. Предположим также, что $\rho(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $\rho(t) \in S$ (некоторое компактное подмножество D_ρ) и $\|\dot{\rho}(t)\| \leq \mu$ для всех $t \geq 0$. Тогда существуют положительные константы k_1, k_2, k_3, k и T , такие что если $\mu < k_1$, $\|\bar{X}(0) - \bar{X}_{ss}(\rho(0), w)\| < k_2$ и $\varepsilon < k_3$, то $\bar{X}(t)$ будет равномерно ограничено для всех $t \geq 0$ и

$$\|e(t)\| \leq k\mu, \quad \forall t \geq T.$$

Более того, если $\rho(t) \rightarrow \rho_{ss}$ и $\dot{\rho}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$\dot{e}(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Доказательство: См. приложение C.20. \square

¹⁾ Аппроксимация производной \dot{y}_m может быть выполнена с использованием наблюдателя с сильной обратной связью, рассмотренного в параграфе 14.5. В действительности фильтр (12.55)–(12.56) представляет собой наблюдатель пониженного порядка с сильной обратной связью для системы второго порядка, выходом которой является y_m . Условие (12.57) устраняет возникновение резких скачков в переходном процессе. Если это условие не может быть обеспечено, для предотвращения возникновения подобных скачков оценка ϑ должна искусственно ограничиваться функцией насыщения так, как было предложено в параграфе 14.5.

Из этой теоремы следует, что если настроечная переменная является медленно меняющейся, начальное состояние достаточно близко в начальный момент времени к точке равновесия и ε достаточно мала, то ошибка слежения будет иметь в асимптотике порядок производной настроечной переменной и будет стремится к нулю, если настроечная переменная стремится к постоянному пределу.

Пример 12.6. Рассмотрим систему второго порядка

$$\dot{x}_1 = \operatorname{tg} x_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u,$$

$$y = x_2,$$

где y — единственный измеряемый сигнал, т. е. $y_m = y$. Цель заключается в отслеживании выходом y заданного командного сигнала r . В качестве настроечной переменной будет использована r . При $r = \alpha = \text{const}$ уравнения равновесия (12.31) и (12.32) имеют единственное решение

$$x_{ss}(\alpha) = \begin{bmatrix} -\operatorname{tg}^{-1} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad u_{ss}(\alpha) = \operatorname{tg}^{-1} \alpha.$$

Используем интегральный регулятор с наблюдателем:

$$\dot{\sigma} = e = y - r, \quad (12.61)$$

$$\dot{\hat{x}} = A(\alpha)\hat{x} + Bu + H(\alpha)(y - C\hat{x}), \quad (12.62)$$

$$u = -K_1(\alpha)\hat{x} - K_2(\alpha)\sigma, \quad (12.63)$$

где

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 1],$$

$$K_1(\alpha) = \begin{bmatrix} (1 + \alpha^2)(3 + \alpha^2) + 3 + \frac{1}{1 + \alpha^2} & 3 + \alpha^2 \end{bmatrix}, \quad K_2(\alpha) = -\frac{1}{1 + \alpha^2}$$

$$H(\alpha) = \begin{bmatrix} 10 + (4 + \alpha^2)(1 + \alpha^2) \\ (4 + \alpha^2) \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты обратной связи $K_1(\alpha)$ и $K_2(\alpha)$ выбираются таким образом, чтобы собственными значениями матрицы замкнутой системы являлись -1 , $-(1/2) \pm j(\sqrt{3}/2)$. Коэффициент обратной связи $H(\alpha)$ наблюдателя выбран таким образом, чтобы собственными значениями наблюдателя являлись $-(3/2) \pm j(3\sqrt{3}/2)$. Для удобства мы выбрали собственные значения так, чтобы они не зависели от α , но это условие не является обязательным, т. к. рассматриваемый здесь метод остается верным и при наличии такой зависимости, но при условии, что вещественные части этих собственных значений меньше некоторого отрицательного числа, не зависящего от α . Предложенный регулятор с фиксированной обратной связью представляет собой специальный случай регулятора (12.33)–(12.35) при $z = \hat{x}$, $F = A - BK_1 - HC$, $G_1 = -BK_2$, $G_2 = H$, $L = -K_1$, $M_1 = -K_2$, $M_2 =$

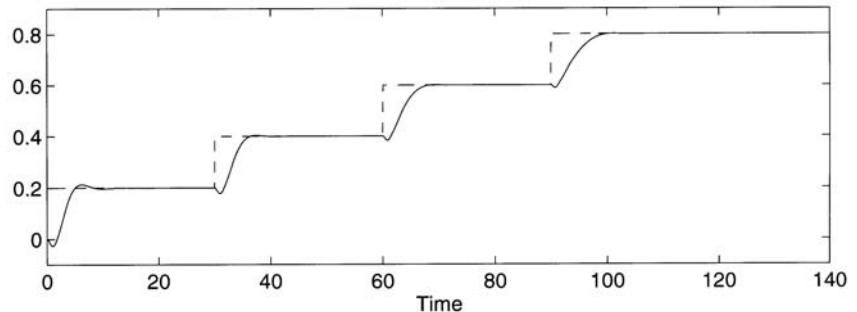


Рис. 12.5. Командный сигнал (пунктирная линия) и выход системы (непрерывная линия), замкнутой регулятором с настраиваемой обратной связью из примера 12.6.

$= 0$ и $M_3 = 0$. Поскольку \dot{y} не доступна для измерения, используем регулятор с настраиваемой обратной связью (12.52)–(12.56) с $\varepsilon = 0.01$. На рисунке 12.5 показан переходный процесс в замкнутой системе для случая ступенчатого командного сигнала. Каждому ступенчатому изменению командного сигнала соответствует смена точки равновесия системы; начальное состояние системы в момент времени 0_+ является состоянием равновесия в момент времени 0_- . Если начальное состояние расположено в области притяжения новой точки равновесия, система достигает установившегося режима в этой точке. Поскольку наш регулятор основан на использовании метода линеаризации, он гарантирует лишь локальную стабилизацию. Поэтому в общем случае отдельное ступенчатое изменение командного сигнала должно быть ограничено. Достигение большого значения командного сигнала реализуется в виде последовательности ступенчатых изменений командного сигнала (см. рисунок 12.5), для каждого из которых предусматривается достаточно большой промежуток времени, необходимый для того, чтобы система достигла установившегося режима на этом шаге процесса регулирования. Другой метод, используемый для смены заданного значения командного сигнала, заключается в его медленном изменении. На рисунке 12.6 показан переходный процесс в замкнутой системе, в которой смена значения командного сигнала от одного значения до другого осуществляется в виде его медленного увеличения на протяжении периода времени 100 секунд. Характер переходного процесса в этом случае соотносится с нашими результатами, касающимися поведения регуляторов с настраиваемой обратной связью при медленно меняющихся настроечных переменных. На этом же рисунке показан переходный процесс при большем угле наклона командного сигнала. При увеличении угла наклона командного сигнала, характеристики переходного процесса ухудшаются. Если продолжить увеличение угла наклона командного сигнала, система в конце концов может стать неустойчивой. Регулятор с настраиваемой обратной связью

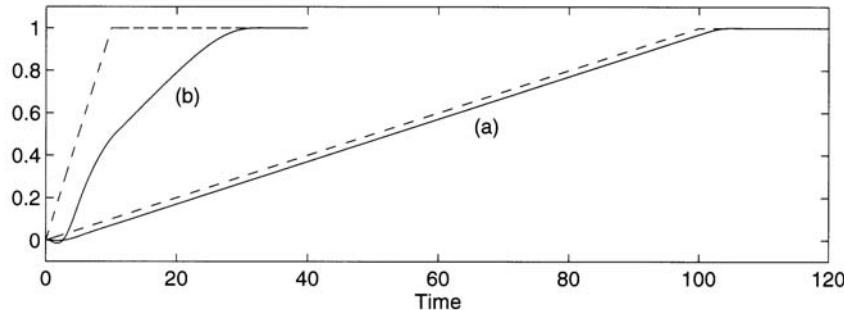


Рис. 12.6. Командный сигнал (пунктирная линия) и выход системы (непрерывная линия), замкнутой регулятором с настраиваемой обратной связью из примера 12.6: (а) угол наклона командного сигнала = 0.01; (б) угол наклона командного сигнала = 0.1.

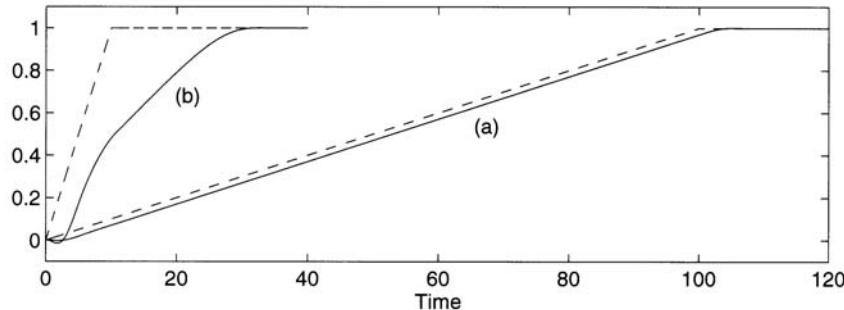


Рис. 12.7. Командный сигнал (пунктирная линия) и выход системы (непрерывная линия), замкнутой регулятором с фиксированной обратной связью из примера 12.6.

имеет преимущество по сравнению с регулятором с фиксированной обратной связью. На рисунке 12.7 показан переходный процесс в замкнутой системе для ступенчатого изменения командного сигнала при использовании регулятора с фиксированной обратной связью $\alpha = 0$. При малых значениях командного сигнала характеристики переходного процесса соответствуют характеристикам переходного процесса при использовании регулятора с настраиваемой обратной связью, но при увеличении командного сигнала эти характеристики ухудшаются и система становится неустойчивой. Наконец, рисунок 12.8 доказывает целесообразность модификации в соответствии с рисунком 12.4 регулятора с настраиваемой обратной связью. Переходный процесс в системе, замкнутой немодифицированным регулятором (полученным путем замены в уравнениях регулятора α на r), показан для случая ступенчатого изменения командного сигнала, показанного на рисунке 12.5. Несмотря на то, что обеспечены устойчивость и нулевая ошиб-

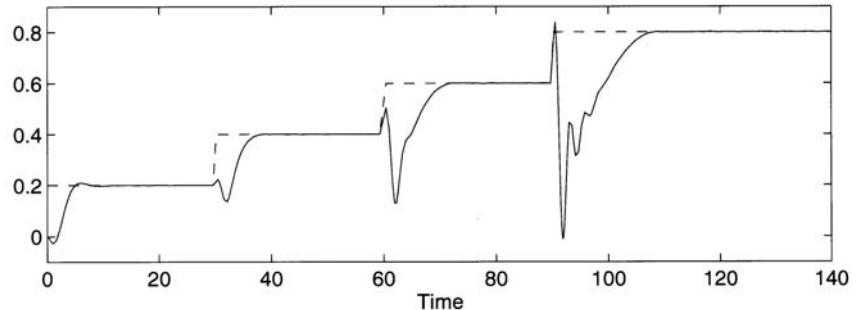


Рис. 12.8. Командный сигнал (пунктирная линия) и выход системы (непрерывная линия), замкнутой немодифицированным регулятором с настраиваемой обратной связью из примера 12.6.

ка слежения в установившемся режиме, характеристики переходного процесса быстро ухудшаются при увеличении командного сигнала. Это обусловлено появлением дополнительных нулей передаточной функции замкнутой системы. Несмотря на то, что неустойчивость системы в этом примере не наблюдается, плохой переходный процесс может привести к потере устойчивости, т. к. в этом случае возможен выход состояния системы из конечной области притяжения. \triangle

12.6. Упражнения

12.1 Рассмотрим замкнутую систему из примера 12.2. Пусть $a = c = 10$, $\delta = \pi/4$, $b = 0$, $k_1 = 2.5$ и $k_2 = 1$. Найдите функцию Ляпунова системы и используйте ее для оценки области притяжения.

12.2 Для каждой из следующих систем с использованием метода линейаризации

- (а) постройте регулятор с обратной связью по состоянию, обеспечивающий стабилизацию начала координат.
- (б) постройте регулятор с обратной связью по выходу, обеспечивающий стабилизацию начала координат.

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1^2 x_2 + x_1 + u \\ y = -x_1^3 + x_2 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2^2 - x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 = u \\ y = -x_1^3 + x_2 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1 x_3 + u \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_1 x_2 - 2x_3 \\ y = x_1 \end{cases}$$

12.3 Пусть

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

где A , B и C удовлетворяют ранговому условию (12.23). Покажите, что пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ управляема (соответственно, стабилизируема), если и только если пара (A, B) управляема (соответственно, стабилизируема).

12.4 Рассмотрим маятник из примера 12.2.

- (a) Предположим, что угол θ доступен для измерения, но $\dot{\theta}$ не доступна для измерения. С использованием метода линеаризации постройте интегральный регулятор с обратной связью по выходу, обеспечивающий стабилизацию положения маятника, соответствующего углу наклона $\theta = \delta$.
- (b) Предположим, что θ и $\dot{\theta}$ доступны для измерения. Постройте интегральный регулятор с настраиваемой обратной связью по состоянию такой, что угол θ отслеживает командный сигнал θ_r . Исследуйте характеристики регулятора с настраиваемой обратной связью с использованием компьютерного моделирования.
- (c) Предположим, что угол θ доступен для измерения, но $\dot{\theta}$ не доступна для измерения. Постройте интегральный регулятор с настраиваемой обратной связью и наблюдателем, обеспечивающий отслеживание командного сигнала θ_r . Исследуйте характеристики регулятора с настраиваемой обратной связью с использованием компьютерного моделирования.

Используйте следующие значения параметров $a = 10$, $b = 0.1$ и $c = 10$.

12.5 Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u,$$

где $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ — непрерывно дифференцируемые функции от постоянного вектора α , такого что $\alpha \in \Gamma$ (компактное подмножество R^m).

Пусть $W(\alpha)$ — грамиан, который определяется равенством

$$W(\alpha) = \int_0^\tau \exp[-A(\alpha)\sigma]B(\alpha)B^T(\alpha)\exp[-A^T(\alpha)\sigma]d\sigma$$

для некоторого $\tau > 0$, не зависящего от α . Предположим, что пара (A, B) управляема и что это свойство выполняется равномерно по α , т. е. существуют положительные константы c_1 и c_2 , не зависящие от α , такие что

$$c_1 I \leq W(\alpha) \leq c_2 I, \quad \forall \alpha \in \Gamma.$$

Пусть

$$Q(\alpha) = \int_0^\tau e^{-2c\sigma} \exp[-A(\alpha)\sigma]B(\alpha)B^T(\alpha)\exp[-A^T(\alpha)\sigma]d\sigma, \quad c > 0$$

(a) Покажите, что

$$c_1 e^{-2c\tau} I \leq Q(\alpha) \leq c_2 I, \quad \forall \alpha \in \Gamma$$

(b) Пусть

$$u = -K(\alpha)x \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}B^T(\alpha)P(\alpha)x,$$

где $P(\alpha) = Q^{-1}(\alpha)$. Используя $V = x^T P(\alpha)x$ в качестве функции Ляпунова для системы

$$\dot{x} = [A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha)]x,$$

покажите, что $\dot{V} \leq -2cV$.

(c) Покажите, что $[A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha)]$ гурвицева равномерно по α для всех $\alpha \in \Gamma$.

12.6 Покажите, что $P(\alpha)$, определяемая равенством (12.50), невырождена и удовлетворяет (12.51).

12.7 Упрощенная модель низкочастотных колебаний корабля имеет вид дифференциального уравнения [60]

$$\tau \ddot{\psi} + \dot{\psi} = k\delta,$$

где ψ — курсовой угол корабля и δ — угол поворота руля, рассматриваемый здесь в качестве управления системой. Постоянная времени τ и коэффициент обратной связи k зависят от продольной скорости корабля v и эта зависимость определяется равенствами $\tau = \tau_0 v_0/v$ и $k = k_0 v/v_0$, где τ_0 , k_0 и v_0 — константы.

(a) В предположении, что продольная скорость постоянна, постройте интегральный регулятор с обратной связью по состоянию, такой что ψ отслеживает заданный угол ψ_r .

- (b) Используйте метод настройки обратной связи для компенсации эффекта, связанного с изменением продольной скорости движения корабля.

12.8 Модель системы магнитной подвески из упражнения 1.18 имеет вид системы уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{k}{m}x_2 - \frac{L_0ax_3^2}{2m(a+x_1)^2} \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{L(x_1)} \left[-Rx_3 + \frac{L_0ax_2x_3}{(a+x_1)^2} + u \right],\end{aligned}$$

где $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = i$ и $u = v$. Используйте следующие численные данные: $m = 0.1$ кг, $k = 0.001$ Н/м·с, $g = 9.81$ м/с², $a = 0.05$ м, $L_0 = 0.01$ Гн, $L_1 = 0.02$ Гн и $R = 1$ Ом.

- (a) Найдите установившиеся значения I_{ss} и V_{ss} для i и v , соответственно, при которых обеспечивается стабилизация шара в желаемом положении $y = r > 0$.
- (b) Покажите, что при $u = V_{ss}$ соответствующая точка равновесия неустойчива.
- (c) С использованием метода линеаризации постройте закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий стабилизацию шара в положении $y = 0.05$ м.
- (d) Предположим, что пределы допустимого изменения переменной y — от 0 до 0.1 м и напряжение может изменяться в пределах от 0 до 15 В. Предположим также, что в начальный момент времени шар находится в точке равновесия. Используя компьютерную модель системы, сместите шар на небольшое расстояние вверх (и вниз) и предоставьте ему возможность двигаться далее свободно. Повторите этот эксперимент, постепенно увеличивая величину начального возмущения. Определите экспериментально максимальный интервал первоначального возмущения, при котором шар возвращается в точку равновесия, не нарушая указанных ограничений на изменение переменных y и v . Для того, чтобы учесть ограничение на v , введите в компьютерную модель ограничитель.
- (e) С использованием компьютерного моделирования исследуйте действие возмущений, связанных с неточным знанием массы m . Выполните компьютерное моделирование замкнутой системы с номинальным регулятором, но при отклонении величины массы от ее номинального значения. Найдите пределы изменения массы m , для которых этот регулятор обеспечивает стабилизацию шара и исследуйте характеристики ошибки слежения в установившемся режиме.

- (f) Решите задачу пункта (c) с использованием интегрального регулятора. Повторите пункты (d) и (e) для этой схемы управления. Прокомментируйте изменение характеристик переходных процессов и ошибки в установившемся режиме, связанное с заменой закона управления из пункта (c) на интегральный регулятор.
- (g) Решите задачу пункта (c) в предположении, что измерению доступно лишь y . Повторите пункты (d) и (e) для этой схемы управления.
- (h) Решите задачу пункта (c) в предположении, что измерению доступны лишь y и i . Повторите пункты (d) и (e) для этой схемы управления.
- (i) Постройте интегральный регулятор из пункта (f) в предположении, что измерению доступно лишь y . Повторите пункты (d) и (e) для этой схемы управления.
- (j) Постройте интегральный регулятор из пункта (f) в предположении, что измерению доступны лишь y и i . Повторите пункты (d) и (e) для этой схемы управления.

- (k) Постройте интегральный регулятор с настраиваемой обратной связью и наблюдателем, обеспечивающим отслеживание переменной y заданного положения шара r в предположении, что измерению доступны y и i . Используя компьютерное моделирование, исследуйте характеристики регулятора с настраиваемой обратной связью при медленном изменении r от 0.03 до 0.07.
- (l) Если измерению доступно i , можно ли построить линейный закон управления с обратной связью по выходу, который обеспечивал бы стабилизацию шара в положении $y = r$? Можно ли построить линейный закон интегрального управления с обратной связью по выходу?

12.9 Электрический двигатель постоянного тока описан в упражнении 1.17. Если ток возбуждения в цепи обмотки статора рассматривать как управление, модель системы может быть представлена в виде модели состояния второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\theta_1x_1 - \theta_2x_2u + \theta_3, \\ \dot{x}_2 &= -\theta_4x_2 + \theta_5x_1u, \\ y &= x_2,\end{aligned}$$

где x_1 — ток в обмотке якоря, x_2 — скорость вращения, u — ток в обмотке статора и θ_i , $i = 1, \dots, 5$ — положительные константы. Необходимо построить систему управления скоростью, обеспечивающую асимптотическое отслеживание y заданной скорости r . Предполагается, что $r^2 < \theta_3^2\theta_5/4\theta_1\theta_2\theta_4$ и допустимая область ограничена условием $x_1 > \theta_3/\theta_1$.

- (a) Найдите вход u_{ss} для установившегося режима, при котором обеспечивается желаемый выход системы r . Проверьте, что система,

замкнутая управлением $u = u_{ss}$, имеет экспоненциально устойчивую точку равновесия.

- (b) С использованием компьютерного моделирования выполните малое пошаговое изменение командного сигнала для двигателя, находящегося в установившемся режиме ($y = 0$). Выполните этот эксперимент постепенно увеличивая величину шага изменения командного сигнала. Определите максимальное значение начального увеличения командного сигнала, при котором двигатель возвращается в установившийся режим вращения с желаемой скоростью.
- (c) С использованием компьютерного моделирования исследуйте характеристики системы, если момент инерции ротора изменяется на $\pm 50\%$.
- (d) Используя метод линеаризации, постройте интегральный регулятор с обратной связью по состоянию, обеспечивающий желаемую скорость вращения. Выполните пункты (b) и (c) для этого регулятора и сравните характеристики замкнутой системы с результатами пункта (a).
- (e) Предположим, что измерению доступна скорость x_2 , но ток в обмотке якоря x_1 не измеряется. Выполните пункт (d) с использованием наблюдателя, обеспечивающего получение оценок величины тока в обмотке якоря. Выполните пункты (b) и (c) для этого регулятора и сравните характеристики замкнутой системы с результатами пункта (d).
- (f) Постройте интегральный регулятор с настраиваемой обратной связью и наблюдателем, обеспечивающий отслеживание переменной x_2 заданной скорости r .

В пунктах (b)–(e) используйте следующие численные данные: $\theta_1 = -60$, $\theta_2 = 0.5$, $\theta_3 = 40$, $\theta_4 = 6$ и $\theta_5 = 4 \times 10^4$.

12.10 Рассмотрим обратный маятник из упражнения 1.15.

- (a) Используя $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = y$ и $x_4 = \dot{y}$ в качестве переменных состояния и $u = F$ в качестве управления, запишите уравнение состояния.
- (b) Покажите, что незамкнутая система имеет множество состояний равновесия.
- (c) Предположим, что задача состоит в стабилизации маятника в вертикальном положении ($\theta = 0$). Найдите точку равновесия незамкнутой системы, в которой $\theta = 0$ и покажите, что она неустойчива.
- (d) Линеаризуйте нелинейное уравнение состояния в окрестности желаемой точки равновесия и проверьте, что соответствующая линейная система управляема.
- (e) Используя метод линеаризации, постройте закон управления с обратной связью по состоянию, стабилизирующий систему в желаемой точке равновесия.

- (f) Используя компьютерное моделирование, исследуйте переходный процесс системы и эффект от $\pm 20\%$ -го изменения массы маятника и его момента инерции.
- (g) Используя компьютерное моделирование, отклоните находящийся в положении равновесия маятник на малый угол вправо (и влево) и предоставьте ему возможность свободного колебания. Повторите этот эксперимент, постепенно увеличивая величину начального возмущения. Используя компьютерное моделирование, определите максимальную величину начального возмущения, при котором маятник возвращается в положение равновесия.
- (h) Предположим, что измерению доступны угол θ и положение тележки y . Используя метод линеаризации, постройте регулятор с обратной связью по выходу, обеспечивающий стабилизацию маятника в положении $\theta = 0$. Выполните пункты (f) и (g) для этого регулятора.
- (i) Выполните пункт (h), если цель управления состоит в стабилизации маятника в положении $\theta = \theta_r$, где $-\pi/2 < \theta_r < \pi/2$. В пунктах (e)–(i) используйте следующие численные данные: $m = 0.1$ кг, $M = 1$ кг, $k = 0.1$ Н/м/с, $I = 0.025/3$ кг м², $g = 9.81$ м/с² и $L = 0.5$ м.

параграфе 13.4. В качестве задач управления рассматриваются задачи стабилизации и слежения.

13.1. Мотивация

Для мотивации метода линеаризации нелинейных систем обратной связью, рассмотрим задачу стабилизации начала координат уравнения маятника

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - bx_2 + cu.\end{aligned}$$

При анализе уравнения состояния можно заметить, что если u выбрать в виде

$$u = \frac{a}{c}[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] + \frac{v}{c},$$

то это приведет к исключению нелинейного члена $a[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta]$, в результате чего исходная система преобразуется к линейному виду

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + v.\end{aligned}$$

Таким образом, задача стабилизации нелинейной системы может быть сведена к задаче стабилизации управляемой линейной системы. Для этой системы можно построить стабилизирующее управление с обратной связью по состоянию

$$v = -k_1x_1 - k_2x_2,$$

такое что собственные значения матрицы замкнутой линейной системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1x_1 - (k_2 + b)x_2\end{aligned}$$

расположены в открытой левой полуплоскости. Тогда закон управления с обратной связью по состоянию для исходной нелинейной системы имеет вид

$$u = \left(\frac{a}{c}\right)[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - \frac{1}{c}(k_1x_1 + k_2x_2).$$

Совершенно очевидно, что мы не можем рассчитывать на применимость этого метода исключения нелинейности в случае нелинейной системы общего вида. Это возможно только если эта система обладает определенными структурными свойствами, которые позволяют выполнить подобное исключение. Для исключения нелинейного члена $\alpha(x)$ путем его вычитания, управление u и нелинейность $\alpha(x)$ должны присутствовать в уравнении состояния в виде суммы $u + \alpha(x)$. Для исключения нелинейного члена $\gamma(x)$ путем деления на этот член, управление u и нелинейность $\gamma(x)$ должны присутствовать в уравнении

Глава 13

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассмотрим класс нелинейных систем вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + G(x)u, \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

и зададимся вопросом о существовании замены обратной связи по состоянию

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

и замены переменных состояния

$$z = T(x),$$

с использованием которых нелинейная система может быть преобразована в эквивалентную линейную систему. В параграфе 13.1 мы предложим мотивацию для этого подхода, рассмотрим простые примеры и введем понятия линеаризации посредством замены переменных состояния, при которой уравнение состояния линеаризуется по всем переменным состояния, а также понятие линеаризации по входу–выходу, при которой достигается линеаризация отображения вход–выход, но уравнение состояния линеаризуется лишь по части переменных. В параграфе 13.2 мы исследуем метод линеаризации по входу–выходу, введем понятия относительной степени, нуль-динамики и минимально-фазовой системы. В параграфе 13.3 будет рассмотрен класс нелинейных систем, которые могут быть линеаризованы обратной связью. Для упрощения изложения в параграфах 13.2 и 13.3 рассматриваются системы с одним входом и одним выходом. Законы управления с обратной связью, применяемые в системах, которые могут быть линеаризуемы (или частично линеаризуемы) обратной связью по состоянию, предложены в

состояния в виде произведения $\gamma(x)u$. Если матрица $\gamma(x)$ невырождена в рассматриваемой области, она может быть исключена заменой управления $u = \beta(x)v$, где $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$ — обратная матрица для матрицы $\gamma(x)$. Поэтому замена управления, позволяющая преобразовать нелинейное уравнение состояния в управляемое линейное уравнение состояния путем исключения нелинейности, может быть выполнена в случае, когда нелинейное уравнение состояния имеет специальную структуру:

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)[u - \alpha(x)], \quad (13.1)$$

где A и B — $(n \times n)$ - и $(n \times p)$ -матрицы, пара (A, B) управляема, функции $\alpha : R^n \rightarrow R^p$ и $\gamma : R^n \rightarrow R^{p \times p}$ определены в области $D \subset R^n$, содержащей начало координат и матрица $\gamma(x)$ невырождена для всех $x \in D$. Если уравнение состояния представлено в форме (13.1), мы можем линеаризовать его обратной связью по состоянию

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (13.2)$$

где $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$. В результате этого мы получаем линейное уравнение состояния

$$\dot{x} = Ax + Bv. \quad (13.3)$$

Для стабилизации этой системы используем закон управления $v = -Kx$, такой что матрица $A - BK$ гурвицева. Тогда закон управления с обратной связью по состоянию для исходной нелинейной системы имеет вид

$$u = \alpha(x) - \beta(x)Kx. \quad (13.4)$$

Предположим, что нелинейное уравнение состояния не имеет структуры, представленной равенством (13.1). Означает ли это, что мы не можем выполнить линеаризацию системы обратной связью? Ответ на этот вопрос отрицательный. Заметим, что представление модели состояния системы не единственное. Оно зависит от выбора переменных состояния. Даже если система не имеет структуры уравнения (13.1) для одного выбора переменных состояния, она может иметь эту структуру, будучи представленной в других переменных состояния. Рассмотрим, например, систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a \sin x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u.\end{aligned}$$

Мы не можем предложить замену u , которая бы исключила нелинейный член $a \sin x_2$. Однако, если предварительно выполнить замену переменных

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1, \\ z_2 &= a \sin x_2 = \dot{x}_1,\end{aligned}$$

для которых выполнены равенства

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= a \cos x_2(-x_1^2 + u),\end{aligned}$$

то нелинейность может быть исключена заменой управления

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2} v,$$

которая определена при $-\pi/2 < x_2 < \pi/2$. Уравнение состояния в новых координатах (z_1, z_2) может быть получено с использованием обратной замены переменных, представляющей (x_1, x_2) в терминах (z_1, z_2)

$$\begin{aligned}x_1 &= z_1, \\ x_2 &= \sin^{-1}\left(\frac{z_2}{a}\right)\end{aligned}$$

и определенной при $-a < z_2 < a$. Преобразованное уравнение состояния имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= a \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{z_2}{a}\right)\right)(-z_1^2 + u).\end{aligned}$$

Замена переменных $z = T(x)$, используемая для представления уравнения состояния в z -координатах, должна быть обратимой, т. е. отображение T должно иметь обратное $T^{-1}(\cdot)$, такое что $x = T^{-1}(z)$ для всех $z \in T(D)$, где D — область определения отображения T . Более того, вследствие необходимости обеспечения непрерывности производных z и x , требуется, чтобы отображения $T(\cdot)$ и $T^{-1}(\cdot)$ были непрерывно дифференцируемыми. Непрерывно дифференцируемое отображение с непрерывно дифференцируемым обратным отображением называется *диффеоморфизмом*. Если матрица Якоби $[\partial T / \partial x]$ невырождена в точке $x_0 \in D$, из теоремы об обратной функции¹⁾ следует, что существует окрестность N точки x_0 , такая что сужение отображения T на N является диффеоморфизмом на N . Отображение T называется глобальным диффеоморфизмом, если оно является диффеоморфизмом на R^n и $T(R^n) = R^n$.²⁾ После введения этих понятий мы можем перейти к определению понятия систем, линеаризуемых обратной связью.

Определение 13.1. Нелинейная система

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad (13.5)$$

¹⁾ См. [10, теорема 7-5].

²⁾ Отображение T является глобальным диффеоморфизмом, если и только если матрица $[\partial T / \partial x]$ невырождена для всех $x \in R^n$ и отображение T является собственным, т. е. $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|T(x)\| = \infty$. (Доказательство этого утверждения приведено в работах [165] и [212].)

где $f : D \rightarrow R^n$ и $G : D \rightarrow R^{n \times p}$ — достаточно гладкие функции¹⁾ в области $D \subset R^n$, называется линеаризуемой (или линеаризуемой по входу–состоянию) обратной связью, если существует диффеоморфизм $T : D \rightarrow R^n$, такой что $D_z = T(D)$ содержит начало координат и замена переменных $z = T(x)$ преобразует нелинейную систему (13.5) к виду

$$\dot{z} = Az + B\gamma(x)[u - \alpha(x)], \quad (13.6)$$

где пара (A, B) управляема и $\gamma(x)$ невырождена для всех $x \in D$.

Если рассматривается система с выходом, например в задачах слежения, модель состояния описывается уравнениями состояния и выхода. Линеаризация уравнения состояния не обязательно приводит к линеаризации уравнения выхода. Например, если система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a \sin x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u\end{aligned}$$

имеет выход $y = x_2$, то замена переменных и обратной связи по состоянию

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = a \sin x_2 \quad \text{и} \quad u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2} v$$

приводит к системе

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= v, \\ y &= \sin^{-1} \left(\frac{z_2}{a} \right).\end{aligned}$$

Несмотря на то, что полученное уравнение состояния линейно, решение задачи слежения по-прежнему остается непростой задачей, поскольку уравнение выхода содержит нелинейность. Анализ уравнений состояния и выхода в x -координатах показывает, что если использовать замену обратной связи $u = x_1^2 + v$, можно линеаризовать отображение вход–выход от u к y и получить следующую его линейную модель:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= v, \\ y &= x_2.\end{aligned}$$

Решение задачи слежения для преобразованной системы может быть выполнено с использованием линейной теории управления. Из этого примера видно, что иногда оказывается полезным линеаризовать отображение вход–выход, даже если при этом часть уравнения состояния остается нелинейной. В этом случае система называется линеаризуемой по входу–выходу. Однако при выполнении линеаризации по

¹⁾ Выражение «достаточно гладкие» означает, что все частные производные, которые впоследствии будут использоваться при анализе, определены и непрерывны.

входу–выходу следует иметь в виду, что отображение входа–выхода для полученной линеаризованной системы может не учитывать всей динамики системы. В предыдущем примере вся система описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a \sin x_2, \\ \dot{x}_2 &= v, \\ y &= x_2.\end{aligned}$$

Заметим, что переменная состояния x_1 не связана с выходом y . Другими словами, линеаризующая замена обратной связи сделала переменную x_1 ненаблюдаемой по выходу y . При решении задачи слежения нам бы хотелось, чтобы поведение переменной x_1 было приемлемым, т. е. чтобы эта переменная была в некотором смысле ограниченной и чтобы система была устойчива по ней. Простейшая схема управления, построенная с использованием линейного отображения входа–выхода, может привести к слишком большим значениям сигнала $x_1(t)$ в ходе переходного процесса. Например, предположим, что мы построили линейное управление, обеспечивающее стабилизацию выхода y вблизи постоянного значения r . Тогда $x_1(t) = x_1(0) + ta \sin r$ и при $\sin r \neq 0$ значения $x_1(t)$ неограниченно возрастают. Этот вопрос о внутренней устойчивости будет исследован с использованием концепции нульдинамики.

13.2. Линеаризация по входу–выходу

Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (13.7)$$

$$y = h(x), \quad (13.8)$$

где f , g и h — достаточно гладкие в области $D \subset R^n$ функции. Отображения $f : D \rightarrow R^n$ и $g : D \rightarrow R^n$ называются векторными полями на D . Производная \dot{y} определяется равенством

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}[f(x) + g(x)u] \stackrel{\text{def}}{=} L_f h(x) + L_g h(x)u,$$

где функция

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$$

называется производной Ли¹⁾ (Lie derivative) h вдоль поля f . Это понятие сходно с хорошо известным понятием производной функции h вдоль траекторий системы $\dot{x} = f(x)$. Вновь введенное понятие удобно, если

¹⁾ Прим. ред. перев. — Ли, Мариус Софус (Lie, Marius Sophus) (1842-1899), норвежский математик.

необходимо выполнять вычисление повторных производных функции вдоль одного векторного поля. Например, далее будет использоваться следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_g L_f h(x) &= \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g(x), \\ L_f^2 h(x) &= L_f L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} f(x), \\ L_f^k h(x) &= L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x), \\ L_f^0 h(x) &= h(x). \end{aligned}$$

Если $L_g h(x) = 0$, то $\dot{y} = L_f h(x)$ не зависит от u . Если продолжить вычисление производных, то вторая производная y , обозначенная как $y^{(2)}$, имеет вид

$$y^{(2)} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u.$$

Снова, если $L_g L_f h(x) = 0$, то $y^{(2)} = L_f^2 h(x)$ не зависит от u . Продолжая эту процедуру можно заметить, что если $h(x)$ удовлетворяет равенству

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0,$$

то u не входит в выражения для $y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)}$ и появляется в равенстве для $y^{(\rho)}$ с ненулевым коэффициентом:

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)u.$$

Из этого равенства следует, что система линеаризуема по входу–выходу, поскольку замена обратной связи по состоянию

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} [-L_f^\rho h(x) + v]$$

приводит отображение вход–выхода к виду

$$y^{(\rho)} = v.$$

Это отображение представляет собой цепочку из ρ интеграторов. В этом случае целое число ρ будет называться *относительной степенью системы* (relative degree).

Определение 13.2. Говорят, что нелинейная система (13.7)–(13.8) имеет относительную степень, равную ρ , $1 \leq \rho \leq n$ в области $D_0 \subset D$, если

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0 \quad (13.9)$$

для всех $x \in D_0$.

Пример 13.1. Рассмотрим уравнение Ван дер Поля с управлением

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Пусть выход определяется равенством $y = x_1$. Вычисляя производные функции выхода, получаем

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2, \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u. \end{aligned}$$

Следовательно, система имеет относительную степень, равную двум два в R^2 . Если выход определяется равенством $y = x_2$, имеем

$$\dot{y} = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$

и система имеет относительную степень, равную единице в R^2 . Если выход определяется равенством $y = x_1 + x_2^2$,

$$\dot{y} = x_2 + 2x_2[-x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u]$$

и система имеет относительную степень, равную единице в $D_0 = \{x \in R^2 | x_2 \neq 0\}$. \triangle

Пример 13.2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Вычисляя производные y , получаем

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_1 = y.$$

Следовательно, $y^{(n)} = y = x_1$ для всех $n \geq 1$. В этом случае система не имеет хорошо определенной относительной степени. Поскольку рассматриваемый пример достаточно прост, легко доказать справедливость этого заключения. Действительно, выход $y(t) = x_1(t) = e^t x_1(0)$ не зависит от входа u . \triangle

Пример 13.3. Модель электрического двигателя постоянного тока с пренебрежимо малым демпфированием вала может быть представлена в виде уравнения состояния следующего вида (упражнение 1.17):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + u, \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + k - cx_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= \theta x_1 x_2, \end{aligned}$$

где x_1 , x_2 и x_3 — ток в обмотке статора, ток в обмотке якоря и угловая скорость вращения; a , b , c , k и θ — положительные константы.

Для нахождения закона управления скоростью вращения выберем в качестве выхода $y = x_3$. Производные выхода имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{x}_3 = \theta x_1 x_2, \\ \ddot{y} &= \theta x_1 \dot{x}_2 + \theta \dot{x}_1 x_2 = (\cdot) + \theta x_2 u,\end{aligned}$$

где (\cdot) содержит члены, зависящие от x . Система имеет относительную степень, равную двум в области $D_0 = \{x \in R^3 | x_2 \neq 0\}$. \triangle

Пример 13.4. Рассмотрим линейную систему, представленную передаточной функцией

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0},$$

где $m < n$ и $b_m \neq 0$. Модель состояния системы имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots & & \\ & & \ddots & & & \vdots & & \\ & & & \ddots & & 0 & & \\ \vdots & & & & & 0 & 1 & \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_m & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 0, \\ 0, \\ \vdots \\ \vdots \\ 0, \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

Эта линейная модель состояния представляет собой частный случай модели (13.7)–(13.8), с $f(x) = Ax$, $g = B$ и $h(x) = Cx$. Для определения относительной степени системы вычислим производные выхода. Первая производная имеет вид

$$\dot{y} = CAx + CBu.$$

Если $m = n - 1$, то $CB = b_{n-1} \neq 0$ и система имеет относительную степень, равную единице. В противном случае $CB = 0$ и мы продолжаем процедуру вычисления производных выхода, получив $y^{(2)}$. Заметим, что CA является вектор-строкой, полученной путем смещения элементов C на одну позицию вправо. Аналогично, CA^2 является вектор-строкой, полученной путем смещения элементов C на две позиции вправо. Продолжая эту процедуру, можно заметить, что

$$CA^{i-1}B = 0 \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n - m - 1 \quad \text{и} \quad CA^{n-m-1}B = b_m \neq 0.$$

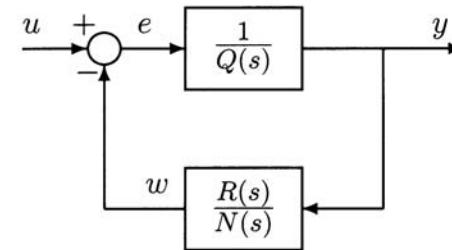


Рис. 13.1. Представление $H(s)$ в виде соединения обратной связи

Таким образом, u появляется впервые в равенстве для $y^{(n-m)}$

$$y^{(n-m)} = CA^{n-m}x + CA^{n-m-1}Bu$$

и, следовательно, относительная степень системы равна $n - m$ (разность степеней полиномов в знаменателе и числителе передаточной функции $H(s)$).¹⁾ \triangle

В целях дальнейшего исследования линеаризуемых по входу–выходу систем и вопросов, связанных с внутренней устойчивостью, рассмотрим линейную систему из предыдущего примера. Передаточная функция $H(s)$ может быть записана в следующем виде:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

где $\deg D = n$ и $\deg N = m < n$. Относительная степень равна $\rho = n - m$. С использованием алгоритма деления Евклида, $D(s)$ можно записать в виде

$$D(s) = Q(s)N(s) + R(s),$$

где $Q(s)$ и $R(s)$ – частное и остаток (полиномы). Согласно алгоритму деления Евклида,

$$\deg Q = n - m = \rho, \quad \deg R < m$$

и старший коэффициент $Q(s)$ равен $1/b_m$. С учетом этого представления $D(s)$, перепишем $H(s)$ следующим образом:

$$H(s) = \frac{N(s)}{Q(s)N(s) + R(s)} = \frac{\frac{1}{Q(s)}}{1 + \frac{R(s)}{Q(s)N(s)}}.$$

Таким образом, $H(s)$ может быть представлена в виде отрицательной обратной связи с $1/Q(s)$ в канале прямой связи и с $R(s)/N(s)$ в канале

¹⁾ Таким образом введенная относительная степень для нелинейной системы совпадает с относительной степенью из линейной теории управления, определяемой как $n - m$.

обратной связи. (См. рисунок 13.1.) Передаточная функция $1/Q(s)$ порядка ρ не имеет нулей и может быть реализована при векторе состояния размерности ρ :

$$\xi = [y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)}]^T.$$

Тогда модель состояния имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= (A_c + B_c \lambda^T) \xi + B_c b_m e, \\ y &= C_c \xi,\end{aligned}$$

где (A_c, B_c, C_c) — каноническое представление цепи ρ интеграторов:

$$\begin{aligned}A_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0, \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0, \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 1, \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0, \\ 0, \\ \vdots \\ 0, \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_c &= [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]\end{aligned}\tag{13.10}$$

и $\lambda \in R^\rho$. Пусть (A_0, B_0, C_0) — минимальное представление передаточной функции $R(s)/N(s)$, т. е.

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= A_0 \eta + B_0 y, \\ w &= C_0 \eta.\end{aligned}$$

Собственные числа матрицы A_0 являются нулями полинома $N(s)$, которые, в свою очередь, являются нулями передаточной функции $H(s)$. Из представления в виде соединения обратной связи для передаточной функции $H(s)$ видно, что эта функция может быть реализована в виде модели состояния

$$\dot{\eta} = A_0 \eta + B_0 C_c \xi, \tag{13.11}$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c (\lambda^T \xi - b_m C_0 \eta + b_m u), \tag{13.12}$$

$$y = C_c \xi. \tag{13.13}$$

С учетом специальной структуры (A_c, B_c, C_c) можно показать, что

$$y^{(\rho)} = \lambda^T \xi - b_m C_0 \eta + b_m u.$$

Тогда (линеаризующая по входу–выходу) замена обратной связи

$$u = \frac{1}{b_m} [-\lambda^T \xi + b_m C_0 \eta + v]$$

приводит систему к виду

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= A_0 \eta + B_0 C_c \xi, \\ \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c v, \\ y &= C_c \xi.\end{aligned}$$

Для этой системы отображение вход–выход представляет собой цепь из ρ интеграторов и подвектор η вектора состояния этой системы является ненаблюдаемым по выходу y . Предположим, что задача заключается в стабилизации выхода вблизи постоянного значения r . Для этого необходимо обеспечить стабилизацию ξ в точке $\xi^* = (r, 0, \dots, 0)^T$. Перемещая точку равновесия в начало координат с использованием замены переменных $\zeta = \xi - \xi^*$, сводим рассматриваемую задачу к задаче стабилизации системы $\dot{\zeta} = A_c \zeta + B_c v$. Полагая $v = -K \zeta = -K(\xi - \xi^*)$, где $A_c - B_c K$ — гурвицева матрица, получаем закон управления

$$u = \frac{1}{b_m} [-\lambda^T \xi + b_m C_0 \eta - K(\xi - \xi^*)].$$

Соответствующая замкнутая система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= A_0 \eta + B_0 C_c (\xi^* + \zeta), \\ \dot{\zeta} &= (A_c - B_c K) \zeta.\end{aligned}$$

Поскольку для любого начального состояния $\zeta(0)$ матрица $A_c - B_c K$ гурвицева, выполнено $\zeta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, $y(t) \rightarrow r$ при $t \rightarrow \infty$. Что можно сказать о поведении η ? В уравнении (13.11) функция $y = C_c \xi$ выступает в качестве входа. Для обеспечения ограниченности $\eta(t)$ для всех возможных сигналов $y(t)$ и всех возможных начальных состояний $\eta(0)$, необходимо потребовать, чтобы матрица A_0 была гурвицевой, или, эквивалентно, чтобы нули $H(s)$ лежали в открытой левой полуплоскости. Передаточная функция, все нули которой расположены в открытой левой полуплоскости, называется минимально-фазовой. В терминах расположения полюсов, применение построенного выше с использованием метода линеаризации по входу–выходу закона управления с обратной связью по состоянию приводит к тому, что собственные значения соответствующей замкнутой системы разбиваются на две группы: ρ собственных значений матрицы $A_c - B_c K$ располагаются в открытой левой полуплоскости и $n - \rho$ собственных значений становятся равными нулям разомкнутой системы.¹⁾

¹⁾ Следует отметить, что при стабилизации выхода вблизи постоянного командного значения не требуется выполнение свойства минимальной фазовости системы. Это требование необходимо для того, чтобы, в соответствии с нашим выбором, некоторые из собственных значений замкнутой системы стали равны нулям разомкнутой системы.

Наше исследование линейной системы из примера 13.4 проливает некоторый свет на существование замены обратной связи по состоянию, приводящей к тому, что отображение вход–выход приводится к виду цепи интеграторов, а также приближает нас к тому, чтобы охарактеризовать понятие внутренней устойчивости. Рассмотрим для этого модель состояния (13.11)–(13.13). Наша цель заключается в том, чтобы разработать нелинейную версию уравнений (13.11)–(13.13) для нелинейной системы (13.7)–(13.8) в случае, если ее относительная степень равна ρ . Переменные ξ выбираются теми же, что были использованы в линейном случае, т. к. в качестве отображения вход–выход будет по-прежнему использоваться цепь из ρ интеграторов. Нам осталось выбрать переменные η для получения нелинейной версии уравнения (13.11). Ключевой особенностью (13.11) является отсутствие в этом уравнении управления u . Замена переменных, которая приводит (13.7)–(13.8) к нелинейной версии уравнений (13.11)–(13.13), может быть выбрана в следующем виде:

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(x) \\ \hline - - - \\ h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1}h(x) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \hline - - - \\ \psi(x) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \eta \\ \hline - - - \\ \xi \end{bmatrix} \quad (13.14)$$

где функции с ϕ_i , $i = 1 \dots n - \rho$ выбраны так, чтобы отображение $T(x)$ было диффеоморфизмом в области $D_0 \subset D$ и

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g(x) = 0 \quad \text{при } 1 \leq i \leq n - \rho, \quad \forall x \in D_0. \quad (13.15)$$

В следующей теореме показывается, что функции ϕ_i , $i = 1 \dots n - \rho$ существуют по крайней мере локально.

Теорема 13.1. Рассмотрим систему (13.7)–(13.8) и предположим, что она имеет относительную степень, равную $\rho \leq n$ в D . Если $\rho = n$, то для любого $x_0 \in D$, существует окрестность N точки x_0 , такая что отображение

$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}h(x) \end{bmatrix},$$

суженное на окрестность N , является диффеоморфизмом на N . Если $\rho < n$, то для любого $x_0 \in D$ существуют окрестности N точки x_0 и гладкие функции $\phi_1(x), \dots, \phi_{n-\rho}(x)$, такие что (13.15)

выполнено для всех $x \in N$ и отображение $T(x)$, заданное равенством (13.14) и суженное на окрестность N , является диффеоморфизмом на N .

Доказательство: См. приложение С.21. \square

Условие (13.15) гарантирует, что при вычислении

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial x}[f(x) + g(x)u]$$

член при u исчезает. Легко проверить, что замена переменных (13.14) преобразует (13.7)–(13.8) к виду

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi), \quad (13.16)$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)], \quad (13.17)$$

$$y = C_c \xi, \quad (13.18)$$

где $\xi \in R^\rho$, $\eta \in R^{n-\rho}$, (A_c, B_c, C_c) — каноническое представление цепи из ρ интеграторов и

$$f_0(\eta, \xi) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right|_{x=T^{-1}(z)}, \quad (13.19)$$

$$\gamma(x) = L_g L_f^{\rho-1} h(x) \quad \text{и} \quad \alpha(x) = -\frac{L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}. \quad (13.20)$$

В уравнении (13.17) мы использовали представление функций α и γ в исходных координатах. Эти функции определяются единственным образом равенствами (13.20) в терминах функций f , g и h и не зависят от выбора ϕ . Они могут быть представлены в новых координатах с использованием равенств

$$\alpha_0(\eta, \xi) = \alpha(T^{-1}(z)) \quad \text{и} \quad \gamma_0(\eta, \xi) = \gamma(T^{-1}(z)).$$

Эти выражения, разумеется, зависят от выбора ϕ . В этом случае уравнение (13.17) может быть переписано в следующем виде:

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma_0(\eta, \xi)[u - \alpha_0(\eta, \xi)].$$

Если x^* является точкой равновесия разомкнутой системы (13.7), то точка (η^*, ξ^*) , определяемая равенством

$$\eta^* = \phi(x^*), \quad \xi^* = [h(x^*) \ 0 \ \cdots \ 0],$$

является точкой равновесия системы (13.16)–(13.17). Если y обращается в нуль при $x = x^*$, т. е. $h(x^*) = 0$, то x^* может быть преобразована в точку начала координат $(\eta = 0, \xi = 0)$ путем выбора $\phi(x)$ так, чтобы $\phi(x^*) = 0$.

Представление системы в виде (13.16)–(13.18) называется *нормальной формой*. Эта форма соответствует декомпозиции системы на внешнюю составляющую ξ и внутреннюю составляющую η . Внешняя со-

ставляющая линеаризуется с использованием замены обратной связи по состоянию

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v,$$

где $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$. Внутренняя составляющая становится ненаблюдаемой после применения указанной замены обратной связи. Внутренняя динамика описывается уравнением (13.16). Полагая в этом уравнении $\xi = 0$, получаем уравнение

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0), \quad (13.21)$$

которое называется уравнением *нуль-динамики* (zero dynamics) системы. Это понятие соотносится с известными результатами из теории линейного управления. Действительно, в случае линейных систем уравнение (13.21) имеет вид $\dot{\eta} = A_0\eta$ и собственные значения матрицы A_0 являются нулями передаточной функции $H(s)$. Система называется *минимально фазовой*, если (13.21) имеет асимптотически устойчивую точку равновесия в рассматриваемой области. В частности, если $T(x)$ выбрано так, чтобы начало координат $(\eta = 0, \xi = 0)$ являлось точкой равновесия системы (13.16)–(13.18), то система называется *минимально-фазовой*, если начало координат для уравнения нуль-динамики (13.21) асимптотически устойчиво. Полезно знать, что нуль-динамика может быть охарактеризована в терминах исходных координат. С учетом

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow \xi(t) \equiv 0 \Rightarrow u(t) \equiv \alpha(x(t)),$$

можно заметить, что если выход системы тождественно равен нулю, то решение уравнения состояния должно быть заключено в множестве

$$Z^* = \{x \in D_0 | h(x) = L_f h(x) = \dots = L_f^{\rho-1} h(x) = 0\}$$

и вход системы должен иметь вид

$$u = u^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(x)|_{x \in Z^*}.$$

Движение системы в этой области описывается уравнением

$$\dot{x} = f^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} [f(x) + g(x)\alpha(x)]|_{x \in Z^*}.$$

В частном случае $\rho = n$, нормальная форма (13.16)–(13.18) сводится к следующему уравнению

$$\dot{z} = A_c z + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)], \quad (13.22)$$

$$y = C_c z, \quad (13.23)$$

где $z = \xi = [h(x), \dots, L_f^{n-1} h(x)]^T$ и переменная η отсутствует. В этом случае система не имеет нуль-динамики и по определению называется *минимально-фазовой*.

Пример 13.5. Рассмотрим уравнение Ван дер Поля с управлением

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u, \\ y &= x_2. \end{aligned}$$

В примере 13.1 было установлено, что эта система имеет относительную степень, равную единице в R^2 . Положив $\xi = y$ и $\eta = x_1$, заключаем, что система уже представлена в нормальной форме. Нуль-динамика определяется уравнением $\dot{x}_1 = 0$, не имеющим асимптотически устойчивой точки равновесия. Следовательно, система не является минимально-фазовой. \triangle

Пример 13.6. Разомкнутая система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} u, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_3 + u, \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

имеет точку равновесия в начале координат. Производные выхода имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_2 = x_3, \\ \ddot{y} &= \dot{x}_3 = x_1 x_3 + u. \end{aligned}$$

Таким образом, система имеет относительную степень, равную двум в R^3 . С учетом того, что в (13.20) $L_g L_f h(x) = 1$ и $L_f^2 h(x) = x_1 x_3$, получаем

$$\gamma = 1 \quad \text{и} \quad \alpha(x) = -x_1 x_3.$$

Для того, чтобы охарактеризовать нуль-динамику, рассмотрим эволюцию переменной x на множестве

$$Z^* = \{x \in R^3 | x_2 = x_3 = 0\}$$

и положим $u = u^*(x) = 0$. В результате получаем уравнение

$$\dot{x}_1 = -x_1,$$

из которого видно, что система является минимально-фазовой. Для того, чтобы представить ее в нормальной форме, выберем функцию $\phi(x)$ так, чтобы было выполнено

$$\phi(0) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) = 0$$

и чтобы отображение

$$T(x) = [\phi(x) \quad x_2 \quad x_3]^T$$

являлось диффеоморфизмом на некоторой области, содержащей начало координат. Дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \cdot \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0$$

может быть решено методом разделения переменных, в результате чего получаем решение

$$\phi(x) = -x_1 + x_3 + \operatorname{tg}^{-1} x_3,$$

которое удовлетворяет условию $\phi(0) = 0$. Отображение $T(x)$ является глобальным диффеоморфизмом и это утверждение следует из того факта, что для любой $z \in R^3$ уравнение $T(x) = z$ имеет единственное решение. Таким образом, нормальная форма имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= (-\eta + \xi_2 + \operatorname{tg}^{-1} \xi_2) \left(1 + \frac{2 + \xi_2^2}{1 + \xi_2^2} \xi_2\right), \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= (-\eta + \xi_2 + \operatorname{tg}^{-1} \xi_2) \xi_2 + u, \\ y &= \xi_1\end{aligned}$$

и определена глобально. \triangle

Пример 13.7. Электрический двигатель постоянного тока из примера 13.3 описывается системой, имеющей относительную степень, равную двум в $D_0 = \{x \in R^3 | x_2 \neq 0\}$. Используя (13.20), получаем

$$\gamma = \theta x_2 \quad \text{и} \quad \alpha(x) = -\frac{\theta x_2(-ax_1) + \theta x_1(-bx_2 + k - cx_1 x_3)}{\theta x_2}.$$

Для того, чтобы охарактеризовать нуль-динамику, рассмотрим эволюцию переменной x на множестве

$$Z^* = \{x \in D_0 | x_3 = 0 \text{ и } x_1 x_2 = 0\} = \{x \in D_0 | x_3 = 0 \text{ и } x_1 = 0\}$$

и положим $u = u^*(x) = 0$, в результате чего получаем уравнение

$$\dot{x}_2 = -bx_2 + k.$$

Уравнение нуль-динамики имеет асимптотически устойчивую точку равновесия в $x_2 = k/b$. Следовательно, система является минимально-фазовой. Для ее преобразования в нормальную форму найдем функцию $\phi(x)$, такую что $[\partial\phi/\partial x]g = \partial\phi/\partial x_1 = 0$ и отображение $T = [\phi(x), x_3, \theta x_1 x_2]^T$ является диффеоморфизмом на некоторой области $D_x \subset D_0$. Функция $\phi(x) = x_2 - k/b$ удовлетворяет $\partial\phi/\partial x_1 = 0$. При этом отображение $T(x)$ является диффеоморфизмом на $D_x = \{x \in R^3 | x_2 > 0\}$ и точка равновесия нуль-динамики становится началом координат. \triangle

Пример 13.8. Рассмотрим нелинейную систему с одним входом и одним выходом, представленную дифференциальным уравнением n -го порядка

$$\begin{aligned}y^{(n)} &= p(z, z^{(1)}, \dots, z^{(m-1)}, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) \\ &\quad + q(z, z^{(1)}, \dots, z^{(m-1)}, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) z^{(m)}, \quad m < n,\end{aligned}\quad (13.24)$$

где z — вход, y — выход, $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ — достаточно гладкие в рассматриваемой области функции и $q(\cdot) \neq 0$. Эта нелинейная модель в терминах вход–выход сводится к модели передаточной функции линейных систем из примера 13.4. Расширим динамику системы, добавив во входной канал последовательность из m интеграторов и определим $u = z^{(m)}$ как вход расширенной системы.¹⁾ Расширенная система имеет порядок $(n+m)$. В модели состояния расширенной системы в качестве переменных состояния выступают

$$\zeta = \begin{bmatrix} z \\ z^{(1)} \\ \vdots \\ z^{(m-1)} \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad x = \begin{bmatrix} \zeta \\ \xi \end{bmatrix}.$$

В этих переменных модель состояния имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= A_u \zeta + B_u u, \\ \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c [p(x) + q(x)u], \\ y &= C_c \xi,\end{aligned}$$

где (A_c, B_c, C_c) — каноническая форма представления цепи n интеграторов и (A_u, B_u) — управляемая пара, представленная в канонической форме и представляющая собой цепь из m интеграторов. Пусть $D \subset R^{n+m}$ — открытая область, в которой p и q являются достаточно гладкими и $q \neq 0$. С учетом специальной структуры (A_c, B_c, C_c) можно заметить, что

$$y^{(i)} = C_c A_c^i \xi \quad \text{при } 1 \leq i \leq n-1 \quad \text{и} \quad y^{(n)} = p(x) + q(x)u.$$

Следовательно, система имеет относительную степень n . Для нахождения уравнения нуль-динамики заметим, что $L_f^{i-1} h(x) = \xi_i$ и, следова-

¹⁾ В этом примере будет показано, что расширенная система является линеаризуемой по входу–выходу. Это позволяет разработать закон управления с обратной связью с использованием метода линеаризации по входу–выходу. При применении такого управления в исходной системе m интеграторов становятся частью динамики регулятора.

тельно, $Z^* = \{x \in R^{n+m} | \xi = 0\}$ и $u^*(x) = -p(x)/q(x)$ вычисляется при $\xi = 0$. Таким образом, нуль-динамика определяется уравнением

$$\dot{\zeta} = A_u \zeta + B_u u^*(x).$$

С учетом определения ζ можно показать, что $\zeta_1 = z$ удовлетворяет дифференциальному уравнению m -го порядка

$$0 = p(z, z^{(1)}, \dots, z^{(m-1)}, 0, 0, \dots, 0) + \\ + q(z, z^{(1)}, \dots, z^{(m-1)}, 0, 0, \dots, 0) z^{(m)}, \quad (13.25)$$

которое совпадает с уравнением, полученным из (13.24) при $y(t) \equiv 0$. В случае линейных систем, уравнение (13.25) сводится к линейному дифференциальному уравнению, соответствующему полиному в числитеle передаточной функции. Свойство минимальной фазовости системы может быть установлено путем анализа (13.25). Для преобразования системы в нормальную форму заметим, что ξ уже представляет собой вектор, элементами которого являются выход y и все его последовательные производные, включая $y^{(n-1)}$. Поэтому нам осталось найти функцию $\phi = \phi(\zeta, \xi) : R^{n+m} \rightarrow R^m$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} B_u + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} B_c q(x) = 0,$$

которое эквивалентно следующему

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta_m} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_n} q(x) = 0 \quad \text{при } 1 \leq i \leq m. \quad (13.26)$$

В некоторых специальных случаях можно легко найти решения этих дифференциальных уравнений в частных производных. Например, если q является постоянной, функция ϕ может быть выбрана в виде

$$\phi_i = \zeta_i - \frac{1}{q} \xi_{n-m+i} \quad \text{при } 1 \leq i \leq m.$$

Другой подобный случай рассматривается в упражнении 13.5. \triangle

13.3. Линеаризация по всем переменным состояния

Система с одним входом

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (13.27)$$

где f и g — достаточно гладкие в области $D \subset R^n$ функции, является линеаризуемой обратной связью, если существует достаточно гладкая функция $h : D \rightarrow R$, такая что система

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (13.28)$$

$$y = h(x), \quad (13.29)$$

имеет относительную степень n в области $D_0 \subset D$. Это утверждение следует из того факта, что нормальная форма системы с относительной степенью n имеет вид

$$\dot{z} = A_c z + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)], \quad (13.30)$$

$$y = C_c z. \quad (13.31)$$

С другой стороны, если система (13.27) линеаризуема обратной связью в соответствии с определением 13.1, то существует замена переменных $\zeta = S(x)$, такая что преобразованная система имеет вид

$$\dot{\zeta} = A\zeta + B\bar{\gamma}(x)[u - \bar{\alpha}(x)],$$

где пара (A, B) управляема и $\bar{\gamma}(x) \neq 0$ в некоторой области. Для любой управляемой пары (A, B) можно найти невырожденную матрицу M , такую что при соответствующем преобразовании пары (A, B) приводится к канонической форме управляемости,¹⁾ т. е. $MAM^{-1} = A_c + B_c \lambda^T$ и $MB = B_c$, где (A_c, B_c) представляет цепь из n интеграторов. Замена переменных

$$z = M\zeta = MS(x) \stackrel{\text{def}}{=} T(x)$$

приводит систему (13.27) к виду

$$\dot{z} = A_c z + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)],$$

где $\gamma(x) = \bar{\gamma}(x)$ и $\alpha(x) = \bar{\alpha}(x) - \lambda^T MS(x)/\gamma(x)$. Поскольку

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x} \dot{x},$$

равенство

$$A_c T(x) + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)] = \frac{\partial T}{\partial x}[f(x) + g(x)u]$$

должно выполняться в рассматриваемой области для всех x и u . Положив $u = 0$, мы разделяем предыдущее уравнение на два уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial x} f(x) = A_c T(x) - B_c \alpha(x) \gamma(x), \quad (13.32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} g(x) = B_c \gamma(x). \quad (13.33)$$

Уравнение (13.32) эквивалентно системе

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) = T_2(x),$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} f(x) = T_3(x),$$

¹⁾ См., например, книгу [158].

Прим. ред. перев. — «Каноническое представление управляемости» или «Управляемое каноническое представление», см. также [Д3, Д4].

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} f(x) &= T_n(x), \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} f(x) &= -\alpha(x)\gamma(x). \end{aligned}$$

В свою очередь, уравнение (13.33) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) &= 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} g(x) &= 0, \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) &= \gamma(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Полагая $h(x) = T_1(x)$, получаем

$$T_{i+1}(x) = L_f T_i(x) = L_f^i h(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Функция $h(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (13.34)$$

при

$$L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0, \quad (13.35)$$

и α, γ , определяемых равенствами

$$\gamma(x) = L_g L_f^{n-1} h(x), \quad \alpha(x) = -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)}. \quad (13.36)$$

Суммируя все вышесказанное, можно сказать, что система (13.27) является линеаризуемой обратной связью, если и только если существует функция $h(x)$, такая что система (13.28)–(13.29) имеет относительную степень n , или, эквивалентно, функция h удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных (13.34) при выполнении условия (13.35). Существование функции h обусловлено необходимыми и достаточными условиями на векторные поля f и g . Для формулировки этих условий используются понятия *скобок Ли* и *инвариантных распределений*, которые будут введены ниже.

Для двух векторных полей f и g на $D \subset R^n$ скобка Ли (Lie bracket) $[f, g]$ определяется как векторное поле

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x),$$

где $[\partial g / \partial x]$ и $[\partial f / \partial x]$ – матрицы Якоби. Повторные скобки Ли векторного поля g по векторному полю f определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} ad_f^0 g(x) &= g(x), \\ ad_f g(x) &= [f, g](x), \\ ad_f^k g(x) &= [f, ad_f^{k-1} g](x), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Очевидно что $[f, g] = -[g, f]$ и для постоянных векторных полей f и g справедливо $[f, g] = 0$.

Пример 13.9. Пусть

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2, \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0, \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} [f, g](x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} ad_f g, \\ ad_f^2 g &= [f, ad_f g] = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 - \sin x_1 - x_1 \cos x_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

△

Пример 13.10. Если $f(x) = Ax$ и g – постоянное векторное поле, то

$$\begin{aligned} ad_f g(x) &= [f, g](x) = -Ag \\ ad_f^2 g &= [f, ad_f g] = -A(-Ag) = A^2 g \end{aligned}$$

и

$$ad_f^k g = (-1)^k A^k g.$$

△

Для векторных полей f_1, f_2, \dots, f_k на $D \subset R^n$, определим

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$$

как подпространство R^n , натянутое на векторы $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ в каждой фиксированной точке $x \in D$. Семейство всех векторных пространств $\Delta(x)$ для $x \in D$ называется распределением (distribution) и записывается следующим образом:

$$\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_k\}.$$

Размерность $\Delta(x)$, определенная равенством

$$\dim(\Delta(x)) = \text{rank}[f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)],$$

может отличаться для различных точек x , но если $\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_k\}$, где $\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ — линейно независимы для всех $x \in D$, то $\dim(\Delta(x)) = k$ для всех $x \in D$. В этом случае мы будем говорить, что Δ — невырожденное распределение на D с генераторами f_1, \dots, f_k . Распределение Δ называется инволютивным, если

$$g_1 \in \Delta \quad \text{и} \quad g_2 \in \Delta \Rightarrow [g_1, g_2] \in \Delta.$$

Если Δ — невырожденное распределение на D с генераторами f_1, \dots, f_k , то можно показать (см. упражнение 13.9), что Δ инволютивно, если и только если

$$[f_i, f_j] \in \Delta, \quad \forall 1 \leq i, j \leq k.$$

Пример 13.11. Пусть $D = R^3$ и $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$, где

$$f_1 = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Можно показать, что $\dim(\Delta(x)) = 2$ для всех $x \in D$ и

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Векторное поле $[f_1, f_2] \in \Delta$, если и только если $\text{rank}[f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)] = 2$ для всех $x \in D$. Однако,

$$\text{rank}[f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)] = \text{rank} \begin{bmatrix} 2x_2 & 1 & 0, \\ 1 & 0 & 0, \\ 0 & x_2 & 1 \end{bmatrix} = 3, \quad \forall x \in D.$$

Следовательно, Δ инволютивно. \triangle

Пример 13.12. Пусть $D = \{x \in R^3 \mid x_1^2 + x_3^2 \neq 0\}$ и $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$, где

$$f_1 = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Можно показать, что $\dim(\Delta(x)) = 2$ для всех $x \in D$,

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и

$$\text{rank}[f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)] = \text{rank} \begin{bmatrix} 2x_3 & -x_1 & -4x_3, \\ -1 & -2x_2 & 2, \\ 0 & x_3 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad \forall x \in D.$$

Поэтому $[f_1, f_2] \in \Delta$. Поскольку $[f_2, f_1] = -[f_1, f_2]$, заключаем, что Δ инволютивно. \triangle

Введя все эти понятия, мы можем охарактеризовать класс систем, которые могут быть линеаризованы обратной связью.

Теорема 13.2. Система (13.27) является линеаризуемой обратной связью, если и только если существует открытая область $D_0 \subset D$, такая что

1. матрица $\mathcal{G}(x) = [g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-1} g(x)]$ имеет ранг n для всех $x \in D_0$;
2. распределение $D = \text{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$ инволютивно в D_0 .

Доказательство: См. приложение C.22. \square

В следующих трех примерах мы проиллюстрируем применение теоремы 13.2 и рассмотрим различные подходы к решению дифференциальных уравнений в частных производных (13.34). Во всех примерах мы будем предполагать, что система (13.27) имеет точку равновесия x^* при $u = 0$. Выберем $h(x)$ так, чтобы $h(x^*) = 0$. Тогда замена переменных $z = T(x)$ переводит точку равновесия $x = x^*$ в начало координат $z = 0$.

Пример 13.13. Рассмотрим снова систему

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a \sin x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + gu$$

из параграфа 13.1. Имеем

$$ad_f g = [f, g] = -\frac{\partial f}{\partial x} g = \begin{bmatrix} -a \cos x_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица

$$\mathcal{G} = [g, ad_f g] = \begin{bmatrix} 0 & -a \cos x_2, \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

имеет ранг два для всех x , таких что $\cos x_2 \neq 0$. Распределение $\mathcal{D} = \text{span}\{g\}$ является инволютивным. Следовательно, условия теоремы 13.2 выполнены в области $D_0 = \{x \in R^2 \mid \cos x_2 \neq 0\}$. Для нахождения замены переменных, преобразующей систему к виду (13.6), найдем функцию $h(x)$, удовлетворяющую

$$\frac{\partial h}{\partial x} g = 0; \quad \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g \neq 0 \quad \text{и} \quad h(0) = 0.$$

Из условия $[\partial h / \partial x] g = 0$ получаем

$$\frac{\partial h}{\partial x} g = \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0.$$

Таким образом, h не должна зависеть от переменной x_2 . Поэтому,

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} a \sin x_2.$$

Условие

$$\frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_2} = \frac{\partial h}{\partial x_1} a \cos x_2 \neq 0$$

выполнено в области D_0 , что обусловлено выбором функции h , при котором справедливо $(\partial h / \partial x_1) \neq 0$. Полагая $h(x) = x_1$, получаем ранее полученное преобразование. Можно выбрать другую функцию h , например, $h(x) = x_1 + x_1^3$. При этом соответствующая замена переменных также приводит систему к виду (13.6). \triangle

Пример 13.14. Манипулятор с одним звеном, упругим соединением и пренебрежимо малым демпфированием может быть представлен моделью четвертого порядка (см. упражнение 1.5):

$$\dot{x} = f(x) + gu,$$

где

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a \sin x_1 - b(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ c(x_1 - x_3) \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

и a, b, c и d — положительные константы. Свободная система имеет точку равновесия в $x = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} ad_f g &= [f, g] = -\frac{\partial f}{\partial x} g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}, \\ ad_f^2 g &= [f, ad_f g] = -\frac{\partial f}{\partial x} ad_f g = \begin{bmatrix} 0 \\ bd \\ 0 \\ -cd \end{bmatrix}, \\ ad_f^3 g &= [f, ad_f^2 g] = -\frac{\partial f}{\partial x} ad_f^2 g = \begin{bmatrix} -bd \\ 0 \\ cd \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица

$$\mathcal{G} = [g, ad_f g, ad_f^2 g, ad_f^3 g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -bd \\ 0 & 0 & bd & 0 \\ 0 & -d & 0 & cd \\ d & 0 & -cd & 0 \end{bmatrix}$$

имеет полный ранг для всех $x \in R^4$. Распределение $\Delta = \text{span}(g, ad_f g, ad_f^2 g)$ глобально инволютивно, т.к. g , $ad_f g$ и $ad_f^2 g$ являются постоянными векторными полями. Таким образом, условия теоремы 13.2 выполнены для всех $x \in R^4$. Для нахождения замены переменных, преобразующей уравнение состояния к виду (13.6), найдем функцию $h(x)$, удовлетворяющую

$$\frac{\partial(L_f^{i-1} h)}{\partial x} g = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial(L_f^3 h)}{\partial x} g \neq 0 \quad \text{и} \quad h(0) = 0.$$

Из условия $[\partial h / \partial x]g = 0$ имеем $(\partial h / \partial x_4) = 0$. Поэтому мы должны выбрать h так, чтобы эта функция не зависела от переменной x_4 . Тогда

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial h}{\partial x_2} [-a \sin x_1 - b(x_1 - x_3)] + \frac{\partial h}{\partial x_3} x_4.$$

Из условия $[\partial(L_f h) / \partial x]g = 0$ получаем

$$\frac{\partial(L_f h)}{\partial x_4} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0.$$

Поэтому мы должны выбрать функцию h так, чтобы она не зависела от x_3 . Тогда выражение для $L_f h$ упрощается и принимает вид

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial h}{\partial x_2} [-a \sin x_1 - b(x_1 - x_3)].$$

Кроме того,

$$L_f^2 h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_2} [-a \sin x_1 - b(x_1 - x_3)] + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_3} x_4.$$

Наконец,

$$\frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x_4} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0$$

и поэтому мы должны выбрать h так, чтобы она не зависела от x_2 . Тогда

$$L_f^3 h(x) = \frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x_2} [-a \sin x_1 - b(x_1 - x_3)] + \frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x_3} x_4$$

и условие $[\partial(L_f^3 h) / \partial x]g \neq 0$ выполнено при $(\partial h / \partial x_1) \neq 0$. Таким образом, приходим к выбору $h(x) = x_1$. Замена переменных

$$\begin{aligned} z_1 &= h(x) = x_1, \\ z_2 &= L_f h(x) = x_2, \\ z_3 &= L_f^2 h(x) = -a \sin x_1 - b(x_1 - x_3), \\ z_4 &= L_f^3 h(x) = -ax_2 \cos x_1 - b(x_2 - x_4) \end{aligned}$$

преобразует уравнение состояния к виду

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= z_4, \\ \dot{z}_4 &= -(a \cos z_1 + b + c)z_3 + a(z_2^2 - c) \sin z_1 + bdu,\end{aligned}$$

соответствующему форме представления (13.6). В отличие от предыдущего примера, в рассматриваемом здесь случае уравнение состояния в z -координатах определено глобально, т. к. $z = T(x)$ является глобальным диффеоморфизмом. \triangle

Пример 13.15. В примерах 13.3 и 13.7 мы рассматривали модель электрического двигателя постоянного тока, представленную в виде уравнения состояния третьего порядка

$$\dot{x} = f(x) + gu,$$

где

$$f(x) = \begin{bmatrix} -ax_1 \\ -bx_2 + k - cx_1x_3 \\ \theta x_1x_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и a, b, c, θ и k — положительные константы. Мы показали, что в случае, когда выход выбран в виде $y = x_3$, эта система имеет относительную степень, равную двум и, следовательно, является частично линеаризуемой обратной связью. Рассмотрим вопрос о линеаризуемости этого уравнения состояния по всем переменным состояния. Имеем

$$ad_f g = [f, g] = \begin{bmatrix} a \\ cx_3 \\ -\theta x_2 \end{bmatrix}; \quad ad_f^2 g = [f, ad_f g] = \begin{bmatrix} a^2 \\ (a+b)cx_3 \\ (b-a)\theta x_2 - \theta k \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы

$$\mathcal{G} = [g, ad_f g, ad_f^2 g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 0 & cx_3 & (a+b)cx_3 \\ 0 & -\theta x_2 & (b-a)\theta x_2 - \theta k \end{bmatrix}$$

определяется равенством

$$\det \mathcal{G} = c\theta(-k + 2bx_2)x_3.$$

Следовательно, \mathcal{G} имеет ранг три при $x_2 \neq k/2b$ и $x_3 \neq 0$. Распределение $\mathcal{D} = \text{span}\{g, ad_f g\}$ инволютивно, если $[g, ad_f g] \in \mathcal{D}$. Имеем

$$[g, ad_f g] = \frac{\partial(ad_f g)}{\partial x} g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & -\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, \mathcal{D} инволютивно и условия теоремы 13.2 выполнены в области

$$D_0 = \{x \in R^3 | x_2 > \frac{k}{2b} \text{ и } x_3 > 0\}.$$

Найдем функцию h , удовлетворяющую (13.34) и (13.35). Свободная система имеет множество точек равновесия при $x_1 = 0$, $x_2 = k/b$. Выберем в качестве желаемой рабочей точки $x^* = [0, k/b, \omega_0]^T$, где ω_0 — заданное желаемое значение угловой скорости x_3 . Необходимо найти функцию $h(x)$, удовлетворяющую уравнениям

$$\frac{\partial h}{\partial x} g = 0; \quad \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g = 0; \quad \frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x} g \neq 0$$

при $h(x^*) = 0$. Из условия

$$\frac{\partial h}{\partial x} g = \frac{\partial h}{\partial x_1} = 0$$

видно, что h не должна зависеть от x_1 . Поэтому

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_2} [-bx_2 + k - cx_1x_3] + \frac{\partial h}{\partial x_3} \theta x_1x_2.$$

Из условия $[\partial(L_f h)/\partial x]g = 0$ получаем равенство

$$cx_3 \frac{\partial h}{\partial x_2} = \theta x_2 \frac{\partial h}{\partial x_3}$$

которое справедливо, если h имеет вид

$$h = c_1[\theta x_2^2 + cx_3^2] + c_2,$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы. Пусть $c_1 = 1$. Тогда для того, чтобы было выполнено условие $h(x^*) = 0$, положим

$$c_2 = -\theta(x_2^*)^2 - c(x_3^*)^2 = -\theta(k/b)^2 - c\omega_0^2.$$

При таком выборе h , $L_f h$ и $L_f^2 h$ определяются равенствами

$$L_f h(x) = 2\theta x_2(k - bx_2), \quad L_f^2 h(x) = 2\theta(k - 2bx_2)(-bx_2 + k - cx_1x_3).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x} g = \frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x_1} = -2c\theta(k - 2bx_2)x_3$$

и условие $[\partial(L_f^2 h)/\partial x]g \neq 0$ выполнено при $x_2 \neq k/2b$ и $x_3 \neq 0$. Предполагая $x_3^* > 0$, можно легко показать (упражнение 13.15), что отображение $z = T(x)$ является диффеоморфизмом на D_0 и уравнение состояния в z -координатах определено в области

$$D_z = T(D_0) = \left\{ z \in R^3 | z_1 > \theta\phi^2(z_2) - \theta(k/b)^2 - c\omega_0^2 \text{ и } z_2 < \frac{\theta k^2}{2b} \right\},$$

где $\phi(\cdot)$ — обратное отображение для отображения $z_2 = 2\theta x_2(k - bx_2)$, которое определено при $x_2 > k/2b$. Открытая область D_z содержит начало координат $z = 0$. \triangle

13.4. Управление с обратной связью по состоянию

13.4.1. Стабилизация

Рассмотрим частично линеаризуемую обратной связью систему вида

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi), \quad (13.37)$$

$$\dot{\xi} = A\xi + B\gamma(x)[u - \alpha(x)], \quad (13.38)$$

где

$$z = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix}.$$

Отображение $T(x)$ является диффеоморфизмом в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $D_z = T(D)$ содержит начало координат, (A, B) — управляемая пара, $\gamma(x)$ — невырожденная матрица для всех $x \in D$, $f_0(0, 0) = 0$ и $f_0(\eta, \xi)$, $\alpha(x)$ и $\gamma(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Наша цель в этом параграфе заключается в том, чтобы построить закон управления с обратной связью по состоянию, который обеспечивает стабилизацию начала координат $z = 0$. Представление системы в виде (13.37)–(13.38) тесно связано с представлением линеаризуемой по входу–выходу системы в нормальной форме (13.16)–(13.18). Однако в рассматриваемом здесь случае уравнение (13.18) опущено, т. к. в задаче стабилизации по состоянию выход y не рассматривается. Класс систем вида (13.37)–(13.38) включает в себя также и системы, которые могут быть линеаризуемы обратной связью — этот случай возникает, если опустить уравнение (13.37). В представленном ниже анализе мы не будем ограничиваться рассмотрением лишь систем с одним входом и одним выходом или линейных систем, для которых соответствующая пара (A, B) управляема и представлена в канонической форме. Мы будем рассматривать системы общего вида (13.37)–(13.38) и полученные результаты будут применимы (как частные случаи) к системам, представленным в нормальной форме (13.16)–(13.18), а также к системам, линеаризуемым обратной связью.

Замена обратной связи по состоянию

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v,$$

где $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$, приводит (13.37)–(13.38) к «треугольному» виду

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi), \quad (13.39)$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv. \quad (13.40)$$

Уравнение (13.40) может быть стабилизировано обратной связью $v = -K\xi$, где K выбрана так, чтобы матрица $(A - BK)$ была гурвицевой.

Асимптотическая устойчивость начала координат всей замкнутой системы

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi), \quad (13.41)$$

$$\dot{\xi} = (A - BK)\xi \quad (13.42)$$

следует из асимптотической устойчивости начала координат уравнения $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$. Это утверждение сформулировано в виде следующей леммы.

Лемма 13.1. *Начало координат (13.41)–(13.42) является асимптотически устойчивым, если начало координат $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ является асимптотически устойчивым.*

Доказательство: Из обратной теоремы Ляпунова 4.16 следует, что существует непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $V_1(\eta)$, такая что неравенство

$$\frac{\partial V_1}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) \leq -\alpha_3(\|\eta\|)$$

выполнено в некоторой окрестности $\eta = 0$, где α_3 — некоторая \mathcal{K} -функция. Пусть $P = P^T > 0$ — решение уравнения Ляпунова $P(A - BK) + (A - BK)^T P = -I$. Используем $V(\eta, \xi) = V_1(\eta) + k\sqrt{\xi^T P \xi}$, где $k > 0$, в качестве функции Ляпунова для системы (13.41)–(13.42).¹⁾ Производная \dot{V} определяется равенством

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V_1}{\partial \eta} f_0(\eta, \xi) + \frac{k}{2\sqrt{\xi^T P \xi}} \xi^T [P(A - BK) + (A - BK)^T P] \xi, \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) + \frac{\partial V_1}{\partial \eta} [f_0(\eta, \xi) - f_0(\eta, 0)] - \frac{k\xi^T \xi}{2\sqrt{\xi^T P \xi}}. \end{aligned}$$

В любой ограниченной окрестности начала координат с использованием свойства непрерывной дифференцируемости функций V_1 и f_0 можно получить оценку

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|\eta\|) + k_1\|\xi\| - kk_2\|\xi\|,$$

где k_1 и k_2 — некоторые положительные константы. Выбор $k > k_1/k_2$ обеспечивает отрицательную определенность \dot{V} . Следовательно, начало координат асимптотически устойчиво. \square

¹⁾ Функция $V(\eta, \xi)$ является непрерывно дифференцируемой в окрестности начала координат, за исключением многообразия $\xi = 0$. Функция $V(\eta, \xi)$ и ее производная $\dot{V}(\eta, \xi)$ определены и непрерывны в окрестности начала координат. Легко показать, что утверждение теоремы 4.1 справедливо для рассматриваемого случая.

Из предыдущего обсуждения следует, что минимально-фазовая линеаризуемая по входу–выходу система может быть стабилизируема с использованием обратной связи по состоянию

$$u = \alpha(x) - \beta(x)KT_2(x). \quad (13.43)$$

Управление (13.43) не зависит от $T_1(x)$. Поэтому оно не зависит от функции ϕ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению в частных производных (13.15).

Доказательство леммы 13.1 справедливо лишь для ограниченных множеств. Следовательно, оно не может быть обобщено на случай глобальной асимптотической устойчивости. Для того, чтобы доказать глобальную асимптотическую устойчивость системы, необходимо наложить на систему $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ дополнительное требование — она должна быть устойчивой по входу–состоянию при ξ , рассматриваемом в качестве входа.

Лемма 13.2. *Начало координат системы (13.41)–(13.42) глобально асимптотически устойчиво, если система $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ является устойчивой по входу–состоянию.*

Доказательство: Примените лемму 4.7. \square

Как мы видели в параграфе 4.10, устойчивость по входу–состоянию системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ не следует из глобальной асимптотической, или даже экспоненциальной устойчивости начала координат системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$. Следовательно, выполнение свойства «глобальной» минимальной фазовости линеаризуемой по входу–выходу системы не гарантирует, что закон управления (13.43) обеспечивает глобальную стабилизацию системы. Этот закон управления будет обеспечивать глобальную стабилизацию, если начало координат системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ является глобально экспоненциально устойчивым и функция $f_0(\eta, \xi)$ является глобально липшицевой по (η, ξ) , т. к. в этом случае из леммы 4.6 будет следовать, что система $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ является устойчивой по входу–состоянию. В противном случае свойство устойчивости по входу–состоянию следует устанавливать путем дополнительного анализа системы. Условие глобальной липшицевости иногда называют условием линейного роста (linear growth). Следующие два примера иллюстрируют те сложности, которые могут возникнуть в случае, если условия линейного роста не выполняются.

Пример 13.16. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\eta + \eta^2\xi, \\ \dot{\xi} &= v.\end{aligned}$$

Начало координат $\dot{\eta} = -\eta$ глобально экспоненциально устойчиво, но система $\dot{\eta} = -\eta + \eta^2\xi$ не является устойчивой по входу–состоянию. Этот факт может быть установлен, если заметить, что из $\xi(t) \equiv 1$ и $\eta(0) \geq 2$ следует $\dot{\eta}(t) \geq 2$ и поэтому η неограниченно возрастает. С другой стороны, из леммы 13.1 следует, что линейное управление $v =$

$= -k\xi$, $k > 0$ стабилизирует начало координат всей системы. В действительности, при таком законе управления начало координат будет экспоненциально устойчиво. Однако этот линейный закон управления не обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость начала координат. Полагая $\nu = \eta\xi$ и заметив, что

$$\nu = \eta\dot{\xi} + \dot{\eta}\xi = -k\eta\xi - \eta\xi + \eta^2\xi^2 = -(1+k)\nu + \nu^2,$$

получаем, что множество $\{\eta\xi < 1+k\}$ положительно инвариантно. На границе $\eta\xi = 1+k$ траектория определяется равенствами $\eta(t) = e^{kt}\eta(0)$ и $\xi(t) = e^{-kt}\xi(0)$. Тогда $\eta(t)\xi(t) \equiv 1+k$. Внутри множества $\{\eta\xi < 1+k\}$ функция $\nu(t)$ будет строго убывающей и после конечного момента времени T будет выполнено $\nu(t) \leq 1/2$ для всех $t \geq T$. Таким образом, $\eta\dot{\nu} \leq -(1/2)\nu^2$ для всех $t \geq T$ и из этого неравенства следует, что траектория стремится к началу координат при t , стремящемся к бесконечности. Следовательно, множество $\{\eta\xi < 1+k\}$ представляет собой точную область притяжения. Из этого результата следует, что начало координат не является глобально асимптотически устойчивым, однако легко заметить, что область притяжения расширяется при увеличении k . В действительности, выбирая достаточно большую константу k , мы можем обеспечить включение сколь угодно большого компактного множества в область притяжения. Таким образом, линейное управление с обратной связью $v = -k\xi$ может обеспечить полуглобальную стабилизацию. \triangle

Если начало координат системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ глобально асимптотически устойчиво, можно было бы ожидать, что треугольная система (13.39)–(13.40) может быть глобально (или по крайней мере полуглобально) стабилизируема с использованием линейной обратной связи $v = -K\xi$, построенной так, чтобы собственные значения матрицы $(A - BK)$ располагались в левой полуплоскости комплексной плоскости и достаточно далеко от мнимой оси, что обеспечило бы произвольно быстрое стремление решений системы $\dot{\xi} = (A - BK)\xi$ к нулю. Тогда решения системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ быстро стремились бы к решениям системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$, поведение которых соответствует нашим целям, т. к. начало координат этой системы глобально асимптотически устойчиво. Может даже показаться, что именно эта стратегия использовалась в предыдущем примере для достижения полуглобальной стабилизации. Однако этот подход применим не всегда и это показывает следующий пример.¹⁾

Пример 13.17. Рассмотрим систему третьего порядка

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\frac{1}{2}(1+\xi_2)\eta^3, \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2,\end{aligned}$$

¹⁾ Случай успешного применения этого подхода рассмотрен в упражнении 13.20.

$$\dot{\xi}_2 = v$$

Применение линейной обратной связи

$$v = -k^2\xi_1 - 2k\xi_2 \stackrel{\text{def}}{=} -K\xi$$

приводит к линейной системе с матрицей

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1, \\ -k^2 & -2k \end{bmatrix},$$

собственными значениями которой являются $-k$ и $-k$. Из выражения для матричной экспоненты

$$e^{(A-BK)t} = \begin{bmatrix} (1+kt)e^{-kt} & te^{-kt}, \\ -k^2te^{-kt} & (1-kt)e^{-kt} \end{bmatrix}$$

видно, что при $k \rightarrow \infty$ решение $\xi(t)$ стремится к нулю произвольно быстро. Заметим, однако, что коэффициент при элементе $(2,1)$ матричной экспоненты представляет собой квадратичную функцию от k . Можно показать, что абсолютное значение этого элемента матрицы принимает максимальное значение k/e при $t = 1/k$. Несмотря на то, что имеется возможность обеспечить произвольно быстрое стремление этого члена к нулю путем выбора достаточно большого коэффициента k , в переходном процессе эволюции этой величины имеется пик порядка k .¹⁾ Взаимодействие этого пика с нелинейным ростом может привести к дестабилизации системы. В частности, для начальных состояний $\eta(0) = \eta_0$, $\xi_1(0) = 1$ и $\xi_2(0) = 0$ получаем $\xi_2(t) = -k^2te^{-kt}$ и

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}(1 - k^2te^{-kt})\eta^3.$$

Во время образования пика коэффициент при η^3 положителен, что обуславливает рост $|\eta(t)|$. Через некоторое время коэффициент при η^3 может стать отрицательным, но если система имеет конечное время ухода на бесконечность, это не позволит заново стабилизировать систему. Действительно, из выражения для решения

$$\eta^2(t) = \frac{\eta_0^2}{1 + \eta_0^2[t + (1+kt)e^{-kt} - 1]}$$

видно, что если $\eta_0^2 > 1$, то рассматриваемая система имеет конечное время ухода на бесконечность при достаточно большом k . \triangle

Мы вернемся к рассмотрению треугольной системы (13.39)–(13.40) в параграфах 14.3 и 14.4, где будет представлен закон управления v в виде нелинейной функции от ξ и η , который обеспечивает глобальную

¹⁾ Явление образования пиков (резких максимумов) при переходном процессе рассматривается в работе [188]. В качестве иллюстрации систем, в которых это явление наблюдается, можно рассмотреть наблюдатели с сильной обратной связью (см. параграф 14.5).

стабилизацию. Этот результат будет получен с использованием метода бэкстеппинга из параграфа 14.3 и на основе метода пассивности из параграфа 14.4. Мы также рассмотрим случаи, когда система $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ не является устойчивой по входу–состоянию.

Метод линеаризации обратной связью предлагает простую и систематическую процедуру построения стабилизирующих законов для класса нелинейных систем, однако при его использовании возникают законные вопросы о робастности и эффективности полученных законов управления. В заключение параграфа мы рассмотрим именно эти аспекты.

Метод линеаризации обратной связью основан на полном исключении нелинейных членов α и γ и для этого требуется точно знать α , $\beta = \gamma^{-1}$, и T_2 . С практической точки зрения это требование представляется невыполнимым вследствие наличия некоторой идеализации модели, ее параметрической неопределенности, а также по причине неизбежного возникновения вычислительных ошибок. Наиболее вероятный сценарий предполагает, что регулятор будет реализован на основе функций $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ и \hat{T}_2 , представляющих собой аппроксимации α , β , и T_2 , т. е. закон управления с обратной связью будет иметь вид

$$u = \hat{\alpha}(x) - \hat{\beta}(x)K\hat{T}_2(x).$$

В этом случае соответствующая замкнутая система принимает следующую форму:

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi),$$

$$\dot{\xi} = A\xi + B\gamma(x)[\hat{\alpha}(x) - \hat{\beta}(x)K\hat{T}_2(x) - \alpha(x)].$$

Прибавляя и вычитая из правой части второго уравнения член $BK\xi$, мы можем переписать эту систему:

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi), \tag{13.44}$$

$$\dot{\xi} = (A - BK)\xi + B\delta(z), \tag{13.45}$$

где

$$\delta(z) = \gamma(x)\{\hat{\alpha}(x) - \alpha(x) + [\beta(x) - \hat{\beta}(x)]KT_2(x) + \hat{\beta}(x)K[T_2(x) - \hat{T}_2(x)]\}|_{x=T^{-1}(z)}$$

Таким образом, замкнутая система представляет собой возмущение номинальной системы

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi),$$

$$\dot{\xi} = (A - BK)\xi.$$

С учетом результатов главы 9 можно ожидать получение приемлемых результатов если ошибка $\delta(z)$ мала. Следующие две леммы подтверждают это предположение. Начнем наш анализ со случая линеаризуе-

мых обратной связью систем, для которых соответствующее уравнение замкнутой системы упрощается и принимает вид

$$\dot{z} = (A - BK)z + B\delta(z). \quad (13.46)$$

Лемма 13.3. Рассмотрим замкнутую систему (13.46), где $(A - BK)$ — гурвицева матрица. Пусть $P = P^T > 0$ — решение уравнения Ляпунова

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P = -I$$

и k — неотрицательная константа, значение которой меньше $1/(2\|PB\|_2)$.

- Если $\|\delta(z)\| \leq k\|z\|$ для всех z , то начало координат системы (13.46) глобально экспоненциально устойчиво.
- Если $\|\delta(z)\| \leq k\|z\| + \varepsilon$ для всех z , то состояние z глобально предельно ограничено величиной εc для некоторой $c > 0$.

Доказательство: Пусть $V(z) = z^T P z$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z^T [P(A - BK) + (A - BK)^T P]z + 2z^T PB\delta(z), \\ &\leq -\|z\|_2^2 + 2\|PB\|_2\|z\|_2\|\delta(z)\|_2 \end{aligned}$$

Если $\|\delta(z)\|_2 \leq k\|z\|_2 + \varepsilon$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\|z\|_2^2 + 2k\|PB\|_2\|z\|_2^2 + 2\varepsilon\|PB\|_2\|z\|_2 = \\ &= -(1 - \theta_1)\|z\|_2^2 - \theta_1\|z\|_2^2 + 2k\|PB\|_2\|z\|_2^2 + 2\varepsilon\|PB\|_2\|z\|_2, \end{aligned}$$

где константа $\theta_1 \in (0, 1)$ выбрана достаточно близко к единице, так чтобы $k < \theta_1/(2\|PB\|_2)$. Тогда

$$\dot{V} \leq -(1 - \theta_1)\|z\|_2^2 + 2\varepsilon\|PB\|_2\|z\|_2.$$

Если $\|\delta(z)\|_2 \leq k\|z\|_2$, полагаем в предыдущем неравенстве $\varepsilon = 0$ и заключаем, что начало координат глобально экспоненциально устойчиво. Если $\varepsilon > 0$,

$$\dot{V} \leq -(1 - \theta_1)(1 - \theta_2)\|z\|_2^2, \quad \forall \|z\|_2 \geq \frac{2\varepsilon\|PB\|_2}{(1 - \theta_1)\theta_2} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon c_0,$$

где $\theta_2 \in (0, 1)$. Из теоремы 4.18 следует, что $z(t)$ глобально предельно ограничено величиной $\varepsilon c_0 \sqrt{\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)}$. \square

Из приведенного доказательства видно, что если оценка на $\delta(z)$ выполнена лишь в окрестности начала координат, то мы можем доказать лишь локальную версию этой леммы.

Пример 13.18. Рассмотрим уравнение маятника

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1 + \delta_1) - bx_2 + cu, \end{aligned}$$

где $x_1 = \theta - \delta_1$, $x_2 = \dot{\theta}$ и $u = T$ — вращающий момент, рассматриваемый в качестве управления. Цель состоит в стабилизации угла наклона

маятника $\theta = \delta_1$. Линеаризующая и стабилизирующая обратная связь имеет вид

$$u = \left(\frac{a}{c}\right) \sin(x_1 + \delta_1) - \left(\frac{1}{c}\right) (k_1 x_1 + k_2 x_2),$$

где k_1 и k_2 выбраны так, чтобы матрица

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -(k_2 + b) \end{bmatrix}$$

была гурвицевой. Предположим, что вследствие неопределенности в задании параметров a и c управление реализуется в виде

$$u = \left(\frac{\hat{a}}{\hat{c}}\right) \sin(x_1 + \delta_1) - \left(\frac{1}{\hat{c}}\right) (k_1 x_1 + k_2 x_2),$$

где \hat{a} и \hat{c} — оценки a и c . Замкнутая система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_1 - (k_2 + b)x_2 + \delta(x), \end{aligned}$$

где

$$\delta(x) = \left(\frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}}\right) \sin(x_1 + \delta_1) - \left(\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right) (k_1 x_1 + k_2 x_2).$$

Член ошибки $\delta(x)$ глобально удовлетворяет оценке $|\delta(x)| \leq k\|x\|_2 + \varepsilon$, где

$$k = \left|\frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}}\right| + \left|\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right| \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \varepsilon = \left|\frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}}\right| |\sin \delta_1|.$$

Константы k и ε являются мерой величин ошибок оценивания параметров a и c . Пусть матрица

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12}, \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

является решением уравнения Ляпунова $P(A - BK) + (A - BK)^T P = -I$. Если

$$k < \frac{1}{2\sqrt{p_{12}^2 + p_{22}^2}},$$

решения системы глобально предельно ограничены величиной, которая пропорциональна ε . Если $\sin \delta_1 = 0$, предыдущая оценка для k гарантирует глобальную экспоненциальную устойчивость начала координат. \triangle

Обратимся к рассмотрению более общего случая, когда замкнутая система имеет вид (13.44)–(13.45).

Лемма 13.4. Рассмотрим замкнутую систему (13.44)–(13.45), где $A - BK$ — гурвицева матрица.

- Если $\|\delta(z)\| \leq \varepsilon$ для всех z и система $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ устойчива по входу–состоянию, то состояние z глобально предельно ограничено \mathcal{K} -функцией от ε .
- Если $\|\delta(z)\| \leq k\|z\|$ в некоторой окрестности $z = 0$ при достаточно малой k и начало координат системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ экспоненциально устойчиво, то $z = 0$ является экспоненциально устойчивой точкой равновесия системы (13.44)–(13.45).

Доказательство: Пусть $V(\xi) = \xi^T P \xi$, где $P = P^T > 0$ – решение уравнения Ляпунова $P(A - BK) + (A - BK)^T P = -I$. Тогда

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \xi^T [P(A - BK) + (A - BK)^T P] \xi + 2\xi^T PB\delta(z) \\ &\leq -\|\xi\|_2^2 + 2\|PB\|_2\|\xi\|_2\|\delta(z)\|_2.\end{aligned}$$

Если $\|\delta(z)\|_2 \leq \varepsilon$, получаем

$$\dot{V} \leq -\|\xi\|_2^2 + 2\varepsilon\|PB\|_2\|\xi\|_2 \leq -\frac{1}{2}\|\xi\|_2^2, \quad \forall \|\xi\|_2 \geq 4\varepsilon\|PB\|_2.$$

Следовательно, с использованием теоремы 4.18 заключаем, что существуют конечный момент времени t_0 и положительная константа c , такие что

$$\|\xi(t)\|_2 \leq c\varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

С учетом устойчивости по входу–состоянию системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$, получаем

$$\begin{aligned}\|\eta(t)\|_2 &\leq \beta_0(\|\eta(t_0)\|_2, t - t_0) + \\ &+ \gamma_0(\sup_{t \geq t_0} \|\xi(t)\|_2) \leq \beta_0(\|\eta(t_0)\|_2, t - t_0) + \gamma_0(c\varepsilon),\end{aligned}$$

где β_0 и γ_0 – соответственно \mathcal{KL} - и \mathcal{K} -функции. Член $\beta_0(\|\eta(t_0)\|_2, t - t_0)$ удовлетворяет неравенству $\beta_0 \leq \varepsilon$ после некоторого конечного момента времени. Поэтому величина $\|\eta(t)\|_2$ предельно ограничена \mathcal{K} -функцией вида $c\varepsilon + \varepsilon + \gamma_0(c\varepsilon)$. Для доказательства второго пункта леммы заметим, что в соответствии с теоремой 4.14 в некоторой окрестности точки $\eta = 0$ существует функция Ляпунова $V_1(\eta)$, такая что

$$c_1\|\eta\|_2^2 \leq V_1(\eta) \leq c_2\|\eta\|_2^2, \quad \left\| \frac{\partial V_1}{\partial \eta} \right\|_2 \leq c_4\|\eta\|_2.$$

Используя $V(z) = bV_1(\eta) + \xi^T P \xi$, $b > 0$, в качестве функции Ляпунова для системы (13.44)–(13.45), получаем

$$\begin{aligned}\dot{V} &= b \frac{\partial V_1}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) + b \frac{\partial V_1}{\partial \eta} [f_0(\eta, \xi) - f_0(\eta, 0)] + \\ &+ \xi^T [P(A - BK) + (A - BK)^T P] \xi + 2\xi^T PB\delta(z) \leq \\ &\leq -bc_3\|\eta\|_2^2 + bc_4L\|\eta\|_2\|\xi\|_2 - \|\xi\|_2^2 + 2k\|PB\|_2\|\xi\|_2^2 + 2k\|PB\|_2\|\xi\|_2\|\eta\|_2 = \\ &= - \begin{bmatrix} \|\eta\|_2, \\ \|\xi\|_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} bc_3 & -(k\|PB\|_2 + bc_4L/2) \\ -(k\|PB\|_2 + bc_4L/2) & 1 - 2k\|PB\|_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\eta\|_2, \\ \|\xi\|_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} - \begin{bmatrix} \|\eta\|_2, \\ \|\xi\|_2 \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \|\eta\|_2, \\ \|\xi\|_2 \end{bmatrix},$$

где L – константа Липшица для функции f_0 по ξ . Полагая $b = k$, можно показать, что Q положительно определена при достаточно малой k . Поэтому начало координат экспоненциально устойчиво. \square

В упражнениях 13.22–13.24 представлены различные версии леммы 13.4. Если система $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ не является устойчивой по входу–состоянию, но начало координат системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ асимптотически устойчиво, то можно доказать локальную версию первого пункта леммы (см. упражнение 13.22). Если $f(\eta, \xi)$ глобально липшицева и начало координат системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ глобально экспоненциально устойчиво, то можно доказать глобальную версию второго пункта леммы (см. упражнение 13.23). Если начало координат системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ асимптотически, но не экспоненциально, устойчиво, то можно доказать асимптотическую устойчивость начала координат замкнутой системы в случае, если δ зависит только от η (см. упражнение 13.24).

Обратная связь $u = \alpha(x) - \beta(x)K\xi$ имеет линеаризующий компонент $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ и стабилизирующий компонент $v = -K\xi$. Представленный выше анализ показывает, что стабилизирующий компонент обеспечивает некоторую степень робастности в условиях неопределенности модели.¹⁾ В главе 14 будет показано, что стабилизирующий компонент может быть выбран так, что обеспечивается большая степень робастности в условиях предположения о принадлежности члена возмущения $B\delta(z)$ в (13.45) пространству значений столбцов входной матрицы B . О подобном возмущении говорят, что оно удовлетворяет *условию согласованности* (matching condition). Представленная в главе 14 метаодология может гарантировать робастность системы для любой $\delta(z)$ при условии, что верхняя граница значений δ известна.

Основой метода линеаризации систем обратной связью является идея исключения нелинейных членов. Однако при использовании этого метода наряду с вопросами, связанными с возможностью осуществления такой замены, наличием в системе различных неопределенностей, вычислительными трудностями нахождения этой замены и другими проблемами, следует рассмотреть и философский аспект задачи: Хороша ли сама по себе идея исключения из модели нелинейных членов? Наша мотивация для выполнения этого действия была чисто математической. Мы хотим линеаризовать систему для того, чтобы упростить ее анализ и использовать многочисленные результаты в области линейного управления. Однако с точки зрения конкретной реализации нелинейный член может быть «хорошим» или «плохим» и

¹⁾ Здесь не рассматривается другой тип неопределенности модели, соответствующий чувствительности относительной степени и свойства минимальной фазовости системы к параметрическим возмущениям. Эти вопросы исследуются в работах [92] и [169].

охарактеризовать его в этом смысле можно лишь с учетом специфики рассматриваемой задачи. В качестве иллюстрации этих вопросов рассмотрим два примера.

Пример 13.19. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x} = ax - bx^3 + u$$

где a и b — положительные константы. Линеаризующий и стабилизирующий закон управления может быть выбран в следующем виде:

$$u = -(k + a)x + bx^3, \quad k > 0.$$

Соответствующая замкнутая система имеет вид $\dot{x} = -kx$. Представленная обратная связь исключает нелинейный член $-bx^3$. Однако в действительности этот член представляет собой «нелинейное демпфирование» и в рассматриваемом примере обеспечивает ограниченность решений даже при отсутствии управления и несмотря на то, что начало координат неустойчиво. Зачем же нам исключать его? Если применить простое линейное управление

$$u = -(k + a)x, \quad k > 0,$$

мы получим замкнутую систему

$$\dot{x} = -kx - bx^3,$$

начало координат которой глобально экспоненциально устойчиво и ее траектории стремятся к началу координат даже быстрее, чем траектории замкнутой системы $\dot{x} = -kx$ в случае использования нелинейной версии закона управления. Более того, этот линейный закон управления более прост и его легче реализовать. \triangle

Пример 13.20. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) + u,\end{aligned}$$

где $h(0) = 0$ и $x_1 h'(x_1) > 0$ для всех $x_1 \neq 0$. Легко видеть, что система линеаризуема обратной связью и соответствующий закон стабилизации может быть выбран в виде

$$u = h(x_1) - (k_1 x_1 + k_2 x_2),$$

где k_1 и k_2 — выбраны так, чтобы собственные значения замкнутой системы располагались в левой полуплоскости комплексной плоскости. С другой стороны, с использованием результатов главы 7 о пассивных системах можно построить закон управления с обратной связью вида

$$u = -\sigma(x_2)$$

где σ — любая локально липшицева функция, удовлетворяющая $\sigma(0) = 0$ и $y\sigma(y) > 0$ при $y \neq 0$. Тогда замкнутая система будет пассивна и производная функции Ляпунова $V = \int_0^{x_1} h(z)dz + (1/2)x_2^2$ имеет вид

$$\dot{V} = -x_2\sigma(x_2).$$

Поскольку

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow h(x_1(t)) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0,$$

с использованием принципа инвариантности можно заключить, что начало координат асимптотически устойчиво. Кроме того, закон управления $u = -\sigma(x_2)$ имеет два преимущества по сравнению с представленной выше линеаризующей и стабилизирующей обратной связью. Во-первых, в этом пассивном законе управления не используется модель нелинейной функции h и, следовательно, он является робастным по отношению к неопределенности модели h . Во-вторых, возможность выбора функции σ может быть использована для улучшения рабочих характеристик закона управления. Например, можно обеспечить соблюдение ограничения $|u| \leq k$, если в качестве закона управления выбрать $u = -k \text{sat}(x_2)$. Однако, закон управления $u = -\sigma(x_2)$ не позволяет обеспечить требуемую скорость убывания $x(t)$. Линеаризация замкнутой системы в окрестности начала координат приводит к линейной системе с характеристическим уравнением

$$s^2 + \sigma'(0)s + h'(0) = 0.$$

Один из двух корней этого уравнения не может быть перемещен в полуплоскость, находящуюся левее прямой $\text{Re}[s] = -\sqrt{h'(0)}$. Законы управления с обратной связью, при построении которых используются свойства пассивности системы, будут рассмотрены в параграфе 14.4. \triangle

Эти два примера показывают, что существуют ситуации, когда нелинейности выполняют полезную роль и их исключение может быть нецелесообразным. При анализе системы следует предпринять все усилия для того, чтобы понять характер воздействия нелинейных членов на систему и на основании полученной информации принять решение об исключении или не исключении этих членов. Известно, что это непростая задача.

Вышеупомянутые вопросы робастности и эффективности, связанные с процедурой линеаризации системы обратной связью и построением соответствующего закона управления, не умаляют достоинств представленной в этой главе теории линеаризации. Она содержит набор полезных средств для характеристики класса нелинейных систем, структура которых позволяет разработать схемы управления с исключением имеющихся нелинейностей, или без такового. Понятия относительной степени и нуль-динамики нелинейных систем позволяют с единой точки зрения рассмотреть в терминах вход–выход структуру линейных и нелинейных систем и играть важную роль при обоб-

щении на случай нелинейных систем некоторых процедур построения обратной связи, успешно используемых для линейных систем. В этой связи в качестве примера можно упомянуть метод построения закона управления с сильной обратной связью. Если при преобразовании системы в нормальную форму нелинейные члены оказываются в полученном уравнении состояния в канале управления, возникает структура, удовлетворяющая условию согласованности. Для подобных систем в главе 14 будут разработаны несколько методик, позволяющих построить законы управления, обладающие робастными свойствами.

13.4.2. Задача слежения

Рассмотрим линеаризуемую по входу–выходу систему с одним входом и одним выходом, представленную в нормальной форме (13.16)–(13.18):

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi), \\ \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)], \\ y &= C_c \xi.\end{aligned}$$

Не умоляя общности, будем предполагать, что $f_0(0, 0) = 0$. Задача состоит в разработке закона управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающего асимптотическое слежение по выходу y некоторого командного сигнала. В случае, когда система имеет относительную степень $\rho = n$, она не имеет нетривиальной нуль-динамики. При этом переменная η и соответствующее уравнение в модели состояния отсутствуют, но все остальные результаты для этой системы остаются верными. Мы будем предполагать, что

- функция $r(t)$ и ее производные до $r^{(\rho)}(t)$ включительно ограничены для всех $t \geq 0$ и производная ρ -го порядка $r^{(\rho)}(t)$ является кусочно непрерывной функцией времени t ;
- сигналы $r, \dots, r^{(\rho)}$ доступны для измерения в режиме реального времени.

Командный сигнал $r(t)$ и его производные могут быть представлены в виде заданных функций времени или они могут быть выходами соответствующей эталонной модели с заданным входным сигналом $w(t)$. В последнем случае выполнение упомянутых выше условий на r может быть обеспечено путем выбора соответствующей эталонной модели. Например, для систем с относительной степенью, равной двум, в качестве эталонной модели можно взять линейную независящую от времени систему второго порядка, представленную передаточной функцией

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

где положительные константы ζ и ω_n выбраны так, чтобы для заданного входного сигнала $w(t)$ выходом этой модели являлся командный сигнал

$r(t)$. Сигнал $r(t)$ может генерироваться в режиме реального времени на выходе модели состояния

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\omega_n^2 y_1 - 2\zeta\omega_n y_2 + \omega_n^2 w, \\ r &= y_1.\end{aligned}$$

Поэтому можно считать, что $r(t)$, $\dot{r}(t)$ и $\ddot{r}(t)$ доступны в режиме реального времени. Если $w(t)$ является кусочно-непрерывной ограниченной функцией времени t , то $r(t)$, $\dot{r}(t)$ и $\ddot{r}(t)$ будут удовлетворять сформулированным выше предположениям.

Пусть

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r^{(\rho-1)} \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} \xi_1 - r \\ \vdots \\ \xi_\rho - r^{(\rho-1)} \end{bmatrix} = \xi - \mathcal{R}.$$

Замена переменных $e = \xi - \mathcal{R}$ приводит к получению системы

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, e + \mathcal{R}), \\ \dot{e} &= A_c e + B_c \{\gamma(x)[u - \alpha(x)] - r^{(\rho)}\}.\end{aligned}$$

Замена обратной связи по состоянию

$$u = \alpha(x) + \beta(x)[v + r^{(\rho)}],$$

где $\beta(x) = 1/\gamma(x)$, приводит нормальную форму к каскадному представлению

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, e + \mathcal{R}), \\ \dot{e} &= A_c e + B_c v.\end{aligned}$$

Поставленная цель управления может быть достигнута с использованием стабилизирующего закона управления для второго уравнения, обеспечивающего кроме того ограниченность η для всех $t \geq 0$. При $v = -Ke$, где $A_c - B_c K$ — гурвицева матрица, обратная связь по состоянию для всей системы имеет вид¹⁾

$$u = \alpha(x) + \beta(x) \left\{ -K[T_2(x) - \mathcal{R}] + r^{(\rho)} \right\}.$$

Тогда замкнутая система может быть записана следующим образом:

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, e + \mathcal{R}), \tag{13.47}$$

$$\dot{e} = (A_c - B_c K)e. \tag{13.48}$$

¹⁾ Так же как и в параграфе 13.2, отображение T_2 соответствует последним ρ компонентам диффеоморфизма $T(x)$, преобразующего систему к нормальной форме.

В случае минимально-фазовой системы начало координат уравнения $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ асимптотически устойчиво. Из обратной теоремы Ляпунова 4.16 и теоремы 4.18 следует, что при достаточно малых $e(0)$, $\eta(0)$ и $\mathcal{R}(t)$ состояние $\eta(t)$ будет ограничено для всех $t \geq 0$. Таким образом, обратная связь по состоянию (13.47) представляет собой локальное решение задачи слежения. При попытке обеспечить применимость полученного результата в случае задачи глобального слежения для любой ограниченной функции $\mathcal{R}(t)$, мы сталкиваемся с теми же трудностями, что возникали при решении задачи глобальной стабилизации. Достаточным условием разрешимости задачи глобального слежения является устойчивость по входу–состоянию системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$.

Пример 13.21. Рассмотрим уравнение маятника

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - bx_2 + cu, \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

Система имеет относительную степень, равную двум в R^2 и уже представлена в нормальной форме. Она не имеет нетривиальной нульдинамики и по умолчанию является минимально-фазовой. Рассматривается задача слежения, т. е. цель управления состоит том, чтобы на выходе системы y был некоторый командный сигнал $r(t)$. При этом необходимо обеспечить ограниченность производных $\dot{r}(t)$ и $\ddot{r}(t)$. Положив

$$e_1 = x_1 - r, \quad e_2 = x_2 - \dot{r}$$

получаем

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -a \sin x_1 - bx_2 + cu - \ddot{r}.\end{aligned}$$

В этом случае обратная связь по состоянию (13.47) принимает следующий вид

$$u = \frac{1}{c}[a \sin x_1 + bx_2 + \ddot{r} - k_1 e_1 - k_2 e_2],$$

где вектор $K = [k_1, k_2]$ выбран таким образом, чтобы собственные значения матрицы $A_c - B_c K$ располагались в левой полуплоскости комплексной плоскости. Поскольку все предположения выполнены глобально, этот закон управления представляет собой решение задачи глобального слежения. На рисунке 13.2 показан переходный процесс в системе при $a = c = 10$, $b = 1$, $k_1 = 400$ и $k_2 = 20$ для некоторого командного сигнала. Непрерывная линия соответствует командному сигналу и выходному сигналу вnominalном случае — они совпадают. Легко видеть, что слежение обеспечивается не только асимптотически, но и для всех t , т. к. $x(0) = \mathcal{R}(0)$. Если $x(0) \neq \mathcal{R}(0)$, обеспечивается асимптотическое слежение (пунктирная линия). Наконец линия, показанная точками, соответствует ситуации, когда в системе имеются

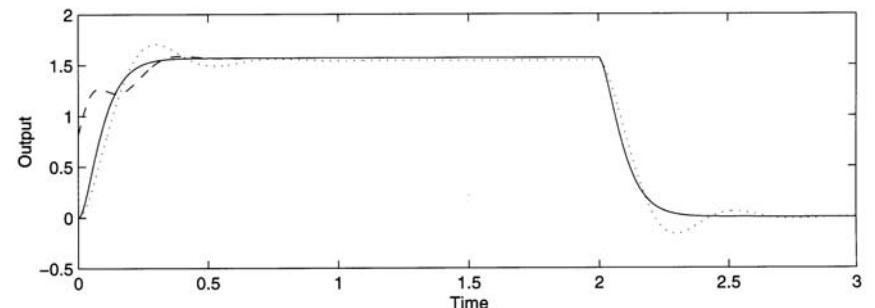


Рис. 13.2. Компьютерное моделирование системы слежения из примера 13.21 (output — выход, time — время).

параметрические возмущения $b = 0.5$ и $c = 5$, т. е. когда масса увеличена вдвое. \triangle

Во многих задачах управления имеется возможность выбора командного сигнала r . Например, одной из типичных задач управления в робототехнике является перемещение схвата манипулятора из начальной точки в заданную за определенное время. На первом этапе решения этой задачи выполняется планирование траектории между этими двумя точками, удовлетворяющей некоторым ограничениям, обусловленным наличием препятствий. Затем для построенной траектории движения определяются скорости и ускорения подвижных частей манипулятора в виде функций времени. В результате этой предварительной операции получается командный сигнал, который должен быть отслежен системой управления по выходу.¹⁾ Свобода в выборе командного сигнала может быть использована для улучшения характеристик системы, особенно в случае наличия ограничений на значения управляющего сигнала. Это иллюстрируется следующим примером.

Пример 13.22. Рассмотрим снова уравнение маятника с номинальными параметрами $a = c = 10$ и $b = 1$. Предположим, что неуправляемый маятник находится в точке равновесия $x = 0$ и требуется перевести его в новую точку равновесия $x_1 = \pi/2$, $x_2 = 0$. В качестве командного сигнала r возьмем выход передаточной функции второго порядка $1/(\tau s + 1)^2$, входом которой является ступенчатая функция w , соответствующая поставленной цели управления — изменению угла наклона до величины $\pi/2$. Закон управления, являющийся решением задачи слежения, имеет вид

$$u = 0.1(10 \sin x_1 + x_2 + \ddot{r} - k_1 e_1 - k_2 e_2),$$

где $k_1 = 400$ и $k_2 = 20$. Выбрав нулевые начальные условия для эталонной модели, получаем для этого случая, что ошибка слежения $e(t) =$

¹⁾ Задача планирования траектории рассмотрена в работе [171].

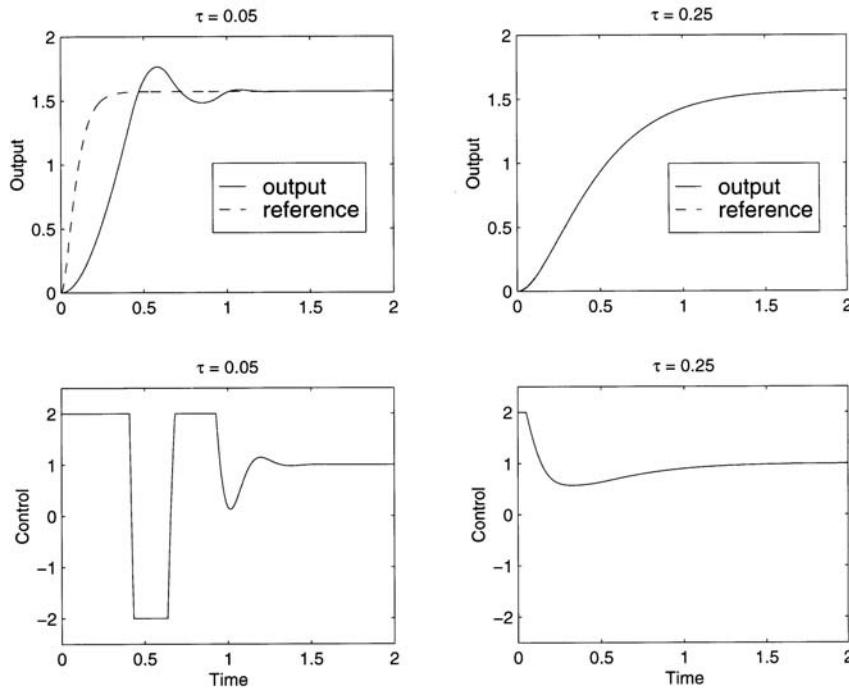


Рис. 13.3. Компьютерное моделирование системы слежения из примера 13.22 (output — выход, reference — командный сигнал, time — время)

$= x(t) - \mathcal{R}(t)$ тождественно равна нулю и движение маятника отслеживает желаемый командный сигнал для всех t . Выбор постоянной времени τ определяет скорость движения из начального положения в конечное. В условиях отсутствия ограничений на величину управляющего сигнала u можно было бы выбрать произвольно малую τ и обеспечить произвольно быстрый переход из $x_1 = 0$ в $x_1 = \pi/2$. Однако следует учитывать, что управляющий сигнал u на практике представляет собой врачающий момент на оси двигателя и эта величина не может быть сколь угодно большой. Это обстоятельство обуславливает ограничение на скорость вращения маятника. Выбрав τ так, чтобы эта величина была сопоставима с постоянной времени двигателя, можно обеспечить лучшие характеристики переходного процесса. На рисунке 13.3 показаны два случая, соответствующие различному выбору τ при наличии ограничения на управляющий сигнал $|u| \leq 2$. При $\tau = 0.05$ с выход $y(t)$ отклоняется от командного сигнала $r(t)$, что указывает на выход величины управляющего сигнала за переделы эксплуатационных характеристик используемого двигателя. При $\tau = 0.25$ с обеспечиваются приемлемые характеристики процесса отслеживания командного сигнала. В обоих случаях не удалось обеспечить длительность пере-

ходного процесса менее 1.2 секунд, но при $\tau = 0.25$ удалось избежать перерегулирования, имевшего место при $\tau = 0.05$. \triangle

13.5. Упражнения

13.1 Рассмотрим модель третьего порядка синхронного генератора, соединенного с бесконечной электрической шиной (см. упражнение 1.8). Рассмотрим два возможных выбора выхода системы:

$$(1) \quad y = \delta; \quad (2) \quad y = \delta + \gamma \dot{\delta}, \gamma \neq 0$$

В каждом из этих двух случаев определите относительную степень системы и преобразуйте эту систему в нормальную форму. Укажите область определения этого преобразования. В случае возможности определения нуль-динамики ответьте на вопрос о минимальной фазовости системы.

13.2 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 x_3 - x_2 + u, \quad \dot{x}_3 = -x_1 + u, \quad y = x_3$$

- (a) Является ли эта система линеаризуемой по входу–выходу?
- (b) Если да, преобразуйте ее в нормальную форму и укажите область определения соответствующего преобразования.
- (c) Является ли эта система минимально-фазовой?

13.3 Рассмотрим обратный маятник из упражнения 1.15 и пусть в качестве выхода системы выбран угол θ . Является ли эта система линеаризуемой по входу–выходу? Является ли эта система минимально-фазовой?

13.4 Рассмотрим систему из примера 12.6. Является ли эта система линеаризуемой по входу–выходу? Является ли эта система минимально-фазовой?

13.5 Рассмотрим дифференциальные уравнения в частных производных (13.26) из примера 13.8. Предположим, что $q(x)$ не зависит от ζ_m и ξ_n . Покажите, что $\phi_i = \zeta_i$ при $1 \leq i \leq m-1$ и $\phi_m = \zeta_m - \xi_n/q(x)$ удовлетворяют указанным дифференциальным уравнениям в частных производных.

13.6 Покажите, что уравнение состояния из упражнения 6.11 линеаризуемо обратной связью.

13.7 Покажите, что уравнение состояния для m -звенного манипулятора из упражнения 1.4 линеаризуемо обратной связью.

13.8 Докажите тождество Якоби

$$L_{[f,g]} h(x) = L_f L_g h(x) - L_g L_f h(x),$$

где f и g — векторные поля и h — вещественная функция.

13.9 Пусть Δ — невырожденное распределение на D с генераторами f_1, \dots, f_r . Покажите, что Δ инволютивно, если и только если $[f_i, f_j] \in \Delta, \forall 1 \leq i, j \leq r$.

13.10 Пусть

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_1, \\ 1, \\ 0, \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{bmatrix} -e^{x_2}, \\ 0, \\ 0, \\ 0 \end{bmatrix},$$

$D = R^4$ и $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$. Покажите, что Δ инволютивно.

13.11 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 3x_1^2 x_2 + x_1 + u, \quad y = -x_1^3 + x_2.$$

- (a) Является ли эта система линеаризуемой по входу–выходу?
- (b) Если да, преобразуйте ее в нормальную форму и укажите область определения соответствующего преобразования.
- (c) Является ли эта система минимально-фазовой?
- (d) Является ли эта система линеаризуемой обратной связью?
- (e) Если да, найдите замены обратной связи и переменных, обеспечивающие линеаризацию уравнения состояния.

13.12 Выполните предыдущее упражнение для системы

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = \delta(x) + u, \quad y = x_1 + x_2,$$

где $\delta(x)$ — локально липшицева функция x .

13.13 Модель мобильного робота (или тягача с полуприцепом) может быть представлена следующим уравнением состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \operatorname{tg}(x_3), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\operatorname{tg}(x_2)}{a \cos(x_3)} + \frac{1}{b \cos(x_2) \cos(x_3)} \operatorname{tg}(u), \\ \dot{x}_3 &= \frac{\operatorname{tg}(x_2)}{a \cos(x_3)}, \end{aligned}$$

где a и b — положительные константы. Покажите, что система линеаризуема обратной связью и укажите область определения соответствующего преобразования.

13.14 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 x_3 - x_2 + u, \quad \dot{x}_3 = -x_1 + u.$$

- (a) Является ли эта система линеаризуемой обратной связью?
- (b) Если да, найдите замены обратной связи и переменных, обеспечивающие линеаризацию уравнения состояния.

13.15 Докажите, что отображение $z = T(x)$ в примере 13.15 является диффеоморфизмом на D_0 и что уравнение состояния в z -координатах хорошо определено на $D_z = T(D_0)$.

13.16 Рассмотрим маятник из примера 12.2 с численными параметрами, приведенными в упражнении 12.1. Найдите стабилизирующий закон

управления с обратной связью по состоянию, используя метод линеаризации системы обратной связью. Коэффициенты обратной связи должны быть выбраны так, чтобы собственные значения замкнутой системы располагались в местах, определенных в упражнении 12.1. Сравните характеристики полученной замкнутой системы с характеристиками соответствующей системы из упражнения 12.1.

13.17 Покажите, что система

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1 x_3 + u, \quad \dot{x}_3 = x_1 + x_1 x_2 - 2x_3$$

является линеаризуемой обратной связью и найдите закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат.

13.18 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a \sin x_1 - bu \cos x_1,$$

где a и b — положительные константы.

- (a) Покажите, что система является линеаризуемой обратной связью.
- (b) Используя метод линеаризации системы обратной связью, найдите закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий стабилизацию системы в точке $x_1 = \theta$, где $0 \leq \theta < \pi/2$. Можно ли сделать эту точку равновесия глобально асимптотически устойчивой?

13.19 Рассмотрим манипулятор из примера 13.14. Предположим, что точные значения параметров a , b , c и d неизвестны, но имеется возможность получить их оценки \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} и \hat{d} . Найдите линеаризующий и стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию в терминах \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} и \hat{d} и представьте замкнутую систему в виде возмущения номинальной линейной системы.

13.20 Рассмотрим специальный случай системы (13.37)–(13.38), где $f_0(\eta, \xi)$ зависит лишь от ξ_1 и пара $(A, B) = (A_c, B_c)$ управляема, представлена в канонической форме и описывает цепь из ρ интеграторов. Такое представление системы называется специальной нормальной формой. Предположим, что начало координат системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ глобально асимптотически устойчиво и существует радиально неограниченная функция Ляпунова $V_0(\eta)$, такая что

$$\frac{\partial V_0}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) \leq -W(\eta)$$

для всех η , где $W(\eta)$ — положительно определенная функция.

- (a) Покажите, что замена обратной связи $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, где $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$ и замена переменных

$$z_1 = \xi_1, \quad z_2 = \varepsilon \xi_2, \quad \dots, \quad z_\rho = \varepsilon^{\rho-1} \xi_\rho, \quad w = \varepsilon^\rho v$$

приводит систему к виду

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, z_1), \quad \varepsilon \dot{z} = A_c z + B_c w.$$

- (b) Пусть K выбрана так, что матрица $A_c - B_c K$ является гурвицевой; P — положительно определенное решение уравнения Ляпунова $P(A_c - B_c K) + (A_c - B_c K)^T P = -I$. Положив $w = -Kz$ и используя $V(\eta, z) = V_0(\eta) + \sqrt{z^T P z}$ в качестве функции Ляпунова для замкнутой системы, покажите, что при достаточно малой ε начало координат $(\eta = 0, z = 0)$ асимптотически устойчиво и множество $\{V(\eta, z) \leq c\}$, где $c > 0$ — произвольная константа, принадлежит области притяжения.
- (c) Покажите, что этот закон управления с обратной связью обеспечивает полуглобальную стабилизацию, т. е. начальные состояния (η_0, ξ_0) , принадлежащие любому компактному подмножеству в R^n , могут быть включены в область притяжения.
- (d) С учетом результатов примера 13.17 исследуйте вопрос о возникновении при переходном процессе в замкнутой системе явления образования пиков (резких максимумов). Если это явление действительно имеет место, объясните почему тем не менее оказывается возможным обеспечить полуглобальную стабилизацию, несмотря на наличие этих пиков в переходном процессе.

13.21 Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1 x_2 - x_2^2 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - x_2^2 + u, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_1 x_2 - x_2^2 - (x_3 - x_1)^3 + u, \\ y &= x_1 - x_2.\end{aligned}$$

- (a) Покажите, что система может быть представлена в глобально определенной специальной нормальной форме.
- (b) Покажите, что начало координат нуль-динамики глобально асимптотически устойчиво.
- (c) Найдите закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий полуглобальную стабилизацию системы.

Указание: См. упражнение 13.20.

- 13.22** Рассмотрим систему (13.44)–(13.45), где $A - BK$ — гурвицева матрица, начало координат системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ асимптотически устойчиво и $\|\delta(z)\| \leq \varepsilon$. Покажите, что существует окрестность D точки $z = 0$ и константа $\varepsilon^* > 0$, такие что для любых $z(0) \in D$ и $\varepsilon \leq \varepsilon^*$ состояние z предельно ограничено некоторой \mathcal{K} -функцией от ε .

- 13.23** Рассмотрим систему (13.44)–(13.45), где $A - BK$ — гурвицева матрица, начало координат системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ глобально экспоненциально устойчиво, f_0 — глобально липшицева и $\|\delta\| \leq k\|z\|$ для всех

з. Покажите, что для достаточно малой k начало координат $z = 0$ глобально экспоненциально устойчиво.

- 13.24** Рассмотрим систему (13.44)–(13.45), где $A - BK$ — гурвицева матрица, начало координат системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ асимптотически устойчиво и соответствующая функция Ляпунова $V_0(\eta)$ такова, что $[\partial V_0 / \partial \eta] f_0(\eta, 0) \leq -W(\eta)$, где $W(\eta)$ — некоторая положительно определенная функция. Предположим, что $\|\delta\| \leq k[\|\xi\| + W(\eta)]$. Используя композитную функцию Ляпунова $V = V_0(\eta) + \lambda \sqrt{\xi^T P \xi}$, где P — решение уравнения $P(A - BK) + (A - BK)^T P = -I$, покажите, что при достаточно малой k начало координат $z = 0$ асимптотически устойчиво.

- 13.25** Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + 2x_1^2, \quad \dot{x}_2 = x_3 + u, \quad \dot{x}_3 = x_1 - x_3, \quad y = x_1.$$

Найдите закон управления с обратной связью, обеспечивающий асимптотическое слежение по выходу y командного сигнала $r(t) = \sin t$.

- 13.26** Выполните предыдущее упражнение для системы

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 \sin x_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u, \quad y = x_1.$$

- 13.27** Модель системы магнитной подвески из упражнения 1.18 может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{k}{m} x_2 - \frac{L_0 a x_3^2}{2m(a+x_1)^2}, \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{L(x_1)} \left[-R x_3 + \frac{L_0 a x_2 x_3}{(a+x_1)^2} + u \right],\end{aligned}$$

где $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = i$ и $u = v$. Используйте следующие численные данные: $m = 0.1$ кг, $k = 0.001$ Н/м·с, $g = 9.81$ м/с², $a = 0.05$ м, $L_0 = 0.01$ Гн, $L_1 = 0.02$ Гн и $R = 1$ Ом.

- (a) Покажите, что система является линеаризуемой обратной связью.
- (b) Используя метод линеаризации системы обратной связью, найдите закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий стабилизацию шара в положении $y = 0.05$ м. Выполните пункты (d) и (e) упражнения 12.8 и сравните характеристики этого регулятора с характеристиками регулятора, построенного в пункте (c) этого упражнения.
- (c) Покажите, что если в качестве выхода системы выбрать положение шара y , то система может быть линеаризована по входу–выходу.
- (d) Используя метод линеаризации системы обратной связью, найдите закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий асимптотическое отслеживание выходом y командного сигнала $r(t) = 0.05 + 0.01 \sin t$. Выполните компьютерное моделирование замкнутой системы.

13.28 Модель электродвигателя постоянного тока описана в упражнении 1.17. В случае, когда возбуждение обеспечивается постоянным током, проходящим через обмотку статора, сила этого тока может рассматриваться в качестве управления и соответствующая модель системы принимает вид системы второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\theta_1 x_1 - \theta_2 x_2 u + \theta_3, \\ \dot{x}_2 &= -\theta_4 x_2 + \theta_5 x_1 u, \\ y &= x_2,\end{aligned}$$

где x_1 — ток в обмотке якоря, x_2 — скорость вращения, u — ток в обмотке статора и θ_i , $i = 1, \dots, 5$ — положительные константы. Постройте закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий асимптотическое отслеживание выходом y зависящего от времени командного сигнала $r(t)$, такого что $r(t)$ и $\dot{r}(t)$ — непрерывные и ограниченные для всех $t \geq 0$ функции. Предположим, что эксплуатация двигателя возможна при выполнении ограничения $x_1 > \theta_3/2\theta_1$.

(a) Покажите, что система является линеаризуемой по входу-выходу и имеет относительную степень, равную единице.
 (b) Покажите, что система является минимально-фазовой.
 (c) Используя метод линеаризации системы обратной связью, найдите закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий отслеживание командного сигнала с указанными свойствами.
 (d) Используя компьютерное моделирование, исследуйте характеристики замкнутой системы в случае, когда r представляет собой выход фильтра первого порядка $1/(ts + 1)$, входом которого является ступенчатая функция w . Постоянная времени τ может выбираться с целью подстройки скорости изменения r . При выполнении компьютерного моделирования используйте начальные условия $x_1(0) = \theta_3/\theta_1$ и $x_2(0) = 0$ и численные данные $\theta_1 = 60$, $\theta_2 = 0.5$, $\theta_3 = 40$, $\theta_4 = 6$ и $\theta_5 = 4 \times 10^4$. В качестве ступенчатой функции w выберите одиночный скачок от 0 до 100 в момент времени $t = 1$. Кроме того, добавьте в канал входа модели функцию насыщения, обеспечивающую ограничение управляющего входного сигнала в пределах ± 0.05 .

- (i) Измените τ и параметры регулятора так, чтобы переходный процесс закончился к моменту времени 0.5.
- (ii) Измените τ и параметры регулятора так, чтобы переходный процесс закончился к моменту времени 0.1.
- (iii) Вернитесь к параметрам, выбранным для случая (i), и исследуйте характеристики системы при изменении момента инерции ротора в пределах $\pm 50\%$.

- (iv) Можно ли выбрать параметры регулятора так, чтобы улучшить свойства робастности системы по отношению к параметрическим возмущениям из предыдущего пункта?

Глава 14

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ

Построение нелинейного управления с обратной связью — это сложная задача, решение которой требует разработки различных систематических процедур, предназначенных для достижения тех или иных целей управления и позволяющих удовлетворить определенным техническим условиям на проектирование. Совершенно очевидно, что отдельно выбранная процедура не может быть успешно применена ко всем нелинейным системам. Также маловероятно, что в качестве теоретической основы структурной схемы построенного регулятора будет выступать лишь одно из средств построения нелинейной обратной связи. Для решения этой задачи исследователю требуется целый набор средств анализа и проектирования, покрывающий широкий класс ситуаций. При анализе конкретного приложения инженер должен выбрать и использовать тот метод, который представляется наиболее подходящим для данного случая. В предыдущих главах мы уже рассмотрели несколько подобных методов. В этой главе собраны вместе пять методов построения нелинейной обратной связи, которые, с одной стороны, достаточно просты для того, чтобы быть рассмотренными в учебной книге, и, с другой стороны, обладают достаточно большим практическим значением и поэтому могут быть успешно использованы в реальных задачах.¹⁾

В первых двух параграфах будет рассмотрено робастное управление для систем, удовлетворяющих условию согласованности, т. е. когда в уравнении состояния системы неопределенные члены и члены управления находятся в одном и том же месте. Рассмотренный в параграфе

14.1 закон управления в скользящем режиме обеспечивает достижение траекторий системы некоторого многообразия скольжения за конечное время и последующее их движение вдоль этого многообразия во все будущие моменты времени. Движение вдоль многообразия скольжения не зависит от неопределенностей, удовлетворяющих условию согласованности. Многообразие скольжения определяется с использованием модели редуцированного порядка и соответствует поставленной цели управления. В методе построения законов управления на основе теории Ляпунова, рассмотренного в параграфе 14.2, функция Ляпунова для номинальной системы используется для нахождения дополнительного компонента закона управления, обеспечивающего робастность этого закона по отношению к неопределенностям, удовлетворяющим условию согласованности. Законы управления, основанные на использовании этих двух методов — метода скользящего режима и метода ляпуновского синтеза, — представляют собой разрывные функции, что, вообще говоря, является недостатком, проявляющимся при наличии в системе задержек и немоделируемой высокочастотной динамики. Поэтому мы разработаем «непрерывные» версии этих законов управления. В параграфе 14.1 мы рассмотрим пример системы второго порядка, мотивирующий основные элементы метода скользящего режима, и после этого будут представлены основные результаты, касающиеся задач стабилизации, слежения и интегрального управления. В параграфе 14.2 рассматривается метод построения законов управления с использованием метода ляпуновского синтеза и показывается, как этот метод может быть использован для стабилизации системы. В заключении этого параграфа будет представлен метод нелинейного демпфирования, при использовании которого гарантируется ограниченность траекторий даже в случае, когда верхняя граница неопределенных параметров системы неизвестна.

Связанные с условием согласованности ограничения могут быть ослаблены с использованием метода бэкстеппинга (backstepping), рассмотрению которого посвящен параграф 14.3. Бэкстеппинг — это рекурсивная процедура, в которой совмещены задачи нахождения функции Ляпунова и соответствующего закона управления. Согласно этому методу, задача разработки закона управления для всей системы разбивается на последовательность соответствующих подзадач для подсистем меньшего порядка (или даже скалярных систем). Поскольку при анализе скалярных систем и систем малого порядка исследователь обладает большей свободой, метод бэкстеппинга часто позволяет сравнительно легко решить задачи стабилизации и слежения с использованием робастного управления в условиях менее ограничительных, чем в случае использования других методик.

Метод управления на основе пассивности основан на использовании свойства пассивности разомкнутой системы. Стабилизация пассивной системы в точке равновесия фактически равносильна введению в систему демпфирования. В параграфе 14.4 рассматривается основная идея

¹⁾ Другие средства построения нелинейных систем управления рассмотрены в работах [88], [89], [103], [124], [153], [167] и [172].

построения пассивного управления. Кроме того, описывается метод пассивизации системы, при использовании которого непассивная система преобразуется в пассивную посредством замены обратной связи.

Представленные в главах 12–14 методы построения законов управления заключались в нахождении обратной связи по состоянию. В параграфе 14.5 будут рассмотрены наблюдатели с сильной обратной связью, использование которых позволяет для класса нелинейных систем расширить сферу применения этих методов на случай построения обратной связи по выходу.¹⁾ Основная идея, лежащая в основе представленных в параграфе 14.5 результатов, заключается в том, что динамика системы с глобально ограниченной обратной связью по состоянию может быть воспроизведена с использованием обратной связи по выходу при условии, что коэффициент обратной связи наблюдателя достаточно большой.

14.1. Управление в скользящем режиме

14.1.1. Мотивирующий пример

Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= h(x) + g(x)u,\end{aligned}$$

где h и g — неизвестные нелинейные функции и $g(x) \geq g_0 > 0$ для всех x . Задача состоит в построении закона управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающего стабилизацию начала координат. Предположим, что известен закон управления, удерживающий траектории системы на многообразии (или поверхности) $s = a_1x_1 + x_2 = 0$. На этом многообразии движение определяется уравнением $\dot{x}_1 = -a_1x_1$. Выбор $a_1 > 0$ гарантирует стремление $x(t)$ к нулю при t , стремящемся к бесконечности. При этом скорость сходимости может управляться выбором значения a_1 . Движение на многообразии $s = 0$ не зависит от h и g . Как можно обеспечить приведение траектории системы на многообразие $s = 0$ и ее удержание на нем? Переменная s удовлетворяет уравнению

$$\dot{s} = a_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = a_1x_2 + h(x) + g(x)u.$$

Предположим, что h и g удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{a_1x_2 + h(x)}{g(x)} \right| \leq \varrho(x), \quad \forall x \in R^2$$

¹⁾ Другие методы построения обратной связи по выходу описаны в упражнениях 14.47–14.49.

для некоторой известной функции $\varrho(x)$. Используя $V = (1/2)s^2$ в качестве функции Ляпунова для системы $\dot{s} = a_1x_2 + h(x) + g(x)u$, получаем

$$\dot{V} = s\dot{s} = s[a_1x_2 + h(x)] + g(x)su \leq g(x)|s|\varrho(x) + g(x)su.$$

Полагая¹⁾

$$u = -\beta(x) \operatorname{sign}(s),$$

где $\beta(x) \geq \varrho(x) + \beta_0, \beta_0 > 0$ и

$$\operatorname{sign}(s) = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s = 0, \\ -1, & s < 0, \end{cases}$$

получаем

$$\dot{V} \leq g(x)|s|\varrho(x) - g(x)[\varrho(x) + \beta_0]s \operatorname{sign}(s) = -g(x)\beta_0|s| \leq -g_0\beta_0|s|.$$

Таким образом, функция $W = \sqrt{2V} = |s|$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$D^+W \leq -g_0\beta_0$$

и из леммы сравнения следует, что

$$W(s(t)) \leq W(s(0)) - g_0\beta_0 t.$$

Поэтому траектория системы достигает многообразия $s = 0$ за конечное время и, оказавшись на нем, не может его покинуть, что видно из неравенства $\dot{V} \leq -g_0\beta_0|s|$. Суммируя вышесказанное, можно заключить, что движение системы состоит из двух фаз: сначала траектория, начинаясь вне многообразия $s = 0$, движется по направлению к этому многообразию и достигает его за конечное время (*фаза достижения*), а затем наступает скользящий режим (*фаза скольжения*), в ходе которого движение осуществляется на многообразии $s = 0$ и динамика системы определяется моделью редуцированного порядка $\dot{x}_1 = -a_1x_1$. Фазовый портрет системы изображен на рисунке 14.1. Многообразие $s = 0$ называется *многообразием скольжения* и соответствующий закон управления $u = -\beta(x) \operatorname{sign}(s)$ называется *управлением в скользящем режиме*. Замечательной особенностью управления в скользящем режиме является то, что этот закон управления является робастным по отношению к h и g . Для его реализации необходимо знать лишь верхнюю границу $\varrho(x)$ и во время скользящего режима движение полностью не зависит от h и g .

¹⁾ Следует отметить, что нижеприведенный закон управления применяется лишь при $s \neq 0$, поскольку в идеальном скользящем режиме управление u не определено на поверхности скольжения $s = 0$. Альтернативно можно записать $u = -\beta(x) \operatorname{sign}(s)$ для всех s , если функция $\operatorname{sign}(s)$ не определена в $s = 0$. Это замечание остается справедливым на протяжении всей этой главы, в случаях, соответствующих идеальному скользящему режиму.

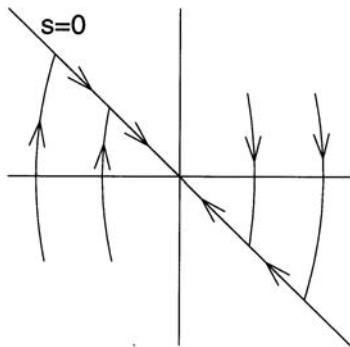


Рис. 14.1. Типичный фазовый портрет системы при использовании управления в скользящем режиме

Закон управления в скользящем режиме упрощается, если в рассматриваемой области функции h и g удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{a_1 x_2 + h(x)}{g(x)} \right| \leq k_1$$

для некоторой известной неотрицательной константы k_1 . В этом случае закон управления принимает вид

$$u = -k \operatorname{sign}(s), \quad k > k_1$$

и представляет собой простое реле. Однако в этом случае область притяжения будет конечной и ее оценка может быть получена следующим образом. При выполнении в множестве $\{|s| \leq c\}$ условия $s\dot{s} \leq 0$ обеспечивается положительная инвариантность этого множества. Из уравнения

$$\dot{x}_1 = x_2 = -a_1 x_1 + s$$

и с использованием функции $V_1 = (1/2)x_1^2$, получаем

$$\dot{V}_1 = x_1 \dot{x}_1 = -a_1 x_1^2 + x_1 s \leq -a_1 x_1^2 + |x_1|c \leq 0, \quad \forall |x_1| \geq \frac{c}{a_1}.$$

Тогда

$$|x_1(0)| \leq \frac{c}{a_1} \Rightarrow |x_1(t)| \leq \frac{c}{a_1}, \quad \forall t \geq 0$$

и множество

$$\Omega = \left\{ |x_1| \leq \frac{c}{a_1}, |s| \leq c \right\},$$

изображенное на рисунке 14.2, будет положительно инвариантным, если выполнено

$$\left| \frac{a_1 x_2 + h(x)}{g(x)} \right| \leq k_1, \quad \forall x \in \Omega.$$

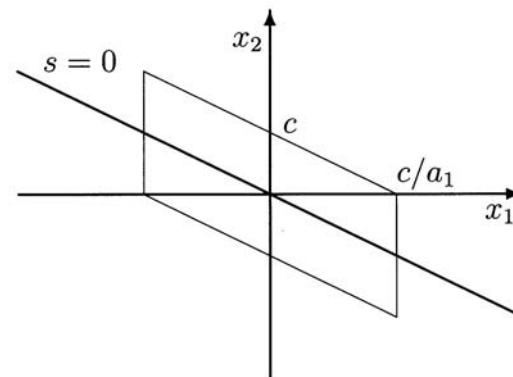


Рис. 14.2. Оценка области притяжения

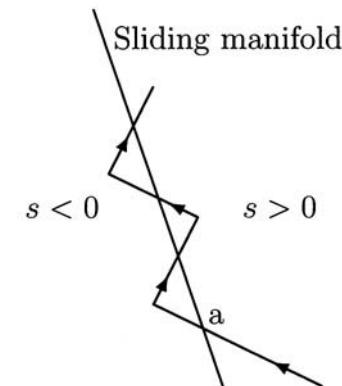


Рис. 14.3. Чаттер в системе, обусловленный задержками при переключении (sliding manifold — многообразие скольжения)

Более того, любая траектория, начинающаяся в Ω , стремится к началу координат при $t \rightarrow \infty$. При выборе достаточно большой константы c любое компактное множество на плоскости может быть включено в Ω . Поэтому, если константа k может быть выбрана произвольно большой, представленный выше закон управления может обеспечить полуглобальную стабилизацию.

Вследствие несовершенства устройств переключения и реле, в системах с управлением в скользящем режиме часто возникает биение (chattering — чаттер). На рисунке 14.3 показано, как наличие задержек может привести к возникновению чаттера. Траектория в области $s > 0$ движется по направлению к многообразию скольжения $s = 0$ и впервые достигает его в точке a . При идеально реализованном управлении в скользящем режиме эта траектория должна начинать с этой

точки двигаться вдоль многообразия скольжения. Однако на практике существует задержка между моментом изменения знака s и моментом, когда действительно происходит переключение режима управления. Во время этого периода задержки траектория пересекает многообразие и оказывается в области $s < 0$. При переключении режима управления траектория изменяет направление, снова направляется к многообразию скольжения и в очередной раз пересекает его. В результате повторения этого цикла траектория становится зигзагообразной (см. рисунок). Этот колебательный режим известен как чаттер. Это явление приводит к снижению точности управления, тепловым потерям в электрических сетях и повышенному износу подвижных механических частей механизмов. Оно также может привести к возникновению в системе немоделируемой высокочастотной динамики, которая может ухудшить ее характеристики или даже привести к неустойчивости.

Для лучшего понимания эффекта чаттера рассмотрим результаты компьютерного моделирования модели маятника

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(g_0/\ell) \sin(x_1 + \delta_1) - (k_0/m)x_2 + (1/m\ell^2)u, \\ u &= -k \operatorname{sign}(s) = -k \operatorname{sgn}(a_1 x_1 + x_2),\end{aligned}$$

где $x_1 = \theta - \delta_1$ и $x_2 = \dot{\theta}$. Задача состоит в стабилизации положения маятника в позиции $\delta_1 = \pi/2$. Константы m , ℓ , k_0 и g_0 представляют собой соответственно массу, длину подвеса, коэффициент трения и ускорение свободного падения. Положим $a_1 = 1$ и $k = 4$. Коэффициент усиления $k = 4$ выбирается так, чтобы было выполнено

$$\begin{aligned}\left| \frac{a_1 x_2 + h(x)}{g} \right| &= |\ell^2(m - k_0)x_2 - mg_0\ell \cos(x_1)| \leqslant \\ &\leqslant \ell^2|m - k_0|(2\pi) + mg_0\ell \leqslant 3.68,\end{aligned}$$

где оценка вычислена на множестве $\{|x_1| \leqslant \pi, |x_1 + x_2| \leqslant \pi\}$ при $0.05 \leqslant m \leqslant 0.2$, $0.9 \leqslant \ell \leqslant 1.1$ и $0 \leqslant k_0 \leqslant 0.05$. Моделирование выполнялось при $m = 0.1$, $\ell = 1$ и $k_0 = 0.02$. На рисунке 14.4 показаны результаты для идеального управления в скользящем режиме, а на рисунке 14.5 — для неидеального случая, когда переключение осуществляется с задержкой, обусловленной немоделируемой динамикой привода с передаточной функцией $1/(0.01s + 1)^2$.

Ниже будут предложены два подхода, позволяющие уменьшить влияние чаттера или полностью его исключить. Первый подход предполагает разделение управления на две составляющие — непрерывную и разрывную, соответствующую переключениям. Амплитуду последней необходимо уменьшить. Пусть $\hat{h}(x)$ и $\hat{g}(x)$ — номинальные модели функций $h(x)$ и $g(x)$, соответственно. Положив

$$u = -\frac{[a_1 x_2 + \hat{h}(x)]}{\hat{g}(x)} + v,$$

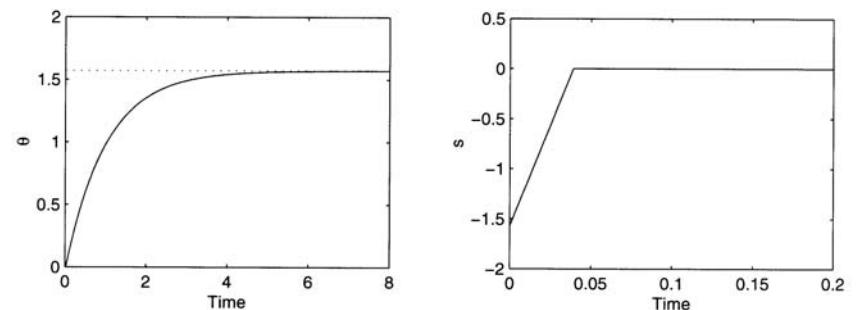


Рис. 14.4. Идеальное управление в скользящем режиме

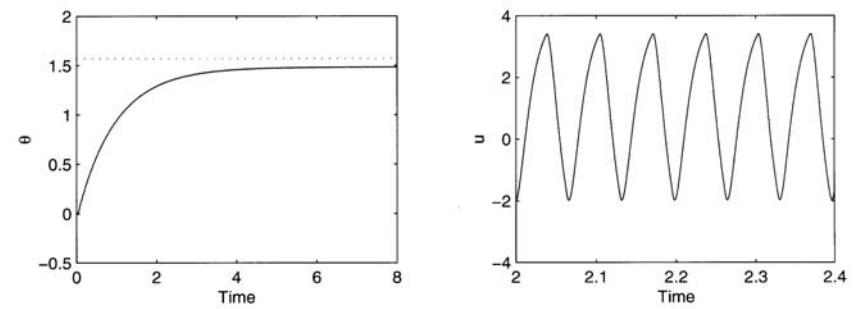


Рис. 14.5. Управление в скользящем режиме в условиях немоделируемой динамики привода

получаем

$$\dot{s} = a_1 \left[1 - \frac{g(x)}{\hat{g}(x)} \right] x_2 + h(x) - \frac{g(x)}{\hat{g}(x)} \hat{h}(x) + g(x)v \stackrel{\text{def}}{=} \delta(x) + g(x)v.$$

Если член возмущения $\delta(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{\delta(x)}{g(x)} \right| \leqslant \varrho(x),$$

в качестве закона управления можно положить

$$v = -\beta(x) \operatorname{sign}(s),$$

где $\beta(x) \geqslant \varrho(x) + \beta_0$. Поскольку ϱ — оценка сверху члена возмущения, очень вероятно, что эта величина должна быть меньше верхней границы всей функции. Следовательно, при использовании этого подхода можно ожидать, что амплитуда разрывной компоненты будет меньше. Например, возвращаясь к рассмотрению уравнения маятника и полагая $\hat{m} = 0.125$, $\hat{\ell} = 1$, $\hat{k}_0 = 0.025$, т. е. равными их номинальным значениям

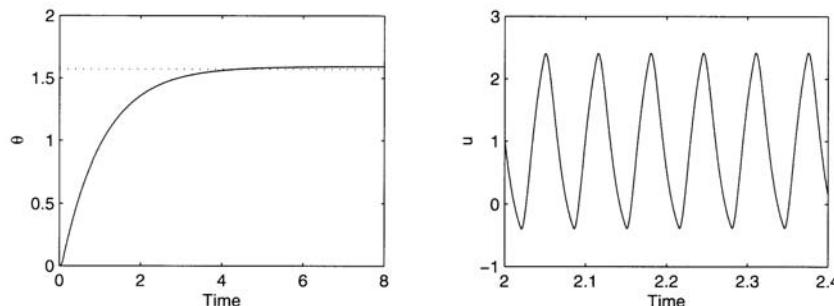


Рис. 14.6. Модифицированное управление в скользящем режиме в условиях немоделируемой динамики привода

m, ℓ, k_0 , получаем

$$\left| \frac{\delta(x)}{g} \right| = \left| (a_1 m \ell^2 - a_1 \hat{m} \hat{\ell}^2 - k_0 \ell^2 + \hat{k}_0 \hat{\ell}^2) x_2 - g_0 (m \ell - \hat{m} \hat{\ell}) \cos x_1 \right| \leq 1.83,$$

где оценка вычисляется на том же множестве, что и ранее. Тогда модифицированный закон управления в скользящем режиме принимает вид

$$u = -0.1x_2 + 1.2263 \cos x_1 - 2 \operatorname{sign}(s).$$

Легко видеть, что амплитуда составляющей переключений уменьшилась и стала равна не 4, как ранее, а 2. На рисунке 14.6 показаны результаты компьютерного моделирования системы с использованием модифицированного управления в условиях немоделируемой динамики привода. Отчетливо видно, что амплитуда чаттера уменьшилась.

Второй подход, используемый для исключения чаттера из динамики системы, заключается в замене функции знака на функцию насыщения с большим углом наклона линии переключения. В этом случае закон управления имеет вид

$$u = -\beta(x) \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right),$$

где $\operatorname{sat}(\cdot)$ — функция насыщения, определяемая равенством

$$\operatorname{sat}(y) = \begin{cases} y, & \text{если } |y| \leq 1, \\ \operatorname{sign}(y), & \text{если } |y| > 1 \end{cases}$$

и ε — некоторая положительная константа. Графики функций знака и насыщения показаны на рисунке 14.7. Угловой коэффициент линии переключения функции $\operatorname{sat}(s/\varepsilon)$ равен $1/\varepsilon$. Для хорошей аппроксимации требуется, чтобы константа ε была мала. В предельном случае $\varepsilon \rightarrow 0$ функция насыщения $\operatorname{sat}(s/\varepsilon)$ стремится к функции знака $\operatorname{sign}(s)$. При анализе характеристик «непрерывного» регулятора в скользящем режиме будем исследовать фазу достижения многообразия скольжения

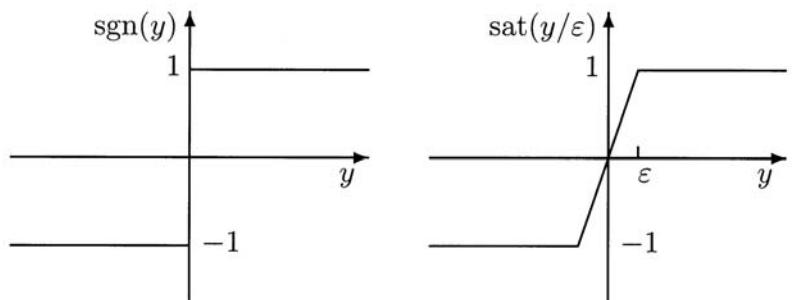


Рис. 14.7. Функция знака и ее аппроксимация функцией насыщения

с использованием функции $V = (1/2)s^2$. Ее производная удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} \leq -g_0 \beta_0 |s|$$

при $|s| \geq \varepsilon$, т. е. вне полосы $\{|s| \leq \varepsilon\}$. Поэтому при $|s(0)| > \varepsilon$ функция $|s(t)|$ будет строго убывающей до тех пор, пока траектория не достигнет за конечное время множества $\{|s| \leq \varepsilon\}$. После этого момента траектория будет двигаться внутри указанной полосы во все будущие моменты времени. В этом режиме динамика системы описывается уравнением

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 + s,$$

где $|s| \leq \varepsilon$ и производная функции $V_1 = (1/2)x_1^2$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_1 = -a_1 x_1^2 + x_1 s \leq -a_1 x_1^2 + |x_1| \varepsilon \leq -(1 - \theta_1) a_1 x_1^2, \quad \forall |x_1| \geq \frac{\varepsilon}{a_1 \theta_1},$$

где $0 < \theta_1 < 1$. Таким образом, траектория достигает множества $\Omega_\varepsilon = \{|x_1| \leq \varepsilon/(a_1 \theta_1), |s| \leq \varepsilon\}$ за конечное время. В общем случае стабилизация начала координат не обеспечивается, но гарантируется предельная ограниченность с предельной границей, значение которой может быть уменьшено путем уменьшения ε . Характер процессов внутри Ω_ε зависит от специфики рассматриваемой задачи. В качестве примера рассмотрим уравнение маятника. Внутри полосы $\{|s| \leq \varepsilon\}$ закон управления сводится к линейному управлению $u = -ks/\varepsilon$, в результате применения которого мы получаем замкнутую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(g_0/\ell) \sin(x_1 + \delta_1) - (k_0/m)x_2 - (k/m\ell^2\varepsilon)(a_1 x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Эта система имеет единственную точку равновесия $(\bar{x}_1, 0)$, где величина \bar{x}_1 удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon mg_0 \ell \sin(\bar{x}_1 + \delta_1) + ka_1 \bar{x}_1 = 0$$

и может быть аппроксимирована при малой ε следующим образом: $\bar{x}_1 \approx -(\varepsilon mg_0\ell/ka_1) \sin \delta_1$. Переместим точку равновесия в начало координат, используя замену переменных

$$y_1 = x_1 - \bar{x}_1, \quad y_2 = x_2.$$

В результате получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\sigma(y_1) - \left(\frac{k_0}{m} + \frac{k}{m\ell^2\varepsilon} \right) y_2, \end{aligned}$$

где

$$\sigma(y_1) = (g_0/\ell)[\sin(y_1 + \bar{x}_1 + \delta_1) - \sin(\bar{x}_1 + \delta_1)] + (ka_1/m\ell^2\varepsilon)y_1.$$

Используя

$$\tilde{V} = \int_0^{y_1} \sigma(s)ds + (1/2)y_2^2$$

в качестве функции Ляпунова, можно показать, что функция

$$\tilde{V} \geq -(g_0/2\ell)y_1^2 + (ka_1/2m\ell^2\varepsilon)y_1^2 + (1/2)y_2^2$$

положительно определена при $(k/\varepsilon) > (m\ell g_0/a_1)$ и ее производная удовлетворяет равенству

$$\dot{\tilde{V}} = - \left(\frac{k_0}{m} + \frac{k}{m\ell^2\varepsilon} \right) y_2^2.$$

Из принципа инвариантности следует, что точка равновесия $(\bar{x}_1, 0)$ является асимптотически устойчивой и притягивает любую траекторию в Ω_ε .

Для того, чтобы обеспечить большую точность регулирования, необходимо выбрать константу ε настолько малой, насколько это возможно. Однако следует иметь в виду, что при слишком малом значении ε и при наличии в системе задержек или немоделируемой динамики может возникнуть чаттер. На рисунке 14.8 показаны результаты моделирования движения маятника для случая «непрерывного» управления в скользящем режиме при двух различных значениях ε . На рисунке 14.9 показаны результаты моделирования этой системы при наличии немоделируемой динамики привода с передаточной функцией $1/(0.01s + 1)^2$. Интересно отметить, что для идеального регулятора уменьшение ε приводит к увеличению точности регулирования, но при наличии задержек этот эффект не наблюдается вследствие возникновения чаттера.

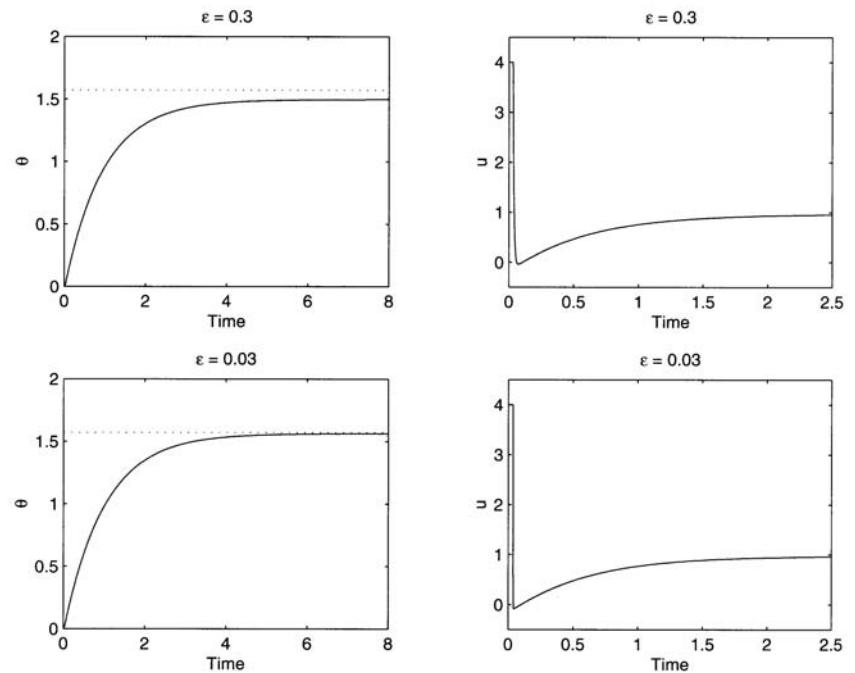


Рис. 14.8. «Непрерывное» управление в скользящем режиме

В некоторых случаях оказывается возможным обеспечить стабилизацию начала координат без сильного уменьшения ε . Подобная ситуация возникает например при $h(0) = 0$, когда поведение системы внутри полосы описывается уравнением состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= h(x) - \left[\frac{g(x)k}{\varepsilon} \right] (a_1x_1 + x_2) \end{aligned}$$

и начало координат является точкой равновесия. Необходимо выбрать ε достаточно малой, чтобы обеспечить стабилизацию точки начала координат и сделать Ω_ε подмножеством ее области притяжения. В случае уравнения маятника с $\delta_1 = \pi$ применение вышеприведенного подхода для анализа устойчивости системы приводит к заключению, что эта цель может быть достигнута, если $k/\varepsilon > mg_0\ell/a_1$. При $\ell \leq 1.1$, $m \leq 0.2$, $k = 4$ и $a_1 = 1$ следует выбрать $\varepsilon < 1.8534$. На рисунке 14.10 показаны результаты компьютерного моделирования для случая $\varepsilon = 1$.

Если угол δ_1 отличается от 0 или π (т.е. не соответствует точкам равновесия разомкнутой системы), система стабилизируется в точке равновесия, отличной от начала координат с ошибкой в установив-

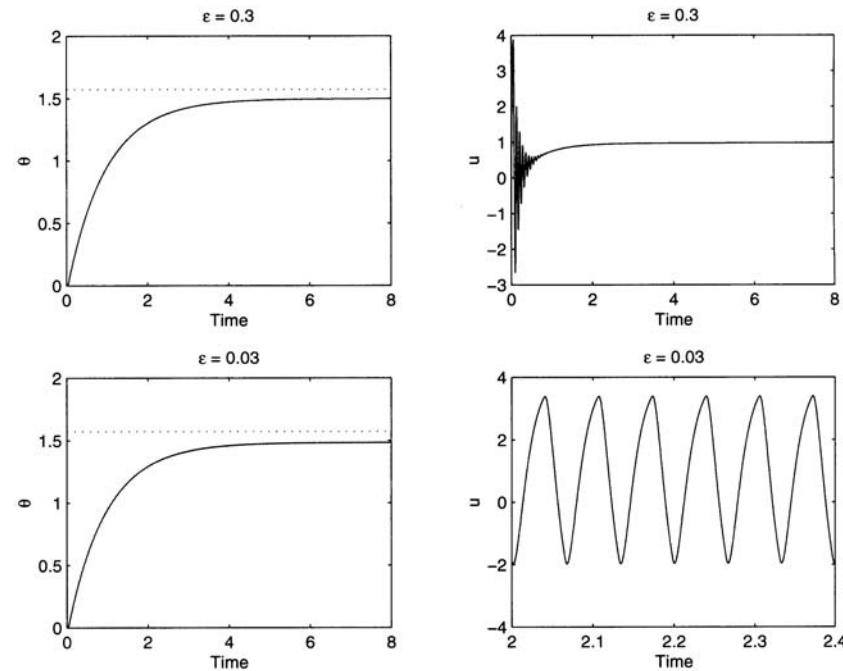


Рис. 14.9. «Непрерывное» управление в скользящем режиме при наличии немоделируемой динамики привода

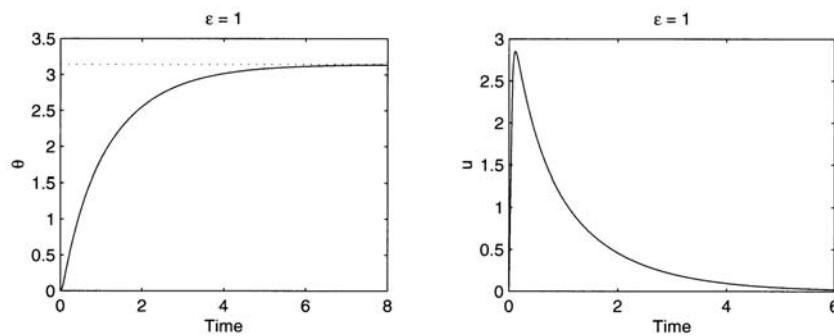


Рис. 14.10. «Непрерывное» управление в скользящем режиме при $\delta_1 = \pi$

шемся режиме, приближенное значение которой было получено ранее: $(\varepsilon m g_0 \ell / k a_1) \sin \delta_1$. Для того, чтобы получить в установившемся режиме нулевую ошибку, следует использовать закон управления с интегральным действием. Пусть $x_0 = \int x_1$. Тогда расширенная система имеет вид

$$\dot{x}_0 = x_1,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(g_0/\ell) \sin(x_1 + \delta_1) - (k_0/m)x_2 + (1/m\ell^2)u.\end{aligned}$$

Положим $s = a_0x_0 + a_1x_1 + x_2$, где коэффициенты таковы, что матрица

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

является гурвицевой. Если в рассматриваемой области выполнено

$$m\ell^2|a_0x_1 + a_1x_2 - (g_0/\ell) \sin(x_1 + \delta_1) - (k_0/m)x_2| \leq k_1,$$

можно применить «непрерывное» управление в скользящем режиме вида

$$u = -k \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right), \quad k > k_1.$$

Этот закон управления обеспечивает достижение s границы полосы $\{|s| \leq \varepsilon\}$ за конечное время, т. к.

$$s\dot{s} \leq -(k - k_1)|s| \quad \text{при } |s| \geq \varepsilon.$$

Внутри полосы система описывается уравнением

$$\dot{\eta} = A_0\eta + B_0s, \quad \text{где } \eta = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Полагая $V_1 = \eta^T P_0 \eta$, где P_0 — решение уравнения Ляпунова $P_0 A_0 + A_0 P_0^T = -I$, можно показать, что

$$\dot{V}_1 = -\eta^T \eta + 2\eta^T P_0 B_0 s \leq -(1 - \theta_1)\|\eta\|_2^2, \quad \forall \|\eta\|_2 \geq 2\|P_0 B_0\|_2 \varepsilon / \theta_1,$$

где $0 < \theta_1 < 1$. Таким образом, все траектории достигают множества

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ V_1(\eta) \leq \frac{4\|P_0 B_0\|_2^2 \varepsilon^2 \|P_0\|_2}{\theta_1^2}, |s| \leq \varepsilon \right\}$$

за конечное время. Внутри Ω_ε система

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= x_1, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(g_0/\ell) \sin(x_1 + \delta_1) - (k_0/m)x_2 - (k/m\ell^2\varepsilon)(a_0x_0 + a_1x_1 + x_2)\end{aligned}$$

имеет единственную точку равновесия в $\bar{x} = [-(\varepsilon m g_0 \ell / k a_0) \sin \delta_1, 0, 0]^T$. Повторив представленный выше анализ устойчивости системы, можно показать, что при достаточно малой ε точка равновесия \bar{x} асимптотически устойчива и каждая траектория в Ω_ε стремится к \bar{x} при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, угол θ стремится к желаемому положению δ_1 . Результаты компьютерного моделирования при $m = 0.1$, $\ell = 1$, $k_0 = 0.02$, $\delta_1 = \pi/2$, $a_0 = a_1 = 1$, $k = 4$ и $\varepsilon = 1$ показаны на рисунке 14.11.

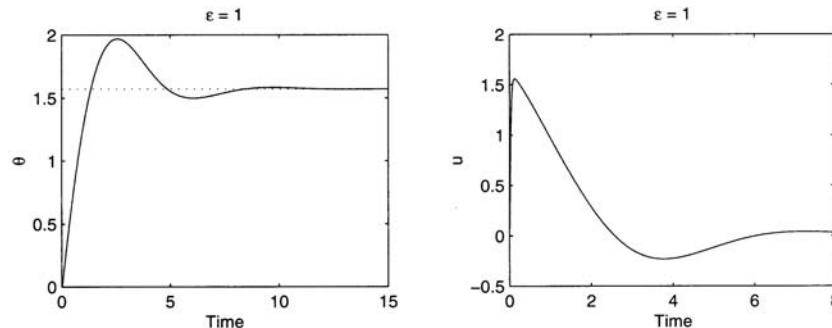


Рис. 14.11. «Непрерывное» управление в скользящем режиме и интегральным действием при $\delta_1 = \pi/2$

14.1.2. Стабилизация

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x) + B(x)[G(x)E(x)u + \delta(t, x, u)], \quad (14.1)$$

где $x \in R^n$ — вектор состояний, $u \in R^p$ — вектор управлений, f, B, G и E — достаточно гладкие функции в области $D \subset R^n$, содержащей начало координат. Функция δ предполагается кусочно-непрерывной по t и достаточно гладкой по (x, u) при $(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times R^p$. Мы будем также предполагать, что f, B и E известны, а G и δ могут быть неизвестны. Кроме того, в (14.1) матрица $E(x)$ невырождена и $G(x)$ — диагональная матрица с положительными элементами, отделенными от нуля, т. е. $g_i(x) \geq g_0 > 0$, для всех $x \in D$.¹⁾ Предположим, что $f(0) = 0$, т. е. при отсутствии δ начало координат является точкой равновесия разомкнутой системы. Наша цель заключается в построении закона управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающего стабилизацию начала координат для любых неопределенностей в G и δ .

Пусть $T : D \rightarrow R^n$ — диффеоморфизм, такой что

$$\frac{\partial T}{\partial x} B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad (14.2)$$

где I — единичная $(p \times p)$ -матрица.²⁾ Замена переменных

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = T(x), \quad \eta \in R^{n-p}, \quad \xi \in R^p, \quad (14.3)$$

¹⁾ Путем включения внедиагональных элементов в δ представленный здесь метод может быть обобщен на случай, когда матрица G не является диагональной. Поскольку в этом случае зависимость δ от u будет ограничена, этот подход применим лишь в случаях, когда матрица G обладает свойством диагонального доминирования.

²⁾ Вопрос существования T рассматривается в упражнении 14.9.

приводит систему к следующему виду:

$$\dot{\eta} = f_a(\eta, \xi), \quad (14.4)$$

$$\dot{\xi} = f_b(\eta, \xi) + G(x)E(x)u + \delta(t, x, u). \quad (14.5)$$

Представление (14.4)–(14.5) обычно называют *регулярной формой*. Разработку закона управления в скользящем режиме мы начнем с построения многообразия скольжения $s = \xi - \phi(\eta) = 0$ такого, что при движении системы по этому многообразию она описывается моделью редуцированного порядка

$$\dot{\eta} = f_a(\eta, \phi(\eta)), \quad (14.6)$$

имеющей асимптотически устойчивую точку равновесия в начале координат. Нахождение $\phi(\eta)$ равносильно решению задачи стабилизации для системы

$$\dot{\eta} = f_a(\eta, \xi),$$

где ξ рассматривается в качестве входа. Эта задача может быть решена либо с использованием метода локальной линеаризации системы, либо с использованием метода линеаризации обратной связью, представленного в предыдущих двух главах, либо с применением какого-либо другого метода построения нелинейного закона управления из тех, что будут представлены далее в этой главе (например, бэкстеппинг или метод, основанный на пассивности системы). Здесь мы будем предполагать, что нам известен стабилизирующий закон в виде непрерывно дифференцируемой функции $\phi(\eta)$, $\phi(0) = 0$. Тогда следующим шагом решения поставленной задачи будет нахождение u , обеспечивающего приведение величины s к нулевому значению за конечное время и удержание системы в этом режиме во все будущие моменты времени. Для этого запишем \dot{s} -уравнение в следующем виде:

$$\dot{s} = f_b(\eta, \xi) - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} f_a(\eta, \xi) + G(x)E(x)u + \delta(t, x, u). \quad (14.7)$$

В мотивирующем примере мы показали, что управление u может быть выбрано в виде простого реле, или же оно может иметь дополнительную непрерывную составляющую, которая обеспечивает исключение известных членов в правой части (14.7).¹⁾ Если $\widehat{G}(x)$ — номинальная модель для $G(x)$, непрерывная составляющая u будет иметь вид $-E^{-1}\widehat{G}^{-1}[f_b - (\partial\phi/\partial\eta)f_a]$. При отсутствии неопределенностей, т. е. при $\delta = 0$ и известной G , выбор $u = -E^{-1}G^{-1}[f_b - (\partial\phi/\partial\eta)f_a]$ обеспечивает $\dot{s} = 0$, что гарантирует выполнение условия $s = 0$ для всех будущих

¹⁾ Непрерывная составляющая обычно называется эквивалентным управлением.

моментов времени. Для того, чтобы выполнить анализ этих двух случаев одновременно, запишем закон управления u в виде

$$u = E^{-1}(x) \left\{ -L(x)[f_b(\eta, \xi) - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} f_a(\eta, \xi)] + v \right\}, \quad (14.8)$$

где $L(x) = \widehat{G}^{-1}(x)$ в ситуации, когда выполняется исключение известных членов и $L = 0$ в противном случае. Подставляя (14.8) в (14.7), получаем

$$\dot{s}_i = g_i(x)v_i + \Delta_i(t, x, v), \quad 1 \leq i \leq p, \quad (14.9)$$

где Δ_i — i -я компонента вектора

$$\begin{aligned} \Delta(t, x, v) = & \delta(t, x, -E^{-1}(x)L(x)(f_b(\eta, \xi) - (\partial \phi / \partial \eta)f_a(\eta, \xi)) + E^{-1}(x)v) + \\ & + [I - G(x)L(x)][f_b(\eta, \xi) - (\partial \phi / \partial \eta)f_a(\eta, \xi)] \end{aligned}$$

и g_i — i -й диагональный элемент G . Мы будем предполагать, что отношение Δ_i/g_i удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{\Delta_i(t, x, v)}{g_i(x)} \right| \leq \varrho(x) + \varkappa_0 \|v\|_\infty, \quad \forall (t, x, v) \in [0, \infty) \times D \times R^p, \quad 1 \leq i \leq p, \quad (14.10)$$

где $\varrho(x) \geq 0$ (непрерывная функция) и $\varkappa_0 \in [0, 1)$ — известно. Используя оценку (14.10), найдем v , обеспечивающее стремление s к многообразию $s = 0$. Используя $V_i = (1/2)s_i^2$ в качестве функции Ляпунова для (14.9), получаем

$$\dot{V}_i = s_i \dot{s}_i = s_i g_i(x)v_i + s_i \Delta_i(t, x, v) \leq g_i(x)\{s_i v_i + |s_i|[\varrho(x) + \varkappa_0 \|v\|_\infty]\}.$$

Положим¹⁾

$$v_i = -\beta(x) \operatorname{sign}(s_i), \quad 1 \leq i \leq p, \quad (14.11)$$

где

$$\beta(x) \geq \frac{\varrho(x)}{1 - \varkappa_0} + \beta_0, \quad \forall x \in D, \quad (14.12)$$

и $\beta_0 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq g_i(x)[- \beta(x) + \varrho(x) + \varkappa_0 \beta(x)]|s_i| = g_i(x)[-(1 - \varkappa_0)\beta(x) + \varrho(x)]|s_i| \leq \\ &\leq g_i(x)[- \varrho(x) - (1 - \varkappa_0)\beta_0 + \varrho(x)]|s_i| \leq -g_0\beta_0(1 - \varkappa_0)|s_i|. \end{aligned}$$

Неравенство $\dot{V}_i \leq -g_0\beta_0(1 - \varkappa_0)|s_i|$ гарантирует, что любая траектория, начинающаяся вне многообразия $s = 0$, достигает его за конечное время, а те траектории, которые лежат на этом многообразии, не могут покинуть его.

¹⁾ Для удобства записи мы выбрали коэффициент при функции знака одинаковым для всех компонентов вектора управления, но это ограничение может быть ослаблено (см. упражнение 14.12).

Процедура построения стабилизирующего регулятора в скользящем режиме может быть сформулирована в виде последовательности следующих шагов:

- Определение многообразия скольжения $\xi = \phi(\eta)$ и стабилизация системы редуцированного порядка (14.6).
- Нахождение закона управления u в виде $u = E^{-1}\{-\widehat{G}^{-1}[f_b - (\partial \phi / \partial \eta)f_a] + v\}$ или $u = E^{-1}v$.
- Оценка величин $\varrho(x)$ и \varkappa_0 в (14.10) при Δ , зависящем от выбора, сделанного на предыдущем шаге.
- Выбор $\beta(x)$, удовлетворяющей (14.12), и определение релейного (разрывного) закона управления v в соответствии с (14.11).

Эта процедура предполагает редуцирование порядка системы, т. к. эта операция необходима для решения основной части задачи — стабилизации редуцированной системы (14.6). Ключевой особенностью закона управления в скользящем режиме является то, что этот закон является робастным по отношению к неопределенностям, удовлетворяющих условию согласованности. Во время фазы достижения многообразия скольжения цель управления направить траектории к этому многообразию и удержать их на нем обеспечивается с использованием релейного управления (14.11) при условии, что $\beta(x)$ удовлетворяет неравенству (14.12). Из (14.10) видно, что $\varrho(x)$ представляет собой меру неопределенности. Поскольку мы не требуем, чтобы $\varrho(x)$ была мала, релейное управление может обеспечить выполнение цели управления даже при больших неопределенностях, ограничениями для которых являются лишь физические требования на амплитуду управляющих сигналов. Во время фазы движения вдоль многообразия скольжения поведение системы описывается уравнением (14.6), которое не зависит от неопределенных членов G и δ .

Закон управления в скользящем режиме содержит разрывную функцию знака $\operatorname{sign}(s_i)$, что вызывает определенные вопросы теоретического и практического характера. Теоретические вопросы, такие как вопрос о существовании и единственности решений или вопрос о достоверности результатов анализа Ляпунова, должны рассматриваться так, чтобы не возникла необходимость наложения требования локальной липшицевости функций в правой части уравнения состояния.¹⁾ Возникает также чисто практический вопрос о влиянии чаттера, обусловленного несовершенством релейных устройств и наличием задержек. Эта проблема была проиллюстрирована в мотивирующем примере. Во избежание возникновения этого явления мы использовали непрерывную аппроксимацию функции знака.²⁾ Использование подхода непрерывной

¹⁾ Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями рассмотрены в работах [58], [147], [173], и [198].

²⁾ Другие подходы к проблеме устранения чаттера предполагают использование наблюдателей [197], или расширение динамической модели системы

аппроксимации позволяет избежать теоретических трудностей, связанных с применением разрывных законов управления.¹⁾ Аппроксимируем функцию знака $\text{sign}(s_i)$ функцией насыщения с большим углом наклона линии переключения $\text{sat}(s_i/\varepsilon)$:²⁾

$$v_i = -\beta(x) \text{sat}\left(\frac{s_i}{\varepsilon}\right), \quad 1 \leq i \leq p, \quad (14.13)$$

где $\beta(x)$ удовлетворяет (14.12). В целях выполнения анализа характеристик «непрерывного» закона управления в скользящем режиме, исследуем фазу достижения многообразия скольжения с использованием функции Ляпунова $V_i = (1/2)s_i^2$. Производная \dot{V}_i удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_i \leq g_i(x) \left[-\beta(x)s_i \text{sat}\left(\frac{s_i}{\varepsilon}\right) + \varrho(x)|s_i| + \varkappa_0\beta(x)|s_i| \right].$$

В области $|s_i| \geq \varepsilon$ справедливо неравенство

$$\dot{V}_i \leq g_i(x)[-(1-\varkappa_0)\beta(x) + \varrho(x)]|s_i| \leq -g_0\beta_0(1-\varkappa_0)|s_i|,$$

из которого следует, что при $|s_i(0)| > \varepsilon$ величина $|s_i(t)|$ убывает и по истечении некоторого конечного промежутка времени для всех будущих моментов времени траектория остается в множестве $\{|s_i| \leq \varepsilon\}$. Множество $\{|s_i| \leq \varepsilon, 1 \leq i \leq p\}$ называется *пограничным слоем* (boundary layer). Для исследования поведения η примем во внимание, что в фазе движения вдоль многообразия скольжения выполнено $\xi = \phi(\eta)$, и предположим, что существует (непрерывно дифференцируемая) функция Ляпунова $V(\eta)$, удовлетворяющая неравенствам

$$\alpha_1(\|\eta\|) \leq V(\eta) \leq \alpha_2(\|\eta\|), \quad (14.14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} f_a(\eta, \phi(\eta) + s) \leq -\alpha_3(\|\eta\|), \quad \forall \|\eta\| \geq \gamma(\|s\|), \quad (14.15)$$

путем добавления интеграторов [177]. Следует отметить, что подход, в котором используется непрерывная аппроксимация, не может быть применен в приложениях с приводами, используемыми в режиме включения–выключения (например, тиристоры).

¹⁾ В этой книге мы не будем подробно рассматривать разрывные законы управления в скользящем режиме, но читателю рекомендуется с использованием компьютерного моделирования исследовать характеристики систем, замкнутых разрывным законом управления и соответствующей непрерывной аппроксимацией этого закона.

²⁾ Гладкая аппроксимация рассмотрена в упражнении 14.11.

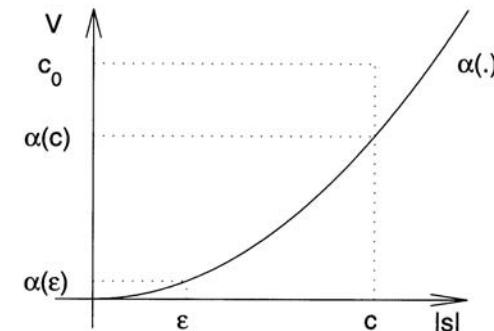


Рис. 14.12. Множество Ω для скалярной s . $\dot{V} < 0$ выше кривой $\alpha(\cdot)$

для всех $(\eta, \xi) \in T(D)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и γ — некоторые \mathcal{K} -функции.¹⁾ Заметив, что для некоторой положительной константы k_1 выполнено²⁾

$|s_i| \leq c$ при $1 \leq i \leq p \Rightarrow \|s\| \leq k_1 c \Rightarrow \dot{V} \leq -\alpha_3(\|\eta\|)$ при $\|\eta\| \geq \gamma(k_1 c)$, определим \mathcal{K} -функцию α равенством

$$\alpha(r) = \alpha_2(\gamma(k_1 r)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} V(\eta) \geq \alpha(c) \Rightarrow V(\eta) \geq \alpha_2(\gamma(k_1 c)) \Rightarrow \alpha_2(\gamma(k_1 c)) \geq \alpha_2(\gamma(k_1 c)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\eta\| \geq \gamma(k_1 c) \Rightarrow \dot{V} \leq -\alpha_3(\|\eta\|) \leq -\alpha_3(\gamma(k_1 c)). \end{aligned}$$

Из этого следует, что множество $\{V(\eta) \leq c_0\}$ при $c_0 \geq \alpha(c)$ является положительно инвариантным, т. к. \dot{V} отрицательна на границе $V(\eta) = c_0$. (См. рисунок 14.12.) Тогда множество

$$\Omega = \{V(\eta) \leq c_0\} \times \{|s_i| \leq c, 1 \leq i \leq p\}, \quad c_0 \geq \alpha(c) \quad (14.16)$$

положительно инвариантно при $c > \varepsilon$ и $\Omega \subset T(D)$. Выберем $\varepsilon, c > \varepsilon$ и $c_0 \geq \alpha(c)$ так, чтобы $\Omega \subset T(D)$. Компактное множество Ω служит в качестве оценки «области притяжения». Для любых начальных состояний, принадлежащих Ω , соответствующие траектории будут ограничены для всех $t \geq 0$ и по прошествии некоторого конечного промежутка времени будет выполнено неравенство $|s_i(t)| \leq \varepsilon$. Из представленного выше анализа следует, что $\dot{V} \leq -\alpha_3(\gamma(k_1 \varepsilon))$ для всех $V(\eta) \geq \alpha(\varepsilon)$. Сле-

¹⁾ Из неравенства (14.15) следует локальная устойчивость по входу–состоянию системы $\dot{\eta} = f_a(\eta, \phi(\eta) + s)$, в которой s рассматривается в качестве входа. (См. упражнение 4.60.)

²⁾ Константа k_1 зависит от типа нормы, используемой при анализе.

довательно, траектории достигнут положительно инвариантного множества

$$\Omega_\varepsilon = \{V(\eta) \leqslant \alpha(\varepsilon)\} \times \{|s_i| \leqslant \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant p\}, \quad (14.17)$$

за конечное время. Множество Ω_ε может быть сделано сколь угодно малым путем выбора достаточно малой ε . В предельном случае $\varepsilon \rightarrow 0$ множество Ω_ε сужается до точки — начала координат — и это свидетельствует о том, что «непрерывная» версия закона управления в скользящем режиме воспроизводит характеристики, которыми обладает соответствующая разрывная версия. Заметим, что если все предположения выполнены глобально и $V(\eta)$ радиально неограничена, множество Ω может быть выбрано произвольно большим и так, чтобы оно включало любое начальное состояние. Представленные результаты могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 14.1. Рассмотрим систему (14.4)-(14.5). Предположим, что существуют $\phi(\eta)$, $V(\eta)$, $\varrho(x)$ и \varkappa_0 , удовлетворяющие (14.10), (14.14) и (14.15). Пусть u и v определяются выражениями (14.8) и (14.11), соответственно. Предположим, что ε , $s > \varepsilon$ и $c_0 \geqslant \alpha(c)$ выбраны так, чтобы множество Ω , определяемое (14.16), содержалось в $T(D)$. Тогда для всех $(\eta(0), \xi(0)) \in \Omega$ траектория $(\eta(t), \xi(t))$ ограничена для всех $t \geqslant 0$ и достигает за конечное время положительно инвариантного множества Ω_ε , определяемого (14.17). Более того, если все предположения выполнены глобально и $V(\eta)$ радиально неограничена, утверждения теоремы выполнены для любого начального состояния.

Из этой теоремы следует, что «непрерывный» закон управления в скользящем режиме обеспечивает предельную ограниченность с предельной границей, величина которой может быть изменена выбором параметра ε . В этой теореме сформулированы также условия глобальной предельной ограниченности. Поскольку неопределенность δ может быть представлена функцией, не обращающейся в нуль в точке $x = 0$, свойство предельной ограниченности — это максимально возможный результат, который может быть достигнут в общем случае. Если δ обращается в начале координат в нуль, оказывается возможным доказать асимптотическую устойчивость начала координат.

Теорема 14.2. Предположим, что все предположения теоремы 14.1 выполнены с $\varrho(0) = 0$ и $\varkappa_0 = 0$. Предположим также, что начало координат системы $\dot{\eta} = f_a(\eta, \phi(\eta))$ экспоненциально устойчиво. Тогда существует $\varepsilon^* > 0$, такая что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ начало координат замкнутой системы экспоненциально устойчиво и множество Ω является подмножеством его области притяжения. Более того, если все предположения выполнены глобально, то начало координат глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство: Для выполнения при $\varkappa_0 = 0$ неравенства (14.10) необходимо, чтобы функции Δ_i не зависели от v , т. е. $\Delta_i = \Delta_i(t, x)$. Из теоремы 14.1 следует, что все траектории, начинающиеся в Ω , достига-

ют Ω_ε за конечное время. Внутри Ω_ε замкнутая система определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_a(\eta, \phi(\eta) + s), \\ \dot{s}_i &= \Delta_i(t, x) - \frac{g_i(x)\beta(x)}{\varepsilon}s_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant p. \end{aligned}$$

Из обратной теоремы Ляпунова 4.14 следует, что существует функция Ляпунова $V_0(\eta)$, удовлетворяющая неравенствам

$$\begin{aligned} c_1\|\eta\|_2^2 &\leqslant V_0(\eta) \leqslant c_2\|\eta\|_2^2, \\ \frac{\partial V_0}{\partial \eta}f_a(\eta, \phi(\eta)) &\leqslant -c_3\|\eta\|_2^2, \\ \left\| \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \right\|_2 &\leqslant c_4\|\eta\|_2 \end{aligned}$$

в некоторой окрестности N_η точки $\eta = 0$. Из гладкости f_a и Δ и неравенства $|\Delta_i(t, x)| \leqslant g_i(x)\rho(x)$, $\rho(0) = 0$ следует, что неравенства

$$\begin{aligned} \|f_a(\eta, \phi(\eta) + s) - f_a(\eta, \phi(\eta))\|_2 &\leqslant k_1\|s\|_2, \\ \|\Delta\|_2 &\leqslant k_2\|\eta\|_2 + k_3\|s\|_2 \end{aligned}$$

выполнены в некоторой окрестности N точки $(\eta, \xi) = (0, 0)$. Выберем ε настолько малой, что $\Omega_\varepsilon \subset N_\eta$ и $\Omega_\varepsilon \subset N$. Используя функцию Ляпунова

$$W = V_0(\eta) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p s_i^2,$$

можно показать, что

$$\dot{W} \leqslant -c_3\|\eta\|_2^2 + c_4k_1\|\eta\|_2\|s\|_2 + k_2\|\eta\|_2\|s\|_2 + k_3\|s\|_2^2 - \frac{\beta_0 g_0}{\varepsilon}\|s\|_2^2.$$

Выражение в правой части этого неравенства может быть сделано отрицательно определенным в Ω_ε путем выбора достаточно малой ε . \square

Главная идея, лежащая в основе представленного выше доказательства, заключается в использовании внутри пограничного слоя управления $v_i = -\beta(x)s_i/\varepsilon$, которое при малой ε представляет собой закон управления с сильной обратной связью. Выбирая ε достаточно малой, можно обеспечить стабилизацию начала координат соответствующей сильной обратной связью. Следует заметить, что этот закон управления можно было бы использовать при любых начальных данных, удовлетворяющих условиям предыдущих теорем, однако при s , достаточно удаленных от нуля управляющий сигнал будет слишком большим.

Мы уже отмечали, что закон управления в скользящем режиме обладает робастными свойствами по отношению к неопределенностям, удовлетворяющим условию согласованности. Что можно сказать в ситуациях, когда неопределенности не удовлетворяют этому условию?

Рассмотрим случай, когда уравнение (14.1) имеет модифицированный вид

$$\dot{x} = f(x) + B(x)[G(x)E(x)u + \delta(t, x, u)] + \delta_1(x). \quad (14.18)$$

Замена переменных (14.3) преобразует систему к виду

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_a(\eta, \xi) + \delta_a(\eta, \xi), \\ \dot{\xi} &= f_b(\eta, \xi) + G(x)E(x)u + \delta(t, x, u) + \delta_b(\eta, \xi),\end{aligned}$$

где

$$\begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{bmatrix} = \frac{\partial T}{\partial x} \delta_1.$$

Член δ_b входит в правую часть второго уравнения в виде слагаемого вместе с неопределенностью, удовлетворяющей условию согласованности. Наличие этого члена приводит к изменению верхней границы функций Δ_i/g_i . С другой стороны, член δ_a не удовлетворяет условию согласованности; его наличие приводит к модификации соответствующей редуцированной модели на многообразии скольжения:

$$\dot{\eta} = f_a(\eta, \phi(\eta)) + \delta_a(\eta, \phi(\eta)).$$

Функция ϕ должна быть выбрана так, чтобы обеспечивалась асимптотическая устойчивость начала координат $\eta = 0$ в условиях наличия неопределенности δ_a . Эта задача робастной стабилизации может быть решена с использованием сильной обратной связи. В случае, когда система содержит лишь неопределенности, удовлетворяющие условию согласованности, может быть построен закон управления в скользящем режиме, гарантирующий робастность системы по отношению к любым таким неопределенностям в условиях, когда известна верхняя граница значений этих неопределенностей и когда может быть обеспечена требуемая амплитуда соответствующего управляющего сигнала. При наличии в системе неопределенностей, не удовлетворяющих условию согласованности, невозможно гарантировать выполнение указанного свойства системы. Мы можем лишь наложить ограничения на верхнюю границу этих неопределенностей и обеспечить робастную стабилизацию системы на многообразии скольжения. Это утверждение иллюстрируется следующими двумя примерами.

Пример 14.1. 14.1 Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u,\end{aligned}$$

где θ_1 и θ_2 — неизвестные параметры, удовлетворяющие ограничениям $|\theta_1| \leq a$ и $|\theta_2| \leq b$ для некоторых известных значений a и b . Система представлена в виде регулярной формы с $\eta = x_1$ и $\xi = x_2$. Неопределенность θ_2 удовлетворяет условию согласованности, а неопределенность θ_1 — не удовлетворяет. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2$$

и найдем x_2 , при котором обеспечивается робастная стабилизация начала координат $x_1 = 0$. Эта цель может быть достигнута путем выбора $x_2 = -kx_1$, $k > a$, т. к.

$$x_1 \dot{x}_1 = -kx_1^2 + \theta_1 x_1^2 \sin(-kx_1) \leq -(k-a)x_1^2.$$

Многообразие скольжения определяется равенством $s = x_2 + kx_1 = 0$. При этом

$$\dot{s} = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u + k(x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2).$$

Для исключения известного члена в правой части положим

$$u = -x_1 - kx_2 + v,$$

в результате чего получим

$$\dot{s} = v + \Delta(x),$$

где $\Delta(x) = \theta_2 x_2^2 + k\theta_1 x_1 \sin x_2$. Поскольку

$$|\Delta(x)| \leq ak|x_1| + bx_2^2,$$

положим

$$\beta(x) = ak|x_1| + bx_2^2 + \beta_0, \quad \beta_0 > 0$$

и

$$u = -x_1 - kx_2 - \beta(x) \operatorname{sign}(s).$$

Этот закон управления или его непрерывная аппроксимация обеспечивают глобальную стабилизацию начала координат при достаточно малой ε . \triangle

В предыдущем примере нам удалось использовать сильную обратную связь для робастной стабилизации редуцированной модели с неудовлетворяющей условию согласованности неопределенностью $|\theta_1| \leq a$ без наложения каких-либо дополнительных ограничений на величину a . В общем случае это может оказаться невозможным и подобная ситуация рассматривается в следующем примере.

Пример 14.2. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + (1 - \theta_1)x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u,\end{aligned}$$

где θ_1 и θ_2 — неизвестные параметры, удовлетворяющие неравенствам $|\theta_1| \leq a$ и $|\theta_2| \leq b$. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_1 + (1 - \theta_1)x_2$$

и найдем x_2 , при котором обеспечивается робастная стабилизация начала координат $x_1 = 0$. Заметим, что эта система не может быть стабилизируема при $\theta_1 = 1$. Следовательно, необходимо ограничить

значение a — эта величина должна быть меньше единицы. Полагая $x_2 = -kx_1$, получаем

$$x_1 \dot{x}_1 = x_1^2 - k(1 - \theta_1)x_1^2 \leq -[k(1 - a) - 1]x_1^2.$$

Следовательно, начало координат $x_1 = 0$ может быть стабилизировано при $k > 1/(1 - a)$. Многообразие скольжения определяется равенством $s = x_2 + kx_1 = 0$. Следуя процедуре, описанной в предыдущем примере, получаем закон управления в скользящем режиме вида

$$u = -(1 + k)x_1 - kx_2 - \beta(x) \operatorname{sign}(s),$$

где $\beta(x) = bx_2^2 + ak|x_2| + \beta_0$, $\beta_0 > 0$. \triangle

14.1.3. Слежение

Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом

$$\dot{x} = f(x) + \delta_1(x) + g(x)[u + \delta(t, x, u)], \quad (14.19)$$

$$y = h(x), \quad (14.20)$$

где x , u и y — состояние, управление и управляемый выход системы, соответственно. Предположим, что f , g , h и δ_1 — достаточно гладкие функции в области $D \subset R^n$ и δ — кусочно-непрерывная по t и достаточно гладкая по (x, u) функция для всех $(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times R$. Предположим также, что f и h известны, а g , δ и δ_1 могут быть не определены. Для всех возможных неопределенностей в g , мы будем предполагать, что система

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (14.21)$$

$$y = h(x), \quad (14.22)$$

имеет в D относительную степень ρ , т. е.

$$L_g h(x) = \dots = L_g L_f^{\rho-2} h(x) = 0, \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x) \geq a > 0$$

для всех $x \in D$.¹⁾ Наша цель заключается в том, чтобы построить закон управления с обратной связью по состоянию, такой что выход системы y асимптотически отслеживает командный сигнал $r(t)$, удовлетворяющий условиям

- функция $r(t)$ и ее производные до $r^{(\rho)}(t)$ включительно ограничены для всех $t \geq 0$ и ρ -я производная $r^{(\rho)}(t)$ является кусочно-непрерывной функцией от t ;

¹⁾ Не умаляя общности, можно предположить, что $L_g L_f^{\rho-1} h$ положительно определена. Если это не так, положим $u = -\tilde{u}$ и продолжим анализ для \tilde{u} . Таким образом, решив поставленную задачу для положительно определенной $L_g L_f^{\rho-1} h$, мы фактически получим решение задачи для всех двух случаев знакопределенности, умножая в случае необходимости член управления на $\operatorname{sign}(L_g L_f^{\rho-1} h)$.

- сигналы $r, \dots, r^{(\rho)}$ доступны для измерения в режиме реального времени.

С использованием метода линеаризации по входу–выходу (см. параграф 13.2) можно показать, что система (14.21)–(14.22) может быть преобразована в нормальную форму посредством замены переменных

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(x) \\ \hline \hline h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x) \end{bmatrix} = T(x), \quad (14.23)$$

где ϕ_i , $i = 1, \dots, n - \rho$ удовлетворяют уравнениям в частных производных

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq n - \rho, \quad \forall x \in D.$$

Мы будем предполагать, что отображение $T(x)$ является диффеоморфизмом на D . Поскольку функции f и h известны, а функция g может быть не определена, можно полагать, что функция ψ известна, а ϕ может быть неизвестной. Наложим ограничения на возмущения δ и δ_1 такие, что при выполнении в возмущенной системе (14.19)–(14.20) замены переменных (14.23) сохраняется структура нормальной формы. С учетом условия на относительную степень можно заключить, что уравнение состояния для η не будет зависеть от u . Выпишем уравнение состояния для ξ :

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\partial h}{\partial x}[f + \delta_1 + g(u + \delta)] = \frac{\partial h}{\partial x}(f + \delta_1).$$

Если δ_1 принадлежит нуль-пространству матрицы $[\partial h / \partial x]$, т. е. $[\partial h / \partial x]\delta_1(x) = 0$ для всех $x \in D$, получаем

$$\dot{\xi}_1 = L_f h(x) = \xi_2.$$

Аналогично,

$$\dot{\xi}_2 = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}[f + \delta_1 + g(u + \delta)] = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}(f + \delta_1).$$

Если δ_1 принадлежит нуль-пространству матрицы $[\partial(L_f h) / \partial x]$ для всех $x \in D$, получаем

$$\dot{\xi}_2 = L_f^2 h(x) = \xi_3.$$

Продолжая эту процедуру, можно показать, что если

$$\frac{\partial(L_f^i h)}{\partial x}\delta_1(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq \rho - 2, \quad \forall x \in D, \quad (14.24)$$

то замена переменных (14.23) приводит к нормальной форме

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi), \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\rho-1} &= \xi_\rho, \\ \dot{\xi}_\rho &= L_f^\rho h(x) + L_{\delta_1} L_f^{\rho-1} h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)[u + \delta(t, x, u)], \\ y &= \xi_1.\end{aligned}$$

Пусть

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r^{(\rho-1)} \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} \xi_1 - r \\ \vdots \\ \xi_\rho - r^{(\rho-1)} \end{bmatrix} = \xi - \mathcal{R}.$$

При замене переменных $e = \xi - \mathcal{R}$ получаем

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi), \\ \dot{e}_1 &= e_2, \\ &\vdots \\ \dot{e}_{\rho-1} &= e_\rho, \\ \dot{e}_\rho &= L_f^\rho h(x) + L_{\delta_1} L_f^{\rho-1} h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)[u + \delta(t, x, u)] - r^{(\rho)}(t).\end{aligned}$$

Решением задачи асимптотического слежения является закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий ограниченность $e(t)$ и стремление этой функции к нулю при $t \rightarrow \infty$. Из ограниченности e следует ограниченность ξ , т. к. $\mathcal{R}(t)$ ограничена. Необходимо также обеспечить ограниченность η . Для этого предположим, что система

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$$

обладает свойством устойчивости типа «ограниченный вход – ограниченное состояние» (bounded-input-bounded-state stable). Это требование выполняется для любого ограниченного входа ξ и любого начального состояния $\eta(0)$, если система $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ является устойчивой по входу–состоянию. Итак, начиная с этого момента, мы сконцентрируем наше внимание на вопросе об ограниченности функции e и ее стремлении к нулю. Уравнение для \dot{e} принимает регулярную форму (14.4)–(14.5), если положить $\eta = [e_1, \dots, e_{\rho-1}]^T$ и $\xi = e_\rho$. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ &\vdots \\ \dot{e}_{\rho-1} &= e_\rho,\end{aligned}$$

где e_ρ рассматривается как вход системы. Необходимо найти e_ρ , обеспечивающее стабилизацию начала координат. С учетом того, что эта

система представляет собой управляемую линейную систему, представленную в канонической форме, в качестве искомого закона управления можно взять

$$e_\rho = -(k_1 e_1 + \dots + k_{\rho-1} e_{\rho-1}),$$

где k_i , $i = 1, \dots, \rho - 1$ выбраны так, чтобы полином

$$s^{\rho-1} + k_{\rho-1} s^{\rho-2} + \dots + k_1$$

был гурвицевым. Тогда многообразие скольжения определяется равенством

$$s = (k_1 e_1 + \dots + k_{\rho-1} e_{\rho-1}) + e_\rho = 0$$

и

$$\begin{aligned}\dot{s} &= k_1 e_2 + \dots + k_{\rho-1} e_\rho + L_f^\rho h(x) + L_{\delta_1} L_f^{\rho-1} h(x) + \\ &\quad + L_g L_f^{\rho-1} h(x)[u + \delta(t, x, u)] - r^{(\rho)}(t).\end{aligned}$$

В качестве $u = v$ можно выбрать простое реле или использовать закон управления, обеспечивающий исключение известных членов из правой части уравнения состояния и имеющий вид

$$u = -\frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} [k_1 e_2 + \dots + k_{\rho-1} e_\rho + L_f^\rho h(x) - r^{(\rho)}(t)] + v,$$

где $\widehat{g}(x)$ — номинальная модель для $g(x)$. Заметим, что если g известна, т. е. когда $\widehat{g} = g$, член

$$-\frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} [L_f^\rho h(x) - r^{(\rho)}(t)]$$

представляет собой линеаризующую составляющую закона обратной связи, предложенного в параграфе 13.4.2. В обоих случаях уравнение для \dot{s} может быть переписано в следующей форме:

$$\dot{s} = L_g L_f^{\rho-1} h(x)v + \Delta(t, x, v).$$

Предположим, что неравенство

$$\left| \frac{\Delta(t, x, v)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \right| \leq \varrho(x) + \varkappa_0 |v|, \quad 0 \leq \varkappa_0 < 1$$

выполнено для всех $(t, x, v) \in [0, \infty) \times D \times R$, где ϱ и \varkappa_0 предполагаются известными. Тогда закон управления может быть выбран в виде

$$v = -\beta(x) \operatorname{sign}(s),$$

где $\beta(x) \geq \varrho(x)/(1 - \varkappa_0) + \beta_0$, $\beta_0 > 0$ и его непрерывная аппроксимация может быть получена путем замены $\operatorname{sign}(s)$ на $\operatorname{sat}(s/\varepsilon)$. Читателю предлагается (упражнение 14.13) показать, что при использовании «непрерывного» закона управления в скользящем режиме соответствует

ющая замкнутая система обладает следующим свойством. Существуют конечный момент времени T_1 , возможно зависящий от ε и начальных состояний, и положительная константа k , не зависящая от ε и начальных состояний, такие что неравенство $|y(t) - r(t)| \leq k\varepsilon$ выполнено для всех $t \geq T_1$.

14.1.4. Интегральное управление

Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом

$$\dot{x} = f(x) + \delta_1(x, w) + g(x, w)[u + \delta(x, u, w)], \quad (14.25)$$

$$y = h(x), \quad (14.26)$$

где $x \in R^n$ — состояние, $u \in R$ — управление, $y \in R$ — управляемый выход и $w \in R^l$ — вектор возмущений и неизвестных постоянных параметров. Функции f , g , h , δ и δ_1 предполагаются достаточно гладкими по (x, u) и непрерывными по w для $x \in D \subset R^n$, $u \in R$ и $w \in D_w \subset R^l$, где D и D_w — открытые связные множества. Мы будем предполагать, что система

$$\dot{x} = f(x) + g(x, w)u, \quad (14.27)$$

$$y = h(x), \quad (14.28)$$

имеет относительную степень ρ в D равномерно по w , т. е. для всех $(x, w) \in D \times D_w$ выполнено

$$L_g h(x, w) = \dots = L_g L_f^{\rho-2} h(x, w) = 0, \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x, w) \geq a > 0.$$

Наша цель состоит в том, чтобы построить закон управления с обратной связью по состоянию, такой что выход системы y асимптотически отслеживает постоянный командный сигнал $r \in D_r \subset R$, где D_r — открытое связное множество. Эта задача представляет собой частный случай задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе: здесь в качестве командного сигнала выступает константа и неопределенность параметризованы вектором w . Поэтому мы можем использовать построенный в предыдущем параграфе закон управления в скользящем режиме. Если аппроксимировать функцию знака $\text{sign}(s)$ функцией насыщения $\text{sat}(s/\varepsilon)$, ошибка управления будет предельно ограничена постоянной величиной $k\varepsilon$ для некоторой $k > 0$. Этот результат представляется максимально возможным для общего случая задачи слежения, но рассматривая соответствующую задачу интегрального управления, можно обеспечить нулевую ошибку в установившемся режиме. Выполняя анализ аналогично тому, как это было сделано в параграфе 12.3, дополним систему интегратором ошибки управления $y - r$ и построим регулятор с обратной связью, обеспечивающий стабилизацию расширенной системы в точке равновесия, соответствующей выполнению равенства $y = r$. С этой целью предположим, что для любой пары $(r, w) \in D_r \times D_w$

существует единственная пара (x_{ss}, u_{ss}) , которая непрерывно зависит от (r, w) и удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_{ss}) + \delta_1(x_{ss}, w) + g(x_{ss}, w)[u_{ss} + \delta(x_{ss}, u_{ss}, w)] \\ r &= h(x_{ss}), \end{aligned}$$

т. е. x_{ss} — точка равновесия и u_{ss} — управление в установившемся режиме, обеспечивающее нахождение системы в точке равновесия x_{ss} . При

$$\frac{\partial(L_f^i h)}{\partial x} \delta_1(x, w) = 0, \quad 1 \leq i \leq \rho - 2, \quad \forall (x, w) \in D \times D_w,$$

замена переменных (14.23) приводит систему (14.25)–(14.26) к нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi, w) \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\rho-1} &= \xi_\rho, \\ \dot{\xi}_\rho &= L_f^\rho h(x) + L_{\delta_1} L_f^{\rho-1} h(x, w) + L_g L_f^{\rho-1} h(x, w)[u + \delta(x, u, w)], \\ y &= \xi_1. \end{aligned}$$

При этом исходная точка равновесия x_{ss} переходит в новую точку равновесия (η_{ss}, ξ_{ss}) , где $\xi_{ss} = [r, 0, \dots, 0]^T$. Дополнив вышеприведенную систему интегратором

$$\dot{e}_0 = y - r,$$

и применив замену переменных

$$z = \eta - \eta_{ss}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 - r \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_\rho \end{bmatrix},$$

получаем расширенную систему

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_0(z + \eta_{ss}, \xi, w) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}_0(z, e, w, r), \\ \dot{e}_0 &= e_1, \\ \dot{e}_1 &= e_2, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{e}_{\rho-1} &= e_\rho, \\ \dot{e}_\rho &= L_f^\rho h(x) + L_{\delta_1} L_f^{\rho-1} h(x, w) + L_g L_f^{\rho-1} h(x, w)[u + \delta(x, u, w)]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что система, расширенная цепью из $\rho + 1$ интеграторов, сохранила структуру нормальной формы после замены координат.

Поэтому при разработке закона управления в скользящем режиме мы можем воспользоваться результатами предыдущего параграфа. В частности, мы можем выбрать

$$s = k_0 e_0 + k_1 e_1 + \dots + k_{\rho-1} e_{\rho-1} + e_\rho,$$

где k_i , $i = 0, \dots, \rho - 1$ выбраны так, чтобы полином

$$s^\rho + k_{\rho-1} s^{\rho-1} + \dots + k_1 s + k_0$$

был гурвицевым. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{s} &= k_0 e_1 + \dots + k_{\rho-1} e_\rho + \\ &+ L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x, w) + L_g L_f^{\rho-1} h(x, w)[u + \delta(x, u, w)]. \end{aligned}$$

Закон управления принимает следующий вид:

$$u = v \quad \text{или} \quad u = -\frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} [k_0 e_1 + \dots + k_{\rho-1} e_\rho + L_f^\rho(x)] + v,$$

где $\hat{g}(x)$ — номинальная модель для $g(x, w)$. При этом

$$\dot{s} = L_g L_f^{\rho-1} h(x, w)v + \Delta(x, v, w, r).$$

Если неравенство

$$\left| \frac{\Delta(x, v, w, r)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x, w)} \right| \leq \varrho(x) + \varkappa_0 |v|, \quad 0 \leq \varkappa_0 < 1$$

выполнено для всех $(x, v, w, r) \in D \times R \times D_w \times D_r$, где ϱ и \varkappa_0 — известны, мы можем положить

$$v = -\beta(x) \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right),$$

где $\beta(x) \geq \varrho(x)/(1 - \varkappa_0) + \beta_0$, $\beta_0 > 0$. Соответствующая замкнутая система имеет точку равновесия в $(z, e_0, e) = (0, \bar{e}_0, 0)$. Факт стремления траекторий замкнутой системы к этой точке равновесия может быть доказан аналогично тому, как это было сделано в параграфе 14.1.2. В частности, если для системы $\dot{z} = \tilde{f}_0(z, e, w, r)$ существует функция Ляпунова $V_1(z, w, r)$, удовлетворяющая неравенствам

$$\tilde{\alpha}_1(\|z\|) \leq V_1(z, w, r) \leq \tilde{\alpha}_2(\|z\|),$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} \tilde{f}_0(z, e, w, r) \leq -\tilde{\alpha}_3(\|z\|), \quad \forall \|z\| \geq \tilde{\gamma}(\|e\|)$$

равномерно по (w, r) для некоторых \mathcal{K} -функций $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_3$ и $\tilde{\gamma}$, можно показать, что существуют два компактных положительно инвариантных множества Ω и Ω_ε , таких что каждая траектория, начинающаяся в Ω , достигает Ω_ε за конечное время. Множества Ω и Ω_ε могут быть

определенены в соответствии с нижеследующей процедурой. На первом шаге запишем замкнутую систему в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \tilde{f}_0(z, e, w, r), \\ \dot{\zeta} &= A\zeta + Bs, \\ \dot{s} &= -(L_g L_f^{\rho-1} h)\beta \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) + \Delta, \end{aligned}$$

где $\zeta = [e_0, \dots, e_{\rho-1}]^T$ и матрица A гурвицева. С использованием неравенства

$$ss \leq -a\beta_0(1 - \varkappa_0)|s| \quad \text{при} \quad |s| \geq \varepsilon$$

покажем, что множество $\{|s| \leq c\}$, $c > \varepsilon$, является положительно инвариантным. На втором шаге процедуры с использованием функции Ляпунова $V_2(\zeta) = \zeta^T P \zeta$, где P — решение уравнения Ляпунова $PA + A^T P = -I$, и неравенства

$$\dot{V}_2 \leq -\zeta^T \zeta + 2\|\zeta\| \|PB\| |s|$$

покажем, что множество $\{|s| \leq c\} \cap \{V_2 \leq c^2 \rho_1\}$ является положительно инвариантным для некоторой $\rho_1 > 0$. Внутри этого множества выполнено неравенство $\|e\| \leq c\rho_2$ для некоторой $\rho_2 > 0$. Наконец, на заключительном шаге процедуры используем неравенство

$$\dot{V}_1 \leq -\tilde{\alpha}_3(\|z\|), \quad \forall \|z\| \geq \tilde{\gamma}(c\rho_2)$$

для доказательства того, что множество

$$\Omega = \{|s| \leq c\} \cap \{V_2 \leq c^2 \rho_1\} \cap \{V_1 \leq c_0\}$$

является положительно инвариантным для любой $c_0 \geq \tilde{\alpha}_2(\tilde{\gamma}(c\rho_2))$. Аналогично может быть показано, что множество

$$\Omega_\varepsilon = \{|s| \leq \varepsilon\} \cap \{V_2 \leq \varepsilon^2 \rho_1\} \cap \{V_1 \leq \tilde{\alpha}_2(\tilde{\gamma}(\varepsilon\rho_2))\}$$

является положительно инвариантным и что каждая траектория, начинаящаяся в Ω , достигает Ω_ε за конечное время.

Если точка $z = 0$ является экспоненциально устойчивой точкой равновесия системы $\dot{z} = \tilde{f}_0(z, e, w, r)$, можно повторить доказательство теоремы 14.2 и показать, что каждая траектория в Ω_ε стремится к желаемой точке равновесия при $t \rightarrow \infty$. В частности, если $V_3(z, w, r)$ является функцией Ляпунова, полученной с использованием обратной теоремы Ляпунова 4.14 для экспоненциально устойчивого начала координат $z = 0$, P — решение уравнения Ляпунова $PA + A^T P = -I$ и (ζ, \tilde{s}) — отклонение (ζ, s) от соответствующего равновесного состояния, то можно показать, что производная функции

$$V_0 = V_3 + \lambda \tilde{\zeta}^T P \tilde{\zeta} + \frac{1}{2} \tilde{s}^2$$

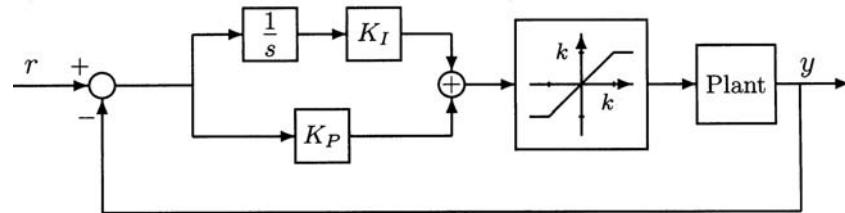


Рис. 14.13. «Непрерывный» закон управления в скользящем режиме (14.29) для систем с относительной степенью, равной единице: ПИ-регулятор с $K_I = kk_0/\varepsilon$ и $K_P = k/\varepsilon$ и насыщением на выходе (plant — объект управления (ОУ))

при $\lambda > 0$, удовлетворяет неравенству¹⁾

$$\dot{V}_0 \leq - \begin{bmatrix} \|z\| \\ \|\tilde{\zeta}\|_2 \\ |\tilde{s}| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_1 & -k_3 & -k_4 \\ -k_3 & \lambda & -(\lambda k_5 + k_6) \\ -k_4 & -(\lambda k_5 + k_6) & (k_2/\varepsilon) - k_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|z\| \\ \|\tilde{\zeta}\|_2 \|z\| \\ |\tilde{s}| \end{bmatrix},$$

где k_1 и k_2 — положительные константы и k_i , $i = 3, \dots, 7$ — неотрицательные константы. Производная V_0 может быть сделана отрицательно определенной, если положить $\lambda > k_3^2/k_1$ и выбрать константу ε достаточно малой, так чтобы (3×3) -матрица в предыдущем выражении была положительно определенной.

В частном случае, когда $\beta = k$ (константа) и $u = v$, «непрерывный» закон управления в скользящем режиме имеет вид

$$u = -k \operatorname{sat} \left(\frac{k_0 e_0 + k_1 e_1 + \dots + k_{\rho-1} e_{\rho-1} + e_{\rho}}{\varepsilon} \right). \quad (14.29)$$

При $\rho = 1$ закон управления (14.29) принимает классический вид — регулятора с насыщением на выходе (см. рисунок 14.13). При $\rho = 2$ вышеприведенный закон управления представляет собой классический ПИД-регулятор с насыщением на выходе (см. рисунок 14.14). Таким образом, можно отметить существование явной связи между этими двумя классическими регуляторами и «непрерывным» законом управления в скользящем режиме.

14.2. Ляпуновский синтез закона управления

14.2.1. Задача стабилизации

¹⁾ Для доказательства этого неравенства необходимо дополнительное условие

$$\left| \frac{\Delta(x_{ss}, v_1, w, r) - \Delta(x_{ss}, v_2, w, r)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x_{ss}, w)} \right| \leq \ell |v_1 - v_2|, \quad 0 \leq \ell < 1$$

для всех $(v_1, v_2, w, r) \in R \times R \times D_w \times D_r$.

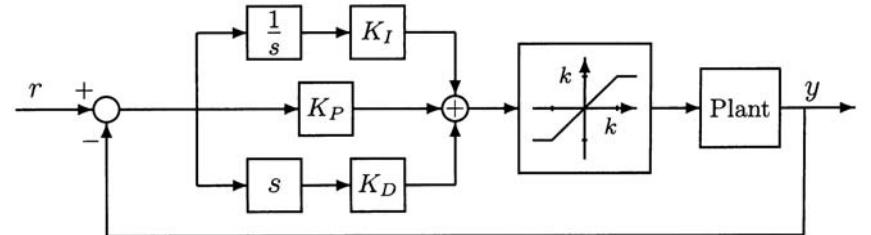


Рис. 14.14. «Непрерывный» закон управления в скользящем режиме (14.29) для систем с относительной степенью, равной двум: ПИД-регулятор с $K_I = kk_0/\varepsilon$, $K_P = k/\varepsilon$, $K_D = k/\varepsilon$ и насыщением на выходе (plant — объект управления (ОУ))

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x)[u + \delta(t, x, u)], \quad (14.30)$$

где $x \in R^n$ — состояние и $u \in R^p$ — управление. Функции f , G и δ определены для $(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times R^p$, где $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая начало координат. Предположим, что f , G и δ кусочно-непрерывны по t и локально липшицевы по x и u . Функции f и G предполагаются известными, а функция δ неизвестна и включает в себя различные неопределенные, наличие которых обусловлено упрощением модели, параметрическими возмущениями и т. п. Предполагается, что неизвестный член δ удовлетворяет условию согласованности. Номинальная модель системы имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x)u. \quad (14.31)$$

Наша цель состоит в том, чтобы с использованием этой модели разработать стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию. Предположим, что существует закон управления с обратной связью $u = \psi(t, x)$ такой, что начало координат замкнутой номинальной системы

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x)\psi(t, x) \quad (14.32)$$

равномерно асимптотически устойчиво. Предположим также, что известна функция Ляпунова для системы (14.32), т. е. существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$, удовлетворяющая неравенствам

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad (14.33)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}[f(t, x) + G(t, x)\psi(t, x)] \leq -\alpha_3(\|x\|) \quad (14.34)$$

для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times D$, где α_1 , α_2 и α_3 — \mathcal{K} -функции. Предположим, что при $u = \psi(t, x) + v$ неопределенный член δ удовлетворяет неравенству

$$\|\delta(t, x, \psi(t, x) + v)\| \leq \rho(t, x) + \varkappa_0 \|v\|, \quad 0 \leq \varkappa_0 < 1, \quad (14.35)$$

где $\rho : [0, \infty) \times D \rightarrow R$ — неотрицательная непрерывная функция. Оценка (14.35) является единственной доступной для нас информацией о неизвестном члене δ . Функция ρ представляет собой меру неопределенности. Важно подчеркнуть, что мы не требуем, чтобы ρ была малой, но она должна быть известна. Наша цель в этом параграфе заключается в том, чтобы с учетом того, что функция Ляпунова V , функция ρ и константа \varkappa_0 в (14.35) известны, синтезировать обратную связь v так, чтобы закон управления $u = \psi(t, x) + v$ стабилизировал рассматриваемую систему (14.30) при наличии в ней указанных неопределенностей. Метод нахождения v называется *ляпуновским синтезом* (Lyapunov redesign).

Прежде чем перейти к описанию этого метода, рассмотрим вопрос о том, как представленный в предыдущей главе метод линеаризации обратной связью может быть использован для решения сформулированной выше задачи.

Пример 14.3. Рассмотрим линеаризуемую обратной связью систему

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u,$$

где $f : D \rightarrow R^n$ и $G : D \rightarrow R^{n \times p}$ — гладкие функции, определенные в области $D \subset R^n$. Предположим, что существует диффеоморфизм $T : D \rightarrow R^n$, такой что $D_z = T(D)$ содержит начало координат и $T(x)$ удовлетворяет уравнениям в частных производных

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x}f(x) &= AT(x) - B\gamma(x)\alpha(x), \\ \frac{\partial T}{\partial x}G(x) &= B\gamma(x),\end{aligned}$$

где (A, B) — управляемая пара и $\gamma(x)$ — невырожденная для всех $x \in D$ матрица. Замена переменных $z = T(x)$ преобразует систему к виду

$$\dot{z} = Az + B\gamma(x)[u - \alpha(x)].$$

Рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x} = f(x) + \Delta_f(x) + [G(x) + \Delta_G(x)]u$$

с гладкими возмущениями, которые удовлетворяют на D условиям¹⁾

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Delta_f(x) = B\gamma(x)\Delta_1(x), \quad \Delta_G(x) = G(x)\Delta_2(x).$$

Возмущенная система может быть представлена виде (14.30), т. е.

$$\dot{z} = Az - B\gamma(x)\alpha(x) + B\gamma(x)[u + \delta(x, u)],$$

¹⁾ Можно показать, что возмущенная система также линеаризуема обратной связью и с использованием той же замены переменных $T(x)$ при условии, что матрица $I + \Delta_2$ невырождена. Из условия (14.36) следует, что $I + \Delta_2$ действительно невырождена.

где $\delta(x, u) = \Delta_1(x) + \Delta_2(x)u$. Поскольку номинальная система линеаризуема обратной связью, номинальный стабилизирующий закон управления может быть выбран в следующем виде:

$$\psi(x) = \alpha(x) - \gamma^{-1}(x)Kz = \alpha(x) - \gamma^{-1}(x)KT(x),$$

где K выбрана так, чтобы матрица $(A - BK)$ была гурвицевой. В качестве функции Ляпунова для замкнутой номинальной системы

$$\dot{z} = (A - BK)z$$

может быть выбрана $V(z) = z^T P z$, где P — решение уравнения Ляпунова

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P = -I.$$

При $u = \psi(x) + v$ неопределенный член $\delta(x, u)$ удовлетворяет неравенству

$$\|\delta(x, \psi(x) + v)\| \leq \|\Delta_1(x) + \Delta_2(x)\alpha(x) - \Delta_2(x)\gamma^{-1}(x)Kz\| + \|\Delta_2(x)\| \|v\|.$$

Таким образом, для того, чтобы неравенство (14.35) было справедливо, необходимо обеспечить выполнение для некоторой непрерывной функции $\rho(x)$ неравенств

$$\|\Delta_2(x)\| \leq \varkappa_0 < 1, \tag{14.36}$$

и

$$\|\Delta_1(x) + \Delta_2(x)\alpha(x) - \Delta_2(x)\gamma^{-1}(x)KT(x)\| \leq \rho(x) \tag{14.37}$$

в области, содержащей начало координат.¹⁾ Неравенство (14.36) представляется ограничительным, т. к. оно накладывает условия на пределы возможного изменения возмущения Δ_2 . С другой стороны, неравенство (14.37) не является столь ограничительным, поскольку по предположению функция ρ не должна быть малой. Выбором функции ρ определяется рост величины в левой части неравенства (14.37). \triangle

Система (14.30), замкнутая управлением $u = \psi(t, x) + v$, имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x)\psi(t, x) + G(t, x)[v + \delta(t, x, \psi(t, x) + v)]. \tag{14.38}$$

и представляет собой возмущение замкнутой номинальной системы (14.32). Вычислим производную функции $V(t, x)$ вдоль траекторий системы (14.38). Для упрощения записи опустим аргументы функций:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(f + G\psi) + \frac{\partial V}{\partial x}G(v + \delta) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \frac{\partial V}{\partial x}G(v + \delta).$$

Положим $w^T = [\partial V / \partial x]G$ и перепишем последнее неравенство в следующей форме:

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|) + w^T v + w^T \delta.$$

¹⁾ Прим. ред. перев. — Автор вводит функцию $\rho(x)$ в (14.37) вместо функции $\rho(t, x)$ в (14.35). Это возможно, поскольку левая часть (14.37) не зависит от t .

Первый член в правой части обусловлен вычислением производной функции Ляпунова \dot{V} вдоль траекторий замкнутой номинальной системы. Аналогично второй и третий члены соответствуют управлению v и неопределенному члену δ . В предположении о выполнении условия согласованности неопределенный член δ и член управления v появились в правой части этого неравенства вместе в виде суммы. Следовательно, можно выбрать v так, чтобы скомпенсировать (дестабилизирующий) эффект от воздействия возмущения δ на величину \dot{V} . Далее будут предложены два метода выбора v , при которых обеспечивается выполнение неравенства $w^T v + w^T \delta \leq 0$. Предположим, что неравенство (14.35) выполнено с нормой $\|\cdot\|_2$, т. е.

$$\|\delta(t, x, \psi(t, x) + v)\|_2 \leq \rho(t, x) + \kappa_0 \|v\|_2, \quad 0 \leq \kappa_0 < 1.$$

Тогда

$$w^T v + w^T \delta \leq w^T v + \|w\|_2 \|\delta\|_2 \leq w^T v + \|w\|_2 [\rho(t, x) + \kappa_0 \|v\|_2].$$

Полагая

$$v = -\eta(t, x) \cdot \frac{w}{\|w\|_2}, \quad (14.39)$$

где η — неотрицательная функция, получаем

$$w^T v + w^T \delta \leq -\eta \|w\|_2 + \rho \|w\|_2 + \kappa_0 \eta \|w\|_2 = -\eta(1 - \kappa_0) \|w\|_2 + \rho \|w\|_2.$$

Выбор $\eta(t, x) \geq \rho(t, x)/(1 - \kappa_0)$ для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ обеспечивает

$$w^T v + w^T \delta \leq -\rho \|w\|_2 + \rho \|w\|_2 = 0.$$

Следовательно, при использовании закона управления (14.39) производная функции $V(t, x)$ вдоль траекторий замкнутой системы (14.38) отрицательно определена.

Альтернативный подход заключается в следующем. Предположим, что (14.35) выполнено с нормой $\|\cdot\|_\infty$, т. е.

$$\|\delta(t, x, \psi(t, x) + v)\|_\infty \leq \rho(t, x) + \kappa_0 \|v\|_\infty, \quad 0 \leq \kappa_0 < 1.$$

Тогда

$$w^T v + w^T \delta \leq w^T v + \|w\|_1 \|\delta\|_\infty \leq w^T v + \|w\|_1 [\rho(t, x) + \kappa_0 \|v\|_\infty].$$

Положим

$$v = -\eta(t, x) \operatorname{sign}(w), \quad (14.40)$$

где $\eta(t, x) \geq \rho(t, x)/(1 - \kappa_0)$ для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ и $\operatorname{sign}(w)$ — вектор размерности p с компонентами $\operatorname{sign}(w_i)$. Тогда

$$\begin{aligned} w^T v + w^T \delta &\leq -\eta \|w\|_1 + \rho \|w\|_1 + \kappa_0 \eta \|w\|_1 = \\ &= -\eta(1 - \kappa_0) \|w\|_1 + \rho \|w\|_1 \leq \\ &\leq -\rho \|w\|_1 + \rho \|w\|_1 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при использовании закона управления (14.40) производная функции $\dot{V}(t, x)$ вдоль траекторий замкнутой системы (14.38) отрицательно определена. Заметим, что законы управления (14.39) и (14.40) совпадают в случае, когда система имеет один вход ($p = 1$).

Законы управления (14.39) и (14.40) являются разрывными функциями состояния x . Отсутствие непрерывности в правой части модели приводит к возникновению некоторых сложностей теоретического и практического характера. С теоретической точки зрения мы должны переопределить закон управления для того, чтобы избежать возможного деления на нуль. Также следует тщательно исследовать вопрос о существовании и единственности решений замкнутой системы, т. к. используемые в этом случае обратные связи не являются локально липшицевыми по x функциями. С практической точки зрения при реализации этих разрывных законов управления часто возникает явление чаттера, обусловленное несовершенством используемых реле и наличием задержек в канале управления и выражющееся в том, что при переключении режимов управления траектории системы часто пересекают поверхность переключения.¹⁾ Для того чтобы избавить себя от необходимости решать все эти непростые проблемы, можно воспользоваться более простым и эффективным методом — применить вместо разрывного закона управления соответствующую непрерывную аппроксимацию. Процедура нахождения этой аппроксимации аналогична для двух вышеуказанных законов управления. Поэтому далее мы найдем непрерывную аппроксимацию для закона управления (14.39), а соответствующую задачу для закона управления (14.40) предложим читателю решить самостоятельно (см. упражнения 14.21 и 14.22).

Рассмотрим закон управления с обратной связью

$$v = \begin{cases} -\eta(t, x)(w/\|w\|_2), & \text{если } \eta(t, x)\|w\|_2 \geq \varepsilon, \\ -\eta^2(t, x)(w/\varepsilon) & \text{если } \eta(t, x)\|w\|_2 < \varepsilon. \end{cases} \quad (14.41)$$

При использовании управления (14.41) производная функции V вдоль траекторий замкнутой системы (14.38) отрицательно определена при $\eta(t, x)\|w\|_2 \geq \varepsilon$. Нам осталось установить знак \dot{V} при $\eta(t, x)\|w\|_2 < \varepsilon$. В этом случае

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\alpha_3(\|x\|_2) + w^T \left[-\eta^2 \cdot \frac{w}{\varepsilon} + \delta \right] \leq \\ &\leq -\alpha_3(\|x\|_2) - \frac{\eta^2}{\varepsilon} \|w\|_2^2 + \rho \|w\|_2 + \kappa_0 \|w\|_2 \|v\|_2 = \\ &= -\alpha_3(\|x\|_2) - \frac{\eta^2}{\varepsilon} \|w\|_2^2 + \rho \|w\|_2 + \frac{\kappa_0 \eta^2}{\varepsilon} \|w\|_2^2 \leq \\ &\leq -\alpha_3(\|x\|_2) + (1 - \kappa_0) \left(-\frac{\eta^2}{\varepsilon} \|w\|_2^2 + \eta \|w\|_2 \right). \end{aligned}$$

¹⁾ Явление чаттера рассматривается более подробно в параграфе 14.1.

Член

$$-\frac{\eta^2}{\varepsilon} \|w\|_2^2 + \eta \|w\|_2$$

принимает максимальное значение $\varepsilon/4$ при $\eta \|w\|_2 = \varepsilon/2$. Поэтому

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|_2) + \frac{\varepsilon(1 - \kappa_0)}{4}$$

при $\eta(t, x)\|w\|_2 < \varepsilon$. С другой стороны, при $\eta(t, x)\|w\|_2 \geq \varepsilon$ производная \dot{V} удовлетворяет оценке

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|_2) \leq -\alpha_3(\|x\|_2) + \frac{\varepsilon(1 - \kappa_0)}{4}.$$

Таким образом, неравенство

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|_2) + \frac{\varepsilon(1 - \kappa_0)}{4}$$

выполнено независимо от значения $\eta(t, x)\|w\|_2$. Пусть $r > 0$ таково, что $B_r \subset D$. Выберем $\varepsilon < 2\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))/(1 - \kappa_0)$ и положим $\mu = \alpha_3^{-1}(\varepsilon(1 - \kappa_0)/2) < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$. Тогда

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\alpha_3(\|x\|_2), \quad \forall \mu \leq \|x\|_2 < r.$$

Применяя теорему 4.18, приходим к заключению, что решения замкнутой системы равномерно предельно ограничены некоторой функцией от ε , принадлежащей классу \mathcal{K} . Этот результат сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 14.3. Рассмотрим систему (14.30). Пусть $D \subset R^n$ — однородность, содержащая начало координат и $B_r = \{\|x\|_2 \leq r\} \subset D$. Пусть $\psi(t, x)$ — стабилизирующий закон управления для номинальной системы (14.31) и соответствующая функция Ляпунова $V(t, x)$ удовлетворяет (14.33) и (14.34) для 2-нормы при всех $t \geq 0$, $x \in D$ и для некоторых \mathcal{K} -функций α_1 , α_2 и α_3 . Предположим, что неопределенный член δ удовлетворяет (14.35) для 2-нормы при всех $t \geq 0$, $x \in D$. Пусть v определяется равенством (14.41) и выберем $\varepsilon < 2\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))/(1 - \kappa_0)$. Тогда для любого $\|x(t_0)\|_2 < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ существует конечный момент времени t_1 , такой что решение замкнутой системы (14.38) удовлетворяет неравенствам

$$\|x(t)\|_2 \leq \beta(\|x(t_0)\|_2, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t < t_1, \quad (14.42)$$

$$\|x(t)\|_2 \leq b(\varepsilon), \quad \forall t \geq t_1, \quad (14.43)$$

где β — некоторая \mathcal{KL} -функция и b — некоторая \mathcal{K} -функция, определяемая равенством

$$b(\varepsilon) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\alpha_3^{-1}(\varepsilon(1 - \kappa_0)/2))).$$

Если все предположения выполнены глобально и α_1 принадлежит классу \mathcal{K}_∞ , то неравенства (14.42) и (14.43) выполнены для любого начального состояния $x(t_0)$.

Таким образом, в общем случае полученный с использованием ляпуновского синтеза непрерывный закон управления (14.41) не обеспечивает стабилизацию начала координат, в то время как соответствующий разрывный закон управления гарантирует достижение этой цели. Тем не менее, непрерывная версия этого закона гарантирует равномерную предельную ограниченность решений. Поскольку в качестве предельной границы выступает принадлежащая классу \mathcal{K} функция $b(\varepsilon)$, эта граница может быть сделана произвольно малой путем выбора достаточно малой ε . В предельном случае $\varepsilon \rightarrow 0$ мы получаем соответствующий разрывный закон управления. Заметим, что нет никакой необходимости в том, чтобы делать константу ε очень малой. Единственным требованием на ε является то, что она должна удовлетворять неравенству $\varepsilon < 2\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))/(1 - \kappa_0)$. Это условие выполнено для любого значения ε , если все сделанные предположения остаются справедливыми глобально и функции α_i , ($i = 1, 2, 3$) принадлежат классу \mathcal{K}_∞ . Разумеется, с практической точки зрения параметр ε следует делать малым, т. к. наша цель заключается в том, чтобы привести траектории системы в окрестность начала координат, которая должна быть настолько малой, насколько это возможно. Более строгие результаты о малости ε можно получить, если предположить, что член неопределенности δ обращается в нуль в начале координат. Предположим, что существует шар $B_a = \{\|x\|_2 \leq a\}$, $a \leq r$, такой что следующие неравенства выполнены для всех $x \in B_a$:

$$\alpha_3(\|x\|_2) \geq \phi^2(x), \quad (14.44)$$

$$\eta(t, x) \geq \eta_0 > 0, \quad (14.45)$$

$$\rho(t, x) \leq \rho_1 \phi(x), \quad (14.46)$$

где $\phi : R^n \rightarrow R$ — положительно определенная функция от x . Выбор $\varepsilon < b^{-1}(a)$ гарантирует, что траектории замкнутых систем будут принадлежать B_a после некоторого конечного момента времени. При $\eta(t, x)\|w\|_2 < \varepsilon$ производная \dot{V} удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\alpha_3(\|x\|_2) - \frac{\eta^2(1 - \kappa_0)}{\varepsilon} \|w\|_2^2 + \rho \|w\|_2 \leq \\ &\leq -\frac{1}{2}\alpha_3(\|x\|_2) - \frac{1}{2}\phi^2(x) - \frac{\eta_0^2(1 - \kappa_0)}{\varepsilon} \|w\|_2^2 + \rho_1 \phi(x) \|w\|_2 \leq \\ &\leq -\frac{1}{2}\alpha_3(\|x\|_2) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \|w\|_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\rho_1 \\ -\rho_1 & 2\eta_0^2(1 - \kappa_0)/\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \|w\|_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица квадратичной формы будет положительно определенной, если $\varepsilon < 2\eta_0^2(1 - \kappa_0)/\rho_1^2$. Таким образом, выбрав $\varepsilon < 2\eta_0^2(1 - \kappa_0)/\rho_1^2$, получаем

$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|_2)/2$. Поскольку $V \leq -\alpha_3(\|x\|_2) \leq -\alpha_3(\|x\|_2)/2$, выполнено $\eta(t, x)\|w\|_2 \geq \varepsilon$ и можно заключить, что

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\alpha_3(\|x\|_2).$$

Из этого неравенства следует, что начало координат равномерно асимптотически устойчиво.

Следствие 14.1. Предположим, что выполнены все предположения теоремы 14.3, а также неравенства (14.44)–(14.46). Тогда для всех $\varepsilon < \min\{2\eta_0^2(1-\kappa_0)/\rho_1^2, b^{-1}(a)\}$ начало координат замкнутой системы (14.38) равномерно асимптотически устойчиво. Если $\alpha_i(r) = k_i r^c$, начало координат экспоненциально устойчиво.

Следствие 14.1 особенно полезно в случаях, когда начало координат замкнутой номинальной системы (14.32) экспоненциально устойчиво и возмущение $\delta(t, x, u)$ является липшицевой по x и u функцией, обращающейся в нуль в $(x = 0, u = 0)$. В подобных ситуациях $\phi(x)$ пропорциональна $\|x\|_2$ и для неопределенного члена выполнено (14.35) с $\rho(x)$, удовлетворяющей (14.46). В общем случае, условие обращения возмущения в нуль в начале координат может оказаться недостаточным для выполнения условия (14.46). Например, если в скалярном случае $\phi(x) = |x|^3$, то член возмущения x не может быть ограничен функцией $\rho_1\phi(x)$.

Результат о стабилизации, сформулированный в следствии 14.1, зависит от выбора функции η , которая должна удовлетворять (14.45). Можно показать (упражнение 14.20), что если η не удовлетворяет (14.45), предложенный закон управления может не обеспечить стабилизацию начала координат. Если η удовлетворяет (14.45), закон управления (14.41) действует в области $\eta\|w\|_2 < \varepsilon$ как обратная связь с большим коэффициентом усиления $v = -kw$, где $k \geq \eta_0^2/\varepsilon$. Этот закон управления с сильной обратной связью может стабилизировать начало координат, если выполнены (14.44)–(14.46) (см. упражнение 14.24).

Пример 14.4. Продолжим рассмотрение системы, линеаризуемой обратной связью и введенной в примере 14.3. Предположим, что неравенство (14.36) выполнено с нормой $\|\cdot\|_2$. Предположим также, что неравенство

$$\|\Delta_1(x) + \Delta_2(x)\alpha(x) + \Delta_2(x)\gamma^{-1}(x)Kz\|_2 \leq \rho_1\|z\|_2$$

выполнено для всех $z \in B_r \subset D_z$. Тогда (14.37) выполнено с $\rho = \rho_1\|z\|_2$. Выберем закон управления v в виде (14.41) с

$$\eta = 1 + \frac{\rho_1\|z\|_2}{(1-\kappa_0)}, \quad w^T = 2z^T PB,$$

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{2(1-\kappa_0)}{\rho_1^2}, \frac{2r^2\lambda_{\min}(P)}{(1-\kappa_0)\lambda_{\max}(P)}\right\}.$$

Можно показать, что все предположения теоремы 14.3 и следствия 14.1 выполнены при $\alpha_1(r) = \lambda_{\min}(P)r^2$, $\alpha_2(r) = \lambda_{\max}(P)r^2$, $\alpha_3(r) = r^2$, $\phi(z) = \|z\|_2$ и $a = r$. Таким образом, использование управления $u = \psi(x) + v$ делает начало координат возмущенной замкнутой системы экспоненциально устойчивым. Если все предположения выполнены глобально и отображение $T(x)$ является глобальным диффеоморфизмом, начало координат $x = 0$ является глобально асимптотически устойчивым.¹⁾

Пример 14.5. Рассмотрим уравнение маятника, введенное в примере 13.18:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a \sin x_1 - bx_2 + cu. \end{aligned}$$

Пусть $\delta_1 = \pi$. Наша цель заключается в стабилизации маятника в точке равновесия разомкнутой системы $x = 0$. Эта система является линеаризуемой обратной связью и заменой переменных $T(x) = x$. Номинальный закон управления с обратной связью может быть записан в следующей форме:

$$\psi(x) = -\left(\frac{\hat{a}}{\hat{c}}\right) \sin x_1 - \left(\frac{1}{\hat{c}}\right) (k_1 x_1 + k_2 x_2),$$

где \hat{a} и \hat{c} — номинальные значения параметров a и c , и k_1 и k_2 выбраны так, чтобы матрица

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -(k_2 + b) \end{bmatrix}$$

была гурвицевой. При $u = \psi(x) + v$ неопределенный член δ имеет вид

$$\delta = \frac{1}{\hat{c}} \left[\left(\frac{a\hat{c} - \hat{a}c}{\hat{c}} \right) \sin x_1 - \left(\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right) (k_1 x_1 + k_2 x_2) \right] + \left(\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right) v.$$

Следовательно,

$$|\delta| \leq \rho_1\|x\|_2 + \kappa_0|v|, \quad \forall x \in R^2, \quad \forall v \in R,$$

где

$$\kappa_0 \geq \left| \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right|, \quad \rho_1 = \frac{k}{\hat{c}} \quad \text{и} \quad k \geq \left| \frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}} \right| + \left| \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right| \sqrt{k_1^2 + k_2^2}.$$

В предположении, что $\kappa_0 < 1$, выберем v как в предыдущем примере. Тогда полученный закон управления $u = \psi(x) + v$ делает начало координат глобально экспоненциально устойчивым. В примере 13.18 мы ис-

¹⁾ В действительности начало координат $z = 0$ является глобально экспоненциально устойчивым, но мы не можем сделать заключения о том, что точка $x = 0$ является глобально экспоненциально устойчивой, если не наложим дополнительные условия на линейный рост $\|T(x)\| \leq L_1\|x\|$ и $\|T^{-1}(z)\| \leq L_2\|z\|$, которые должны выполняться глобально.

следовали рассматриваемую здесь систему, но замкнутую управлением $u = \psi(x)$. Сравнение соответствующих результатов выявляет эффект наличия дополнительной компоненты v в законе управления. В примере 13.18 было показано, что закон управления $u = \psi(x)$ стабилизирует систему при введении ограничения на k

$$k < \frac{1}{2\sqrt{p_{12}^2 + p_{22}^2}}.$$

В рассматриваемом здесь случае это ограничение снимается, но при условии, что нам известно значение k . \triangle

Пример 14.6. Рассмотрим снова уравнение маятника из предыдущего примера. На этот раз предположим, что точка подвеса маятника движется в горизонтальном направлении с ускорением, заданным ограниченной и зависящей от времени функцией. Для простоты изложения пренебрежем трением ($b = 0$). Уравнение состояния имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a \sin x_1 + cu + h(t) \cos x_1,\end{aligned}$$

где $h(t)$ — (нормализованное) ускорение движения точки подвеса в горизонтальном направлении, такое что $|h(t)| \leq H$ для всех $t \geq 0$. Номинальная модель и соответствующий номинальный закон управления определяются так же, как и в предыдущем примере (при $b = 0$). Неопределенный член δ удовлетворяет неравенству

$$|\delta| \leq \rho_1 \|x\|_2 + \varkappa_0 |v| + H/\hat{c},$$

где ρ_1 и \varkappa_0 — те же, что и в предыдущем примере. В рассматриваемом здесь случае $\rho(x) = \rho_1 \|x\|_2 + H/\hat{c}$ и эта функция, как легко видеть, не обращается в нуль в $x = 0$. Выбор η в законе управления (14.41) должен удовлетворять $\eta \geq (\rho_1 \|x\|_2 + H/\hat{c})/(1 - \varkappa_0)$. Положим $\eta(x) = \eta_0 + \rho_1 \|x\|_2/(1 - \varkappa_0)$, где $\eta_0 \geq H/\hat{c}(1 - \varkappa_0)$. В предыдущем примере мы, не умаляя общности, положили $\eta(0) = 1$, что в рассматриваемой здесь ситуации представляется единственной возможной модификацией закона управления, которую следует сделать для того, чтобы учесть факт не обращения в нуль члена возмущения $h(t) \cos x_1$. Поскольку $\rho(0) \neq 0$, следствие 14.1 неприменимо. С использованием теоремы 14.3 мы можем лишь заключить, что решения замкнутой системы равномерно предельно ограничены и соответствующая предельная граница пропорциональна $\sqrt{\varepsilon}$. \triangle

14.2.2. Нелинейное демпфирование

Рассмотрим снова систему (14.30) при $\delta(t, x, u) = \Gamma(t, x)\delta_0(t, x, u)$:

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x)[u + \Gamma(t, x)\delta_0(t, x, u)]. \quad (14.47)$$

Так же как и ранее, мы будем предполагать, что функции f и G известны, а $\delta_0(t, x, u)$ — неопределенный член. Функция $\Gamma(t, x)$ пред-

полагается известной, f , G , Γ и δ_0 — кусочно-непрерывные по t и локально лишицевые по x и u для всех $(t, x, u) \in [0, \infty) \times R^n \times R^p$ функции. Предполагается, что δ_0 равномерно ограничена для всех (t, x, u) . Пусть $\psi(t, x)$ — номинальный стабилизирующий закон управления, обеспечивающий глобальную равномерную асимптотическую устойчивость начала координат замкнутой номинальной системы (14.32). Предположим, что существует функция Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющая (14.33) и (14.34) для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times R^n$, где функции α_1 , α_2 и α_3 принадлежат классу \mathcal{K}_∞ . Если известна верхняя граница $\|\delta_0(t, x, u)\|$, в соответствии с вышеизложенной процедурой можно построить составляющую закона управления v , обеспечивающую робастную глобальную стабилизацию. В этом параграфе мы покажем, что даже в случае, когда верхняя граница δ_0 неизвестна, оказывается возможным найти компоненту закона управления v , обеспечивающую ограниченность траекторий замкнутой системы. С этой целью положим $u = \psi(t, x) + v$. Тогда производная V вдоль траекторий замкнутой системы удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(f + G\psi) + \frac{\partial V}{\partial x}G(v + \Gamma\delta_0) \leq -\alpha_3(\|x\|) + w^T(v + \Gamma\delta_0),$$

где $w^T = [\partial V / \partial x]G$. Полагая

$$v = -kw\|\Gamma(t, x)\|_2^2, \quad k > 0, \quad (14.48)$$

получаем

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|) - k\|w\|_2^2\|\Gamma\|_2^2 + \|w\|_2\|\Gamma\|_2k_0,$$

где k_0 — неизвестная верхняя граница $\|\delta_0\|$. Член

$$-k\|w\|_2^2\|\Gamma\|_2^2 + \|w\|_2\|\Gamma\|_2k_0$$

принимает максимальное значение $k_0^2/4k$ при $\|w\|_2\|\Gamma\|_2 = k_0/2k$. Поэтому,

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|_2) + \frac{k_0^2}{4k}.$$

Поскольку функция α_3 принадлежит классу \mathcal{K}_∞ , производная \dot{V} всегда отрицательна вне некоторого шара. Из теоремы 4.18 следует, что при любом начальном состоянии $x(t_0)$ решение замкнутой системы равномерно ограничено. Синтезированный по Ляпунову закон управления (14.48) называется *нелинейным демпфированием* (nonlinear damping). Сформулируем полученный результат в виде следующей леммы.

Лемма 14.1. Рассмотрим систему (14.47). Пусть $\psi(t, x)$ — стабилизирующий закон управления для номинальной системы (14.31) и соответствующая функция Ляпунова $V(t, x)$ удовлетворяет (14.33) и (14.34) для всех $t \geq 0$ и $x \in R^n$ и некоторых функций α_1 , α_2 и α_3 класса \mathcal{K}_∞ . Предположим, что неопределенный член δ_0 равномерно ограничен при $(t, x, u) \in [0, \infty) \times R^n \times R^p$. Пусть v определяется

равенством (14.48) и $u = \psi(t, x) + v$. Тогда для любого $x(t_0) \in R^n$ решение замкнутой системы равномерно ограничено.

Пример 14.7. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x} = x^2 + u + x\delta_0(t),$$

где $\delta_0(t)$ — ограниченная функция от t . Номинальный стабилизирующий закон управления имеет вид $\psi(x) = -x^2 - x$ и соответствующая функция Ляпунова $V(x) = x^2$ удовлетворяет (14.33) и (14.34) глобально при $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = \alpha_3(r) = r^2$. Составляющая нелинейного демпфирования (14.48) с $k = 1$ имеет вид $v = -2x^3$. Замкнутая система

$$\dot{x} = -x - 2x^3 + x\delta_0(t)$$

имеет ограниченное решение вне зависимости от того, насколько велико ограниченное возмущение δ_0 , и это обусловлено наличием члена нелинейного демпфирования $-2x^3$. \triangle

14.3. Бэкстеппинг

Начнем исследование этого метода с рассмотрения частного случая — простого интегратора. Рассмотрим систему

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi, \quad (14.49)$$

$$\dot{\xi} = u, \quad (14.50)$$

где $[\eta, \xi]^T \in R^{n+1}$ — состояние и $u \in R$ — управление. Функции $f : D \rightarrow R^n$ и $g : D \rightarrow R^n$ являются гладкими¹⁾ в области $D \subset R^n$, содержащей точку $\eta = 0$. Также предполагается, что $f(0) = 0$. Цель заключается в построении закона управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающего стабилизацию начала координат ($\eta = 0, \xi = 0$). Далее будет предполагаться, что функции f и g известны. Система может рассматриваться как каскадное соединение двух подсистем (см. рисунок 14.15(a)). Первая подсистема определяется уравнением состояния (14.49), в котором ξ рассматривается в качестве входа, а вторая подсистема представляет собой интегратор (14.50). Предположим, что подсистема (14.49) может быть стабилизована гладким законом управления с обратной связью по состоянию $\xi = \phi(\eta)$, $\phi(0) = 0$, т. е. начало координат системы

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)$$

¹⁾ Для простоты изложения мы проводим анализ в предположении, что все функции гладкие. При рассмотрении конкретных задач часто оказывается достаточным предположить существование производных до некоторого порядка.

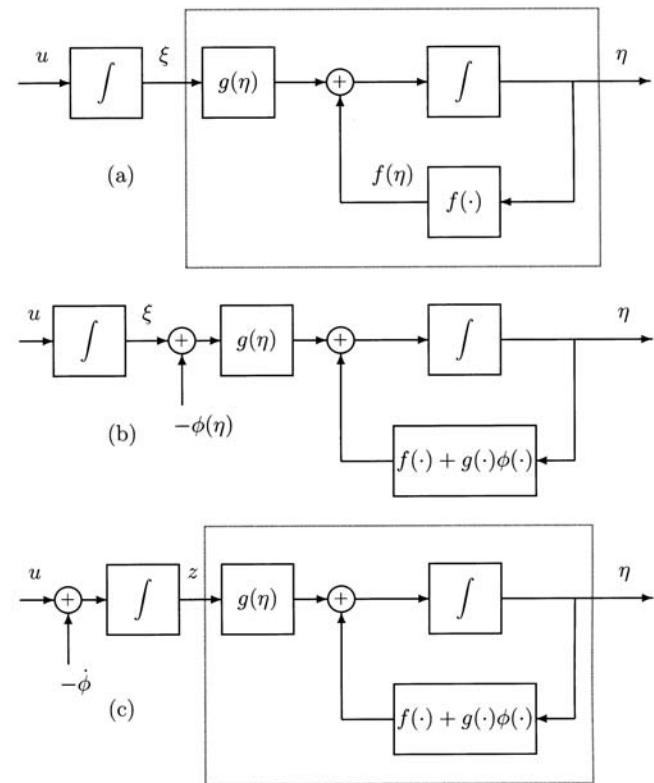


Рис. 14.15. (a) блок-схема системы (14.49)–(14.50); (b) та же система с $\phi(\eta)$; (c) бэкстеппинг — введение $-\phi(\eta)$ через интегратор

является асимптотически устойчивым. Предположим также, что нам известна (гладкая, положительно определенная) функция Ляпунова $V(\eta)$, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\partial V}{\partial \eta}[f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta), \quad \forall \eta \in D, \quad (14.51)$$

где $W(\eta)$ — положительно определенная функция. Прибавляя и вычитая $g(\eta)\phi(\eta)$ из правой части (14.49), получаем эквивалентное представление

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)[\xi - \phi(\eta)], \\ \dot{\xi} &= u, \end{aligned}$$

которому соответствует блок-схема, изображенная на рисунке 14.15(b). Замена переменных

$$z = \xi - \phi(\eta)$$

приводит к получению системы

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z, \\ \dot{z} &= u - \dot{\phi},\end{aligned}$$

которой соответствует блок-схема, изображенная на рисунке 14.15(с). Процедура перехода от представления системы в виде, изображенном на рисунке 14.15(б), к представлению, изображеному на рисунке 14.15(с), может рассматриваться как «бэкстеппинг»¹⁾ функции $-\phi(\eta)$ через интегратор. Производная ϕ может быть вычислена, т. к. функции f , g и ϕ известны:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi].$$

Положив, $v = u - \dot{\phi}$, можно преобразовать систему в каскадное соединение двух подсистем

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z, \\ \dot{z} &= v,\end{aligned}$$

сходное с представлением системы, с которого мы начали наше исследование в этом параграфе, но в последнем представлении первая подсистема имеет асимптотически устойчивое начало координат при нулевом входе. Эта особенность будет использована при построении v для стабилизации всей системы. Используя

$$V_c(\eta, \xi) = V(\eta) + \frac{1}{2}z^2$$

в качестве функции Ляпунова, получаем

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= \frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta)z + zv \leqslant \\ &\leqslant -W(\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta)z + zv.\end{aligned}$$

Выбор

$$v = -\frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - kz, \quad k > 0$$

приводит к неравенству

$$\dot{V}_c \leqslant -W(\eta) - kz^2,$$

из которого следует, что начало координат ($\eta = 0$, $z = 0$) асимптотически устойчиво. Поскольку $\phi(0) = 0$, можно заключить, что начало

¹⁾ Прим. ред. перев. — «Backstepping» в буквальном переводе - «обратный шаг», «попятный шаг». Метод был предложен П.Кокотовичем и его учениками в 1990г., хотя аналогичные идеи публиковались и ранее. В отечественной литературе употребляется также термин «метод обхода интегратора», а для более общих методов - «теративный синтез», «пошаговый синтез» [Д28, Д29, Д49].

координат ($\eta = 0$, $\xi = 0$) асимптотически устойчиво. Подставляя выражения для v , z и ϕ , получаем закон управления с обратной связью по состоянию:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k[\xi - \phi(\eta)]. \quad (14.52)$$

Если все предположения выполнены глобально и $V(\eta)$ радиально неограничена, можно заключить, что начало координат глобально асимптотически устойчиво. Сформулируем полученный результат в виде следующей леммы.

Лемма 14.2. Рассмотрим систему (14.49)–(14.50). Пусть $\phi(\eta)$ — стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию для системы (14.49) с $\phi(0) = 0$ и $V(\eta)$ — функция Ляпунова, удовлетворяющая (14.51) для некоторой положительно определенной функции $W(\eta)$. Тогда закон управления с обратной связью по состоянию (14.52) стабилизирует начало координат системы (14.49)–(14.50) и соответствующая функция Ляпунова имеет вид $V(\eta) + [\xi - \phi(\eta)]^2/2$. Кроме того, если все предположения выполнены глобально и $V(\eta)$ радиально неограничена, начало координат глобально асимптотически устойчиво.

Пример 14.8. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= u,\end{aligned}$$

которая принимает вид (14.49)–(14.50), если положить $\eta = x_1$ и $\xi = x_2$. Начнем исследование со скалярной системы

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2,$$

в которой x_2 выступает в качестве входа. Построим закон управления с обратной связью $x_2 = \phi(x_1)$, стабилизирующий начало координат $x_1 = 0$. При

$$x_2 = \phi(x_1) = -x_1^2 - x_1$$

исключается нелинейный член x_1^2 и мы получаем¹⁾

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3$$

и $V(x_1) = x_1^2/2$ удовлетворяет

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_1^4 \leqslant -x_1^2, \quad \forall x_1 \in R.$$

¹⁾ Мы намеренно не исключаем член $-x_1^3$, т. к. он обеспечивает нелинейное демпфирование. (См. пример 13.19.)

Следовательно, начало координат системы $\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3$ глобально экспоненциально устойчиво. Для выполнения процедуры бэкстеппинга, выполним замену переменных

$$z_2 = x_2 - \phi(x_1) = x_2 + x_1 + x_1^2,$$

которая приводит систему к следующему виду:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - x_1^3 + z_2, \\ \dot{z}_2 &= u + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2).\end{aligned}$$

Используя

$$V_c(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$$

в качестве композитной функции Ляпунова, получаем

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= x_1(-x_1 - x_1^3 + z_2) + z_2[u + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2)] = \\ &= -x_1^2 - x_1^4 + z_2[x_1 + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) + u].\end{aligned}$$

Положив

$$u = -x_1 - (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) - z_2,$$

получаем

$$\dot{V}_c = -x_1^2 - x_1^4 - z_2^2.$$

Следовательно, начало координат глобально асимптотически устойчиво. \triangle

Выполнение в предыдущем примере процедуры бэкстеппинга с одним интегратором не составило труда вследствие простоты скалярного случая. Для систем большего порядка этот результат можно использовать путем рекурсивного применения описанной выше процедуры бэкстеппинга. Эта идея иллюстрируется следующим примером.

Пример 14.9. Система третьего порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

состоит из системы второго порядка, которую мы рассмотрели в предыдущем примере, и дополнительного интегратора в канале входа. Применим процедуру бэкстеппинга аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере. После выполнения первого шага получаем, что система второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3,\end{aligned}$$

где переменная x_3 рассматривается в качестве входа, глобально стабилизируется законом управления

$$x_3 = -x_1 - (1 + 2x_1)(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - (x_2 + x_1 + x_1^2) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x_1, x_2)$$

и функция

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1 + x_1^2)^2$$

является соответствующей функцией Ляпунова. Для выполнения следующего шага процедуры бэкстеппинга выполним замену переменных

$$z_3 = x_3 - \phi(x_1, x_2),$$

в результате чего получим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= \phi(x_1, x_2) + z_3, \\ \dot{z}_3 &= u - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(\phi + z_3).\end{aligned}$$

Используя $V_c = V + z_3^2/2$ в качестве композитной функции Ляпунова, получаем

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(z_3 + \phi) + \\ &\quad + z_3 \left[u - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(z_3 + \phi) \right] = \\ &= -x_1^2 - x_1^4 - (x_2 + x_1 + x_1^2)^2 + \\ &\quad + z_3 \left[\frac{\partial V}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(z_3 + \phi) + u \right].\end{aligned}$$

Полагая

$$u = -\frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(z_3 + \phi) - z_3,$$

получаем

$$\dot{V}_c = -x_1^2 - x_1^4 - (x_2 + x_1 + x_1^2)^2 - z_3^2.$$

Следовательно, начало координат глобально асимптотически устойчиво. \triangle

Абстрагируясь от частного случая (14.49)–(14.50), рассмотрим систему общего вида

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi, \tag{14.53}$$

$$\dot{\xi} = f_a(\eta, \xi) + g_a(\eta, \xi)u, \tag{14.54}$$

где f_a и g_a — гладкие функции. Если неравенство $g_a(\eta, \xi) \neq 0$ выполнено в рассматриваемой области, замена входа

$$u = \frac{1}{g_a(\eta, \xi)}[u_a - f_a(\eta, \xi)], \tag{14.55}$$

преобразует подсистему (14.54) к виду, соответствующему простому интегратору $\dot{\xi} = u_a$. Поэтому, если существуют стабилизирующая обратная связь $\phi(\eta)$ и функция Ляпунова $V(\eta)$, такие что условия леммы

14.2 выполнены для (14.53), то с использованием этой леммы и выражения (14.55) получаем

$$\begin{aligned} u &= \phi_c(\eta, \xi) = \\ &= \frac{1}{g_a(\eta, \xi)} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k[\xi - \phi(\eta)] - f_a(\eta, \xi) \right\}, \end{aligned} \quad (14.56)$$

где $k > 0$ — некоторая константа. При этом

$$V_c(\eta, \xi) = V(\eta) + \frac{1}{2}[\xi - \phi(\eta)]^2. \quad (14.57)$$

Выражения (14.56) и (14.57) представляют собой, соответственно, стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию и функцию Ляпунова для совокупной системы (14.53)–(14.54). Рекурсивное применение процедуры бэкстеппинга позволяет получить стабилизирующий закон для *треугольных систем* (strict-feedback systems) вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)z_1, \\ \dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2, \\ \dot{z}_2 &= f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2)z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{k-1} &= f_{k-1}(x, z_1, \dots, z_{k-1}) + g_{k-1}(x, z_1, \dots, z_{k-1})z_k, \\ \dot{z}_k &= f_k(x, z_1, \dots, z_k) + g_k(x, z_1, \dots, z_k)u, \end{aligned}$$

где $x \in R^n$, z_i ($i = 1, \dots, k$) — скаляры и f_i ($i = 0, \dots, k$) обращаются в нуль в начале координат. Использование в определении этих систем термина «треугольный» обусловлено тем, что нелинейные функции f_i и g_i в уравнениях для \dot{z}_i ($i = 1, \dots, k$) зависят только от x, z_1, \dots, z_i , т. е. только от переменных состояния, по которым осуществляется обратная связь. Далее предполагается, что в рассматриваемой области выполнено

$$g_i(x, z_1, \dots, z_i) \neq 0, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Рекурсивная процедура начинается с рассмотрения системы

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)z_1,$$

в которой z_1 рассматривается в качестве входа. Предположим, что нам известны стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию этой системы $z_1 = \phi_0(x)$, $\phi_0(0) = 0$, и функция Ляпунова $V_0(x)$, такая что в рассматриваемой области выполнено неравенство

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}[f_0(x) + g_0(x)\phi_0(x)] \leq -W(x)$$

для некоторой положительно определенной функции $W(x)$. В большинстве приложений переменная x является скалярной, что упрощает решение задачи стабилизации. В предположении, что нам известны $\phi_0(x)$ и $V_0(x)$, перейдем к систематическому выполнению процедуры бэкстеппинга. Во-первых, рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)z_1, \\ \dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2 \end{aligned}$$

как специальный случай системы (14.53)–(14.54) при

$$\eta = x, \quad \xi = z_1, \quad u = z_2, \quad f = f_0, \quad g = 90, \quad f_a = f_1, \quad g_a = g_1.$$

Используя (14.56) и (14.57), получаем стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию и функцию Ляпунова:

$$\phi_1(x, z_1) = \frac{1}{g_1} \left[\frac{\partial \phi_0}{\partial x}(f_0 + g_0 z_1) - \frac{\partial V_0}{\partial x} g_0 - k_1(z_1 - \phi) - f_1 \right], \quad k_1 > 0,$$

$$V_1(x, z_1) = V_0(x) + \frac{1}{2}[z_1 - \phi(x)]^2.$$

Далее, рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)z_1, \\ \dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2, \\ \dot{z}_2 &= f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2)z_3 \end{aligned}$$

как специальный случай системы (14.53)–(14.54) при

$$\eta = \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \xi = z_2, \quad u = z_3, \quad f = \begin{bmatrix} f_0 + g_0 z_1 \\ f_1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \end{bmatrix}, \quad f_a = f_2, \quad g_a = g_2.$$

Используя (14.56) и (14.57), получаем стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию и функцию Ляпунова:

$$\phi_2(x, z_1, z_2) = \frac{1}{g_2} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(f_0 + g_0 z_1) + \frac{\partial \phi_1}{\partial z_1}(f_1 + g_1 z_2) - \frac{\partial V_1}{\partial z_1} g_1 - k_2(z_2 - \phi_1) - f_2 \right]$$

$(k_2 > 0)$ и

$$V_2(x, z_1, z_2) = V_1(x, z_1) + \frac{1}{2}[z_2 - \phi_2(x, z_1)]^2.$$

Эти шаги процедуры бэкстеппинга последовательно выполняются k раз, в результате чего получаем для совокупной системы стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию $u = \phi_k(x, z_1, \dots, z_k)$ и соответствующую функцию Ляпунова $V_k(x, z_1, \dots, z_k)$.

Пример 14.10. Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, представленную в специальной нормальной форме:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)z_1, \\ \dot{z}_1 &= z_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r, \\ \dot{z}_r &= \gamma(x, z)[u - \alpha(x, z)], \\ y &= z_1,\end{aligned}$$

где $x \in R^{n-r}$, z_i ($i = 1, \dots, r$) — скаляры и $\gamma(x, z) \neq 0$ для всех (x, z) . Это представление является специальным случаем представления в нормальной форме (13.16)–(13.18), т. к. уравнение для \dot{x} имеет вид $\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)z_1$, что является частным случаем соответствующего уравнения $\dot{x} = f_0(x, z)$ в нормальной форме. Система является треугольной. Ее начало координат может быть глобально стабилизировано законом управления, полученным с использованием рекурсивного применения процедуры бэкстеппинга, если могут быть найдены гладкая функция $\phi_0(x)$ и гладкая радиально неограниченная функция Ляпунова $V_0(x)$, такие что неравенство

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}[f_0(x) + g_0(x)\phi_0(x)] \leq -W(x), \quad \forall x \in R^n$$

выполнено для некоторой положительно определенной функции $W(x)$. Если система является минимально-фазовой, начало координат системы $\dot{x} = f_0(x)$ глобально асимптотически устойчиво и нам известна функция Ляпунова $V_0(x)$, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}f_0(x) \leq -W(x), \quad \forall x \in R^n$$

для некоторой положительно определенной функции $W(x)$, то можно положить $\phi_0(x) = 0$. В противном случае, следует выполнить процедуру бэкстеппинга для $\phi_0(x)$ и соответствующей $V_0(x)$. Из этого следует, что метод бэкстеппинга позволяет найти стабилизирующий закон управления для неминимально-фазовых систем при условии, что разрешима задача стабилизации для нуль-динамики. \triangle

Пример 14.11. Система второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\eta + \eta^2\xi, \\ \dot{\xi} &= u,\end{aligned}$$

была рассмотрена в примере 13.16, где было показано, что закон управления $u = -k\xi$ при достаточно большом $k > 0$ может обеспечить полуглобальную стабилизацию. В рассматриваемом здесь примере будет

показано, что с использованием метода бэкстеппинга можно обеспечить глобальную стабилизацию. Рассмотрим систему

$$\dot{\eta} = -\eta + \eta^2\xi.$$

Можно легко показать, что $\xi = 0$ и при $V_0(\eta) = \eta^2/2$ справедливо

$$\frac{\partial V_0}{\partial \eta}(-\eta) = -\eta^2, \quad \forall \eta \in R.$$

Используя $V = V_0 + \xi^2/2 = (\eta^2 + \xi^2)/2$, получаем

$$\dot{V} = \eta(-\eta + \eta^2\xi) + \xi u = -\eta^2 + \xi(\eta^3 + u).$$

Таким образом, закон управления

$$u = -\eta^3 - k\xi, \quad k > 0$$

обеспечивает глобальную стабилизацию начала координат. \triangle

Пример 14.12. Рассмотрим систему¹⁾

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \eta^2 - \eta\xi, \\ \dot{\xi} &= u,\end{aligned}$$

аналогичную той, что была исследована в предыдущем примере. В рассматриваемом здесь случае уравнение $\dot{\eta} = \eta^2 - \eta\xi$ не может быть стабилизировано законом управления $\xi = 0$. Тем не менее, можно легко показать, что при $\xi = \eta + \eta^2$ и $V_0(\eta) = \eta^2/2$ справедливо

$$\frac{\partial V_0}{\partial \eta}[\eta^2 - \eta(\eta + \eta^2)] = -\eta^4, \quad \forall \eta \in R.$$

Используя $V = V_0 + (\xi - \eta - \eta^2)^2/2$, получаем

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \eta(\eta^2 - \eta\xi) + (\xi - \eta - \eta^2)[u - (1 + 2\eta)(\eta^2 - \eta\xi)] = \\ &= -\eta^4 + (\xi - \eta - \eta^2)[- \eta^2 + u - (1 + 2\eta)(\eta^2 - \eta\xi)].\end{aligned}$$

Применяя закон управления

$$u = (1 + 2\eta)(\eta^2 - \eta\xi) + \eta^2 - k(\xi - \eta - \eta^2), \quad k > 0,$$

получаем

$$\dot{V} = -\eta^4 - k(\xi - \eta - \eta^2)^2.$$

Следовательно, начало координат глобально асимптотически устойчиво. \triangle

В предыдущих двух параграфах мы рассмотрели методы построения законов управления, основанных на методах скользящего режима и ляпуновского синтеза, и показали, как эти законы управления могут быть

¹⁾ Рассматривая $y = \xi$ в качестве выхода, можно показать, что эта система не является минимально-фазовой, т. к. начало координат уравнения нуль-динамики $\dot{\eta} = \eta^2$ неустойчиво.

использованы для робастной стабилизации систем с неопределенностями, удовлетворяющих условию согласованности. При использовании метода бэкстеппинга это условие может быть ослаблено. В качестве иллюстрации этого утверждения рассмотрим систему с одним выходом

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi + \delta_\eta(\eta, \xi), \quad (14.58)$$

$$\dot{\xi} = f_a(\eta, \xi) + g_a(\eta, \xi)u + \delta_\xi(\eta, \xi), \quad (14.59)$$

определенную в области $D \subset R^{n+1}$, содержащей начало координат ($\eta = 0, \xi = 0$), где $\eta \in R^n$ и $\xi \in R$. Предположим, что $g_a(\eta, \xi) \neq 0$ и все функции являются гладкими для всех $(\eta, \xi) \in D$. Пусть f, g, f_a и g_a известны, и δ_η и δ_ξ — неопределенные члены. Мы будем также предполагать, что f и f_a обращаются в нуль в начале координат и неопределенные члены удовлетворяют неравенствам

$$\|\delta_\eta(\eta, \xi)\|_2 \leq a_1 \|\eta\|_2, \quad (14.60)$$

$$|\delta_\xi(\eta, \xi)| \leq a_2 \|\eta\|_2 + a_3 |\xi|, \quad (14.61)$$

для всех $(\eta, \xi) \in D$. Неравенство (14.60) определяет класс неопределенностей $\delta_\eta(\eta, \xi)$, верхняя граница которых зависит только от η . Тем не менее, это условие менее ограничительно, чем условие согласованности, которое в рассматриваемом случае имеет вид $\delta_\eta = 0$. Рассмотрим систему (14.58) и предположим, что мы нашли стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию этой системы $\xi = \phi(\eta)$, $\phi(0) = 0$, и (гладкую, положительно определенную) функцию Ляпунова $V(\eta)$, такие что неравенство

$$\frac{\partial V}{\partial \eta}[f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta) + \delta_\eta(\eta, \xi)] \leq -b \|\eta\|_2^2, \quad (14.62)$$

выполнено для всех $(\eta, \xi) \in D$ для некоторой положительной константы b . Из неравенства (14.62) следует, что $\eta = 0$ является асимптотически устойчивой точкой равновесия системы

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta) + \delta_\eta(\eta, \xi).$$

Предположим далее, что $\phi(\eta)$ удовлетворяет на D неравенствам

$$|\phi(\eta)| \leq a_4 \|\eta\|_2, \quad \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right\|_2 \leq a_5. \quad (14.63)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V_c(\eta, \xi) = V(\eta) + \frac{1}{2}[\xi - \phi(\eta)]^2, \quad (14.64)$$

производная которой вдоль траекторий системы (14.58)–(14.59) определяется равенством

$$\dot{V}_c = \frac{\partial V}{\partial \eta}(f + g\phi + \delta_\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta}g(\xi - \phi) +$$

$$+(\xi - \phi) \left[f_a + g_a u + \delta_\xi - \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(f + g\xi + \delta_\eta) \right].$$

Полагая

$$u = \frac{1}{g_a} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(f + g\xi) - \frac{\partial V}{\partial \eta}g - f_a - k(\xi - \phi) \right], \quad k > 0, \quad (14.65)$$

и используя (14.62), получаем

$$\dot{V}_c \leq -b \|\eta\|_2^2 + (\xi - \phi) \left[\delta_\xi - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \delta_\eta \right] - k(\xi - \phi)^2.$$

С учетом (14.60), (14.61) и (14.63) можно показать, что неравенство

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &\leq -b \|\eta\|_2^2 + 2a_6 \|\eta\|_2 |\xi - \phi| - (k - a_3)(\xi - \phi)^2 = \\ &= - \begin{bmatrix} \|\eta\|_2 \\ |\xi - \phi| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b & -a_6 \\ -a_6 & (k - a_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\eta\|_2 \\ |\xi - \phi| \end{bmatrix} \end{aligned}$$

выполнено для некоторой $a_6 \geq 0$. Выбрав

$$k > a_3 + \frac{a_6^2}{b},$$

получаем, что неравенство

$$\dot{V}_c \leq -\sigma [\|\eta\|_2^2 + |\xi - \phi|^2]$$

выполнено для некоторой $\sigma > 0$. Таким образом, мы доказали следующую лемму.

Лемма 14.3. Рассмотрим систему (14.58)–(14.59), в которой неопределенность удовлетворяет неравенствам (14.60) и (14.61). Пусть $\phi(\eta)$ — стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию для (14.58), удовлетворяющий (14.63), и $V(\eta)$ — функция Ляпунова, удовлетворяющая (14.62). Тогда закон управления с обратной связью по состоянию (14.65) с достаточно большим коэффициентом k стабилизирует начало координат системы (14.58)–(14.59). Кроме того, если все предположения выполнены глобально и функция $V(\eta)$ радиально неограничена, начало координат глобально асимптотически устойчиво.

В качестве примера использования метода бэкстеппинга рассмотрим задачу робастной стабилизации системы

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + \delta_i(x), & 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{x}_n = \gamma(x)[u - \alpha(x)] + \delta_n(x), \end{cases} \quad (14.66)$$

определенной в области $D \subset R^n$, содержащей начало координат $x = 0$; $x = [x_1, \dots, x_n]^T$. Предположим, что $\gamma(x) \neq 0$ и все функции являются гладкими для всех $x \in D$. Пусть α и γ известны, и $\delta_i, 1 \leq i \leq n$, — неопределенные члены. Номинальная система линеаризуема

обратной связью. Мы будем предполагать, что неопределенные члены удовлетворяют для всех $x \in D$ неравенствам

$$|\delta_i(x)| \leq a_i \sum_{k=1}^i |x_k|, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (14.67)$$

где неотрицательные константы a_i ($i = 1, \dots, n$) известны. Неравенства (14.67) выделяют класс неопределенностей, характеризующийся тем, что верхние границы неопределенностей $\delta_i(x)$, $1 \leq i \leq n-1$, зависят только от переменных с x_1 по x_i , т.е. соответствующие условия на верхние границы представлены в треугольной форме. Тем не менее, эти ограничения представляются менее ограничительными по сравнению с условием согласованности, которое в рассматриваемом случае имело бы вид $\delta_i = 0$, $1 \leq i \leq n-1$. Выполняя рекурсивную процедуру построения закона управления с использованием метода бэкстеппинга, начнем с рассмотрения скалярной системы

$$\dot{x}_1 = x_2 + \delta_1(x),$$

где x_2 выступает в роли входа этой системы и $\delta_1(x)$ удовлетворяет неравенству $|\delta_1(x)| \leq a_1|x_1|$. В этой скалярной системе неопределенность удовлетворяет условию соответствия. Начало координат $x_1 = 0$ может быть робастно стабилизировано сильной обратной связью $x_2 = -k_1 x_1$, где $k_1 > 0$ — достаточно большой коэффициент. Пусть $V_1(x_1) = x_1^2/2$ — функция Ляпунова. Тогда

$$\dot{V}_1 = x_1[-k_1 x_1 + \delta_1(x)] \leq -(k_1 - a_1)x_1^2$$

и начало координат стабилизировано для всех $k_1 > a_1$. Далее, согласно методу бэкстеппинга, лемма 14.3 применяется рекурсивно, в результате чего мы получаем стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию. Выполнение этой процедуры иллюстрируется следующим примером.

Пример 14.13. Необходимо построить закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий стабилизацию системы второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u, \end{aligned}$$

где θ_1 и θ_2 — неизвестные параметры, удовлетворяющие неравенствам $|\theta_1| \leq a$ и $|\theta_2| \leq b$; a и b — известные значения верхних границ этих параметров. При $\delta_1 = \theta_1 x_1 \sin x_2$ и $\delta_2 = \theta_2 x_2^2$ система принимает вид (14.66). Функция δ_1 удовлетворяет неравенству $|\delta_1| \leq a|x_1|$ глобально; функция δ_2 удовлетворяет неравенству $|\delta_2| \leq b\rho|x_2|$ на множестве $|x_2| \leq \rho$. Начиная выполнение процедуры с рассмотрения системы

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2,$$

положим $x_2 = \phi_1(x_1) = -k_1 x_1$ и $V_1(x_1) = x_1^2/2$. Тогда

$$\dot{V}_1 = x_1 \phi_1(x_1) + \theta_1 x_1^2 \sin x_2 \leq -(k_1 - a)x_1^2.$$

Выберем $k_1 = 1 + a$ и сделаем замену переменных $z_2 = x_2 + (1 + a)x_1$, в результате чего получим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1 + a)x_1 + \theta_1 x_1 \sin x_2 + z_2, \\ \dot{z}_2 &= \psi_1(x) + \psi_2(x, \theta) + u, \end{aligned}$$

где

$$\psi_1 = x_1 + (1 + a)x_2, \quad \psi_2 = (1 + a)\theta_1 x_1 \sin x_2 + \theta_2 x_2^2.$$

Используя $V_c = (x_1^2 + z_2^2)/2$ в качестве композитной функции Ляпунова, получаем

$$\dot{V}_c \leq -x_1^2 + z_2[x_1 + \psi_1(x) + \psi_2(x, \theta) + u].$$

Полагая

$$u = -x_1 - \psi_1(x) - kz_2,$$

можно получить оценку

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &\leq -x_1^2 + z_2\psi_2(x, \theta) - kz_2^2 \leq \\ &\leq -x_1^2 + a(1 + a)|x_1||z_2| + bx_2^2|z_2| - kz_2^2. \end{aligned}$$

В множестве

$$\Omega_c = \{x \in R^2 | V_c(x) \leq c\}$$

справедливо неравенство $|x_2| \leq \rho$ для некоторой ρ , зависящей от c).¹⁾ В множестве Ω_c справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &\leq -x_1^2 + a(1 + a)|x_1||z_2| + b\rho|z_2| - (1 + a)x_1|z_2| - kz_2^2 \leq \\ &\leq -x_1^2 + (1 + a)(a + b\rho)|x_1||z_2| - (k - b\rho)z_2^2. \end{aligned}$$

Выбор

$$k > b\rho + (1 + a)^2(a + b\rho)^2/4$$

гарантирует экспоненциальную устойчивость начала координат²⁾ и принадлежность множества Ω_c области притяжения. Поскольку выполнение предыдущего неравенства при любой $c > 0$ может быть обеспечено путем выбора достаточно большого k , полученный закон управления с обратной связью обеспечивает полуглобальную стабилизацию. △

Пример 14.14. Рассмотрим снова систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u, \end{aligned}$$

¹⁾ Для ρ справедлива оценка $\sqrt{2c(1 + k_1^2)}$.

²⁾ Отметим, что мы пришли к утверждению об экспоненциальной устойчивости, но в лемме сформулирован результат о асимптотической устойчивости. Чем объясняется этот факт?

где $|\theta_1| \leq a$ и $|\theta_2| \leq b$. В предыдущем примере мы ограничились анализом этой системы на компактном множестве, что позволило обеспечить полуглобальную стабилизацию для класса нелинейностей, удовлетворяющих неравенствам линейного роста (14.67). Здесь мы построим закон управления, обеспечивающий глобальную стабилизацию. Этот результат будет получен с использованием метода, представляющего собой комбинацию бэкстеппинга и метода ляпуновского синтеза. Выполним все шаги описанной в предыдущем примере процедуры до тех пор, пока не будет получено неравенство

$$\dot{V}_c \leq -x_1^2 + z_2[x_1 + \psi_1(x) + \psi_2(x, \theta) + u].$$

В примере 14.13 использовался закон управления $u = -x_1 - \psi_1(x) - kz_2$ с большим коэффициентом усиления k , обеспечивающим компенсацию эффектов, связанных с наличием в системе неопределенности. Для этого мы потребовали, чтобы нелинейный член x_2^2 был ограничен линейным членом $\rho|x_2|$. Здесь мы положим

$$u = -x_1 - \psi_1(x) - kz_2 + v, \quad k > 0,$$

где дополнительная составляющая закона управления v подлежит дальнейшему определению. В этом случае мы имеем

$$\dot{V}_c \leq -x_1^2 - kz_2^2 + z_2[\psi_2(x, \theta) + v].$$

С учетом того, что

$$|\psi_2(x, \theta)| \leq a(1+a)|x_1| + bx_2^2,$$

положим

$$v = \begin{cases} -\eta(x) \operatorname{sign}(z_2), & \text{если } \eta(x)|z_2| \geq \varepsilon, \\ -\eta^2(x)z_2/\varepsilon, & \text{если } \eta(x)|z_2| < \varepsilon, \end{cases}$$

где $\eta(x) = \eta_0 + a(1+a)|x_1| + bx_2^2$ для некоторых $\eta_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$. При $\eta(x)|z_2| \geq \varepsilon$ выполнено

$$z_2[\psi_2(x, \theta) + v] \leq |\psi_2||z_2| - \eta|z_2| \leq 0;$$

при $\eta(x)|z_2| < \varepsilon$ выполнено

$$z_2[\psi_2(x, \theta) + v] \leq |\eta||z_2| - \frac{\eta^2 z_2^2}{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда

$$\dot{V}_c \leq -x_1^2 - kz_2^2 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Это неравенство показывает, что траектория x за конечное время достигает шара B_r радиуса $r = k_0\sqrt{\varepsilon}$ для некоторого $k_0 > 0$. Внутри B_r справедливо неравенство

$$|\psi_2(x, \theta)| \leq a(1+a)|x_1| + br|x_2| \leq \rho_1(|x_1| + |z_2|)$$

для некоторой $\rho_1 > 0$, не зависящей от ε . В пересечении шара B_r и пограничного слоя $\{\eta(x)|z_2| < \varepsilon\}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &\leq -x_1^2 - kz_2^2 + \rho_1|x_1||z_2| + \rho_1|z_2|^2 - \frac{\eta_0^2 z_2^2}{\varepsilon} = \\ &= -\frac{1}{2}x_1^2 - kz_2^2 - \left[\frac{1}{2}x_1^2 - \rho_1|x_1||z_2| + \left(\frac{\eta_0^2}{\varepsilon} - \rho_1 \right) z_2^2 \right]. \end{aligned}$$

Член в скобках может быть сделан неотрицательным путем выбора достаточно малой ε . Тогда

$$\dot{V}_c \leq -\frac{1}{2}x_1^2 - kz_2^2$$

и, следовательно, начало координат является глобально асимптотически устойчивым. \triangle

В заключение этого параграфа заметим, что метод бэкстеппинга может быть использован в применении к системам с несколькими входами. Соответствующий метод называется *блочным бэкстеппингом*. Это оказывается возможным, если выполнены определенные условия невырожденности. Рассмотрим систему

$$\dot{\eta} = f(\eta) + G(\eta)\xi, \quad (14.68)$$

$$\dot{\xi} = f_a(\eta, \xi) + G_a(\eta, \xi)u, \quad (14.69)$$

где $\eta \in R^n$, $\xi \in R^m$, $u \in R^m$ и t может быть больше единицы. Предположим, что f , f_a , G и G_a — (известные) гладкие в рассматриваемой области функции, f и f_a обращаются в нуль в начале координат и $(m \times m)$ -матрица G_a невырождена. Предположим также, что подсистема (14.68) может быть стабилизирована гладким законом управления с обратной связью по состоянию этой системы $\xi = \phi(\eta)$, $\phi(0) = 0$, и нам известна (гладкая, положительно определенная) функция Ляпунова $V(\eta)$, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\partial V}{\partial \eta}[f(\eta) + G(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta)$$

для некоторой положительно определенной функции $W(\eta)$. Используя

$$V_c = V(\eta) + \frac{1}{2}[\xi - \phi(\eta)]^T[\xi - \phi(\eta)]$$

в качестве функции Ляпунова для всей системы, получаем

$$\dot{V}_c = \frac{\partial V}{\partial \eta}(f + G\phi) + \frac{\partial V}{\partial \eta}G(\xi - \phi) + [\xi - \phi]^T \left[f_a + G_a u - \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(f + G\xi) \right].$$

Полагая

$$u = G_a^{-1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(f + G\xi) - \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}G \right)^T - f_a - k(\xi - \phi) \right], \quad k > 0,$$

получаем оценку

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= \frac{\partial V}{\partial \eta}(f + G\phi) - k[\xi - \phi(\eta)]^T[\xi - \phi(\eta)] \leqslant \\ &\leqslant -W(\eta) - k[\xi - \phi(\eta)]^T[\xi - \phi(\eta)],\end{aligned}$$

из которой следует, что начало координат $(\eta = 0, \xi = 0)$ асимптотически устойчиво.

14.4. Управление на основе пассивности

В главе 6 мы ввели понятие пассивности системы и исследовали это свойство в контексте устойчивости систем с обратной связью. Идеи, лежащие в основе метода построения пассивного управления и которые будут изложены в этом параграфе, являются непосредственным применением результатов главы 6. Однако нет необходимости в использовании всех тех деталей анализа, с которыми мы познакомились ранее — достаточно напомнить определения понятий пассивности и наблюдаемости в нулевом состоянии.

Рассмотрим систему с p входами и p выходами:¹⁾

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (14.70)$$

$$y = h(x), \quad (14.71)$$

где f — локально липшицевая по (x, u) функция и h — непрерывная по x функция; $x \in R^n$ и $u \in R^m$. Предположим, что $f(0, 0) = 0$, т. е. начало координат $x = 0$ является точкой равновесия разомкнутой системы; $h(0) = 0$. Напомним, что система (14.70)–(14.71) является пассивной, если существует непрерывно дифференцируемая положительно полуопределенная функция $V(x)$ (называемая функцией запаса), такая что

$$u^T y \geqslant \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u), \quad \forall (x, u) \in R^n \times R^m. \quad (14.72)$$

Система является наблюдаемой в нулевом состоянии (zero observable), если не существует решения системы $\dot{x} = f(x, 0)$, которое оставалось бы постоянно в множестве $\{h(x) = 0\}$ и было бы отлично от тривиального решения $x(t) \equiv 0$. В этом параграфе мы будем предполагать, что функция запаса является положительно определенной. Основная идея построения пассивного управления сформулирована в следующей теореме.

Теорема 14.4. Если система (14.70)–(14.71)

1. пассивна с радиально неограниченной и положительно определенной функцией запаса, и
2. наблюдаемой в нулевом состоянии,

¹⁾ Прим. ред. перев. — Обычно в книге число входов обозначается через m (см. ниже). По-видимому, следует считать $p = m$.

то начало координат $x = 0$ может быть глобально стабилизируемо¹⁾ законом управления $u = -\phi(y)$, где ϕ — любая локально липшицева функция, такая что $\phi(0) = 0$ и $y^T \phi(y) > 0$ для всех $y \neq 0$.

Доказательство: Используем функцию запаса $V(x)$ в качестве функции Ляпунова для замкнутой системы

$$\dot{x} = f(x, -\phi(y)).$$

Производная функции V удовлетворяет оценке

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, -\phi(y)) \leqslant -y^T \phi(y) \leqslant 0.$$

Следовательно, \dot{V} является отрицательно полуопределенной и $\dot{V} = 0$, если и только если $y = 0$. С учетом свойства наблюдаемости системы в нулевом состоянии, получаем

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow u(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0.$$

Таким образом, из принципа инвариантности следует, что начало координат глобально асимптотически устойчиво. \square

Теорема представляется интуитивно понятной, если рассматривать функцию запаса в качестве энергии системы. Пассивная система имеет устойчивое начало координат. Все, что нужно сделать для стабилизации начала координат — это ввести в систему демпфирование, которое обеспечит диссиацию энергии при $x(t)$, не равном тождественно нулю. В теореме в качестве такого демпфирования выступает функция ϕ . Исследователь абсолютно свободен в выборе ϕ . Эта функция может быть выбрана так, чтобы обеспечить ограничение амплитуды u . Например, если управление u должно удовлетворять неравенствам $|u_i| \leqslant k_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$, можно положить $\phi_i(y) = k_i \text{sat}(y_i)$ или $\phi_i(y) = (2k_i/\pi) \arctg(y_i)$.

Область применения теоремы 14.4 может быть существенно расширена, если воспользоваться предложенным в главе 6 преобразованием непассивных систем в пассивные. Рассмотрим, например, специальный случай уравнения (14.70):

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u. \quad (14.73)$$

Предположим, что существует радиально неограниченная, положительно определенная, непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$, такая что

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leqslant 0, \quad \forall x.$$

¹⁾ Прим. ред. перев. — Напомним, что под глобальной стабилизацией автор понимает нахождение регулятора, обеспечивающего глобальную асимптотическую устойчивость замкнутой системы, см. п.12.1.

Пусть

$$y = h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial V}{\partial x} G(x) \right]^T.$$

Тогда система с входом u и выходом y является пассивной. Если, кроме того, она является наблюдаемой в нулевом состоянии, можно применить теорему 14.4.

Пример 14.15. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 + u.\end{aligned}$$

Пусть $V(x) = x_1^4/4 + x_2^2/2$. Тогда

$$\dot{V} = x_1^3 x_2 - x_2 x_1^3 + x_2 u = x_2 u.$$

Положим $y = x_2$ и заметим, что при $u = 0$ из $y(t) \equiv 0$ следует $x(t) \equiv 0$. Таким образом, все условия теоремы 14.4 выполнены и закон управления с обратной связью имеет вид $u = -kx_2$ или $u = -(2k/\pi) \operatorname{arctg}(x_2)$ и при любом коэффициенте $k > 0$ обеспечивает глобальную стабилизацию системы. \triangle

Свобода при выборе функции выхода разумеется является полезным обстоятельством, однако мы по-прежнему ограничены рассмотрением ситуации, когда начало координат разомкнутого уравнения состояния должно быть устойчиво. Мы сможем перейти к рассмотрению более широкого класса систем, если используем обратную связь для обеспечения пассивности системы. Рассмотрим снова систему (14.73). Если существуют замена обратной связи

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (14.74)$$

и функция выхода $h(x)$, такие что система

$$\dot{x} = f(x) + G(x)\alpha(x) + G(x)\beta(x)v, \quad (14.75)$$

$$y = h(x), \quad (14.76)$$

с входом v и выходом y удовлетворяет условиям теоремы 14.4, то начало координат глобально стабилизируемо с использованием $v = -\phi(y)$. Использование замены обратной связи для преобразования непассивной системы в пассивную известно как пассивизация или пассивификация системы.¹⁾

¹⁾ В работе [31] показано, что система (14.73) с выходом $y = h(x)$ локально эквивалентна при замене обратной связи пассивной системе с положительно определенной функцией запаса, если $\operatorname{rank}\{[\partial h/|\partial x](0)G(0)\} = p$ и нульдинамика имеет устойчивую точку равновесия в начале координат с соответствующей положительно определенной функцией Ляпунова.

Пример 14.16. Нелинейные уравнения динамики m -звенного манипулятора имеют вид

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = u,$$

где q — m -вектор обобщенных координат, соответствующих углам между звенями, u — m -вектор управлений и $M(q)$ — симметричная матрица инерции, являющаяся положительно определенной для всех $q \in R^m$. Член $C(q, \dot{q})\dot{q}$ соответствует центробежным силам и силам Кориолиса. Матрица C обладает тем свойством, что матрица $\dot{M} = -2C$ является косо-симметричной для всех $q, \dot{q} \in R^m$, где \dot{M} — полная производная $M(q)$ по t . Член $D\dot{q}$, где D — положительно полуопределенная симметричная матрица, соответствует вязкому трению. Член $g(q)$, соответствующий гравитационным силам, определяется равенством $g(q) = [\partial P(q)/\partial q]^T$, где $P(q)$ — полная потенциальная энергия звеньев, обусловленная действием сил гравитации. Рассмотрим задачу управления, целью которой является построение закона управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающего асимптотическое отслеживание выходом q постоянного командного сигнала q_r . Пусть $e = q - q_r$. Тогда e удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$M(q)\ddot{e} + C(q, \dot{q})\dot{e} + D\dot{e} + g(q) = u.$$

Наша цель — стабилизировать систему в точке ($e = 0, \dot{e} = 0$), однако, следует заметить, что эта точка не является точкой равновесия разомкнутой системы. Пусть

$$u = g(q) - K_p e + v,$$

где K_p — положительно определенная симметричная матрица и v — дополнительная составляющая закона управления, которую следует определить. Подставляя u в уравнение для \ddot{e} , получаем

$$M(q)\ddot{e} + C(q, \dot{q})\dot{e} + D\dot{e} + K_p e = v.$$

Рассмотрим функцию

$$V = \frac{1}{2}\dot{e}^T M(q)\dot{e} + \frac{1}{2}e^T K_p e$$

в качестве функции запаса. Функция V является положительно определенной и ее производная удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{e}^T M \ddot{e} + \frac{1}{2}\dot{e}^T \dot{M} \dot{e} + e^T K_p \dot{e} = \\ &= \frac{1}{2}\dot{e}^T (\dot{M} - 2C)\dot{e} - \dot{e}^T D\dot{e} - \dot{e}^T K_p e + \dot{e}^T v + e^T K_p \dot{e} \leqslant \\ &\leqslant \dot{e}^T v.\end{aligned}$$

Выбрав в качестве выхода $y = \dot{e}$, можно показать, что система с входом v и выходом y является пассивной с функцией запаса V . Интересно отметить, что пассивизирующая систему составляющая обратной связи $g(q) - K_p e$ преобразует потенциальную энергию системы и она

становится равна величине $(1/2)e^T K_p e$, имеющей единственную точку минимума в $e = 0$. Сумма кинетической энергии и преобразованной потенциальной энергии становится новой функцией запаса. При $v = 0$

$$y(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \dot{e}(t) \equiv 0 \Rightarrow \ddot{e}(t) \equiv 0 \Rightarrow K_p e(t) \equiv 0 \Rightarrow e(t) \equiv 0$$

и из этого следует, что система наблюдаема в нулевом состоянии. Таким образом, эта система может быть глобально стабилизируема обратной связью $v = -\phi(\dot{e})$, где ϕ — любая функция, такая что $\phi(0) = 0$ и $y^T \phi(y) > 0$ для всех $y \neq 0$. Выбрав $v = -K_d \dot{e}$, где K_d — положительно определенная симметричная матрица, получаем закон управления

$$u = g(q) - K_p(q - q_r) - K_d \dot{q}$$

который имеет вид классического PD-регулятора с членом, компенсирующим член гравитации. \triangle

Класс пассивизируемых систем включает каскадное соединение двух систем, первая из которых является пассивной, а вторая характеризуется тем, что ее начало координат является точкой равновесия соответствующей разомкнутой системы. Рассмотрим систему

$$\dot{z} = f_a(z) + F(z, y)y, \quad (14.77)$$

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad (14.78)$$

$$y = h(x), \quad (14.79)$$

где $f_a(0) = 0$, $f(0) = 0$ и $h(0) = 0$. Функции f_a , F , f и G предполагаются локально липшицевыми, а функция h — непрерывной. Мы будем рассматривать эту систему как каскадное соединение ведущей системы (driving system) (14.78)–(14.79) и ведомой системы (driven system) (14.77).¹⁾ Мы будем также предполагать, что представление (14.77)–(14.79) определено глобально, ведущая система пассивна с радиально неограниченной положительно определенной функцией запаса $V(x)$ и начало координат системы $\dot{z} = f_a(z)$ устойчиво. Кроме того, мы будем полагать, что нам известна радиально неограниченная функция Ляпунова $W(z)$ для системы $\dot{z} = f_a(z)$, которая удовлетворяет неравенству

$$\frac{\partial W}{\partial z} f_a(z) \leq 0, \forall z$$

¹⁾ Ведомая система вида $\dot{z} = f_0(z, y)$ с достаточно гладкой f_0 может быть представлена в виде (14.77), если проложить

$$f_a(z) = f_0(z, 0) \quad \text{и} \quad F(z, y) = \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial y}(z, sy) ds.$$

Используя $U(z, x) = W(z) + V(x)$ в качестве функции запаса для всей системы (14.77)–(14.79), получаем

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\partial W}{\partial z} f_a(z) + \frac{\partial W}{\partial z} F(z, y)y + \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} G(x)u \leq \\ &\leq \frac{\partial W}{\partial z} F(z, y)y + y^T u = y^T \left[u + \left(\frac{\partial W}{\partial z} F(z, y) \right)^T \right]. \end{aligned}$$

При использовании замены обратной связи вида

$$u = - \left(\frac{\partial W}{\partial z} F(z, y) \right)^T + v$$

получаем

$$\dot{U} \leq y^T v.$$

Следовательно, система

$$\dot{z} = f_a(z) + F(z, y)y, \quad (14.80)$$

$$\dot{x} = f(x) - G(x) \left(\frac{\partial W}{\partial z} F(z, y) \right)^T + G(x)v, \quad (14.81)$$

$$y = h(x), \quad (14.82)$$

с входом v и выходом y пассивна с функцией запаса U . Если система (14.80)–(14.82) наблюдаема в нулевом состоянии, то можно применить теорему 14.4 и показать, что начало координат этой системы глобально устойчиво.

Пример 14.17. Вращение твердого тела осуществляется под воздействием трех независимых управляющих моментов и соответствующая модель имеет следующий вид:¹⁾

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{1}{2}[I_3 + S(\rho) + \rho\rho^T]\omega, \\ M\dot{\omega} &= -S(\omega)M\omega + u, \end{aligned}$$

где $\omega \in R^3$ — вектор скорости и $\rho \in R^3$ — кинематические параметры, определяющие трехмерные матричные представления группы вращения. Матрица $S(x)$ является косо-симметричной и определяется равенством

$$S(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix};$$

M — положительно определенная симметричная матрица инерции и I_3 — единичная матрица размерности (3×3) . Положив $y = \omega$, можно

¹⁾ Вывод этой модели рассмотрен в книгах [97] и [151]. Если $\varepsilon \in R^3$ и $\eta \in R$ — параметры Эйлера, то $\rho = \varepsilon/\eta$.

привести эту систему к каскадному представлению (14.77)–(14.79) с ведущей системой

$$M\dot{\omega} = -S(\omega)M\omega + u, \quad y = \omega$$

и ведомой системой

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2}[I_3 + S(\rho) + \rho\rho^T]\omega.$$

Пусть $V(\omega) = (1/2)\omega^T M\omega$. Тогда с использованием свойства $\omega^T S(\omega) = 0$ можно показать, что

$$\dot{V} = \omega^T M\dot{\omega} = -\omega^T S(\omega)M\omega + \omega^T u = y^T u.$$

Следовательно, ведущая система пассивна. Неуправляемая ведомая система $\dot{\rho} = 0$ имеет устойчивую точку равновесия в $\rho = 0$ и любая радиально неограниченная, положительно определенная и непрерывно дифференцируемая функция $W(\rho)$ может рассматриваться в качестве соответствующей функции Ляпунова. Таким образом, все предположения выполнены и рассматриваемая система может быть пассивизирована обратной связью

$$u = -\left\{ \frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{1}{2}[I_3 + S(\rho) + \rho\rho^T] \right\}^T + v.$$

Полагая $W(\rho) = k \ln(1 + \rho^T \rho)$, $k > 0$, с использованием свойства $\rho^T S(\rho) = 0$ получаем

$$u = -\left\{ \frac{k\rho\tau}{1 + \rho^T \rho} [I_3 + S(\rho) + \rho\rho^T] \right\}^T + v = -k\rho + v.$$

Нам необходимо установить факт наблюдаемости в нулевом состоянии пассивной системы

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{1}{2}[I_3 + S(\rho) + \rho\rho^T]\omega, \\ M\dot{\omega} &= -S(\omega)M\omega - k\rho + v, \\ y &= \omega. \end{aligned}$$

При $v = 0$ выполнено

$$y(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \omega(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{\omega}(t) \equiv 0 \Rightarrow \rho(t) \equiv 0.$$

Следовательно, система является наблюдаемой в нулевом состоянии и может быть глобально стабилизирована законом управления

$$u = -k\rho - \phi(\omega),$$

где ϕ — любая локально липшицева функция, такая что $\phi(0) = 0$ и $y^T \phi(y) > 0$ для всех $y \neq 0$. \triangle

Можно избежать проверки выполнения свойства наблюдаемости в нулевом состоянии для всей системы (14.80)–(14.82), если наложить более строгие условия на $W(z)$

$$\frac{\partial W}{\partial z} f_a(z) < 0, \quad \forall z \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial W}{\partial z}(0) = 0, \quad (14.83)$$

из которых следует, что начало координат системы $\dot{z} = f_a(z)$ глобально асимптотически устойчиво. Полагая

$$u = -\left(\frac{\partial W}{\partial z} F(z, y) \right)^T - \phi(y), \quad (14.84)$$

где ϕ — любая локально липшицева функция, такая что $\phi(0) = 0$ и $y^T \phi(y) > 0$ для всех $y \neq 0$, и используя U в качестве функции Ляпунова для замкнутой системы, получаем

$$\dot{U} \leq \frac{\partial W}{\partial z} f_a(z) - y^T \phi(y) \leq 0.$$

Кроме того, из $\dot{U} = 0$ следует, что $z = 0$ и $y = 0$, и, таким образом, $u = 0$. Если ведущая система (14.78)–(14.79) наблюдаема в нулевом состоянии, из условий $u(t) \equiv 0$ и $y(t) \equiv 0$ следует, что $x(t) \equiv 0$. Тогда с использованием принципа инвариантности заключаем, что начало координат $(z = 0, x = 0)$ глобально асимптотически устойчиво. Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 14.5. Предположим, что система (14.78)–(14.79) является наблюдаемой в нулевом состоянии и пассивна с радиально неограниченной, положительно определенной функцией запаса. Предположим, что начало координат системы $\dot{z} = f_a(z)$ глобально асимптотически устойчиво и пусть $W(z)$ — радиально неограниченная, положительно определенная функция Ляпунова, удовлетворяющая (14.83). Тогда, закон управления (14.84) глобально стабилизирует начало координат $(z = 0, x = 0)$.

Пример 14.18. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -\eta + \eta^2 \xi, \\ \dot{\xi} &= u, \end{aligned}$$

которую мы уже рассматривали в примерах 13.16 и 14.11. Используя $y = \xi$ в качестве выхода, можно представить эту систему в виде (14.77)–(14.79). Система $\dot{\xi} = u$, $y = \xi$ пассивна с функцией запаса $V(\xi) = \xi^2/2$. Можно показать, что она является также наблюдаемой в нулевом состоянии, т. к. $y = \xi$. Начало координат системы $\dot{\eta} = -\eta$ глобально экспоненциально устойчиво и соответствующая функция Ляпунова имеет вид $W(\eta) = \eta^2/2$. Таким образом, все условия теоремы 14.5 выполнены и закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий

глобальную стабилизацию системы, может быть выбран в следующей форме:

$$u = -\eta^3 - k\zeta, \quad k > 0.$$

Легко видеть, что этот закон управления совпадает с тем, что был построен с использованием бэкстеппинга. \triangle

14.5. Наблюдатели с сильной обратной связью

Методы построения нелинейного управления, рассмотренные в этой и предыдущей главах, позволяют построить закон управления в виде обратной связи по состоянию, т. е. в предположении, что все переменные состояния доступны для измерения в режиме реального времени. В некоторых приложениях измерение всех или некоторых переменных состояния оказывается невозможным вследствие технических или экономических ограничений. Поэтому важно обобщить рассмотренные ранее методы на случай построения закона управления в виде обратной связи по выходу. В некоторых специальных случаях при решении этой задачи возможна непосредственная модификация метода. Подобные ситуации рассмотрены в упражнениях 14.47 и 14.48. В первом упражнении показано, что в случае, когда система является минимально-фазовой и имеет относительную степень, равную единице, можно построить закон управления в скользящем режиме в виде обратной связи по выходу. Во втором упражнении получено пассивное управление для системы, имеющей пассивное отображение от входа к производной выхода. В общем случае следует использовать методику динамической компенсации, позволяющую обобщить методы построения законов управления с обратной связью по состоянию на случай соответствующих обратных связей по выходу. Одной из реализаций метода динамической компенсации является использование наблюдателей, обеспечивающих асимптотическую оценку состояния на основе измерений выхода системы. Для некоторых нелинейных систем разработка подобных наблюдателей является такой же простой задачей, какой она является в случае, когда система описывается линейной моделью. Предположим, например, что нелинейная система может быть преобразована к виду¹⁾

$$\dot{x} = Ax + g(y, u), \quad (14.85)$$

$$y = Cx, \quad (14.86)$$

где (A, C) — наблюдаемая пара. Особенность этой формы представления заключается в том, что нелинейная функция g зависит только от

¹⁾ Необходимые и достаточные условия эквивалентности нелинейной системы представлению (14.85)–(14.86) приведены в [124, глава 5]. В этой же работе рассмотрен другой подход к реализации метода динамической компенсации с использованием фильтр-преобразований (filtered transformation).

переменных выхода y и управления u . Используя наблюдатель вида

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + g(y, u) + H(y - C\hat{x}), \quad (14.87)$$

можно показать, что ошибка оценивания $\tilde{x} = x - \hat{x}$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\dot{\tilde{x}} = (A - HC)\tilde{x}.$$

Следовательно, выбрав H , так чтобы матрица $A - HC$ была гурвицевой, можно гарантировать асимптотическое стремление этой ошибки к нулю $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$. В упражнении 14.49 наблюдатель (14.87) используется для построения закона управления с обратной связью по состоянию. Следует отметить, что наблюдатель (14.87) сохраняет свою работоспособность лишь для указанного класса нелинейных систем, но этим не исчерпывается список его недостатков, главным из которых является то, что он построен в предположении, что нелинейная функция g известна. Любая ошибка модели функции g скажется на ошибке оценивания, получаемой с использованием приведенного выше уравнения для \tilde{x} . В частности, если наблюдатель реализован в виде

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + g_0(y, u) + H(y - C\hat{x}),$$

где g_0 — номинальная модель для g , уравнение для $\dot{\hat{x}}$ принимает следующий вид:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - HC)\tilde{x} + g(y, u) - g_0(y, u).$$

В этом случае становится неочевидным тот факт, что гурвицевость матрицы $A - HC$ сможет обеспечить компенсацию члена возмущения $g - g_0$. В этом параграфе мы предложим специальный метод нахождения коэффициентов усиления наблюдателя, позволяющий обеспечить работоспособность этого наблюдателя по отношению к неопределенностям модели нелинейной функции. Этот метод, известный как метод построения наблюдателей с сильной обратной связью, применим для широкого класса нелинейных систем и гарантирует при достаточно больших коэффициентах усиления наблюдателя, что соответствующий закон управления с обратной связью по выходу обеспечит те же характеристики замкнутой системы, которые могут быть достигнуты с использованием закон управления с обратной связью по состоянию. В параграфе 14.5.1 пример второго порядка рассматривается в качестве мотивации идеи применения наблюдателей с сильной обратной связью. В параграфе 14.5.2 подобный наблюдатель используется при разработке стабилизирующего закона управления с обратной связью по выходу. После этого будет сформулирован основной результат — *принцип разделения* (separation principle), позволяющий разделить процедуру построения этого закона управления на два этапа. На первом этапе находится закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий стабилизацию системы и обеспечивающий требуемые характеристики замкнутой системы. На втором этапе строится закон

управления с обратной связью по выходу путем замены в построенном на первом этапе законе управления состояния x на соответствующую его оценку \hat{x} , получаемую с использованием наблюдателя с сильной обратной связью. Ключевым свойством, позволяющим разделить процедуру нахождения закона управления на вышеуказанные два этапа, является то, что построенное на первом этапе управление с обратной связью по состоянию должно быть глобально ограниченным по x . Наблюдатели с сильной обратной связью могут быть использованы в задачах управления для систем широкого класса.¹⁾ В параграфе 14.5.3 мы рассмотрим в качестве примера использование наблюдателей с сильной обратной связью при построении интегрального управления по выходу.

14.5.1. Мотивирующий пример

Рассмотрим нелинейную систему второго порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (14.88)$$

$$\dot{x}_2 = \phi(x, u), \quad (14.89)$$

$$y = x_1, \quad (14.90)$$

где $x = [x_1, x_2]^T$. Предположим, что $u = \gamma(x)$ — локально липшицев закон управления с обратной связью по состоянию, такой что начало координат $x = 0$ замкнутой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (14.91)$$

$$\dot{x}_2 = \phi(x, \gamma(x)), \quad (14.92)$$

устойчиво. Для того, чтобы реализовать этот закон управления с использованием измерений переменных выхода y , используем наблюдатель

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + h_1(y - \hat{x}_1), \quad (14.93)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \phi_0(\hat{x}, u) + h_2(y - \hat{x}_1), \quad (14.94)$$

где $\phi_0(x, u)$ — номинальная модель нелинейной функции $\phi(x, u)$. Ошибка оценивания

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

удовлетворяет уравнению

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -h_1\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2, \quad (14.95)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -h_2\tilde{x}_1 + \delta(x, \tilde{x}), \quad (14.96)$$

где $\delta(x, \tilde{x}) = \phi(x, \gamma(\hat{x})) - \phi_0(\hat{x}, \gamma(\hat{x}))$. Необходимо найти коэффициенты усиления наблюдателя $H = [h_1, h_2]^T$, при которых выполнено

¹⁾ Обзор применения наблюдателей с сильной обратной связью в различных задачах управления приведен в работе [100].

$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$. При отсутствии члена возмущений δ асимптотическая сходимость ошибки к нулю обеспечивается выбором H , при котором матрица

$$A_o = \begin{bmatrix} -h_1 & 1 \\ -h_2 & 0 \end{bmatrix}$$

является гурвицевой. В рассматриваемом случае матрица A_o обладает этим свойством при любых положительных константах h_1 и h_2 . При наличии возмущений δ коэффициенты H необходимо выбрать так, чтобы обеспечивалась компенсация эффектов, связанных с влиянием δ на ошибку слежения \tilde{x} . В идеальном случае эта задача может быть решена для любого δ , если передаточная функция от δ к \tilde{x}

$$G_o(s) = \frac{1}{s^2 + h_1 s + h_2} \begin{bmatrix} 1 \\ s + h_1 \end{bmatrix}$$

тождественно равна нулю. Поскольку это нереализуемо, сделаем величину $\sup_{\omega \in R} |G_o(j\omega)|$ произвольно малой путем выбора $h_2 \gg h_1 \gg 1$. В частности, положив

$$h_1 = \frac{\alpha_1}{\varepsilon}, \quad h_2 = \frac{\alpha_2}{\varepsilon^2}, \quad (14.97)$$

где α_1, α_2 и ε , $\varepsilon \ll 1$ — некоторые положительные константы, можно показать, что

$$G_o(s) = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon s)^2 + \alpha_1 \varepsilon s + \alpha_2} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon s + \alpha_1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_o(s) = 0$. Свойства робастности наблюдателей с сильной обратной связью могут также исследованы во временной области, если представить уравнение ошибки (14.95)–(14.96) в виде уравнения с сингулярными возмущениями. С этой целью определим масштабированные ошибки оценивания

$$\eta_1 = \frac{\tilde{x}_1}{\varepsilon}, \quad \eta_2 = \tilde{x}_2. \quad (14.98)$$

Эти новые переменные удовлетворяют уравнениям с сингулярными возмущениями

$$\varepsilon \dot{\eta}_1 = -\alpha_1 \eta_1 + \eta_2, \quad (14.99)$$

$$\varepsilon \dot{\eta}_2 = -\alpha_2 \eta_1 + \varepsilon \delta(x, \tilde{x}). \quad (14.100)$$

Из этих уравнений видно, что уменьшая ε , можно нивелировать эффект влияния δ . Кроме того, можно заметить, что при малой ε , масштабированная ошибка оценивания η является более быстрой переменной по сравнению с переменной x . Однако $\eta_1(0)$ имеет порядок $O(1/\varepsilon)$ при $x_1(0) \neq \hat{x}_1(0)$. Следовательно, выражение для решения системы (14.99)–(14.100) будет содержать член вида $(1/\varepsilon)e^{-at/\varepsilon}$ для некоторой константы $a > 0$. Эта мода быстро (экспоненциально) убывает до нуля, но прежде чем она достигнет достаточно малых значений,

она может привести к образованию при переходном процессе пиков порядка $O(1/\varepsilon)$. На практике функция $(a/\varepsilon)e^{-at/\varepsilon}$ стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к импульсной функции. Это явление известно как образование пиков переходного процесса. Важно понимать, что это явление не является следствием применения преобразования динамики ошибки к виду системы с сингулярными возмущениями с использованием замены переменных (14.98). Это явление представляет собой характеристическую особенность наблюдателя с сильной обратной связью при $h_2 \gg h_1 \gg 1$. Этот факт может быть доказан с учетом того, что (2,1)-элемент матрицы $\exp(A_o t)$ имеет вид

$$\frac{-2h_2}{\sqrt{4h_2 - h_1^2}} e^{-h_1 t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{4h_2 - h_1^2}}{2}\right)$$

при $4h_2 > h_1^2$ и

$$\frac{-h_2}{\sqrt{h_1^2 - 4h_2}} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{h_1 - \sqrt{h_1^2 - 4h_2}}{2}\right)t\right] - \exp\left[-\left(\frac{h_1 + \sqrt{h_1^2 - 4h_2}}{2}\right)t\right] \right\}$$

при $4h_2 < h_1^2$. Амплитуда экспоненциальной моды в первом случае больше величины $\sqrt{h_2}$, а во втором — больше h_2/h_1 . Таким образом, при увеличении h_1 и h_2/h_1 амплитуда увеличивается до бесконечности. Для лучшего понимания явления образования пиков рассмотрим результаты компьютерного моделирования системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2^3 + u, \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

которая может быть глобально стабилизируема с использованием закона управления с обратной связью по состоянию

$$u = -x_2^3 - x_1 - x_2.$$

Соответствующий закон управления с обратной связью по выходу имеет вид

$$\begin{aligned}u &= -\hat{x}_2^3 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \\ \hat{x}_1 &= \hat{x}_2 + (2/\varepsilon)(y - \hat{x}_1), \\ \hat{x}_2 &= (1/\varepsilon^2)(y - \hat{x}_1).\end{aligned}$$

Коэффициенты усиления наблюдателя выбраны таким образом, чтобы собственные значения матрицы A_o были равны $-1/\varepsilon$ и $-1/\varepsilon$. На рисунке 14.16 показаны результаты моделирования системы, замкнутой вышеупомянутыми законами управления с обратными связями по состоянию и по выходу. Закон управления с обратной связью по выходу

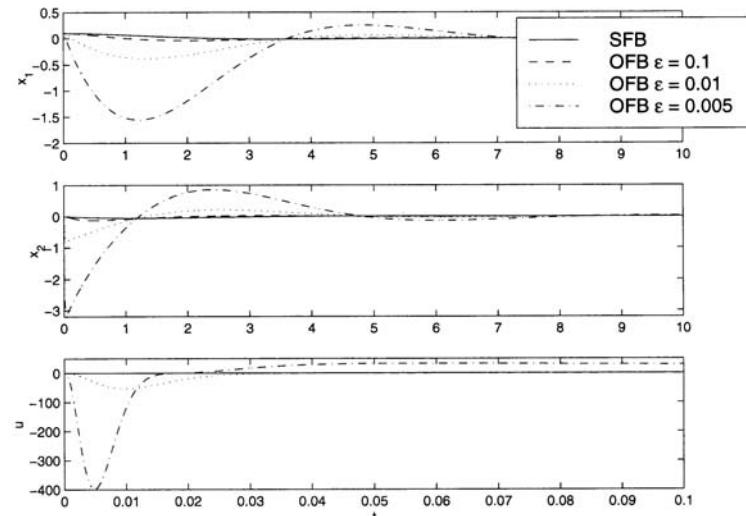


Рис. 14.16. Поведение системы, замкнутой законами управления, реализованными в виде обратной связи по состоянию (SFB) и в виде обратной связи по выходу (OFB).

применялся при трех различных значениях константы ε . В качестве начальных значений использовались $x_1(0) = 0.1$, $x_2(0) = \hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = 0$. Возникновение пиков наблюдается при $[x_1(0) - \hat{x}_1(0)]/\varepsilon = 0.1/\varepsilon$, когда константа ε достаточно мала. Из рисунка 14.16 видно, что система демонстрирует интуитивно необъяснимое поведение при уменьшении ε . Поскольку уменьшение ε должно приводить к увеличению скорости убывания до нуля ошибки оценивания, можно было бы ожидать, что характеристики переходного процесса системы, замкнутой обратной связью по состоянию, отличаются от ожидаемого: при увеличении ε переходный процесс в системе, замкнутой обратной связью по выходу, становится более непохожим на соответствующий переходный процесс в системе, замкнутой обратной связью по состоянию. Однако на рисунке 14.16 показано поведение, отличное от ожидаемого: при увеличении ε переходный процесс в системе, замкнутой обратной связью по состоянию, становится более непохожим на соответствующий переходный процесс в системе, замкнутой обратной связью по выходу. Это обусловлено наличием в переходном процессе пиков. На этом же рисунке показано сигнал управления u на более коротком отрезке времени, который, как можно заметить, также характеризуется наличием пиков. Резкое изменение сигнала управления, приводит к резкому изменению переменных состояния объекта управления. Если пиковое значение переменной состояния выйдет за пределы области притяжения, это может привести к дестабилизации системы. На рисунке 14.17 показана именно такая ситуация, которая возникла при уменьшении константы ε до величины 0.004. Легко видеть, что

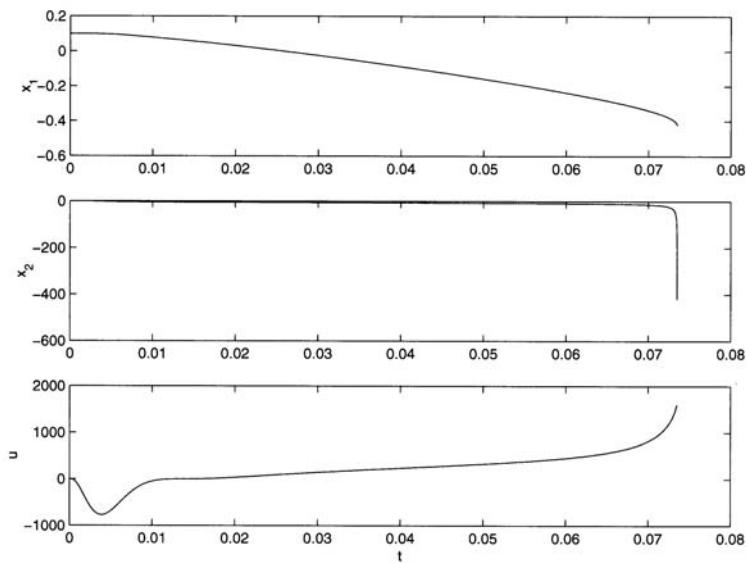


Рис. 14.17. Неустойчивость системы, вызванная явлением образования пиков в переходном процессе при $\varepsilon = 0.004$.

замкнутая система имеет конечное время ухода на бесконечность и ее дестабилизация произошла вскоре после момента времени $t = 0.07$.

Для того, чтобы ослабить влияние образования пиков на поведение объекта управления, в законе управления можно применить насыщение, включающееся при выходе состояния системы из некоторого компактного множества. Насыщение в законе управления может быть введено, например, следующим образом:

$$u = \text{sat}(-\hat{x}_2^3 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)$$

На рисунке 14.18 показаны результаты моделирования системы, замкнутой законами управления с насыщением, реализованными в виде обратных связей по состоянию и по выходу. На этом рисунке также показан сигнал управления u на коротком интервале времени. Это управление реализовано с использованием насыщения, предотвращающего образование пиков. Интервал времени, на протяжении которого имеет место явление образования пиков, уменьшается с уменьшением значения ε . Состояния x_1 и x_2 демонстрируют описанное ранее интуитивно ожидаемое поведение: при уменьшении ε переходный процесс в системе, замкнутой обратной связью по выходу, становится более похожим на соответствующий переходный процесс в системе, замкнутой обратной связью по состоянию. Заметим, что представленные результаты были получены при $\varepsilon = 0.001$, т. е. при значении ε , меньшем чем 0.004, когда в системе, замкнутой законом управления без насыщения,

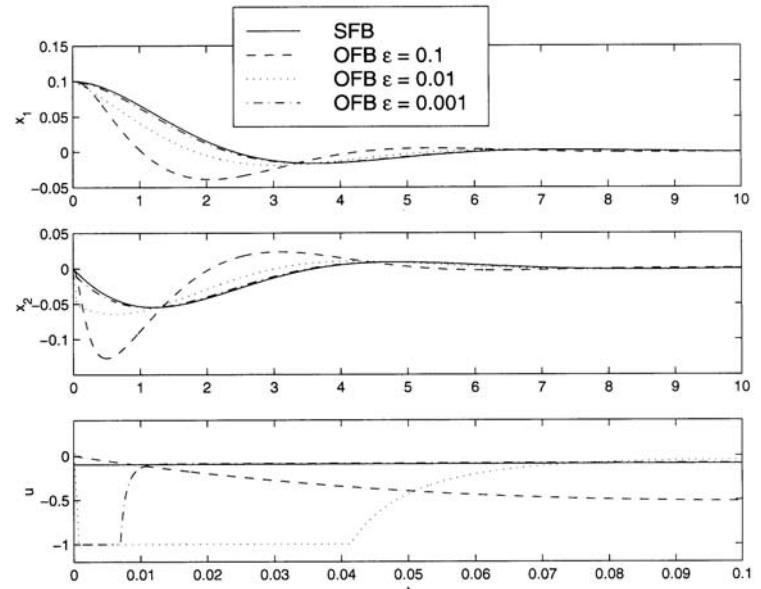


Рис. 14.18. Поведение системы, замкнутой законами управления с насыщением, реализованными в виде обратной связи по состоянию (SFB) и в виде обратной связи по выходу (OFB).

возникла неустойчивость. При использовании в законе управления насыщения замкнутая система не только сохранила устойчивость, но и продемонстрировала практически идентичные свойства переходных процессов для двух рассматриваемых случаев применения обратной связи. Интересно отметить, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ область притяжения системы с обратной связью по выходу стремится к области притяжения системы с обратной связью по состоянию. Это показано на рисунках 14.19 и 14.20. На первом из этих рисунков показан фазовый портрет замкнутой системы при $u = \text{sat}(-x_2^3 - x_1 - x_2)$. Эта система имеет ограниченную область притяжения, содержащуюся внутри замкнутого цикла. Из второго рисунка видно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ пересечение границы области притяжения при $u = \text{sat}(-\hat{x}_2^3 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)$ с $(x_1 - x_2)$ -плоскостью стремится к предельному циклу.

Поведение системы, показанное на рисунках 14.19 и 14.20, может быть реализовано при любой глобально ограниченной стабилизирующей функции $\gamma(x)$. В период образования пиков управление $\gamma(\hat{x})$ реализуется с насыщением. Поскольку при $\varepsilon \rightarrow 0$ период образования пиков сужается до нуля, при достаточно малой ε длительность периода образования пиков становится настолько малой, что состояние объекта x остается близким к его начальному значению. После завершения периода образования пиков ошибка оценивания становится равной

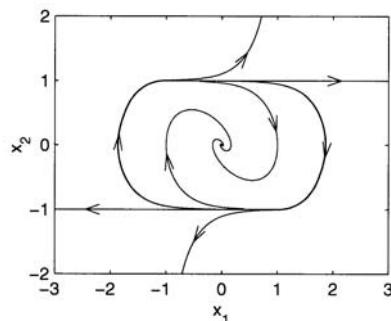


Рис. 14.19. Фазовый портрет системы, замкнутой законом управления $u = \text{sat}(-x_2^3 - x_1 - x_2)$.

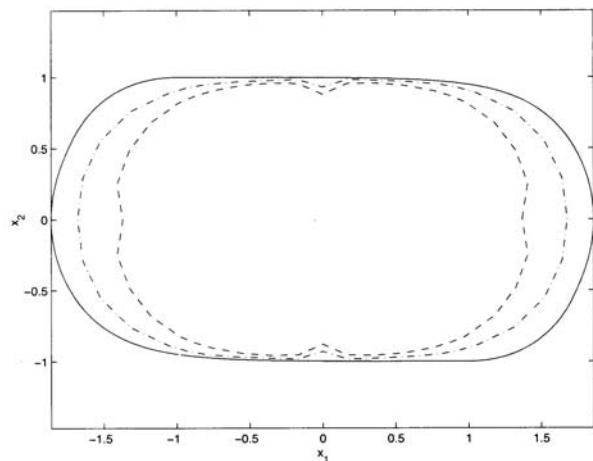


Рис. 14.20. Область притяжения системы, замкнутой законом управления с обратной связью по состоянию (непрерывная линия) и пересечение области притяжения системы, замкнутой законом управления с обратной связью по выходу, с $(x_1 - x_2)$ -плоскостью при $\varepsilon = 0.1$ (пунктирная линия) и при $\varepsilon = 0.05$ (штрих-пунктирная линия).

величине порядка $O(\varepsilon)$ и закон управления $\gamma(\hat{x})$ становится близким к функции $\gamma(x)$. Следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ траектории системы, замкнутой обратной связью по выходу, асимптотически стремятся к соответствующим траекториям системы, замкнутой обратной связью по состоянию. Глобальная ограниченность функции $\gamma(x)$ может быть обеспечена путем применения насыщения в законе управления с обратной связью по состоянию, или путем применения насыщения в отношении

оценок вектора состояния, вышедших за пределы некоторого компактного множества.

Анализ системы, замкнутой обратной связью по выходу, может быть выполнен следующим образом. Рассматриваемая система представляется в виде системы с сингулярными возмущениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \phi(x, \gamma(\hat{x})), \\ \varepsilon\dot{\eta}_1 &= -\alpha_1\eta_1 + \eta_2, \\ \varepsilon\dot{\eta}_2 &= -\alpha_2\eta_1 + \varepsilon\delta(x, \hat{x}),\end{aligned}$$

где $\hat{x}_1 = x_1 - \varepsilon\eta_1$ и $\hat{x}_2 = x_2 - \eta_2$. Эволюция медленных переменных (x_1, x_2) приближенно описывается медленной моделью, получаемой при $\varepsilon = 0$. Поскольку при $\varepsilon = 0$ мы получаем $\eta = 0$, медленная модель представляет собой систему, замкнутую обратной связью по состоянию (14.91)–(14.92). Эволюция быстрых переменных (η_1, η_2) приближенно описывается быстрой моделью

$$\varepsilon\dot{\eta} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \eta \stackrel{\text{def}}{=} A_0\eta,$$

которую можно получить, если пренебречь членом $\varepsilon\delta$. Пусть $V(x)$ — функция Ляпунова для медленной модели и $W(\eta) = \eta^T P_0 \eta$ — функция Ляпунова для быстрой модели, где P_0 — решение уравнения Ляпунова $P_0 A_0 + A_0^T P_0^T = -I$. Определим множества Ω_c и Σ равенствами $\Omega_c = \{V(x) \leq c\}$ и $\Sigma = \{W(\eta) \leq \rho\varepsilon^2\}$, где константа $c > 0$ выбрана так, чтобы множество Ω_c находилось во внутренности области притяжения решений системы (14.91)–(14.92). Дальнейший анализ выполняется в два этапа. На первом этапе показывается, что при достаточно большой ρ существует $\varepsilon_1^* > 0$, такая что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1^*$ начало координат замкнутой системы асимптотически устойчиво и множество $\Omega_c \times \Sigma$ является положительно инвариантным подмножеством области притяжения. При доказательстве используется тот факт, что в множестве $\Omega_c \times \Sigma$ величина η имеет порядок $O(\varepsilon)$. На втором этапе показывается, что для любого ограниченного $\hat{x}(0)$ и любого $x(0) \in \Omega_b$, $0 < b < c$, существует $\varepsilon_2^* > 0$, такая что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2^*$ траектория системы достигает множества $\Omega_c \times \Sigma$ за конечное время. При доказательстве используется тот факт, что Ω_b расположено во внутренности Ω_c , а также то, что $\gamma(\hat{x})$ является глобально ограниченной функцией. Следовательно, существует момент времени $T_1 > 0$, не зависящий от ε и такой, что любая траектория, начинающаяся в Ω_b остается в Ω_c для всех $t \in [0, T_1]$. Используя тот факт, что η убывает быстрее экспоненциальной моды вида $(1/\varepsilon)e^{-at/\varepsilon}$, можно показать, что траектория достигает множества $\Omega_c \times \Sigma$ в момент времени, принадлежащий интервалу $[0, T(\varepsilon)]$, где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = 0$. Таким образом, выбрав достаточно малую ε , можно гарантировать, что $T(\varepsilon) < T_1$. Рисунок 14.21 иллюстрирует описанное поведение системы.

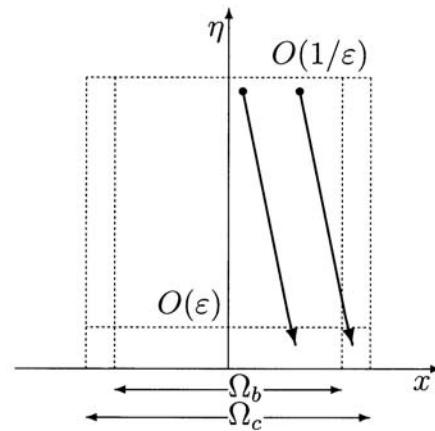


Рис. 14.21. Иллюстрация быстрого стремления траекторий к множеству $\Omega_c \times \Sigma$.

Наблюдатель полного порядка (14.93)–(14.94) позволяет получить оценки (\hat{x}_1, \hat{x}_2) , которые используются в законе управления с обратной связью вместо (x_1, x_2) . Поскольку $y = x_1$ измеряется, в законе управления можно использовать саму переменную x_1 и на соответствующую оценку заменять только переменную x_2 . При использовании этого подхода анализ замкнутой системы не изменяется и можно получить результаты, аналогичные тем, что были получены ранее. С другой стороны, для получения оценок \hat{x}_2 можно использовать наблюдатель редуцированного порядка

$$\dot{w} = -h(w + hy) + \phi_o(\hat{x}, u), \quad (14.101)$$

$$\hat{x}_2 = w + hy, \quad (14.102)$$

где $h = \alpha/\varepsilon$ для некоторых положительных констант α и ε , $\varepsilon \ll 1$. Легко видеть, что наблюдатель редуцированного порядка с сильной обратной связью (14.101)–(14.102) характеризуется образованием пиков и глобальная ограниченность закона управления с обратной связью по состоянию играет ту же роль, которую она играет в случае использования наблюдателя полного порядка.

На практике наблюдатель с сильной обратной связью представляет собой приближенный дифференциатор. В этом можно легко убедиться, если рассмотреть специальный случай, когда номинальная функция ϕ выбрана нулевой и, следовательно, этот наблюдатель является линейным. В случае наблюдателя полного порядка (14.93)–(14.94) передаточная функция от y к \hat{x} имеет вид

$$\frac{\alpha_2}{(\varepsilon s)^2 + \alpha_1 \varepsilon s + \alpha_2} \begin{bmatrix} 1 + (\varepsilon \alpha_1 / \alpha_2)s \\ s \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0;$$

в случае наблюдателя редуцированного порядка (14.101)–(14.102) передаточная функция от y к \hat{x}_2 имеет вид

$$\frac{s}{(\varepsilon/\alpha)s + 1} \rightarrow s \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, при достаточно малой ε наблюдатель с сильной обратной связью аппроксимирует на компактном интервале частот производную \dot{y} .

Поскольку наблюдатель с сильной обратной связью является приближенным дифференциатором, можно утверждать, что шум измерения и немоделируемая высокочастотная динамика сенсоров накладывают ограничения на практически реализуемый предел уменьшения величины ε . Несмотря на наличие этого ограничения, существуют приложения, в которых пределы допустимых значений ε позволяют успешно применить наблюдатели с сильной обратной связью.¹⁾

14.5.2. Стабилизация

Рассмотрим нелинейную систему с несколькими входами и выходами

$$\dot{x} = Ax + B\phi(x, z, u), \quad (14.103)$$

$$\dot{z} = \psi(x, z, u), \quad (14.104)$$

$$y = Cx, \quad (14.105)$$

$$\zeta = q(x, z), \quad (14.106)$$

где $u \in R^p$ — управление, $y \in R^m$ и $\zeta \in R^s$ — измеряемые входы и переменные $x \in R^\rho$ и $z \in R^\ell$ формируют вектор состояния. Матрица A , имеющая размер $(\rho \times \rho)$, матрица B , имеющая размер $(\rho \times m)$ и матрица C , имеющая размер $m \times \rho$, определяются равенствами

$$A = \text{block diag}[A_1, \dots, A_m], \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}_{\rho_i \times \rho_i},$$

$$B = \text{block diag}[B_1, \dots, B_m], \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\rho_i \times 1},$$

¹⁾ Примеры таких приложений, в том числе асинхронные электрические двигатели и некоторые механические системы, рассмотрены в работах [3], [47] и [186].

$$C = \text{block diag}[C_1, \dots, C_m], C_i = [1 \ 0 \ \dots \ \dots \ 0]_{1 \times \rho_i},$$

где $1 \leq i \leq m$ и $\rho = \rho_1 + \dots + \rho_m$. Матрицы A , B и C определяют систему, представляющую собой цепь из m интеграторов. Функции ϕ , ψ и q предполагаются локально липшицевыми по своим аргументам при $(x, z, u) \in D_x \times D_z \times R^p$, где $D_x \subset R^\rho$ и $D_z \subset R^s$ — области, содержащие соответствующие начала координат. Мы также будем предполагать, что $\phi(0, 0, 0) = 0$, $\psi(0, 0, 0) = 0$ и $q(0, 0) = 0$. Наша цель заключается в том, чтобы построить закон управления с обратной связью по выходу, обеспечивающий стабилизацию начала координат.

Двумя основными классами систем, приводящихся к модели (14.103)–(14.106), являются нормальная форма представления линеаризуемой по входу–выходу системы и модели механических и электромеханических систем, в которых измерению доступны величины смещения, а их производные (скорости, ускорения и т.д.) не измеряются. Нормальная форма системы с одним входом и одним выходом имеет вид (13.16)–(13.18). Легко видеть, что эти уравнения принимают вид (14.103)–(14.105) при $x = \xi$ и $z = \eta$.¹⁾ Если y — единственная измеряемая переменная, уравнение (14.106) можно опустить. Однако во многих задачах возможно измерение некоторых переменных состояния в дополнение к тем, что фигурируют в концах цепей интеграторов. Например, система магнитной подвески (см. упражнение 1.18) описывается моделью

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{k}{m}x_2 - \frac{L_0ax_3^2}{2m(a+x_1)^2}, \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{L(x_1)} \left[-Rx_3 + \frac{L_0ax_2x_3}{(a+x_1)^2} + u \right],\end{aligned}$$

где x_1 — положение шара, x_2 — его скорость и x_3 — ток в электромагните. В типичной ситуации измеряется положение шара x_1 и ток x_3 . Эта модель принимает вид (14.103)–(14.106) при (x_1, x_2) в качестве x -компоненты и x_3 в качестве z -компоненты вектора состояния. Измеряемыми выходами являются $y = x_1$ и $\zeta = x_3$. Другим классом систем, приводящихся к модели (14.103)–(14.106), являются системы, динамика которых расширена путем добавления нескольких интеграторов. В примере 13.8 рассматривалась система, представленная дифференциальным уравнением n -го порядка. Ее динамика была расширена с использованием m интеграторов в канале управления. Анализ полученной модели состояния показывает, что она имеет вид (14.103)–(14.106), если в качестве компонент переменной z выбрать состояния m интеграторов, а в качестве компонент переменной x — выход и

¹⁾ В работе [88, параграф 5.1] рассматривается нормальная форма для нескольких переменных.

его производные до порядка $y^{(n-1)}$ включительно. В этом случае все компоненты вектора измеряются и уравнение (14.106) принимает вид $\zeta = z$.

Для нахождения закона управления с обратной связью по выходу применяется двухэтапная процедура. На первом этапе разрабатывается стабилизирующий начало координат закон управления с обратной связью по состоянию, в котором используются измерения x и ζ . После этого строится наблюдатель с сильной обратной связью, обеспечивающий получение оценок x на основе информации о y . Закон управления с обратной связью по состоянию представляется в виде динамической системы вида

$$\dot{\theta} = \Gamma(\theta, x, \zeta), \quad (14.107)$$

$$u = \gamma(\theta, x, \zeta), \quad (14.108)$$

где γ и Γ — локально липшицевы по своим аргументам в рассматриваемой области функции, глобально ограниченные по x . Кроме того, $\gamma(0, 0, 0) = 0$ и $\Gamma(0, 0, 0) = 0$. Закон управления с обратной связью по состоянию $u = \gamma(x, \zeta)$ является специальным случаем предыдущего уравнения, если опустить θ -уравнение. Для удобства запишем систему, замкнутую обратной связью по состоянию, в следующем виде

$$\dot{X} = f(X), \quad (14.109)$$

где $X = (x, z, \theta)$. Закон управления с обратной связью по выходу выбирается в следующей форме:

$$\dot{\theta} = \Gamma(\theta, \hat{x}, \zeta), \quad (14.110)$$

$$u = \gamma(\theta, \hat{x}, \zeta), \quad (14.111)$$

где \hat{x} определяется с использованием наблюдателя с сильной обратной связью

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\phi_0(\hat{x}, \zeta, u) + H(y - C\hat{x}). \quad (14.112)$$

Коэффициент обратной связи наблюдателя H выбирается в виде

$$H = \text{block diag}[H_1, \dots, H_m], H_i = \begin{bmatrix} \alpha_2^i / \varepsilon^2 \alpha_1^i / \varepsilon \\ \vdots \\ \alpha_{\rho_i-1}^l / \varepsilon^{\rho_i-1} \alpha_{\rho_i}^i / \varepsilon^{\rho_i} \end{bmatrix}, \quad (14.113)$$

где ε — подлежащая определению положительная константа и положительные константы α_j^i выбираются так, чтобы корни уравнения

$$s^{\rho_i} + \alpha_1^i s^{\rho_i-1} + \dots + \alpha_{\rho_i-1}^i s + \alpha_{\rho_i}^i = 0$$

располагались в открытой левой полуплоскости для всех $i = 1, \dots, m$. Функция $\phi_0(x, \zeta, u)$ представляет собой номинальную модель функции $\phi(x, z, u)$, которая в рассматриваемой области должна быть локально липшицевой по своим аргументам и глобально ограниченной по x . Кроме того, $\phi_0(0, 0, 0) = 0$.

Теорема 14.6. Рассмотрим систему (14.103)–(14.106) и закон управления с обратной связью по выходу (14.110)–(14.112). Предположим, что начало координат системы (14.109) асимптотически устойчиво и \mathcal{R} — область притяжения ее решений. Пусть S — компактное множество, принадлежащее внутренности \mathcal{R} и \mathcal{Q} — любое компактное подмножество R^ρ . Тогда

- существует $\varepsilon_1^* > 0$, такая что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1^*$ решения $(\bar{x}(t), \hat{x}(t))$ замкнутой системы, начинающиеся в $S \times \mathcal{Q}$, являются ограниченными для всех $t \geq 0$;
- для любой $\mu > 0$ существуют $\varepsilon_2^* > 0$ и $T_2 > 0$, зависящие от μ , такие что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2^*$ решения замкнутой системы, начинающейся в $S \times \mathcal{Q}$, удовлетворяют

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \mu \quad \text{и} \quad \|\hat{x}(t)\| \leq \mu, \quad \forall t \geq T_2; \quad (14.114)$$

- для любой $\mu > 0$ существует $\varepsilon_3^* > 0$, зависящая от μ , такая что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3^*$, решения замкнутой системы, начинающиеся в $S \times \mathcal{Q}$, удовлетворяют

$$\|\bar{x}(t) - \bar{x}_r(t)\| \leq \mu, \quad \forall t \geq 0, \quad (14.115)$$

где \bar{x}_r — решение (14.109), начинающееся в $\bar{x}(0)$;

- если $f(\bar{x})$ — непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности \bar{x} и начало координат системы (14.109) экспоненциально устойчиво, то существует $\varepsilon_4^* > 0$ такая, что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_4^*$ начало координат замкнутой системы экспоненциально устойчиво и $S \times \mathcal{Q}$ — подмножество ее области притяжения.

Доказательство: См приложение C.23. \square

Из этой теоремы следует, что закон управления с обратной связью по выходу обеспечивает при достаточно малой ε , те же характеристики замкнутой системы, которыми обладает система, замкнутая законом управления с обратной связью по состоянию. Из этого, в свою очередь, следуют три вывода в отношении закона управления с обратной связью по выходу. Во-первых, этот закон, так же как и закон управления с обратной связью по состоянию, может обеспечить экспоненциальную устойчивость. Во-вторых, при использовании этого закона мы получаем то же компактное множество, содержащееся во внутренности области притяжения, которое можно указать для системы, замкнутой обратной связью по состоянию. В-третьих, при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение $\bar{x}(t)$ системы, замкнутой обратной связью по выходу, стремится к решению системы, замкнутой обратной связью по состоянию. Для простоты изложения сохранение свойства асимптотической устойчивости при переходе к использованию обратной связи по выходу доказано только для случая

экспоненциальной устойчивости.¹⁾ Заметим, однако, что первые три пункта теоремы: об ограниченности, о предельной ограниченности и о сходимости траекторий верны и без выполнения предположения об экспоненциальной устойчивости.

В качестве следствия этой теоремы можно сформулировать следующее утверждение. Если закон управления с обратной связью по состоянию обеспечивает глобальную или полуглобальную стабилизацию и локальную экспоненциальную устойчивость, то при достаточно малой ε закон управления с обратной связью по выходу обеспечивает полуглобальную стабилизацию и локальную экспоненциальную устойчивость.

Пример 14.19. В параграфе 14.1 была разработана непрерывная обратная связь по состоянию в скользящем режиме

$$u = -k \operatorname{sat} \left(\frac{a_1(\theta - \pi) + \dot{\theta}}{\mu} \right),$$

где $a_1 = 1$, $k = 4$ и $\mu = 1$, обеспечивающая стабилизацию уравнения маятника

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg_0\ell \sin \theta + k_0\ell^2\dot{\theta} = u$$

в точке $(\theta = \pi, \dot{\theta} = 0)$. Предположим, что измерению доступна лишь переменная θ . Тогда закон управления с обратной связью по выходу может быть выбран в виде

$$u = -k \operatorname{sat} \left(\frac{a_1(\widehat{\theta} - \pi) + \widehat{\omega}}{\mu} \right),$$

где $\widehat{\theta}$ и $\widehat{\omega}$ — оценки θ и $\omega = \dot{\theta}$, получаемые с использованием наблюдателя с сильной обратной связью

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{\theta}} &= \widehat{\omega} + (2/\varepsilon)(\theta - \widehat{\theta}), \\ \dot{\widehat{\omega}} &= \phi_0(\widehat{\theta}, u) + (1/\varepsilon^2)(\theta - \widehat{\theta}), \end{aligned}$$

где $\phi_0 = -\widehat{a} \sin \widehat{\theta} + \widehat{c}u$ — номинальная модель функции $\phi = -(g_0/\ell) \sin \theta - (k_0/m)\dot{\theta} + (1/m\ell^2)u$, и \widehat{a} и \widehat{c} — номинальные значения (g_0/ℓ) и $(1/m\ell^2)$, соответственно; в качестве номинального значения коэффициента трения k_0 выбрано нулевое значение. Наблюдатель строится так, чтобы он имел кратные полюса в $-1/\varepsilon$. На рисунке 14.22 приведены результаты сравнения характеристик системы, замкнутой законом управления с обратными связями по состоянию и выхода при $\varepsilon = 0.05$ и $\varepsilon = 0.01$. В качестве значений параметров маятника выбраны следующие величины $m = 0.15$, $\ell = 1.05$ и $k_0 = 0.02$; в качестве начальных значений использовались $\theta(0) = \pi/4$ и $\omega(0) = \widehat{\theta}(0) = \widehat{\omega}(0) = 0$. Рассмотрим три версии построенного наблюдателя.

¹⁾ В работе [16] рассмотрен более общий случай, когда начало координат асимптотически, но не экспоненциально, устойчиво.

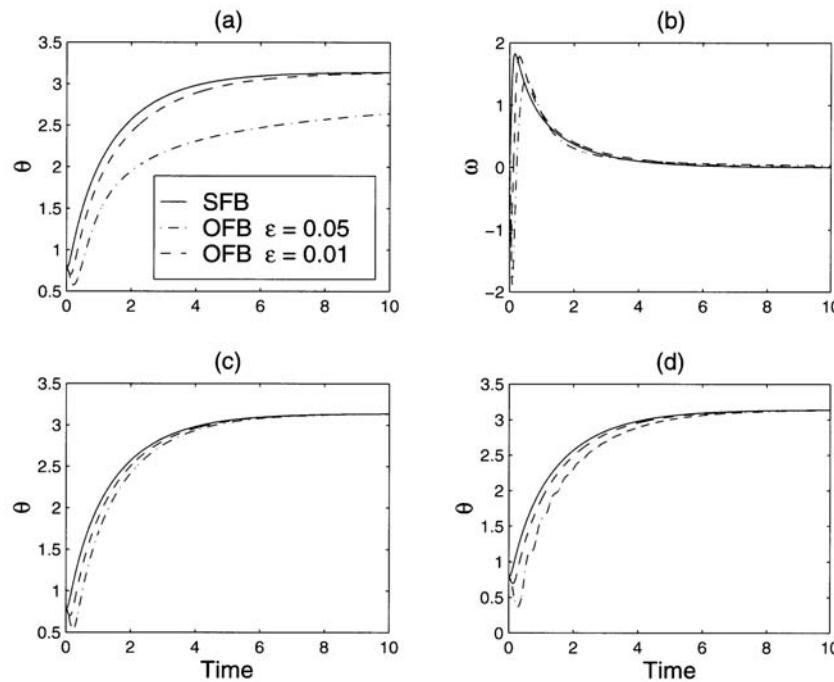


Рис. 14.22. Сравнение переходных процессов в системе из примера 14.19, замкнутой обратной связью по состоянию (SFB) и обратной связью по выходу (OFB). На рисунках (а) и (б) показаны θ и $\omega = \dot{\theta}$ для случая использования нелинейного наблюдателя с сильной обратной связью при номинальных значениях t и ℓ . На рисунке (с) показана θ для случая использования нелинейного наблюдателя с сильной обратной связью при действительных значениях t и ℓ . На рисунке (д) показана θ при использовании линейного наблюдателя с сильной обратной связью.

В первом случае в наблюдателе использовались номинальные значения $\hat{a} = 9.81$ и $\hat{c} = 10$, что соответствует номинальным параметрам $\hat{m} = 0.1$ и $\hat{\ell} = 1$. Во втором случае использовались значения $\hat{a} = 9.3429$ и $\hat{c} = 6.0469$, что соответствует действительным значениям параметров, т. е. $\hat{m} = m = 0.15$ и $\hat{\ell} = \ell = 1.05$. В третьем случае использовался линейный наблюдатель, который был получен при $\hat{a} = \hat{c} = 0$. Во всех этих случаях можно отметить, что траектории системы, замкнутой обратной связью по выходу, стремятся при уменьшении ε к траекториям системы, замкнутой обратной связью по состоянию. Можно отметить, что при сравнительно большой ε использование в уравнении наблюдателя функции ϕ_0 благоприятно сказывается на характеристиках системы, если эта функция является хорошей моделью для функции ϕ . Однако, если это не так, в подобной ситуации лучше использовать линейный наблюдатель. Важно отметить, что

различия между этими тремя версиями наблюдателя уменьшаются при уменьшении ε . Этот результат представляется ожидаемым, т. к. при уменьшении ε нивелируются эффекты, связанные с неопределенностью модели функции ϕ . \triangle

14.5.3. Интегральное управление

Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, w) + g(x, w)[u + \delta(x, u, w)], \\ y &= h(x, w),\end{aligned}$$

где $x \in R^n$ — состояние, $u \in R$ — управление, $y \in R$ — управляемый и одновременно измеряемый выход и $w \in R^l$ — вектор неизвестных постоянных параметров и возмущений. Функции f , g , h и δ предполагаются достаточно гладкими по (x, u) и непрерывными по w при $x \in D \subset R^n$, $u \in R$ и $w \in D_w \subset R^l$, где D и D_w — открытые связные множества. Предположим, что система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, w) + g(x, w)u, \\ y &= h(x, w)\end{aligned}$$

имеет относительную степень ρ в D равномерно по w , т. е. для всех $(x, w) \in D \times D_w$ выполнено

$$L_g h(x, w) = \dots = L_g L_f^{\rho-2} h(x, w) = 0, \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x, w) \geq a > 0.$$

Наша цель заключается в том, чтобы построить закон управления с обратной связью по выходу, такой что выход системы y асимптотически отслеживает постоянный командный сигнал $r \in D_r \subset R$, где D_r — открытое связное множество.

Рассматриваемая здесь задача представляет собой версию задачи, которую мы исследовали в параграфе 14.1.4. Отличие заключается в том, что в настоящем случае мы допускаем зависимость функций f и h от w , в то время как в параграфе 14.1.4 требовалось, чтобы они не зависели от w . Это ограничение было необходимо вследствие того, что переменные $h, L_f h, \dots, L_f^{\rho-1} h$ использовались при нахождении закона управления с обратной связью по состоянию. В рассматриваемом здесь случае нахождения закона управления с обратной связью по выходу эти переменные определяются с использованием наблюдателя с сильной обратной связью на основании информации об измеряемом выходе y . Поскольку мы допустили зависимость f от w , член δ_1 в f опущен. Мы не будем здесь повторять все выкладки, что были проведены в параграфе 14.1.4. Напомним лишь выражение для обратной связи по состоянию в скользящем режиме (14.29):

$$\begin{aligned}\dot{e}_0 &= e_1, \\ u &= -k \operatorname{sat} \left(\frac{k_0 e_0 + k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_{\rho-1} e_{\rho-1} + e_{\rho}}{\mu} \right),\end{aligned}$$

где $e_1 = y - r$ — ошибка регулирования и переменные с e_2 по e_ρ — производные e_1 .¹⁾ Закон управления глобально ограничен и значение сигнала e_1 доступно через измерения в режиме реального времени. Для реализации этого регулятора в виде обратной связи по выходу получим оценки переменных с e_2 по e_ρ с использованием линейного наблюдателя с сильной обратной связью. В результате получаем закон управления с обратной связью по выходу

$$\begin{aligned}\dot{e}_0 &= e_1, \\ u &= -k \operatorname{sat} \left(\frac{k_0 e_0 + k_1 e_1 + k_2 \hat{e}_2 + \dots + k_{\rho-1} \hat{e}_{\rho-1} + \hat{e}_\rho}{\mu} \right), \\ \dot{\hat{e}}_i &= \hat{e}_{i+1} + \left(\frac{\alpha_i}{\varepsilon^i} \right) (e_1 - \hat{e}_1), \quad 1 \leq i \leq \rho-1, \\ \dot{\hat{e}}_\rho &= \left(\frac{\alpha_\rho}{\varepsilon^\rho} \right) (e_1 - \hat{e}_1),\end{aligned}$$

где положительные константы с α_1 по α_ρ выбраны так, чтобы корни уравнения

$$s^\rho + \alpha_1 s^{\rho-1} + \dots + \alpha_{\rho-1} s + \alpha_\rho = 0$$

имели отрицательные вещественные части. В случае, когда рассматриваемая система имеет относительную степень, равную единице ($\rho = 1$), наблюдатель с сильной обратной связью не используется. В условиях предположений, сделанных в параграфе 14.1.4, система, замкнутая обратной связью по состоянию, имеет экспоненциально устойчивую точку равновесия в $(z, e_0, e) = (0, \bar{e}_0, 0)$. Читателю предлагается (упражнение 14.50) проверить, что при достаточно малой ε закон управления с обратной связью по выходу обеспечивает те же характеристики замкнутой системы, которые имеют место при использовании закона управления с обратной связью по состоянию.

14.6. Упражнения

14.1 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + \sin x_1, \quad \dot{x}_2 = \theta_1 x_1^2 + (1 + \theta_2)u, \quad y = x_1,$$

где $|\theta_1| \leq 2$ и $|\theta_2| \leq 1/2$. Используя метод построения закона управления в скользящем режиме,

- (a) найдите непрерывный закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий стабилизацию начала координат.
- (b) найдите непрерывный закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий асимптотическое отслеживание выходом

¹⁾ Мы переобозначили параметр граничного слоя скользящего режима через μ для того, чтобы сохранить обозначение для параметра наблюдателя ε .

$y(t)$ командного сигнала $r(t)$. При этом предположите, что r, \dot{r} и \ddot{r} — непрерывные ограниченные функции.

14.2 Упрощенная модель подводного транспортного робота, описывающая динамику изменения курсового угла, имеет следующий вид [60]:

$$\ddot{\psi} + a\dot{\psi}|\dot{\psi}| = \tau,$$

где ψ — курсовой угол, τ — нормализованный угловой момент, рассматриваемый как управление, и a — положительный параметр. Необходимо построить закон управления, обеспечивающий отслеживание углом ψ заданного значения $\psi_r(t)$ при условии, что $\psi_r(t)$, $\dot{\psi}_r(t)$ и $\ddot{\psi}_r(t)$ являются ограниченными функциями от t . Пусть $\hat{a} = 1$ — номинальное значение параметра a .

- (a) Используя $x_1 = \psi$ и $x_2 = \dot{\psi}$ в качестве переменных состояния, $u = \tau$ в качестве управления и $y = \psi$ в качестве выхода, постройте модель состояния системы.
- (b) Покажите, что эта система является линеаризуемой по входу-выходу.
- (c) В предположении, что $a = \hat{a} = 1$, примените метод линеаризации обратной связью и постройте соответствующий закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальное асимптотическое отслеживание заданного командного сигнала.
- (d) В предположении, что $|\hat{a} - a| \leq 0.01$ и $\psi_r(t) = \sin 2t$, покажите, что построенный в пункте (c) закон управления, обеспечивает асимптотическое отслеживание с точностью $|\psi(t) - \psi_r(t)| \leq \delta_1$ и оцените величину δ_1 . Справедлива ли эта оценка для любых начальных состояний?
- (e) В предположении, что $|\hat{a} - a| \leq k$, где k — известная константа, постройте закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальное асимптотическое отслеживание с точностью $|\psi(t) - \psi_r(t)| \leq 0.01$.

14.3 ([176]) Рассмотрим уравнение Ван дер Поля с управлением

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + \varepsilon \omega (1 - \mu^2 x_1^2) x_2 u,$$

где ω , ε и μ — положительные константы и u — управление.

- (a) Покажите, что при $u = 1$ существует устойчивый предельный цикл вне поверхности $x_1^2 + x_2^2/\omega^2 = 1/\mu^2$ и при $u = -1$ существует неустойчивый предельный цикл вне той же поверхности.
- (b) Пусть $s = x_1^2 + x_2^2/\omega^2 - r^2$, $r < 1/\mu$. Покажите, что если ограничить движение системы поверхностью $s = 0$ (т. е. $s(t) \equiv 0$), то рассматриваемая модель сводится к уравнению гармонического осциллятора

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1,$$

решением которого является синусоидальное колебание с частотой ω и амплитудой r .

- (c) Постройте обратную связь по состоянию в скользящем режиме, обеспечивающую стремление всех траекторий в полосе $|x_1| < 1/\mu$ к многообразию $s = 0$ с последующим их удержанием на этом многообразии.
- (d) Выполните при $\omega = \mu = \varepsilon = 1$ компьютерное моделирование системы, замкнутой идеальным законом управления в скользящем режиме и его непрерывной аппроксимацией.

14.4 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + ax_1 \sin x_1, \quad \dot{x}_2 = bx_1 x_2 + u,$$

где a и b — неизвестные константы, о которых известно, что $|a - 1| \leq 1$ и $|b - 1| \leq 2$. Используя метод построения закона управления в скользящем режиме, найдите для этой системы непрерывную глобально стабилизирующую обратную связь по состоянию.

14.5 Уравнение маятника с точкой подвеса, движущейся в горизонтальном направлении с изменяющимся со временем, ограниченным ускорением имеет вид

$$m\ell\ddot{\theta} + mg \sin \theta + k\ell\dot{\theta} = T/\ell + mh(t) \cos \theta,$$

где h — ускорение в горизонтальной плоскости, T — момент, рассматриваемый как управление; другие переменные определены в параграфе 1.2.1. Предположим, что

$$0.9 \leq \ell \leq 1.1, \quad 0.5 \leq m \leq 1.5, \quad 0 \leq k \leq 0.2, \quad |h(t)| \leq 1$$

и $g = 9.81$. Необходимо стабилизировать движение маятника в точке $\theta = 0$ при любых начальных условиях $\theta(0)$ и $\dot{\theta}(0)$. Используя метод построения закона управления в скользящем режиме, найдите для этой системы обратную связь по состоянию, обеспечивающую предельную ограниченность решений при $|\theta| \leq 0.01$ и $|\dot{\theta}| \leq 0.01$.

14.6 ([108]) Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + u.$$

- (a) Используя метод построения закона управления в скользящем режиме, найдите для этой системы непрерывную глобально стабилизирующую обратную связь по состоянию.
- (b) Можно ли обеспечить глобальную стабилизацию начала координат с использованием закона управления, полученного с использованием метода линеаризации системы обратной связью?

14.7 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + th(x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = u + \delta(x),$$

где $\delta(x)$ — неопределенная функция, которая удовлетворяет неравенству $|\delta(x)| \leq \rho(x)$ для всех x и некоторой известной функции ρ . Используя метод построения закона управления в скользящем режиме,

найдите для этой системы непрерывную обратную связь по состоянию, такую что для всех $\|x(0)\|_\infty \leq k$ решение $x(t)$ ограничено и $|x_1(t)|$ предельно ограничено величиной 0.01.

14.8 Система с резервуаром из примера 12.5, снабженная интегратором, имеет вид

$$\dot{y} = \frac{1}{A(y)}(u - c\sqrt{y}), \quad \dot{\sigma} = y - r$$

где r — желаемая рабочая точка. Пусть \hat{c} и $\hat{A}(y)$ — номинальные модели для c и $A(y)$, соответственно. Предположим, что нам известны положительные константы $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 > 0$, $\varrho_3 \geq 0$ и $0 \leq \varrho_4 < 1$, такие что

$$\varrho_1 \leq A(y) \leq \varrho_2, \quad |\hat{c} - c| \leq \varrho_3 \quad \text{и} \quad \left| \frac{A(y) - \hat{A}(y)}{A(y)} \right| \leq \varrho_4.$$

Используя метод построения закона управления в скользящем режиме, найдите для этой системы непрерывную обратную связь по состоянию такую, что все переменные состояния ограничены и $|y(t) - r|$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

14.9 Рассмотрим систему (14.1).

- (a) Пусть B — постоянная матрица ранга p . Покажите, что существует невырожденная $(n \times n)$ -матрица M , такая что $MB = [0, I_p]^T$, где I_p — единичная $(p \times p)$ -матрица. Проверьте, что $T(x) = Mx$ удовлетворяет (14.2).
- (b) Пусть $B(x)$ — гладкая функция от x . Предположим, что B имеет ранг p для всех x в области $D \subset R^n$. Пусть $\Delta = \text{span}\{b_1, \dots, b_p\}$, где b_1, \dots, b_p — столбцы матрицы B . Предположим также, что Δ инволютивно. Покажите, что для любого $x_0 \in D$ существуют гладкие функции $\phi_1(x), \dots, \phi_{n-p}(x)$ с линейно независимыми в точке x_0 дифференциалами $\partial\phi_i/\partial x, \dots, \partial\phi_{n-p}/\partial x$, такие что $[\partial\phi_i/\partial x]B(x) = 0$ при $1 \leq i \leq n-p$. Покажите, что можно найти гладкие функции $\phi_{n-p+1}(x), \dots, \phi_n(x)$ такие, что отображение $T(x) = [\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)]^T$ является диффеоморфизмом в окрестности x_0 и удовлетворяет (14.2).

Указание: Примените теорему Фробениуса.¹⁾

14.10 Рассмотрим неавтономную систему, представленную в регулярной форме

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_a(t, \eta, \xi) + \delta_a(t, \eta, \xi), \\ \dot{\xi} &= f_b(t, \eta, \xi) + G(t, x)E(t, x)u + \delta(t, x, u), \end{aligned}$$

где для всех $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ матрица E предполагается известной, является невырожденной и имеет ограниченную обратную и G является положительной диагональной матрицей с элементами, отделенными от

¹⁾ Прим. ред. перев. — См. Приложение C.23

нуля. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $\phi(t, \eta)$, $\phi(t, 0) = 0$, такая что начало координат системы $\dot{\eta} = f_a(t, \eta, \phi(t, \eta)) + \delta_\eta(t, \eta, \phi(t, \eta))$ равномерно асимптотически устойчиво. Пусть

$$u = E^{-1} \left[-L \left(f_b - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} f_a \right) + v \right],$$

где либо $L = \hat{G}^{-1}$, либо $L = 0$ и $\hat{G}(t, x)$ — номинальная модель для $G(t, x)$. Пусть

$$\Delta = (I - GL) \left(f_b - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} f_a \right) + \delta - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \delta_a.$$

Предположим, что Δ_i удовлетворяет неравенству (14.10) с $\rho = \rho(t, x)$. Положив $s = \xi - \phi(t, \eta)$, найдите закон управления в скользящем режиме, обеспечивающий стабилизацию начала координат. Сформулируйте и докажите теорему, аналогичную теореме 14.1.

14.11 Предположим, что выражение (14.13) заменено на следующее:

$$v_i = -\beta(x)\sigma\left(\frac{s_i}{\varepsilon}\right),$$

где $\sigma : R \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируемая, нечетная, монотонно возрастающая функция, обладающая свойствами

$$\sigma(0) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \sigma(y) = 1 \quad \text{и} \quad y\sigma(y) \geq \sigma(1)y^2, \forall |y| \leq 1.$$

(a) Покажите, что функции $\sigma(y) = \operatorname{th}(y)$, $\sigma(y) = (2/\pi) \operatorname{arctg}(\pi y/2)$ и $\sigma(y) = y/(1+|y|)$ удовлетворяют вышеприведенным свойствам.

(b) Покажите, что если (14.10) выполнено с $\kappa_0 < \sigma(1)$ и β выбрана так, что

$$\beta(x) \geq \frac{\varrho(x)}{\sigma(1) - \kappa_0} + \beta_0, \quad \beta_0 > 0,$$

то

$$s_i \dot{s}_i \leq -g_0 \beta_0 [\sigma(1) - \kappa_0] |s_i| \quad \text{при} \quad |s_i| \geq \varepsilon.$$

(c) Докажите теоремы 14.1 и 14.2 для этого закона управления в скользящем режиме.

14.12 Замените неравенство (14.10) на следующее

$$\frac{\Delta_i}{g_i} \leq \varrho_i(x) + \sum_{j=1}^p \kappa_{ij} |v_j|, \quad \forall 1 \leq i \leq p.$$

Пусть $\mathcal{K} — (p \times p)$ -матрица с элементами κ_{ij} и предположим, что $I - K$ принадлежит классу M -матриц.¹⁾ Из свойств M -матриц следует, что следующие три условия эквивалентны:²⁾

- (i) $I - \mathcal{K}$ принадлежит классу M -матриц.
- (ii) $I - \mathcal{K}$ невырождена и все элементы матрицы $(I - \mathcal{K})^{-1}$ неотрицательны.
- (iii) Существует вектор w , все элементы которого положительны, такой что все элементы $b = (I - \mathcal{K})w$ положительны.

Пусть $\bar{\varrho}_i(x) \geq \varrho_i(x)$ для всех $1 \leq i \leq p$ и $\sigma(x) = (I - \mathcal{K})^{-1}[\bar{\varrho}_1(x), \dots, \bar{\varrho}_p(x)]^T$.

- (a) Покажите, что при $v_i = -\beta_i(x)\operatorname{sgn}(s_i)$, $\beta_i(x) = \sigma_i(x) + w_i$, выполнено $s_i \dot{s}_i \leq -b_i g_0 |s_i|$, $1 \leq i \leq p$.
- (b) Предположим, что $\sum_{j=1}^p \kappa_{ij} \leq \kappa_0 < 1$ и $\varrho_i(x) = \varrho(x)$ при $1 \leq i \leq p$. Покажите, что $I - \mathcal{K}$ принадлежит классу M -матриц и $\bar{\varrho}_i(x)$ и w могут быть выбраны так, что в результате мы получаем закон управления (14.11).

14.13 С учетом результатов для «непрерывного» закона управления в скользящем режиме, представленных в параграфе 14.1.3, покажите, что существует конечный момент времени T , возможно зависящий от ε и начальных состояний, а также положительная константа k , не зависящая от ε и начальных состояний, такие что $|y(t) - r(t)| \leq k\varepsilon$ для всех $t \geq T$.

14.14 Выполните упражнение 14.5 с использованием ляпуновского синтеза.

14.15 Выполните упражнение 14.8 с использованием ляпуновского синтеза.

14.16 Используя численные данные для уравнения маятника из параграфа 14.1.1, выполните компьютерное моделирование системы, замкнутой законом управления, построенном в примере 14.5. Определите параметры этого закона управления, при которых достигаются те же характеристики замкнутой системы, которые были получены с использованием закона управления в скользящем режиме. Сравните характеристики обеих замкнутых систем.

14.17 Для каждой из нижеследующих скалярных систем используйте метод нелинейного демпфирования и постройте закон управления с обратной связью по состоянию, гарантирующий ограниченность состояния $x(t)$, а также равномерную предельную ограниченность с предельной границей μ . Функция $\delta(t)$ предполагается ограниченной для всех $t \geq 0$, но верхняя граница $|\delta(t)|$ неизвестна.

$$(a) \quad \dot{x} = -x + x^2[u + \delta(t)], \quad (b) \quad \dot{x} = x^2[1 + \delta(t)] - xu.$$

¹⁾ Класс M -матриц вводится в лемме 9.7.

²⁾ См. [57]. Прим. ред. перев. — Это утверждение называют также теоремой Севастьянова–Котелянского, см. [63].

14.18 Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, представленную в нормальной форме (13.16)–(13.18), и предположим, что (13.16) является устойчивой по входу–состоянию. Пусть $\widehat{\alpha}(x)$ и $\widehat{\gamma}(x)$ — номинальные модели для функций $\alpha(x)$ и $\gamma(x)$, соответственно. Предположим, что ошибки модели удовлетворяют неравенствам

$$|\gamma(x)[\widehat{\alpha}(x) - \alpha(x)]| \leq \rho_0(x), \quad \left| \frac{\gamma(x) - \widehat{\gamma}(x)}{\widehat{\gamma}(x)} \right| \leq k < 1,$$

где функция $\rho_0(x)$ и константа k известны. Пусть $r(t)$ — командный сигнал и предположим, что r и его производные до порядка $r^{(\rho)}$ включительно непрерывны и ограничены. Используя метод Ляпунова, найдите непрерывный закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий асимптотическое отслеживание выходом y сигнала r с заданной точностью μ , т. е. должно быть выполнено $|y(t) - r(t)| \leq \mu$ для всех $t \geq T$, где T — некоторый конечный момент времени.

14.19 С использованием интегрального управления выполните предыдущее упражнение для случая, когда командный сигнал является постоянным. Докажите, что ошибка регулирования стремится к нулю.

14.20 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u + \delta(x),$$

где δ неизвестна, но для нее справедлива оценка $|\delta(x)| \leq \rho_1 \|x\|_2$ с известной ρ_1 . Пусть $u = \psi(x) = -x_1 - x_2$ — номинальный стабилизирующий закон управления и

$$v = \begin{cases} -\rho_1 \|x\|_2 (w/\|w\|_2), & \text{если } \rho_1 \|x\|_2 \|w\|_2 \geq \varepsilon, \\ -\rho_1^2 \|x\|_2^2 (w/\varepsilon), & \text{если } \rho_1 \|x\|_2 \|w\|_2 < \varepsilon, \end{cases}$$

где $w^T = 2x^T PB$ и $V(x) = x^T Px$ — функция Ляпунова для номинальной замкнутой системы. Применим управление $u = -x_1 - x_2 + v$.

(а) Покажите, что все предположения следствия 14.1 выполнены, за исключением неравенства (14.45), которое справедливо лишь при $\eta_0 = 0$.

(б) Покажите, что при $\delta(x) = 2(x_1 + x_2)$ и $\rho_1 = 2\sqrt{2}$ начало координат неустойчиво.

14.21 Предположим, что (14.33)–(14.35) выполнены с $\|\cdot\|_\infty$. Рассмотрим следующие непрерывные аппроксимации разрывного закона управления (14.40):

$$v_i = \begin{cases} -\eta(t, x) \operatorname{sgn}(w_i), & \text{если } \eta(t, x) |w_i| \geq \varepsilon, \\ -\eta^2(t, x) (w_i/\varepsilon), & \text{если } \eta(t, x) |w_i| < \varepsilon, \end{cases}$$

где $i = 1, 2, \dots, p$ и $w^T = [\partial V / \partial x] G(t, x)$.

(а) Покажите, что

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|_\infty) + \sum_{i \in I} \left[\eta(t, x) |w_i| - \frac{\eta^2(t, x) |w_i|^2}{\varepsilon} \right],$$

где $i \in I$, если $\eta(t, x) |w_i| < \varepsilon$.

(б) Для этого закона управления сформулируйте и докажите теорему, аналогичную теореме 14.3.

14.22 Рассмотрим закон управления из упражнения 14.21. Мы хотим доказать результат, аналогичный следствию 14.1. Предположим, что $\alpha_3(\|x\|_\infty) \geq \phi^2(x)$, $\eta(t, x) \geq \eta_0 > 0$ и

$$|\delta_i| \leq \rho_1 \phi(x) + \varkappa_0 |v_i|, \quad 0 \leq \varkappa_0 < 1$$

при $i = 1, 2, \dots, p$. Из этих неравенств следует, что (14.35) выполнено с $\|\cdot\|_\infty$, однако следует иметь в виду, что они являются ограничительными, т. к. верхняя граница для $|\delta_i|$ зависит только от $|v_i|$.

(а) Покажите, что

$$\dot{V} \leq -\phi^2(x) + \sum_{i \in I} \left\{ -(1 - \varkappa_0) \eta_0^2 \frac{|w_i|^2}{\varepsilon} + \rho_1 \phi(x) |w_i| \right\}.$$

(б) Сформулируйте и докажите результат, аналогичный следствию 14.1.

14.23 Перепишем неравенство (14.35) в следующем виде:

$$\|\delta(t, x, \psi(t, x) + v)\|_2 \leq \rho_0 + \rho_1 \phi(x) + \varkappa_0 \|v\|_2, \quad 0 \leq \varkappa_0 < 1,$$

где $\phi(x) = \sqrt{\alpha_3(\|x\|_2)}$. Пусть $\eta(x) = \eta_0 + \eta_1 \phi(x)$, где $\eta_0 \geq \rho_0/(1 - \varkappa_0)$ и $\eta_1 \geq \rho_1/(1 - \varkappa_0)$. Рассмотрим закон управления с обратной связью

$$v = \begin{cases} -[\eta_0 + \eta_1 \phi(x)] (w/\|w\|_2), & \text{если } \|w\|_2 \geq \varepsilon, \\ -[\eta_0 + \eta_1 \phi(x)] (w/\varepsilon), & \text{если } \|w\|_2 < \varepsilon. \end{cases}$$

(а) Покажите, что производная функции V вдоль траекторий замкнутой системы (14.38) удовлетворяет оценке

$$\dot{V} \leq -\phi^2(x) + \frac{\varepsilon}{4} [\rho_0 + \rho_1 \phi(x)] \leq -\frac{1}{2} \alpha_3(\|x\|_2) + \frac{\varepsilon^2 \rho_1^2}{32} + \frac{\varepsilon \rho_0}{4}.$$

(б) Примените теорему 4.18 и получите результат, аналогичный теореме 14.3.

(с) Сравните этот закон управления с (14.41).

14.24 Рассмотрим задачу, исследованием которой мы занимались в параграфе 14.2. Предположим, что (14.35) выполнено для 2-нормы, а также то, что выполнены (14.44) и (14.46). Покажите, что закон управления

$$u = \psi(t, x) - \gamma w; \quad w^T = \frac{\partial V}{\partial x} G(t, x)$$

при достаточно большом коэффициенте γ обеспечивает стабилизацию начала координат.

14.25 Рассмотрим задачу, исследованием которой мы занимались в параграфе 14.2. Покажите, что вместо закона управления $u = \psi(t, x) + v$ можно использовать $u = v$, где $\rho(t, x)$ определяется неравенством

$$\|\delta(t, x, u) - \psi(t, x)\|_2 \leq \rho(t, x) + \varkappa_0 \|u\|_2, \quad 0 \leq \varkappa_0 < 1.$$

14.26 Предположим, что система (14.30) содержит не только удовлетворяющую условию согласованности неопределенность δ , но и не удовлетворяющую условию согласованности неопределенность Δ , т. е.

$$\dot{x} = f(t, x) + \Delta(t, x) + G(t, x)[u + \delta(t, x, u)].$$

Предположим также, что в области $D \subset R^n$ все предположения теорем 14.3 выполнены, неравенства (14.44)–(14.46) справедливы и для не удовлетворяющей условию согласованности неопределенности при некоторой $\mu \geq 0$ выполнено неравенство $\|[\partial V / \partial x] \Delta(t, x)\|_2 \leq \mu \phi^2(x)$. Пусть $u = \psi(t, x) + v$, где v определяется выражением (14.41). Покажите, что если $\mu < 1$, то закон управления с обратной связью обеспечивает стабилизацию начала координат замкнутой системы при условии, что ε выбрана настолько малой, что выполнено $\varepsilon < 4(1 - \mu)(1 - \varkappa_0)\eta_0^2/\rho_1^2$.

14.27 Рассмотрим систему $\dot{x} = f(x) + G(x)[u + \delta(x, u)]$ и предположим, что существуют гладкие функции $\psi(x)$, $V(x)$ и $\rho(x)$, обращающиеся в ноль в $x = 0$, и известная константа k , такие что выполнены неравенства

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2, \quad \frac{\partial V}{\partial x}[f(x) + G(x)\psi(x)] \leq -c_3 \|x\|^2,$$

$$\|\delta(x, \psi(x) + v)\| \leq \rho(x) + \varkappa_0 \|v\|, \quad 0 \leq \varkappa_0 < 1, \quad \forall x \in R^n, \forall v \in R^p,$$

где $c_i \ i = 1, 2, 3$ — положительные константы.

(a) Покажите, что можно построить непрерывный закон управления с обратной связью по состоянию $u = \gamma(x)$, такой что начало координат системы

$$\dot{x} = f(x) + G(x)[\gamma(x) + \delta(x, \gamma(x))]$$

глобально экспоненциально устойчиво.

(b) Примените результат пункта (a) к системе

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = (1 + a_1)(x_1^3 + x_2^3) + (1 + a_2)u,$$

где a_1 и a_2 — неизвестные константы, удовлетворяющие $|a_1| \leq 1$ и $|a_2| \leq 1/2$.

14.28 Выполните упражнение 14.1 с использованием бэкстеппинга.

14.29 Выполните упражнение 14.5 с использованием бэкстеппинга.

14.30 Выполните упражнение 14.6 с использованием бэкстеппинга.

14.31 С использованием бэкстеппинга постройте закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальную стабилизацию системы

$$\dot{x}_1 = x_2 + a + (x_1 - a^{1/3})^3, \quad \dot{x}_2 = x_1 + u,$$

где a — известная константа.

14.32 ([108]) Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^3, \quad \dot{x}_2 = u.$$

(a) С использованием бэкстеппинга постройте линейный закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат.

Указание: Не исключайте нелинейные члены.

(b) Постройте глобально стабилизирующй закон управления с обратной связью по состоянию с использованием метода линеаризации системы обратной связью.

(c) Сравните построенные в предыдущих пунктах два закона управления. Используя компьютерное моделирование, сравните характеристики замкнутых систем и величины сигналов управления, применяемых в этих двух случаях.

14.33 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 + u.$$

(a) Постройте гладкий закон управления с обратной связью по состоянию $u = \psi(x)$, такой что начало координат замкнутой системы глобально экспоненциально устойчиво.

(b) Расширьте динамику системы, добавив интегратор в канал входа:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 + z, \quad \dot{z} = v.$$

Используя бэкстеппинг, найдите гладкий закон управления с обратной связью по состоянию $v = \phi(x, z)$, такой что начало координат замкнутой системы глобально асимптотически устойчиво.

14.34 Рассмотрим систему из упражнения 13.17.

(a) Начав анализ системы с уравнения для \dot{x}_1 и перейдя согласно процедуре бэкстеппинга к уравнению для \dot{x}_2 -equation, постройте закон управления с обратной связью по состоянию $u = \psi(x)$, такой что начало координат $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ первых двух уравнений глобально экспоненциально устойчиво.

(b) Покажите, что при использовании закона управления с обратной связью, построенного в пункте (a), начало координат $x = 0$ всей системы глобально асимптотически устойчиво.

Указание: Используйте свойство устойчивости по входу-состоянию третьего уравнения.

14.35 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta x_1^2, \quad \dot{x}_2 = x_3 + u, \quad \dot{x}_3 = x_1 - x_3, \quad y = x_1,$$

где $\theta \in [0, 2]$. Используя бэкстеппинг, постройте закон управления с обратной связью по состоянию, такой что величина $|y - a \sin t|$ предельно ограничена константой μ , представляющей собой параметр, который может быть выбран произвольно малым. Предположите, что $|a| \leq 1$ и $\|x(0)\|_\infty \leq 1$.

14.36 Выполните упражнение 14.4 с использованием комбинации бэкстеппинга и ляпуновского синтеза.

14.37 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1^2 + \delta(x) + u,$$

где $\delta(x)$ — неизвестная (локально липшицевая) функция от x , удовлетворяющая неравенству $|\delta(x)| \leq k \|x\|_2$ для всех x с известной константой k . Постройте глобально стабилизирующую обратную связь по состоянию.

14.38 Рассмотрим систему из упражнения 14.7.

- (a) При $\delta = 0$ и используя бэкстеппинг, постройте глобально стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию.
- (b) Используя стабилизирующий закон управления из пункта (a) и ляпуновский синтез, постройте закон управления с обратной связью по состоянию, такой что для всех $\|x(0)\|_\infty \leq k$ решение $x(t)$ является ограниченным и компонента $|x_1(t)|$ предельно ограничена величиной 0.01.

14.39 Рассмотрим систему магнитной подвески из упражнения 1.18 и предположим, что шар подвергается воздействию вертикально направленной возмущающей силы $d(t)$, т. е. уравнение системы имеет вид

$$m\ddot{y} = -k\dot{y} + mg + F(y, i) + d(t).$$

Предположим также, что $|d(t)| \leq d_0$ для всех $t \geq 0$, где верхняя граница d_0 известна.

- (a) Рассматривая силу F в качестве управления и используя ляпуновский синтез, постройте закон управления с обратной связью по состоянию $F = \gamma(y, \dot{y})$, такой что $|y - r|$ предельно ограничено величиной μ , где μ — параметр, который может быть выбран произвольно малым. Найдите другой закон управления γ в виде непрерывно дифференцируемой функции своих аргументов.
- (b) Используя бэкстеппинг, постройте закон управления с обратной связью по состоянию для управляющего напряжения u , гарантирующий предельную ограниченность величины $|y - r|$ константой μ .

14.40 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2[x_2 + \delta(t)], \quad \dot{x}_2 = u,$$

где $\delta(t)$ — ограниченная функция для всех $t \geq 0$; верхняя граница величины $|\delta(t)|$ предполагается неизвестной. С использованием комбинации бэкстеппинга и метода нелинейного демпфирования, постройте закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальную ограниченность состояния x для всех начальных состояний $x(0) \in R^2$.

14.41 Выполните упражнение 14.40 для системы

$$\dot{x}_1 = -x_1 x_2 + x_1^2[1 + \delta(t)], \quad \dot{x}_2 = u.$$

14.42 Рассмотрим линейную систему $\dot{x} = Ax + Bu$ и предположим, что существует положительно определенная симметричная матрица P , такая что $PA + A^T P \leq 0$ и пара $(A, B^T P)$ является наблюдаемой. Постройте глобально стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию $u = -\psi(x)$, такой что $\|\psi(x)\| \leq k$ для всех x , где k — заданная положительная константа.

14.43 Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^3 + \psi(u),$$

где ψ — локально липшицевая функция, удовлетворяющая $\psi(0) = 0$ и $u\psi'(u) > 0$ для всех $u \neq 0$. Постройте глобально стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию.

14.44 Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, имеющую относительную степень, равную единице, и представленную в глобально определенной нормальной форме

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, y), \quad \dot{y} = b(\eta, y) + a(\eta, y)u,$$

где $f_0(0, 0) = 0$ и $a(\eta, y) \geq a_0 > 0$. Предположим, что существует (известная) радиально неограниченная функция Ляпунова $W(\eta)$, $[\partial W / \partial \eta](0) = 0$, такая что $[\partial \dot{W} / \partial \eta]f_0(\eta, 0) < 0$ для всех $\eta \neq 0$. Постройте глобально стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию.

14.45 Постройте пассивный глобально стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию для системы из примера 13.17.

14.46 Постройте глобально стабилизирующий закон управления с обратной связью по состоянию для системы

$$\dot{x}_1 = -(1 + x_3)x_1^3, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_2^2 - 1 + u.$$

14.47 Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, имеющую относительную степень, равную единице, и представленную в некоторой области, содержащей начало координат, в нормальной форме

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, y), \quad \dot{y} = b(\eta, y) + a(\eta, y)u,$$

где f_0 , a и b — достаточно гладкие функции, такие что $a(\eta, y) \geq a_0 > 0$, $f_0(0, 0) = 0$ и $b(0, 0) = 0$. Предположим, что начало координат

системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ асимптотически устойчиво и существует функция Ляпунова $V(\eta)$ такая, что выполнены неравенства

$$\alpha_1(\|\eta\|) \leq V(\eta) \leq \alpha_2(\|\eta\|) \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} f_0(\eta, y) \leq -\alpha_3(\|\eta\|), \quad \forall \|\eta\| \geq \gamma(|y|)$$

для некоторых \mathcal{K} -функций $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и γ . Пусть $\hat{a}(y)$ и $\hat{b}(y)$ — гладкие номинальные модели для $a(\eta, y)$ и $b(\eta, y)$, такие что $\hat{a}(y) \geq \hat{a}_0 > 0$ и в рассматриваемой области выполнено

$$\left| \frac{b(\eta, y)}{a(\eta, y)} - \frac{\hat{b}(y)}{\hat{a}(y)} \right| \leq \varrho(y), \quad (14.116)$$

где $\varrho(y)$ известна. Выбор $\hat{a} = 1, \hat{b} = 0$ возможен.

- (а) Покажите, что непрерывный стабилизирующий закон управления в скользящем режиме может быть выбран в следующем виде

$$u = -\frac{\hat{b}(y)}{\hat{a}(y)} - \beta(y) \operatorname{sat}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$$

где $\beta(y) \geq \varrho(y) + \beta_0$ и ε и β_0 — некоторые положительные константы. В частности, покажите, что существуют компактные положительно инвариантные множества Ω и $\Omega_\varepsilon = \{V(\eta) \leq \alpha(\varepsilon), |y| \leq \varepsilon\} \subset \subset \Omega$, где α — некоторая \mathcal{K} -функция, такие что каждая траектория, начинающаяся в Ω , достигает Ω_ε за конечное время.

- (б) Покажите, что если начало координат системы $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ экспоненциально устойчиво, то при достаточно малой ε начало координат замкнутой системы экспоненциально устойчиво и Ω является подмножеством области притяжения.
- (в) Покажите, что (14.116) может быть выполнено на любом компактном множестве с постоянной ρ .
- (г) При каких условиях представленный закон управления обеспечивает полуглобальную стабилизацию?
- (д) Постройте стабилизирующий закон управления с обратной связью по выходу для системы

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2^3, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - x_3^3 - u, \quad \dot{x}_3 = x_1^2 - x_3 + u, \quad y = x_2$$

14.48 Рассмотрим систему с p входами и p выходами

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x),$$

где f — локально липшицевая функция и h — непрерывно дифференцируемая функция, такие что $f(0, 0) = 0$ и $h(0) = 0$. Предположим, что система

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} f(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{h}(x, u)$$

с выходом \dot{y} пассивна с радиально неограниченной, положительно определенной функцией запаса $V(x)$, т. е. $\dot{V} \leq u^T \dot{y}$, и наблюдаема в нулевом состоянии. Пусть z_i — выход линейной передаточной функции $b_i s / (s + a_i)$ с входом y_i , где a_i и b_i — положительные константы.

- (а) Используя $V(x) + \sum_{i=1}^p (k_i / 2b_i) z_i^2$ в качестве функции Ляпунова, покажите, что обратная связь по выходу $u_i = -k_i z_i, 1 \leq i \leq p, k_i > 0$, глобально стабилизирует начало координат.
- (б) Используя $V(x) + \sum_{i=1}^p (1/b_i) \int_0^{z_i} \phi_i(\sigma) d\sigma$ в качестве функции Ляпунова, где ϕ_i — локально липшицева функция, такая что $\phi_i(0) = 0$ и $\sigma \phi_i'(\sigma) > 0$ для всех $\sigma \neq 0$, покажите, что обратная связь по выходу $u_i = -\phi_i(z_i), 1 \leq i \leq p$, стабилизирует начало координат. При каких условиях на ϕ_i этот закон управления обеспечивает глобальную стабилизацию?
- (в) Используйте результат пункта (а) для обеспечения глобальной стабилизации маятника

$$m\ell\ddot{\theta} + mg \sin \theta = u$$

в положении, соответствующем углу наклона $\theta = \delta_1$, с использованием обратной связи в виде функции, зависящей от θ , но не от $\dot{\theta}$.

14.49 Рассмотрим систему (14.85)–(14.86) и предположим, что $u = \gamma(x)$ — локально липшицевый закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат. Пусть \hat{x} — оценка состояния, полученная с использованием наблюдателя (14.87). Покажите, что обратная связь по выходу $u = \gamma(\hat{x})$ глобально стабилизирует начало координат $(x = 0, \hat{x} = 0)$ замкнутой системы, если система

$$\dot{x} = Ax + g(Cx, \gamma(x - v))$$

с входом v является устойчивой по входу—состоянию.

14.50 Покажите, что полученный в параграфе 14.5.3 закон управления с обратной связью по выходу характеризуется при достаточно малой ε теми же свойствами, которыми обладает закон управления с обратной связью по состоянию. В частности, покажите, что система, замкнутая обратной связью по выходу имеет экспоненциально устойчивую точку равновесия в $(z, e_0, e, \hat{e}) = (0, \bar{e}_0, 0, 0)$.

В следующих семи упражнениях будут рассмотрены несколько специальных случаев.

14.51 Модель асинхронного электрического двигателя (induction motor) может быть представлена в следующем виде:¹⁾

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= k_t(\lambda_a i_b - \lambda_b i_a) - T_L, \\ \dot{\lambda}_a &= -\frac{R_r}{L_r} \lambda_a - p\omega \lambda_b + \frac{R_r M}{L_r} i_a, \end{aligned}$$

¹⁾ См. например [50, приложение C] или [117].

$$\dot{\lambda}_b = -\frac{R_r}{L_r}\lambda_b + p\omega\lambda_a + \frac{R_rM}{L_r}i_b,$$

где ω — скорость вращения ротора, T_L крутящий момент, λ_a и λ_b — компоненты вектора магнитного потока через ротор, i_a и i_b — компоненты вектора тока в статоре, L_r и M — индуктивность ротора и взаимная индуктивность, R_r сопротивление обмотки ротора, J — момент инерции, p — число пар контактов и k_t — положительная константа. Крутящий момент T_L может быть выбран в виде $T_L = T_o + \phi(\omega)$, где $\phi \in [0, \infty]$ — локально липшицева функция, представляющая собой модель нагрузки при наличии трения, а T_o — модель нагрузки, не зависящая от скорости вращения. Значения силы тока i_a и i_b рассматриваются в качестве переменных управления. Необходимо построить закон управления с обратной связью, обеспечивающий отслеживание скоростью ω некоторой заданной скорости вращения ω_r при неизвестном крутящем моменте. В этом упражнении мы представим уравнения состояния в полевых координатах (field-oriented coordinates). Это преобразование разделяет рассматриваемую задачу управления на две отдельные задачи управления: задачу управления скоростью вращения ротора и задачу управления магнитным потоком ротора. Преобразование должно выполняться в режиме реального времени и при этом используются значения магнитного потока ротора, также измеренные в режиме реального времени. На первом этапе мы будем предполагать, что магнитный поток ротора известен. На следующем этапе решения задачи мы используем наблюдатель для получения оценок магнитного потока ротора и выполним анализ работоспособности построенного закона управления, в котором величина магнитного потока заменена на ее оценку. Этот анализ будет выполнен с учетом неопределенности сопротивления обмотки ротора R_r , которое может существенно изменяться при изменении температуры ротора в процессе эксплуатации двигателя.

(а) Пусть ρ — угол ориентации вектора магнитного потока ротора и λ_d — его абсолютная величина, т. е. $\rho = \arctg(\lambda_b/\lambda_a)$ и $\lambda_d = \sqrt{\lambda_a^2 + \lambda_b^2}$. Заменим λ_a и λ_b на λ_d и ρ и рассматривая эти величины в качестве переменных состояния, выполните замену переменных i_a и i_b на i_d и i_q в соответствии со следующим равенством

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \rho & \sin \rho \\ -\sin \rho & \cos \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}, \quad (14.117)$$

и покажите, что модель мотора может быть представлена в виде модели состояния

$$J\dot{\omega} = k_t\lambda_d i_q - T_L, \quad \dot{\lambda}_d = -\frac{R_r}{L_r}\lambda_d + \frac{R_rM}{L_r}i_d, \quad \dot{\rho} = p\omega + \frac{R_rMi_q}{L_r\lambda_d},$$

при условии, что $\lambda_d > 0$.

- (б)** Первые два уравнения вышеприведенной модели состояния не зависят от ρ . Поэтому для нахождения закона управления для i_d и i_q мы можем опустить уравнение для ρ . Однако, нам по-прежнему необходимо ρ для вычисления i_a и i_b с использованием преобразования, обратного преобразованию (14.117). Покажите, что при постоянных ω , i_q и λ_d величина ρ будет ограничена. Объясните, почему неограниченность ρ не нарушает справедливость полученного результата.
- (с)** Заметим, что крутящий момент, генерируемый мотором, пропорционален $\lambda_d i_q$. Поэтому мы можем управлять скоростью вращения, если построим регулятор, обеспечивающий отслеживание переменной λ_d желаемого постоянного значения магнитного потока λ_r с использованием управляющего сигнала i_d . После этого можно найти i_q в предположении, что $\lambda_d = \lambda_r$. Это предположение будет обоснованным, если динамика системы управления магнитным потоком является более быстрой по сравнению с динамикой системы управления скоростью вращения ротора.¹⁾ В этом пункте упражнения необходимо построить закон управления магнитным потоком. Покажите, что $i_d = (\lambda_r/M) - k(\lambda_d - \lambda_r)$, $k \geq 0$, обеспечивает выполнение указанной цели управления.

- (д)** Поскольку величины сил тока i_a и i_b должны быть ограничены определенными максимальными значениями, необходимо предположить, что i_d и i_q ограничены величинами I_d и I_q , соответственно. Покажите, что если $I_d > \lambda_r/M$ и $0 < \lambda_d(0) < \lambda_r$, то при использовании закона управления с насыщением

$$i_d = I_d \operatorname{sat}\left(\frac{\lambda_r/M - k(\lambda_d - \lambda_r)}{I_d}\right) \quad (14.118)$$

величина $\lambda_d(t)$ изменяется монотонно от $\lambda_d(0)$ до λ_r . Найдите оценку длительности переходного процесса.

- (е)** При построении закона управления скоростью вращения предположите, что $\omega_r(t)$, $\dot{\omega}_r(t)$ и $T_o(t)$ ограничены. Постройте закон управления в скользящем режиме вида $i_q = -I_q \operatorname{sat}(s/\varepsilon)$ с подходящими параметрами s и ε . Найдите условия, при которых этот регулятор является работоспособным и оцените верхнюю границу ошибки слежения.

- (ф)** Предположим, что в дополнение к сделанному выше предложению функция $\omega_r(t)$ удовлетворяет $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_r(t) = \bar{\omega}_r$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\omega}_r(t) = 0$. Необходимо обеспечить нулевую ошибку в установившемся режиме при постоянной T_o . Используя метод интегрального управления, постройте закон управления в скользящем режиме вида $i_q = -I_q \operatorname{sat}(s/\varepsilon)$ с подходящими параметрами s и ε . Найдите условия,

¹⁾ Это может быть доказано с использованием теории сингулярных возмущений (см. главу 11).

при которых этот регулятор является работоспособным и покажите, что он обеспечивает нулевую ошибку в установившемся режиме.

- (g) Предположение о возможности измерения магнитного потока ротора практически невыполнимо. В приложениях магнитный поток обычно оценивают с использованием наблюдателя вида

$$\dot{\hat{\lambda}}_a = -\frac{\hat{R}_r}{L_r}\hat{\lambda}_a - p\omega\hat{\lambda}_b + \frac{\hat{R}_r M}{L_r}i_a, \quad \dot{\hat{\lambda}}_b = -\frac{\hat{R}_r}{L_r}\hat{\lambda}_b + p\omega\hat{\lambda}_a + \frac{\hat{R}_r M}{L_r}i_b,$$

где \hat{R}_r — номинальное значение (или оценка) величины R_r . Угол ориентации магнитного потока ρ и абсолютная величина магнитного потока λ_d вычисляются с использованием равенств $\rho = \arctg(\hat{\lambda}_b/\hat{\lambda}_a)$ и $\lambda_d = \sqrt{\hat{\lambda}_a^2 + \hat{\lambda}_b^2}$; величины i_d и i_q определяются с использованием (14.117) при ρ , вычисленном в соответствии с вышеприведенной формулой. Для того, чтобы выписать модель состояния для всей системы, определим ошибки оценивания магнитного потока e_d и e_q равенством

$$\begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \rho & \sin \rho \\ -\sin \rho & \cos \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_a - \lambda_a \\ \hat{\lambda}_b - \lambda_b \end{bmatrix}. \quad (14.119)$$

Используя $\omega, \lambda_d, \rho, e_d$ и e_q в качестве переменных состояния, покажите, что вся система может быть представлена в виде модели состояния

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= k_t(\lambda_d i_q + e_q i_d - e_d i_q) - T_L, \\ \dot{\lambda}_d &= -\frac{\hat{R}_r}{L_r}\lambda_d + \frac{\hat{R}_r M}{L_r}i_d, \\ \dot{\rho} &= p\omega + \frac{\hat{R}_r M i_q}{L_r \lambda_d}, \\ \dot{e}_d &= -\frac{R_r}{L_r}e_d + \frac{\hat{R}_r M i_q}{L_r \lambda_d}e_q + \left(\frac{\hat{R}_r - R_r}{L_r}\right)(Mi_d - \lambda_d), \\ \dot{e}_q &= -\frac{\hat{R}_r M i_q}{L_r \lambda_d}e_d - \frac{R_r}{L_r}e_q + \left(\frac{\hat{R}_r - R_r}{L_r}\right)Mi_q. \end{aligned}$$

- (h) Покажите, что управление магнитным потоком (14.118) позволяет обеспечить отслеживание переменной λ_d желаемого значения λ_r при условии, что $I_d > \lambda_r/M$ и $0 < \lambda_d(0) < \lambda_r$. Покажите также, что

$$|Mi_d(t) - \lambda_d(t)| \leq (1 + kM)[MI_d - \lambda_d(0)] \exp[-(\hat{R}_r/\hat{L}_r)t].$$

- (i) Используя $V = (1/2)(e_d^2 + e_q^2)$ и лемму сравнения, покажите, что $\|e\| = \sqrt{e_d^2 + e_q^2}$ удовлетворяет оценке

$$\|e(t)\| \leq k_1 e^{-\gamma t} + k_2 \left| \frac{\hat{R}_r - R_r}{R_r} \right| MI_q$$

для некоторых положительных констант γ, k_1 и k_2 .

- (j) Определите условия, при которых интегральный закон управления в скользящем режиме, полученный в пункте (f), позволяет обеспечить нулевую ошибку в установившемся режиме.

14.52 Нелинейные уравнения динамики m -звенного манипулятора имеют вид

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = u. \quad (14.120)$$

Все переменные определены в упражнении 1.4. Предположим, что M, C и g — непрерывные функции своих аргументов и

$$0 < \lambda_m y^T y \leq y^T M(q)y \leq \lambda_M y^T y, \quad \forall q, y \in R^m, y \neq 0$$

для некоторых положительных констант λ_m и λ_M . Необходимо построить закон управления с обратной связью по состоянию, такой что $q(t)$ асимптотически отслеживает желаемую траекторию $q_r(t)$, где $q_r(t)$, $\dot{q}_r(t)$ и $\ddot{q}_r(t)$ — непрерывны и ограничены. В этом упражнении мы построим закон управления в скользящем режиме. Выберем в качестве поверхности скольжения $s = \Lambda e + \dot{e} = 0$, где Λ — положительная диагональная матрица и пусть

$$u = \widehat{M}(q)v + L[\widehat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \widehat{g}(q) + \widehat{M}(q)\ddot{q}_r - \widehat{M}(q)\Lambda\dot{e}],$$

где \widehat{M} , \widehat{C} и \widehat{g} — номинальные модели M , C и g , соответственно. Матрица L выбирается либо нулевой, либо единичной, в результате чего мы получаем два закона управления.

- (a) Покажите, что s удовлетворяет уравнению

$$\dot{s} = v + \Delta(q, \dot{q}, q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r, v)$$

и получите выражение для Δ при $L = 0$ и $L = I$.

- (b) В предположении, что

$$\|M^{-1}(q)\widehat{M}(q) - I\|_\infty \leq \varkappa_0 < 1, \quad \forall q \in R^m, \quad (14.121)$$

покажите, что Δ_i удовлетворяет неравенствам

$$|\Delta_i| \leq \rho(\cdot) + \varkappa_0 \|v\|_\infty, \quad 1 \leq i \leq m,$$

где ρ может зависеть от $(q, \dot{q}, q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)$.

- (c) Пусть

$$v_i = -\beta(\cdot) \operatorname{sat}(s_i/\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

где β может зависеть от $(q, \dot{q}, q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)$. Найдите β , при которой ошибка регулирования e будет глобально равномерно предельно ограничена. Определите оценку предельной границы в терминах ε .

- (д)** Какими свойствами обладает закон управления в скользящем режиме при постоянной β ?

14.53 Рассмотрим уравнение m -звенного манипулятора из предыдущего примера. В этом примере мы построим другой закон управления в скользящем режиме [180], используя свойство косо-симметричности матрицы $(\dot{M} - 2C)$, что позволит избежать наложения требования (14.121).

- (а)** Пусть выражение для s совпадает с соответствующим выражением из предыдущего примера. Используя $W = (1/2)s^T M(q) s$ в качестве функции Ляпунова для \dot{s} -уравнения, покажите, что

$$\dot{W} = s^T [\dot{M}\Lambda\dot{e} + C(\Lambda e - \dot{q}_r) - D\dot{q} - g - M\ddot{q}_r + u].$$

- (б)** Пусть

$$u = v + L[-\widehat{M}(q)\Lambda\dot{e} - \widehat{C}(q, \dot{q})(\Lambda e - \dot{q}_r) + \widehat{g}(q) + \widehat{M}(q)\ddot{q}_r].$$

где $L = 0$ или $L = I$, в результате чего мы получаем два различных закона управления. Покажите, что

$$\dot{W} = s^T [v + \Delta(q, \dot{q}, q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)]$$

и получите выражение для Δ при $L = 0$ и $L = I$.

- (с)** Пусть

$$v = -\beta(\cdot)\varphi(s/\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad \varphi(y) = \begin{cases} y/\|y\|_2, & \text{при } \|y\|_2 \geq 1, \\ y, & \text{при } \|y\|_2 < 1, \end{cases}$$

где β может зависеть от $(q, \dot{q}, q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)$. Найдите β , при которой ошибка регулирования e будет глобально равномерно предельно ограничена. Определите оценку предельной границы в терминах ε .

- (д)** Какими свойствами обладает закон управления в скользящем режиме при постоянной β ?

14.54 Модель двухзвенного манипулятора, изображенного на рисунке 14.23, может быть представлена [171] уравнением (14.120) с

$$M = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_4 \cos q_2 & a_2 + a_4 \cos q_2 \\ a_2 + a_4 \cos q_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad C = a_4 \sin q_2 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} b_1 \cos q_1 + b_2 \cos(q_1 + q_2) \\ b_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix},$$

где константы a_i ($i = 1, 2, 3, 4$), b_1 и b_2 являются положительными и зависят от масс, моментов инерции и длин звеньев манипулятора, а также от величины ускорения свободного падения. Пренебрежем эффектом

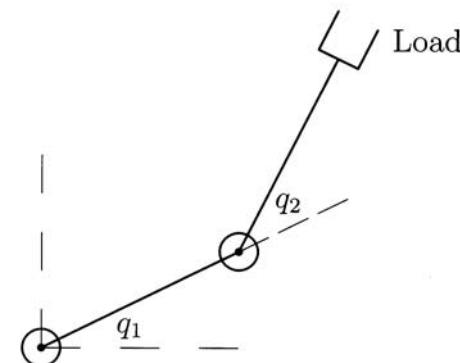


Рис. 14.23. Двухзвенный манипулятор (load — нагрузка)

демпфирования и положим $D = 0$. Пусть номинальными значениями параметров являются следующие величины

$$a_1 = 200.01, \quad a_2 = 23.5, \quad a_3 = 122.5, \quad a_4 = 25,$$

$$b_1 = 784.8, \quad b_2 = 245.25.$$

Построим желаемую траекторию

$$q_{r1}(t) = q_{r2}(t) = (\pi/2)[1 - \exp(-5t)(1 + 5t)],$$

соединяющую точку начального положения ($q_1 = 0, q_2 = 0$) с точкой конечного положения ($q_1 = \pi/2, q_2 = \pi/2$). Предположим, что управление ограничено: $|u_1| \leq 6000$ Нм и $|u_2| \leq 5000$ Нм. В предыдущих двух примерах мы разработали четыре различных закона управления в скользящем режиме:

$$u = -\widehat{M}\beta \operatorname{sat}(s/\varepsilon),$$

$$u = -\widehat{M}\beta \operatorname{sat}(s/\varepsilon) + \widehat{C}\dot{q} + \widehat{g} + \widehat{M}\ddot{q}_r - \widehat{M}\Lambda\dot{e},$$

$$u = -\beta\varphi(s/\varepsilon),$$

$$u = -\beta\varphi(s/\varepsilon) + \widehat{C}(\dot{q}_r - \Lambda e) + \widehat{g} + \widehat{M}\ddot{q}_r - \widehat{M}\Lambda\dot{e}.$$

Для простоты изложения предположим, что β является константой.

- (а)** Используя компьютерное моделирование, выберите параметры Λ, β и ε для каждого из этих четырех законов управления. При моделировании реализуйте указанное ограничение величины управляемых сигналов.
- (б)** Сравните характеристики четырех законов управления при возмущенных параметрах системы (т. е. в условиях, когда нагрузка неизвестна)

$$a_1 = 259.7, \quad a_2 = 58.19, \quad a_3 = 157.19, \quad a_4 = 56.25,$$

$$b_1 = 1030.1, b_2 = 551.8125.$$

- (c) Предположим, что измерению доступны только углы q_1 и q_2 . Разработайте наблюдатель с сильной обратной связью и примените его при реализации закона управления с обратной связью по состоянию. Используя компьютерное моделирование, сравните характеристики законов управления с обратной связью по состоянию и по выходу для одного из представленных выше четырех законов управления.

14.55 Рассмотрим двухзвеный манипулятор из предыдущего примера.

- (a) С учетом результатов, представленных в примере 14.16, разработайте пассивный закон управления, обеспечивающий перевод манипулятора из положения, соответствующего углам ($q_1 = 0, q_2 = 0$), в положение, соответствующее углам ($q_1 = \pi/2, q_2 = \pi/2$). Используйте компьютерное моделирование для выбора параметров K_p и K_d и сравните полученный результат с соответствующим результатом для закона управления в скользящем режиме из предыдущего упражнения.

- (b) Предположим, что измерению доступны лишь углы q_1 и q_2 . Разработайте наблюдатель с сильной обратной связью и примените его при реализации закона управления с обратной связью по состоянию. Используя компьютерное моделирование, сравните характеристики законов управления с обратной связью по состоянию и по выходу

14.56 Рассмотрим TORA-систему (трансляционный осциллятор с ротационным актуатором) из упражнения 1.16. Здесь мы построим пассивный закон управления [146], обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат.

- (a) Используя сумму потенциальной энергии $(1/2)kx_c^2$ и кинетической энергии $(1/2)v^T D(\theta)v$, $v = [\dot{\theta}, \dot{x}_c]^T$, в качестве функции запаса, покажите, что система с входом u и выходом θ пассивна. Является ли она наблюдаемой в нулевом состоянии?

- (b) Пусть $u = -\phi_1(\theta) + w$, где ϕ_1 — локально липшицева функция, $\phi_1(0) = 0$, $y\phi_1(y) > 0$ для всех $y \neq 0$ и $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_0^y \phi_1(\lambda)d\lambda = \infty$. Используя

$$V = \frac{1}{2}v^T D(\theta)v + \frac{1}{2}kx_c^2 + \int_0^\theta \phi_1(\lambda)d\lambda, \quad v = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix}$$

в качестве функции запаса, покажите, что система с входом w и выходом $\dot{\theta}$ пассивна. Покажите также, что эта система является наблюдаемой в нулевом состоянии.

- (c) Пусть ϕ_2 — любая локально липшицевая функция, такая что $\phi_2(0) = 0$ и $y\phi_2(y) > 0$ для всех $y \neq 0$. Покажите, что закон управ-

ления $u = -\phi_1(\theta) - \phi_2(\dot{\theta})$ обеспечивает глобальную стабилизацию начала координат.

- (d) Пусть $M = 1.3608$ кг, $m = 0.096$ кг, $L = 0.0592$ м, $I = 0.0002175$ кг м² и $k = 186.3$ Н/м. Покажите, что закон управления

$$u = -U_p \operatorname{sat}(K_p\theta) - U_v \operatorname{sat}(K_v\dot{\theta})$$

обеспечивает глобальную стабилизацию для любых положительных констант U_p, U_v, K_p и K_v . Выберите U_p и U_v так, чтобы из неравенства $U_p + U_v \leq 0.1$ следовало, что u удовлетворяет ограничению $|u| \leq 0.1$. Эти четыре константы должны быть выбраны так, чтобы минимизировать длительность переходного процесса. Для этого следует использовать компьютерное моделирование и анализ системы с использованием ее линеаризации. Характеристическое уравнение для линеаризованной в окрестности начала координат замкнутой системы имеет вид

$$1 + \beta_0 \frac{(s^2 + \beta_2)(s + \beta_1)}{s^2(s^2 + \beta_3)} = 0$$

где

$$\beta_0 = \frac{U_v K_v (m + M)}{\Delta_0}, \quad \beta_1 = \frac{U_p K_p}{U_v K_v},$$

$$\beta_2 = \frac{k}{m + M}, \quad \beta_3 = \frac{k(I + mL^2)}{\Delta_0}$$

и $\Delta_0 = \Delta(0)$. Покажите, что характеристический полином является гурвицевым и определите местоположение корней при изменении β_0 от нуля до бесконечности.

- (e) Используя компьютерное моделирование замкнутой системы с начальными состояниями $\theta(0) = \pi$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $x_c(0) = 0.025$ и $\dot{x}_c(0) = 0$, а также с использованием результатов пункта (d) о местоположении корней, выберите константы U_p , U_v , K_p и K_v так, чтобы минимизировать длительность переходного процесса. Этую величину следует сделать приблизительно равной 30 секундам.

- (f) Предположим, что измерению доступна лишь величина θ . Используя результаты упражнения 14.48, покажите, что начало координат может быть глобально стабилизировано законом управления с обратной связью по выходу

$$u = -U_p \operatorname{sat}(K_p\theta) - U_v \operatorname{sat}(K_v z),$$

где ε — любая положительная константа, z — выход системы с передаточной функцией $s/(\varepsilon s + 1)$, входом которой является θ . Рассматривая эту передаточную функцию в качестве передаточной функции наблюдателя редуцированного порядка с сильной обратной связью, используйте представленный в параграфе 14.5 метод для того, чтобы показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ закон управления с

обратной связью по выходу обладает теми же характеристиками, которыми обладает закон управления с обратной связью по состоянию. Выполните компьютерное моделирование замкнутой системы при различных значениях ε и сравните полученные результаты с результатами, полученными при использовании закона управления с обратной связью по состоянию.

14.57 Рассмотрим TORA-систему из упражнения 1.16. Здесь мы разработаем закон управления в скользящем режиме,¹⁾ обеспечивающий стабилизацию начала координат.

(a) Покажите, что замена переменных

$$\eta_1 = x_c + \frac{mL \sin \theta}{m+M}, \quad \eta_2 = \dot{x}_c + \frac{mL \dot{\theta} \cos \theta}{m+M}, \quad \eta_3 = \theta, \quad \xi = \dot{\theta}$$

преобразует систему к регулярной форме (14.4)–(14.5).

(b) Используя

$$V_0(\eta) = \frac{(m+M)k_1}{2mL} \left(\eta_1 - \frac{mL}{m+M} \sin \eta_3 \right)^2 + \frac{(m+M)^2 k_1}{2kmL} \eta_2^2 + \frac{k_2}{2} \eta_3^2,$$

где k_1 и k_2 — положительные константы, покажите, что

$$\xi = \phi(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} k_1 \left(\eta_1 - \frac{mL}{m+M} \sin \eta_3 \right) \cos \eta_3 - k_2 \eta_3$$

обеспечивает глобальную стабилизацию начала координат системы

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = -\frac{k}{m+M} \left(\eta_1 - \frac{mL}{m+M} \sin \eta_3 \right), \quad \dot{\eta}_3 = \xi.$$

Покажите, что в качестве поверхности скольжения можно взять

$$s = \dot{\theta} + k_2 \theta - k_1 x_c \cos \theta = 0.$$

Заметим, что s не зависит от параметров системы.

- (c) Найдите $\beta(x)$, при которой закон управления $u = -\beta(x) \operatorname{sat}(s/\mu)$ обеспечивает при достаточно малом значении μ глобальную стабилизацию начала координат.
- (d) Выражение для $\beta(x)$, полученное в предыдущем пункте, может быть достаточно сложным. В целях упрощения закона управления, предположим, что β является положительной константой, и запишем закон управления в виде

$$u = -\beta \operatorname{sat} \left(\frac{\dot{\theta} + k_2 \theta - k_1 x_c \cos \theta}{\mu} \right),$$

¹⁾ При разработке этого закона управления использовались идеи управления на основе пассивности, предложенного в [172].

где положительные константы k_1 , k_2 , β и μ являются выбираемыми параметрами. Покажите, что при достаточно малом μ этот закон управления стабилизирует начало координат и гарантирует, что область притяжения включает компактное множество, содержащее начало координат.

- (e) Пусть параметры системы имеют значения, приведенные в пункте (d) упражнения 14.56. Для выбора параметров закона управления следует использовать компьютерное моделирование и анализ системы с использованием ее линеаризации. Характеристическое уравнение для линеаризованной в окрестности начала координат замкнутой системы имеет вид

$$1 + \gamma_0 \frac{s^3 + \gamma_1 s^2 + \gamma_2 s + \gamma_3}{s^2(s^2 + \gamma_4)} = 0,$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\beta(m+M)}{\mu \Delta_0}, \quad \gamma_1 = k_2 + \frac{mLk_1}{m+M}, \quad \gamma_2 = \frac{k}{m+M}, \\ \gamma_3 = \frac{kk_2}{m+M}, \quad \gamma_4 = \frac{k(I+mL^2)}{\Delta_0}, \quad \Delta_0 = \Delta(0).$$

Покажите, что характеристический полином является гурвицевым и определите местоположение корней при изменении γ_0 от нуля до бесконечности. Сравните полученные значения корней с соответствующими результатами из упражнения 14.56 и прокомментируйте ту роль, которую играет член $-k_1 x_c \cos \theta$ при выборе s .

- (f) Используя компьютерное моделирование замкнутой системы с начальным состоянием $\theta(0) = \pi$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $x_c(0) = 0.025$ и $\dot{x}_c(0) = 0$, а также с использованием результатов пункта (e) о местоположении корней, выберите параметры k_1 , k_2 , β и μ так, чтобы минимизировать длительность переходного процесса. Этую величину следует сделать приблизительно равной 4 секунд. Сравните этот результат с соответствующим результатом из упражнения 14.56.
- (g) Предположим, что измерению доступны лишь θ и x_c . Используя метод анализа, представленный в параграфе 14.5, покажите, что при достаточно малых μ и ε начало координат может быть стабилизировано законом управления с обратной связью по выходу вида

$$u = -\beta \operatorname{sat} \left(\frac{z + k_2 \theta - k_1 x_c \cos \theta}{\mu} \right),$$

где z — выход передаточной функции $s/(\varepsilon s + 1)$ с входом θ , соответствующей наблюдателю редуцированного порядка с сильной обратной связью. Покажите, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ закон управления с обратной связью по выходу обладает теми же характеристиками, которыми обладает закон управления с обратной связью по состоянию. Выполните компьютерное моделирование замкнутой системы

при различных значениях ε и сравните полученные результаты с соответствующими результатами для управления с обратной связью по состоянию.

Приложение А

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Евклидово пространство.

Множество векторов $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ размерности n , где x_1, \dots, x_n — вещественные числа, определяет евклидово пространство размерности n , обозначаемое R^n . Евклидово пространство размерности один состоит из всех вещественных чисел и обозначается R . Для векторов в R^n определена их сумма — вектор, компонентами которого являются суммы соответствующих компонент складываемых векторов. Векторы могут умножаться на скалярную величину и компоненты соответствующего вектора представляют собой произведения этой скалярной величины и соответствующих компонент умножаемого вектора. Внутреннее произведение двух векторов x и y определяется как $x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Векторные и матричные нормы.

Норма $\|x\|$ вектора x — это вещественная функция, обладающая свойствами

- $\|x\| \geqslant 0$ для всех $x \in R^n$ и $\|x\| = 0$, если и только если $x = 0$.
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in R^n$.
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ для всех $\alpha \in R$ и $x \in R^n$.

Второе свойство известно как неравенство треугольника. Рассмотрим класс p -норм, определяемых равенствами

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty$$

и

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Тремя наиболее часто используемыми нормами являются $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ и евклидова норма

$$\|x\|_2 = (\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2)^{1/2} = (x^T x)^{1/2}.$$

Все p -нормы эквивалентны в том смысле, что, если $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ — две различные p -нормы, то существуют положительные константы c_1 и c_2 , такие что

$$c_1\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2\|x\|_\alpha$$

для всех $x \in R^n$. Для 1-, 2-, и ∞ -норм эти неравенства принимают следующий вид

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Важным результатом является неравенство Гельдера

$$|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

выполненное для всех $x \in R^n$, $y \in R^n$. Очень часто мы применяем при анализе лишь те свойства норм, которые могут быть получены из трех основных свойств, которыми обладает любая норма. В этих случаях нижний индекс p опускается, что указывает на возможность использования в соответствующем выражении любой из p -норм.

Матрица A размерности $(m \times n)$ с вещественными элементами определяет линейное отображение $y = Ax$ из R^n в R^m . Индуцированная p -норма матрицы A определяется равенством¹⁾

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

которое при $p = 1, 2$ и ∞ может быть представлено виде

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = [\lambda_{\max}(A^T A)]^{1/2}, \\ \|A\|_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \end{aligned}$$

где $\lambda_{\max}(A^T A)$ — максимальное собственное значение матрицы $A^T A$. Ниже приведены некоторые полезные свойства индуцированных матричных норм для вещественных матриц A и B размерности $(m \times n)$ и $(n \times \ell)$, соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty, \quad \frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1, \\ \|A\|_2 &\leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}, \quad \|AB\|_p \leq \|A\|_p\|B\|_p. \end{aligned}$$

¹⁾ sup обозначает точную верхнюю грань; inf обозначает точную нижнюю грань.

Топологические концепции в R^n .

Сходимость последовательностей: Последовательность векторов $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ в R^n , обозначаемая $\{x_k\}$, называется сходящейся к вектору-пределу x , если

$$\|x_k - x\| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

что эквивалентно тому, что для любой $\varepsilon > 0$ существует целое число N , такое что

$$\|x_k - x\| < \varepsilon, \quad \forall k \geq N.$$

Символ « \forall » означает «для всех». Вектор x является предельной точкой последовательности $\{x_k\}$, если существует подпоследовательность $\{x_k\}$, которая сходится к x , т. е. если существует бесконечное подмножество K множества неотрицательных чисел, такое что $\{x_k\}_{k \in K}$ сходится к x . Ограниченная последовательность $\{x_k\}$ в R^n имеет по крайней мере одну предельную точку в R^n . Последовательность вещественных чисел $\{r_k\}$ называется возрастающей (монотонно возрастающей или неубывающей), если $r_k \leq r_{k+1} \forall k$. Если $r_k < r_{k+1}$, эта последовательность называется строго возрастающей. Убывающие (монотонно убывающие или невозрастающие) и строго убывающие последовательности определяются аналогичным образом при $r_k \geq r_{k+1}$. Возрастающая последовательность вещественных чисел, являющаяся ограниченной сверху, сходится к вещественному числу. Аналогично, убывающая последовательность вещественных чисел, являющаяся ограниченной снизу, сходится к вещественному числу.

Множества: Подмножество $S \subset R^n$ называется открытым, если для любого вектора $x \in S$ можно найти ε -окрестность x

$$N(x, \varepsilon) = \{z \in R^n \mid \|z - x\| < \varepsilon\},$$

такую что $N(x, \varepsilon) \subset S$. Множество S является замкнутым, если и только если его дополнение в R^n открыто. Аналогично, S является замкнутым, если и только если каждая сходящаяся последовательность $\{x_k\}$ с элементами из S сходится к некоторой точке, принадлежащей S . Множество S является ограниченным, если существует $r > 0$, такое что $\|x\| \leq r$ для всех $x \in S$. Множество S является компактным, если оно замкнуто и ограничено. Точка p является граничной точкой множества S , если любая окрестность p содержит по крайней мере одну точку из S и по крайней мере одну точку, не принадлежащую множеству S . Множество всех граничных точек множества S , обозначаемое через ∂S , называется границей множества S . Замкнутое множество содержит все свои граничные точки. Открытое множество не содержит своих граничных точек. Внутренностью множества S является множество $S - \partial S$. Открытое множество равно своей внутренности. Замыкание множества S , обозначаемое через \overline{S} , равно объединению S и его границы. Замкнутое множество равно его замыканию. Открытое множество S является связным, если каждая пара точек из S

может быть соединена траекторией, целиком лежащей в S . Множество S называется областью, если оно является объединением открытого связного множества с некоторыми, ни одной, или всеми его граничными точками. Если область не содержит ни одной из его граничных точек, то такая область называется открытой областью. Множество S является выпуклым, если для любых $x, y \in S$ и любого вещественного числа $\theta, 0 < \theta < 1$ выполнено $\theta x + (1 - \theta)y \in S$. Если $x \in X \subset R^n$ и $y \in Y \subset R^m$, то говорят, что (x, y) принадлежит множеству-произведению $X \times Y \subset R^n \times R^m$.

Непрерывные функции: Функция f , отображающая множество S_1 в множество S_2 , обозначается через $f : S_1 \rightarrow S_2$. Функция $f : R^n \rightarrow R^m$ называется непрерывной в точке x , если $f(x_k) \rightarrow f(x)$ при $x_k \rightarrow x$. Аналогично, f является непрерывной в x , если для любой $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такая что

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Символ « \Rightarrow » означает «влечет, следует». Функция f является непрерывной на множестве S , если она непрерывна в каждой точке S ; эта функция является равномерно непрерывной на S , если для любой $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (зависящая только от ε), такая что это неравенство выполнено для всех $x, y \in S$. Заметим, что равномерная непрерывность определяется на множестве, а непрерывность определяется в точке. В случае равномерной непрерывности фигурирующее в определении неравенство для δ выполнено во всех точках указанного множества. Очевидно, что если f равномерно непрерывна на множестве S , то она непрерывна на S . Обратное утверждение в общем случае неверно. Однако, если S — компактное множество, то свойства непрерывности и равномерной непрерывности на S эквивалентны. Функция

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2)(\cdot) = a_1 f_1(\cdot) + a_2 f_2(\cdot)$$

является непрерывной для любых двух скалярных величин a_1 и a_2 и любых двух непрерывных функций f_1 и f_2 . Если S_1, S_2 и S_3 — любые множества и $f_1 : S_1 \rightarrow S_2$ и $f_2 : S_2 \rightarrow S_3$ — некоторые функции, то функция $f_2 \circ f_1 : S_1 \rightarrow S_3$, определяемая выражением

$$(f_2 \circ f_1)(\cdot) = f_2(f_1(\cdot))$$

называется композицией функций f_1 и f_2 . Композиция двух непрерывных функций является непрерывной функцией. Если $S \subset R^n$ и $f : S \rightarrow R^m$, то множество точек $f(x)$ при $x \in S$ называется образом S при отображении f и обозначается через $f(S)$. Если f — непрерывная функция, определенная на компактном множестве S , то $f(S)$ компактно и, следовательно, непрерывная функция на компактном множестве ограничена. Более того, если f — вещественно значная функция, т. е. $f : S \rightarrow R$, то существуют точки p и q из компактного множества S , такие что $f(x) \leq f(p)$ и $f(x) \geq f(q)$ для всех $x \in S$. Если f — непрерывная функция, определенная на связном множестве S , то $f(S)$

связно. Функция f , определенная на множестве S является взаимно-однозначным отображением на S , если при $x, y \in S$ и $x \neq y$ выполнено $f(x) \neq f(y)$. Если $f : S \rightarrow R^m$ — непрерывная взаимно-однозначная функция на некотором компактном множестве $S \subset R^n$, то f имеет непрерывную обратную функцию f^{-1} на $f(S)$. Композиция f и f^{-1} является тождественным отображением, т. е. $f^{-1}(f(x)) = x$. Функция $f : R \rightarrow R^n$ называется кусочно-непрерывной на интервале $J \subset R$, если для любого ограниченного подинтервала $J_0 \subset J$ функция f является непрерывной для всех $x \in J_0$, за исключением, возможно, конечного числа точек, в которых f имеет разрыв. Более того, в каждой точке разрыва x_0 существуют предел справа $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$ и предел слева $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h)$, т. е. функция имеет конечный скачок в x_0 .

Дифференцируемые функции: Функция $f : R \rightarrow R$ называется дифференцируемой в точке x , если существует предел

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Предел $f'(x)$ называется производной функции f в точке x . Функция $f : R^n \rightarrow R^m$ называется непрерывно-дифференцируемой в точке x_0 , если частные производные $\partial f_i / \partial x_j$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) существуют и непрерывны в x_0 . Функция f является непрерывно дифференцируемой на множестве S , если она непрерывно дифференцируема в каждой точке множества S . Для любой непрерывно дифференцируемой функции $f : R^n \rightarrow R$ вектор-строка $\partial f / \partial x$ определяется равенством

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right].$$

Градиент функции, обозначаемый через $\nabla f(x)$, определяется равенством

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^T.$$

Для любой непрерывно дифференцируемой функции $f : R^n \rightarrow R^m$ матрица Якоби (якобиан) $[\partial f / \partial x]$ представляет собой $(m \times n)$ -матрицу, элементами которой являются $\partial f_i / \partial x_j$, где i — номер строки и j — номер столбца. Предположим, что $S \subset R^n$ открыто, f отображает S в R^m , функция f непрерывно дифференцируема в $x_0 \in S$, функция g отображает открытое множество, содержащее $f(S)$, в R^k , и g является непрерывно дифференцируемой в $f(x_0)$. Тогда отображение h множества S в R^k , определенное равенством $h(x) = g(f(x))$, является непрерывно дифференцируемым в x_0 и его матрица Якоби определяется с использованием цепного правила

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \frac{\partial g}{\partial f} \Big|_{f=f(x_0)} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0}.$$

Теоремы о среднем значении и о неявной функции.

Если x и y — две различные точки в R^n , то отрезок прямой $L(x, y)$, соединяющий x и y , определяется равенством

$$L(x, y) = \{z | z = \theta x + (1 - \theta)y, 0 < \theta < 1\}.$$

Теорема о среднем значении

Предположим, что $f : R^n \rightarrow R$ — непрерывно дифференцируема в каждой точке x открытого множества $S \subset R^n$. Пусть x и y — две точки из S , такие, что отрезок прямой $L(x, y)$ является подмножеством S . Тогда существует точка z , принадлежащая $L(x, y)$, такая что

$$f(y) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=z} (y - x).$$

Теорема о неявной функции

Предположим, что $f : R^n \times R^m \rightarrow R^n$ непрерывно дифференцируема в каждой точке (x, y) открытого множества $S \subset R^n \times R^m$. Пусть (x_0, y_0) — точка в S , в которой $f(x_0, y_0) = 0$ и матрица Якоби $[\partial f / \partial x](x_0, y_0)$ невырождена. Тогда существуют окрестности $U \subset R^n$ и $V \subset R^m$ точек x_0 и y_0 , соответственно, такие что для любой $y \in V$ уравнение $f(x, y) = 0$ имеет единственное решение $x \in U$. Более того, это решение имеет вид $x = g(y)$, где g — непрерывно дифференцируемая в точке $y = y_0$ функция.

Доказательства этих двух теорем, а также других фактов, изложенных ранее в этом приложении, могут быть найдены в любом учебнике по математическому анализу.¹⁾

Неравенство Гронуолла–Беллмана.

Лемма А.1. Пусть $\lambda : [a, b] \rightarrow R$ — непрерывная функция и $\mu : [a, b] \rightarrow R$ — непрерывная и неотрицательная функция. Если некоторая непрерывная функция $y : [a, b] \rightarrow R$ удовлетворяет неравенству

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s)y(s)ds$$

при $a \leq t \leq b$, то на том же интервале выполнено

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s) \exp \left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau \right] ds.$$

¹⁾ См., например, [10]. Прим. ред. перев. — На русском языке имеется достаточно количество прекрасных учебников математического анализа. Можно рекомендовать, например, курсы Г.М.Фихтенгольца, В.И.Смирнова, Г.И.Шилова.

В частности, если $\lambda(t) \equiv \lambda$, то

$$y(t) \leq \lambda \exp \left[\int_a^t \mu(\tau)d\tau \right].$$

Если кроме того, $\mu(t) \equiv \mu \geq 0$, то

$$y(t) \leq \lambda \exp[\mu(t-a)].$$

Доказательство: Пусть $z(t) = \int_a^t \mu(s)y(s)ds$ и $v(t) = z(t) + \lambda(t) - y(t) \geq 0$. Тогда функция z является дифференцируемой и

$$\dot{z} = \mu(t)y(t) = \mu(t)z(t) + \mu(t)\lambda(t) - \mu(t)v(t).$$

Это равенство представляет собой скалярное линейное уравнение и его переходная функция имеет следующий вид:

$$\phi(t, s) = \exp \left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau \right].$$

Поскольку $z(a) = 0$, получаем

$$z(t) = \int_a^t \phi(t, s)[\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s)]ds.$$

Член

$$\int_a^t \phi(t, s)\mu(s)v(s)ds$$

неотрицателен и поэтому

$$z(t) \leq \int_a^t \exp \left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau \right] \mu(s)\lambda(s)ds.$$

Из неравенства $y(t) \leq \lambda(t) + z(t)$ следует утверждение леммы для общего случая. В частном случае, когда $\lambda(t) \equiv \lambda$, получаем

$$\begin{aligned} \int_a^t \mu(s) \exp \left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau \right] ds &= - \int_a^t \frac{d}{ds} \left\{ \exp \left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau \right] \right\} ds = \\ &= - \left\{ \exp \left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau \right] \right\} \Big|_{s=a}^{s=t} = \end{aligned}$$

$$= -1 + \exp \left[\int_a^t \mu(\tau) d\tau \right].$$

Из этого равенства следует утверждение леммы для случая, когда λ постоянна. Случай, когда и λ и μ являются постоянными функциями, может быть доказан путем интегрирования. \square

Приложение В

СЖИМАЮЩЕЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Рассмотрим уравнение вида $x = T(x)$. Будем говорить, что решение x^* этого уравнения является неподвижной точкой отображения T , поскольку отображение T переводит точку x^* в эту же точку. Классическим методом нахождения неподвижной точки является метод последовательного приближения. Рассмотрим начальный вектор x_1 и вычислим $x_2 = T(x_1)$. Продолжая эту процедуру, получаем последовательность векторов $x_{k+1} = T(x_k)$. В теореме о сжимающем отображении устанавливаются достаточные условия для существования неподвижной точки x^* для отображения $x = T(x)$, а также достаточные условия сходимости последовательности $\{x_k\}$ к точке x^* . Эта теорема представляет собой мощное средство анализа, используемое при доказательстве существования решения уравнения вида $x = T(x)$. Она справедлива не только в случае, когда T является отображением одного евклидова пространства в другое, но также и в случае, когда T является отображением банаховых пространств. Мы будем использовать формулировку теоремы о сжимающем отображении именно для этого общего случая. Начнем с определения банаховых пространств.¹⁾

Векторные пространства: Линейное векторное пространство \mathcal{X} над полем R — это множество элементов x, y, z, \dots , называемых векторами, такое что для любых двух векторов $x, y \in \mathcal{X}$, определена сумма $x + y$, такая что $x + y \in \mathcal{X}$, $x + y = y + x$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ и существует нулевой вектор $0 \in \mathcal{X}$, такой что $x + 0 = x$ для всех $x \in$

¹⁾ Всеобъемлющее исследование свойств банаховых пространств может быть найдено в любом учебнике по функциональному анализу, например в [121, глава 2]. Прим. ред. перев. — См. также курс А.Н.Колмогорова и С.В.Фомина [Д36].

$\in \mathcal{X}$. Кроме того, для любых чисел $\alpha, \beta \in R$ определено умножение на скалярную величину αx , такое что $\alpha x \in \mathcal{X}$, $1 \cdot x = x$, $0 \cdot x = 0$, $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$, $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ и $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ для всех $x, y \in \mathcal{X}$.

Нормированное линейное пространство: Линейное пространство \mathcal{X} является нормированным линейным пространством, если для любого вектора $x \in \mathcal{X}$ существует вещественно значная функция $\|x\|$, называемая нормой, которая удовлетворяет условиям

- $\|x\| \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{X}$ и $\|x\| = 0$, если и только если $x = 0$.
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in \mathcal{X}$.
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ для всех $\alpha \in R$ и $x \in \mathcal{X}$.

Если из контекста неясно, какая норма $\|\cdot\|$ используется — норма на \mathcal{X} или норма на R^n , — мы будем писать $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, указывая на то, что используется норма на \mathcal{X} .

Сходимость: Последовательность в нормированном линейном пространстве $\{x_k\} \in \mathcal{X}$ сходится к $x \in \mathcal{X}$, если

$$\|x_k - x\| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Замкнутое множество: Множество $S \subset \mathcal{X}$ замкнуто, если и только если любая сходящаяся последовательность с элементами из S имеет предел в S .

Последовательность Коши: Последовательность $\{x_k\} \in \mathcal{X}$ называется последовательностью Коши, если

$$\|x_k - x_m\| \rightarrow 0 \text{ при } k, m \rightarrow \infty.$$

Каждая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши, но не наоборот.

Банахово пространство: Нормированное линейное пространство \mathcal{X} является полным, если каждая последовательность Коши в \mathcal{X} сходится к некоторому вектору в \mathcal{X} . Полное нормированное линейное пространство называется банаховым пространством.

Пример B.1. Рассмотрим множество всех непрерывных функций $f : [a, b] \rightarrow R^n$, обозначаемое через $C[a, b]$. Это множество образует векторное пространство на R . Сумма $x + y$ определена равенством $(x+y)(t) = x(t) + y(t)$. Умножение на скаляр определено равенством $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$. Нулевой вектор — это функция, тождественно равная нулю на $[a, b]$. Определим норму:

$$\|x\|_C = \max_{t \in [a, b]} \|x(t)\|,$$

где норма в правой части равенства — это любая из p -норм на R^n . Очевидно, что $\|x\|_C \geq 0$ и норма равна нулю только для нулевого вектора. Неравенство треугольника следует из неравенства

$$\max \|x(t) + y(t)\| \leq \max [\|x(t)\| + \|y(t)\|] \leq \max \|x(t)\| + \max \|y(t)\|.$$

Кроме того,

$$\max \|\alpha x(t)\| = \max |\alpha| \|x(t)\| = |\alpha| \max \|x(t)\|,$$

где все максимумы вычислены на $[a, b]$. Следовательно, множество $C[a, b]$ с нормой $\|\cdot\|_C$ представляет собой нормированное линейное пространство. Оно также является банаховым пространством. Для доказательства этого утверждения необходимо показать, что каждая последовательность Коши в $C[a, b]$ сходится к вектору из $C[a, b]$. Предположим, что $\{x_k\}$ — последовательность Коши в $C[a, b]$. Для любого фиксированного $t \in [a, b]$ выполнено

$$\|x_k(t) - x_m(t)\| \leq \|x_k - x_m\|_C \rightarrow 0 \text{ при } k, m \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $\{x_k(t)\}$ — последовательность Коши в R^n . Но R^n с любой p -нормой является полным, т. к. из сходимости следует покомпонентная сходимость и R полное. Поэтому существует вещественный вектор $x(t)$, к которому сходится последовательность: $x_k(t) \rightarrow x(t)$. Таким образом, доказана поточечная сходимость. Далее мы покажем, что эта сходимость равномерна по $t \in [a, b]$. Для любой $\varepsilon > 0$, выберем число N , такое что $\|x_k - x_m\|_C < \varepsilon/2$ при $k, m > N$. Тогда при $k > N$ выполнено

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x(t)\| &\leq \|x_k(t) - x_m(t)\| + \|x_m(t) - x(t)\| \\ &\leq \|x_k - x_m\|_C + \|x_m(t) - x(t)\|. \end{aligned}$$

При достаточно большом t (возможно зависящем от t) каждый член в правой части этого неравенства становится меньше $\varepsilon/2$ и, следовательно, $\|x_k(t) - x(t)\| < \varepsilon$ при $k > N$. Таким образом, $\{x_k\}$ сходится к x равномерно по $t \in [a, b]$. Для завершения доказательства необходимо показать, что $x(t)$ непрерывна и $\{x_k\}$ сходится к x по норме $C[a, b]$. Для доказательства непрерывности рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} \|x(t+\delta) - x(t)\| &\leq \|x(t+\delta) - x_k(t+\delta)\| + \\ &\quad + \|x_k(t+\delta) - x_k(t)\| + \|x_k(t) - x(t)\|. \end{aligned}$$

Поскольку $\{x_k\}$ равномерно сходится к x , для любой $\varepsilon > 0$ можно найти достаточно большое k , такое что первый и третий члены в правой части этого неравенства становятся меньше $\varepsilon/3$. Т. к. функция $x_k(t)$ непрерывна, мы можем выбрать достаточно малую δ , такую что второй член в предыдущем неравенстве становится меньше $\varepsilon/3$. Поэтому $x(t)$ — непрерывная функция. Сходимость x_k к x по норме $\|\cdot\|_C$ непосредственно следует из равномерной сходимости. \triangle

Теорема B.1 (о сжимающем отображении). Пусть S — замкнутое подмножество банахового пространства \mathcal{X} и пусть T — отображение S в S . Предположим, что

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \rho \|x - y\|, \quad \forall x, y \in S, \quad 0 \leq \rho < 1.$$

Тогда

- существует единственный вектор $x^* \in S$, удовлетворяющий равенству $x^* = T(x^*)$.
- вектор x^* может быть получен с использованием метода последовательных приближений, начинающимся с любого вектора из S .

Доказательство: Выберем произвольный $x_1 \in S$ и определим последовательность $\{x_k\}$ формулой $x_{k+1} = T(x_k)$. Поскольку T отображает S в S , выполнено $x_k \in S$ для всех $k \geq 1$. На первом шаге доказательства мы покажем, что $\{x_k\}$ — последовательность Коши. Из неравенства

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_k\| &= \|T(x_k) - T(x_{k-1})\| \leq \\ &\leq \rho \|x_k - x_{k-1}\| \leq \rho^2 \|x_{k-1} - x_{k-2}\| \leq \cdots \leq \rho^{k-1} \|x_2 - x_1\|\end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned}\|x_{k+r} - x_k\| &\leq \|x_{k+r} - x_{k+r-1}\| + \|x_{k+r-1} - x_{k+r-2}\| + \cdots + \|x_{k+1} - x_k\| \leq \\ &\leq [\rho^{k+r-2} + \rho^{k+r-3} + \cdots + \rho^{k-1}] \|x_2 - x_1\| \leq \\ &\leq \rho^{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \|x_2 - x_1\| = \frac{\rho^{k-1}}{1-\rho} \|x_2 - x_1\|.\end{aligned}$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, рассматриваемая последовательность является последовательностью Коши. Поскольку \mathcal{X} является банаевым пространством, справедливо

$$x_k - x^* \in \mathcal{X} \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Более того, поскольку S замкнуто, $x^* \in S$. Покажем, что $x^* = T(x^*)$. Для любого $x_k = T(x_{k-1})$ выполнено

$$\|x^* - T(x^*)\| \leq \|x^* - x_k\| + \|x_k - T(x^*)\| \leq \|x^* - x_k\| + \rho \|x_{k-1} - x^*\|.$$

При достаточно большом k правая часть этого неравенства становится произвольно малой. Таким образом, $\|x^* - T(x^*)\| = 0$, т. е. $x^* = T(x^*)$. Осталось показать, что x^* — единственная в S неподвижная точка отображения T . Предположим, что x^* и y^* — две неподвижные точки. Тогда

$$\|x^* - y^*\| = \|T(x^*) - T(y^*)\| \leq \rho \|x^* - y^*\|$$

Поскольку $\rho < 1$, получаем $x^* = y^*$. \square

Приложение С ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

С.1. Доказательства теорем 3.1 и 3.2

Доказательство теоремы 3.1: Заметим, что если $x(t)$ — решение уравнения

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{C.1})$$

то

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (\text{C.2})$$

Обратно, если $x(t)$ удовлетворяет (C.2), то $x(t)$ удовлетворяет (C.1). Таким образом, исследование вопроса о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (C.1) эквивалентно исследованию вопроса о существовании и единственности решения интегрального уравнения (C.2). Рассмотрим правую часть (C.2) как отображение с непрерывной функцией $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ в качестве аргумента. Обозначив это отображение его через $(Px)(t)$, можно переписать (C.2) в следующей форме:

$$x(t) = (Px)(t). \quad (\text{C.3})$$

Заметим, что $(Px)(t)$ — непрерывно по t . Решение (C.3) представляет собой неподвижную точку отображения P , сопоставляющего x функцию Px . Существование неподвижной точки уравнения (C.3) может быть установлено с использованием теоремы о сжимающем отображении. Для этого необходимо определить банаево пространство \mathcal{X} и

замкнутое множество $S \subset \mathcal{X}$, такие что P отображает S в S и является сжимающим на S . Пусть

$$\mathcal{X} = C[t_0, t_0 + \delta] \quad \text{с нормой} \quad \|x\|_C = \max_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} \|x(t)\|$$

и

$$S = \{x \in \mathcal{X} \mid \|x - x_0\|_C \leq r\},$$

где r — радиус шара B и δ — положительная константа, которую следует определить. Мы ограничим выбор δ условием $\delta \leq t_1 - t_0$, при выполнении которого $[t_0, t_0 + \delta] \subset [t_0, t_1]$. Заметим, что $\|x(t)\|$ обозначает норму на R^n , а $\|x\|_C$ — норму на \mathcal{X} . Кроме того, B — шар в R^n , а S — шар в \mathcal{X} . По определению P отображает \mathcal{X} в \mathcal{X} . Для того, чтобы показать, что оно отображает S в S , запишем

$$(Px)(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds = \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, x_0) + f(s, x_0)]ds.$$

Вследствие того, что f кусочно-непрерывна, функция $f(t, x_0)$ ограничена на $[t_0, t_1]$. Пусть

$$h = \max_{t \in [t_0, t_1]} \|f(t, x_0)\|.$$

С учетом условия Липшица (3.2), а также того факта, что для любой $x \in S$ выполнено

$$\|x(t) - x_0\| \leq r, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta],$$

получаем

$$\begin{aligned} \|(Px)(t) - x_0\| &\leq \int_{t_0}^t [\|f(s, x(s)) - f(s, x_0)\| + \|f(s, x_0)\|]ds \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t [L\|x(s) - x_0\| + h]ds \leq \int_{t_0}^t (Lr + h)ds = \\ &= (t - t_0)(Lr + h) \leq \delta(Lr + h) \end{aligned}$$

и

$$\|Px - x_0\|_C = \max_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} \|(Px)(t) - x_0\| \leq \delta(Lr + h).$$

Следовательно, выбор $\delta \leq r/(Lr + h)$ гарантирует, что P отображает S в S . Для того, чтобы показать, что P является сжимающим отображением на S , положим $x, y \in S$ и рассмотрим

$$\|(Px)(t) - (Py)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]ds \right\| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|ds \\ &\leq \int_{t_0}^t L\|x(s) - y(s)\|ds \leq \int_{t_0}^t ds L\|x - y\|_C. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|Px - Py\|_C \leq L\delta\|x - y\|_C \leq \rho\|x - y\|_C \quad \text{при } \delta \leq \frac{\rho}{L}.$$

Таким образом, выбор $\rho < 1$ и $\delta \leq \rho/L$ гарантирует, что отображение P является сжимающим на S . С использованием теоремы о сжимающем отображении заключаем, что если δ выбрана так, что выполнено

$$\delta \leq \min \left\{ t_1 - t_0, \frac{r}{Lr + h}, \frac{\rho}{L} \right\} \quad \text{при } \rho < 1, \quad (C.4)$$

то (C.2) будет иметь единственное решение в S . Это заключение не является завершением доказательства, т. к. нам необходимо установить факт единственности решения для всех непрерывных функций $x(t)$, т. е. единственность в \mathcal{X} . Оказывается, что любое решение (C.2) из \mathcal{X} лежит в S . Для того, чтобы в этом убедится, заметим, что поскольку $x(t_0) = x_0$ расположена внутри шара B , любое непрерывное решение $x(t)$ должно принадлежать B на некотором интервале времени. Предположим, что $x(t)$ покидает шар B и пусть $t_0 + \mu$ — момент времени, когда $x(t)$ впервые пересекает границу B . Тогда

$$\|x(t_0 + \mu) - x_0\| = r.$$

С другой стороны, для всех $t \leq t_0 + \mu$ выполнено

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0\| &\leq \int_{t_0}^t [\|f(s, x(s)) - f(s, x_0)\| + \|f(s, x_0)\|]ds \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t [L\|x(s) - x_0\| + h]ds \leq \int_{t_0}^t (Lr + h)ds. \end{aligned}$$

Поэтому

$$r = \|x(t_0 + \mu) - x_0\| \leq (Lr + h)\mu \Rightarrow \mu \geq \frac{r}{Lr + h} \geq \delta,$$

т. е. решение $x(t)$ не может покинуть множество B на протяжении интервала времени $[t_0, t_0 + \delta]$ и, следовательно, любое решение из \mathcal{X} лежит в S . Таким образом, единственность решения из S влечет единственность в \mathcal{X} .

Доказательство теоремы 3.2: Идея доказательства основана на том, чтобы показать, что константу δ из теоремы 3.1 можно выбрать независимо от начального состояния x_0 . Из (С.4) видно, что зависимость δ от начального состояния обусловлена наличием константы h в члене $r/(Lr + h)$. Поскольку в рассматриваемом случае условие Липшица выполнено глобально, r можно выбрать произвольно большой. Поэтому для любой конечной h можно выбрать достаточно большую r , так чтобы было выполнено $r/(Lr + h) > \rho/L$. Тогда (С.4) упрощается

$$\delta \leq \min \left\{ t_1 - t_0, \frac{\rho}{L} \right\} \text{ при } \rho < 1.$$

Если $t_1 - t_0 \leq \rho/L$, можно выбрать $\delta = t_1 - t_0$ и доказательство завершено. В противном случае, выберем δ так, чтобы было выполнено $\delta \leq \rho/L$. Разделим интервал $[t_0, t_1]$ на конечное число подинтервалов длиной $\delta \leq \rho/L$ и последовательно применим теорему 3.1.¹⁾ \square

С.2. Доказательство леммы 3.4

Верхняя правая производная $D^+v(t)$ определяется равенством

$$D^+v(t) = \lim_{h \rightarrow 0+} \sup \frac{v(t+h) - v(t)}{h},$$

где $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ (предельная верхняя граница) для последовательности вещественных чисел $\{x_n\}$ — это вещественное число y удовлетворяющее следующим двум условиям:

- для любой $\varepsilon > 0$ существует целое число N , такое что из $n > N$ следует $x_n < y + \varepsilon$;
- для определенных $\varepsilon > 0$ и $m > 0$ существует целое число $n > m$, такое что $x_n > y - \varepsilon$.

Первое утверждение означает, что в конце концов все члены последовательности становятся меньше $y + \varepsilon$. Второе утверждение означает, что бесконечно много членов последовательности превосходят $y - \varepsilon$. Одним из свойств \limsup ²⁾ является то, что если $z_n \leq x_n$ для каждого $n = 1, 2, \dots$, то $\limsup_{n \rightarrow \infty} z_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Из этого свойства видно, что если $|v(t+h)' - v(t)|/h \leq g(t, h), \forall h \in (0, b]$ и $\lim_{h \rightarrow 0+} g(t, h) = g_0(t)$, то $D^+v(t) \leq g_0(t)$.

Для доказательства леммы 3.4 рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = f(t, z) + \lambda, \quad z(t_0) = u_0, \quad (\text{C.5})$$

где λ — положительная константа. Из теоремы 3.5 следует, что на любом компактном интервале $[t_0, t_1]$ для любой $\varepsilon > 0$ существует $\delta >$

¹⁾ Заметим, что начальное состояние на каждом из подинтервалов, скажем x_1 , будет удовлетворять неравенству $\|f(t, x_1)\| \leq h_1$ для некоторой конечной h_1 .

²⁾ См. [10, теорема 12-4].

> 0 , такая что если $\lambda < \delta$, то (С.5) имеет единственное решение $z(t, \lambda)$, определенное на $[t_0, t_1]$ и

$$|z(t, \lambda) - u(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (\text{C.6})$$

Утверждение 1: $v(t) \leq z(t, \lambda)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Это утверждение может быть доказано от противного. Если оно неверно, то существуют моменты времени $a, b \in (t_0, t_1]$, такие что $v(a) = z(a, \lambda)$ и $v(t) > z(t, \lambda)$ при $a < t \leq b$. Тогда,

$$v(t) - v(a) > z(t, \lambda) - z(a, \lambda), \quad \forall t \in (a, b],$$

и из этого следует, что

$$D^+v(a) \geq \dot{z}(a, \lambda) = f(a, z(a, \lambda)) + \lambda > f(a, v(a)),$$

что противоречит неравенству $D^+v(t) \leq f(t, v(t))$.

Утверждение 2: $v(t) \leq u(t)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Это утверждение также может быть доказано от противного. Если оно неверно, то существует момент времени $a \in (t_0, t_1]$, такой что $v(a) > u(a)$. Полагая $\varepsilon = [v(a) - u(a)]/2$ и используя (С.6), получаем

$$v(a) - z(a, \lambda) = v(a) - u(a) + u(a) - z(a, \lambda) \geq \varepsilon,$$

что противоречит утверждению 1.

Таким образом, мы показали, что $v(t) \leq u(t)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Поскольку это верно на любом компактном интервале, можно заключить, что это неравенство выполнено для всех $t \geq t_0$. Если оно оказалось не выполненным, пусть $T < \infty$ — первый момент времени, когда это произошло. Тогда $v(t) \leq u(t)$ для всех $t \in [t_0, T)$ и, по непрерывности, $v(T) = u(T)$. Следовательно, мы можем расширить область, где выполнено это неравенство, до интервала $[T, T + \Delta]$ некоторой $\Delta > 0$. Однако, это противоречит утверждению о том, что T — это первый момент времени, когда неравенство оказалось нарушенным.

С.3. Доказательство леммы 4.1

Поскольку функция $x(t)$ ограничена, с использованием теоремы Больцано–Бейерштрасса¹⁾ можно показать, что она имеет точку сгущения при $t \rightarrow \infty$ и, следовательно, положительное предельное множество L^+ не пусто. Для любой $y \in L^+$ существует последовательность t_i , $t_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, такая что $x(t_i) \rightarrow y$ при $i \rightarrow \infty$. Поскольку $x(t_i)$ ограничено равномерно по i , предел y ограничен, т. е. L^+ ограничено. Для доказательства замкнутости L^+ предположим, что $\{y_i\} \in L^+$ — некоторая последовательность, такая что $y_i \rightarrow y$ при $i \rightarrow \infty$ и докажем, что $y \in L^+$. Для любого i существует последовательность $\{t_{ij}\}$, $t_{ij} \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, такая что $x(t_{ij}) \rightarrow y_i$ при $j \rightarrow \infty$. Построим специ-

¹⁾ См. [10].

альную последовательность $\{\tau_i\}$. Для последовательностей t_{ij} выберем $\tau_2 > t_{12}$, такую что $\|x(\tau_2) - y_2\| < 1/2$, $\tau_3 > t_{13}$, такую что $\|x(\tau_3) - y_3\| < 1/3$ и так далее при $i = 4, 5, \dots$. Разумеется, $\tau_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$ и $\|x(\tau_i) - y_i\| < 1/i$ для любого i . Далее, для любой $\varepsilon > 0$ существуют положительные целые числа N_1 и N_2 , такие что

$$\|x(\tau_i) - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall i > N_1 \quad \text{и} \quad \|y_i - y\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall i > N_2.$$

Первое неравенство следует из $\|x(\tau_i) - y_i\| < 1/i$, а второе — из существования предела $y_i \rightarrow y$. Тогда справедливо неравенство

$$\|x(\tau_i) - y\| < \varepsilon, \forall i > N = \max\{N_1, N_2\},$$

из которого следует, что $x(\tau_i) \rightarrow y$ при $i \rightarrow \infty$. Таким образом, L^+ замкнуто. Это доказывает тот факт, что множество L^+ компактно, т. к. мы доказали его замкнутость и ограниченность. Для доказательства инвариантности множества L^+ предположим, что $y \in L^+$ и $\phi(t; y)$ — решение (4.1), проходящее через y в момент $t = 0$, т. е. $\phi(0; y) = y$. Покажем, что $\phi(t; y) \in L^+$, $\forall t \in R$. Существует последовательность $\{t_i\}$, $t_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, такая что $x(t_i) \rightarrow y$ при $i \rightarrow \infty$. Запишем $x(t_i) = \phi(t_i; x_0)$, где x_0 — начальное состояние для решения $x(t)$ в момент $t = 0$. Из единственности решения следует, что

$$\phi(t + t_i; x_0) = \phi(t; \phi(t_i; x_0)) = \phi(t; x(t_i))$$

где при достаточно большом i выполнено $t + t_i \geq 0$. Из непрерывности следует, что выполнено равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \phi(t + t_i; x_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} \phi(t; x(t_i)) = \phi(t; y),$$

которое показывает, что $\phi(t; y) \in L^+$.

Наконец, для того, чтобы показать, что $x(t) \rightarrow L^+$ при $t \rightarrow \infty$, используем рассуждение от противного. Предположим, что это неверно. Тогда существует $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{t_i\}$, $t_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, такая что $\text{dist}(x(t_i), L^+) > \varepsilon$. Поскольку последовательность $x(t_i)$ ограничена, она содержит сходящуюся подпоследовательность $x(t'_i) \rightarrow x^*$ при $i \rightarrow \infty$. Точка x^* должна принадлежать L^+ и в то же время должна находиться на расстоянии ε от L^+ , что невозможно.

С.4. Доказательство леммы 4.3

Определим $\psi(s)$ равенством

$$\psi(s) = \inf_{s \leq \|x\| \leq r} V(x) \text{ при } 0 \leq s \leq r.$$

Функция $\psi(\cdot)$ является непрерывной, положительно определенной и возрастающей. Более того, $V(x) \geq \psi(\|x\|)$ при $0 \leq \|x\| \leq r$. Однако

$\psi(\cdot)$ не обязательно является строго возрастающей. Пусть $\alpha_1(s)$ — \mathcal{K} -функция, такая что $\alpha_1(s) \leq k\psi(s)$ при $0 < k < 1$. Тогда

$$V(x) \geq \psi(\|x\|) \geq \alpha_1(\|x\|) \text{ при } \|x\| \leq r.$$

С другой стороны, определим $\phi(s)$ равенством

$$\phi(s) = \sup_{\|x\| \leq s} V(x) \text{ при } 0 \leq s \leq r.$$

Функция $\phi(\cdot)$ является непрерывной, положительно определенной и возрастающей (не обязательно строго возрастающей). Более того, $V(x) \leq \phi(\|x\|)$ при $\|x\| \leq r$. Пусть $\alpha_2(s)$ — \mathcal{K} -функция, такая что $\alpha_2(s) \geq k\phi(s)$ при $k > 1$. Тогда

$$V(x) \leq \phi(\|x\|) \leq \alpha_2(\|x\|) \text{ при } \|x\| \leq r.$$

Если $D = R^n$ и $V(x)$ радиально неограничена, определения для $\psi(s)$ и $\phi(s)$ изменяются на следующие:

$$\psi(s) = \inf_{\|x\| \geq s} V(x), \phi(s) = \sup_{\|x\| \leq s} V(x) \text{ при } s \geq 0.$$

Функции ψ и ϕ являются непрерывными, положительно определенными, возрастающими, и

$$\psi(\|x\|) \leq V(x) \leq \phi(\|x\|), \forall x \in R^n.$$

Функции α_1 и α_2 могут быть выбраны так же, как это было сделано ранее. Поскольку $V(x)$ является радиально неограниченной, $\psi(s)$ и $\phi(s)$ стремятся к бесконечности при $s \rightarrow \infty$. Следовательно, мы можем выбрать функции α_1 и α_2 из класса \mathcal{K}_∞ .

С.5. Доказательство леммы 4.4

Поскольку $\alpha(\cdot)$ является локально липшицевой, уравнение имеет единственное решение для любого начального состояния $y_0 \geq 0$. Вследствие того, что $\dot{y}(t) < 0$ при $y(t) > 0$, решение обладает свойством $y(t) \leq y_0$ для всех $t \geq t_0$. Поэтому это решение ограничено и может быть продолжено для всех $t \geq t_0$. Интегрируя, получаем

$$-\int_{y_0}^y \frac{dx}{\alpha(x)} = \int_{t_0}^t d\tau.$$

Пусть b — положительное число, такое что $b < a$. Определим

$$\eta(y) = -\int_b^y \frac{dx}{\alpha(x)}.$$

Функция $\eta(y)$ является строго убывающей и дифференцируемой на $(0, a)$. Более того, $\lim_{y \rightarrow 0} \eta(y) = \infty$. Существование этого предела следует из двух фактов. Во-первых, решение дифференциального уравнения $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т. к. $\dot{y}(t) < 0$ при $y(t) > 0$. Во-вторых, предел $y(t) \rightarrow 0$ достигается лишь асимптотически при $t \rightarrow \infty$, т. к. в конечный момент времени это не может произойти вследствие единственности решения. Пусть $c = -\lim_{y \rightarrow a} \eta(y)$ (в качестве c может выступать ∞). Область значений функции η равна $(-c, \infty)$. Поскольку η — строго убывающая, ее обратная η^{-1} определена на $(-c, \infty)$. Для любого $y_0 > 0$ решение $y(t)$ удовлетворяет

$$\eta(y(t)) - \eta(y_0) = t - t_0.$$

Следовательно,

$$y(t) = \eta^{-1}(\eta(y_0) + t - t_0).$$

С другой стороны, если $y_0 = 0$, то $y(t) \equiv 0$, т. к. $y = 0$ — точка равновесия. Определим функцию $\sigma(r, s)$ равенством

$$\sigma(r, s) = \begin{cases} \eta^{-1}(\eta(r) + s), & r > 0, \\ 0, & r = 0. \end{cases}$$

Тогда $y(t) = \sigma(y_0, t - t_0)$ для всех $t \geq t_0$ и $y_0 \geq 0$. Функция σ является непрерывной, т. к. и η и η^{-1} являются непрерывными в своих областях определения и $\lim_{x \rightarrow \infty} \eta^{-1}(x) = 0$. Эта функция является также строго возрастающей по r для каждого фиксированного s , т. к.

$$\frac{\partial}{\partial r} \sigma(r, s) = \frac{\alpha(\sigma(r, s))}{\alpha(r)} > 0$$

и строго убывающей по s для каждого фиксированного r , т. к.

$$\frac{\partial}{\partial s} \sigma(r, s) = -\alpha(\sigma(r, s)) < 0.$$

Кроме того, $\sigma(r, s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Таким образом, σ принадлежит классу \mathcal{KL} -функций.

С.6. Доказательство леммы 4.5

Равномерная устойчивость: Предположим, что существует \mathcal{K} -функция α , такая что

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c.$$

Для любой $\varepsilon > 0$, положим $\delta = \min\{c, \alpha^{-1}(\varepsilon)\}$. Тогда при $\|x(t_0)\| < \delta$ получаем

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|) < \alpha(\delta) \leq \alpha(\alpha^{-1}(\varepsilon)) = \varepsilon.$$

Далее, предположим, что для определенной $\varepsilon > 0$, существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такая что

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

При фиксированной ε обозначим через $\bar{\delta}(\varepsilon)$ супремум по всем возможным $\delta(\varepsilon)$. Функция $\bar{\delta}(\varepsilon)$ является положительной и неубывающей, но не обязательно непрерывной. Выберем некоторую \mathcal{K} -функцию $\zeta(r)$, такую что $\zeta(r) \leq k\bar{\delta}(r)$ при $0 < k < 1$. Пусть $\alpha(r) = \zeta^{-1}(r)$. Тогда $\alpha(r)$ принадлежит классу \mathcal{K} . Пусть $c = \lim_{r \rightarrow \infty} \zeta(r)$. Для определенного $x(t_0)$, $\|x(t_0)\| < c$, положим $\varepsilon = \alpha(\|x(t_0)\|)$. Тогда $\|x(t_0)\| < \bar{\delta}(\varepsilon)$ и

$$\|x(t)\| < \varepsilon = \alpha(\|x(t_0)\|). \quad (C.7)$$

Равномерная асимптотическая устойчивость: Предположим, что существует \mathcal{KL} -функция $\beta(r, s)$, такая что выполнено (4.20). Тогда справедливо неравенство

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, 0),$$

из которого следует, что $x = 0$ равномерно устойчиво. Более того, при $\|x(t_0)\| < c$ решение удовлетворяет

$$\|x(t)\| \leq \beta(c, t - t_0).$$

Из этого неравенства следует, что $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по t_0 . Предположим, что $x = 0$ равномерно устойчиво и $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по t_0 ; покажем, что существует \mathcal{KL} -функция $\beta(r, s)$, для которой выполнено (4.20). Вследствие равномерной устойчивости существует константа $c > 0$ и \mathcal{K} -функция α , такие что для любой $r \in (0, c]$ решение $x(t)$ удовлетворяет

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|) < \alpha(r), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall \|x(t_0)\| < r. \quad (C.8)$$

Более того, для определенной $\eta > 0$ существует момент времени $T = T(\eta, r) \geq 0$ (зависящий от η и r , но не зависящий от t_0), такой что

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta, r).$$

Пусть $\bar{T}(\eta, r)$ — инфимум по всем возможным $T(\eta, r)$. Функция $\bar{T}(\eta, r)$ является неотрицательной и невозрастающей по η , неубывающей по r и $\bar{T}(\eta, r) = 0$ для всех $\eta \geq \alpha(r)$. Пусть

$$W_r(\eta) = \frac{2}{\eta} \int_{\eta/2}^{\eta} \bar{T}(s, r) ds + \frac{r}{\eta} \geq \bar{T}(\eta, r) + \frac{r}{\eta}.$$

Функция $W_r(\eta)$ является положительной и обладает свойствами:

- для каждой фиксированной r функция $W_r(\eta)$ является непрерывной, строго убывающей и $W_r(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$;
- для каждой фиксированной η функция $W_r(\eta)$ является строго возрастающей по r .

Положим $U_r = W_r^{-1}$. Тогда U_r также обладает вышеприведенными свойствами для W_r и, кроме того, $\bar{T}(U_r(s), r) < W_r(U_r(s)) = s$. Поэтому

$$\|x(t)\| \leq U_r(t - t_0), \quad \forall t \geq t_0, \forall \|x(t_0)\| < r. \quad (\text{C.9})$$

С использованием (C.8) и (C.9) заключаем, что

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\alpha(\|x(t_0)\|)U_c(t - t_0)}, \quad \forall t \geq t_0, \forall \|x(t_0)\| < c.$$

Таким образом, неравенство (4.20) выполнено при $\beta(r, s) = \sqrt{\alpha(r)U_c(s)}$.

Глобальная равномерная асимптотическая устойчивость: Если (4.20) выполнено для всех $x(t_0) \in R^n$, то, как и в предыдущем случае, можно показать, что начало координат глобально равномерно асимптотически устойчиво. Для доказательства обратного утверждения заметим, что в рассматриваемом случае функция $\bar{\delta}(\varepsilon)$ обладает дополнительным свойством: $\bar{\delta}(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$. Следовательно, можно выбрать \mathcal{K} -функцию α так, чтобы она принадлежала классу \mathcal{K}_∞ и для всех $x(t_0) \in R^n$ было выполнено неравенство (C.7). Более того, неравенство (C.9) выполнено для любой $r > 0$. Пусть

$$\psi(r, s) = \min \left\{ \alpha(r), \inf_{\rho \in (r, \infty)} U_\rho(s) \right\}.$$

Тогда

$$\|x(t)\| \leq \psi(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0, \forall x(t_0) \in R^n.$$

Если бы функция ψ принадлежала классу \mathcal{KL} , доказательство было бы завершено. Однако в общем случае это условие не выполнено и поэтому мы должны определить функцию

$$\phi(r, s) = \int_r^{r+1} \psi(\lambda, s) d\lambda + \frac{r}{(r+1)(s+1)},$$

которая является положительной и обладает следующими свойствами:

- для любой фиксированной $s \geq 0$ функция $\phi(r, s)$ является непрерывной и строго возрастающей по r ;
- для любой фиксированной $r \geq 0$ функция $\phi(r, s)$ является строго убывающей по s и стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$;
- $\phi(r, s) \geq \psi(r, s)$.

Тогда

$$\|x(t)\| \leq \phi(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0, \forall x(t_0) \in R^n. \quad (\text{C.10})$$

Из (C.10) и глобальной версии неравенства (C.7) получаем

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\alpha(\|x(t_0)\|)\phi(\|x(t_0)\|, t - t_0)}, \quad \forall t \geq t_0, \forall x(t_0) \in R^n.$$

Таким образом, неравенство (4.20) выполнено глобально при $\beta(r, s) = \sqrt{\alpha(r)\phi(r, s)}$.

C.7. Доказательство теоремы 4.16

Нахождение функции Ляпунова выполняется с использованием леммы Массера [125]. Начнем с ее формулировки и доказательства.

Лемма C.1. Пусть $g : [0, \infty) \rightarrow R$ — положительная, непрерывная, строго убывающая функция, такая что $g(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть $h : [0, \infty) \rightarrow R$ — положительная, непрерывная, неубывающая функция. Тогда существует функция $G(t)$, такая что

- $G(t)$ и ее производная $G'(t)$ принадлежат классу \mathcal{K} и определены для всех $t \geq 0$.
- Для любой непрерывной функции $u(t)$, удовлетворяющей неравенству $0 \leq u(t) \leq g(t)$ для всех $t \geq 0$, существуют положительные константы k_1 и k_2 , независящие от u , такие что

$$\int_0^\infty G(u(t)) dt \leq k_1; \quad \int_0^\infty G'(u(t)) h(t) dt \leq k_2.$$

Доказательство леммы C.1: Поскольку функция $g(t)$ является строго убывающей, можно найти последовательность t_n , такую что

$$g(t_n) \leq \frac{1}{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эта последовательность используется для определения функции $\eta(t)$:

- (a) $\eta(t_n) = 1/n$.
- (b) Между t_n и t_{n+1} функция $\eta(t)$ линейна.
- (c) На интервале $0 < t \leq t_1$, $\eta(t) = (t_1/t)^p$, где p — достаточно большое положительное целое число, такое что производная $\eta'(t)$ имеет положительный скачок в t_1 , т. е. $\eta'(t_1^-) < \eta'(t_1^+)$.

Функция $\eta(t)$ является строго убывающей и при $t \geq t_1$ выполнено $g(t) < \eta(t)$. При $t \rightarrow 0^+$ функция $\eta(t)$ неограниченно возрастает. Обратная функция для $\eta(t)$, обозначаемая через $\eta^{-1}(s)$, является строго убывающей функцией, неограниченно возрастающей при $s \rightarrow 0^+$. Очевидно,

$$\eta^{-1}(u(t)) \geq \eta^{-1}(g(t)) > \eta^{-1}(\eta(t)) = t, \quad \forall t \geq t_1$$

для любой неотрицательной функции $u(t) \leq g(t)$. Определим

$$H(s) = \frac{\exp[-\eta^{-1}(s)]}{h(\eta^{-1}(s))}, \quad s \geq 0.$$

Поскольку η^{-1} является непрерывной и h — положительной, $H(s)$ является непрерывной на $0 < s < \infty$ и $\eta^{-1}(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0^+$. Следовательно, $H(s)$ является \mathcal{K} -функцией на $[0, \infty)$. Тогда интеграл

$$G(r) = \int_0^r H(s) ds$$

существует и функции $G(r)$ и $G'(r) = H(r)$ принадлежат классу \mathcal{K} и определены на $[0, \infty)$. Пусть $u(t)$ — непрерывная неотрицательная функция, такая что $u(t) \leq g(t)$. Имеем

$$G'(u(t)) = \frac{\exp[-\eta^{-1}(u(t))]}{h(\eta^{-1}(u(t)))} \leq \frac{e^{-t}}{h(t)}, \quad \forall t \geq t_1.$$

Таким образом,

$$\int_{t_1}^{\infty} G'(u(t))h(t)dt \leq \int_{t_1}^{\infty} e^{-t} dt \leq 1$$

и

$$\int_0^{\infty} G'(u(t))h(t)dt \leq \int_0^{t_1} G'(g(t))h(t)dt + 1 \leq k_2.$$

Из этого неравенства следует, что второй интеграл в формулировке леммы ограничен. В отношении первого интеграла имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{\infty} G(u(t))dt &= \int_{t_1}^{\infty} \int_0^{u(t)} \frac{\exp[-\eta^{-1}(s)]}{h(\eta^{-1}(s))} ds dt \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{\infty} \int_0^{\eta(t)} \frac{\exp[-\eta^{-1}(s)]}{h(0)} ds dt. \end{aligned}$$

При $0 \leq s \leq \eta(t)$ получаем

$$-\eta^{-1}(s) \leq -t.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\eta(t)} \frac{\exp[-\eta^{-1}(s)]}{h(0)} ds \leq \int_0^{\eta(t)} \frac{e^{-s}}{h(0)} ds = \frac{e^{-t}}{h(0)} \eta(t) \leq \frac{e^{-t}}{h(0)}$$

при $t \geq t_1$. Тогда

$$\int_0^{\infty} G(u(t))dt \leq \int_0^{t_1} G(g(t))dt + \int_{t_1}^{\infty} \frac{e^{-t}}{h(0)} dt \leq k_1.$$

Поэтому первый интеграл в формулировке леммы ограничен. Доказательство леммы закончено. \square

Для доказательства теоремы положим

$$V(t, x) = \int_t^{\infty} G(\|\phi(\tau; t, x)\|_2) d\tau,$$

где $\phi(\tau; t, x)$ — решение, начинающееся в (t, x) , и G — некоторая \mathcal{K} -функция, которая должна выбираться с использованием леммы C.1. Для этого получим оценку сверху для

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_t^{\infty} G'(\|\phi\|_2) \frac{\phi^T}{\|\phi\|_2} \phi_x d\tau.$$

В доказательстве теоремы 4.14 мы видели, что из предположения $\|\partial f/\partial x\|_2 \leq L$, выполняющегося равномерно по t , следует, что $\|\phi_x(\tau; t, x)\|_2 \leq \exp[L(\tau - t)]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|_2 &\leq \int_t^{\infty} G'(\|\phi(\tau; t, x)\|_2) \exp[L(\tau - t)] d\tau \leq \\ &\leq \int_t^{\infty} G'(\beta(\|x\|_2, \tau - t)) \exp[L(\tau - t)] d\tau \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} G'(\beta(\|x\|_2, s)) \exp(Ls) ds. \end{aligned}$$

Рассматривая функции $\beta(r_0, s)$ и $\exp(Ls)$ в качестве функций g и h из леммы C.1, получаем функцию G , принадлежащую классу \mathcal{K} и удовлетворяющую лемме. Следовательно, интеграл

$$\int_0^{\infty} G'(\beta(\|x\|_2, s)) \exp(Ls) ds \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_4(\|x\|_2)$$

ограничен для всех $\|x\|_2 \leq r_0$ равномерно по x . Более того, он представляет собой непрерывную и строго возрастающую функцию от $\|x\|_2$, т. к. $\beta(\|x\|_2, s)$ является \mathcal{K} -функцией по $\|x\|_2$ для любой фиксированной s . Таким образом, α_4 принадлежит классу \mathcal{K} , что доказывает последнее неравенство в утверждении теоремы. Далее, рассмотрим

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \int_t^{\infty} G(\|\phi(\tau; t, x)\|_2) d\tau \leq \\ &\leq \int_t^{\infty} G(\beta(\|x\|_2, \tau - t)) d\tau = \int_0^{\infty} G(\beta(\|x\|_2, s)) ds \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_2(\|x\|_2). \end{aligned}$$

Из леммы C.1 следует, что последний интеграл ограничен для всех $\|x\|_2 \leq r_0$. Функция α_2 принадлежит классу \mathcal{K} . В доказательстве теоремы 4.14 мы видели, что из предположения $\|\partial f/\partial x\|_2 \leq L$, выполняюще-

гося равномерно по t , следует, что $\|\phi(\tau; t, x)\|_2 \geq \|x\|_2 \exp[-L(\tau - t)]$. Поэтому

$$\begin{aligned} V(t, x) &\geq \int_t^\infty G(\|x\|_2 e^{-L(\tau-t)}) d\tau = \int_0^\infty G(\|x\|_2 e^{-Ls}) ds \geq \\ &\geq \int_0^{(\ln 2)/L} G(\frac{1}{2}\|x\|_2) ds = \frac{\ln 2}{L} G(\frac{1}{2}\|x\|_2) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1(\|x\|_2). \end{aligned}$$

Очевидно, $\alpha_1(\|x\|_2)$ принадлежит классу \mathcal{K} . Следовательно, V удовлетворяет неравенству

$$\alpha_1(\|x\|_2) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|_2)$$

для всех $\|x\|_2 \leq r_0$. Наконец, производная V вдоль траекторий системы имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &= -G(\|x\|_2) + \\ &+ \int_t^\infty G'(\|\phi\|_2) \frac{\phi^T}{\|\phi\|_2} [\phi_t(\tau; t, x) + \phi_x(\tau; t, x) f(t, x)] d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\phi_t(\tau; t, x) + \phi_x(\tau; t, x) f(t, x) \equiv 0, \quad \forall \tau \geq t,$$

получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) = -G(\|x\|_2).$$

Следовательно, три неравенства в утверждении теоремы выполнены для всех $\|x\|_2 \leq r_0$. Заметим, что вследствие эквивалентности норм можно использовать аналогичные неравенства для любой из p -норм. Если система является автономной, решение зависит только от $\tau - t$, т. е. $\phi(\tau; t, x) = \psi(\tau - t; x)$. Поэтому

$$V = \int_t^\infty G(\|\psi(\tau - t; x)\|_2) d\tau = \int_0^\infty G(\|\psi(s; x)\|_2) ds$$

т. е. V не зависит от t .

C.8. Доказательство теоремы 4.17

Для любого решения $x(t)$ уравнения

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \in R_A, \quad (\text{C.11})$$

в результате замены переменной времени t на $\tau = \int_0^t (1 + \|f(x(s))\|) ds$ система принимает следующий вид

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \frac{1}{1 + \|f(\bar{x})\|} f(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{f}(\bar{x}), \quad \bar{x}(0) = x_0, \quad (\text{C.12})$$

где $\bar{x}(\tau) = x(t)$, т. е. переменная t выражена через τ . Начало координат является асимптотически устойчивой точкой равновесия системы (C.12) и R_A — ее область притяжения. Если $V(x)$ — функция Ляпунова для (C.12), удовлетворяющая

$$\frac{\partial V}{\partial x} \bar{f}(x) \leq -W(x)$$

для некоторой положительно определенной функции $W(x)$, то

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) = (1 + \|f(x)\|) \frac{\partial V}{\partial x} \bar{f}(x) \leq -(1 + \|f(x)\|) W(x) \leq -W(x),$$

т. к. $1 + \|f(x)\| \geq 1$. Поэтому достаточно построить функцию Ляпунова для (C.12). Анализ (C.12) — более простая задача, т. к. из свойства $\|\bar{f}\| \leq 1$ следует, что эта система не уходит на бесконечность за конечное время при $t < 0$. В оставшейся части доказательства мы будем исследовать систему (C.12), которую перепишем в следующей форме

$$\dot{x} = \bar{f}(x), \quad (\text{C.13})$$

т. е. опустив надчеркивание в \bar{x} и используя \dot{x} для обозначения производной по τ .

Из леммы 8.1 известно, что R_A является открытым множеством. При $R_A \neq R^n$ обозначим через F дополнение R_A в R^n . Для любой $x \in R_A$ определим

$$\omega(x) = \max \left\{ \|x\|, \frac{1}{\text{dist}(x, F)} - \frac{2}{\text{dist}(0, F)} \right\}, \quad (\text{C.14})$$

если $R_A \neq R^n$ и $\omega(x) = \|x\|$, если $R_A = R^n$. Легко показать, что $\omega(x)$ является положительно определенной и локально лишицевой функцией. Поскольку $\text{dist}(x, F) \rightarrow 0$ при x , стремящемся к ∂R_A , то выполнено $\omega(x) \rightarrow \infty$ при x , стремящемся к ∂R_A . Более того, при $r_0 = (1/2)\text{dist}(0, F)$ имеем

$$\inf_{y \in F} \{\|x - y\|\} \geq \inf_{y \in F} \{\|y\| - \|x\|\} \geq \inf_{y \in F} \{\|y\| - r_0\}, \quad \forall \|x\| \leq r_0.$$

Следовательно,

$$\text{dist}(x, F) \geq \text{dist}(0, F) - \frac{1}{2} \text{dist}(0, F) = \frac{1}{2} \text{dist}(0, F), \quad \forall \|x\| \leq r_0.$$

Поэтому $\omega(x) = \|x\|$ для всех $\|x\| \leq r_0$.

Лемма C.2. Решение системы (C.13) удовлетворяет неравенству

$$\omega(x(t)) \leq \beta(\omega(x(0)), t), \quad \forall t \geq 0, \forall x(0) \in R_A, \quad (\text{C.15})$$

где $\beta(r, s) - \mathcal{KL}$ -функция, определенная для всех $r \geq 0, s \geq 0$, такая что $\beta(r, 0) - \mathcal{K}_\infty$ -функция.

Доказательство леммы С.2: Покажем, что для любой константы $r > 0$ существует константа $b = b(r) > 0$, такая что решение системы (C.13) с $\omega(x(0)) \leq r$ удовлетворяет $\omega(x(t)) \leq b$ для всех $t \geq 0$. Предположим, что это не выполнено. Тогда существует последовательность решений $x^{(i)}(t)$ системы (C.13) и константы τ_i , такие что $\omega(x^{(i)}(0)) \leq r, i = 1, 2, 3, \dots$ и $\omega(x^{(i)}(\tau_i)) > i, i = 1, 2, 3, \dots$. Пусть T^* — супремум всех $T \geq 0$, таких что функции $x^{(i)}(t), i = 1, 2, 3, \dots$ являются конечными для всех $t \in [0, T]$, т. е.

$$T^* = \sup\{T \geq 0 \mid \limsup_{i \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq T} \{\omega(x^{(i)}(t))\} < \infty\}. \quad (\text{C.16})$$

Рассмотрим случаи $T^* < \infty$ и $T^* = \infty$ по отдельности. При $T^* < \infty$ предположим, что τ_i — последовательность положительных констант, такая что для любого $i \geq 1$ решение системы (C.13) удовлетворяет неравенству

$$\omega(x(0)) \leq i \Rightarrow \omega(x(t)) \leq i + 1, \forall 0 \leq t \leq 2\tau_i. \quad (\text{C.17})$$

Эта последовательность не пуста вследствие непрерывности $x(t)$. Всегда можно выбрать τ_i , такие что $T^* > \tau_1 > \tau_2 > \dots$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = 0$. Пусть $x^{(1,i)}(t)$ — последовательность всех функций $x^{(i)}(t)$, таких что $\omega(x^{(i)}(T^* - \tau_1)) > 1$. Функции $x^{(1,i)}(t)$ образуют бесконечную последовательность. Для того, чтобы убедиться в этом факте, предположим, что I_1 — множество индексов i , таких что $x^{(i)}(t)$ не принадлежит последовательности $x^{(1,i)}(t)$. Из выбора τ_1 следует, что

$$\omega(x^{(i)}(t)) \leq 2 \text{ при } T^* - \tau_1 \leq t \leq T^* + \tau_1, \forall i \in I_1. \quad (\text{C.18})$$

Если в последовательности $x^{(1,i)}(t)$ имеется лишь конечное число функций $x^{(i)}(t)$, то из (C.18) следует, что

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \left\{ \max_{0 \leq t \leq T^* + \tau_1} \{\omega(x^{(i)}(t))\} \right\} < \infty, \quad (\text{C.19})$$

но это противоречит определению T^* (C.16). Таким образом, последовательность $x^{(1,i)}(t)$ является бесконечной. Пусть $x^{(2,i)}(t)$ — последовательность всех функций $x^{(1,i)}(t)$, таких что $\omega(x^{(1,i)}(T^* - \tau_2)) > 2$. Можно повторить представленные выше рассуждения и показать, что последовательность $x^{(2,i)}(t)$ также является бесконечной. Продолжая эту процедуру, можно увеличивать семейство подпоследовательностей до тех пор, пока не будет получена последовательность $\tilde{x}^{(i)}(t)$, такая что

$$\omega(\tilde{x}^{(i)}(T^* - \tau_j)) \geq j, \forall j = 1, 2, 3, \dots, \forall i = 1, 2, 3, \dots. \quad (\text{C.20})$$

Поскольку $\|\tilde{x}^{(i)}(0)\| \leq \omega(\tilde{x}^{(i)}(0)) \leq r$ и $\|\bar{f}(x)\| \leq 1$, решения $\tilde{x}^{(i)}(t)$ принадлежат компактному множеству $\{\|x\| \leq r + T\}$ для любого $0 < T < T^*$. Таким образом, последовательность $\omega(\tilde{x}^{(i)}(t))$ ограничена на интервале $t \in [0, T]$ равномерно по i . Из последовательности $\tilde{x}^{(i)}(t)$

можно выделить подпоследовательность $\tilde{x}^{(i)}(t)$, которая равномерно сходится на интервале $[0, T]$, $0 < T < T^*$, к решению $x(t)$, определенному при $t \in [0, T^*)$. Из (C.20) и с учетом того, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = 0$, можно заключить, что $\lim_{t \rightarrow T^*} \omega(x(t)) = \infty$. Аналогично, при $T^* = \infty$ решение $x^{(i)}(t)$ принадлежит компактному множеству $\{\|x\| \leq r + T\}$ для любого $T > 0$. Следовательно, можно выделить подпоследовательность $\tilde{x}^{(i)}(t)$, которая равномерно сходится на интервале $[0, T]$ к решению $x(t)$, определенному при $t \in [0, \infty)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(\tilde{x}(t)) = \infty$. Таким образом, мы показали, что существует константа T^* , $0 < T^* \leq \infty$, и решение $x(t)$, такие что $\omega(x(0)) \leq r$ и $\lim_{t \rightarrow T^*} \omega(x(t)) = \infty$. Однако, это невозможно, т. к. $x(0) \in R_A$. Поэтому можно заключить, что для любой $r > 0$ существует $b = b(r) > 0$, такая что решение системы (C.13) при $\omega(x(0)) \leq r$ удовлетворяет неравенству $\omega(x(t)) \leq b$ для всех $t \geq 0$. В качестве $b(r)$ может быть выбрана некоторая возрастающая функция от r , которая, вследствие устойчивости начала координат, обладает свойством $b(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Более того, $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, т. к. $b(r) \geq r$. Можно найти \mathcal{K}_∞ -функцию $\alpha(r)$, такую что $b(r) \leq \alpha(r)$ для всех $r \geq 0$. Таким образом, решение системы (C.13) удовлетворяет неравенству

$$\omega(x(t)) \leq \alpha(\omega(x(0))), \forall t \geq 0, \forall x(0) \in R_A. \quad (\text{C.21})$$

С другой стороны, для любых положительных констант r и η можно показать, что существует момент $T = T(\eta, r) > 0$, такой что

$$\omega(x(0)) < r \Rightarrow \omega(x(t)) < \eta, \forall t \geq T. \quad (\text{C.22})$$

Действительно, если бы это утверждение было неверным, то тогда существовала бы последовательность решений $x^{(i)}(t)$ системы (C.13) и констант τ_i , для которых выполнялись бы следующие условия:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = \infty, \omega(x^{(i)}(0)) \leq r \text{ и } \omega(x^{(i)}(\tau_i)) \geq \eta.$$

Однако из (C.21) видно, что для любой положительной константы $\delta < \alpha^{-1}(\eta)$, каждое решение системы (C.13) при $\omega(x(\tau)) \leq \delta$ удовлетворяет $\omega(x(t)) < \eta$ для всех $t \geq \tau$. Следовательно, $\omega(x^{(i)}(t)) \geq \delta$ при $0 \leq t \leq \tau_i$. Поскольку $\omega(x^{(i)}(t)) \leq \alpha(r)$ для всех $t \geq 0$, из последовательности $x^{(i)}(t)$ можно выбрать подпоследовательность $\tilde{x}^{(i)}(t)$, которая равномерно сходится на каждом интервале $[0, T]$ при $0 < T < \infty$. Функция $x(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{x}^{(i)}(t)$ является решением системы (C.13), для которого выполнено неравенство $\omega(x(t)) \geq \delta$ для всех $t \geq 0$. Однако это невозможно, т. к. $x(0) \in R_A$. Таким образом, $T(\eta, r)$ существует. Повторяя рассуждения, которые были сделаны при доказательстве леммы 4.5 (для случая глобальной равномерной асимптотической устойчивости), можно, используя (C.21) и (C.22), показать, что существует \mathcal{KL} -функция $\beta(r, s), \beta(r, 0) \geq \alpha(r)$, такая что выполнено (C.15). \square

Пусть $\phi(t; x)$ — решение системы (C.13), начинающееся в x в момент времени $t = 0$. Поскольку величина $\|\bar{f}(x)\|$ ограничена, $\phi(t; x)$ опреде-

лено для всех $t \leq 0$. Более того, поскольку множество R_A является инвариантным (по лемме 8.1), $\phi(t; x) \in R_A$ для всех $t \leq 0$. Определим функцию $g : R_A \rightarrow R$ равенством

$$g(x) = \inf_{t \leq 0} \{\omega(\phi(t; x))\}. \quad (\text{C.23})$$

По определению

$$g(\phi(t; x)) \leq g(x), \forall t \geq 0, \forall x \in R_A, \quad (\text{C.24})$$

$$\alpha^{-1}(\omega(x)) \leq g(x) \leq \omega(x), \forall x \in R_A. \quad (\text{C.25})$$

Первое неравенство в (C.25) справедливо, т. к. из (C.21) следует, что $\omega(x) \leq \alpha(\omega(\phi(t; x))), \forall t \leq 0$. Покажем, что функция $g(x)$ является локально липшицевой при $x \in R_A, x \neq 0$. Это эквивалентно тому, что функция $g(x)$ является липшицевой на компактном множестве $H = \{x \in R_A | c_1 \leq \omega(x) \leq c_2\}$, где $c_2 > c_1 > 0$. Из неравенства (C.15) следует, что

$$c_1 \leq \omega(x) \leq \beta(\omega(\phi(t; x)), -t), \forall t < 0, \forall x \in H.$$

Пусть T_1 удовлетворяет $\beta(2c_2, T_1) = c_1$. Тогда для всех $t \leq -T_1$ выполнено

$$\beta(2c_2, T_1) = c_1 \leq \beta(\omega(\phi(t; x)), -t) \leq \beta(\omega(\phi(t; x)), T_1).$$

Следовательно,

$$\omega(\phi(t; x)) \geq 2c_2 \geq 2\omega(x) \geq 2g(x), \forall t \leq -T_1, \forall x \in H.$$

Из этих неравенств видно, что для всех $x \in H$ инфимум, фигурирующий в определении $g(x)$, достигается на интервале $[-T_1, 0]$. С учетом того, что функция $\phi(t; x)$ является липшицевой по x на H для любого компактного интервала времени (см. теорему 3.4), а также из того факта, что функция ω является локально липшицевой на R_A , следует, что функция $g(x)$ является липшицевой на H . Заметим, что это рассуждение перестает быть верным при $c_1 = 0$ и поэтому мы не можем показать, что функция $g(x)$ является локально липшицевой в окрестности точки $x = 0$. Однако, $g(x)$ непрерывна для всех $x \in R_A$, т. к. $g(0) = 0, g(x) \leq \omega(x)$ (см. (C.25)) и вследствие того, что функция $\omega(x)$ является непрерывной.

Определим функцию $\tilde{V} : R_A \rightarrow R$ равенством

$$\tilde{V}(x) = \sup_{t \geq 0} \left\{ g(\phi(t; x)) \frac{1+2t}{1+t} \right\}. \quad (\text{C.26})$$

Используя (C.24) и (C.25), можно показать, что

$$\alpha^{-1}(\omega(x)) \leq g(x) \leq \tilde{V}(x) \leq 2g(x) \leq 2\omega(x). \quad (\text{C.27})$$

Докажем, что функция $\tilde{V}(x)$ является локально липшицевой при $x \in R_A, x \neq 0$, показав, что $\tilde{V}(x)$ является липшицевой на $H = \{x \in$

$\in R_A | c_1 \leq \omega(x) \leq c_2\}$ при $0 < c_1 < c_2$. Используя (C.15) и (C.25), получаем для всех $x \in H$

$$g(\phi(t; x)) \frac{1+2t}{1+t} \leq 2\omega(\phi(t; x)) \leq 2\beta(\omega(x), t) \leq 2\beta(c_2, t).$$

Пусть $T_2 > 0$ удовлетворяет равенству $4\beta(c_2, T_2) = \alpha^{-1}(c_1)$. Тогда для всех $t \geq T_2$,

$$g(\phi(t; x)) \frac{1+2t}{1+t} \leq \frac{1}{2}\alpha^{-1}(c_1) \leq \frac{1}{2}\alpha^{-1}(\omega(x)) \leq \frac{1}{2}\tilde{V}(x).$$

Таким образом, супремум в определении $\tilde{V}(x)$ достигается на интервале $[0, T_2]$. Повторив анализ, который был проведен в отношении функции $g(x)$, можно показать, что $\tilde{V}(x)$ является липшицевой на H . Поскольку $\tilde{V}(0) = 0$, из (C.27) следует, что $\tilde{V}(x)$ является непрерывной для всех $x \in R_A$. Далее, покажем, что $\tilde{V}(x(t))$ является убывающей вдоль решения системы (C.13). Т. к. $\tilde{V}(x)$ является лишь локально липшицевой, ее производная вдоль решения системы (C.13) может быть вычислена по формуле

$$\dot{\tilde{V}}(x) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [\tilde{V}(\phi(h; x)) - \tilde{V}(x)]. \quad (\text{C.28})$$

При $x \neq 0$ выберем $r > \omega(x)$. С учетом свойств \mathcal{KL} -функций можно найти функцию $\gamma_r(\rho)$, определенную при $0 < \rho < \infty$ и $0 < r < \infty$, такую что для каждой фиксированной r она является непрерывной и убывающей по ρ , а для каждой фиксированной ρ — возрастающей по r , причем выполнено неравенство $4\beta(r, \gamma_r(\rho)) \leq \alpha^{-1}(\rho/2)$ для всех $0 < \rho < \infty$. Пусть h_0 таково, что $\omega(\phi(t; x)) \geq (1/2)\omega(x)$ для всех $t \in [0, h_0]$. Выберем $h \in [0, h_0]$. Тогда

$$\tilde{V}(\phi(h; x)) = \sup_{t \geq 0} \left\{ g(\phi(t; \phi(h; x))) \frac{1+2t}{1+t} \right\} = \sup_{t \geq 0} \left\{ g(\phi(t+h; x)) \frac{1+2t}{1+t} \right\}.$$

Используя неравенства

$$g(\phi(t+h; x)) \frac{1+2t}{1+t} \leq 2\omega(\phi(t+h; x)) \leq 2\beta(\omega(x), t+h) < 2\beta(r, t+h)$$

можно показать, что для всех $t+h \geq \gamma_r(\omega(x))$ выполнено

$$g(\phi(t+h; x)) \frac{1+2t}{1+t} \leq \frac{1}{2}\alpha^{-1}(\frac{1}{2}\omega(x)) \leq \frac{1}{2}\alpha^{-1}(\omega(\phi(h; x))) \leq \frac{1}{2}\tilde{V}(\phi(h; x)).$$

Следовательно, супремум в определении $\tilde{V}(\phi(h; x))$ достигается в момент времени t' , удовлетворяющий условию $t'+h \leq \gamma_r(\omega(x))$. Поэтому

$$\tilde{V}(\phi(h; x)) = g(\phi(t'+h; x)) \frac{1+2t'}{1+t'} =$$

$$= g(\phi(t' + h; x)) \frac{1 + 2t' + 2h}{1 + t + h} \left[1 - \frac{h}{(1 + 2t' + 2h)(1 + t')} \right] \leqslant \\ \leqslant \tilde{V}(x) \left[1 - \frac{h}{2[1 + \gamma_r(\omega(x))]^2} \right].$$

Полагая

$$\eta_r(s) = \frac{\alpha^{-1}(s)}{2[1 + \gamma_r(s)]^2}$$

при $s > 0$ и $\eta_r(0) = 0$, можно показать, что функция $\eta_r(s)$ принадлежит классу \mathcal{K}_∞ и

$$\dot{\tilde{V}}(x) \leqslant -\eta_r(\omega(x)).$$

Поскольку предыдущее неравенство выполнено для всех $r > \omega(x)$, оно также выполнено и при $\bar{\eta}(s) = \sup_{r > s} \eta_r(s)$, т. е. $\dot{\tilde{V}}(x) \leqslant -\bar{\eta}(\omega(x))$ для всех $x \neq 0$. Определим

$$\eta(s) = \int_{2s}^{2s+1} \eta_r(s) dr$$

при $s > 0$ и $\eta(0) = 0$. Функция $\eta(s)$ является непрерывной и положительно определенной на $[0, \infty)$ и $\eta(s) \leqslant \bar{\eta}(s)$. Следовательно,

$$\dot{\tilde{V}}(x) \leqslant -\eta(\omega(x)), \quad \forall x \in R_A, x \neq 0. \quad (\text{C.29})$$

Функция $\tilde{V}(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.17, в том числе требованию гладкости этой функции, которое может быть доказано с использованием следующих двух лемм, которые приведены здесь без доказательства.

Лемма С.3. Пусть D — открытое подмножество R^n и предположим, что существуют локально липшицевы функции $\Phi : D \rightarrow R$, $g : D \rightarrow R^n$ и непрерывная функция $\psi : D \rightarrow R$, такие что производная $\Phi(x)$ вдоль траекторий системы $\dot{x} = g(x)$ удовлетворяет $\Phi(x) \leqslant \psi(x)$ для всех $x \in D$. Тогда для любых непрерывных функций $\mu : D \rightarrow (0, \infty)$ и $\nu : D \rightarrow (0, \infty)$ существует гладкая функция $\Psi : D \rightarrow R$, такая что $|\Phi(x) - \Psi(x)| \leqslant \mu(x)$ и $\dot{\Psi}(x) \leqslant \psi(x) + \nu(x)$ для всех $x \in D$.

Доказательство леммы С.3: См. [118, теорема В.1].

Лемма С.4. Пусть $D \subset R^n$ — открытая область, содержащая начало координат и $\Phi : D \rightarrow [0, \infty)$ — локально липшицева, положительно определенная функция, такая что $\Phi(x)$ является гладкой при $x \neq 0$. Тогда существует \mathcal{K}_∞ -функция σ , являющаяся гладкой на $(0, \infty)$, такая что $\sigma^{(i)}(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0^+$ для каждого $i = 0, 1, \dots$, $\sigma'(r) > 0$ для всех $r > 0$ и функция $\Psi(x) = \sigma(\Phi(x))$ является гладкой на D .

Доказательство леммы С.4: См. [118, лемма 4.3] (с заменой R^n на открытую область D).

Продолжим доказательство. Применим лемму С.3 при $D = R_A - \{0\}$, $\Phi(x) = \tilde{V}(x)$, $g(x) = \dot{\tilde{V}}(x)$, $\psi(x) = -\eta(\omega(x))$, $\mu(x) = (1/2)\alpha^{-1}(\omega(x))$, $\nu(x) = (1/2)\eta(\omega(x))$ и найдем функцию $\widehat{V}(x)$, являющуюся гладкой на $R_A - \{0\}$ и удовлетворяющую условиям

$$\widehat{\alpha}_1(\omega(x)) \leqslant \widehat{V}(x) \leqslant \widehat{\alpha}_2(\omega(x)) \quad \text{и} \quad \dot{\widehat{V}}(x) \leqslant -\widehat{\alpha}_3(\omega(x)),$$

где $\widehat{\alpha}_1(r) = (1/2)\alpha^{-1}(r)$ и $\widehat{\alpha}_2(r) = 2r + (1/2)\alpha^{-1}(r)$ — \mathcal{K}_∞ -функции и $\widehat{\alpha}_3(r) = (1/2)\eta(r)$ является непрерывной и положительно определенной на $[0, \infty)$. Далее, применим лемму С.4 при $D = R_A$, $\Phi = \widehat{V}$ и найдем \mathcal{K}_∞ -функцию σ , такую что $V(x) = \sigma(\widehat{V}(x))$ является гладкой на R_A . Легко показать, что функции $\alpha_i(r) = \sigma(\widehat{\alpha}_i(r))$, $i = 1, 2$, принадлежат классу \mathcal{K}_∞ , функция

$$\alpha_3(r) = \widehat{\alpha}_3(r) \min_{t \in [\widehat{\alpha}_1(r), \widehat{\alpha}_2(r)]} \sigma'(t)$$

является непрерывной и положительно определенной на $[0, \infty)$, а также выполнены неравенства

$$\alpha_1(\omega(x)) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(\omega(x))$$

и

$$\dot{V}(x) = \sigma'(\widehat{V}(x))\widehat{V}'(x) \leqslant -\sigma'(\widehat{V}(x))\widehat{\alpha}_3(\omega(x)) \leqslant -\alpha_3(\omega(x)).$$

Функция V удовлетворяет всем условиям теоремы 4.17. Тот факт, что для любой $c > 0$ множество $\{V(x) \leqslant c\}$ является компактным подмножеством R_A , следует из неравенства $\{V(x) \leqslant c\} \subset \{\omega(x) \leqslant \alpha_1^{-1}(c)\}$.

С.9. Доказательство теоремы 4.18

Эта теорема сводится к теореме 4.9 при $\mu = 0$. Поэтому представленное здесь доказательство использует некоторые идеи и терминологию, используемые в доказательстве теоремы 4.9. Пусть $\rho = \alpha_1(r)$. Тогда $\alpha_2(\mu) < \rho$ и $\alpha_2(\|x(t_0)\|) \leqslant \rho$. Пусть $\eta = \alpha_2(\mu)$. Определим $\Omega_{t,\eta} = \{x \in B_r | V(t, x) \leqslant \eta\}$ и $\Omega_{t,\rho} = \{x \in B_r | V(t, x) \leqslant \rho\}$. Тогда

$$B_\mu \subset \Omega_{t,\eta} \subset \{\alpha_1(\|x\|) \leqslant \eta\} \subset \{\alpha_1(\|x\|) \leqslant \rho\} = B_r \subset D$$

и

$$\Omega_{t,\eta} \subset \Omega_{t,\rho} \subset B_r \subset D.$$

Множества $\Omega_{t,\rho}$ и $\Omega_{t,\eta}$ характеризуются тем, что любое решение, начинающееся в одном из этих множеств, не может покинуть это множество, т. к. производная $\dot{V}(t, x)$ отрицательна на его границе. Поскольку

$$\alpha_2(\|x(t_0)\|) \leqslant \rho \Rightarrow x(t_0) \in \Omega_{t_0,\rho},$$

можно заключить, что $x(t) \in \Omega_{t,\rho}$ для всех $t \geq t_0$. Решение, начинающееся в $\Omega_{t,\rho}$ должно достигнуть $\Omega_{t,\eta}$ за конечное время, т. к. в множестве $\{\Omega_{t,\rho} - \Omega_{t,\eta}\}$ производная \dot{V} удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(t, x) \leq -k < 0,$$

где константа $k = \min\{W_3(x)\}$ вычислена на множестве $\{\mu \leq \|x\| \leq r\}$, содержащем $\{\Omega_{t,\rho} - \Omega_{t,\eta}\}$. Из предыдущего неравенства следует оценка

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) - k(t - t_0) \leq \rho - k(t - t_0),$$

которая показывает, что $V(t, x(t))$ сводится к η на интервале времени $[t_0, t_0 + (\rho - \eta)/k]$. Для решения, начинающегося внутри $\Omega_{t,\eta}$, неравенство (4.43) выполнено для всех $t \geq t_0$, т. к. $\Omega_{t,\eta} \subset \{\alpha_1(\|x\|) \leq \alpha_2(\mu)\}$. В случае, когда решение начинается внутри $\Omega_{t,\rho}$, но вне $\Omega_{t,\eta}$, предположим, что $t_0 + T$ — момент времени, когда решение впервые достигает $\Omega_{t,\eta}$. Для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ выполнено

$$\dot{V} \leq -W_3(x) \leq -\alpha_3(\|x\|) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)) \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha(V),$$

где α_3 и α — некоторые \mathcal{K} -функции. Существование α_3 следует из леммы 4.3. Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 4.9, можно показать, что существует \mathcal{KL} -функция σ , такая что

$$V(t, x(t)) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

Определив $\beta(r, s) = \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(r), s))$, получаем

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

Если $D = R^n$, функция α_3 и, следовательно, функция β могут быть выбраны не зависящими от ρ . Если α_1 принадлежит классу \mathcal{K}_∞ , этому же классу принадлежит и функция α_2 и значение $\alpha_2^{-1}(\rho)$ может быть сделано произвольно большим путем выбора достаточно большой ρ . Следовательно, любое начальное состояние $x(t_0)$ может быть включено в множество $\{\|x\| \leq \alpha_2^{-1}(\rho)\}$.

С.10. Доказательство теоремы 5.4

Утверждение теоремы 5.4 справедливо, если \mathcal{L}_2 -коэффициент усиления равен $\sup_{\omega \in R} \|G(j\omega)\|_2$. Пусть c_1 — \mathcal{L}_2 -коэффициент усиления и $c_2 = \sup_{\omega \in R} \|G(j\omega)\|_2$. Известно, что $c_1 \leq c_2$. Предположим, что $c_1 < c_2$ и пусть $\varepsilon = (c_2 - c_1)/3$. Тогда для любого $u \in \mathcal{L}_2$, $\|u\|_{\mathcal{L}_2} \leq 1$, получаем $\|y\|_{\mathcal{L}_2} \leq c_2 - 3\varepsilon$. Мы придем к противоречию, если построим сигнал u , $\|u\|_{\mathcal{L}_2} \leq 1$, такой что $\|y\|_{\mathcal{L}_2} \geq c_2 - 2\varepsilon$. Нахождение такого сигнала упрощается, если мы определим сигналы на всей вещественной оси R . При этом мы не умаляем общности, т. к. (см. упражнение 5.19) \mathcal{L}_2 -коэффициент усиления остается неизменным вне зависимости от того, определены ли сигналы на $[0, \infty)$, или на R . Выберем $\omega_0 \in R$, такую

что $\|G(j\omega_0)\|_2 \geq c_2 - \varepsilon$. Пусть $v \in C^m$ — нормированный собственный вектор ($v^*v = 1$), соответствующий максимальному собственному значению эрмитовой матрицы $G^T(-j\omega_0)G(j\omega_0)$. Следовательно, $v^*G^T(-j\omega_0)G(j\omega_0)v = \|G(j\omega_0)\|_2^2$. Запишем v в виде

$$v = [\alpha_1 e^{j\theta_1}, \alpha_2 e^{j\theta_2}, \dots, \alpha_m e^{j\theta_m}]^T,$$

где константа $\alpha_i \in R$ такова, что $\theta_i \in (-\pi, 0]$. Выберем константы $0 \leq \beta_i \leq \infty$ так, что $\theta_i = -2 \operatorname{tg}^{-1}(\omega_0/\beta_i)$ и $\beta_i = \infty$, если $\theta_i = 0$. Определим $(m \times 1)$ передаточную функцию $H(s)$:

$$H(s) = \left[\alpha_1 \frac{\beta_1 - s}{\beta_1 + s}, \alpha_2 \frac{\beta_2 - s}{\beta_2 + s}, \dots, \alpha_m \frac{\beta_m - s}{\beta_m + s} \right]^T$$

где $(\beta_i - s)/(\beta_i + s)$ заменяется на 1, если $\theta_i = 0$. Можно показать, что $H(j\omega_0) = v$ и $H^T(-j\omega)H(j\omega) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 = v^*v = 1$ для всех $\omega \in R$. Рассмотрим $u_\sigma(t)$ как выход $H(s)$, входом которой является скалярная функция

$$z_\sigma(t) = \left(\frac{1}{1 + e^{-\omega_0^2 \sigma / 2}} \right)^{1/2} \left(\frac{8}{\pi \sigma} \right)^{1/4} e^{-t^2 / \sigma} \cos(\omega_0 t), \quad \sigma > 0, \quad t \in R.$$

Можно показать, что $z_\sigma \in \mathcal{L}_2$ и $\|z_\sigma\|_{\mathcal{L}_2} = 1$). Следовательно, $u_\sigma \in \mathcal{L}_2$ и $\|u_\sigma\|_{\mathcal{L}_2} \leq 1$. Преобразование Фурье для $z_\sigma(t)$ имеет вид

$$Z_\sigma(j\omega) = \left(\frac{1}{1 + e^{-\omega_0^2 \sigma / 2}} \right)^{1/2} \left(\frac{\pi \sigma}{2} \right)^{1/4} \left[e^{-(\omega - \omega_0)^2 \sigma / 4} + e^{-(\omega + \omega_0)^2 \sigma / 4} \right]$$

Пусть $y_\sigma(t)$ — выход $G(s)$, если в качестве входа используется $u_\sigma(t)$. Преобразование Фурье для $y_\sigma(t)$ определяется равенством $Y_\sigma(j\omega) = G(j\omega)U_\sigma(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)Z_\sigma(j\omega)$. По теореме Парсеваля

$$\begin{aligned} \|y_\sigma\|_{\mathcal{L}_2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_\sigma^T(-j\omega) H^T(-j\omega) G^T(-j\omega) G(j\omega) H(j\omega) Z_\sigma(j\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H^T(-j\omega) G^T(-j\omega) G(j\omega) H(j\omega) |Z_\sigma(j\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Используя

$$|Z_\sigma(j\omega)|^2 \geq \frac{1}{1 + e^{-\omega_0^2 \sigma / 2}} \left(\frac{\pi \sigma}{2} \right)^{1/2} \left[e^{-(\omega - \omega_0)^2 \sigma / 2} + e^{-(\omega + \omega_0)^2 \sigma / 2} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \psi_\sigma(\omega),$$

¹⁾ Здесь в качестве \mathcal{L}_2 -нормы используется $\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^T(t)z(t)dt$.

получаем

$$\|y_\sigma\|_{\mathcal{L}_2}^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H^T(-j\omega) G^T(-j\omega) G(j\omega) H(j\omega) \psi_\sigma(\omega) d\omega.$$

Полагая $\sigma \rightarrow \infty$, можно сконцентрировать спектр частот $\psi_\sigma(\omega)$ вблизи частот $\omega = \pm\omega_0$.¹⁾ Следовательно, правая часть предыдущего неравенства стремится при $\sigma \rightarrow \infty$ к

$$H^T(-j\omega_0) G^T(-j\omega_0) G(j\omega_0) H(j\omega_0) = \|G(j\omega_0)\|_2^2 \geq (c_2 - \varepsilon)^2.$$

Поэтому можно выбрать конечную константу σ достаточно большой, так чтобы $\|y_\sigma\|_{\mathcal{L}_2} \geq c_2 - 2\varepsilon$. Однако это противоречит неравенству $\|y_\sigma\|_{\mathcal{L}_2} \leq c_2 - 3\varepsilon$. Из этого противоречия следует, что $c_1 = c_2$.

C.11. Доказательство леммы 6.1

Достаточность: Поскольку $G(s)$ является гурвицевой, существуют положительные константы δ и μ^* такие, что вещественные части полюсов всех элементов $G(s - \mu)$ меньше $-\delta$ для всех $\mu < \mu^*$. Для того, чтобы показать, что $G(s)$ является строго положительно вещественной, достаточно доказать для всех $\omega \in R$ положительную полуопределенность $G(j\omega - \mu) + G^T(-j\omega - \mu)$. Пусть $\{A, B, C, D\}$ — минимальная реализация для $G(s)$. Тогда

$$\begin{aligned} G(s - \mu) &= D + C(sI - \mu I - A)^{-1}B = \\ &= D + C(sI - A)^{-1}(sI - A)(sI - \mu I - A)^{-1}B = \\ &= D + C(sI - A)^{-1}(\mu I + sI - \mu I - A)(sI - \mu I - A)^{-1}B = \\ &= G(s) + \mu N(s), \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

где

$$N(s) = C(sI - A)^{-1}(sI - \mu I - A)^{-1}B.$$

Поскольку A и $(A + \mu I)$ — гурвицевы матрицы равномерно по μ , то существует $k_0 > 0$, такая что

$$\sigma_{\max}[N(j\omega) + N^T(-j\omega)] \leq k_0, \quad \forall \omega \in R. \quad (\text{C.31})$$

Более того, существует $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 N(j\omega)$. Следовательно, существуют $k_1 > 0$ и $\omega_1 > 0$, такие что

$$\omega^2 \sigma_{\max}[N(j\omega) + N^T(-j\omega)] \leq k_1, \quad \forall |\omega| \geq \omega_1. \quad (\text{C.32})$$

¹⁾ $\psi_\sigma(\omega)$ стремится к $\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ при $\sigma \rightarrow \infty$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция.

Если $G(\infty) + G^T(\infty)$ является положительно определено, то существует $\sigma_0 > 0$, такая что

$$\sigma_{\min}[G(j\omega) + G^T(-j\omega)] \geq \sigma_0, \quad \forall \omega \in R. \quad (\text{C.33})$$

Из (C.30), (C.31) и (C.33) следует, что

$$\sigma_{\min}[G(j\omega - \mu) + G^T(-j\omega - \mu)] \geq \sigma_0 - \mu k_0, \quad \forall \omega \in R.$$

Выбор $\mu < \sigma_0/k_0$ гарантирует положительную определенность $G(j\omega - \mu) + G^T(-j\omega - \mu)$ для всех $\omega \in R$. Если $G(\infty) + G^T(\infty)$ вырождена, из третьего условия леммы следует, что $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ имеет q сингулярных значений, таких что $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sigma_i(\omega) > 0$, $(p - q)$ сингулярных значений, таких что $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sigma_i(\omega) = 0$ и $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \sigma_i(\omega) > 0$. Поэтому существуют $\sigma_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$, такие что

$$\omega^2 \sigma_{\min}[G(j\omega) + G^T(-j\omega)] \geq \sigma_1, \quad \forall |\omega| \geq \omega_2. \quad (\text{C.34})$$

Из (C.30), (C.32) и (C.34) следует, что

$$\omega^2 \sigma_{\min}[G(j\omega - \mu) + G^T(-j\omega - \mu)] \geq \sigma_1 - \mu k_1, \quad \forall |\omega| \geq \omega_3, \quad (\text{C.35})$$

где $\omega_3 = \max\{\omega_1, \omega_2\}$. На компактном интервале частот $[-\omega_3, \omega_3]$ выполнено

$$\sigma_{\min}[G(j\omega) + G^T(-j\omega)] \geq \sigma_2 > 0. \quad (\text{C.36})$$

Следовательно, из (C.30), (C.31) и (C.36) получаем

$$\sigma_{\min}[G(j\omega - \mu) + G^T(-j\omega - \mu)] \geq \sigma_2 - \mu k_0, \quad \forall |\omega| \leq \omega_3. \quad (\text{C.37})$$

Выбор $\mu < \min\{\sigma_1/k_1, \sigma_2/k_0\}$ гарантирует положительную определенность $G(j\omega - \mu) + G^T(-j\omega - \mu)$ для всех $\omega \in R$.

Необходимость: Предположим, что $G(s)$ является строго положительно вещественной. Существует $\mu > 0$, такая что $G(s - \mu)$ положительно вещественная. Следовательно, $G(s)$ является гурвицевой, положительно вещественной и

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in R.$$

Поэтому

$$G(\infty) + G^T(\infty) \geq 0.$$

Пусть $\{A, B, C, D\}$ — минимальное представление для $G(s)$. Из леммы 6.3 следует, что существуют P, L, W и ε , удовлетворяющие (6.14)–(6.16). Пусть $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$. Получаем

$$G(s) + G^T(-s) = D + D^T + C\Phi(s)B + B^T\Phi^T(-s)C^T.$$

Подставим вместо C и $D + D^T$ соответствующие выражения, полученные из (6.15) и (6.16). Тогда

$$\begin{aligned} G(s) + G^T(-s) &= W^T W + (B^T P + W^T L)\Phi(s)B + \\ &\quad + B^T \Phi^T(-s)(PB + L^T W) = \\ &= W^T W + W^T L\Phi(s)B + B^T \Phi^T(-s)L^T W + \\ &\quad + B^T \Phi^T(-s)[-A^T P - PA]\Phi(s)B. \end{aligned}$$

Используя (6.14), получаем

$$\begin{aligned} G(s) + G^T(-s) &= [W^T + B^T \Phi^T(-s)L^T][W + L\Phi(s)B] + \\ &\quad + \varepsilon B^T \Phi^T(-s)P\Phi(s)B. \end{aligned}$$

Из этого равенства видно, что $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ является положительно определенной для всех $\omega \in R$, т. к. если бы она была вырожденной при некоторой частоте ω , существовала бы точка $x \in C^p$, $x \neq 0$, такая что

$$\begin{aligned} (x^*)^T[G(j\omega) + G^T(-j\omega)]x &= 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x^*)^T B^T \Phi^T(-j\omega)P\Phi(j\omega)Bx = 0 \Rightarrow Bx = 0. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} (x^*)^T[G(j\omega) + G^T(-j\omega)]x &= 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x^*)^T[W + L\Phi(-j\omega)B]^T[W + L\Phi(j\omega)B]x = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $Bx = 0$, из предыдущего уравнения следует, что $Wx = 0$. Следовательно,

$$(x^*)^T[G(s) + G^T(-s)]x \equiv 0, \forall s,$$

что противоречит предположению о том, что $\det[G(s) + G^T(-s)]$ не равен тождественно нулю. Далее, если $G(\infty) + G^T(\infty)$ является положительно определенной, доказательство завершено. В противном случае, пусть M — любая матрица полного ранга $p \times (p - q)$, такая что $M^T(D + D^T)M = M^T W^T W M = 0$. Тогда $WM = 0$ и

$$M^T[G(j\omega) + G^T(-j\omega)]M = M^T B^T \Phi^T(-j\omega)(L^T L + \varepsilon P)\Phi(j\omega)BM.$$

Заметим, что BM имеет полный ранг по столбцам. В противном случае существует $x \neq 0$, такая что $BMx = 0$. Положив $y = Mx$, получаем равенство

$$y^T[G(j\omega) + G^T(-j\omega)]y = 0, \forall \omega \in R,$$

которое противоречит положительной определенности $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$. Кроме того,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 M^T[G(j\omega) + G^T(-j\omega)]M = M^T B^T(L^T L + \varepsilon P)BM.$$

Из того факта, что BM имеет полный ранг по столбцам, следует положительная определенность $M^T B^T(L^T L + \varepsilon P)BM$.

C.12. Доказательство леммы 6.2¹⁾

Достаточность: Предположим, что существуют $P = P^T > 0$, L и W , удовлетворяющие (6.11)–(6.13). Используя $V(x) = x^T Px$ в качестве функции Ляпунова для системы $\dot{x} = Ax$, а также учитывая (6.11), можно показать, что начало координат системы $\dot{x} = Ax$ устойчиво. Следовательно, A не имеет собственных значений в области $\text{Re}[s] > 0$. Пусть $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$. Тогда

$$G(s) + G^T(s^*) = D + D^T + C\Phi(s)B + B^T \Phi^T(s^*)C^T.$$

Подставляя вместо C и $D + D^T$ их выражения, полученные с использованием (6.12) и (6.13), получаем

$$\begin{aligned} G(s) + G^T(s^*) &= W^T W + (B^T P + W^T L)\Phi(s)B + B^T \Phi^T(s^*)(PB + L^T W) = \\ &= W^T W + W^T L\Phi(s)B + B^T \Phi^T(s^*)L^T W + \\ &\quad + B^T \Phi^T(s^*)[(s + s^*)P - A^T P - PA]\Phi(s)B. \end{aligned}$$

Используя (6.11), имеем

$$\begin{aligned} G(s) + G^T(s^*) &= [W^T + B^T \Phi^T(s^*)L^T][W + L\Phi(s)B] + \\ &\quad + (s + s^*)B^T \Phi^T(s^*)P\Phi(s)B. \end{aligned} \tag{C.38}$$

Из этого равенства следует, что для всех s в $\text{Re}[s] \geq 0$ выполнено $G(s) + G^T(s^*) \geq 0$. Тогда для любой ω , при которой $j\omega$ не является полюсом какого-либо элемента $G(s)$, матрица $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ является положительно полуопределенной. Осталось показать, что $G(s)$ удовлетворяет третьему условию определения 6.4. Предположим, что $j\omega_0$ — полюс порядка m некоторого элемента $G(s)$. Тогда для любого комплексного вектора x размерности p значения величины $(x^*)^T G(s)x$ на полуокружности произвольно малого радиуса ρ с центром в $j\omega_0$ удовлетворяют

$$(x^*)^T G(s)x \approx (x^*)^T K_0 x \rho^{-m} e^{-jm\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\rho^m \text{Re}[(x^*)^T G(s)x] \approx \text{Re}[(x^*)^T K_0 x] \cos m\theta + \text{Im}[(x^*)^T K_0 x] \sin m\theta.$$

Легко видеть, что при $m > 1$ выражение в правой части может иметь любой знак, но из (C.38) следует, что оно принимает только отрицательные значения. Следовательно, m должно быть ограничено единицей. При $m = 1$, выбирая θ вблизи $-\pi/2$, 0 и $\pi/2$, получаем

¹⁾ Прим. ред. перев. — В настоящее время существует несколько доказательств леммы Якубовича–Калмана (частотной теоремы). Извещные доказательства, основанные на идеях выпуклости и двойственности в экстремальных задачах (S -процедуры) предложены А.Ранцером [Д93] и Т.Ивасаки [Д81]. Подробнее о современных трактовках и обобщениях леммы см. [Д26].

$\text{Im}[(x^*)^T K_0 x] = 0$ и $\text{Re}[(x^*)^T K_0 x] \geq 0$. Следовательно, K_0 — положительно полуопределенная эрмитова матрица.

Необходимость: Сначала приведем доказательство для специального случая, когда матрица A является гурвицевой. После этого доказанный частный случай будет обобщен на ситуацию, когда A может иметь собственные значения на мнимой оси.

Частный случай: Ниже будет использован результат о спектральном разложении, который мы приведем здесь без доказательства.

Лемма C.5. Пусть собственная рациональная матричная передаточная функция $U(s)$ размера $(p \times p)$ является положительно вещественной и гурвицевой. Тогда существует собственная рациональная матричная передаточная функция $V(s)$ размера $r \times p$, такая что

$$U(s) + U^T(-s) = V^T(-s)V(s), \quad (\text{C.39})$$

где r — нормальный ранг матрицы $U(s) + U^T(-s)$, т. е. ранг над полем рациональных функций от s . Кроме того, $\text{rank } V(s) = r$ при $\text{Re}[s] > 0$.

Доказательство: См. [214, теорема 2]. \square

Предположим, что $G(s)$ является положительно вещественной и гурвицевой. Напомним, что $\{A, B, C, D\}$ — минимальная реализация для $G(s)$. Из леммы C.5 следует, что существует матричная передаточная функция $V(s)$ размера $(r \times p)$, такая что выполнено (C.39). Пусть $\{F, G, H, J\}$ — минимальная реализация для $V(s)$. Матрица F является гурвицевой, т. к. $V(s)$ гурвицева. Можно показать, что $\{-F^T, H^T, -G^T, J^T\}$ — минимальная реализация для $V^T(-s)$. Поэтому

$$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} F & 0 \\ H^T H & -F^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G \\ H^T J \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J^T H & -G^T \end{bmatrix}, J^T J \right\}$$

представляет собой реализацию каскадного соединения $V^T(-s)V(s)$. Проверив выполнение условий управляемости и наблюдаемости, а также с учетом свойства $\text{rank } V(s) = r$ при $\text{Re}[s] > 0$, можно показать, что эта реализация минимальна. Ниже приведена проверка свойства управляемости;¹⁾ свойство наблюдаемости проверяется аналогично. Итак, с использованием

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ H(sI - F)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - F & G \\ -H & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - F & G \\ 0 & H(sI - F)^{-1}G + J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - F & G \\ 0 & V(s) \end{bmatrix}$$

¹⁾ При этом используется тот факт, что $V^T(-s)$ не имеет нулей в полюсах функции $V(s)$.

можно показать, что

$$\text{rank } V(s) = r, \forall \text{Re}[s] > 0 \Leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} sI - F & G \\ -H & J \end{bmatrix} = n_F + r, \forall \text{Re}[s] > 0,$$

где n_F — размерность F . Докажем свойство управляемости $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$ от противного. Предположим, что $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$ неуправляема. Тогда существуют комплексное число λ и вектор $w \in C^{n_F+r}$, разделенный на два подвектора n_F и r , такие что

$$(w_1^*)^T F + (w_2^*)^T H^T H = \lambda(w_1^*)^T, \quad (\text{C.40})$$

$$-(w_2^*)^T F^T = \lambda(w_2^*)^T, \quad (\text{C.41})$$

$$(w_1^*)^T G + (w_2^*)^T H^T J = 0. \quad (\text{C.42})$$

Уравнение (C.41) показывает, что $\text{Re}[\lambda] > 0$, т. к. F является гурвицевой; из (C.40) и (C.42) следует, что

$$\begin{bmatrix} (w_1^*)^T & (w_2^*)^T H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I - F & G \\ -H & J \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rank } V(\lambda) < r,$$

что противоречит свойству $\text{rank } V(s) = r$ при $\text{Re}[s] > 0$. Таким образом, пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$ управляема.

Рассмотрим уравнение Ляпунова

$$KF + F^T K = -H^T H.$$

Поскольку пара (F, H) наблюдаема, оно имеет единственное положительно определенное решение K . Этот факт доказывается в упражнении 4.22. Используя преобразование подобия с матрицей

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ K & I \end{bmatrix}$$

получаем альтернативную минимальную реализацию для $V^T(-s)V(s)$:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}_2\} &= \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & -F^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G \\ KG + H^T J \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J^T H + G^T K & -G^T \end{bmatrix}, J^T J \right\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\{-A^T, C^T, -B^T, D^T\}$ — минимальная реализация для $U^T(-s)$. Поэтому

$$\{\mathcal{A}_3, \mathcal{B}_3, \mathcal{C}_3, \mathcal{D}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ C^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C & -B^T \end{bmatrix}, D + D^T \right\}$$

является реализацией параллельного соединения $U(s) + U^T(-s)$. Поскольку собственные значения матрицы A расположены в открытой левой полуплоскости, а собственные значения матрицы $-A^T$ — в открытой правой полуплоскости, можно легко показать, что эта реализация является минимальной. Таким образом, с учетом (C.39) $\{\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}_2\}$ и $\{\mathcal{A}_3, \mathcal{B}_3, \mathcal{C}_3, \mathcal{D}_3\}$ — эквивалентные минимальные реа-

лизации одной и той же передаточной функции. Поэтому соответствующие матрицы имеют одинаковые размеры и существует невырожденная матрица T , такая что¹⁾

$$\mathcal{A}_2 = T\mathcal{A}_3T^{-1}, \mathcal{B}_2 = T\mathcal{B}_3, \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_3T^{-1}, J^TJ = D + D^T.$$

Матрица T должна быть блочно-диагональной. Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим соответствующее разложение

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица T_{12} удовлетворяет уравнению

$$FT_{12} + T_{12}A^T = 0.$$

Умножая слева на $\exp(Ft)$ и справа на $\exp(A^Tt)$, получаем

$$0 = \exp(Ft)[FT_{12} + T_{12}A^T]\exp(A^Tt) = \frac{d}{dt}[\exp(Ft)T_{12}\exp(A^Tt)].$$

Следовательно, $\exp(Ft)T_{12}\exp(A^Tt)$ постоянна для всех $t \geq 0$. В частности, поскольку $\exp(0) = I$, имеем

$$T_{12} = \exp(Ft)T_{12}\exp(A^Tt) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Поэтому $T_{12} = 0$. Аналогично можно показать, что $T_{21} = 0$. Следовательно, матрица T_{11} невырождена и

$$F = T_{11}AT_{11}^{-1}, G = T_{11}B, J^TH + G^TK = CT_{11}^{-1}.$$

Определим

$$P = T_{11}^TKT_{11}, L = HT_{11}, W = J.$$

Можно легко показать, что P , L и W удовлетворяют равенствам

$$PA + A^TP = -L^TL, PB = C^T - L^TW, W^TW = D + D^T.$$

Таким образом, частный случай доказан.

Общий случай: Предположим, что A имеет собственные значения на мнимой оси. Существует невырожденная матрица Q , такая что

$$QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_n \end{bmatrix}, QB = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_n \end{bmatrix}, CQ^{-1} = [C_0 \ C_n],$$

где A_0 такова, что ее собственные значения расположены на мнимой оси и A_n такова, что вещественные части ее собственных значений отрицательные. Передаточная функция $G(s)$ может быть представлена в виде $G(s) = G_0(s) + G_n(s)$, где $G_0(s) = C_0(sI - A_0)^{-1}B_0$ такова, что все ее полюса расположены на мнимой оси и $G_n(s) = C_n(sI - A_n)^{-1}b_n + D$ такова, что все ее полюса расположены в открытой

¹⁾ См. [35, теорема 5-20].

левой полуплоскости. Таким образом, полюса $G_0(s)$ являются простыми и соответствующие матрицы вычетов являются эрмитовыми и положительно полуопределенными. Благодаря наличию этих свойств матрицу Q можно выбрать так, чтобы

$$A_0 + A_0^T = 0, \quad C_0 = B_0^T. \quad (\text{C.43})$$

Для того, чтобы в этом убедиться, заметим, что $G_0(s)$ может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{1}{s}F_0 + \sum_{i=1}^m \frac{1}{s^2 + \omega_i^2}(F_is + H_i) = \\ &= \frac{1}{s}F_0 + \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{s - j\omega_i}R_i + \frac{1}{s + j\omega_i}R_i^* \right], \end{aligned}$$

где F_0 — положительно полуопределенная симметричная матрица и R_i — положительно полуопределенные эрмитовы матрицы. Если для каждого из членов суммы в предыдущем выражении найдется минимальная реализация, для которой выполняется свойство (C.43), то это параллельное соединение будет являться минимальной реализацией для $G_0(s)$, обладающей тем же свойством. В этой связи достаточно рассмотреть только члены $(1/s)F_0$ и $[1/(s^2 + \omega_i^2)](F_is + H_i)$. Если $r_0 = \text{rank } F_0$, то $(1/s)F_0$ имеет минимальную реализацию размерности r_0 вида $\{0, N_0, N_0^T\}$, где $F_0 = N_0^TN_0$. Если $r_i = \text{rank } R_i$, то $[1/(s^2 + \omega_i^2)](F_is + H_i)$ имеет минимальную реализацию размерности $2r_i$, определяемую матрицами

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i I \\ -\omega_i I & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} M_{i1} \\ M_{i2} \end{bmatrix}, \quad C_i = [M_{i1}^T \ M_{i2}^T],$$

где

$$M_{i1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_i + N_i^*), \quad M_{i2} = \frac{j}{\sqrt{2}}(N_i - N_i^*), \quad R_i = (N_i^*)^TN_i.$$

Очевидно что $\{A_i, B_i, C_i\}$ обладает свойством (C.43). Поскольку $G_n(s)$ является положительно вещественной и гурвицевой матрицей, из результатов для рассмотренного ранее частного случая следует, что существуют матрицы $P_n = P_n > 0$, L_n и W , такие что

$$P_nA_n + A_n^TP_n = -L_n^TL_n, \quad P_nB_n = C_n^T - L_n^TW, \quad W^TW = D + D^T.$$

Легко показать, что

$$P = Q^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_n \end{bmatrix} Q, \quad L = [0 \ L_n] Q$$

и W удовлетворяют равенствам (6.11)–(6.13).

C.13. Доказательство леммы 7.1

Начнем с того, что представим бесконечное число уравнений (7.20) во временной области. Рассмотрим пространство S всех полуволновых симметричных периодических сигналов с собственной частотой ω , обладающих конечной энергией на любом конечном интервале. Сигнал $y \in S$ может быть представлен в виде ряда Фурье

$$y(t) = \sum_{k \text{ нечетные}} a_k \exp(jk\omega t), \quad \sum_{k \text{ нечетные}} |a_k|^2 < \infty.$$

Определим норму на S равенством

$$\|y\|^2 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} y^2(t) dt = 2 \sum_{k \text{ нечетные}} |a_k|^2.$$

Пространство S с такой нормой является банаевым. Определим $g_k(t - \tau)$ равенством

$$g_k(t - \tau) = \frac{\omega}{\pi} \{G(jk\omega) \exp[jk\omega(t - \tau)] + G(-jk\omega) \exp[-jk\omega(t - \tau)]\}.$$

При нечетных индексах m и $k > 0$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/\omega} g_k(t - \tau) \exp(jm\omega\tau) d\tau &= \\ &= \begin{cases} G(jk\omega) \exp(jk\omega t), & \text{если } m = k \\ G(-jk\omega) \exp(-jk\omega t), & \text{если } m = -k \\ 0, & \text{если } |m| \neq k \end{cases} \quad (\text{C.44}) \end{aligned}$$

Определим линейное отображение g и нелинейное отображение $g\psi$ на S равенствами

$$gy = \int_0^{\pi/\omega} \sum_{k \text{ нечетные}, k > 0} g_k(t - \tau) y(\tau) d\tau,$$

$$g\psi y = \int_0^{\pi/\omega} \sum_{k \text{ нечетные}, k > 0} g_k(t - \tau) \psi(y(\tau)) d\tau,$$

где

$$y(t) = \sum_{k \text{ нечетные}} a_k \exp(jk\omega t) \quad \text{и} \quad \psi(y(t)) = \sum_{k \text{ нечетные}} c_k \exp(jk\omega t).$$

Используя (C.44), можно показать, что

$$gy = \sum_{k \text{ нечетные}} G(jk\omega) a_k \exp(jk\omega t),$$

$$g\psi y = \sum_{k \text{ нечетные}} G(jk\omega) c_k \exp(jk\omega t).$$

С учетом этих определений можно сформулировать условие существования полуволнового симметричного периодического сигнала:

$$y = -g\psi y. \quad (\text{C.45})$$

Равенство (C.45) эквивалентно (7.20). Для того, чтобы отделить влияние высших гармоник от влияния первой гармоники, определим отображение P_1

$$P_1 y = y_1 = a_1 \exp(j\omega t) + \bar{a}_1 \exp(-j\omega t) = 2\operatorname{Re}[a_1 \exp(j\omega t)]$$

и отображение P_h

$$P_h y = y_h = y - y_1 = \sum_{k \text{ нечетные}; |k| \neq 1} a_k \exp(jk\omega t).$$

Не уменьшая общности, можно положить $a_1 = a/2j$ и, следовательно, $y_1(t) = a \sin \omega t$. Решение уравнения (C.45) эквивалентно решению системы (C.46) и (C.47)

$$y_h = -P_h g\psi(y_1 + y_h), \quad (\text{C.46})$$

$$y_1 = -P_1 g\psi(y_1 + y_h). \quad (\text{C.47})$$

Анализируя значения правой части (C.47), можно заметить, что это уравнение эквивалентно (7.35). Член ошибки $\delta\Psi$, определяемый в соответствии с (7.36), удовлетворяет

$$P_1 g\psi y_1 - P_1 g\psi(y_1 + y_h) = 2\operatorname{Re}[G(j\omega) a_1 \delta\Psi \exp(j\omega t)]. \quad (\text{C.48})$$

Таким образом, для получения оценки $\delta\Psi$ необходимо найти оценку для y_h , что будет сделано с использованием теоремы о сжимающем отображении (т. е. не находя решение (C.46) в явном виде). Прибавив $[P_h g(\beta + \alpha)/2] y_h$ к обеим частям равенства (C.46), перепишем его в следующем виде:

$$\left(I + P_h g \frac{\beta + \alpha}{2} \right) y_h = -P_h g \left[\psi(y_1 + y_h) - \frac{\beta + \alpha}{2} y_h \right]. \quad (\text{C.49})$$

Рассмотрим линейное отображение $K = I + P_h g(\beta + \alpha)/2$ в левой части (C.49). Это отображение S в S . Для любого $z \in S$, определенного равенством

$$z(t) = \sum_{k \text{ нечетные}} b_k \exp(jk\omega t),$$

рассмотрим линейное уравнение $Kx = z$ и найдем его решение x в S . Представив x в виде

$$x(t) = \sum_{k \text{ нечетные}} d_k \exp(jk\omega t),$$

получаем

$$\left(I + P_h g \frac{\beta + \alpha}{2} \right) x = x_1 + \sum_{k \text{ нечетные}, |k| \neq 1} \left[1 + \frac{\beta + \alpha}{2} G(jk\omega) \right] d_k \exp(jk\omega t).$$

Следовательно, линейное уравнение $Kx = z$ имеет единственное решение, если

$$\inf_{k \text{ нечетные}, |k| \neq 1} \left| 1 + \frac{\beta + \alpha}{2} G(jk\omega) \right| \neq 0. \quad (\text{C.50})$$

Другими словами, условие (C.50) гарантирует, что линейное отображение K имеет обратное. Это условие выполнено, если $\omega \in \Omega$, т. к. левая часть (C.50) может обращаться в нуль, только если $\rho(\omega) = 0$. Обозначим обратное отображение для K через K^{-1} и с учетом $P_h g y_1 = 0$ перепишем (C.49) в виде

$$y_h = -K^{-1} P_h g [\psi(y_1 + y_h) - \frac{\beta + \alpha}{2} (y_1 + y_h)] \stackrel{\text{def}}{=} T y_h.$$

Мы намерены применить теорему о сжимающем отображении к уравнению $y_h = T y_h$. Очевидно T отображает S в S . Необходимо проверить, что T представляет собой сжатие на S . Для этого рассмотрим

$$T y^{(2)} - T y^{(1)} = K^{-1} P_h g [\psi_T(y_1 + y^{(2)}) - \psi_T(y_1 + y^{(1)})],$$

где

$$\psi_T(y) = \psi(y) - \frac{\beta + \alpha}{2} y.$$

Пусть

$$\psi_T(y_1 + y^{(2)}) - \psi_T(y_1 + y^{(1)}) = \sum_{k \text{ нечетные}, |k| \neq 1} e_k \exp(jk\omega t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|T y^{(2)} - T y^{(1)}\|^2 &= 2 \sum_{k \text{ нечетные}, |k| \neq 1} \left| \frac{G(jk\omega)}{1 + [(\beta + \alpha)/2]G(jk\omega)} \right|^2 |e_k|^2 \leqslant \\ &\leqslant \left\{ \sup_{k \text{ нечетные}, |k| \neq 1} \left| \frac{G(jk\omega)}{1 + [(\beta + \alpha)/2]G(jk\omega)} \right| \right\}^2 \times \\ &\times \left\| \psi_T(y_1 + y^{(2)}) - \psi_T(y_1 + y^{(1)}) \right\|^2. \end{aligned}$$

Вследствие ограничения на угол наклона графика ψ , имеем

$$\left| \psi_T(y_1 + y^{(2)}) - \psi_T(y_1 + y^{(1)}) \right| \leqslant \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \left\| y^{(2)} - y^{(1)} \right\|.$$

Более того,

$$\sup_{k \text{ нечетные}, |k| \neq 1} \left| \frac{G(jk\omega)}{1 + [(\beta + \alpha)/2]G(jk\omega)} \right| \leqslant \frac{1}{\rho(\omega)},$$

где $\rho(\omega)$ определена в (7.38). Следовательно,

$$\left\| T y^{(2)} - T y^{(1)} \right\| \leqslant \frac{1}{\rho(\omega)} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \left\| y^{(2)} - y^{(1)} \right\|.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\rho(\omega)} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) < 1, \quad \forall \omega \in \Omega,$$

можно заключить, что при $\omega \in \Omega$ отображение T является сжимающим. Тогда из теоремы о сжимающем отображении следует, что уравнение $y_h = T y_h$ имеет единственное решение. С учетом того, что $T(-y_1) = 0$, перепишем уравнение $y_h = T y_h$ в виде

$$y_h = T y_h - T(-y_1).$$

Тогда

$$\|y_h\| \leqslant \frac{1}{\rho(\omega)} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \|y_h\| + \frac{1}{\rho(\omega)} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) a.$$

Поэтому

$$\|y_h\| \leqslant \frac{a[(\beta - \alpha)/2]/\rho(\omega)}{1 - [(\beta - \alpha)/2]/\rho(\omega)} = \frac{a[(\beta - \alpha)/2]}{\rho(\omega) - [(\beta - \alpha)/2]} = \frac{2\sigma(\omega)a}{\beta - \alpha}$$

и, следовательно, выполнено (7.40). Для доказательства выполнения (7.41), прибавим к обеим частям (C.47) $P_1 g \psi y_1$:

$$y_1 + P_1 g \psi y_1 = P_1 g [\psi y_1 - \psi(y_1 + y_h)]. \quad (\text{C.51})$$

Вычисляя нормы обеих частей (C.51), получаем неравенство

$$|1 + G(j\omega)\Psi(a)|a \leqslant |G(j\omega)| \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \|y_h\| \leqslant |G(j\omega)|\sigma(\omega)a,$$

с использованием которого вычисляем оценку

$$|\delta\Psi| = \left| \frac{1}{G(j\omega)} + \Psi(a) \right| = \left| \frac{1 + G(j\omega)\Psi(a)}{G(j\omega)} \right| \leqslant \sigma(\omega),$$

которая завершает доказательство леммы.

C.14. Доказательство теоремы 7.4

Если в доказательстве леммы 7.1 положить $P_1 = 0$ и $P_h = I$, то отображение T остается сжимающим при $\omega \in \bar{\Omega}$. В этом случае $y = y_h = 0$ — единственное решение уравнения $y_h = Ty_h$. Это доказывает, что не существует полуволновых симметричных периодических решений с собственной частотой $\omega \in \bar{\Omega}$. Из необходимости выполнения условия

$$\left| \frac{1}{G(j\omega)} + \Psi(a) \right| \leq \sigma(\omega)$$

следует, что полуволновые симметричные периодические решения с собственной частотой $\omega \in \Omega'$ не существуют, если соответствующая окружность ошибки не пересекает геометрическое место точек $-\Psi(a)$. Таким образом, нам осталось рассмотреть третий пункт теоремы, в котором утверждается, что для любого полного пересечения, определяющего Γ , существуют полуволновые симметричные периодические решения с собственной частотой $(\omega, a) \in \bar{\Gamma}$. При доказательстве этого утверждения используется следующий результат из теории степеней отображений.

Предположим, что задана непрерывно дифференцируема функция $\phi : D \rightarrow R^n$, где $D \subset R^n$ — открытое и ограниченное множество. Пусть $p \in R^n$ — некоторая точка, такая что $\phi(x) = p$ для некоторой x внутри D , но $\phi(x) \neq p$ на границе ∂D множества D . Мы хотим показать, что уравнение $\phi(x) = p$ имеет решение в D , где $\tilde{\phi}(x)$ — возмущение $\phi(x)$. Это можно сделать с использованием теории степеней отображений, согласно которой при определенных условиях ни одно из подобных решений не покидает D при указанном возмущении $\tilde{\phi}$ функции ϕ , т. е. ни одно из решений не достигает границы ∂D . Предположим, что для каждого из решений $x_i \in D$ уравнения $\phi(x) = p$, матрица Якоби $[\partial\phi/\partial x]$ невырождена. Определим степень отображения ϕ в p относительно множества D равенством

$$d(\phi, D, p) = \sum_{x_i=\phi^{-1}(p)} \text{sign} \left\{ \det \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_i) \right] \right\}.$$

Заметим, что если $\phi(x) \neq p \forall x \in D$, то степень равна нулю. Степень отображения обладает следующими двумя основными свойствами:¹⁾

- Если $d(\phi, D, p) \neq 0$, то $\phi(x) = p$ имеет по крайней мере одно решение в D .
- Если $\eta : \bar{D} \times [0, 1] \rightarrow R^n$ является непрерывной и $\eta(x, \mu) \neq 0$ для всех $x \in \partial D$ и всех $\mu \in [0, 1]$, то $d[\eta(\cdot, \mu), D, p]$ равна для всех $\mu \in [0, 1]$.

¹⁾ Доказательство этих свойств приведено в работе [26].

Второе свойство известно как свойство гомотопической инвариантности степени d .

Вернемся к доказательству теоремы и определим на Γ

$$\phi(\omega, a) = \Psi(a) + \frac{1}{G(j\omega)};$$

Рассматривая вещественную и мнимую часть комплексной переменной ϕ в качестве элементов вектора размерности два, ϕ можно интерпретировать как отображение из Γ в R^2 . По предположению, уравнение $\phi(w, a) = 0$ имеет единственное решение (ω_s, a_s) в Γ . Якобиан ϕ по (ω, a) в (ω_s, a_s) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{da}\Psi(a) \Big|_{a=a_s} & -\Psi^2(a_s) \left\{ \frac{d}{d\omega}\text{Re}[G(j\omega)] \right\}_{\omega=\omega_s} \\ 0 & -\Psi^2(a_s) \left\{ \frac{d}{d\omega}\text{Im}[G(j\omega)] \right\}_{\omega=\omega_s} \end{bmatrix}.$$

Этот якобиан невырожден при условии, что

$$\frac{d}{da}\Psi(a) \Big|_{a=a_s} \neq 0; \quad \frac{d}{d\omega}\text{Im}[G(j\omega)] \Big|_{\omega=\omega_s} \neq 0.$$

Таким образом,

$$d(\phi, \Gamma, 0) = \pm 1.$$

Необходимо показать, что уравнение

$$\tilde{\phi}(\omega, a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{G(j\omega)} + \Psi(a) - \delta\Psi(\omega, a) = 0 \quad (\text{C.52})$$

имеет единственное решение в $\bar{\Gamma}$. Для этого достаточно показать, что

$$d(\tilde{\phi}, \Gamma, 0) \neq 0.$$

Определим при $\mu \in [0, 1]$

$$\eta(\omega, a, \mu) = (1 - \mu)\phi(\omega, a) + \mu\tilde{\phi}(\omega, a) = \phi(\omega, a) - \mu\delta\Psi(\omega, a),$$

т. е. $\eta = \phi$ при $\mu = 0$ и $\eta = \tilde{\phi}$ при $\mu = 1$. Можно показать, что

$$\left| \Psi(a) + \frac{1}{G(j\omega)} \right| \geq \sigma(\omega), \quad \forall (\omega, a) \in \partial\Gamma. \quad (\text{C.53})$$

Например, если в качестве границы выбрать $a = a_1$, то с использованием рисунка 7.20 можно заключить, что левая часть неравенства (C.53) является длинной отрезка, соединяющего соответствующую условию $a = a_1$ точку в геометрическом месте точек для $-\Psi(a)$ с точкой на годографе $1/G(j\omega)$ при $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$. По построению, первая точка расположена вне (или на) окружности ошибки с центром в последней точке. Поэтому длина отрезка, соединяющего эти две точки, должна

быть больше радиуса (или равна радиусу) окружности ошибки, т. е. $\sigma(\omega)$. Используя (С.53), с учетом (7.41) получаем

$$\begin{aligned} |\eta(\omega, a, \mu)| &\geq |\phi(\omega, a)| - \mu|\delta\Psi(\omega, a)| = \\ &= \left| \Psi(a) + \frac{1}{G(j\omega)} \right| - \mu|\delta\Psi(\omega, a)| \geq \sigma(\omega) - \mu\sigma(\omega). \end{aligned}$$

Таким образом, при всех $0 \leq \mu < 1$ правая часть последнего неравенства положительна и, следовательно, $\eta(\omega, a, \mu) \neq 0$ на $\partial\Gamma$ при $\mu < 1$. Не умоляя общности можно предположить, что $\eta(\omega, a, 1) \neq 0$ на $\partial\Gamma$, т. к. равенство в этом случае означает, что мы нашли искомое решение. Таким образом, из свойства гомотопической инвариантности для d следует, что

$$d(\tilde{\phi}, \Gamma, 0) = d(\phi, \Gamma, 0) \neq 0.$$

Поэтому (С.52) имеет решение в $\bar{\Gamma}$. Доказательство теоремы завершено.

C.15. Доказательство теорем 8.1 и 8.3

Ключевым приемом, используемым при доказательстве этих двух теорем является применение теоремы о сжимающем отображении, которое выполняется практически аналогично в каждом из соответствующих доказательств. Во избежание повторений мы выделим ту часть доказательств, которая касается использования теоремы о сжимающем отображении, в отдельную лемму. Формулировка этой леммы сходна с формулировкой теоремы 8.1, но имеет одно дополнительное утверждение, которое потребуется при доказательстве теоремы 8.3.

Лемма C.6. Рассмотрим систему

$$\dot{y} = Ay + f(y, z), \quad (C.54)$$

$$\dot{z} = Bz + g(y, z), \quad (C.55)$$

где $y \in R^k$, $z \in R^m$, собственные значения матрицы A имеют нулевые вещественные части, собственные значения матрицы B имеют отрицательные вещественные части и f , g — дважды непрерывно дифференцируемые функции, которые вместе со своими первыми производными обращаются в нуль в начале координат. Тогда существуют $\delta > 0$ и непрерывно дифференцируемая функция $\eta(y)$, определенная для всех $\|y\| < \delta$, такие что $z = \eta(y)$ является центральным многообразием для (С.54)–(С.55). Более того, если $\|g(y, 0)\| \leq k\|y\|^p$ для всех $\|y\| \leq r$, где $p > 1$ и $r > 0$, то существует $c > 0$, такая что $\|\eta(y)\| \leq c\|y\|^p$.

Доказательство: Существование центрального многообразия может быть легко доказано, если решения на этом многообразии определены для всех $t \in R$. В общем случае центральное многообразие для (С.54)–(С.55) может быть определено лишь локально, т. е. решение

на этом многообразии может быть определено лишь на интервале $[0, t_1] \subset R$. Поэтому при доказательстве используется следующая идея. Мы рассмотрим некоторое модифицированное уравнение, идентичное (С.54)–(С.55) в окрестности начала координат, но имеющее некоторые полезные глобальные свойства, гарантирующие то, что решение на центральном многообразии будет определено для всех t . Доказательство существования центрального многообразия будет проведено для модифицированного уравнения. Поскольку оба уравнения совпадают в окрестности начала координат, представленное доказательство существования центрального многообразия будет верно для первоначального уравнения локально.

Пусть $\psi : R^k \rightarrow [0, 1]$ — гладкая (непрерывно дифференцируемая бесконечное число раз) функция,¹⁾ такая что $\psi(y) = 1$ при $\|y\| \leq 1$ и $\psi(y) = 0$ при $\|y\| \geq 2$. При $\varepsilon > 0$ определим F и G :

$$F(y, z) = f\left(y\psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), z\right); \quad G(y, z) = g\left(y\psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), z\right).$$

Функции F и G являются дважды непрерывно дифференцируемыми; вместе со своими первыми частными производными они являются глобально ограниченными по y , т. е. при $\|z\| \leq k_1$ эти функции ограничены для всех $y \in R^k$. Рассмотрим модифицированную систему

$$\dot{y} = Ay + F(y, z), \quad (C.56)$$

$$\dot{z} = Bz + G(y, z). \quad (C.57)$$

Докажем существование центрального многообразия для (С.56)–(С.57). Пусть X — множество всех глобально ограниченных, непрерывных функций $\eta : R^k \rightarrow R^m$. Это множество является банаховым пространством, если ввести норму $\sup_{y \in R^k} \|\eta(y)\|$. Пусть $S \subset X$ — множество всех непрерывно дифференцированных функций $\eta : R^k \rightarrow R^m$, таких что для всех $x, y \in R^k$

$$\eta(0) = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y}(0) = 0,$$

$$\|\eta(y)\| \leq c_1, \quad \left\| \frac{\partial \eta}{\partial y}(y) \right\| \leq c_2, \quad \left\| \frac{\partial \eta}{\partial y}(y) - \frac{\partial \eta}{\partial y}(x) \right\| \leq c_3 \|y - x\|,$$

¹⁾ В скалярном случае ($k = 1$) примером такой функции является следующая: $\psi(y) = 1$ при $|y| \leq 1$, $\psi(y) = 0$ при $|y| \geq 2$ и

$$\psi(y) = 1 - \frac{1}{b} \int_1^{|y|} \exp\left(\frac{-1}{x-1}\right) \exp\left(\frac{-1}{2-x}\right) dx \text{ при } 1 < |y| < 2,$$

где

$$b = \int_1^2 \exp\left(\frac{-1}{x-1}\right) \exp\left(\frac{-1}{2-x}\right) dx.$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и $c_3 > 0$. Для доказательства замкнутости S рассмотрим некоторую сходящуюся последовательность $\eta_i(y)$ в S и покажем, что $\eta(y) = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta_i(y)$ принадлежит S . При доказательстве этого утверждения необходимо показать, что $\eta(y)$ является непрерывно дифференцируемой. После этого утверждение леммы может быть доказано от противного. Поскольку свойство непрерывной дифференцируемости может быть доказано покомпонентно, сделаем это для скалярной η . Пусть v — произвольный вектор в R^k , $\|v\| = 1$, и μ — некоторая положительная константа. Из теоремы о среднем значении следует, что

$$\begin{aligned}\eta_i(y + \mu v) - \eta_i(y) &= \frac{\partial \eta_i}{\partial y}(y + \alpha_i \mu v) \mu v, \\ \eta_j(y + \mu v) - \eta_j(y) &= \frac{\partial \eta_j}{\partial y}(y + \alpha_j \mu v) \mu v,\end{aligned}$$

где $0 < \alpha_i < 1$ и $0 < \alpha_j < 1$. Прибавляя и вычитая соответствующие члены, получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial \eta_i}{\partial y}(y) - \frac{\partial \eta_j}{\partial y}(y) \right] \mu v &= \left[\frac{\partial \eta_i}{\partial y}(y) - \frac{\partial \eta_i}{\partial y}(y + \alpha_i \mu v) \right] \mu v - \\ &\quad - \left[\frac{\partial \eta_j}{\partial y}(y) - \frac{\partial \eta_j}{\partial y}(y + \alpha_j \mu v) \right] \mu v + \\ &\quad + [\eta_i(y + \mu v) - \eta_j(y + \mu v)] - [\eta_i(y) - \eta_j(y)].\end{aligned}$$

При заданной $\varepsilon > 0$ найдем достаточно большие целые числа i_0 и j_0 , такие что

$$\sup_{y \in R^k} \|\eta_i(y) - \eta_j(y)\| < \frac{\varepsilon^2}{16c_3}$$

для всех $i > i_0$ и $j > j_0$. Это возможно, т. к. $\{\eta_i\}$ является сходящейся последовательностью. Используя предыдущее неравенство и

$$\left\| \left[\frac{\partial \eta_\ell}{\partial y}(y) - \frac{\partial \eta_\ell}{\partial y}(y + \alpha_\ell \mu v) \right] \mu v \right\| \leq c_3 \alpha_\ell \mu^2 \|v\|^2 < c_3 \mu^2 \text{ при } \ell = i \text{ или } j,$$

можно показать, что

$$\left\| \left[\frac{\partial \eta_i}{\partial y}(y) - \frac{\partial \eta_j}{\partial y}(y) \right] v \right\| < 2c_3 \mu + \frac{\varepsilon^2}{8c_3 \mu}.$$

Полагая $\mu = \varepsilon/(4c_3)$, получаем

$$\left\| \frac{\partial \eta_i}{\partial y}(y) - \frac{\partial \eta_j}{\partial y}(y) \right\| < \varepsilon$$

Таким образом, $\partial \eta_i / \partial y$ — последовательность Коши в банаховом пространстве глобально ограниченных, непрерывных функций, действую-

щих из R^k в R^k и она сходится к некоторой непрерывной функции $J(y)$. Кроме того, $\eta(y)$ является дифференцируемой и $\partial \eta / \partial y = J(y)$.¹⁾

Для заданной $\eta \in S$ рассмотрим систему

$$\dot{y} = Ay + F(y, \eta(y)), \quad (C.58)$$

$$\dot{z} = Bz + G(y, \eta(y)). \quad (C.59)$$

Вследствие ограниченности $\eta(y)$ и $[\partial \eta / \partial y]$, правая часть (C.58) является глобально липшицевой по y функцией. Поэтому для любого начального состояния $y_0 \in R^k$, уравнение (C.58) имеет единственное решение, определенное для всех t . Обозначим это решение через $y(t) = \pi(t; y_0, \eta)$, где $\pi(0; y_0, \eta) = y_0$; это решение параметризовано фиксированной функцией η . Уравнение (C.59) является линейным по z и его решение имеет вид

$$\begin{aligned}z(t) &= \exp[B(t - \tau)]z(\tau) + \\ &\quad + \int_{\tau}^t \exp[B(t - \lambda)]G(\pi(\lambda - \tau; y(\tau), \eta), \eta(\pi(\lambda - \tau; y(\tau), \eta)))d\lambda.\end{aligned}$$

Умножим обе части этого равенства на $\exp[-B(t - \tau)]$, перенесем интегральный член в другую часть и сделаем замену переменной интегрирования λ на $s = \lambda - \tau$. В результате получаем

$$\begin{aligned}z(\tau) &= \exp[-B(t - \tau)]z(t) + \\ &\quad + \int_{t-\tau}^0 \exp(-Bs)G(\pi(s; y(\tau), \eta), \eta(\pi(s; y(\tau), \eta)))ds.\end{aligned}$$

Это выражение справедливо для любого $t \in R$. В пределе $t \rightarrow -\infty$ интегральный член имеет вид

$$\int_{-\infty}^0 \exp(-Bs)G(\pi(s; y(\tau), \eta), \eta(\pi(s; y(\tau), \eta)))ds \quad (C.60)$$

и корректно определен, поскольку η ограничена, G глобально ограничена по π и B гурвицева. Перепишем выражение (C.60), заменив $y(\tau)$ на y и обозначив его через $(P\eta)(y)$:

$$(P\eta)(y) = \int_{-\infty}^0 \exp(-Bs)G(\pi(s; y, \eta), \eta(\pi(s; y, \eta)))ds. \quad (C.61)$$

¹⁾ См. [111, теорема 9.1].

С использованием этого определяющего равенства можно записать

$$\begin{aligned} \exp[B(t - \tau)][z(\tau) - (P\eta)(y(\tau))] &= \\ &= z(t) - \int_{-\infty}^{t-\tau} \exp[-B(s - t + \tau)]G(\pi(s; y(\tau), \eta), \eta(\pi(s; y(\tau), \eta)))ds \end{aligned}$$

Подставляя $\xi = s - t + \tau$ в интеграл, с учетом $\pi(\xi + t - \tau; y(\tau), \eta) = \pi(\xi; y(t), \eta)$, получаем

$$\exp[B(t - \tau)][z(\tau) - (P\eta)(y(\tau))] = z(t) - (P\eta)(y(t)).$$

Из этого равенства следует, что если $z(\tau) = (P\eta)(y(\tau))$, то $z(t) = (P\eta)(y(t))$ для всех $t \in R$. Следовательно, $z = (P\eta)(y)$ определяет инвариантное многообразие для (C.58)–(C.59), параметризованное η . Рассмотрим (C.56)–(C.57). Если $\eta(y)$ — неподвижная точка отображения $(P\eta)(y)$, т. е.

$$\eta(y) = (P\eta)(y),$$

то $z = \eta(y)$ — центральное многообразие для (C.56)–(C.57). В этом можно убедится следующим образом. Во-первых, с использованием свойств $\eta \in S$ и того факта, что $y = 0$ является точкой равновесия (C.58), с учетом (C.61) можно показать, что

$$(P\eta)(0) = 0; \quad \frac{\partial(P\eta)}{\partial y}(0) = 0.$$

Во-вторых, поскольку $z = (P\eta)(y)$ — инвариантное многообразие для (C.58)–(C.59), $(P\eta)(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial y}(P\eta)(y)[Ay + F(y, (P\eta)(y))] = B(P\eta)(y) + G(y, (P\eta)(y)).$$

Если $\eta(y) = (P\eta)(y)$, то $\eta(y)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению в частных производных и, следовательно, это равенство определяет центральное многообразие для (C.56)–(C.57). Осталось показать, что отображение $(P\eta)$ имеет неподвижную точку. Это будет сделано с использованием теоремы о сжимающем отображении. Необходимо показать, что отображение $P\eta$ отображает S в себя и является сжимающим отображением на S . Из определений F и G следует, что существует неотрицательная непрерывная функция $\rho(\varepsilon)$, $\rho(0) = 0$, такая что

$$\|F(y, z)\| \leq \varepsilon \rho(\varepsilon); \quad \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(y, z) \right\| \leq \rho(\varepsilon); \quad \left\| \frac{\partial F}{\partial z}(y, z) \right\| \leq \rho(\varepsilon), \quad (\text{C.62})$$

$$\|G(y, z)\| \leq \varepsilon \rho(\varepsilon); \quad \left\| \frac{\partial G}{\partial y}(y, z) \right\| \leq \rho(\varepsilon); \quad \left\| \frac{\partial G}{\partial z}(y, z) \right\| \leq \rho(\varepsilon) \quad (\text{C.63})$$

для всех $y \in R^k$ и $z \in R^m$, $\|z\| < \varepsilon$. Поскольку собственные значения матрицы B имеют отрицательные вещественные части, существуют положительные константы β и C , такие что при $s \leq 0$,

$$\|\exp(-Bs)\| \leq C \exp(\beta s). \quad (\text{C.64})$$

Поскольку собственные значения матрицы A имеют нулевые вещественные части, для любой $\alpha > 0$, существует положительная константа $M(\alpha)$ (которая может стремится к ∞ при $\alpha \rightarrow 0$), такая что при $s \in R$

$$\|\exp(As)\| \leq M(\alpha) \exp(\alpha|s|). \quad (\text{C.65})$$

Для доказательства того факта, что $P\eta$ отображает S в себя, необходимо показать, что существуют положительные константы c_1 , c_2 и c_3 такие, что если $\eta(y)$ является непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет

$$\|\eta(y)\| \leq c_1; \quad \left\| \frac{\partial \eta}{\partial y}(y) \right\| \leq c_2; \quad \left\| \frac{\partial \eta}{\partial y}(y) - \frac{\partial \eta}{\partial y}(x) \right\| \leq c_3 \|y - x\|$$

для всех $x, y \in R^k$, то $(P\eta)(y)$ является непрерывно дифференцируемым и удовлетворяет тем же неравенствам. Непрерывная дифференцируемость $(P\eta)(y)$ непосредственно следует из (C.61). Для проверки выполнения неравенств используем оценки для F и G , определяемые неравенствами (C.62) и (C.63). В результате получаем, что c_1 должна быть выбрана так, чтобы было выполнено $0.5\varepsilon < c_1 < \varepsilon$. Используя (C.64) и оценки для G и η , из (C.61) получаем

$$\|(P\eta)(y)\| \leq \int_{-\infty}^0 \|\exp(-Bs)\| \|G\| ds \leq \int_{-\infty}^0 C \exp(\beta s) \varepsilon \rho(\varepsilon) ds = \frac{C\varepsilon\rho(\varepsilon)}{\beta}.$$

Верхняя граница для $(P\eta)(y)$ будет меньше c_1 , если выбрать ε достаточно малой. Пусть $\pi_y(t; y, \eta)$ — матрица Якоби для $\pi(t; y, \eta)$ по y . Она удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\dot{\pi}_y = \left[A + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] \pi_y, \quad \pi_y(0; y, \eta) = I,$$

где

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) (\pi(t; y, \eta), \eta(\pi(t; y, \eta))).$$

Выражения для $\partial F / \partial z$ и $\partial \eta / \partial y$ записываются аналогично. Следовательно, при $t \leq 0$

$$\begin{aligned} \pi_y(t; y, \eta) &= \exp(At) - \\ &- \int_t^0 \exp[A(t-s)] \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] \pi_y(s; y, \eta) ds. \end{aligned}$$

Используя (C.65) и оценки для F и η , получаем

$$\begin{aligned} \|\pi_y(t; y, \eta)\| &\leq M(\alpha) \exp(-\alpha t) + \\ &+ \int_t^0 M(\alpha) \exp[\alpha(s-t)](1+c_2)\rho(\varepsilon)\|\pi_y(s; y, \eta)\|ds. \end{aligned}$$

Умножая обе части на $\exp(\alpha t)$ и используя неравенство Гронуолла–Беллмана, получаем¹⁾

$$\|\pi_y(t; y, \eta)\| \leq M(\alpha) \exp(-\gamma t),$$

где $\gamma = \alpha + M(\alpha)(1+c_2)\rho(\varepsilon)$. Используя эту оценку, а также (C.64) и оценки для G и η , вычислим оценку для $[\partial(P\eta)(y)/\partial y]$. Из (C.61) получаем

$$\frac{\partial(P\eta)(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^0 \exp(-Bs) \left[\left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] \pi_y(s; y, \eta) ds.$$

Тогда неравенство

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial(P\eta)(y)}{\partial y} \right\| &\leq \int_{-\infty}^0 C \exp(\beta s)(1+c_2)\rho(\varepsilon)M(\alpha) \exp(-\gamma s) ds = \\ &= \frac{C(1+c_2)\rho(\varepsilon)M(\alpha)}{\beta - \gamma} \end{aligned}$$

справедливо при условии, что ε и α являются настолько малыми, что выполнено $\beta > \gamma$. При достаточно малой ε эта оценка матрицы Якоби для $(P\eta)(y)$ может быть сделана меньше c_2 . Для доказательства липшицевости якобиана $[\partial(P\eta)(y)/\partial y]$ с константой Липшица c_3 заметим, что матрицы Якоби $[\partial F/\partial y]$, $[\partial F/\partial z]$, $[\partial G/\partial y]$ и $[\partial G/\partial z]$ удовлетворяют неравенствам Липшица

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial y}(y, z) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, w) \right\| \leq L[\|y-x\| + \|z-w\|]$$

¹⁾ Поскольку нижним пределом в интеграле является t , мы в действительности используем другую версию неравенства Гронуолла–Беллмана: если

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_t^a \mu(s)y(s)ds,$$

то

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_t^a \lambda(s)\mu(s) \exp \left[\int_t^s \mu(\tau)d\tau \right] ds$$

для всех $x, y \in R^k$ и $z, w \in B_\varepsilon$. При $\varepsilon < \varepsilon^*$ для некоторой $\varepsilon^* > 0$, можно выбрать константу Липшица L независимой от ε . Более того, одну и ту же константу L можно использовать для всех четырех матриц Якоби. Используя эти неравенства, а также неравенство Гронуолла–Беллмана, можно повторить представленные ранее рассуждения и показать, что

$$\|\pi_y(t; y, \eta) - \pi_y(t; x, \eta)\| \leq L_1 \exp(-2\gamma t) \|y - x\|$$

для всех $x, y \in R^k$ и $t \leq 0$, где $L_1 = [(1+c_2)^2 L + \rho(\varepsilon)c_3]M^3(\alpha)/\gamma$. Используя последнее неравенство, можно показать, что при $\beta - 2\gamma > 0$ выполнено

$$\left\| \frac{\partial(P\eta)}{\partial y}(y) - \frac{\partial(P\eta)}{\partial y}(x) \right\| \leq \frac{CL_1(2\gamma - \alpha)}{M(\beta - 2\gamma)} \|y - x\|.$$

Выберем α и ε настолько малыми, что выполнено $\beta - 2\gamma > \beta/2$. Тогда

$$\left\| \frac{\partial(P\eta)}{\partial y}(y) - \frac{\partial(P\eta)}{\partial y}(x) \right\| \leq [L_2 + \rho(\varepsilon)L_3c_3]\|y - x\|,$$

где L_2 и L_3 не зависят от ε и c_3 . При $c_3 > L_2$ можно выбрать ε настолько малой, что $L_2 + \rho(\varepsilon)L_3c_3 < c_3$. Таким образом, мы показали, что при достаточно малой c_1 и достаточно большой c_3 отображение $P\eta$ действует из S в S . Для доказательства того факта, что это отображение является сжимающим на S , рассмотрим две функции $\eta_1(y)$ и $\eta_2(y)$, определенные на S . Пусть $\pi_1(t)$ и $\pi_2(t)$ – соответствующие решения (C.58), начинающиеся в y , т. е.

$$\pi_i(t) = \pi(t; y, \eta_i), \quad i = 1, 2.$$

Используя оценки (C.62) и (C.63), можно показать, что

$$\|F(\pi_2, \eta_2(\pi_2)) - F(\pi_1, \eta_1(\pi_1))\| \leq (1+c_2)\rho(\varepsilon)\|\pi_2 - \pi_1\| + \rho(\varepsilon) \sup_{y \in R^k} \|\eta_2 - \eta_1\|,$$

$$\|G(\pi_2, \eta_2(\pi_2)) - G(\pi_1, \eta_1(\pi_1))\| \leq (1+c_2)\rho(\varepsilon)\|\pi_2 - \pi_1\| + \rho(\varepsilon) \sup_{y \in R^k} \|\eta_2 - \eta_1\|.$$

Из (C.58) видно, что $\|\pi_2 - \pi_1\|$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} \|\pi_2(t) - \pi_1(t)\| &\leq \int_t^0 M(\alpha) \exp[\alpha(s-t)][\rho(\varepsilon) \sup_{y \in R^k} \|\eta_2 - \eta_1\| + \\ &+ (1+c_2)\rho(\varepsilon)\|\pi_2(s) - \pi_1(s)\|] ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} M(\alpha) \rho(\varepsilon) \sup_{y \in R^k} \|\eta_2 - \eta_1\| \exp(-\alpha t) + \\ &+ \int_t^0 (\gamma - \alpha) \exp[\alpha(s-t)] \|\pi_2(s) - \pi_1(s)\| ds, \end{aligned}$$

где $\gamma = \alpha + M(\alpha)(1 + c_2)\rho(\varepsilon)$ и $\pi_1(0) = \pi_2(0)$. Умножая это неравенство на $\exp(\alpha t)$ и используя неравенство Гронуолла–Беллмана, можно показать, что

$$\|\pi_2(t) - \pi_1(t)\| \leq \frac{1}{\alpha} M(\alpha)\rho(\varepsilon) \sup_{y \in R^k} \|\eta_2 - \eta_1\| \exp(-\gamma t).$$

Используя это неравенство в

$$(P\eta_2)(y) - (P\eta_1)(y) = \int_{-\infty}^0 \exp(-Bs)[G(\pi_2, \eta_2(\pi_2)) - G(\pi_1, \eta_1(\pi_1))]ds,$$

получаем

$$\begin{aligned} \|(P\eta_2)(y) - (P\eta_1)(y)\| &\leq \int_{-\infty}^0 Ce^{\beta s}[(1 + c_2)\rho(\varepsilon)\|\pi_2(s) - \pi_1(s)\| + \\ &\quad + \rho(\varepsilon) \sup_{y \in R^k} \|\eta_2 - \eta_1\|]ds \leq \\ &\leq C\rho(\varepsilon) \sup_{y \in R^k} \|\eta_2 - \eta_1\| \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\beta} + \int_{-\infty}^0 e^{\beta s}(1 + c_2)\frac{1}{\alpha}M(\alpha)\rho(\varepsilon)e^{-\gamma s}ds \right] \leq \\ &\leq b \sup_{y \in R^k} \|\eta_2 - \eta_1\|, \end{aligned}$$

где

$$b = C\rho(\varepsilon) \left[\frac{1}{\beta} + \frac{\gamma - \alpha}{\alpha(\beta - \gamma)} \right].$$

При достаточно малой ε можно гарантировать, что $b < 1$ и, следовательно, $P\eta$ является сжимающим отображением на S . Таким образом, из теоремы о сжимающем отображении следует, что отображение $P\eta$ имеет неподвижную точку в S .

Предположим, что $\|g(y, 0)\| \leq k\|y\|^p$. Функция $G(y, 0)$ удовлетворяет той же оценке. Рассмотрим замкнутое подмножество

$$Y = \{\eta \in S \mid \|\eta(y)\| \leq c_4\|y\|^p\},$$

где c_4 — некоторая положительная константа, подлежащая определению. Для завершения доказательства леммы необходимо показать, что неподвижная точка отображения $P\eta$ расположена в Y . Это будет иметь место, если мы сможем показать, что константа c_4 может быть выбрана так, что $P\eta$ отображает Y в себя. Используя оценку (C.63) для G , получаем

$$\|G(y, \eta(y))\| \leq \|G(y, 0)\| + \|G(y, \eta(y)) - G(y, 0)\| \leq k\|y\|^p + \rho(\varepsilon)\|\eta(y)\|.$$

Поскольку в множестве Y выполнено $\|\eta(y)\| \leq c_4\|y\|^p$, то

$$\|G(y, \eta(y))\| \leq [k + c_4\rho(\varepsilon)]\|y\|^p.$$

Используя эту оценку в (C.61), имеем

$$\|(P\eta)(y)\| \leq \int_{-\infty}^0 C \exp(\beta s)[k + c_4\rho(\varepsilon)]\|\pi(s; y, \eta)\|^p ds.$$

Поскольку $\pi(t; 0, \eta) = 0$ и $\|\pi_y(t; y, \eta)\| \leq M(\alpha)\exp(-\gamma t)$, так же как и в доказательстве леммы 3.1 можно показать, что при $t \leq 0$ выполнено

$$\|\pi(t; y, \eta)\| \leq M(\alpha)\exp(-\gamma t)\|y\|.$$

Таким образом,

$$\|(P\eta)(y)\| \leq \frac{C[k + c_4\rho(\varepsilon)]M^p(\alpha)}{\beta - p\gamma}\|y\|^p = c_5\|y\|^p \text{ def}$$

при условии, что ε и α выбраны настолько малыми, что $\beta - p\gamma > 0$. Выбрав достаточно большую c_4 и достаточно малую ε , получаем $c_5 < c_4$. Поэтому $(P\eta)$ отображает Y в себя. Доказательство леммы завершено. \square

Доказательство теоремы 8.1

Доказательство следует из леммы С.6 при $A = A_1$, $B = A_2$, $f = g_1$ и $g = g_2$. \square

Доказательство теоремы 8.3

Определим $\mu(y) = h(y) - \phi(y)$. С учетом того, что $\mathcal{N}(h(y)) = 0$ и $\mathcal{N}(\phi(y)) = O(\|y\|^p)$, где $\mathcal{N}(h(y))$ определено в (8.11), можно показать, что $\mu(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(y)[A_1y + N(y, \mu(y))] - A_2\mu(y) - Q(y, \mu(y)) = 0, \quad (\text{C.66})$$

где

$$N(y, z) = g_1(y, \phi(y) + z)$$

и

$$\begin{aligned} Q(y, z) &= g_2(y, \phi(y) + z) - g_2(y, \phi(y)) + \mathcal{N}(\phi(y)) - \\ &\quad - \frac{\partial \phi}{\partial y}(y)[g_1(y, \phi(y) + z) - g_1(y, \phi(y))]. \end{aligned}$$

Функция $\mu(y)$, удовлетворяющая (C.66), определяет центральное многообразие для уравнения (C.54)–(C.55) при $A = A_1$, $B = A_2$, $f = N$ и $g = Q$. Кроме того, в этом случае

$$Q(y, 0) = \mathcal{N}(\phi(y)) = O(\|y\|^p).$$

Следовательно, из леммы С.6 следует, что существует непрерывно дифференцируемая функция $\mu(y) = O(\|y\|^p)$, удовлетворяющая (С.66). Поэтому $h(y) - \phi(y) = O(\|y\|^p)$. Редуцированная система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + g_1(y, h(y)) = \\ &= A_1 y + g_1(y, \phi(y)) + g_1(y, h(y)) - g_1(y, \phi(y)). \end{aligned}$$

Поскольку g_1 является дважды непрерывно дифференцируемой и ее первые частные производные обращаются в нуль в начале координат, в некоторой окрестности начала координат выполнено

$$\left\| \frac{\partial g_1}{\partial z}(y, z) \right\| \leq k_1 \|y\| + k_2 \|z\|.$$

Из теоремы о среднем значении следует, что

$$g_{1i}(y, h(y)) - g_{1i}(y, \phi(y)) = \frac{\partial g_{1i}}{\partial z}(y, \zeta(y))[h(y) - \phi(y)],$$

где

$$\|\zeta(y)\| \leq \|\mu(y)\| + \|\phi(y)\| \leq k_3 \|y\|^p \leq k_3 \|y\|$$

при $\|y\| < 1$. Поэтому

$$\|g_1(y, h(y)) - g_1(y, \phi(y))\| \leq k_4 \|y\| \|\mu(y)\| = O(\|y\|^{p+1}),$$

что завершает доказательство теоремы. \square

С.16. Доказательство леммы 8.1

Для доказательства инвариантности множества R_A , необходимо показать, что

$$x \in R_A \Rightarrow x(s) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(s; x) \in R_A, \quad \forall s \in R.$$

Поскольку

$$\phi(t; \phi(s; x)) = \phi(t + s; x),$$

очевидно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; x(s)) = 0$ для всех $s \in R$. Следовательно, R_A является инвариантным. Для доказательства того факта, что R_A открыто, выберем любую точку $p \in R_A$ и покажем, что каждая точка в окрестности p принадлежит R_A . Пусть $T > 0$ настолько велико, что $\|\phi(T; p)\| < a/2$, где a настолько мала, что открытая область $\|x\| < a$ заключена в R_A . Рассмотрим окрестность $\|x - p\| < b$ точки p . Вследствие непрерывной зависимости решения от начальных состояний, можно выбрать b настолько малой, что для любой точки q в окрестности $\|x - p\| < b$ решение в момент времени T удовлетворяет неравенству

$$\|\phi(T; p) - \phi(T; q)\| < \frac{a}{2}.$$

Тогда

$$\|\phi(T; q)\| \leq \|\phi(T; q) - \phi(T; p)\| + \|\phi(T; p)\| < a.$$

Из этого неравенства следует, что точка $\phi(T; q)$ расположена внутри R_A . Следовательно, решение, начинающееся в q , стремится к началу координат при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, $q \in R_A$ и множество R_A является открытым. Читателю предлагается показать (упражнение 8.13), что множество R_A является связным. Утверждение о границе для R_A следует из следующей леммы.

Лемма С.7. Граница открытого инвариантного множества является инвариантным множеством и, следовательно, она формируется траекториями.

Доказательство: Пусть M — открытое инвариантное множество и x — его граничная точка. Существует последовательность $x_n \in M$, которая сходится к x . Поскольку M является инвариантным множеством, решение $\phi(t; x_n)$ принадлежит M для всех $t \in R$. Последовательность $\phi(t; x_n)$ сходится к $\phi(t; x)$ для всех $t \in R$. Таким образом, $\phi(t; x)$ является предельной точкой M для всех t . С другой стороны, $\phi(t; x) \notin M$, т. к. x является граничной точкой M . Поэтому решение $\phi(t; x)$ принадлежит границе M для всех t . \square

С.17. Доказательство теоремы 11.1

Рассмотрим нередуцированную задачу, представленную уравнениями (11.10) и (11.11) в (x, y) -переменных. Тогда оценку ошибки для z можно непосредственно получить с использованием замены переменных (11.9). Пусть y принадлежит открытой области D_y , где (11.9) отображает $D_x \times D_y$ в D_z . При анализе (11.12) с медленно изменяющимися t и x мы используем свойство равномерной экспоненциальной устойчивости (11.15) пограничной (быстрой) модели. Неравенство (11.15) справедливо лишь при $x \in D_x$ и, следовательно, для его использования необходимо убедиться в том, что медленно меняющаяся переменная x всегда принадлежит D_x . Это представляется правдоподобным, т. к. решение \bar{x} редуцированной задачи (11.8) принадлежит S , компактному подмножеству D_x . В этом случае, если ошибка $\|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t)\|$ имеет порядок $O(\varepsilon)$, то при достаточно малой ε переменная x будет принадлежать D_x . Для доказательства справедливости оценки $\|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t)\| = O(\varepsilon)$ мы используем специальную технику.¹⁾ Если $D_x \neq R^n$, пусть E — дополнение D_x в R^n . Определим

$$k = \frac{1}{2} \inf \{\|x - y\| \mid x \in S, y \in E\} > 0.$$

Если $D_x = R^n$, в качестве k можно выбрать любую положительную константу. Множества

$$S_1 = \{x \in R^n \mid \text{dist}(x, S) \leq k/2\} \quad \text{и} \quad S_2 = \{x \in R^n \mid \text{dist}(x, S) \leq k\}$$

¹⁾ Аналогичный метод используется при доказательстве теоремы о центральном многообразии. (См. приложение С.15.)

являются компактными подмножествами множеств D_x и $S \subset S_1 \subset S_2$. Пусть $\psi : R^n \rightarrow [0, 1]$ — некоторая гладкая (непрерывно дифференцируемая бесконечное число раз) функция, такая что $\psi(x) = 1$, если x принадлежит S_1 , и $\psi(x) = 0$, если x расположена вне S_2 .¹⁾ Определим F и G равенствами

$$F(t, x, y, \varepsilon) = f(t, \varphi(x), y + h(t, \varphi(x)), \varepsilon), \quad (\text{C.67})$$

$$\begin{aligned} G(t, x, y, \varepsilon) = g(t, \varphi(x), y + h(t, \varphi(x)), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t}(t, \varphi(x)) - \\ - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}(t, \varphi(x)) f(t, \varphi(x), y + h(t, \varphi(x)), \varepsilon), \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

где $\varphi(x) = (x - \xi_0)\psi(x) + \xi_0$. Можно легко показать, что для всех $x \in R^n$ величина $\varphi(x)$ ограничена и принадлежит D_x , т. к. множество D_x выпукло. При $x \in S_1$ получаем $\varphi(x) = x$ и, следовательно, функции F и f идентичны. Аналогичное утверждение справедливо и для функций G и $g - \varepsilon[(\partial h / \partial t) + (\partial h / \partial x)f]$. Можно показать, что для всех $(t, x, y, \varepsilon) \in [0, t_1] \times R^n \times \Omega_1 \times [0, \varepsilon_0]$, где Ω_1 — любое компактное подмножество D_y , справедливы следующие утверждения:

- F и G и их первые частные производные по ε непрерывны и ограничены.
- $F(t, x, y, 0)$ имеет ограниченные первые частные производные по (x, y) .
- $G(t, x, y, 0)$ и $[\partial G(t, x, y, 0) / \partial y]$ имеют ограниченные первые частные производные по (t, x, y) .

Рассмотрим модифицированную задачу с сингулярными возмущениями

$$\dot{x} = F(t, x, y, \varepsilon), \quad x(t_0) = \xi(\varepsilon), \quad (\text{C.69})$$

$$\varepsilon \dot{y} = G(t, x, y, \varepsilon), \quad y(t_0) = \eta(\varepsilon) - h(t_0, \xi(\varepsilon)). \quad (\text{C.70})$$

Модифицированная задача (C.69) и (C.70) идентична исходной задаче (11.10) и (11.11) при $x \in S_1$. Множество S_1 было выбрано с таким расчетом, что решение $x(t, \varepsilon)$ будет всегда принадлежать S_1 . Этот расчет представляется оправданным, т. к. $\bar{x}(t) \in S$. Пограничная модель

$$\frac{dy}{d\tau} = G(t, x, y, 0), \quad (\text{C.71})$$

имеет точку равновесия в $y = 0$. Поскольку

$$G(t, x, y, 0) = g(t, \varphi(x), y + h(t, \varphi(x)), 0)$$

для любой фиксированной $x \in R^n$, пограничная модель (C.71) может быть представлена в форме пограничной модели (11.14) с $\varphi(x) \in D_x$ в качестве фиксированного параметра. Поскольку неравенство (11.15) выполнено равномерно по фиксированному параметру, очевидно, что

¹⁾Существование ψ доказано в лемме 6.2 из главы 23 в [111].

решения уравнения (C.71) удовлетворяют тому же неравенству для всех $x \in R^n$, т. е.

$$\|y(\tau)\| \leq k \|y(0)\| \exp(-\gamma\tau), \quad \forall \|y(0)\| < \rho_0, \quad \forall (t, x) \in [0, t_1] \times R^n, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (\text{C.72})$$

Редуцированная задача для (C.69) и (C.70) имеет вид

$$\dot{x} = F(t, x, 0, 0), \quad x(t_0) = \xi_0. \quad (\text{C.73})$$

Эта задача идентична редуцированной задаче (11.8) при $x \in S_1$. Поскольку (11.8) имеет единственное решение $\bar{x}(t)$, определенное для всех $t \in [t_0, t_1]$ и $\bar{x}(t) \in S$, очевидно, что $\bar{x}(t)$ является единственным решением уравнения (C.73) при $t \in [t_0, t_1]$. Продолжим доказательство теоремы для модифицированной задачи с сингулярными возмущениями (C.69) и (C.70). После этого мы покажем, что при достаточно малой ε решение $x(t, \varepsilon)$ системы (C.69)–(C.70) принадлежит S_1 . Из этого будет следовать, что исходная и модифицированная задачи имеют совпадающие решения, что доказывает теорему для исходной задачи (11.10) и (11.11).

Рассмотрим пограничную модель (C.71). Поскольку $[\partial G / \partial y]$ имеет ограниченные первые частные производные по (t, x) и $G(t, x, 0, 0) = 0$ для всех (t, x) , матрицы Якоби $[\partial G / \partial t]$ и $[\partial G / \partial x]$ удовлетворяют

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial t} \right\| \leq L_1 \|y\|, \quad \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\| \leq L_2 \|y\|.$$

Учитывая эти оценки и (C.72), с использованием леммы 9.8 можно заключить, что существует функция Ляпунова $V_1(t, x, y)$, удовлетворяющая

$$c_1 \|y\|^2 \leq V_1(t, x, y) \leq c_2 \|y\|^2, \quad (\text{C.74})$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} G(t, x, y, 0) \leq -c_3 \|y\|^2, \quad (\text{C.75})$$

$$\left\| \frac{\partial V_1}{\partial y} \right\| \leq c_4 \|y\|, \quad \left\| \frac{\partial V_1}{\partial t} \right\| \leq c_5 \|y\|^2, \quad \left\| \frac{\partial V_1}{\partial x} \right\| \leq c_6 \|y\|^2 \quad (\text{C.76})$$

для всех $y \in \{\|y\| < \rho_0\}$ и $(t, x) \in [0, t_1] \times R^n$. Производная V_1 вдоль траекторий системы (C.69)–(C.70) определяется равенством

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V_1}{\partial y} G(t, x, y, \varepsilon) + \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x} F(t, x, y, \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V_1}{\partial y} G(t, x, y, 0) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V_1}{\partial y} [G(t, x, y, \varepsilon) - G(t, x, y, 0)] + \\ &\quad + \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x} F(t, x, y, \varepsilon). \end{aligned}$$

Используя (C.75) и (C.76) и оценки

$$\|F(t, x, y, \varepsilon)\| \leq k_0, \quad \|G(t, x, y, \varepsilon) - G(t, x, y, 0)\| \leq \varepsilon L_3,$$

получаем

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq -\frac{c_3}{\varepsilon} \|y\|^2 + c_4 L_3 \|y\| + c_5 \|y\|^2 + c_6 k_0 \|y\|^2 \\ &\leq -\frac{c_3}{2\varepsilon} \|y\|^2 + c_4 L_3 \|y\| \text{ при } \varepsilon \leq \frac{c_3}{2c_5 + 2c_6 k_0}.\end{aligned}$$

Таким образом, если в некоторый момент времени $t^* \geq t_0$ выполнено $\|y(t^*, \varepsilon)\| < \rho_0 \sqrt{c_1/c_2} \stackrel{\text{def}}{=} \mu$, то решение $y(t, \varepsilon)$ будет удовлетворять экспоненциально убывающей оценке

$$\|y(t, \varepsilon)\| \leq \mu \sqrt{c_2/c_1} \exp \left[\frac{-\alpha(t - t^*)}{\varepsilon} \right] + \varepsilon \delta, \quad \forall t \geq t^*, \quad (\text{C.77})$$

где $\alpha = c_3/4c_2$ и $\delta = 2c_2 c_4 L_3 / c_1 c_3$. С другой стороны, $y(t_0, \varepsilon) = \eta(\varepsilon) - h(t_0, \xi(\varepsilon)) = \eta_0 - h(t_0, \xi_0) + O(\varepsilon)$ и $\eta_0 - h(t_0, \xi_0)$ принадлежат Ω_y , компактному подмножеству области притяжения пограничной модели

$$\frac{dy}{d\tau} = G(t_0, \xi_0, y, 0) = g(t_0, \xi_0, y + h(t_0, \xi_0), 0). \quad (\text{C.78})$$

Из обратной теоремы Ляпунова 4.17 следует, что существует функция Ляпунова $V_0(y)$, такая что в области притяжения выполнено неравенство

$$\frac{\partial V_0}{\partial y} g(t_0, \xi_0, y + h(t_0, \xi_0), 0) \leq -W_0(y),$$

где $W_0(y)$ — положительно определенная функция и $\{V_0(y) \leq c\}$ — компактное подмножество области притяжения для любой $c > 0$. Выберем c_0 так, чтобы Ω_y принадлежало внутренности множества $\{V_0(y) \leq c_0\}$. Производная V_0 вдоль траекторий всей системы (C.69)–(C.70) определяется равенством

$$\begin{aligned}\dot{V}_0 &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V_0}{\partial y} G(t, x, y, \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V_0}{\partial y} G(t_0, \xi_0, y, 0) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V_0}{\partial y} [G(t, x, y, \varepsilon) - G(t_0, \xi_0, y, 0)].\end{aligned}$$

Можно показать, что для всех $(t, y) \in [t_0, t_0 + \varepsilon T] \times \{V_0(y) \leq c_0\}$ неравенство

$$\dot{V}_0 \leq \frac{1}{\varepsilon} [-W_0(y) + a_0 \varepsilon (1 + T)]$$

справедливо для некоторой $a_0 > 0$. Из теоремы 4.18 следует, что существует $\varepsilon_1^* > 0$ такая, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1^*$ решение $y(t, \varepsilon)$ удовлетворяет неравенству

$$\|y(t, \varepsilon)\| \leq \beta(\mu_2, (t - t_0)/\varepsilon) + \varrho(\varepsilon(1 + T))$$

на интервале $[t_0, t_0 + \varepsilon T]$, где β — \mathcal{KL} -функция, ϱ — \mathcal{K} -функция и μ_2 — некоторая положительная константа. Выберем T настолько большим,

что $\beta(\mu_2, T) < \mu/2$. После этого выберем $\varepsilon^* < \varepsilon_1^*$ настолько малой, что $\varrho(\varepsilon^*(1 + T)) < \mu/2$. Тогда при $\varepsilon < \varepsilon^*$ решение $y(t, \varepsilon)$ удовлетворяет

$$\|y(t, \varepsilon)\| < \mu_1 + \mu/2 \text{ при } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon T] \quad \text{и} \quad \|y(t_0 + \varepsilon T, \varepsilon)\| < \mu, \quad (\text{C.79})$$

где $\mu_1 = \beta(\mu_2, 0)$. Тогда из (C.77) и (C.79) следует

$$\|y(t, \varepsilon)\| \leq k_1 \exp \left[\frac{-\alpha(t - t_0)}{\varepsilon} \right] + \varepsilon \delta, \quad \forall t \geq t_0, \quad (\text{C.80})$$

для некоторой $k_1 > 0$.

Рассмотрим (C.69). Переписав правую часть в следующей форме

$$F(t, x, y, \varepsilon) = F(t, x, 0, 0) + [F(t, x, y, \varepsilon) - F(t, x, 0, 0)],$$

можно рассматривать (C.69) в качестве возмущения редуцированной системы (C.73). Член возмущения в скобках удовлетворяет

$$\begin{aligned}\|F(t, x, y, \varepsilon) - F(t, x, 0, 0)\| &\leq \|F(t, x, y, \varepsilon) - F(t, x, y, 0)\| + \\ &\quad + \|F(t, x, y, 0) - F(t, x, 0, 0)\| \leq \\ &\leq L_4 \varepsilon + L_5 \|y\| \leq \\ &\leq \theta_1 \varepsilon + \theta_2 \exp \left[\frac{-\alpha(t - t_0)}{\varepsilon} \right],\end{aligned}$$

где $\theta_1 = L_4 + L_5 \delta$ и $\theta_2 = L_5 k_1$. Определим

$$u(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned}u(t, \varepsilon) &= \xi(\varepsilon) - \xi(0) + \int_{t_0}^t [F(s, x(s, \varepsilon), y(s, \varepsilon), \varepsilon) - F(s, \bar{x}(s), 0, 0)] ds = \\ &= \xi(\varepsilon) - \xi(0) + \int_{t_0}^t [F(s, x(s, \varepsilon), y(s, \varepsilon), \varepsilon) - F(s, x(s, \varepsilon), 0, 0)] ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^t [F(s, x(s, \varepsilon), 0, 0) - F(s, \bar{x}(s), 0, 0)] ds\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\|u(t, \varepsilon)\| &\leq k_2 \varepsilon + \int_{t_0}^t \left\{ \theta_1 \varepsilon + \theta_2 \exp \left[\frac{-\alpha(s - t_0)}{\varepsilon} \right] \right\} ds + \int_{t_0}^t L_6 \|u(s, \varepsilon)\| ds \leq \\ &\leq k_2 \varepsilon + \left[\theta_1 \varepsilon (t_1 - t_0) + \frac{\theta_2 \varepsilon}{\alpha} \right] + \int_{t_0}^t L_6 \|u(s, \varepsilon)\| ds.\end{aligned}$$

С использованием леммы Гронуолла–Беллмана получаем оценку

$$\|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t)\| \leq \varepsilon k_3 [1 + t_1 - t_0] \exp[L_6(t_1 - t_0)], \quad (\text{C.81})$$

из которой следует оценка ошибки для x . Кроме того, можно заключить, что при достаточно малой ε решение $x(t, \varepsilon)$ определено для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Для доказательства справедливости оценки для y рассмотрим (C.70), представленное во временному масштабе τ :

$$\frac{dy}{d\tau} = G(t_0 + \varepsilon\tau, x(t_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon), y, \varepsilon).$$

Пусть $\hat{y}(\tau)$ — решение пограничной модели

$$\frac{dy}{d\tau} = G(t_0, \xi_0, y, 0), \quad y(0) = \eta_0 - h(t_0, \xi_0)$$

и

$$v(\tau, \varepsilon) = y(\tau, \varepsilon) - \hat{y}(\tau).$$

Дифференцируя обе части по τ и подставляя выражения для производных y и \hat{y} , получаем

$$\frac{dv}{d\tau} = G(t_0 + \varepsilon\tau, x(t_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon), y(\tau, \varepsilon), \varepsilon) - G(t_0, \xi_0, \hat{y}(\tau), 0).$$

Прибавим и вычтем $G(t_0 + \varepsilon\tau, x(t_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon), v, 0)$. В результате имеем

$$\frac{dv}{d\tau} = G(t, x, v, 0) + \Delta G, \quad (\text{C.82})$$

где $t = t_0 + \varepsilon\tau$, $x = x(t_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon)$, $\Delta G = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ и

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= G(t, x, y, 0) - G(t, x, \hat{y}, 0) - G(t, x, v, 0), \\ \Delta_2 &= G(t, x, y, \varepsilon) - G(t, x, y, 0), \\ \Delta_3 &= G(t, x, \hat{y}, 0) - G(t_0, \xi_0, \hat{y}, 0). \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} \|\Delta_1\| &\leq k_4 \|v\|^2 + k_5 \|v\| \|\hat{y}\|, \quad \|\Delta_2\| \leq \varepsilon L_3 \\ \|\Delta_3\| &\leq L_1 |t - t_0| \|\hat{y}\| + L_2 \|x - \xi_0\| \|\hat{y}\| \leq (L_1 \varepsilon \tau + L_2 \varepsilon a + L_2 \varepsilon \tau k_0) \|\hat{y}\|, \end{aligned}$$

где k_4 , k_5 , и a — некоторые неотрицательные константы. Выполнив выкладки, которые привели ранее к (C.80), можно показать, что

$$\|\hat{y}(\tau)\| \leq k_1 e^{-\alpha\tau}, \quad \forall \tau \geq 0, \quad (\text{C.83})$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\Delta G\| &\leq k_4 \|v\|^2 + k_5 k_1 \|v\| e^{-\alpha\tau} + \varepsilon L_3 + \varepsilon a_1 k_1 (1 + \tau) e^{-\alpha\tau} \leq \\ &\leq k_4 \|v\|^2 + k_5 k_1 \|v\| e^{-\alpha\tau} + \varepsilon a_2, \end{aligned} \quad (\text{C.84})$$

где $a_1 = \max\{L_2 a, L_1 + L_2 k_0\}$ и $a_2 = L_3 + a_1 k_1 \max\{1, 1/\alpha\}$. При получении этого неравенства мы использовали тот факт, что $(1 + \tau) e^{-\alpha\tau} \leq$

$\leq \max\{1, 1/\alpha\}$. Уравнение (C.82) может рассматриваться как возмущение уравнения

$$\frac{dv}{d\tau} = G(t, x, v, 0), \quad (\text{C.85})$$

которое по лемме 9.8 имеет функцию Ляпунова $V_1(t, x, v)$, удовлетворяющую (C.74)–(C.76). Вычисляя производную V_1 вдоль траекторий системы (C.82) и используя оценку (C.84), получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x} F + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V_1}{\partial v} [G(t, x, v, 0) + \Delta G] \leq \\ &\leq c_5 \|v\|^2 + c_6 k_0 \|v\|^2 - \frac{c_3}{\varepsilon} \|v\|^2 + \frac{c_4}{\varepsilon} \|v\| (k_4 \|v\|^2 + k_5 k_1 \|v\| e^{-\alpha\tau} + \varepsilon a_2). \end{aligned}$$

При $\|v\| \leq c_3/4c_4k_4$ и $0 < \varepsilon < c_3/4(c_5 + c_6k_0)$ получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -\frac{c_3}{2\varepsilon} \|v\|^2 + \frac{c_4 k_5 k_1}{\varepsilon} \|v\|^2 e^{-\alpha\tau} + c_4 a_2 \|v\| \leq \\ &\leq -\frac{2}{\varepsilon} (k_a - k_b e^{-\alpha\tau}) V_1 + 2k_c \sqrt{V_1}, \end{aligned}$$

где $k_a = c_3/4c_2$, $k_b = c_4 k_5 k_1 / 2c_1$ и $k_c = c_4 a_2 / 2\sqrt{c_1}$. Положив $W = \sqrt{V_1}$, имеем

$$D^+ W(\tau) \leq -(k_a - k_b e^{-\alpha\tau}) W + \varepsilon k_c,$$

где $D^+ W(\tau)$ — верхняя правая производная W по τ . С использованием принципа сравнения (лемма 3.4) можно заключить, что

$$W(\tau) \leq \phi(\tau, 0) W(0) + \varepsilon \int_0^\tau \phi(\tau, \sigma) k_c d\sigma,$$

где

$$\phi(\tau, \sigma) = \exp \left[- \int_\sigma^\tau (k_a - k_b e^{-\alpha\lambda}) d\lambda \right] \quad \text{и} \quad |\phi(\tau, \sigma)| \leq k_g e^{-\alpha_g(\tau-\sigma)}$$

для некоторых $k_g, \alpha_g > 0$. Используя тот факт, что $v(0) = O(\varepsilon)$, можно заключить, что $v(\tau) = O(\varepsilon)$ для всех $\tau \geq 0$. Это доказывает утверждение о том, что решение системы (C.69)–(C.70) удовлетворяет

$$x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon), \quad y(t, \varepsilon) - \hat{y}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon)$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$ при достаточно малой ε . Поскольку $\bar{x}(t) \in S$, существует настолько малая $\varepsilon_2^* > 0$, что $x(t, \varepsilon) \in S_1$ для всех $t \in [t_0, t_1]$ при всех $\varepsilon < \varepsilon_2^*$. Следовательно, $x(t, \varepsilon)$ и $y(t, \varepsilon)$ — решения (11.10)–(11.11). Из (11.9) и с учетом липшицевости h по x получаем

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) - \hat{y}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) &= y(t, \varepsilon) - \hat{y}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + h(t, x(t, \varepsilon)) - h(t, \bar{x}(t)) = \\ &= O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Наконец, поскольку $\widehat{y}(\tau)$ удовлетворяет (С.83) и

$$\exp\left[\frac{-\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}\right] \leq \varepsilon, \quad \forall \alpha(t-t_0) \geq \varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

член $\widehat{y}(t/\varepsilon)$ будет иметь порядок $O(\varepsilon)$ равномерно на $[t_b, t_1]$, если ε настолько мала, что выполнено

$$\varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq \alpha(t_b - t_0).$$

Доказательство теоремы 11.1 завершено.

C.18. Доказательство теоремы 11.2

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 11.1. Отметим лишь два ключевых момента, представляющие отличия этих двух доказательств. Во-первых, в теореме 11.2 x принадлежит D_x . Во-вторых, эти доказательства различаются методом проведения анализа ошибки $x - \bar{x}$. Доказательство, модифицированное с учетом первого отличия, выполняется с использованием функции Ляпунова V для редуцированной системы, а анализ указанной ошибки осуществляется с использованием свойств устойчивости этой системы.

Используя функцию Ляпунова V , мы покажем, что x принадлежит компактному множеству $\{W_1(x) \leq c\}$ для всех $t \geq t_0$ и поэтому нам не нужно применять усечение x с использованием функции $\psi(x)$, как это было сделано в доказательстве теоремы 11.1. Функции F и G как и ранее, определены равенствами (С.67) и (С.68), но с $\varphi(x)$, замененной на x . Эти функции обладают теми же свойствами, установленными ранее для всех $(t, x, y, \in) \in [0, \infty) \times \{W_1(x) \leq c\} \times \Omega_1 \times [0, \varepsilon_0]$. Более того, $[\partial F / \partial x](t, x, 0, 0)$ липшицева по x равномерно по t . Для всех $x \in \{W_1(x) \leq c\}$ можно повторить представленные ранее рассуждения и показать, что $y(t, \varepsilon)$ удовлетворяет (С.80). Следовательно,

$$\dot{V} \leq -W_3(x) + k_7 \varepsilon + k_7 \exp\left[\frac{-\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}\right].$$

С учетом $\xi_0 \in \{W_2(x) \leq \rho c\}$ можно показать, что существует момент времени $T_1 > 0$, не зависящий от ε , такой что при достаточно малой ε решение $x(t, \varepsilon) \in \{W_2(x) \leq c\}$ для всех $t \in [t_0, t_0 + T_1]$. При $t \geq t_0 + T_1$ экспоненциальный член $\exp[-\alpha(t-t_0)/\varepsilon]$ имеет порядок $O(\varepsilon)$. Таким образом,

$$\dot{V} \leq -W_3(x) + k_8 \varepsilon.$$

Используя это неравенство, можно показать, что \dot{V} отрицательна на границе $V(t, x) = c$. Поэтому $x(t, \varepsilon) \in \{W_1(x) \leq c\}$ для всех $t \geq t_0$.

Для получения оценки ошибки приближения $u(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t)$ рассмотрим (С.69) как возмущение редуцированной системы (С.73) и вместо леммы Гронуолла–Беллмана используем метод Ляпунова с учес-

том экспоненциальной устойчивости начала координат системы (С.73). Процедура выполнения этого анализа аналогична той, что использовалась при доказательстве теоремы 11.1 и поэтому ее изложение будет кратким. Ошибка u удовлетворяет уравнению

$$\dot{u} = F(t, u, 0, 0) + \Delta F, \quad (\text{C.86})$$

где

$$\begin{aligned} \Delta F = & [F(t, \bar{x} + u, 0, 0) - F(t, \bar{x}, 0, 0) - F(t, u, 0, 0)] + \\ & [F(t, x, y, \varepsilon) - F(t, x, 0, 0)]. \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$\|\Delta F\| \leq \tilde{k}_4 \|u\|^2 + \tilde{k}_5 \|u\| \|\bar{x}\| + \tilde{k}_6 \exp\left[\frac{-\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}\right] + \varepsilon \tilde{k}_7.$$

Система (С.86) рассматривается как возмущение уравнения

$$\dot{u} = F(t, u, 0, 0). \quad (\text{C.87})$$

Поскольку начало координат (С.87) экспоненциально устойчиво, по теореме 4.14 существует функция Ляпунова $\tilde{V}(t, u)$. При этом ее производная вдоль решений (С.86) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}} = & \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u} F(t, u, 0, 0) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u} \Delta F \leq \\ & \leq -\tilde{c}_3 \|u\|^2 + \tilde{c}_4 \|u\| \left\{ \tilde{k}_4 \|u\|^2 + \tilde{k}_5 \|u\| \|\bar{x}\| + \tilde{k}_6 \exp\left[\frac{-\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}\right] + \varepsilon \tilde{k}_7 \right\}. \end{aligned}$$

При $\|u\| \leq \tilde{c}_3/2\tilde{c}_4\tilde{k}_4$ выполнено

$$\dot{\tilde{V}} \leq -2 \left[\tilde{k}_a - \tilde{k}_b e^{-\tilde{\sigma}(t-t_0)} \right] \tilde{V} + 2 \left\{ \varepsilon \tilde{k}_c + \tilde{k}_d \exp\left[\frac{-\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}\right] \right\} \sqrt{\tilde{V}}$$

для некоторых $\tilde{k}_a, \tilde{\sigma} > 0$ и $\tilde{k}_b, \tilde{k}_c, \tilde{k}_d \geq 0$. Применяя принцип сравнения, получаем

$$\widetilde{W}(t) \leq \tilde{\phi}(t, t_0) \widetilde{W}(0) + \int_{t_0}^t \tilde{\phi}(t, s) \left\{ \varepsilon \tilde{k}_c + \tilde{k}_d \exp\left[\frac{-\alpha(s-t_0)}{\varepsilon}\right] \right\} ds,$$

где $\widetilde{W} = \sqrt{\tilde{V}}$ и

$$|\tilde{\phi}(t, s)| \leq \tilde{k}_g e^{-\tilde{\sigma}(t-t_0)}, \quad \tilde{\sigma} > 0, \quad \tilde{k}_g > 0.$$

Поскольку $u(t_0) = O(\varepsilon)$ и

$$\int_{t_0}^t \exp[-\tilde{\sigma}(t-s)] \exp\left[\frac{-\alpha(s-t_0)}{\varepsilon}\right] ds = O(\varepsilon),$$

можно показать, что $\widetilde{W}(t) = O(\varepsilon)$ и, следовательно, $u(t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$. Дальнейшее доказательство проводится аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 11.1. Заметим, что анализ пограничной системы в этом доказательстве справедлив для всех $\tau \geq 0$.

С.19. Доказательство теоремы 12.1

Выполним анализ замкнутой системы (12.45) с использованием результатов параграфа 9.6, рассматривая ее как медленно меняющуюся систему. Поскольку в представленном доказательстве зависимость от w не играет никакой роли, запишем $g(\mathcal{X}, \rho, w)$ в виде $g(\mathcal{X}, \rho)$. Можно показать, что $g(\mathcal{X}, \rho)$ непрерывно дифференцируема в открытой области $D_{\mathcal{X}} \times D_{\rho}$ и $\mathcal{X}_{ss}(\alpha)$ и $A_{ms}(\alpha)$ — непрерывно дифференцируемы в D_{ρ} . Поскольку $A_{ms}(\alpha)$ гурвицева для всех $\alpha \in D_{\rho}$, она также является гурвицевой равномерно по α для всех $\alpha \in S$ (компактное подмножество D_{ρ}). Следовательно, A_{ms} удовлетворяет всем предположениям леммы 9.9 при $\alpha \in S$. Пусть $P_{ms} = P_{ms}(\alpha)$ — решение уравнения Ляпунова $P_{ms}A_{ms} + A_{ms}^T P_{ms} = -I$. Используем $V(\mathcal{X}_{\delta}, \alpha) = \dot{\mathcal{X}}_{\delta}^T P_{ms} \mathcal{X}_{\delta}$ в качестве функции Ляпунова для системы с фиксированной переменной планирования $\dot{\mathcal{X}}_{\delta} = g(\mathcal{X}_{\delta} + \mathcal{X}_{ss}(\alpha), \alpha)$. Из леммы 9.9 следует, что $V(\mathcal{X}_{\delta}, \alpha)$ удовлетворяет (9.41), (9.43) и (9.44). Единственное, что осталось проверить — это условие (9.42). Система с фиксированной переменной планирования может быть переписана в следующей форме:

$$\dot{\mathcal{X}}_{\delta} = A_{ms}(\alpha)\mathcal{X}_{\delta} + \Delta g(\mathcal{X}_{\delta}, \alpha),$$

где

$$\|\Delta g(\mathcal{X}_{\delta}, \alpha)\|_2 = \|g(\mathcal{X}_{\delta} + \mathcal{X}_{ss}(\alpha), \alpha) - A_{ms}(\alpha)\mathcal{X}_{\delta}\|_2 \leq k_1 \|\mathcal{X}_{\delta}\|_2^2$$

в некоторой открытой области $\{\|\mathcal{X}_{\delta}\|_2 < r_1\}$. Таким образом, производная функции V вдоль траекторий системы $\dot{\mathcal{X}}_{\delta} = g(\mathcal{X}_{\delta} + \mathcal{X}_{ss}(\alpha), \alpha)$ удовлетворяет при $\|\mathcal{X}_{\delta}\|_2 < 1/(4c_2k_1)$ неравенству

$$\dot{V} \leq -\|\mathcal{X}_{\delta}\|_2^2 + 2c_2k_1\|\mathcal{X}_{\delta}\|_2^3 \leq -\frac{1}{2}\|\mathcal{X}_{\delta}\|_2^2.$$

Поэтому существует $r > 0$, такая что $V(\mathcal{X}_{\delta}, \alpha)$ удовлетворяет (9.41)–(9.44) для всех $(\mathcal{X}_{\delta}, \alpha) \in \{\|\mathcal{X}_{\delta}\|_2 < r\} \times S$. Тогда утверждения теоремы 12.1 следуют из теоремы 9.3.

С.20. Доказательство теоремы 12.2

Для исследования замкнутой системы (12.58)–(12.59) используем метод анализа медленно меняющихся систем, представленный в параграфе 9.6, и метод анализа устойчивости систем с сингулярными возмущениями, представленный в параграфе 11.5. Поскольку в этом

доказательстве зависимость от w не играет никакой роли, запишем (12.58)–(12.59) в следующей форме:

$$\dot{\mathcal{X}} = g(\mathcal{X}, \rho) + N(\rho)[\vartheta - \phi(\mathcal{X}, \rho)], \quad (C.88)$$

$$\varepsilon \dot{\vartheta} = -\vartheta + \phi(\mathcal{X}, \rho). \quad (C.89)$$

При $\varepsilon = 0$ получаем редуцированную систему $\dot{\mathcal{X}} = g(\mathcal{X}, \rho)$, анализ которой был выполнен при доказательстве теоремы 12.1 с использованием квадратичной функции Ляпунова $\dot{\mathcal{X}}_{\delta}^T P_{ms} \mathcal{X}_{\delta}$. Можно показать, что $\phi(\mathcal{X}, \rho)$ является непрерывно дифференцируемой в открытой области $D_{\mathcal{X}} \times D_{\rho}$. Замена переменных

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X} - \mathcal{X}_{ss}(\rho), \quad \mathcal{Z} = \vartheta - \phi(\mathcal{X}, \rho)$$

приводит систему (C.88)–(C.89) к виду

$$\dot{\mathcal{Y}} = g(\mathcal{Y} + \mathcal{X}_{ss}(\rho), \rho) + N(\rho)\mathcal{Z} - \frac{\partial \mathcal{X}_{ss}}{\partial \rho} \dot{\rho}, \quad (C.90)$$

$$\varepsilon \dot{\mathcal{Z}} = -\mathcal{Z} - \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial \mathcal{X}} [g(\mathcal{Y} + \mathcal{X}_{ss}(\rho), \rho) + N(\rho)\mathcal{Z}] - \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \dot{\rho}. \quad (C.91)$$

Используя $\mathcal{V} = \mathcal{Y}^T P_{ms} \mathcal{Y} + (1/2)\mathcal{Z}^T \mathcal{Z}$ в качестве функции Ляпунова для системы (C.90)–(C.91), получаем оценку

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &= -\mathcal{Y}^T \mathcal{Y} + \\ &+ 2\mathcal{Y}^T P_{ms} \left[g(\mathcal{Y} + \mathcal{X}_{ss}(\rho), \rho) - A_{ms}(\rho)\mathcal{Y} + N(\rho)\mathcal{Z} - \frac{\partial \mathcal{X}_{ss}}{\partial \rho} \dot{\rho} \right] + \\ &+ \mathcal{Y}^T \left[\frac{d}{dt} P_{ms}(\rho) \right] \mathcal{Y} - \\ &- \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Z}^T \mathcal{Z} - \mathcal{Z}^T \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mathcal{X}} [g(\mathcal{Y} + \mathcal{X}_{ss}(\rho), \rho) + N(\rho)\mathcal{Z}] + \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \dot{\rho} \right\} \leqslant \\ &\leqslant -\|\mathcal{Y}\|_2^2 - \frac{1}{\varepsilon} \|\mathcal{Z}\|_2^2 + c_1 \|\mathcal{Y}\|_2^3 + c_2 \|\mathcal{Y}\|_2 \|\mathcal{Z}\|_2 + c_3 \|\mathcal{Y}\|_2 \|\dot{\rho}\|_2 + \\ &+ c_4 \|\mathcal{Y}\|_2^2 \|\dot{\rho}\|_2 + c_5 \|\mathcal{Z}\|_2^2 + c_6 \|\mathcal{Z}\|_2 \|\dot{\rho}\|_2, \end{aligned}$$

справедливую в некоторой окрестности начала координат для некоторых положительных констант c_i . Ограничеваясь при выполнении анализа системы рассмотрением некоторой окрестности, в которой выполнено $\|\mathcal{Y}\|_2 \leq c_7 \leq 1/(4c_1)$, получаем новую оценку

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &\leq -\frac{1}{2} \|\mathcal{Y}\|_2^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathcal{Z}\|_2^2 + (c_3 \|\mathcal{Y}\|_2 + c_4 c_7 \|\mathcal{Y}\|_2 + c_6 \|\mathcal{Z}\|_2) \|\dot{\rho}\|_2 - \\ &- \left[\begin{array}{c} \|\mathcal{Y}\|_2 \\ \|\mathcal{Z}\|_2 \end{array} \right]^T - \left[\begin{array}{cc} 1/4 & c_2/2 \\ -c_2/2 & 1/(2\varepsilon) - c_5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \|\mathcal{Y}\|_2 \\ \|\mathcal{Z}\|_2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Выбрав ε^* настолько малой, что (2×2) -матрица в предыдущем выражении является положительно определенной для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, получаем окончательную оценку

$$\dot{\mathcal{V}} \leq -2\alpha\mathcal{V} + 2\beta\sqrt{\mathcal{V}} \|\dot{\rho}\|_2$$

для некоторых положительных констант α и β . Следовательно, $W = \sqrt{\mathcal{V}}$ удовлетворяет неравенству

$$D^+W \leq -\alpha W + \beta \|\dot{\rho}\|_2.$$

Доказательство теоремы завершается применением леммы сравнения.

C.21. Доказательство теоремы 13.1

При доказательстве используются понятия скобок Ли и инволютивных распределений, введенных в параграфе 14.3, а также понятие полной интегрируемости. Невырожденное распределение Δ на D с генераторами f_1, \dots, f_k называется полностью интегрируемым, если для любой точки $x_0 \in D$ существует некоторая ее окрестность N и $n - k$ вещественных гладких функций $h_1(x), \dots, h_{n-k}(x)$, такие что

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} f_i(x) = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq k \quad \text{и} \quad 1 \leq j \leq n - k$$

и вектор-строки $dh_1(x), \dots, dh_{n-k}(x)$ линейно независимы для всех $x \in D$, где

$$dh(x) = \frac{\partial h}{\partial x} = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right]$$

называется дифференциалом h . Ключевым результатом дифференциальной геометрии является теорема Фробениуса,¹⁾ в которой утверждается, что невырожденное распределение является полностью интегрируемым, если и только если оно является инволютивным.

Сформулируем две вспомогательные леммы.

Лемма C.8. Для всех $x \in D$ и любых целых чисел k и j , таких что $k \geq 0$ и $0 \leq j \leq \rho - k - 1$, выполнено

$$L_{ad_f^j g} L_f^k h(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq j + k < \rho - 1, \\ (-1)^j L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0, & j + k = \rho - 1. \end{cases} \quad (\text{C.92})$$

Доказательство: Доказательство будет выполнено с использованием метода математической индукции по j . При $j = 0$ (C.92) выполнено по определению относительной степени системы. Предположим, что (C.92) выполнено при некотором j и докажем это справедливость этого

¹⁾ Доказательство этой теоремы приведено, например, в книге [88].

равенства при $j + 1$. Из тождества Якоби (упражнение 13.8) следует, что равенство

$$L_{[f, \beta]} \lambda(x) = L_f L_\beta \lambda(x) - L_\beta L_f \lambda(x)$$

выполнено для любой вещественной функции λ и любых векторных полей f и β . Положив $\lambda = L_f^k h$ и $\beta = ad_f^j g$, получаем

$$L_{ad_f^{j+1} g} L_f^k h(x) = L_{[f, ad_f^j g]} L_f^k h(x) = L_f L_{ad_f^j g} L_f^k h(x) - L_{ad_f^j g} L_f^{k+1} h(x).$$

Заметим, что первый член в правой части обращается в нуль, т. к.

$$j + k + 1 \leq \rho - 1 \Rightarrow j + k < \rho - 1 \Rightarrow L_f L_{ad_f^j g} L_f^k h(x) = 0.$$

Более того, справедливо

$$L_{ad_f^j g} L_f^{k+1} h(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq j + k + 1 < \rho - 1, \\ (-1)^j L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0, & j + k + 1 = \rho - 1, \end{cases}$$

вследствие предположения о выполнении (C.92) при j . Таким образом,

$$L_{ad_f^{j+1} g} L_f^k h(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq j + k + 1 < \rho - 1, \\ (-1)^{j+1} L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0, & j + k + 1 = \rho - 1. \end{cases}$$

Доказательство леммы завершено. \square

Лемма C.9. Для любой $x \in D$

- вектор-строки $dh(x), dL_f h(x), \dots, dL_f^{\rho-1} h(x)$ линейно независимы;
- вектор-столбцы $g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{\rho-1} g(x)$ линейно независимы.

Доказательство: Выполнено

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} dh(x) \\ \vdots \\ dL_f^{\rho-1} h(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(x) & \dots & ad_f^{\rho-1} g(x) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} L_g h(x) & L_{ad_f g} h(x) & \dots & \dots & L_{ad_f^{\rho-1} g} h(x) \\ L_g L_f h(x) & & & L_{ad_f^{\rho-2} g} L_f h(x) & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x) & * & \dots & & * \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Из предыдущей леммы следует, что матрица в правой части предыдущего равенства имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \diamond \\ 0 & & & \diamond & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \diamond & & * & \\ \diamond & & \dots & & * \end{bmatrix}$$

где \diamond обозначает ненулевой элемент. Таким образом, эта матрица невырождена, что доказывает утверждение леммы, т. к. если любые две матрицы в левой части равенства имеют ранг меньше ρ , то их произведение должно быть вырожденным. \square

Из леммы С.9 следует, что $\rho \leq n$. Переидем к доказательству теоремы 13.1. Доказательство случая $\rho = n$ следует из первого пункта леммы С.9, возможная переформулировка которого гласит, что матрица $[\partial T / \partial x]$ невырождена. Обратимся к рассмотрению случая $\rho < n$. Распределение $\Delta = \text{span}\{g\}$ невырождено, инволютивно и имеет размерность единица.¹⁾ По теореме Фробениуса, Δ является полностью интегрируемым. Следовательно, для любой $x_0 \in D$ существуют ее окрестность N_1 и $n - 1$ гладких функций $\phi_1(x), \dots, \phi_{n-1}(x)$ с линейно независимыми дифференциалами, такие что

$$L_g \phi_i(x) = 0 \text{ при } 1 \leq i \leq n - 1, \forall x \in N_1.$$

Поскольку

$$L_g L_f^i h(x) = 0 \text{ при } 0 \leq i \leq \rho - 2$$

и $dh(x), \dots, dL_f^{\rho-2}h(x)$ линейно независимы, функции $h, \dots, L_f^{\rho-2}h$ могут рассматриваться как часть этих $n - 1$ функций. В частности, пусть эти функции соответствуют функциям $\phi_{n-\rho+1}, \dots, \phi_{n-1}$. Поскольку $L_g L_f^{\rho-1}h(x) \neq 0$, вектор-строка $dL_f^{\rho-1}h(x_0)$ линейно независима по отношению к вектор-строкам $d\phi_1(x_0), \dots, d\phi_{n-1}(x_0)$. Поэтому

$$\text{rank} \left[\frac{\partial T}{\partial x}(x_0) \right] = n \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(x_0) \text{ невырождена}$$

и существует окрестность N_2 точки x_0 , такая что отображение $T(x)$, суженное на N_2 , является диффеоморфизмом на N_2 . Положив $N = N_1 \cap N_2$, завершаем доказательство теоремы. \square

C.22. Доказательство теоремы 13.2

Система

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

¹⁾ Заметим, что любое невырожденное распределение размерности единица является инволютивным.

является линеаризуемой обратной связью, если и только если существует достаточно гладкая функция $h(x)$, такая что система

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x)$$

имеет относительную степень n в $D_0 \subset D$, т. е. $h(x)$ удовлетворяет

$$L_g L_f^i h(x) = 0 \text{ при } 0 \leq i \leq n - 2 \quad \text{и} \quad L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0, \forall x \in D_0. \quad (\text{C.93})$$

Таким образом, для доказательства теоремы необходимо показать, что существование $h(x)$, удовлетворяющей (C.93), эквивалентно условиям 1 и 2.

Необходимость: Предположим, что существует $h(x)$, удовлетворяющая (C.93). Из леммы С.9 следует, что $\text{rank } \mathcal{G} = n$. Тогда \mathcal{D} невырождено и имеет размерность $n - 1$. Из (C.92) при $k = 0$ и $\rho = n$ получаем равенство

$$L_g h(x) = L_{ad_{fg}} h(x) = \dots = L_{ad_f^{n-2}g} h(x) = 0,$$

которое может быть переписано в следующей форме

$$dh(x)[g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-2}g(x)] = 0.$$

Из этого равенства следует, что \mathcal{D} полностью интегрируемо и, следовательно (по теореме Фробениуса), инволютивно.

Достаточность: Предположим, что условия 1 и 2 выполнены. Тогда \mathcal{D} невырождено и имеет размерность $n - 1$. Из теоремы Фробениуса следует, что существует $h(x)$, удовлетворяющая равенству

$$L_g h(x) = L_{ad_{fg}} h(x) = \dots = L_{ad_f^{n-2}g} h(x) = 0.$$

С использованием тождества Якоби (упражнение 13.8) можно показать, что

$$L_g h(x) = L_g L_f h(x) = \dots = L_g L_f^{n-2} h(x) = 0.$$

Кроме того,

$$dh(x)\mathcal{G}(x) = dh(x)[g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-1}g(x)] = [0, \dots, 0, L_{ad_f^{n-1}g} h(x)].$$

Поскольку $\text{rank } \mathcal{G} = n$ и $dh(x) \neq 0$, должно выполняться неравенство $L_{ad_f^{n-1}g} h(x) \neq 0$. Используя тождество Якоби, можно показать, что $L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0$, что завершает доказательство теоремы.

C.23. Доказательство теоремы 14.6

Для выполнения анализа заменим уравнение динамики наблюдателя на эквивалентное с масштабированной ошибкой оценки

$$\eta_{ij} = \frac{x_{ij} - \hat{x}_{ij}}{\varepsilon^{\rho_t - j}},$$

где $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq \rho_i$. Следовательно, $\hat{x} = x - D(\varepsilon)\eta$, где

$$\begin{aligned}\eta &= [\eta_1, \dots, \eta_{\rho_1}, \dots, \eta_{m1}, \dots, \eta_{m\rho_m}]^T, \\ D(\varepsilon) &= \text{block diag}[D_1, \dots, D_m], \\ D_i &= \text{diag}[\varepsilon^{\rho_i-1}, \dots, 1]_{\rho_i \times \rho_i}.\end{aligned}$$

Замкнутая система может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B\phi(x, z, \gamma(\vartheta, x - D(\varepsilon)\eta, \zeta)), \\ \dot{z} &= \psi(x, z, \gamma(\vartheta, x - D(\varepsilon)\eta, \zeta)), \\ \dot{\vartheta} &= \Gamma(\vartheta, x - D(\varepsilon)\eta, \zeta), \\ \varepsilon\dot{\eta} &= A_0\eta + \varepsilon B\delta(x, z, \vartheta, D(\varepsilon)\eta)\end{aligned}$$

где

$$\delta(x, z, \vartheta, D(\varepsilon)\eta) = \phi(x, z, \gamma(\vartheta, \hat{x}, \zeta)) - \phi_0(\hat{x}, \zeta, \gamma(\vartheta, \hat{x}, \zeta))$$

и $(1/\varepsilon)A_0 = D^{-1}(\varepsilon)(A - HC)D(\varepsilon)$ — гурвицева $(\rho \times \rho)$ -матрица. Для удобства перепишем систему в компактном виде системы с сингулярными возмущениями

$$\dot{\mathcal{X}} = F(\mathcal{X}, D(\varepsilon)\eta), \quad (C.94)$$

$$\varepsilon\dot{\eta} = A_0\eta + \varepsilon B\Delta(\mathcal{X}, D(\varepsilon)\eta), \quad (C.95)$$

где $F(\mathcal{X}, 0) = f(\mathcal{X})$. Начальными состояниями являются $\mathcal{X}(0) = (x(0), z(0), \vartheta(0)) \in \mathcal{S}$ и $\hat{x}(0) \in \Omega$. Таким образом, получаем $\eta(0) = D^{-1}(\varepsilon)[x(0) - \hat{x}(0)]$. Полагая в (C.95) $\varepsilon = 0$, имеем $\eta = 0$ и редуцированная система

$$\dot{\mathcal{X}} = f(\mathcal{X}), \quad (C.96)$$

представляет собой не что иное, как систему, замкнутую обратной связью по состоянию. Для получения пограничной модели выполним замену переменной времени $\tau = t/\varepsilon$ и положим в полученной системе $\varepsilon = 0$. В результате этого получаем

$$\frac{d\eta}{d\tau} = A_0\eta.$$

Поскольку начало координат системы (C.96) асимптотически устойчиво и \mathcal{R} — его область притяжения, из обратной теоремы Ляпунова 4.17 следует, что существуют гладкая, положительно определенная функция $V(\mathcal{X})$ и непрерывная, положительно определенная функция $U(\mathcal{X})$, определенные при всех $\mathcal{X} \in \mathcal{R}$, такие что

$$V(\mathcal{X}) \rightarrow \infty \text{ при } \mathcal{X} \rightarrow \partial\mathcal{R},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathcal{X}}f(\mathcal{X}) \leq -U(\mathcal{X}), \quad \forall \mathcal{X} \in \mathcal{R}$$

и для любой $c > 0$ множество $\{V(\mathcal{X}) \leq c\}$ является компактным подмножеством \mathcal{R} . Пусть \mathcal{S} — любое компактное множество, принадлежа-

щее внутренности \mathcal{R} . Выберем положительные константы b и c так, чтобы $c > b > \max_{\mathcal{X} \in \mathcal{S}} V(\mathcal{X})$. Тогда

$$\mathcal{S} \subset \Omega_b = \{V(\mathcal{X}) \leq b\} \subset \Omega_c = \{V(\mathcal{X}) \leq c\} \subset \mathcal{R}.$$

Для пограничной системы функция Ляпунова $W(\eta) = \eta^T P_0 \eta$, где P_0 — положительно определенное решение уравнения Ляпунова $P_0 A_0 + A_0^T P_0 = -I$, удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(P_0) \|\eta\|^2 &\leq W(\eta) \leq \lambda_{\max}(P_0) \|\eta\|^2, \\ \frac{\partial W}{\partial \eta} A_0 \eta &\leq -\|\eta\|^2,\end{aligned}$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Вследствие эквивалентности норм, достаточно провести доказательство выполнения (14.114) и (14.115) для 2-норм. Пусть $\Sigma = \{W(\eta) \leq \varrho\varepsilon^2\}$ и $\Lambda = \Omega_c \times \Sigma$. Вследствие глобальной ограниченности функций F и Δ по \hat{x} для всех $\mathcal{X} \in \Omega_c$ и $\eta \in R^p$ имеем

$$\|F(\mathcal{X}, D(\varepsilon)\eta)\| \leq k_1, \quad \|\Delta(\mathcal{X}, D(\varepsilon)\eta)\| \leq k_2,$$

где k_1 и k_2 — положительные константы, не зависящие от ε . Более того, для любой $0 < \tilde{\varepsilon} < 1$ существует L_1 , не зависящая от ε , такая что для всех $(\mathcal{X}, \eta) \in \Lambda$ и любой $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$, выполнено

$$\|F(\mathcal{X}, D(\varepsilon)\eta) - F(\mathcal{X}, 0)\| \leq L_1 \|\eta\|.$$

Далее будет всегда предполагаться, что $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$. Покажем, что существуют положительные константы ρ и ε_1 (зависящие от ρ), такие что компактное множество Λ положительно инвариантно для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$. Для этого необходимо показать, что

$$\dot{V} \leq -U(\mathcal{X}) + \varepsilon k_3$$

и

$$\dot{W} \leq -\frac{1}{\varepsilon} \|\eta\|^2 + 2\|\eta\| \|P_0\| \|B\| k_2 \leq -\frac{1}{\varepsilon} \|\eta\|^2 + 2\|\eta\| \|P_0\| k_2$$

для всех $(\mathcal{X}, \eta) \in \Lambda$, где $k_3 = L_1 L_2 \sqrt{\varrho/\lambda_{\min}(P_0)}$, $\|P_0\| = \lambda_{\max}(P_0)$, $\|B\| = 1$ и L_2 — оценка сверху для $\|\partial V/\partial \mathcal{X}\|$ на Ω_c . Полагая $\varrho = 16k_2^2 \|P_0\|^3$ и $\varepsilon_1 = \beta/k_3$, где $\beta = \min_{\mathcal{X} \in \partial\Omega_c} U(\mathcal{X})$, можно показать, что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ выполнено $\dot{V} \leq 0$ для всех $(\mathcal{X}, \eta) \in \{V(\mathcal{X}) = c\} \times \Sigma$ и $\dot{W} \leq 0$ для всех $(\mathcal{X}, \eta) \in \Omega_c \times \{W(\eta) = \varrho\varepsilon^2\}$. Следовательно, множество Λ является положительно инвариантным.

Далее, рассмотрим начальное состояние $(\mathcal{X}(0), \hat{x}(0)) \in \mathcal{S} \times \Omega$. Можно показать, что соответствующая начальная ошибка $\eta(0)$ удовлетворяет $\|\eta(0)\| \leq k/\varepsilon^{(\rho_{\max}-1)}$ для некоторой неотрицательной константы k , зависящей от \mathcal{S} и Ω , где $\rho_{\max} = \max\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$. Поскольку $\mathcal{X}(0)$ принадлежит внутренности Ω_c , можно показать, что неравенство

$$\|\mathcal{X}(t) - \mathcal{X}(0)\| \leq k_1 t, \quad (C.97)$$

выполнено, если $\mathcal{X}(t) \in \Omega_c$. Таким образом, существует конечный момент времени T_0 , не зависящий от ε , такой что $\mathcal{X}(t) \in \Omega_c$ для всех $t \in [0, T_0]$. На протяжении этого интервала времени выполнено

$$\dot{W} \leq -\frac{1}{2\varepsilon}\|\eta\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|\eta\|^2 + 2k_2\|P_0\|\|\eta\| \leq -\frac{1}{2\varepsilon}\|\eta\|^2 \text{ при } W(\eta) \geq \varrho\varepsilon^2,$$

т. к.

$$W(\eta) \geq \varrho\varepsilon^2 \Rightarrow \|P_0\|\|\eta\|^2 \geq 16k_2^2\|P_0\|^3\varepsilon^2 \Leftrightarrow \|\eta\| \geq 4k_2\|P_0\|\varepsilon.$$

Поэтому

$$W(\eta(t)) \leq \frac{\sigma_2}{\varepsilon^{2(\rho_{\max}-1)}} \exp(-\sigma_1 t/\varepsilon), \quad (C.98)$$

где $\sigma_1 = 1/(2\|P_0\|)$ и $\sigma_2 = k^2\|P_0\|$. Выберем $\varepsilon_2 > 0$ настолько малой, что

$$T(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon}{\sigma_1} \ln \left(\frac{\sigma_2}{\varrho\varepsilon^{2\rho_{\max}}} \right) \leq \frac{1}{2}T_0$$

для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$. Заметим, что ε_2 действительно существует, т. к. $T(\varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $W(\eta(T(\varepsilon))) \leq \varrho\varepsilon^2$ для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$. Выбор $\varepsilon_1^* = \min\{\tilde{\varepsilon}, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ гарантирует, что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1^*$ траектория $(\mathcal{X}(t), \eta(t))$ достигает Λ в течении интервала времени $[0, T(\varepsilon)]$ и остается в этом множестве для всех $t \geq T(\varepsilon)$. Таким образом, траектория является ограниченной для всех $t \geq T(\varepsilon)$. С другой стороны, при $t \in [0, T(\varepsilon)]$ траектория ограничена, т. к. выполнены неравенства (C.97) и (C.98).

Далее, докажем (14.114). Нам известно, что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1^*$ решения принадлежат множеству Λ для всех $t \geq T(\varepsilon)$, где Λ имеет порядок $O(\varepsilon)$ в направлении переменной η . Таким образом, можно найти $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\mu) \leq \varepsilon_1^*$, такую что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3$ справедливо

$$\|\eta(t)\| \leq \mu/2, \quad \forall t \geq T(\varepsilon_3) = \bar{T}(\mu). \quad (C.99)$$

С учетом того факта, что $\dot{V} \leq -U(\mathcal{X}) + \varepsilon k_3$ для всех $(\mathcal{X}, \eta) \in \Lambda$, можно заключить, что

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}U(x) \text{ при } \mathcal{X} \notin \{U(\mathcal{X}) \leq 2k_3\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \nu(\varepsilon)\}. \quad (C.100)$$

Поскольку $U(\mathcal{X})$ является положительно определенной и непрерывной, множество $\{U(\mathcal{X}) \leq \nu(\varepsilon)\}$ является при достаточно малой ε компактным. Пусть $c_0(\varepsilon) = \max_{U(\mathcal{X}) \leq \nu(\varepsilon)} \{V(\mathcal{X})\}$; $c_0(\varepsilon)$ — неубывающая и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_0(\varepsilon) = 0$. Рассмотрим компактное множество $\{V(\mathcal{X}) \leq c_0(\varepsilon)\}$. Выполнено $\{U(\mathcal{X}) \leq \nu(\varepsilon)\} \subset \{V(\mathcal{X}) \leq c_0(\varepsilon)\}$. Выберем $\varepsilon_4 = \varepsilon_4(\mu) \leq \varepsilon_1^*$ настолько малой, что для всех $\varepsilon \leq \varepsilon_4$ множество $\{U(\mathcal{X}) \leq \nu(\varepsilon)\}$ является компактным, множество $\{V(\mathcal{X}) \leq c_0(\varepsilon)\}$ принадлежит внутренности Ω_c и

$$\{V(\mathcal{X}) \leq c_0(\varepsilon)\} \subset \{\|\mathcal{X}\| \leq \mu/2\}. \quad (C.101)$$

Тогда для всех $\mathcal{X} \in \Omega_c$, таких что $\mathcal{X} \notin \{V(\mathcal{X}) \leq c_0(\varepsilon)\}$, получаем неравенство, аналогичное (C.100). Поэтому можно заключить, что мно-

жество $\{V(\mathcal{X}) \leq c_0(\varepsilon)\} \times \Sigma$ является положительно инвариантным и любая траектория в $\Omega_c \times \Sigma$ достигает $\{V(\mathcal{X}) \leq c_0(\varepsilon)\} \times \Sigma$ за конечное время. Другими словами, если выполнено (C.101), то существует конечный момент времени $\bar{T} = \bar{T}(\mu)$, такой что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_4$ выполнено

$$\|\mathcal{X}(t)\| \leq \mu/2, \quad \forall t \geq \bar{T}. \quad (C.102)$$

Положим $\varepsilon_2^* = \varepsilon_2^*(\mu) = \min\{\varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ и $T_2 = T_2(\mu) = \max\{\bar{T}, \bar{T}\}$. Тогда (14.114) следует из (C.99), (C.102), $\hat{x} = x - D(\varepsilon)\eta$ и $\|D(\varepsilon)\| = 1$.

Для доказательства (14.115) разделим интервал $[0, \infty)$ на три подинтервала $[0, T(\varepsilon)]$, $[T(\varepsilon), T_3]$ и $[T_3, \infty)$ и покажем, что на каждом из них выполнено (14.115). Из предельной ограниченности $\mathcal{X}(t)$ (см. (14.114)) и асимптотической устойчивости начала координат системы (C.96) можно заключить, что существует конечный момент времени $T_3 \geq T(\varepsilon)$, не зависящий от ε и такой, что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2^*$ выполнено

$$\|\mathcal{X}(t) - \mathcal{X}_r(t)\| \leq \mu, \quad \forall t \geq T_3. \quad (C.103)$$

С учетом (C.97) можно утверждать, что неравенство

$$\|\mathcal{X}(t) - \mathcal{X}(0)\| \leq k_1 t$$

выполнено на интервале $[0, T(\varepsilon)]$. Аналогично можно показать, что неравенство

$$\|\mathcal{X}_r(t) - \mathcal{X}(0)\| \leq k_1 t$$

выполнено на том же интервале. Следовательно,

$$\|\mathcal{X}(t) - \mathcal{X}_r(t)\| \leq 2k_1 T(\varepsilon), \quad \forall t \in [0, T(\varepsilon)].$$

Поскольку $T(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, существует $0 < \varepsilon_5 \leq \varepsilon_2^*$, такая что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_5$ выполнено

$$\|\mathcal{X}(t) - \mathcal{X}_r(t)\| \leq \mu, \quad \forall t \in [0, T(\varepsilon)]. \quad (C.104)$$

На интервале $[T(\varepsilon), T_3]$ решение $\mathcal{X}(t)$ удовлетворяет

$$\dot{\mathcal{X}} = F(\mathcal{X}, D(\varepsilon)\eta(t)) \text{ при } \|\mathcal{X}(T(\varepsilon)) - \mathcal{X}_r(T(\varepsilon))\| \leq \delta_1(\varepsilon),$$

где $D(\varepsilon)\eta$ имеет порядок $O(\varepsilon)$ и $\delta_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, используя теорему 3.5 можно заключить, что существует $0 < \varepsilon_6 \leq \varepsilon_2^*$, такая что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_6$ выполнено

$$\|\mathcal{X}(t) - \mathcal{X}_r(t)\| \leq \mu, \quad \forall t \in [T(\varepsilon), T_3], \quad (C.105)$$

Пусть $\varepsilon_3^* = \min\{\varepsilon_5, \varepsilon_6\}$. Тогда (14.115) следует из (C.103)–(C.105).

Наконец, в предположении, что начало координат системы (C.96) экспоненциально устойчиво, с использованием обратной теоремы Ляпунова 4.14 можно показать, что существует непрерывно дифферен-

цируемая функция Ляпунова $V_1(\mathcal{X})$, удовлетворяющая в шаре $B_r \subset \mathcal{R}$ неравенствам

$$b_1\|\mathcal{X}\|^2 \leq V_1(\mathcal{X}) \leq b_2\|\mathcal{X}\|^2, \quad \frac{\partial V_1}{\partial \mathcal{X}} F(\mathcal{X}, 0) \leq -b_3\|\mathcal{X}\|^2, \quad \left\| \frac{\partial V_1}{\partial \mathcal{X}} \right\| \leq b_4\|\mathcal{X}\|$$

при некоторых положительных константах r, b_1, b_2, b_3 и b_4 . С учетом локальной липшицевости F и Δ , а также того факта, что $F(0, 0) = 0$ и $\Delta(0, 0) = 0$, можно показать, что композитная функция Ляпунова $V_2(\mathcal{X}, \eta) = V_1(\mathcal{X}) + W(\eta)$ удовлетворяет

$$\dot{V}_2 \leq -\mathcal{Y}^T Q \mathcal{Y},$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} b_3 & \beta_1 \\ -\beta_1 & (1/\varepsilon) - \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \|\mathcal{X}\| \\ \|\eta\| \end{bmatrix}$$

и β_1 и β_2 — некоторые неотрицательные константы. Матрица Q является положительно определенной при достаточно малой ε . Следовательно, существует окрестность \mathcal{N} начала координат, не зависящая от ε , и $\varepsilon_7 > 0$, такие что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_7$ начало координат является экспоненциально устойчивым и любая траектория в \mathcal{N} стремится к началу координат при $t \rightarrow \infty$. Из (14.114) следует, что существует $\varepsilon_8 > 0$, такая что для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_8$ решения, начинающиеся в $\mathcal{S} \times \mathcal{Q}$, достигают \mathcal{N} за конечное время. Следовательно, для любой $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_4^* = \min\{\varepsilon_7, \varepsilon_8\}$ начало координат является экспоненциально устойчивым и $\mathcal{S} \times \mathcal{Q}$ — подмножество области притяжения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ КОММЕНТАРИИ

При работе над этой книгой в качестве основных работ в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений использовались книги Хирша и Смейла (Hirsch and Smale) [81], Хейла (Hale) [75] и Миллера и Мишела (Miller and Michel) [135]; в области теории устойчивости — Хана (Hahn) [72], Красовского (Krasovskii) [107] и Руша Абетса и Лалуа (Rouche, Habets and Laloy) [154]; также использовались книги Видьясагара (Vidyasagar) [201] (первое издание) и Сю и Мейера (Hsu and Meyer) [85]. Соответствующие ссылки по различным темам перечислены ниже для каждой из глав. Приложения, посвященные обзору общих математических результатов и сжимающему отображению, подготовлены на основе соответствующих приложений в книгах Берцекаса (Bertsekas) [27] и Льюенбергера (Luenberger) [121]. Более полное изложение вопросов, рассмотренных в этих приложениях, читатель сможет найти в других книгах по математическому анализу. Мы использовали для этого книгу Апостола (Apostol) [10]. В числе других стандартных книг следует упомянуть книги Рудина (Rudin) [157] и Ройдена (Royden) [156].

Глава 1. Цепь с туннельным диодом и генератор с отрицательным сопротивлением взяты из книги [39]. Описание системы «масса на пружине» основано на работах [134] и [184]. Модель Хопфилда для нейронной сети введена в [82] и [131]. Пример адаптивной системы управления основан на результатах [168]. Полезно прочитать интересную книгу [187], посвященную нелинейным системам и хаосу.

Глава 2. Классические результаты для систем второго порядка, рассмотренных в параграфах 2.1–2.4, могут быть найдены практически в любой книге по анализу нелинейных систем. Наше изложение близко соотносится с превосходной книгой [39]. Результаты параграфа 2.5 основаны на [149]. Параграф 2.6 основан на книгах Хирша и Смейла [81, главы 10 и 11], Гукенхаймера и Холмса [70, параграф 1.8] и Строгатца (Strogatz) [187]. Изложение теории бифуркаций, рассмотренной в параграфе 2.7, основано на [70] и [187].

Глава 3. Материалы параграфов 3.1–3.3 являются стандартными и могут быть найдены в той или иной форме в любом учебнике по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Текст параграфа 3.1 очень близко соотносится с [201]; результаты параграфов 3.2 и 3.3 основаны на [81] и [43]. Принцип сравнения сформулирован в соответствии с работами [75], [135] и [213].

Глава 4. Книги [72], [107] и [154] являются основными в области теории устойчивости Ляпунова. Стиль изложения в параграфе 4.1 соответствует работе [81]. Доказательство теоремы 4.1 взято из книги [81, параграф 9.3], а доказательство теоремы 4.3 основано на [72, параграф 25], [75] и [135]. Принцип инвариантности в параграфе 4.2 изложен также, как в оригинальной работе Ла-Салля [112]. Доказательство леммы 4.1 основано на [154, приложение III]. Применение принципа инвариантности при анализе нейронной сети выполнено стандартным образом и может быть найдено в [82]. Наше изложение этого результата основано на [163]. Обобщение примера 4.11 рассмотрено в [42]. Результаты для независящих от времени линейных систем из параграфа 4.3 взяты из [35]. Доказательство теоремы 4.6 взято из [94]. Доказательство теоремы 4.7 о линеаризации основано на работе [155, параграфы 1.6 и 1.7], в которой также приведено тщательное исследование случая, когда линеаризованная система имеет по крайней мере одно собственное значение в правой полуплоскости, а остальные ее собственные значения расположены на мнимой оси. Доказательство леммы 4.3 взято из [72, параграф 24E]. Формулировка и доказательство леммы 4.4 основано на [72, параграф 24E] и [181, лемма 6.1]. Доказательство леммы 4.5 взято из [72, параграф 35] (локальный результат) и из [118] (глобальный результат). Доказательства теорем 4.8 и 4.9 основаны на идеях, представленных в [72, параграф 25] и [154, параграф 1.6]. Результаты параграфа 4.6 основаны на [201]. Доказательства обратных теорем Ляпунова основаны на следующих работах: теорема 4.14 — [107, теорема 11.1]; теорема 4.16 — [135, параграф 5.13] и [72, параграф 49] и некоторые идеи из [83]; теорема 4.17 — [109] и [118]. Доказательство теоремы 4.18 основано на [135, теорема 9.14] и [45]. Концепция устойчивости по входу–состоянию была введена в работе Сонтага [181], в которой были доказаны основные результаты в этой области. (См. [182].) Наше изложение близко соотносится с великолепной книгой [108].

Глава 5. Исследование свойств \mathcal{L} -устойчивости в параграфах 5.1 и 5.2 основано на [53] и [201]. Результаты параграфа 5.3 о \mathcal{L}_2 -коэффициенте усиления основаны на [199], а также на статьях [209] и [77], [79], посвященных диссипативным системам. Доказательство теоремы 5.4 основано на [53, параграф 2.6], [200, параграф 3.1.2] и [220, параграф 4.3]. Изложение результатов, связанных с теоремой о малом коэффициенте усиления, основано на книге [53] и на статье [192]. Пример 5.14 взят из [192].

Глава 6. Теория пассивности рассмотрена в нескольких работах, включая [77], [78], [172], [31], [108], [192] и [201]. Развернутое исследование положительно вещественных передаточных функций и применение леммы о положительной вещественности выполнено в [6]. Доказательство леммы 6.1 основано на [190] и [206]. Доказательства лемм 6.2 и 6.3 основаны на [4].

Глава 7. Теории абсолютной устойчивости посвящено большое количество работ по теории управления. С исторической точки зрения важной работой является книга [85, параграфы 5.9 и 9.5]. Наше изложение кругового критерия и критерия Попова основано на [85, параграф 9.5 и глава 10], [201], [174, параграфы 8.6–8.9 и приложение H] и [138]. Всеобъемлющее изложение теории абсолютной устойчивости может быть найдено в [140]. Метод описывающей функции детально изложен в [18] и [85, главы 6 и 7]. Наше изложение в параграфе 7.2 следует [128, глава 5]. Доказательство леммы 7.1 взято из [130]. Доказательство теоремы 7.4 основано на [130] и [25]. Анализ ошибок близко соотносится с книгой [174, приложение G], из которой также взят пример 7.14.

Глава 8. Результаты параграфа 8.1 в значительной мере основаны на книгах [34] и [70]. Доказательства теорем 8.1 и 8.3 взяты из [34, глава 2]. Доказательство теоремы 8.2 с использованием теории Ляпунова проще, чем доказательство этого результата в [34]. Мирослав Крстич (Miroslav Krstic) представил для этой книги следствие 8.1. Доказательство леммы 8.1 основано на [72, параграф 33]. Пример 8.10 взят из [210]. Существует обширная литература, посвященная оценке области притяжения. Некоторые методы решения этой задачи описаны в [28], [37], [65], [80], [133] и [143]. Доказательство леммы 8.2 взято из книги [152, стр. 211]. Доказательство теоремы 8.5 основано на [168, теорема 1.5.2]. Обсуждение устойчивости периодических решений в параграфе 8.4 основано на [72, параграф 81], [135, параграф 6.4] и [75, параграф VI.2]. Естественным обобщением этого результата является метод отображения Пуанкаре, описанный в [81, глава 13] и [70, параграф 1.5]; см. также второе издание настоящей книги.

Глава 9. Результаты параграфов 9.1 и 9.2 основаны на обширной литературе по теории robustного управления. Отметим, однако, что основными работами в этой области являются [72, параграф 56] и [107, параграфы 19 и 24]. Аналогичные результаты представлены в [43, параграф III.3] для случая, когда номинальная система является линейной, но результаты в этой работе получены без использования теории Ляпунова и основаны на использовании свойств фундаментальных матриц. Случай не обращающихся в нуль возмущений рассмотрен в [72] и [107] как случай наличия «постоянно действующего возмущения». Результаты для этого случая также связаны с концепцией тотальной устойчивости (см. [72, параграф 56]). Метод сравнения, изложенный в параграфе 9.3, основан на использовании леммы сравнения в литературе по теории управления. Результаты параграфа 9.5 об устойчивости взаимосвязанных систем в значительной мере основаны на обзорной статье [11], а также на монографиях [175] и [132]. Пример для нейронной сети взят из [131]. Исследование медленно меняющихся систем основано на [53, параграф IV.8], [201], [105, параграф 5.2], и [83]. Лемма 9.8 представляет собой лемму 2 из [83], адаптированную для частного случая экспоненциальной устойчивости.

Глава 10. Метод возмущений, представленный в параграфе 10.1, изложен в классической форме. Детальный обзор этого метода приведен в [98] и [141]. Асимптотические результаты в теоремах 10.1 и 10.2 представляют собой адаптацию результатов [84] о системах с сингулярными возмущениями. Параграф 10.3 основан на [75, параграф 3.4]. Изложение метода усреднения в параграфе 10.4 основано на [166], [75, параграф V.3], [73, параграф 3.5] и [70, параграфы 4.1 и 4.2]. Пример маятника с колеблющейся точкой подвеса взят из [194]. Применение метода усреднения для слабо нелинейных колебательных систем, рассмотренное в параграфе 10.5, основано на [75, стр. 183–186]. Изложение метода усреднения для общего случая в параграфе 10.6 основано на [166], [75, параграф V.3] и [168, параграф 4.2].

Глава 11. Изложение метода сингулярных возмущений близко сопротивится с работой [105]. При доказательстве теорем 11.1 и 11.2 использовались идеи из [83]. Мы не рассмотрели вопрос о нахождении приближений высокого порядка. Эти результаты могут быть найдены в [84], [29] или в [145]. Статьи [83], [84] и [29] включены в книгу [104]. Пример 11.11 взят из [194]. Обобщения этого примера рассмотрены в [68]. Доказательства теорем 11.3 и 11.4 основаны на [160].

Глава 12. Метод линеаризации, представленный в параграфе 12.2, описан почти в каждой книге по нелинейному управлению. Использование интегрального управления, описанное в настоящей книге, также является стандартным, однако результаты, представленные в параграфе 12.4, были получены следуя работам [86] и [91]. Настройка обратной связи, представленная в параграфе 12.5, основана на [114] и [96], а также на [15] и [159].

Глава 13. Материалы этой главы, посвященной методу линеаризации обратной связью, основаны в значительной мере на книге [88]. Вводный параграф 13.1 основан на [185, глава 10]. Результаты по локальной стабилизации и слежению основаны на [88, глава 4]. Результаты по глобальной стабилизации были представлены с использованием работ многочисленных авторов. Статьи [30], [46], [119], [161], [188] и [196] и книги [88], [108], [124] и [172] позволяют читателю ознакомиться с основными результатами в области глобальной стабилизации, включая не только рассмотренные в этой книге методы, но также и более общие задачи, основанные на использовании метода бэкстеппинга, рассмотренного в параграфе 14.3. Примеры 13.16, 13.17 и 13.19 взяты из [30], [188] и [62], соответственно.

Глава 14. Параграф, посвященный управлению в скользящем режиме, основан на книгах [198] и [180], а также на статьях [52] и [215]. Анализ непрерывной аппроксимации законов управления со скользящим режимом основан на [55]. Метод построения законов управления с использованием функции Ляпунова изложен следуя работам [45], [19] и [185, глава 10]. См. также работу [44], в которой дан обзор использования функции Ляпунова при построении законов управления для неопределенных нелинейных систем. Задачи робастной стабилизации,

рассмотренные в параграфе 14.2.1 известны также как минимаксные задачи. Метод нелинейного демпфирования, рассмотренный в параграфе 14.2.2, основан на [108, параграф 2.5]. Результаты параграфа, посвященного бэкстеппингу, также основаны на [108], а также на работах [153] и [179]. Книга [108] содержит всеобъемлющее описание процедуры бэкстеппинга, а также ее использования при построении адаптивных законов управления для нелинейных систем. Метод бэкстеппинга является рекурсивным и позволяет понизить степень сложности нелинейных систем. Другими рекурсивными методами являются методы форвардинга (forwarding) и интерлейсинга (interlacing) [153], [172], а также метод построения композитного управления для систем с сингулярными возмущениями [105]. Результаты, касающиеся построения управления на основе пассивности, основаны на книгах [172] и [199]. Многочисленные примеры применения этого метода для управления физическими системами могут быть найдены в [120] и [146]. Параграф, посвященный наблюдателям с сильной обратной связью, основан на работах [56] и [16].

Другие работы, на которые мы ссылались в процессе изложения материалов этой книги, представлены в списке литературы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Aeyels and J. Peuteman. A new asymptotic stability criterion for nonlinear time-varying differential equations. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 43:968- 971, 1998.
- [2] J. K. Aggarwal. *Notes on Nonlinear Systems*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.
- [3] B. Aloliwi, H. K. Khalil, and E. G. Strangas. Robust speed control of induction motors. In *Proc. American Control Conf.*, Albuquerque, NM, 1997. WP16:4.
- [4] B. D. O. Anderson. A system theory criterion for positive real matrices. *SIAM J. Control*, 5:171-182, 1967.
- [5] B. D. O. Anderson, R. R. Bitmead, C. R. Johnson, Jr., P. V. Kokotovic, R. L. Kosut, I. M. Y. Mareels, L. Praly, and B. D. Riedle. *Stability of Adaptive Systems*. MIT Press, Cambridge, MA, 1986.
- [6] B. D. O. Anderson and S. Vongpanitlerd. *Network Analysis and Synthesis: A Modern Systems Theory Approach*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [7] A. A. Andronov, A. A. Vitt, and S. E. Khaikin. *Theory of oscillators*. Dover, New York, 1966. [А. А.Андронов, А.А.Витт и С. Э. Хайкин, "Теория колебаний", 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959.]
- [8] A. M. Annaswamy. On the input-Output behavior of a class of second-Order nonlinear adaptive systems. In *American Control Conference*, pages 731- 732, 1989.
- [9] P. J. Antsaklis and A. N. Michel. *Linear Systems*. McGraw-Hill, New York, 1997.
- [10] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1957.
- [11] M. Araki. Stability of large-scale nonlinear systems-quadratic-Order theory of composite-system method using M -matrices. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-23:129-141, 1978.
- [12] B. Armstrong and C. Canudas de Wit. Friction modeling and compensation. In W. Levine, editor, *The Control Handbook*, pages 1369-1382. CRC Press, 1996.
- [13] D. K. Arrowsmith and C. M. Place. *Ordinary Differential Equations*. Chapman and Hall, London, 1982.
- [14] R. B. Ash. *Real Analysis and Probability*. Academic Press, New York, 1972.
- [15] K. J. Astrom and B. Wittenmark. *Adaptive Control*. Addison-Wesley, Reading, MA, second edition, 1995.
- [16] A. N. Atassi and H. K. Khalil. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44:1672-1687, 1999.
- [17] D. P. Atherton. *Stability of Nonlinear Systems*. John Wiley, New York, 1981.
- [18] D. P. Atherton. *Nonlinear Control Engineering*. Van Nostrand Reinhold, London, student edition, 1982.
- [19] B. R. Barmish, M. Corless, and G. Leitmann. A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems. *SIAM J. Control & Optimization*, 21:246-255, 1983.
- [20] T. Basar and P. Bernhard. *H_∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems*. Birkhäuser, Boston, second edition, 1995.
- [21] R. Bellman. *Introduction to Matrix Analysis*. McGraw-Hill, New York, second edition, 1970. [Беллман Р. Введение в теорию матриц: пер. с англ. 2-е изд. М.: Наука, 1976.]
- [22] R. E. Bellman, J. Bentsman, and S. M. Meerkov. Vibrational control of nonlinear systems: Vibrational controllability and transient behavior. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-31:717-724, 1986.
- [23] B.W. Bequette. *Process Dynamics: Modeling, Analysis, and Simulation*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.
- [24] A. R. Bergen, L. O. Chua, A. I. Mees, and E. W. Szeto. Error bounds for general describing function problems. *IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-29*:345-354, 1982.
- [25] A. R. Bergen and R. L. Frank. Justification of the describing function method. *SIAM J. Control*, 9:568-589, 1971.
- [26] M. Berger and M. Berger. *Perspectives in Nonlinearity*. W. A. Benjamin, New York, 1968.
- [27] D. P. Bertsekas. *Dynamic Programming*. Prentice-HaU, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- [28] F. Blanchini. Set invariance in control-a survey. *Automatica*, 35:1747-1767, 1999.
- [29] V. F. Butuzov, A. B. Vasileva, and M. V. Fedoryuk. Asymptotic methods in the theory of ordinary differential equations. In R. V. Gamkrelidze, editor, *Mathematical Analysis*, volume 8 of *Progress in Mathematics*, pages 1-82. Plenum Press, New York, 1970. [В.Ф.Бутузов, А.Б.Васильева, М.В.Федорюк. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. Т.5. ВИНТИИ, 1967.]
- [30] C. I. Byrnes and A. Isidori. Asymptotic stabilization of minimum phase non- linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 36:1122-1137, 1991.
- [31] C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 36:1228-1240, 1991.
- [32] C. I. Byrnes, F. D. Priscoli, and A. Isidori. *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*. Birkhauser, Boston, 1997.

- [33] F. M. Callier and C. A. Desoer. *Multivariable Feedback Systems*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [34] J. Carr. *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [35] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.
- [36] H. D. Chiang, M. W. Hirsch, and F. F. Wu. Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 33:16-27, 1988.
- [37] H. D. Chiang and J. S. Thorp. Stability regions of nonlinear dynamical systems: a constructive methodology. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34:1229-1241, 1989.
- [38] J. H. Chow, editor. *Time-Scale Modeling of Dynamic Networks with Applications to Power Systems*. Number 46 in Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [39] L. O. Chua, C. A. Desoer, and E. S. Kuh. *Linear and Nonlinear Circuits*. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [40] L. O. Chua and Y. S. Tang. Nonlinear oscillation via Volterra series. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-29: 150-168, 1982.
- [41] C. M. Close and D. K. Frederick. *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*. Houghton Mifflin, Boston, second edition, 1993.
- [42] M. A. Cohen and S. Grossberg. Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks. *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern.*, 13:815-826, 1983.
- [43] W. A. Coppel. *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*. D. C. Heath, Boston, 1965.
- [44] M. Corless. Control of uncertain nonlinear systems. *J. Dyn. Sys. Measurement and Control*, 115:362-372, 1993.
- [45] M. Corless and G. Leitmann. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-26:1139-1144, 1981.
- [46] J. M. Coron, L. Praly, and A. Teel. Feedback stabilization of nonlinear systems: sufficient conditions and Lyapunov and input-output techniques. In A. Isidori, editor, *Trends in Control*, pages 293-347. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [47] A. M. Dabroom and H. K. Khalil. Output feedback sampled-data control of nonlinear systems using high-gain observers. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 46, 2001.
- [48] M. A. Dahleh and I. J. Diaz-Bobillo. *Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.
- [49] E. J. Davison. The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-21:25-34, 1976.
- [50] D. M. Dawson, J. Hu, and T. C. Burg. *Nonlinear Control of Electric Machinery*. Marcel-Dekker, New York, 1998.
- [51] R. A. Decarlo. *Linear Systems*. Prentice-HaU, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

- [52] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial. *Proc. of IEEE*, 76:212-232, 1988.
- [53] C. A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback Systems: Input-Output Properties*. Academic Press, New York, 1975. [Дезоэр Ч., Видьясагар М. Системы с обратной связью: вход-выходные соотношения 1983.]
- [54] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34:831-847, 1989.
- [55] F. Esfandiari and H. K. Khalil. Stability analysis of a continuous implementation of variable structure control. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 36:616-620, 1991.
- [56] F. Esfandiari and H. K. Khalil. Output feedback stabilization of fully linearizable systems. *Int. J. Contr.*, 56:1007-1037, 1992.
- [57] M. Fiedler and V. Ptak. On matrices with nonnegative off-diagonal elements and positive principal minors. *Czech. Math. J.*, 12:382-400, 1962.
- [58] A. F. Filippov. Differential equations with discontinuous right-hand side. *Amer. Math. Soc. Translations*, 42:199-231, 1964. [Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.]
- [59] A. M. Fink. *Almost Periodic Differential Equations*. Number 377 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1974.
- [60] T. I. Fossen. *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. John Wiley& Sons, New York, 1994.
- [61] B. A. Francis. *A course in H_∞ control theory*, volume 88 of *Lect. Notes Contr. Inf Sci.* Springer-Verlag, New York, 1987.
- [62] R. A. Beeman and P. V. Kokotovic. Optimal nonlinear controllers for feedback linearizable systems. In *Proc. American Control Conf.*, pages 2722-2726, Seattle, WA, 1995.
- [63] F. R. Gantmacher. *Theory of Matrices*. Chelsea Publ., Bronx, NY, 1959. [Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. ФИЗМАТЛИТ, 2004.]
- [64] F. M. Gardner. *Phaselock Techniques*. Wiley-Interscience, New York, 1979.
- [65] R. Genesio, M. Tartaglia, and A. Vicino. On the estimation of asymptotic stability regions: State of the art and new proposals. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-30:747-755, 1985.
- [66] S. T. Glad. On the gain margin of nonlinear and optimal regulators. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-29:615-620, 1984.
- [67] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, Baltimore, 1983. (Имеется русский перевод: Голуб Дж.Х., Ван Лоун Ч.Ф. Матричные вычисления. М. Мир 1999.)
- [68] J. Grasman. *Asymptotic Methods for Relaxation Oscillations and Applications*. Number 63 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [69] M. Green and D. J. N. Limebeer. *Linear Robust Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [70] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, 1983. [Гукенхаймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркции векторных полей. РХД 2002 г.]

- [71] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential Topology*. Prentice-HaU, Englewood Cliffs, NJ, 1974.
- [72] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer-Verlag, New York, 1967.
- [73] A. Halanay. *Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags*, volume 23 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, New York, 1966.
- [74] J. Hale and H. Kocak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [75] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [76] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. Wiley, New York, 1964. [Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: Мир, 1970.]
- [77] D. Hill and P. Moylan. The stability of nonlinear dissipative systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-21:708-711, 1976.
- [78] D. J. Hill and P. J. Moylan. Stability results for nonlinear feedback systems. *Automatica*, 13:377-382, 1977.
- [79] D. J. Hill and P. J. Moylan. Dissipative dynamical systems: basic input-output and state properties. *J. of The Franklin Institute*, 309:327-357, 1980.
- [80] H. Hindi and S. Boyd. Analysis of linear systems with saturation using convex optimization. In *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 3081-3086, Tampa, FL, 1998.
- [81] M. W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- [82] J. J. Hopfield. Neurons with graded response have coUective computational properties like those of two-state neurons. *Proc. of the Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 81:3088-3092, May 1984.
- [83] F. C. Hoppensteadt. Singular perturbations on the infinite interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 123:521-535, 1966.
- [84] F. C. Hoppensteadt. Properties of solutions of ordinary differential equations with small parameters. *Comm. Pure Appl. Math.*, 24:807-840, 1971.
- [85] J. C. Hsu and A. U. Meyer. *Modern Control Principles and Applications*. McGraw-Hill, New York, 1968. [Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее приложения. М.: Машиностроение, 1972.]
- [86] J. Huang and W. J. Rugh. On a nonlinear multivariable servomechanism problem. *Automatica*, 26:963-972, 1990.
- [87] P. A. Ioannou and J. Sun. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.
- [88] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1995.
- [89] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems II*. Springer-Verlag, London, 1999.
- [90] A. Isidori and A. Astolfi. Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 37:1283-1293, 1992.
- [91] A. Isidori and C. I. Byrnes. Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 35:131-140, 1990.

- [92] A. Isidori, S. S. Sastry, P. V. Kokotovic, and C. I. Byrnes. Singularly perturbed zero dynamics of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 37:1625- 1631, 1992.
- [93] Z. P. Jiang, A. R. Teel, and L. Praly. Small gain theorem for ISS systems and applications. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 7:95-120, 1994.
- [94] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [95] R. E. Kalman and J. E. Bertram. Control system analysis and design via the “second method” of Lyapunov, parts I and II. *Journal of Basic Engineering*, 82:371-400, 1960.
- [96] I. Kaminer, A. M. Pascoal, P. P. Khargonekar, and E. E. Coleman. A velocity algorithm for the implementation of gain scheduled controllers. *Automatica*, 31:1185-1191, 1995.
- [97] T. R. Kane, P. W. Likins, and D. A. Levinson. *Spacecraft Dynamics*. McGraw- Hill, New York, 1982.
- [98] J. Kevorkian and J. D. Cole. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Number 34 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [99] H. K. Khalil. Stability analysis of nonlinear multiparameter singularly perturbed systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-32:260-263, 1987.
- [100] H. K. Khalil. High-gain observers in nonlinear feedback control. In H. Nijmeijer and T. I. Fossen, editors, *New Directions in Nonlinear Observer Design*, volume 244 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 249- 268. Springer, London, 1999.
- [101] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen, and M. A. Rotea. H_∞ -Optimal control with state feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 33:786-788, 1988.
- [102] H. W. Knobloch and B. Aulbach. Singular perturbations and integral manifolds. *J. Math. Phys. Sci.*, 18:415-424, 1984.
- [103] P. Kokotovic and M. Arcak. Constructive nonlinear control: a historical perspective. *Automatica*, 37:637-662, 2001.
- [104] P. V. Kokotovic and H. K. Khalil, editors. *Singular Perturbations in Systems and Control*. IEEE Press, New York, 1986.
- [105] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, and J. O'Reilly. *Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design*. Academic Press, New York, 1986. Repub- lished by SIAM, 1999.
- [106] M. A. Krasnoselskii and A. V. Pokrovskii. *Systems with Hysteresis*. Springer- Verlag, Berlin, 1989. [Красносельский М.А., Покровский А.В., Системы с гистерезисом. “Наука”, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1983.]
- [107] N. N. Krasovskii. *Stability of Motion*. Stanford University Press, Stanford, 1963. [Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.- М.: Физматгиз, 1959.]
- [108] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. Wiley-Interscience, New York, 1995.
- [109] J. Kurzweil. On the inversion of Lyapunov’s second theorem on stability of motion. *Amer. Math. Soc. Transl.*, Ser.2, 24:19-77, 1956.

- [110] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, New York, 1972. [Квакернаак, Х. Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. - М., Мир, 1977.]
- [111] S. Lang. *Real and Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1993.
- [112] J. P. LaSalle. Some extensions of Lyapunov's second method. *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-7:520-527, 1960.
- [113] J. P. LaSalle. An invariance principle in the theory of stability. In J. K. Hale and J. P. LaSalle, editors, *Differential Equations and Dynamical Systems*, pages 277-286. Academic Press, New York, 1967.
- [114] D. A. Lawrence and W. J. Rugh. Gain scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant. *Automatica*, 31:381-390, 1995.
- [115] S. Lefschetz. *Differential Equations: Geometric Theory*. Wiley-Interscience, New York, 1963. [Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1961]
- [116] S. Lefschetz. *Stability of Nonlinear Control Systems*. Academic Press, New York, 1965. [Лефшец С. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления -М.: Мир, 1967.]
- [117] W. Leonard. *Control of Electrical Drives*. Springer, Berlin, second edition, 1996.
- [118] Y. Lin, E. Sontag, and Y. Wang. A smooth converse lyapunov theorem for robust stability. *SIAM J. Contr. Optim.*, 34:124-160, 1996.
- [119] Z. Lin and A. Saberi. Robust semi-global stabilization of minimum-phase input-Output linearizable systems via partial state and output feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 40:1029-1041, 1995.
- [120] R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeland, and B. Maschke. *Dissipative Systems Analysis and Control: Theory and Applications*. Springer, London, 2000.
- [121] D. G. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods*. Wiley, New York, 1969.
- [122] D. G. Luenberger. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.
- [123] I. M. Y. Mareels and D. J. Hill. Monotone stability of nonlinear feedback systems. *J. Mathematical Systems, Estimation and Control*, 2:275-291, 1992.
- [124] R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive & Robust*. Prentice-Hall, London, 1995.
- [125] J. L. Massera. Contributions to stability theory. *Annals. of Mathematics*, 64:182-206, 1956.
- [126] I. D. Mayergoyz. *The Preisach Model for Hysteresis*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [127] S. M. Meerkov. Principle of vibrational control: Theory and applications. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-25:755-762, 1980.
- [128] A. I. Mees. *Dynamics of Feedback Systems*. Wiley, New York, 1981.
- [129] A. I. Mees. Describing functions: ten years on. *IMA J. Applied Mathematics*, 32:221-233, 1984.
- [130] A. I. Mees and A. R. Bergen. Describing functions revisited. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-20:473-478, 1975.

- [131] A. N. Michel, J. A. Farrel, and W. Porod. Qualitative analysis of neural networks. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 36:229-243, 1989.
- [132] A. N. Michel and R. K. Miller. *Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems*. Academic Press, New York, 1977.
- [133] A. N. Michel, N. R. Sarabudla, and R. K. Miller. Stability analysis of complex dynamical systems. *Circuits Systems Signal Process*, 1:171-202, 1982.
- [134] R. E. Mickens. *Introduction to Nonlinear Oscillations*. Cambridge University Press, London, 1981.
- [135] R. K. Miller and A. N. Michel. *Ordinary Differential Equations*. Academic Press, New York, 1982.
- [136] R. K. Miller and A. N. Michel. An invariance theorem with applications to adaptive control. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 35:744-748, 1990.
- [137] N. Minorsky. *Nonlinear Oscillations*. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1962.
- [138] J. B. Moore and B. D. O. Anderson. Applications of the multivariable Popov criterion. *Int. J. Control*, 5:345-353, 1967.
- [139] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [140] K. S. Narendra and J. Taylor. *Frequency Domain Methods for Absolute Stability*. Academic Press, New York, 1973.
- [141] A. H. Nayfeh. *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley, New York, 1981. [Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.]
- [142] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamic Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [143] E. Noldus and M. Loccufier. A new trajectory reversing method for the estimation of asymptotic stability regions. *Int. J. Contr.*, 61:917-932, 1995.
- [144] H. Olsson. *Control Systems with Friction*. PhD thesis, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1996.
- [145] R. E. O'Malley. *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [146] R. Ortega, A. Loria, P. J. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer, London, 1998.
- [147] B. E. Paden and S. S. Sastry. A calculus for computing Filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-34:73-82, 1987.
- [148] M. A. Pai. *Power System Stability Analysis by the Direct Method of Lyapunov*. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [149] T. S. Parker and L. O. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [150] R. V. Patel and M. Toda. Qualitative measures of robustness for multivariable systems. In *Joint Automatic Control Conference*, number TP8-A, 1980.
- [151] W. R. Perkins and J. B. Cruz. *Engineering of Dynamic Systems*. John Wiley, New York, 1969.
- [152] V. M. Popov. *Hyperstability of Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1973. [Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970.]

- [153] Z. Qu. *Robust Control of Nonlinear Uncertain Systems*. Wiley-Interscience, New York, 1998.
- [154] N. Rouche, P. Habets, and M. Laloy. *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*. Springer-Verlag, New York, 1977. [Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. - М.: Мир, 1980.]
- [155] N. Rouche and J. Mawhin. *Ordinary Differential Equations*. Pitman, Boston, 1973.
- [156] H. L. Royden. *Real Analysis*. Macmillan, New York, 1963.
- [157] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York, third edition, 1976. [Рудин У. Основы математического анализа. - М.: Мир, 1966.]
- [158] W. J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, second edition, 1996.
- [159] W. J. Rugh and J. S. Shamma. Research on gain scheduling. *Automatica*, 36:1401-1425, 2000.
- [160] A. Saberi and H. Khalil. Quadratic-type Lyapunov functions for singularly perturbed systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-29:542-550, 1984.
- [161] A. Saberi, P. V. Kokotovic, and H. J. Sussmann. Global stabilization of partially linear composite systems. *SIAM J. Control & Optimization*, 28:1491-1503, 1990.
- [162] M. Safonov. *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*. MIT Press, Cambridge, MA, 1980.
- [163] F. M. A. Salam. A formulation for the design of neural processors. In *International Conference on Neural Networks*, pages I-173-I-180, July 1988.
- [164] I. W. Sandberg. On the L_2 -boundedness of solutions of nonlinear functional equations. *Bell Sys. Tech. J.*, 43:1581-1599, 1964.
- [165] I. W. Sandberg. Global inverse function theorems. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-27:998-1004, 1980.
- [166] J. A. Sanders and F. Verhulst. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Number 59 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [167] S. Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Springer, New York, 1999.
- [168] S. Sastry and M. Bodson. *Adaptive Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [169] S. Sastry, J. Hauser, and P. Kokotovic. Zero dynamics of regularly perturbed systems are singularly perturbed. *Systems Contr. Lett.*, 13:299-314, 1989.
- [170] P. W. Sauer and M. A. Pai. *Power System Dynamics and Stability*. Prentice- Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.
- [171] L. Sciavicco and B. Siciliano. *Modeling and Control of Robot Manipulators*. McGraw-Hill, New York, 1996.
- [172] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. Kokotovic. *Constructive Nonlinear Control*. Springer, London, 1997.
- [173] D. Shevitz and B. Paden. Lyapunov stability theory of nonsmooth systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 39:1910-1914, 1994.
- [174] D. D. Siljak. *Nonlinear Systems*. Wiley, New York, 1969.
- [175] D. D. Siljak. *Large Scale Dynamic Systems: Stability and Structure*. North- Holland, New York, 1978.

- [176] H. Sira-Ramirez. Harmonic response of variable-structure-controlled van der Pol oscillators. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-34:103-106, 1987.
- [177] H. Sira-Ramirez. A dynamical variable structure control strategy in asymptotic output tracking problem. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 38:615-620, 1993.
- [178] G. R. Slemon and A. Straughen. *Electric Machines*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1980.
- [179] J. J. E. Slotine and J. K. Hedrick. Robust input-Output feedback linearization. *Int. J. Contr.*, 57:1133-1139, 1993.
- [180] J. J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [181] E. D. Sontag. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34:435-443, 1989.
- [182] E. D. Sontag. On the input-to-state stability property. *European J. Control*, 1, 1995.
- [183] E. D. Sontag and Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems Contr. Lett.*, 24:351-359, 1995.
- [184] S. C. Southward. *Modeling and Control of Mechanical Systems with Stick-Slip Friction*. PhD thesis, Michigan State University, East Lansing, 1990.
- [185] M. W. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. Wiley, New York, 1989.
- [186] E. G. Strangas, H. K. Khalil, B. Aloliwi, L. Laubinger, and J. Miller. Robust tracking controllers for induction motors without rotor position sensor: analysis and experimental results. *IEEE Trans. Energy conversion*, 14:1448-1458, 1999.
- [187] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison Wesley, Reading, MA, 1994.
- [188] H. J. Sussmann and P. V. Kokotovic. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 36:424-440, 1991.
- [189] F. L. Swern. Analysis of oscillations in systems with polynomial-type nonlinearities using describing functions. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-28:31- 41, 1983.
- [190] G. Tao and P. A. Ioannou. Strictly positive real matrices and the Lefschetz-Kalman-Yakubovitch lemma. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 33:1183-1185, 1988.
- [191] A. Teel and L. Praly. Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback. *SIAM J. Control & Optimization*, 33, 1995.
- [192] A. R. Teel, T. T. Georgiou, L. Praly, and E. Sontag. Input-Output stability. In W. Levine, editor, *The Control Handbook*. CRC Press, 1995.
- [193] A.R. Teel and L. Praly. Results on converse lyapunov functions from class \mathcal{KL} estimates. In *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 2545-2550, Phoenix, Arizona, 1999.
- [194] A. N. Tikhonov, A. B. Vasileva, and V. M. Volosov. Ordinary differential equations. In E. Roubine, editor, *Mathematics Applied to Physics*, pages 162- 228. Springer-Verlag, New York, 1970.

- [195] A. Tonnellier, S. Meignen, H. Bosch, and J. Demongeot. Synchronization and desynchronization of neural oscillators. *Neural Networks*, 12: 1213-1228, 1999.
- [196] J. Tsinias. Partial-state global stabilization for general triangular systems. *Systems Contr. Lett.*, 24:139-145, 1995.
- [197] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor & Francis, London, 1999.
- [198] V. I. Utkin. *Sliding Modes in Optimization and Control*. Springer-Verlag, New York, 1992. [Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления.-М.: Наука, 1982.]
- [199] A. van der Schaft. *L₂-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Springer, London, 2000.
- [200] M. Vidyasagar. *Large Scale Interconnected Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [201] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-HaU, Englewood Cliffs, NJ, second edition, 1993.
- [202] T. L. Vincent and W. J. Grantham. *Nonlinear and Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, New York, 1997.
- [203] A. Visintin. *Differential Models of Hysteresis*. Springer, Berlin, 1994.
- [204] J.V. Wait, L.P. Huelsman, and G.A. Korn. *Introduction to Operational Amplifiers*. McGraw-Hill, New York, 1975.
- [205] C.-J. Wan, D.S. Bernstein, and V.T. Coppola. Global stabilization of the oscillating eccentric rotor. In *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 4024-4029, Orlando, FL, 1994.
- [206] J. T. Wen. Time domain and frequency domain conditions for strict positive realness. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 33:988-992, 1988.
- [207] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [208] J. C. Willems. *The Analysis of Feedback Systems*. MIT Press, Cambridge, MA, 1971.
- [209] J. C. Willems. Dissipative dynamical systems, part I: general theory. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 45:321-351, 1972.
- [210] J. L. Willems. The computation of finite stability regions by means of open Lyapunov surfaces. *Int. J. Control*, 10:537-544, 1969.
- [211] H. H. Woodson and J. R. Melcher. *Electromechanical Dynamics, Part I. Discrete Systems*. John Wiley, New York, 1968.
- [212] F. F. Wu and C. A. Desoer. Global inverse function theorem. *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-19:199-201, 1972.
- [213] T. Yoshizawa. *Stability Theory By Liapunov's Second Method*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.
- [214] D. C. Youla. On the factorization of rational matrices. *IRE Trans. Information Theory*, IT-7:172-189, 1961.
- [215] K. D. Young, V. I. Utkin, and U. Ozguner. A control engineer's guide to sliding mode control. *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.*, 7:328-342, 1999.
- [216] J. Zaborszky, G. Huang, B. Zheng, and T. C. Leung. On the phase portrait of a class of large nonlinear dynamic systems such as the power system. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 33:4-15, 1988.
- [217] G. Zames. On the input-Output stability of nonlinear time-varying feedback

- systems, part I. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-11:228-238, 1966.
- [218] G. Zames. On the input-Output stability of nonlinear time-varying feedback systems, part II. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-11:465-477, 1966.
- [219] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-26:301-320, 1981.
- [220] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [221] V. I. Zubov. *Methods of A.M. Lyapunov and Their Application*. Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1964. [Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Изд-во ЛГУ, 1957.]

ДОПОЛНЕНИЕ. ОБЗОР РАБОТ ПО НЕЛИНЕЙНЫМ СИСТЕМАМ

Теория управления нелинейными системами за последние два десятилетия развивалась, пожалуй, быстрее, чем другие области теории управления и в настоящее время, судя по числу докладов на крупнейших международных конференциях, доминирует в теории управления. В книге Х.Халила дается всеобъемлющее и достаточно сбалансированное представление о современном состоянии этой теории. В то же время ряд заслуживающих внимания работ последних лет, прежде всего, ряд отечественных работ, не нашли отражение в книге. Краткий библиографический обзор некоторых работ приведен ниже¹⁾.

Анализ систем. Анализ системы начинается с исследования существования и единственности решений, а также устойчивости систем. Ряд классических результатов по условиям существования и устойчивости колебаний для систем 2-го порядка приведен в главе 2 книги Х.Халила. В работах Г.А. Леонова и его учеников на основе использования функций ляпуновского типа получены обобщения классических критериев орбитальной устойчивости Пуанкаре и Дюлака на системы произвольного порядка, а также обобщение теоремы Андронова-Витта об асимптотической орбитальной устойчивости. Изучено также понятие устойчивости по Жуковскому, занимающее промежуточное место между устойчивостью по Пуанкаре (орбитальной) и устойчивостью по Ляпунову [Д39, Д41]. Частотные условия существования и устойчивости состояний равновесия и колебаний в импульсных системах получены в [Д22]. Отметим, что частотные методы исследования показали высокую эффективность для систем, представимых в виде линейной части и нелинейности в цепи обратной связи (см. Рис. 7.1), часто называемых *системами Лурье*.

Подход к нелинейным колебаниям на основе понятий периодических движений и предельных циклов доминировал в теории и в многочисленных приложениях в течение нескольких десятилетий, начиная с работ А.А.Андронова и его школы. Однако полученные к настоящему времени условия существования и устойчивости периодических колебаний зачастую оказываются слишком ограничительными. Например, даже в классической задаче о предельных циклах в линейной системе с реле условия существования глобально устойчивого предельного цикла получены лишь недавно и требуют численной проверки набора линей-

ных матричных неравенств (LMI) [Д80]. С другой стороны, все чаще в природе и технике наблюдаются движения более общего характера, чем периодические. Например, в теории так называемых *фазовых систем*, описывающих динамику электрических машин, систем фазовой автоподстройки частоты, тактовых генераторов представляют интерес непериодические движения, при которых часть координат меняется периодически, а другая часть – монотонно. Такие движения называются циклами второго рода. В книгах [Д21, Д41] изложены эффективные частотные условия существования и устойчивости таких движений. Получены также условия фазовой синхронизации – режима, при котором разности нециклических координат фазовых подсистем стремятся к конечному пределу [Д40, Д42]. Ключевым инструментом исследования являются функции ляпуновского типа и лемма Якубовича-Калмана (Калмана Якубовича-Попова, см. Леммы 6.2, 6.3 в книге Х.Халила).

Важный класс задач связан с изучением вынужденных колебаний нелинейных систем под влиянием непериодических, но ограниченных внешних воздействий. В частности существование единственного и глобально асимптотически устойчивого ограниченного решения в системе $\dot{x} = F(x, t)$ означает, что в системе имеется единственный предельный рабочий режим. Это свойство называется конвергентностью [Д27]. Стандартным достаточным условием конвергентности является *условие Демидовича*: равномерная отрицательность всех собственных чисел симметризованной матрицы линеаризованной системы $\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} + \left[\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \right]^T$. Частотный критерий конвергентности был получен в работе [Д74]. Новые критерии и применения можно найти в работах [Д78, Д92].

Однако требование конвергентности тоже может оказаться слишком жестким: в частности, при наличии локальных неустойчивостей. Наиболее широким из известных понятий колебательности является так называемая *колебательность по Якубовичу* [Д41, Д76]. Напомним, что система $\dot{x} = F(x, t)$ называется колебательной по Якубовичу по выходу $\psi = \eta(x)$ если для почти всех $x_0 \in R^n$ решения $x(t, x_0)$ системы ограничены и для почти всех начальных условий выполнено:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(x(t, x_0)) < \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \psi(x(t, x_0)).$$

Решения колебательной системы могут иметь нерегулярный, в том числе хаотический характер. В.А. Якубовичем был получен частотный критерий колебательности для систем Лурье [Д76]. Условия колебательности для соединения двух нелинейных систем получены в [Д32] с использованием двух функций Ляпунова.

Еще одно направление исследований связано с понятием *частичной устойчивости*. Специальным случаем этого свойства является устойчивость по части переменных, систематически изучавшаяся В.В.Румянцевым и его последователями, начиная с 1957 года

¹⁾ Автор Дополнения приносит извинения за возможные проявления субъективности в оценках и составлении списка дополнительной литературы.

[Д20, Д59, Д60]. В книге [Д49] на языке функций Ляпунова даны условия частичной устойчивости по отношению к некоторой функции состояния системы (Теорема 2.14). Одним из важных применений частичной устойчивости являются задачи синхронизации и анализа синхронных режимов, где состояния или выходы двух или нескольких подсистем изменяются согласованно. Следует отметить, что свойство устойчивости по отношению к функциям было введено еще в 1892 году в основополагающей работе А.М.Ляпунова, где оно, однако не было исследовано.

В книге интенсивно используется знаменитая Лемма Якубовича-Калмана, называемая также Леммой Калмана-Якубовича-Попова или частотной теоремой), см. леммы 6.1–6.3. О современных трактовках и обобщениях и применениях Леммы см. [Д26, Д51]. Неточность, имеющуюся в формулировке леммы 6.1 легко устранить с помощью формулируемой ниже «полувырожденной» версии частотной теоремы, установленной В.А. Якубовичем в 1966 г. [Д21, Д75].

Введем следующие обозначения (через $\operatorname{Re} K$ обозначается эрмитова часть матрицы: $\operatorname{Re} K = (K + K^*)/2$):

$$Q(H) = \begin{bmatrix} -(HA + A^*H + R) & -(Ha + b) \\ -(Ha + b)^* & \rho \end{bmatrix},$$

$$\pi(\lambda) = \rho + 2\operatorname{Re}(b^*(\lambda I_n - A)^{-1}a) + a^*(\lambda^*I_n - A^*)^{-1}R(\lambda I_n - A)^{-1}a,$$

где $H = H^*$ – $(n \times n)$ -матрица, $R = R^*$ – $(n \times n)$ -матрица, $\rho = \rho^*$ – $(m \times m)$ -матрица, a, b – $(n \times m)$ -матрицы, λ – комплексное число. Пусть $m = m_1 + m_2$, где m_1, m_2 – целые числа, и пусть матрицы ρ, π, a разбиты на блоки следующим образом:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

и $\rho_{12} = \rho_{21}^* = 0$, $\rho_{22} = 0$.

Теорема [Д75]. Пусть A – гурвицева матрица, $\rho_{11} \geq 0$ и $\operatorname{rank} a_2 = m_2$. Для существования матрицы $H = H^*$ такой, что $Q(H) \geq 0$ и $\operatorname{rank} Q = n + m_1$ необходимо и достаточно, чтобы

- (1) $\pi(i\omega) > 0$ для всех вещественных ω ; ($i^2 = -1$),
- (2) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 (\pi_{22}(i\omega) - \pi_{21}(i\omega) \pi_{11}^{-1}(i\omega) \pi_{12}(i\omega)) > 0$.

Отметим, что при $m_2 = 0$ теорема превращается в «невырожденную» частотную теорему, а при $m_1 = 0$ превращается в лемму 6.3. При $m_1 = 0$, $C = 0$ она устанавливает, что необходимым и достаточным условием разрешимости матричных неравенств $HA + A^*H < 0$, $Ha = -b$ является строгая положительная вещественность передаточной матрицы $b(\lambda I_m - A)^{-1}a$.

С ростом сложности систем все большую роль в их анализе играют численные методы. Наряду с классическими задачами статического и динамического анализа – построения установившихся режимов и траекторий, все чаще возникают задачи анализа более сложного поведения:

бифуркационный анализ, оценка ляпуновских показателей, энтропии, размерности и других характеристик нелинейной динамики систем. Вопросам численного анализа динамических систем посвящены книги [Д8, Д46, Д77, Д88, Д90]. Эффективные численные методы решения задач анализа и синтеза линейных и нелинейных систем разработаны на основе аппарата линейных матричных неравенств (LMI) [Д11, Д?].

Задачи синтеза. Задачи синтеза являются центральными для теории управления. Прежде всего, следует упомянуть о работах по оптимальному синтезу, которому в книге уделено мало внимания. В 1950-1960х годах оптимальные системы находились на гребне интереса исследователей, во многом благодаря работам Л.С.Понtryгина, А.А.Фельдбаума и их последователей. В последние годы в мировой литературе оптимальным системам уделяется меньше внимания, и дело здесь, видимо, в том, что их реализация требует достаточно полной и точной информации о модели объекта, а для нелинейных объектов еще и значительного объема вычислений. Кроме того, трудности возникают из-за многокритериальности реальных задач синтеза. Для более или менее сложных систем эти препятствия часто становятся непреодолимыми. Тем не менее, методы оптимального управления продолжают развиваться, идя по пути решения указанных проблем. Требование знания модели объекта может быть ослаблено, если строить схемы, оптимальные на классе объектов, т.е. *робастные*. Робастные алгоритмы управления механическими системами были разработаны Ф.Л. Черноуско и его учениками [Д72], см. также [Д34]. Эффективным подходом к заданию неопределенностей является метод эллипсоидов, в котором считается, что неопределенные параметры принадлежат эллипсоиду, характеризующемуся своим центром и матрицей главных осей [Д71, Д85]. Такой подход позволяет также рассматривать задачи с неполными измерениями. Среди недавних книг по оптимальному управлению следует отметить [Д2, Д9, Д47].

Одним из подходов к решению задач управления по выходу (управления с неполными измерениями) является использование наблюдателей. В книге Х.Халила описывается синтез управления на основе наблюдателей с большим коэффициентом усиления. Однако имеются и другие методы: дифференциально-геометрический [Д38], на основе скользящих режимов [Д4], каскадный [Д37]. Новая форма нелинейных наблюдателей, предложенная В.О. Никифоровым [Д49, Д89] использована для синтеза систем синхронизации и управления колебательными процессами [Д7, Д31].

Однако применение наблюдателей – не единственный подход к решению задачи управления по выходу. Среди других отметим метод вспомогательных фильтров [Д14, Д15] и метод шунтирования [Д4], в которых размерность дополнительных динамических звеньев на единицу меньше, чем относительная степень объекта управления, т.е. может быть существенно меньше, чем в системах с наблюдателями.

Эффективным способом решения задач управления по выходу является метод пассификации, изложенный в параграфе 14.3, см. также [Д49, Д55]. Вариант этого метода для нелинейных систем класса Лурье в адаптивном и неадаптивном вариантах, основанный на необходимых и достаточных условиях пассификации линейных систем, предложенных в [Д66, Д67] с успехом применялся к решению различных задач управления полетом, оценивания, синхронизации, см. обзор [Д6].

Ляпуновский синтез, пассификацию, управление в скользящем режиме и некоторые другие подходы можно рассматривать в рамках единой схемы, называемой методом скоростного градиента (СГ) [Д4, Д49, Д68]. Метод СГ предписывает изменять управляющее воздействие в направлении, противоположном скоростному градиенту – градиенту от скорости изменения целевой функции в силу уравнения объекта. Показано, что по отношению к выходу, задаваемому вектором скоростного градиента объект оказывается пассифицируемым, т.е. метод СГ при естественных условиях обеспечивает стабилизацию объекта.

Из книг на русском языке следует упомянуть учебники [Д1, Д38], широко использующие геометрический подход, а также книгу С.В. Емельянова [Д30], где излагаются топологические подходы к исследованию широкого круга нелинейных задач, базирующиеся на понятиях степени отображения, вращения векторного поля, топологического индекса. Среди недавно выпущенных отметим отечественные учебники [Д10, Д48, Д53] и переводной учебник [Д25]. Из немногих направлений, где отечественная наука в последние годы имеет приоритет, следует отметить управление стохастическими нелинейными колебаниями [Д61, Д82–Д84, Д94] и синергетический подход [Д35].

На практике все чаще применяются интеллектуальные системы управления, в частности, нейросетевые и нечеткие системы. Хотя за рубежом поток литературы по этим направлениям не иссякает уже много лет, количество книг на русском языке до сих пор исчисляется единицами [Д45, Д57, Д63]. По адаптивному управлению нелинейными системами, наоборот, книг в России в последние годы издано больше, чем в других странах [Д31, Д49, Д?, Д64].

Новые направления. Перечислим некоторые новые направления в области нелинейных систем, появившиеся в последние несколько лет.

Управление хаосом. Кибернетическая физика. Одним из важных открытий второй половины XX века стало возможность возникновения в нелинейных детерминированных системах нерегулярных, хаотических колебаний. Известны различные математические определения хаоса. Однако большинство из них выражает близкие по типу свойства динамических систем, связанные со «сверхчувствительностью» к начальным условиям: даже сколь угодно близкие траектории с течением времени расходятся на конечное расстояние, т.е. прогноз траектории на длительное время оказывается невозможен. Оказалось, что системы и модели, описывающие хаотическое поведение, встречаются во многих

областях науки и техники, и в ряде случаев являются более подходящим инструментом описания нерегулярных колебаний и неопределенности, чем стохастические, вероятностные модели. Достаточно заметить, что широкий класс хаотических систем – это хорошо известные генераторы псевдослучайных чисел. Тем более удивительной оказалась обнаруженная в 1990г. Э. Оттом, Ч. Гребоджи и Дж. Йорке возможность существенного изменения свойств хаотической системы при помощи весьма малого изменения ее параметров [Д91]. В частности, было показано путем компьютерного моделирования, что достаточно малым изменением параметра системы можно хаотическую траекторию преобразовать в периодическую и наоборот, если изменять параметр с учетом изменения текущего состояния системы, т. е. в контуре обратной связи. В последующих публикациях эффект был подтвержден экспериментально и указаны области его приложений: лазеры, системы связи, химические технологии, медицина (лечение аритмии и эпилепсии). Парадоксальность вывода (хаос нельзя прогнозировать, но им можно управлять) вызвала взрыв интереса исследователей и породила лавину публикаций, демонстрирующих возможность существенного изменения свойств разнообразных хаотических систем в природе и технике при помощи относительно небольших изменений параметров или внешних воздействий. По данным Science Citation Index, к концу 1990-х годов по этой тематике публиковалось более чем 300 статей в год в рецензируемых журналах, а общее число публикаций перевалило за 3000. Более подробный обзор работ по управлению хаосом можно найти в [Д5, Д69]. Управление хаосом – это только одно из направлений в области на стыке кибернетики и физики, привлекающей все больше внимания, начиная с 1990-х. К другим относятся управляемая синхронизация, оптимационная термодинамика, управление пучками частиц, управление квантовыми системами [Д69, Д70]. Область получила название «кибернетическая физика» – исследование физических систем кибернетическими методами.

Управление и оценивание в сетях. Слияние теорий управления, вычислений и связи. В последнее время в литературе наблюдается интерес к управлению сетями взаимосвязанных физических систем. Примерами таких задач являются управление пространственно распределенными предприятиями, включая сети материально-технического снабжения и реализации готовой продукции; управление группой транспортных средств, строем летательных аппаратов, коллективом роботов и т.д. Внедрение подобных систем обусловлено бурным развитием информационно-коммуникационных средств, в том числе беспроводных систем связи и беспроводных датчиков. Растет также интерес к моделированию сетей и управлению биологическими, биохимическими и социальными сетями, молекулярными кластерами и т.д. В то же время из-за сложности объектов управления и возникающих целей управления координация действий в распределенных системах и сетях становится все более сложной проблемой. Дополнительные трудности обу-

словлены ограничениями на обмен информацией между подсистемами, необходимостью учета ограниченной пропускной способности каналов связи [Д79, Д87]. Новые задачи требуют одновременного рассмотрения аспектов теории управления, теории информации и численных методов, а также физики (статистической механики). Разрабатываемые сетевые встраиваемые системы все чаще называются *киберфизическими системами*, поскольку часть их компонентов является объектами реального мира, а другая часть - виртуальными, информационными объектами. Киберфизическая система интегрирует способности к вычислениям, связи и хранению информации с мониторингом и/или управлением объектами физического мира и должна делать это надежно, безопасно, эффективно и в реальном времени [Д86].

К сожалению, неи возможности перечислить здесь все новые направления в области нелинейных систем. Многие новые результаты обсуждаются на международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем" им. Е.С. Пятницкого, проводимом раз в два года в Москве Институтом проблем управления. Основные труды семинара публикуются в журнале «Автоматика и телемеханика».

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Д1] Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
- [Д2] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.- 2-е изд., М.: Физматлит, 2006.
- [Д3] Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
- [Д4] Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб: Наука, 1999.
- [Д5] Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: Методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика, 2003. № 5, С. 3–45. II. Приложения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 4, С. 3–34.
- [Д6] Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Метод пассивификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // Автоматика и Телемеханика, 2006, № 11, С. 3–37.
- [Д7] Андриевский Б.Р., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Синхронизация нелинейных непассивируемых систем на основе адаптивных наблюдателей // Автоматика и Телемеханика, 2007, № 7, С. 74–89.
- [Д8] Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Кореневский М.Л., Адаптивное управление в стохастических методах вычислительной математики и механики, СПб., Наука, 2005.
- [Д9] Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006.

- [Д10] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления (3-е изд.) М.: Высшая школа, 2002.
- [Д11] Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
- [Д12] Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР.- 1952.- Т.86, № 3.- С.453–456.
- [Д13] Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. 4-е изд. СПб: Профессия, 2004.
- [Д14] Бобцов А.А. Синтез закона управления для стабилизации нелинейной системы по измерениям выхода // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 3. С. 40–45.
- [Д15] Бобцов А.А., Николаев Н.А. Синтез управления нелинейными системами с функциональными и параметрическими неопределенностями на основе теоремы Фрадкова // 2005, № 1, С. 118–126.
- [Д16] Бобылев Н.А., Красносельский А.М., Красносельский М.А. Устойчивость периодических колебаний и возможность их построения методом гармонического баланса // Автоматика и телемеханика, 1989, № 5, С. 179–181.
- [Д17] Бобылев Н.А., Бурман Ю.М., Коровин С.К. Оценки погрешности метода гармонического баланса // Автоматика и телемеханика, 1992, № 6, С. 3–15.
- [Д18] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [Д19] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
- [Д20] Воротников В.И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001.
- [Д21] Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
- [Д22] Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1993.
- [Д23] Гелиг А.Х., Зубер И.Е., Чурилов А.Н.. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006.
- [Д24] Гольдфарб Л.С. О некоторых нелинейностях в системах регулирования // Автоматика и Телемеханика. 1947. Т. VIII. № 5. С. 349–383.
- [Д25] Гудвин Г.К., Гребе С.Ф., Сальгадо М.Э. Проектирование систем управления: Классическое ПИД-управление; Синтез в пространстве состояний; Цифровые и гибридные системы управления и др. Бином. Лаборатория знаний, 2004.
- [Д26] Гусев С.В., Лихтарников А.Л. Очерк истории леммы Калмана-Попова-Якубовича и S-процедуры // Автоматика и Телемеханика, 2006, № 11, С. 159–174.
- [Д27] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967; 2-е изд. МГУ, 1998.

- [Д28] Дружинина М.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Методы адаптивного управления нелинейными объектами по выходу. Обзор // Автоматика и телемеханика, 1996, №2, С. 3–33.
- [Д29] Дружинина М.В., Фрадков А.Л. Методы скоростного градиента и скоростной разности в задаче нелинейного управления: пошаговый синтез. Дифференциальные уравнения, 1994, Т. 30, №11, С. 1861–1867.
- [Д30] Емельянов С.В., Коровин С.К., Бобылев Н.А. Методы нелинейного анализа в задачах управления и оптимизации. М.: УРСС, 2002.
- [Д31] Ефимов Д.В.. Робастное и адаптивное управление нелинейными колебаниями. СПб.: Наука, 2005.
- [Д32] Ефимов Д.В., Фрадков А.Л. Условия колебательности по Якубовичу для нелинейных систем. В кн.: Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства. Под ред. А.Х.Гелига, Г.А.Леонова, А.Л.Фрадкова. М.: Физматлит, М., 2008, С.303–318.
- [Д33] Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. М.: УРСС, 2004.
- [Д34] Каюмов О.Р. Глобально управляемые механические системы. М.: Физматлит, 2007.
- [Д35] Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. М.: КомКнига, 2006.
- [Д36] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд. М.: Наука, 1989.
- [Д37] Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006.
- [Д38] Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2005.
- [Д39] Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения РХД, 2006.
- [Д40] Леонов Г.А., Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика, 2006, № 10, С. 47–85.
- [Д41] Леонов Г.А., Буркин И. М., Шепелявый А.И. Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
- [Д42] Леонов Г.А., Смирнова В.Б. Математические проблемы теории фазовой синхронизации. М., "Наука", 2000.
- [Д43] Лурье А.И., Постников В.Н. О теории устойчивости систем управления // Прикладная математика и механика, 8(3), 1944.
- [Д44] Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951.
- [Д45] Макаров И.М., Лохин В.М., Манько С.В., Романов М.П. Искусственный интеллект и интеллектуальные системы управления. М.: Наука, 2006.
- [Д46] Маланин В., Полосков И. Случайные процессы в нелинейных динамических системах. Аналитические и численные методы исследования РХД 2002.
- [Д47] Матвеев А.С., В.А. Якубович В.А. Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003.

- [Д48] Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. Издательский дом «Питер», 2005.
- [Д49] Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
- [Д50] Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.
- [Д51] Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства. Под ред. А.Х.Гелига, Г.А.Леонова, А.Л.Фрадкова. М.: Физматлит, 2008.
- [Д52] Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003.
- [Д53] Пантелеев А.В., Бортаковский А.С., Руденко Е.А. Нелинейные системы управления: Описание, анализ и синтез. М.: Вузовская книга, 2008.
- [Д54] Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
- [Д55] Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.Д. Пассивность и пассивификация нелинейных систем (обзор). Автоматика и телемеханика // 2000, № 3, С. 3–37.
- [Д56] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
- [Д57] Поляхов Н.Д., Приходько И.А. Нечеткие системы управления. Учеб. пособие. СПб.: Изд СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2003.
- [Д58] Попов Е.П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М.: Наука, 1973.
- [Д59] Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. Моск. ун-та, 1957, № 4, С. 9–16.
- [Д60] Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М. Наука, 1987.
- [Д61] Ряшко Л.Б. Стабилизация стохастически возмущенных нелинейных колебаний // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 155–165.
- [Д62] Смирнов В.И. Курс высшей математики. В пяти томах. 1974.
- [Д63] Терехов В.А., Ефимов Д.В., Тюкин И.Ю. Нейросетевые системы управления: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. школа, 2002.
- [Д64] Тюкин И. Ю., Терехов В. А. Адаптация в нелинейных динамических системах. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
- [Д65] Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. В 2-х частях, СПб.: Изд-во Лань, 2006.
- [Д66] Фрадков А.Л. Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта // Автоматика и телемеханика, 1974, № 12, С. 96–103.
- [Д67] Фрадков А.Л. Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, № 12, С. 436–445.
- [Д68] Фрадков А.Л. Схема скоростного градиента в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика, 1979. № 9. С. 90–101.
- [Д69] Фрадков А.Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003.

- [Д70] Фрадков А.Л. О применении кибернетических методов в физике // Успехи физических наук, 2005, Т.175, № 2, С. 113–138.
- [Д71] Черноуско Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
- [Д72] Черноуско Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.
- [Д73] Чурилов А. Н., Гессен А. В. Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.
- [Д74] Якубович В.А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний // Автоматика и телемеханика, 1964. Т. 25. № 7. С. 1017–1029.
- [Д75] Якубович В.А. Периодические и почти периодические предельные режимы регулируемых систем с несколькими нелинейностями // ДАН СССР. 1966. Т. 171. № 3. С. 533–536.
- [Д76] Якубович В.А. Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 5. С. 1100–1129.
- [Д77] Acary V., Brogliato B. Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems, Springer, 2008.
- [Д78] van den Berg R.A., Pogromsky A.Y., Leonov G.A., Rooda J.E. Design of convergent switched systems. In: Lecture Notes in Control and Information Sciences 336: Group Coordination and Cooperative Control, pp. 291–311. Springer-Verlag, 2006.
- [Д79] Fradkov A.L., Andrievsky B., Evans R. Synchronization of Nonlinear Systems under Information Constraints // Chaos, 2008, V.18, Is. 3, 037109, 1-6.
- [Д80] Goncalves J., Megretski A., Dahleh M. Global Stability of Relay Feedback Systems // IEEE Trans. Autom. Control, 2001, 46(4): pp. 550–562.
- [Д81] Iwasaki, T., Meinsma G., Fu M. Generalized S-procedure and Finite frequency KYP lemma. Mathematical Problems in Engineering // 2000, 6, pp. 305–320.
- [Д82] Kovaleva A. Optimal Control of Mechanical Oscillations. Springer-Verlag. NY, 1999.
- [Д83] Kovaleva A. Upper and lower bounds of stochastic resonance and noise-induced synchronization in a bistable oscillator // Physical Review E, 74, 011126 , 2006.
- [Д84] Kovaleva, A.; Akulenko, L. Approximation of Escape Time for Lagrangian Systems With Fast Noise // IEEE Trans. Autom. Control, 2007, V. 52, 12, pp. 2338 –2341.
- [Д85] Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston, MA: Birkhauser, 1996.
- [Д86] Lee E.A. Cyber-Physical Systems: Design Challenges. In: 2008 11th IEEE Symposium on Object Oriented Real-Time Distributed Computing (ISORC), 2008, pp. 363–369.
- [Д87] Matveev A.S., Savkin A. Estimation and Control over Communication Networks. Birkhauser, 2008.

- [Д88] Naifeh A., Balachandran, B. Applied Nonlinear Dynamics. Analytical, Computational and Experimental Methods. Wiley, 1995.
- [Д89] Nikiforov V.O., Robust High-order Tuner of Simplified Structure. // Automatica 1999, 35 (8), pp. 1409–1415.
- [Д90] Nusse E.N., Yorke J.A. Hunt B.C. Kostelich E.J. Dynamics: Numerical Explorations. Springer, 1997.
- [Д91] Ott E., Grebogi C., Yorke J. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990, V. 64, № 11. pp. 1196–1199.
- [Д92] Pavlov A., van de Wouw N., Nijmeijer H. Uniform Output Regulation of Nonlinear Systems: a Convergent Dynamics Approach. Birkhauser, 2006.
- [Д93] Rantzer, A. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. Systems & Control Letters. 1996, 28, 1, pp. 7–10.
- [Д94] Ryashko L.B. Exponential mean square stability of stochastically forced invariant manifolds for nonlinear SDE // Stochastics and dynamics. 2007, V.7, No. 3, pp. 389–401.

Сентябрь 2008г., Санкт-Петербург,

Александр Фрадков

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

\equiv	тождественно равно
\approx	приближено равно
$\stackrel{\text{def}}{=}$	определяется как
$< (>)$	меньше (больше)
$\leqslant (\geqslant)$	меньше (больше) или равно
$\ll (\gg)$	существенно меньше (больше)
\forall	для всех
\in	принадлежит
\subset	подмножество
\rightarrow	стремится к
\Rightarrow	следует
\Leftrightarrow	эквивалентно, если и только если
\sum	суммирование
\prod	произведение
$ a $	абсолютное значение скалярной величины a
$\ x\ $	норма вектора x
$\ x\ _p$	p -норма вектора x
$\ A\ _p$	индуцированная p -норма матрицы A
\max	максимум
\min	минимум
\sup	супремум, точная верхняя грань
\inf	инфимум, точная нижняя грань
R^n	евклидово пространство размерности n
B_r	шар $\{x \in R^n \mid \ x\ \leq r\}$
\overline{M}	замыкание множества M
∂M	граница множества M
$\text{dist}(p, M)$	расстояние от точки p до множества M
$f : S_1 \rightarrow S_2$	функция f , отображающая множество S_1 в множество S_2
$f_2 \circ f_1$	композиция двух функций
$f^{-1}(\cdot)$	обратная функция для функции f
$f'(\cdot)$	первая производная вещественной функции f
$D^+ f(\cdot)$	верхняя правая производная
∇f	вектор-градиент
$\frac{\partial f}{\partial x}$	матрица Якоби
\dot{y}	первая производная y по времени
\ddot{y}	вторая производная y по времени

$y^{(i)}$	i -я производная y по времени
$L_f h$	производная Ли функции h вдоль векторного поля f
$[f, g]$	скобка Ли векторных полей f и g
$ad_f^k g$	$[f, ad_f^{k-1} g](523)$ — повторная скобка Ли
$\text{diag}[a_1, \dots, a_n]$	диагональная матрица с диагональными элементами a_1, \dots, a_n
$\text{block diag}[A_1, \dots, A_n]$	блочно-диагональная матрица с диагональными блоками A_1, \dots, A_n
$A^T(x^T)$	транспонирование матрицы A (вектора x)
$\lambda_{\max}(P)(\lambda_{\min}(P))$	максимальное (минимальное) собственное значение симметричной матрицы P
$P > 0$	положительно определенная матрица P
$P \geqslant 0$	положительно полуопределенная матрица P
$\text{Re}[z]$ или $\text{Re} z$	вещественная часть комплексной переменной z
$\text{Im}[z]$ или $\text{Im} z$	мнимая часть комплексной переменной z
\bar{z} или z^*	комплексное сопряжение комплексной переменной z
Z^*	комплексное сопряжение комплексной матрицы Z
$\text{sat}(\cdot)$	функция насыщения
$\text{sign}(\cdot)$	функция знака
$O(\cdot)$	обозначение порядка величины
\triangle	знак окончания примера
\square	знак окончания доказательства
$[xx]$	см. ссылку [xx] в списке литературы

Предметный указатель

H_∞ -норма, 251
 H_∞ -управление, 250, 543
 M -матрица, 418
 \mathcal{L} -устойчивость
 — моделей состояния, 242
 — определение, 237
 — при малом входном сигнале, 242
 — с конечным коэффициентом усиления, 237
 — связь с пассивностью, 286
 — теоремы, 243, 247, 249
 \mathcal{L}_2 -коэффициент усиления, 250
 \mathcal{L}_p -пространство, 235
 ε -связи, 448
 «Бэкстеппинг», 631, 674
 RLC-цепь, 228, 277, 450, 490, 504, 526
 Автомобильная подвеска, 492
 Автономная система, 22
 Адаптивное управление, 37, 163, 381, 505
 Аппроксиматор производной, 567, 709
 Асимптотическая устойчивость
 — глобальная
 — определение, 154
 — теоремы, 155, 161, 167
 — глобальная равномерная
 — определение, 185
 — теоремы, 188, 193
 — инвариантного множества, 386
 — область, 153
 — равномерная

— — определение, 185
 — — теоремы, 187, 379
 — точки равновесия
 — — определение, 142, 185
 — — теоремы, 144, 160, 173, 358, 518
 Асинхронный двигатель, 729
 Банахово пространство, 750
 Биохимический реактор, 56, 112
 Бистабильная цепь, 72
 Бифуркация, 24, 96
 — с нулевым собственным значением, 97
 — Хопфа, 101
 — вилки, 99
 — глобальная, 103
 — гомоклиническая, 104
 — локальная, 103
 — седло-узла, 97
 — транскритическая, 97
 Быстрая мода, 499
 Быстрое многообразие, 509
 Векторное поле, 59, 583
 Векторное пространство, 749
 Внутреннее произведение, 741
 Возмущение
 — без структуры, 400
 — исчезающее в начале координат, 395
 — не исчезающие в начале координат, 402
 — периодическое, 457
 — постоянно действующее, 808
 — со структурой, 400

Вращающееся твердое тело, 221, 307, 695
 Генератор с отрицательным сопротивлением, 32, 81, 90, 106
 Гидравлическая система, 54, 56, 555
 Гистерезис, 41, 74
 Градиент, 745
 Градиентная система, 224
 Гурвицева матрица, 169
 Гурвицева передаточная функция, 282
 Динамический множитель, 303
 Дискретная система, 233
 Диссипативная система, 308
 Диффеоморфизм, 581
 — глобальный, 581
 Дифференциал, 812
 Дифференцируемость решений, 127
 Евклидово пространство, 741
 Жесткая пружина, 29
 Задача Лурье, 312
 Задача слежения, 541, 618, 654
 Идентификация, 484
 Индекс Пуанкаре, 95
 Интегральное управление, 438, 547, 550, 561, 658, 715
 — робастность, 549
 Интегратор-бэкстеппинг, 674
 Каскадная система, 219
 Каузальное (причинное, неупреждающее) отображение, 236
 Квазиустановившаяся модель состояния, 486
 Колебание, 80
 — гармоническое, 23
 — почти периодическое, 23
 — релаксационное, 84
 — субгармонические, 23
 Композиция функций, 744
 Конечное время ухода решений на бесконечность, 23, 121
 Консервативная система, 109
 Кривая Попова, 326
 Критерий
 — Бендиксона, 94
 — Попова, 324, 349
 — векторный, 324
 Круговой критерий, 313, 318
 — векторный, 313
 Круиз-контроль, 107
 Кусочно-линейный анализ, 32
 Лемма
 — Барбалата, 376
 — Калмана–Якубовича–Попова, 285
 — Массера, 763
 — о положительной вещественности, 285
 Линеаризация, 75, 173, 198, 203, 233, 543
 — по всем переменным состояния, 596
 — по входу–выходу, 583
 — точная, 578
 Линеаризуемость системы системы по входу–состоянию, 582
 Линейная система
 — нестационарная, 192, 228, 380, 411, 430, 467, 479
 — стационарная, 166
 Линейное векторное пространство, 749
 — нормированное, 750
 Ляпуновский синтез, 662
 Матрица
 — Якоби, 77
 — собственная, 283
 Матрица Якоби, 745
 Медленная мода, 499
 Медленная модель, 486
 Медленно меняющаяся система, 422
 Медленное многообразие, 509
 Метод
 — Красовского, 222
 — Ляпунова
 — — задача регулирования, 542
 — — задача слежения, 541, 618, 654
 — — пассивное управление, 690
 — — первый, 173, 198

- управление в скользящем режиме, 631
 - управление по выходу, 536
 - управление по состоянию, 536
 - управление с наблюдателем, 539, 546, 699
 - бэкстеппинга, 674
 - возмущений, 440
 - на бесконечном интервале, 452
 - обоснование применимости, 447
 - гармонического баланса, 329
 - индексов, 95
 - описывающей функции (метод гармонического баланса), 329
 - обоснование, 339
 - переменного градиента, 151
 - последовательного приближения, 749, 752
 - сингулярных возмущений, 85, 485
 - сравнения, 406
 - усреднения, 85, 461
 - общий, 475
 - применение в задачах идентификации, 484
 - применение к слабо нелинейным осцилляторам, 472
- Минимально-фазовая система**
- линейная, 589
 - нелинейная, 592
- Многообразие, 355**
- быстрое, 509
 - инвариантное, 356
 - медленное, 509
 - аппроксимация, 509
 - скользящие, 633
 - центральное, 357
 - аппроксимация, 360
- Множество, 743**
- внутренность, 743
 - граничные точки, 743
 - замкнутое, 743, 750
 - замыкание, 743
 - инвариантное, 159
 - компактное, 743
 - односвязное, 94
 - открытое, 743
 - положительно инвариантное, 159

- положительно предельное, 159
 - предельное, 159
 - связное, 743
 - Модель Хопфилда, 34, 107**
 - Модель состояния, 21**
 - Мягкая пружина, 29**
- Наблюдатель с сильной обратной связью, 567, 698**
- редуцированного порядка, 708
- Настроочные переменные, 555**
- Настройка обратной связи, 554**
- Неавтономная система, 22**
- Нейронная сеть, 34, 107, 164, 420**
- Нелинейное демпфирование, 616, 672**
- Нелинейность**
- без памяти (безынерционные), 39
 - гистерезис, 41
 - зона нечувствительности, 40
 - квантования, 40
 - кусочно-линеная, 333
 - люфта, 43
 - насыщения, 39
 - с нулевой памятью, 39
 - секторная, 276
 - сигмоидальная, 34
 - сигнум-функция, 39
 - статическая, 39
- Немоделируемая быстрая динамика, 262, 507, 525, 636**
- Неподвижная точка отображения, 749**
- Непрерывность решений, 123**
- на бесконечном интервале, 412
- Неравенство**
- Гёлдера, 118, 240
 - Гамильтона–Якоби, 253
 - Коши–Шварца, 435
 - Янга, 532
 - треугольника, 741
- Неравенство (лемма)**
- Гронуолла–Беллмана, 746
- Неустойчивая**
- точка равновесия, 142, 185
- Неустойчивость точки равновесия**
- определение, 142
 - теоремы, 156, 173, 222

- Неустойчивый**
- предельный цикл, 84
 - узел, 63, 65, 77, 79
 - фокус, 64, 77
- Норма, 235, 741, 750**
- векторная, 741, 750
 - матричная индуцированная, 742
- Нормальная форма, 591**
- специальная, 625, 682
- Нормированное линейное пространство, 750**
- Нуль-динамика, 592**
- Область, 744**
- Область притяжения, 153**
- Область притяжения (асимптотической устойчивости), 153, 364, 390**
- оценка, 369
- Обратная связь**
- динамическая, 537
 - статическая, 537
- Обратные теоремы, 170, 195, 200, 205, 426**
- определение, 199
- Обратный маятник, 50, 576, 623**
- Ограниченност**
- определение, 207
 - теорема, 210
- Окрестность, 743**
- Орбита, 58**
- периодическая (замкнутая), 80
- Осциллятор**
- Ван дер Поля, 33, 83, 473, 511, 717
 - Вена–Бриджа, 108
 - гармонический, 80, 89
 - химический, 112
- Открытая область, 744**
- Относительная степень**
- линейной системы, 282, 586
 - нелинейной системы, 584
- Отображение Пуанкаре, 458**
- Паразитные параметры, 487**
- Пассивизация системы путем замены обратной связи, 694**
- Пассивная система, 275**
- Пассивное управление, 690**
- Пассивность, 270, 280**
- строгая, 280
- Пассивность системы**
- при обратной связи по выходу, 275, 280
 - при прямой связи по входу, 275, 280
 - строгая по входу, 275, 280
 - строгая по выходу, 275, 280
 - строгая по состоянию, 280
- Передаточная функция**
- положительно вещественная, 282
 - строго положительно вещественная, 282
- Переход Джозефсона, 47**
- Периодическая орбита, 80**
- устойчивость, 385
- Периодическое решение (нетривиальное), 80**
- Плоскость состояний, 58**
- Поведение**
- глобальное, 23
 - качественные характеристики, 60
 - количественные характеристики, 60
 - локальное, 23
 - множественность режимов, 24
- Поверхность Ляпунова, 146**
- Поверхность уровня, 146**
- Пограничная система, 496**
- Пограничный интервал, 496**
- Пограничный слой (в скользящем режиме), 639, 648**
- Подводный транспортный робот, 717**
- Подпространство точек равновесия, 66**
- Поле направлений, 59**
- Полная интегрируемость, 812**
- Последовательность Коши, 750**
- Предельная ограниченность**
- определение, 207
 - теорема, 210
- Предельная точка, 743**
- Предельные циклы, 23, 80**
- Преобразование контура, 301**
- Принцип**
- (лемма) сравнения, 131

- внутренней модели, 542
- инвариантности, 158
- редукции, 358
- Принцип разделения, 699
- Производная, 745
 - верхняя правая, 131, 756
- Производная Ли, 583
- Распределение, 599
 - инволютивное, 600
- Регулирование, 542
- Регулярная форма, 645
- Редуцированная система (модель), 357, 486
- Робастность, 261, 403, 507, 525, 615, 630, 647, 664, 684
- Робот-манипулятор, 45, 223, 306, 602, 693, 733
- Ряд Тейлора, 443
- Седловая точка, 63, 77, 86
- Секторное условие (секторная нелинейность), 276
- Сепараторика, 71
- Синхронный генератор, 46, 623
- Система «груз–пружина», 28, 48, 108, 224
- Система «хищник–жертва», 109
- Система TORA (Трансляционный осциллятор с ротационным актуатором), 51
- Система без потерь, 275, 280
- Система в треугольной форме, 680
- Система второго порядка, 58, 472
- Система магнитной подвески, 53, 574, 627, 726
- Система наблюдаемая в нулевом состоянии, 288
- Система с обратной связью
 - анализ, 259, 290
 - анализ в частотной области, 310
 - корректно определенная, 259, 291
 - с большим коэффициентом усиления, 489, 526, 651, 670, 686
- Система с сингулярными возмущениями, 70
 - анализ устойчивости, 514
 - линейная, 528, 529

- многопараметрическая, 532
- стандартная модель, 486
- Система, линеаризуемая заменой обратной связи, 578
 - определение, 581
 - характеристизация, 601
- Скобка Ли, 598
- Собственное значение (медленное, быстрое), 61, 499, 528
- Собственное отображение, 581
- Собственный вектор (медленный, быстрый), 61
- Соединение систем, 219, 415
- Спектральное разложение, 780
- Стабилизация, 536
 - бэкстеппинг, 674
 - в области, 540
 - глобальная, 540, 608
 - локальная, 540
 - на основе линеаризации, 543
 - на основе ляпуновского синтеза, 662
 - на основе обратной связи по выходу, 539, 698, 709
 - на основе пассивного управления, 690
 - на основе сильной обратной связи, 651, 670
 - на основе точной линеаризации, 606
 - на основе управления в скользящем режиме, 644
 - полуглобальная, 540
 - робастная, 630
- Структурно устойчивая точка равновесия, 68, 81
- Сухое (кулоновское) трение, 29, 108
- Существенно нелинейные явления, 23
- Существование и единственность решений, 115
 - глобальные теоремы, 121, 123
 - локальные теоремы, 116
 - максимальный интервал, 121
- Сходимость, 743, 750
- Теорема
 - Зубова, 390

- Ла-Салля, 160
- Ляпунова об устойчивости, 144
- Парсевала, 251
- Пуанкаре–Бендиксона, 87
- Тихонова, 498
 - на бесконечном интервале, 502
 - Фробениуса, 812
- Четаева, 156
- о малом коэффициенте усиления, 259
- о неявной функции, 746
- о сжимающем отображении, 751
- о среднем значении, 746
- о центральном многообразии, 355, 357
- Теоремы
 - Барбашина–Красовского, 155, 161
 - Ляпунова о неустойчивости, 222
 - о пассивности, 290
- Теоремы инвариантности, 377, 379
- Теория Флоке, 228
- Точки равновесия, 22
 - гиперболические, 69
 - изолированные, 22
 - континуум, 22
 - множественность, 23, 70
 - типы, 66, 77, 79
- Точная верхняя грань, 742
- Точная линеаризация, 578
- Точная нижняя грань, 742
- Траектория, 58
 - замкнутая, 80
- Трансляционный (поступательный) осциллятор с ротационным актуатором (ТОРА), 51
- Трение, 28
 - вязкое, 29
 - отрицательное, 48
 - покоя, 29
 - сухое, 29, 108
- Управление в скользящем режиме, 631
 - непрерывное, 638, 648
- Управление с наблюдателем, 539, 546, 699
- Управление с обратной связью
 - бэкстеппинг, 674
- интегральное управление, 438, 547, 550, 561, 658, 715
- настройка обратной связи, 554
- Управление с сильной обратной связью, 489, 526, 651, 670, 686
- Уравнение
 - Ван дер Поля, 33, 83, 445, 448, 473, 511, 585, 593, 717
 - Гамильтона–Якоби–Беллмана, 225
 - Дуффинга, 31, 211, 483
 - Льенара, 33, 224
 - Ляпунова, 170, 225, 428, 430
 - в методе переменного градиента, 151
 - для систем с сингулярными возмущениями, 514, 532
 - Матьё, 482
 - Риккати, 225, 432
 - Рэлея, 337, 483
 - выхода, 21
 - гармонического баланса, 332
 - маятника, 24, 70, 74, 78, 143, 149, 158, 178, 228
 - обратного маятника, 50, 576, 623
 - состояния, 21
 - свободное, 22
- Условие
 - линейного роста, 608
 - согласованности, 615
- Условие Липшица, 115, 116, 121, 122, 125
 - глобальное, 116
 - локальное, 116
- Условие согласованности, 630
- Усредненная система, 464
- Устойчивая
 - точка равновесия, 142
- Устойчивая матрица, 169
- Устойчивость
 - L, 237
 - абсолютная, 312
 - асимптотическая, 142, 185
 - в конечной области, 312
 - в терминах «вход–выход», 234
 - возмущенной системы, 394
 - дискретной системы, 233
 - инвариантного множества, 386

- линейной системы, 166, 192
- определение, 142, 185
- периодического решения, 384, 388
- периодической орбиты, 385
- по входу-состоянию, 214
- локальная, 232
- определение, 214
- теорема, 215
- равномерная, 185
- сохранение при отображении, 175
- теоремы, 144, 167, 187
- экспоненциальная, 186, 190
- Устойчивость по Ляпунову, 140
 - автономные системы, 141
 - неавтономные системы, 182
 - связь с пассивностью, 286
 - связь с устойчивостью «вход-выход», 242
- Устойчивость типа «ограниченный вход – ограниченный выход», 237
- Устойчивый
 - предельный цикл, 84
 - узел, 62, 65, 77, 79
 - фокус, 64, 77
- Фаза
 - достижения, 633
 - скольжения, 633
- Фазовая плоскость, 58
- Фазовый портрет, 60, 85
- Функция
 - Ляпунова, 146
 - для соединения систем, 415
 - квадратичная, 147
 - квадратичного типа, 401
 - композитная, 416, 516
 - типа функции энергии, 162
 - функция энергии, 143
 - Ляпунова–Лурье, 324
 - взаимно однозначная, 745
 - дифференцируемая, 745
 - класса K, 179
 - класса KL, 179
 - кусочно-непрерывная, 745
 - насыщения, 39
 - непрерывная, 744
 - обратная, 745
 - описывающая, 332
 - отрицательно определенная, 147, 190
 - отрицательно полуопределенная, 147
 - положительно определенная, 147, 189
 - положительно полуопределенная, 147
 - равномерно-непрерывная, 744
 - радиально неограниченная, 155, 190
 - сигмоидальная, 34
 - сигнум-, 39
 - убывающая, 190
- Функция без памяти, 39
- Функция запаса, 280
- Хаос, 24
- Центр, 64
- Цепь
 - с туннельным диодом, 26, 70, 77, 100, 107
 - фазовой синхронизации, 48, 130
- Чаттер, 635, 667
- Чувствительность, 127
- Эквивалентная линеаризация, 332
- Эквивалентное управление, 645
- Эквивалентный коэффициент усиления, 332
- Экспоненциальная устойчивость
 - определение, 186
 - теоремы, 190, 203, 379, 397, 409, 425, 436, 460, 466, 478, 522, 531
- Электродвигатель постоянного тока, 52
 - с управлением током в обмотке возбуждения, 53, 530, 575, 585, 594, 604, 628
 - с управлением током якоря, 53, 488
- Эффект Страйбека, 30
- Явление образования пиков, 610, 702
- Явление скачка, 84