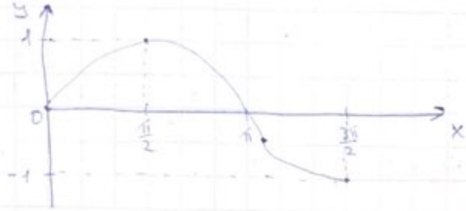
Кирбаба Денис

Д.З. 1

① • $f(x)=\sin x$, $X=[0, \frac{3}{2}\pi]$. Найти субдифф f на X.

Построим график ф-ии:



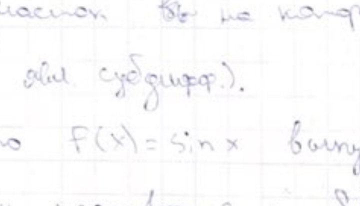
{ Субдифф. - мн-во лин. функционалов p удовл. $\forall x$ нер-ву: $p(x-x_0) \le f(x)-f(x_0)$

• Найдем участок в на котором функция выпукла (т.к. $\forall$ выпуклая функция явл. субдифф.).

Видно, что $f(x)=\sin x$ выпукла на $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ => субдифференциал равен производной: $\partial f(x)=\cos x$, $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

• Проверим точки $x_1=\frac{3\pi}{2}$ и $x_2=\pi$ – найдем в них субдифференциалы отдельно, т.к. это граничные точки.

$x_1=\frac{3\pi}{2}$:



Найдем касательную, проход. через $(x_1, f(x_1))$.

Ур-е касательной: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ к точке x_0 (для дифф. ф-ии)

но, т.к. мы ищем субдифф, то $f'(x_0)$ не используем (нам надо его и найти), заменим $f'(x_0)=a$.

Тогда $y=a(x-x_0)+f(x_0)$

Подставим значения x_1: $y=a(x-\frac{3\pi}{2})+(-1)$

при $a=0$ ур-е будет подходить и явл. субдифф.,

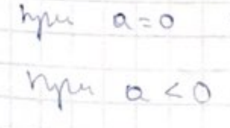
при $a<0$ не выполняется необходимое нер-во: $\sin x \ge a(x-\frac{3\pi}{2})-1$

при $a \ge 0$ выполняется нер-во.

Итого в точке $x_1=\frac{3\pi}{2}$ субдифф.: $\partial f(\frac{3\pi}{2})=[0,+\infty)$.

• Аналогично проверим точку $x_2=\pi$:

нер-во: $\sin x \ge a(x-\pi)$



касательной в π не существует (точка перегиба)

След-но: $a=\varnothing$ => $\partial f(\pi)=\varnothing$.

• Осталось проверить полуинтервале $[0, \pi)$.

Для этого будет необходимо воспользоваться свойством:

(св-во подобия субдифф производной) Если ф-я дифф, то субдифф ∂f совпадает с производной или его не существует ($=\varnothing$).

Итак, исходная ф-я $y = \sin x$ дифф. на всем $X = \mathbb{R}$. След-но можем исп. св-во выше.

$\nexists$ определение субдифф.: $p(x - x_0) \le f(x) - f(x_0)$ в качестве функционала, который действует на $(0, \pi)$ возьмем производную $\sin x$.

Итого, $\sin x - \sin x_0 \geq \cos x_0 (x - x_0)$.

Будем доказывать, что субдифф $= \varnothing$ (т.к. иное все не получилось доказать)

то есть нер-во: $\sin x - \sin x_0 < \cos x_0 (x - x_0)$.

Use теорему Лагранжа: $\sin x_0 - \sin x = \sin'(\eta)(x_0 - x) = \cos\eta(x_0 - x)$

$\eta \in (x_0, x)$.

Тогда
$$-\cos\eta(x_0 - x) < \cos x_0 (x - x_0)$$
$$-\cos\eta(x_0 - x) - \cos x_0 (x - x_0) < 0$$
$$-(x - x_0)(\cos x_0 - \cos\eta) < 0 \qquad | \cdot (-1)$$
$$(x - x_0)(\cos x_0 - \cos\eta) > 0$$

Для того, чтобы разрешить данное нер-во необх рассмотреть отдельно 2 случая:

1. $\exists\, x < x_0$, тогда $\underset{x_0}{\eta} > x$. Но т.к. $\cos x$ убывает монотонно

на $(0, \pi)$, то $\cos\eta > \cos x_0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x_0 - \cos\eta < 0 \\ x - x_0 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x - x_0)(\cos x_0 - \cos\eta) > 0$$

2. $\exists\, x > x_0 \Rightarrow x_0 < \eta < x$, т.к. $\cos x$ убывает на $(0, \pi)$, то

$\cos x_0 > \cos\eta \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 > 0 \\ \cos x_0 - \cos\eta > 0 \end{cases} \Rightarrow$

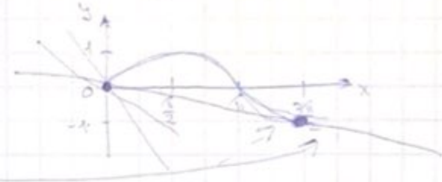
$$\Rightarrow (x - x_0)(\cos x_0 - \cos\eta) > 0.$$

Итого, мы доказали, что на интервале $(0, \pi)$: $\partial(x) = \varnothing$.

• Осталось проверить точку $x_0 = 0$.

Аналогично ранее рассмотр. случаев $\left(x_1 = \frac{3\pi}{2}, x_2 = \pi\right)$:

$\sin x \geq ax$



нас интересует эта касательная.

найдем её: $y = \cos x_0 (x - x_0) + \sin x_0 \iff 0 = -\cos x_0 \cdot x_0 + \sin x_0$

$\iff \operatorname{tg} x_0 = x_0 \iff x_0 = 4{,}493. \Rightarrow f(x_0) = -0{,}217x$ - ур-е искомой касательной.

След-но, $a = -0{,}217$.

Если $a > -0{,}217$, то нер-во $\sin x \geq ax$ не выполняется.

Если $a < -0{,}217$, то нер-во $\sin x \geq ax$ верно.

<u>Ответ:</u> $\partial(x)$ от $f(x) = \sin x$ на $x \in X$, $X = [0, \frac{3}{2}\pi] =$

$$= \begin{cases} (-\infty, -0{,}217], & x = 0 \\ \varnothing, & x \in (0, \pi] \\ \cos x, & x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ [0, +\infty), & x = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

② $f(x) = |c^T x|$, $x \in \mathbb{R}^n$

• Ф-я f дифф. везде, кроме нуль-вектора ($x = \bar{0}$) и выпукла

$\Rightarrow$ на $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ $\begin{cases} \partial(|c^T x|) = \{c\}, & \text{если } c^T x > 0 \\ \partial(|c^T x|) = \{-c\}, & \text{если } c^T x < 0 \end{cases}$

• $\measuredangle$. $x = \bar{0}$: $f(x) \geq f(\bar{0}) + \langle a, x - \bar{0} \rangle$

$$\Updownarrow$$

$$|c^T x| \geq 0 + \langle a, x \rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$|c^T x| \geq \langle a, x \rangle$$

$$\Downarrow$$

подходят точки в-ра a: $|a| < |c| \Rightarrow$

можем найти ~~замкнутый~~ открытый шар, радиуса $|c|$: $B(0, |c|)$.

Ответ: $\delta f(x) = \begin{cases} \{c\}, & c^T x > 0 \\ \{-c\}, & c^T x < 0 \\ B(0, \|c\|), & x = \bar{0} \end{cases}$

(3) $f(x) = \|x\|_1, \quad x \in \mathbb{R}^n$

Рассмотрим $f(x_1) - f(x_2) = \|x_1\|_1 - \|y_2\|_1$

Тогда $\|x_1\|_1 - \|x_2\|_1 \underset{\text{св-во } \|\cdot\|}{\geq} \|x_1 - x_2\|_1 + \|y_2\|_1 - \|y_2\|_1$

$$\Downarrow$$

$$\|x_1\|_1 - \|x_2\|_1 \geq \|x_1 - x_2\|_1 \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$$

Распишем норму $\|\cdot\|_1$:

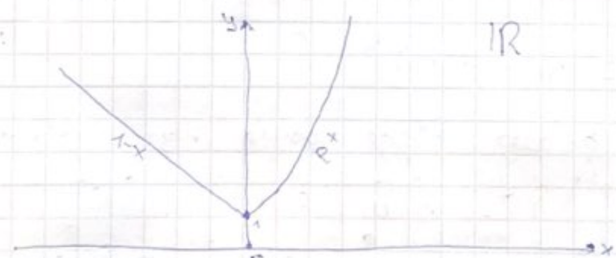
$\|x_1\|_1 - \|x_2\|_1 \geq \|x_1 - y_2\|_1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |(x_1 - y_2)_i| \geq \sum_{i=1}^n (x_1 - y_2)_i = \langle a, y_1 - y_2 \rangle$

a - нормир. вектор ($\|a\|_1 = 1$) длины n ($a \in \mathbb{R}^n$).

Итого, $\delta f(x) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n})^T$

(4) $f(x) = \max\{e^x, 1-x\}, \quad x \in \mathbb{R}$

Изобразим график: $\mathbb{R}$



Можем переопределить функцию $f(x)$:

$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ 1-x, & x < 0 \end{cases}$ — эквивал. запись $f(x) = \max \dots$

Т.к. e^x и $1-x$ — всюду дифф. ф-ции, то

$$\delta f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Осталось рассмотреть $x_0 = 0$:

$$f(x) \geq f(0) + ax \Leftrightarrow f(x) \geq 1 + ax$$

Легко найдём условие a: $a \in [-1,1]$.

Итого,
$$\partial f(x) = \begin{cases} e^x, & x>0 \\ -1, & x<0 \\ [-1,1], & x=0. \end{cases}$$

⑤. Доказать, что если ф-я L-гладкая, то выполнено $\|\nabla^2 f(x)\|_2 \le L$.

Будем использовать след. теорему:

если $f(x)$ - C_1-гладкая и 2х дифф., на выпуклом мн-ве K, то
$$0 \preceq \nabla^2 f(x) \preceq C_1 \cdot I_d$$

Также, $\exists$ представление $\|\nabla^2 f(x)\|_2^2$ градиента через произведение матриц (разложение)

Итак, $\|\nabla^2 f(x)\|_2^2 = \underbrace{\lambda_{max}}_{\max(\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\})}\left(\nabla^2 f(x)^T \cdot \nabla^2 f(x)\right) =$
$= \max_i \lambda\left(\nabla^2 f(x)^T \nabla^2 f(x)\right)$

т.к. у нас присутствует $\nabla^2 f(x)^T \cdot \nabla^2 f(x)$, то в качестве $\max_i \lambda$ мы будем искать $\max_i \lambda_i^2$ (св-во с.ч.)

Итого, имеем $\|\nabla^2 f(x)\|_2^2 = \max_i \lambda_i^2$
$$\Downarrow$$
$$\|\nabla^2 f(x)\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i^2}$$

Т.к. $\nabla^2 f(x)$ - положит. опред. м-ца, то $\forall_i\ \lambda_i > 0$, а след-но $\max_i \lambda_i > 0$

Итого можем убрать $\sqrt{\dots^2}$, то есть
$$\|\nabla^2 f(x)\|_2 = \max_i \lambda_i$$

~~Но~~ Используя теорему в начале:
$$\nabla^2 f(x) \preceq L\, I_d$$
$$\underbrace{L\, I_d - \nabla^2 f(x)}_{\text{соб. числа данного выражения} \ge 0 \text{ (т.к. м-ца} \succeq 0)} \succeq 0$$

Ну и если перейдём от матричного нер-ва
$$L\, I_d - \nabla^2 f(x) \succeq 0$$

К нер-ву про собств. числа м-ц, что получается эквивалентное нер-во:

$$\lambda_{max}(L\hat{I}_d) - \lambda_{max}(\nabla^2 f(x)) \geq 0$$

а т.к. $\hat{I}_d$ - единичная м-ца, то

$L \geq \lambda_{max}$ м-цы и возвращаясь к исходному заданию: $L \geq \|\nabla^2 f(x)\|_2$ ■

⑥ Определить константы μ и L для ф-ии $f(x) = \|x\|_2^2$

$f(x) = \|x\|_2^2$

Распишем норму $\|\|_2$: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$$\nabla f(x) = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)'_{(x_1)} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)'_{(x_2)} \quad \dots \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)'_{(x_n)} \right)^T =$$

$$= \left(2x_1 \quad 2x_2 \quad \dots \quad 2x_n\right)^T = 2\left(x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n\right)^T = 2\bar{x}$$

Найдем L:

$$\|\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)\|_2 = \|2\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2\|_2 = \underset{L}{\underset{\uparrow}{2}}\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|_2$$

Итого, $L = 2$.

Найдем μ.

$$\exists\; f(x_1) - f(x_2) - \langle \nabla f(x_2), x_1 - x_2 \rangle = \|x_1\|_2^2 - \|x_2\|_2^2 - \langle 2x_2, x_1 - x_2 \rangle =$$

$$= \|x_1\|_2^2 - \|x_2\|_2^2 - 2\langle x_2, x_1 \rangle + \underset{\text{опр. доп}}{2\underbrace{\langle x_2, x_2 \rangle}_{\|x_2\|^2}} = \underbrace{\|x_1\|^2 - 2\langle x_2, x_1 \rangle + \|x_2\|^2}_{\|x_1 - x_2\|_2^2 \text{ св-во}} =$$

$= \|x_1 - x_2\|^2$ а следовательно значение $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mu = 2$.

$\underline{L = 2, \mu = 2}$