Домашнее задание№1.
Сильная выпуклость и гладкость. Субдифференциальное исчисление.

Дедлайн: 28 октября, 23:59

Просьба присылать задания в виде **одного PDF-файла** (можно использовать LaTeX, а можно просто аккуратно сфотографировать рукописные решения и **собрать фотографии в один PDF-файл**) на мою почту: mikkhailenko@gmail.com. Кроме того, просьба **указывать следующую тему письма: «Оптимизация в ML. Домашнее задание 1».**

1. **(1 балл)** Посчитайте субдифференциал функции $f(x) = \sin x$ на множестве $X = [0, \frac{3}{2}\pi]$.
2. **(1 балл)** Посчитайте субдифференциал функции $f(x) = |c^\top x|,\ x \in \mathbb{R}^n$.
3. **(1 балл)** Посчитайте субдифференциал функции $f(x) = \|x\|_1,\ x \in \mathbb{R}^n$.
4. **(1 балл)** Посчитайте субдифференциал функции $f(x) = \max\{e^x, 1-x\},\ x \in \mathbb{R}$.
5. **(2 балла)** Докажите, что если функция L-гладкая, то выполнено $\|\nabla^2 f(x)\|_2 \leq L$.
6. **(1 балл)** Определите константы μ и L для функции $f(x) = \|x\|_2^2$.
7. **(1 балл)** Какие условия верны для сильно выпуклой функции $f(x)$ с константной μ?
   - $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - \frac{\mu}{2}\alpha(1-\alpha)\|x-y\|_2^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$
   - $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{\mu}{2}\|y-x\|_2^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
   - $f(y) \leq f(x) + \langle \nabla f(y), y - x\rangle + \frac{1}{\mu}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
   - если $\nabla f(x^*) = 0$, то $\|\nabla f(x)\|_2^2 \leq 2\mu(f(x) - f(x^*)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
   - $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \leq \frac{1}{\mu}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
   - если $f(x)$– дважды непрерывно дифференцирема, то $\nabla^2 f(x) \succeq \mu \mathrm{I}_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
   - $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq \mu\|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
   - если $\nabla f(x^*) = 0$, то $f(x) \leq f(x^*) + \frac{\mu}{2}\|x - x^*\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
8. **(2 балла)** Докажите, что если функция L-гладкая и выпуклая, то выполнено неравенство
$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$