Морфологический анализ

Техническое зрение

Морфология

Морфология – наука о форме.

Словом *морфология (*в области обработки изображений) обозначают математические методы анализа изображений, основанных на содержательных яркостно-геометрических моделях.

Наиболее значимые достижения по созданию **«общей теории формы»**:

- **Ж. Серра «математическая морфология»;**
- **Ю.П. Пытьев «морфологический анализ изображений».**

Долгое время эти две морфологии считались принципиально различными.

Что такое *форма?*

Неформальное определение (по **Ю.П. Пытьеву**) – это то, что присутствует во всех изображениях данной сцены или объекта не зависимо от условий их регистрации.

Что такое *форма?*

На изображениях представлена одна и та же сцена, но яркости $I_i(x, y), i = 1,2$ различны в каждой точке поля зрения. Неизменна форма, определяемая как инвариант преобразований яркости изображения, моделирующих изменение условий его регистрации.

Что такое *форма?*

Сцены отличаются наличием предмета – на правом изображении отсутствует *бусинка* в левой нижней четверти поля зрения.


Методы морфологического анализа – это методы решения задач узнавания, классификации объектов, оценки параметров объектов, выделения различия в сценах по их изображениям (сигналам). Основаны на понятии формы сигнала.

Математическая морфология основана на теории множеств.

Основные понятия теории множеств

$X = \{x\}, Y = \{y\}$ – множества;

$Z = \{z: z \in X \text{ или } z \in Y\} = X \cup Y$ – **объединение** множеств (элементы z принадлежат X или Y);

$Z \subset X$ – множество Z **включает** X;

$Z = \{z: z \in X \text{ и } z \in Y\} = X \cap Y$ – **пересечение** множеств (элементы z принадлежат X и Y);

$Z = X^C = \{z: z \notin X\}$ – дополнение множества X;

$Z = \{z: z \in X, z \notin Y\} = X \backslash \mathrm{Y}$ – разность множеств;

$Z = \emptyset$ – пустое множество (не содержит элементов).

Справедливы соотношения:

$(X \cup Y)^C = X^C \cap Y^C$;

$(X \cap Y)^C = X^C \cup Y^C$;

$X \backslash \mathrm{Y} = X \cap Y^C$.

Математическая морфология (Ж. Серра)

Пусть дано евклидово пространство E^N. Рассмотрим некоторое преобразование $\Psi: E^N \to E^N$.

Оператор Ψ называется *увеличивающим*, если:

$$X \subset Y \Longrightarrow \Psi(X) \subset \Psi(Y), X, Y \subset E^N.$$

Оператор Ψ называется *дилатацией* (расширением, наращиванием), если:

$$\Psi(\cup X_i) = \cup \Psi(X_i), \forall X_i \subset E^N.$$

Оператор Ψ называется *эрозией* (сжатием, сужением), если:

$$\Psi(\cap X_i) = \cap \Psi(X_i), \forall X_i \subset E^N.$$

Математическая морфология

Если $\Psi(X) \supseteq X$ – оператор Ψ называется *экстенсивным*.

Если $\Psi(X) \subseteq X$ – оператор Ψ называется *антиэкстенсивным*.

Если $\Psi(\Psi(X)) \supseteq \Psi(X)$ – оператор Ψ является *усиливающим*.

Если $\Psi(\Psi(X)) \subseteq \Psi(X)$ – оператор Ψ является *ослабляющим*.

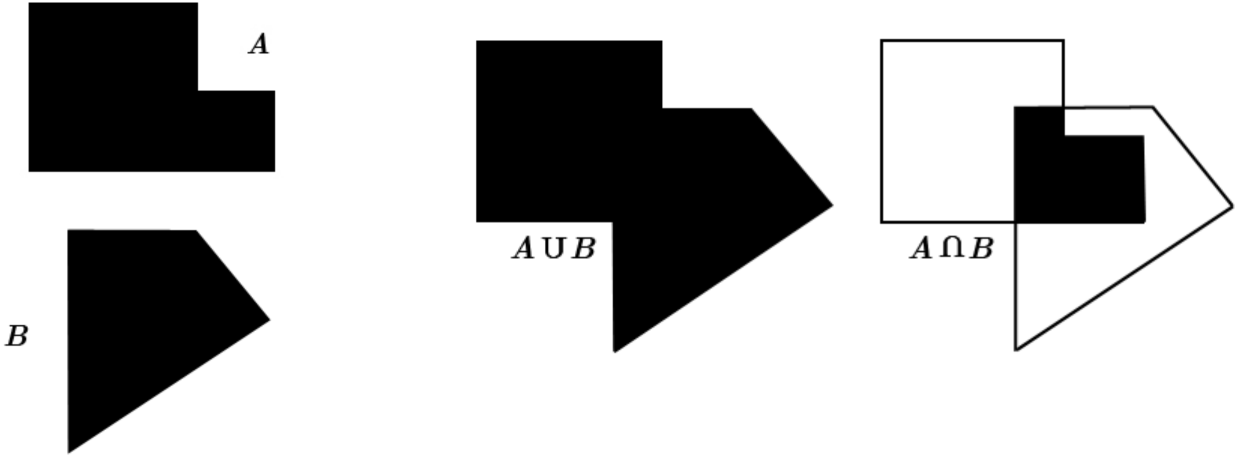
Если $\Psi\big(\Psi(X)\big) = \Psi(X)$ – оператор Ψ является *равносильным*.

Морфологические фильтры – это множество операторов, являющихся одновременно *равносильными* и *увеличивающими*.

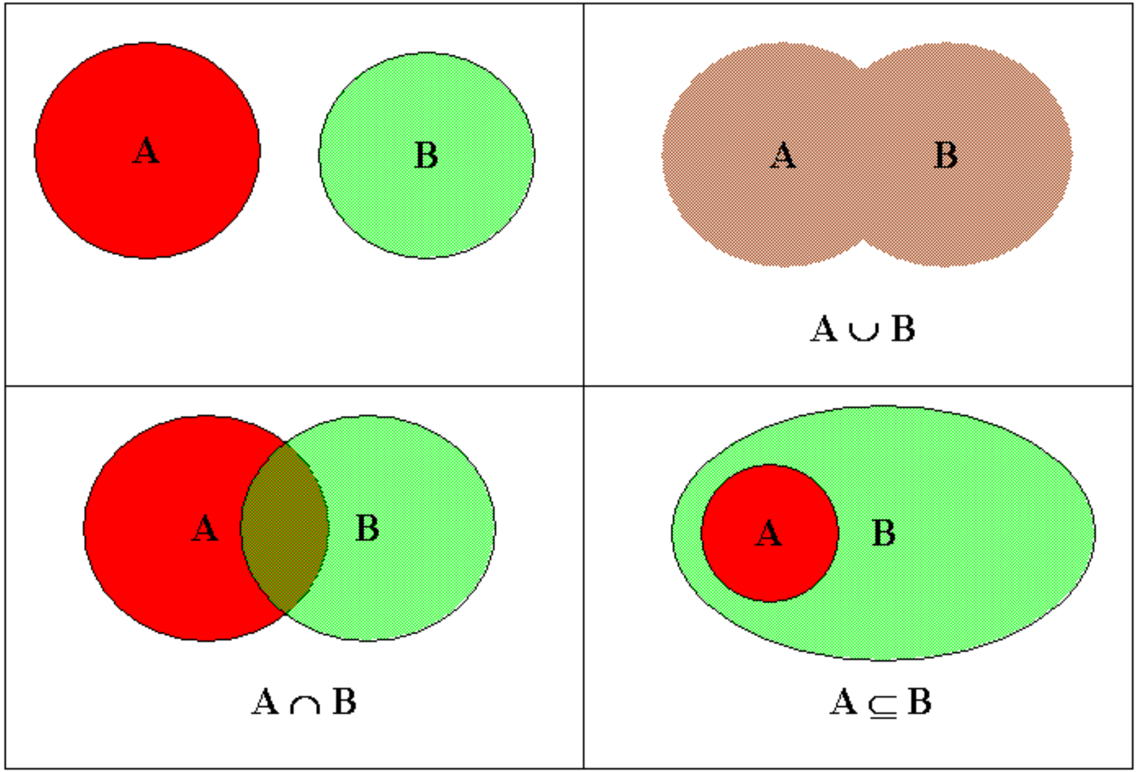
Морфологические операции на бинарных изображениях

Для бинарных изображений логические операции взаимно однозначно соответствуют операциям над множествами:

- Операция *пересечения* – логическое *умножение*;
- Операция *объединения* – логическое *сложение*.



В «стиле» кругов Эйлера



Морфологические операции на бинарных изображениях

Определим трансляцию множества *(двумерного бинарного образа)* $A \subset E$ по некоторому вектору смещения $z \in E$ как преобразование:

$$A_z = \{q | a \in A, q = a + z\}.$$

Сложение двумерных точек (пикселей) в данном случае понимается как сложение их декартовых координат.

Пусть дано два бинарных образа $A, B \subset E$. *Операция:*

$$A \oplus B = \{a + b | a \in A, b \in B\} = \cup B_a = \cup A_b$$

называется *сложением Минковского*. Операция:

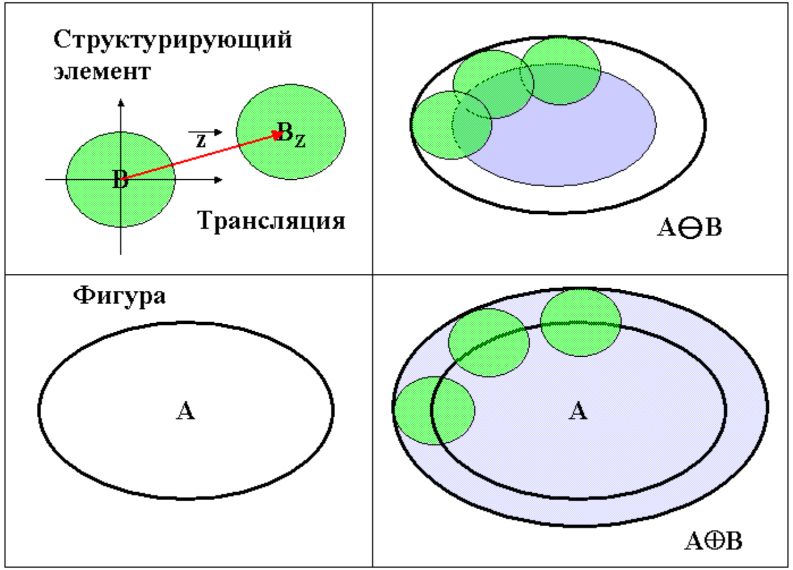
$$A \ominus B = \{z | B_z \subseteq A\} = \cap A_z$$

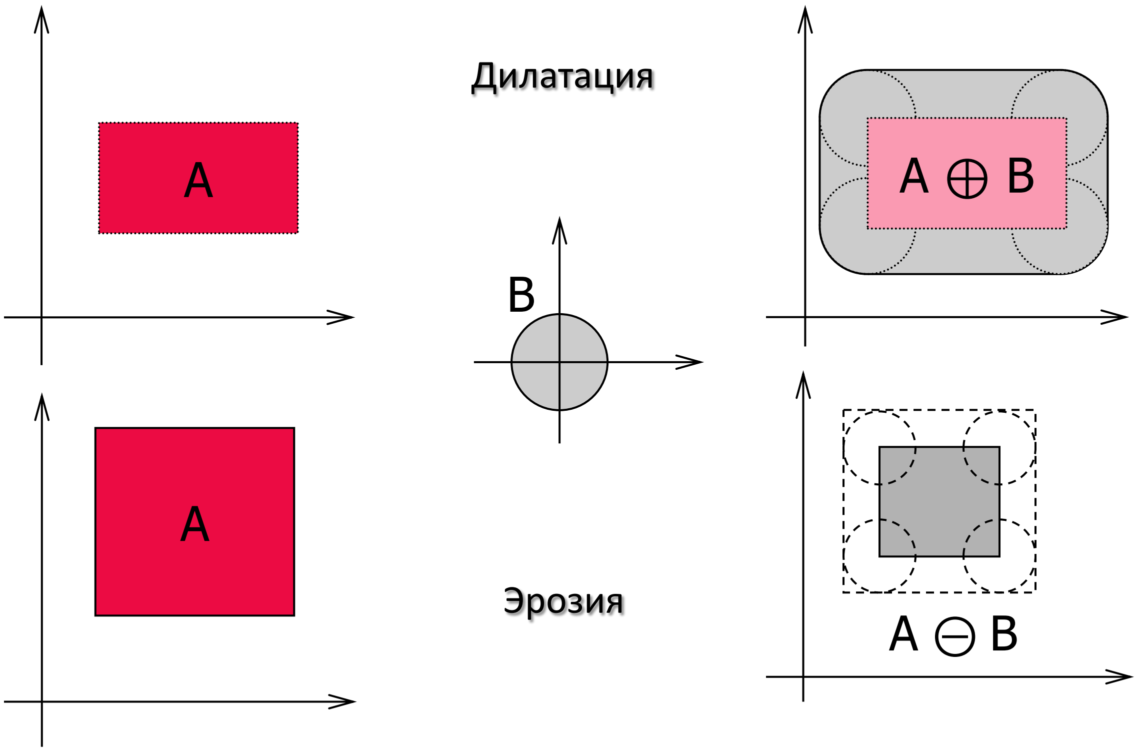
называется *вычитанием Минковского*.

Морфологические операции на бинарных изображениях

Множество B называется *структурирующим элементом*.

Сложение Минковского называется *дилатацией*, а вычитание – *эрозией* изображения A структурирующим элементом B.




A
Дилатация
A ⊕ B
B
A
Эрозия
A ⊖ B

Морфологические операции на бинарных изображениях

Базовые операции математической морфологии *дилатация* и *эрозия* являются двойственными друг по отношению к другу:

$$A \ominus B = (A^C \oplus B^V)^C,$$

где A^C – дополнение к A, а $B^V = \{-b | b \in B\}$.

Таким образом, все теоремы, доказанные для одной операции, могут быть представлены в двойственной форме относительно другой операции.

Морфологические операции на бинарных изображениях

Свойства морфологических операций:

Свойство коммутативности:

- ❖$A \oplus B = B \oplus A$;
- ❖$A \ominus B \neq B \ominus A$.

Свойство ассоциативности:

- ❖$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$;
- ❖$A \ominus (B \oplus C) = (A \ominus B) \ominus C$.

•Свойство дистрибутивности:

- ❖$(\cup A_i) \oplus B = \cup (A_i \oplus B), (\cup A_i) \ominus B = \cup (A_i \ominus B)$;
- ❖$(\cap A_i) \oplus B = \cap (A_i \oplus B), (\cap A_i) \ominus B = \cap (A_i \oplus B)$.

•Свойство инвариантности к масштабу:

- ❖$\lambda A \oplus \lambda B = \lambda(A \oplus B)$;
- ❖$\lambda A \ominus \lambda B = \lambda(A \ominus B)$.

Морфологические операции на бинарных изображениях

Теорема Матерона: любой увеличивающий оператор Ψ, инвариантный относительно трансляции, может быть представлен в виде объединения эрозий:

$$\Psi(X) = \cup X \ominus B, B \in k(\Psi),$$

где $k(\Psi)$ – ядро $\Psi(X)$, т.е. такое множество структурирующих элементов B, что $\Psi(B)$ содержит начало координат,

X – изображение со структурирующим элементом B.

Двойственная форма теоремы Матерона:

$$\Psi(X) = \cap X \oplus B, B \in k(\Psi^*),$$

где $\Psi^*(X) = \Psi(X^C)^C$.

Любой морфологический фильтр может быть представлен в виде *объединения эрозий* или *пересечения дилатаций*.

Морфологические операции на бинарных изображениях

Операция *открытия* (отмыкания, размыкания, раскрытия) X по B – это последовательное применения операций эрозии и дилатации:

$$X \circledcirc B = (X \ominus B) \oplus B.$$

Оператор открытия является *антиэкстенсивным* и *увеличивающим*.

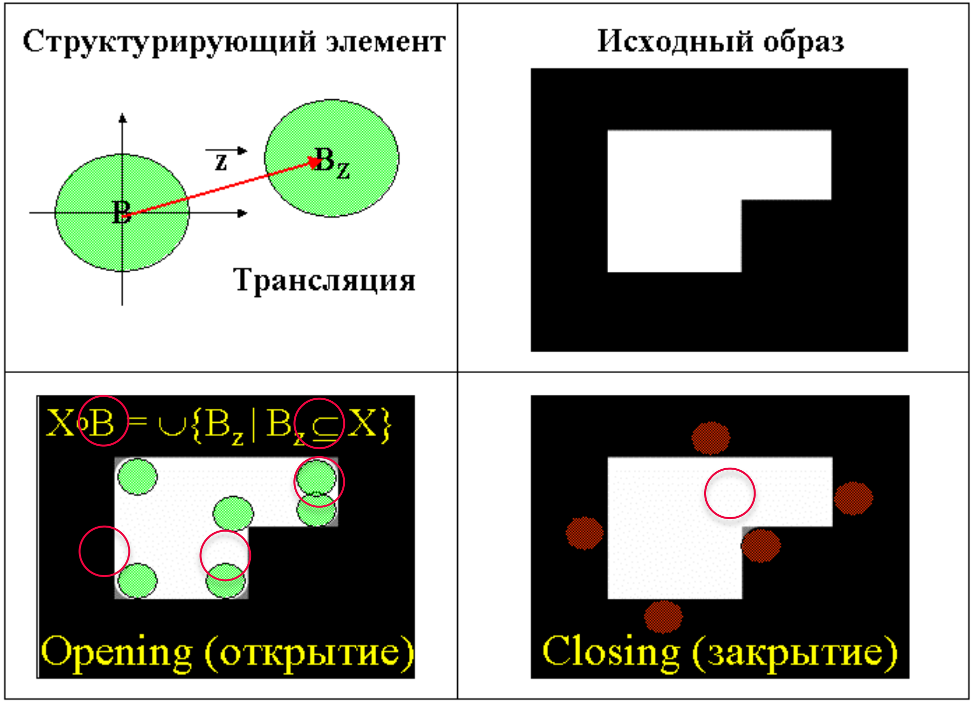
Операция *закрытия* (замыкания) X по B – это последовательное применения операций дилатации и эрозии:

$$X \odot B = (X \oplus B) \ominus B.$$

Оператор закрытия является *экстенсивным* и *увеличивающим*.

Оба оператора являются *равносильными* и, в силу определения, являются морфологическими фильтрами.

Морфологические операции на бинарных изображениях



Морфологические операции на бинарных изображениях

Пример фильтрации: на изображении представлен прямоугольный объект, имеющий «дефекты формы» типа внутренних «дырок» и внешних «выступов».

Будем использовать структурирующий элемент прямоугольной формы, поскольку объект имеет прямоугольную форму.

Морфологические операции на бинарных изображениях

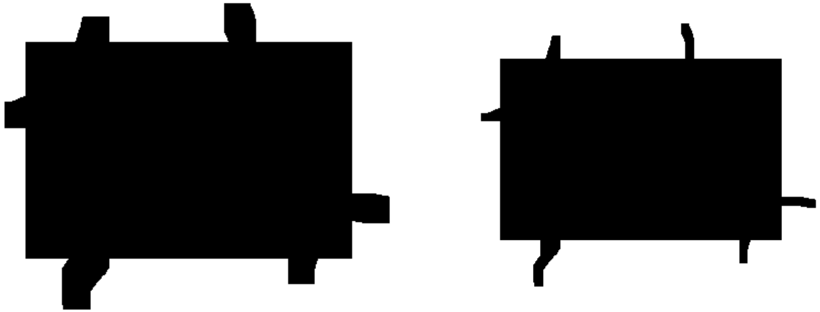
Рассмотрим удаление внешних «выступов» формы, используем открытие:

- На первом этапе выполняется операция эрозии объекта, которая удаляет («съедает») внешние «выступы» формы. При этом внешний размер объекта уменьшается, а внутренние дефекты – увеличиваются.
- После применения дилатации форма объекта восстанавливается.
- В результате выполнения всей операции открытия в целом внешние размеры и форма объекта оказываются восстановлены, но внутренние дефекты формы сохраняются.

Морфологические операции на бинарных изображениях

Рассмотрим удаление внутренних дефектов формы, используем закрытие:

- На первом этапе выполняется операция дилатация объекта, которая удаляет («заращивает») внутренние «дыры» и «каналы». При этом внешний размер объекта увеличивается вместе с выступами.
- После применения эрозии форма объекта восстанавливается.
- В результате выполнения всей операции закрытия в целом размеры и внутренняя целостность объекта оказываются восстановлены, но внешние дефекты формы сохраняются.



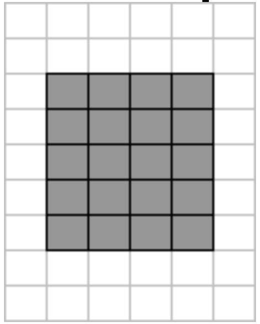
Морфологические операции на бинарных изображениях

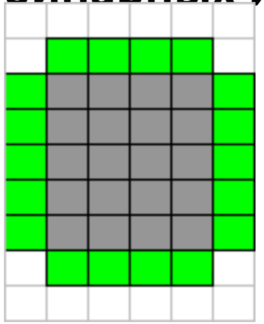
Устранение и «дырок» и «выступов»:

Последовательное применение к исходному изображению открытия, а затем к результату – закрытия с одним и тем же прямоугольным структурирующим элементом:

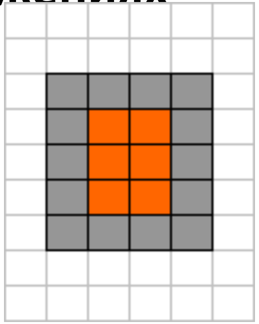
Морфологические операции на бинарных изображениях

A



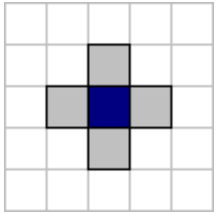


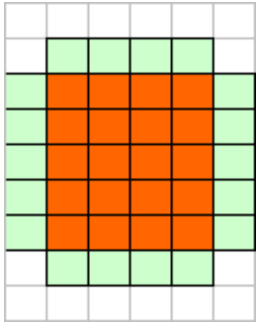
Дилатация



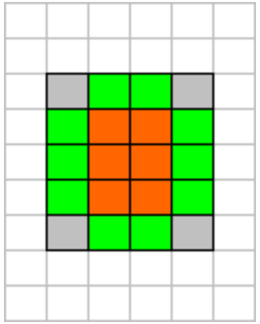
Эрозия

B



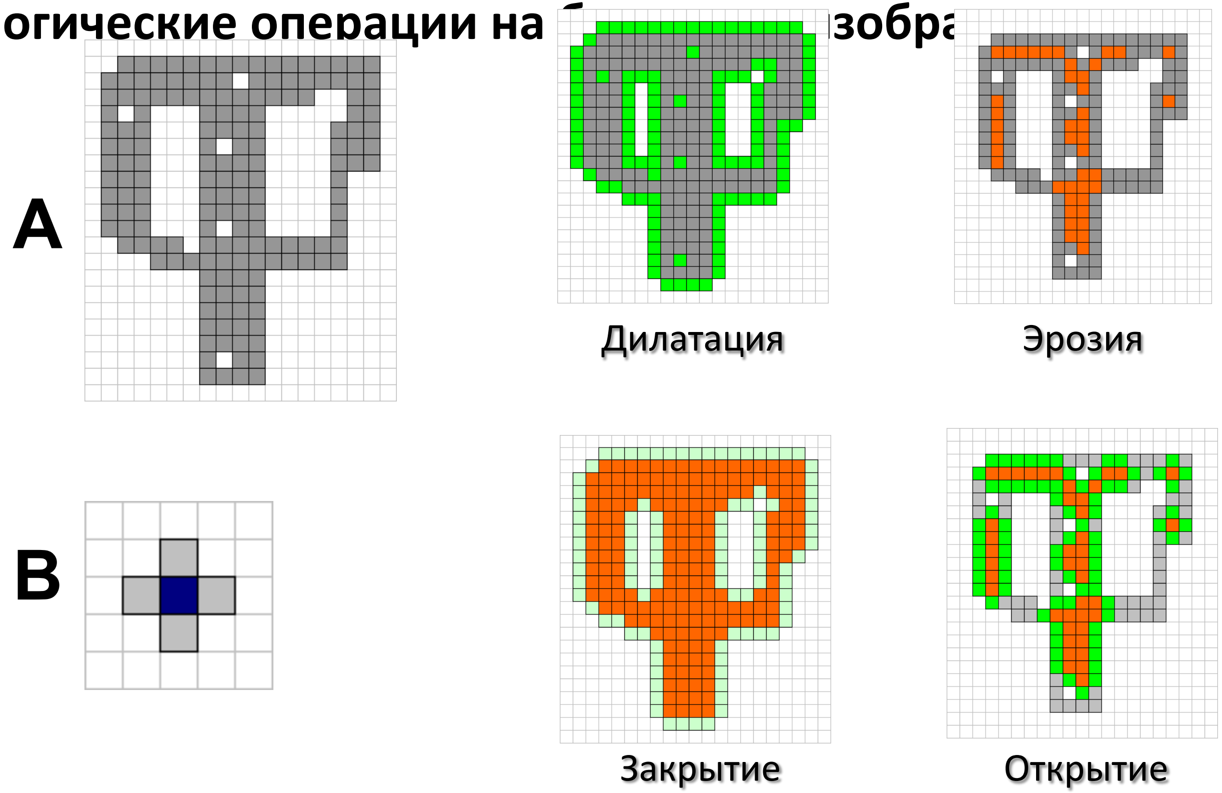


Закрытие



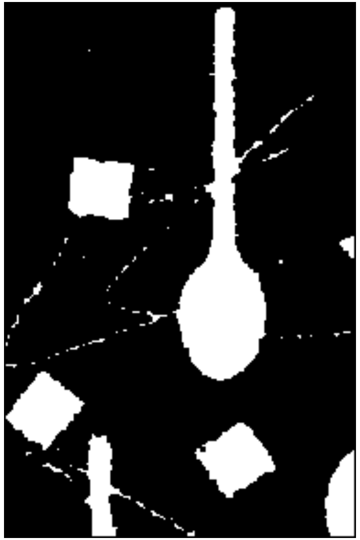
Открытие

Морфологические операции на б… зобра



Пример эрозии на бинарном изображении с сильным шумом

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & [1] & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & [1] & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & [1] & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример открытия на бинарном изображении с сильным шумом

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

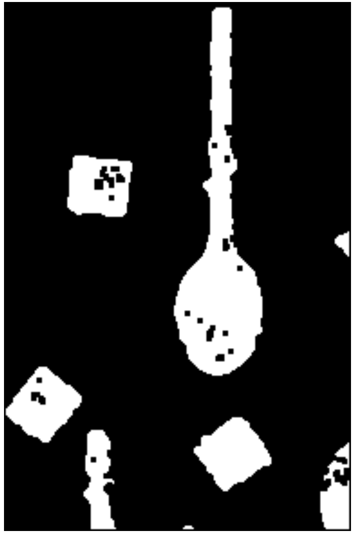
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

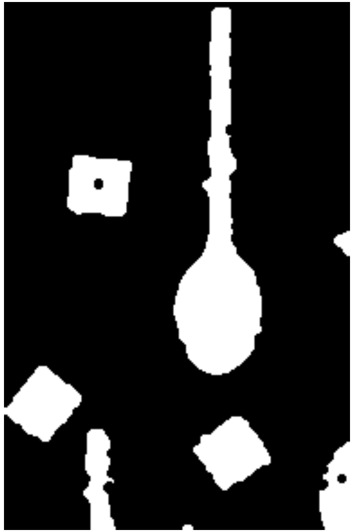
Морфологические операции на бинарных изображениях

Пусть задан объект с внутренними дефектами.

Пример закрытия на бинарном изображении с дефектами



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

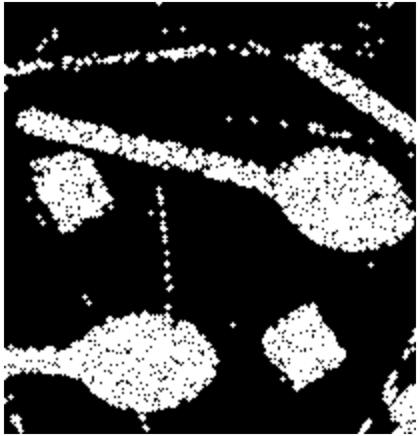


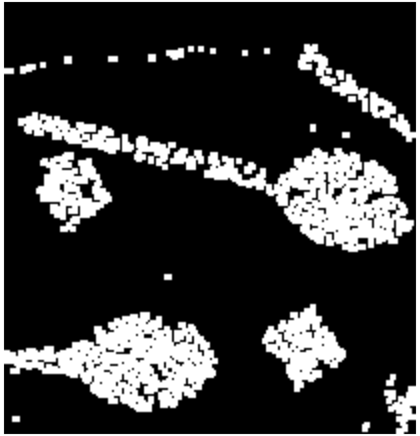
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пусть задан сильно зашумленный объект

Пример открытия на бинарном изображении с шумом





$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Морфологическая фильтрация и утончение линий

A

B $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Удаление шума в фоне (эрозия)

Удаление темных пятен на отпечатке (открытие)

Морфологическая фильтрация и утончение линий

A

B $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

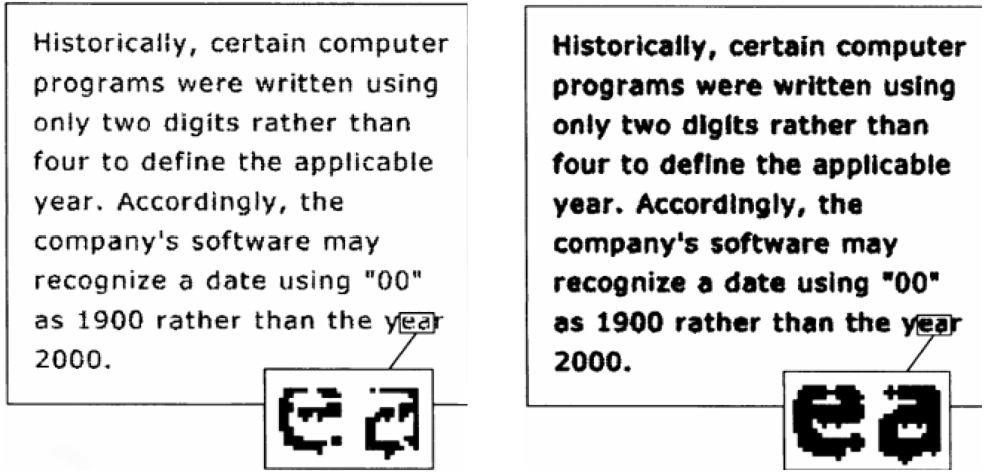
Удаление пропусков
на отпечатках (открытие,
затем дилатация)

Восстановление ширины
полос отпечатков
(эрозия)

Устранение разрывов линий путем их соединения

Пусть известно, что максимальная длина разрыва равна два пикселя.

Выберем структурный элемент вида: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, применим *дилатацию*.



Морфологические операции на бинарных изображениях

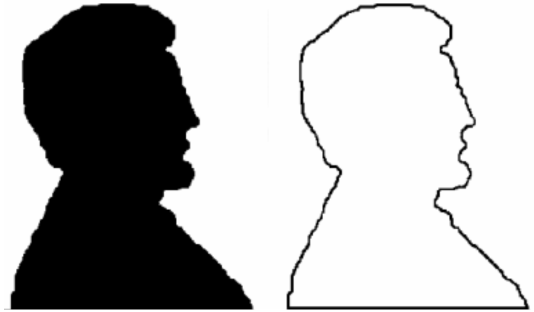
Пример: морфологическое выделение границы бинарного изображения.

Формирование внутреннего контура:

$$C = A - (A \ominus B).$$

Формирование внешнего контура:

$$C = (A \oplus B) - A.$$



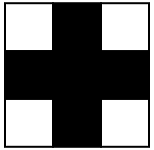
Морфологическая скелетизация

$skel(A) - n$-я эрозия образа A структурным элементом B:

$$E_n(A) = A \ominus nB;$$

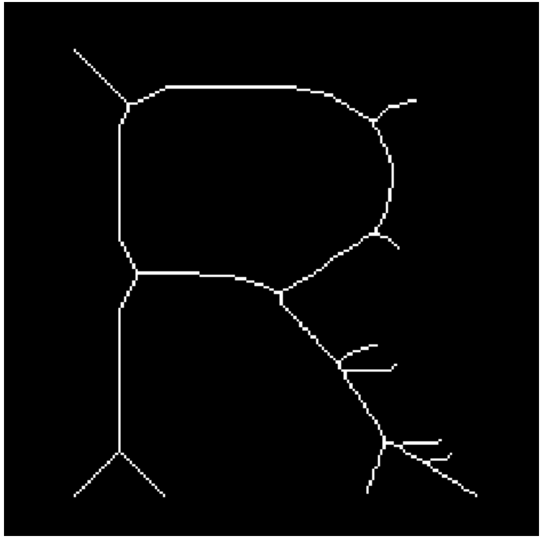
$$K_n(A) = E_n(A) - (E_n(A) \ominus B_1) \oplus B_1,$$

где B_1 имеет вид:

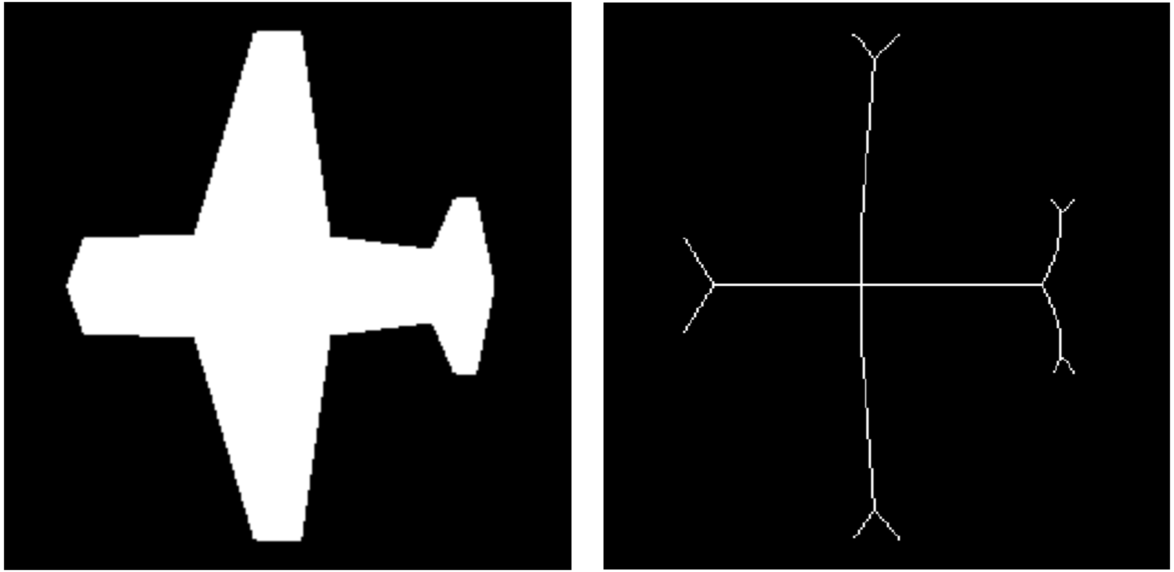


$skel(A) = \cup K_n(A), n = 0 \ldots N - 1$, где N такое, что $E_{N-1} \neq \emptyset$, а $E_N = \emptyset$

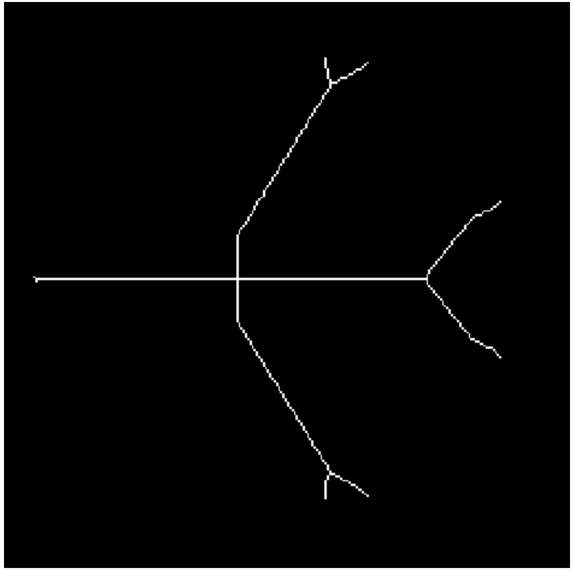
Морфологическая скелетизация



Морфологическая скелетизация



Морфологическая скелетизация



Математическая морфология полутоновых изображений

Изображение как функция $f: F \to E, F \subset E^{N-1}$, где N – размерность пространства (в случае двумерных изображений , $F \subset E^2$), задает интенсивность изображения на F.

Тенью f называют множество $U(f) \subset F \times E$, определяемое как:

$$U = \{(x, y) \in F \times E | y \leq f(x)\}.$$

Поверхностью множества $A \subseteq F \times E$ называется множество $T[A]: F \to E$, определяемое в каждой точке как:

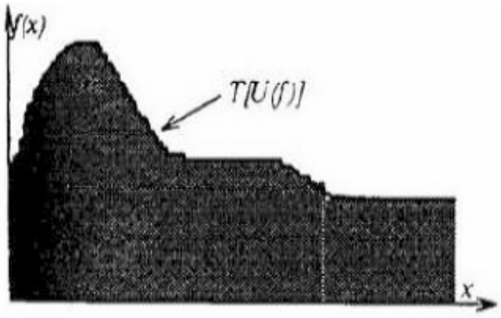
$$T[A](x) = \max y, (x, y) \in A.$$

Связь между тенью и поверхностью:

$$T[U(f)] = f.$$

Математическая морфология полутоновых изображений

Геометрическое представление тени и поверхности:

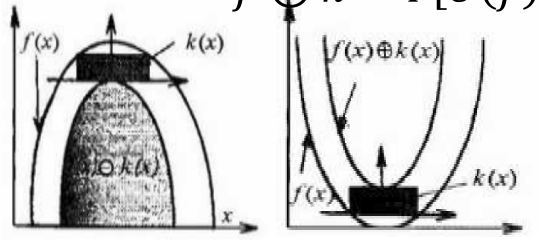


Дилатацией f по k называется:

$$f \oplus k = T[U(f) \oplus U(k)] = \max\{f(x-z)+k(z)\}$$

Эрозией f по k называется:

$$f \ominus k = T[U(f) \ominus U(k)] = \min\{f(x+z)-k(z)\}.$$



Математическая морфология полутоновых изображений

Эрозия расширяет множество темных пикселей полутонового изображения, а дилатация – светлых.

Исходное изображение

Эрозия

Дилатация

Математическая морфология полутоновых изображений

Выражения для операций открытия и закрытия полностью эквивалентны случаю бинарных изображений.

Операция *открытия* f по k:

$$f \circledcirc k = (f \ominus k) \oplus k = \max(\min(f)).$$

Служит для удаления небольших светлых деталей.

Операция *закрытия* f по k:

$$f \odot k = (f \oplus k) \ominus k = \min(\max(f)).$$

Служит для удаления небольших темных деталей.

Математическая морфология полутоновых изображений

Исходное изображение

Дилатация

Эрозия

Открытие

Закрытие

Математическая морфология полутоновых изображений

Сглаживание изображения – последовательное применение открытия и закрытия.

$$\min(\max(\max(\min f)))$$

Исходное изображение

Сглаженное изображение

Математическая морфология полутоновых изображений

Морфологический градиент

$$\frac{1}{2}(\max(f) - \min(f))$$

Исходное изображение

Обработанное изображение

Математическая морфология полутоновых изображений

Морфологический фильтр Лапласа

$$\frac{1}{2}(\max(f) - 2f + \min(f))$$

Исходное изображение

Обработанное изображение

Вопросы?

ITsMOre than a UNIVERSITY

s.shavetov@itmo.ru