Геометрические преобразования

Техническое зрение

Геометрические преобразования

Геометрические преобразования – пространственное изменение расположения совокупности пикселей с координатами (x, y) из одной двумерной прямоугольной системы координат в другую с новыми координатами (x', y'), причем яркости пикселей сохраняются.

В евклидовом пространстве пикселю изображения соответствует пара декартовых координат, которые интерпретируются в виде двумерного вектора, представленного отрезком из точки $(0,0)$ до точки $X_i = (x_i, y_i)$.

Однородные координаты – координаты, обладающие свойством, что определяемый ими объект не меняется при умножении всех координат на одно и то же ненулевое число.

Необходимое число однородных координат всегда на 1 больше размерности пространства.

Например, в двумерном пространстве P^2 для представления точки $X = (x, y)$ в однородных координатах необходимы три координаты $X' = (x', y', w)$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

где w – произвольный скалярный множитель,

$$x = \frac{x'}{w}, y = \frac{y'}{w}.$$

При помощи троек однородных координат и матриц третьего порядка можно описать любое линейное преобразование плоскости, поэтому геометрические преобразования являются ***матричными***: $X' = TX$, где T – матрица преобразования координат.

Распишем матричное уравнение $X' = TX$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}.$$

Точка с координатами $X = (x, y)$ в однородных координатах запишется как $X = (x', y', 1)$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

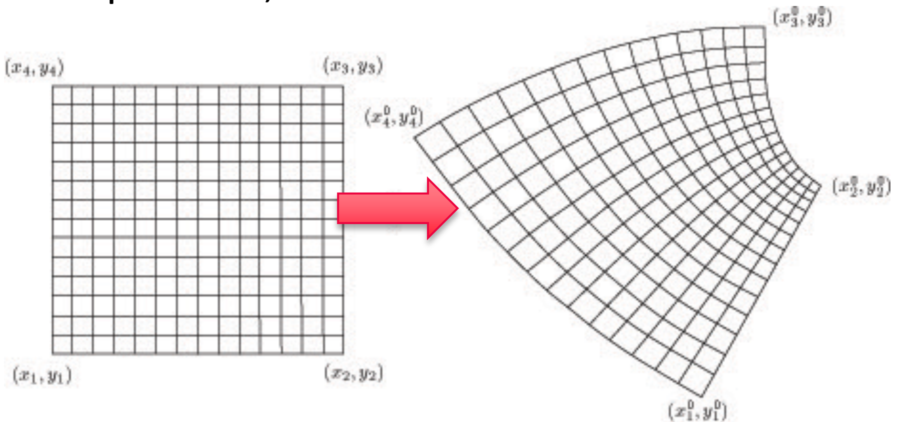
или в виде системы уравнений:

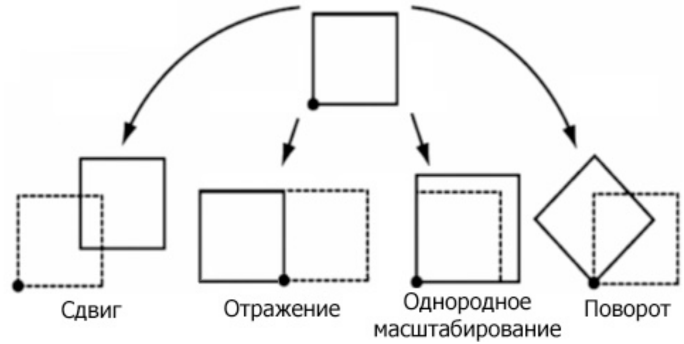
$$\begin{cases} x' = Ax + By + C \\ y' = Dx + Ey + F \end{cases}.$$

Конформное отображение – это отображение, при котором сохраняется форма бесконечно малых фигур и углы между кривыми в точках их пересечения.

К конформному отображению относятся *евклидовы преобразования*:

1. Сдвиг;
2. Отражение;
3. Однородное масштабирование;
4. Поворот.





1. **Сдвиг**:

$$\begin{cases} x' = x + C \\ y' = y + D \end{cases}, T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & C \\ 0 & 1 & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

C и F – сдвиг по осям Ox и Oy соответственно.

2. **Отражение** относительно оси Ox:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}, T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. **Масштабирование**:

$$\begin{cases} x' = \alpha x, \alpha > 0 \\ y' = \beta y,\ \beta > 0 \end{cases}, T = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

- если $\alpha < 1$ и $\beta < 1$, то изображение уменьшается;
- если $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, то изображение увеличивается;
- если $\alpha = \beta$, то изображение масштабируется однородно и преобразование является конформным;
- если $\alpha \neq \beta$, то пропорции будут неодинаковыми по ширине и высоте, поэтому отображение будет являться **аффинным**, а не конформным.

4. **Поворот** на угол φ по часовой стрелке:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}, T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

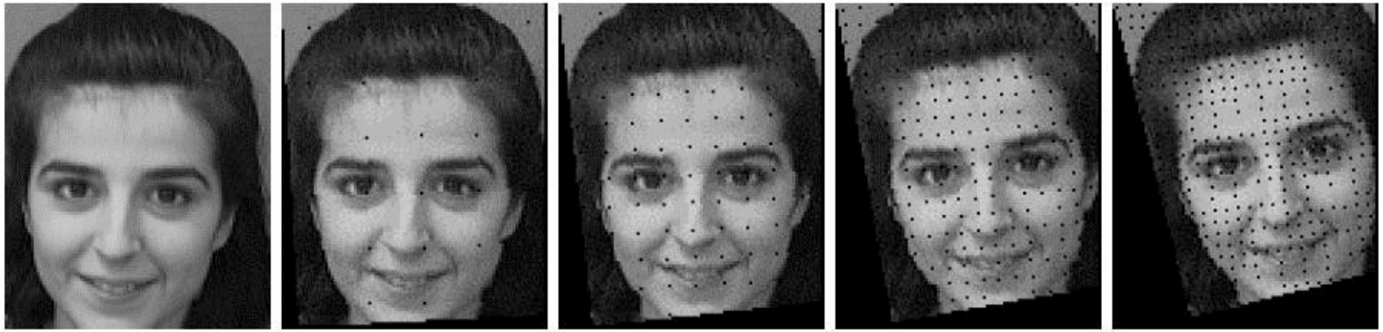
При повороте на 90° $\cos\varphi = 0, \sin\varphi = 1$, поэтому:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}.$$

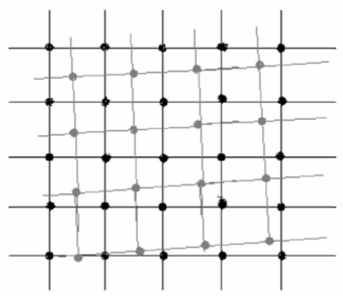
Матрица вращения примет вид:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Неопределенность пикселей



Изображение повернуто на 3°, 6°, 10° и 14° вокруг верхнего левого угла
(в черных пикселях яркость не определена).



Методы уточнения неопределенных пикселей:

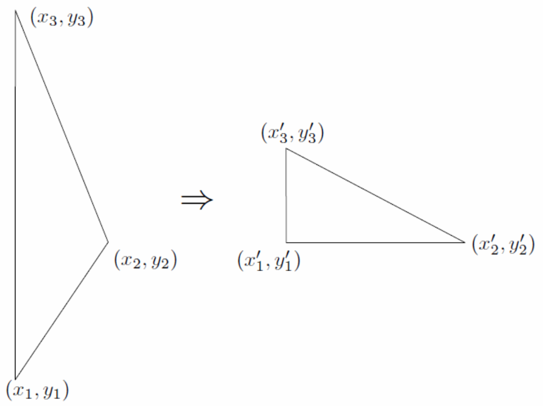
- *Прямой:*
  1. для каждого пикселя вычисляются новые координаты;
  2. округляются до ближайших целых значений;
  3. неопределенным пикселям нового изображения присваивается яркость ближайшего после геометрического преобразования пикселя с неокругленными координатами.

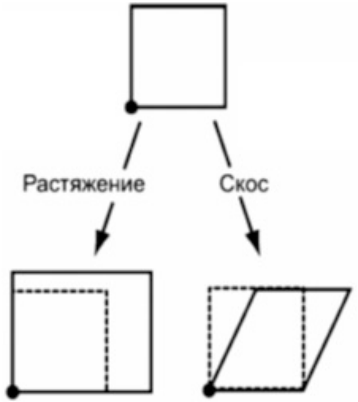
- *Обратный:*
  1. координаты каждого пикселя преобразованного изображения подвергаются обратному преобразованию в систему координат исходного изображения;
  2. координаты округляются до ближайших целых значений;
  3. берется яркость пикселя с такими координатами.

Аффинное отображение – это отображение, при котором параллельные прямые переходят в параллельные прямые, пересекающиеся в пересекающиеся, скрещивающиеся в скрещивающиеся; сохраняются отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой (или на параллельных прямых), и отношения площадей фигур.

К аффинному отображению относятся *конформные преобразования*, а также *скос* и *неоднородное масштабирование.*

Любое аффинное преобразование имеет *обратное аффинное преобразование*, а произведение прямого и обратного дает единичное преобразование, которое оставляет все точки на месте.





1. **Скос** вдоль оси Ox:

$$\begin{cases} x' = x + sy \\ y' = y \end{cases}, T = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

2. **Неоднородное масштабирование**:

аналогично конформному отображению при $\alpha \neq \beta$.

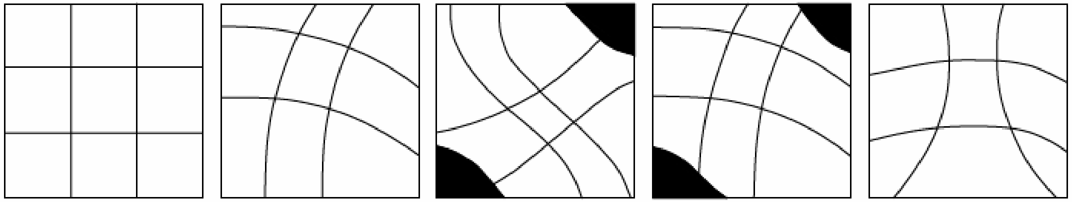
Произвольное аффинное отображение: композиция последовательно выполняемых базовых преобразований.

Например, альтернативой матрицы поворота является последовательное выполнение трех операций:

- скос вдоль оси Ox,
- скос вдоль оси Oy,
- скос вдоль оси Ox.

Матрица вращения описывается в виде произведения трех матриц скоса:

$$T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\tan\varphi}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\tan\varphi}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

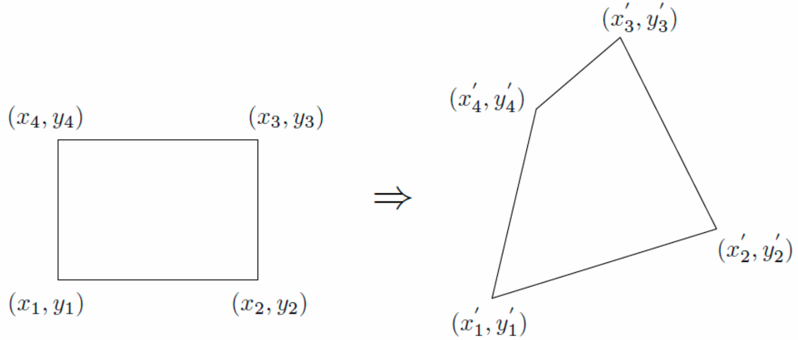


- *Проекционное отображение* – это отображение, при котором прямые линии остаются прямыми линиями, однако геометрия фигуры может быть нарушена, т.к. данное отображение в общем случае не сохраняет параллельности линий.

- Свойством, сохраняющимся при проективном преобразовании, является *коллинеарность* точек: три точки, лежащие на одной прямой (коллинеарные), после преобразования остаются на одной прямой.

- Проекционное отображение может быть как *параллельным* (изменяется масштаб), так и *проективным* (изменяется геометрия фигуры).

Проекционное отображение – это отображение, при котором прямые линии остаются прямыми линиями, однако геометрия фигуры может быть нарушена, т.к. данное отображение в общем случае не сохраняет параллельности линий.



Проекционное проективное отображение: прямые остались прямыми,
но параллельные отобразились в скрещивающиеся

Такое преобразование $P^3 \to P^2$ отображает евклидову точку сцены $P = (x, y, z)$ (в однородных координатах (x', y', z', w')) в точку изображения $X = (x, y)$ (в однородных координатах (x', y', w')).

Для нахождения декартовых координат точек из однородных координат воспользуемся следующими соотношениями:

$P = \left(\frac{x'}{w'}, \frac{y'}{w'}, \frac{z'}{w'}\right)$ – координаты вектора $\vec{P}$,

$X = \left(\frac{x'}{w'}, \frac{y'}{w'}\right)$ – координаты вектора $\vec{X}$.

Подставляя в $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$

$w = 1$ для вектора $\vec{X}$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{Ax + By + C}{Gx + Hy + I} \\ y' = \dfrac{Dx + Ey + F}{Gx + Hy + I} \end{cases}$$

Из-за нормирования координат на w' в общем случае проекционное отображение является нелинейным.

Пример:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1{,}1x+0{,}35y}{0{,}00075x+0{,}0005y+1} \\ y' = \dfrac{0{,}2x+1{,}1y}{0{,}00075x+0{,}0005y+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1{,}1x+0{,}2y}{0{,}00075x+0{,}0005y+1} \\ y' = \dfrac{0{,}1x+0{,}9y}{0{,}00075x+0{,}0005y+1} \end{cases}$$

Полиномиальное отображение – это отображение исходного изображения с помощью полиномов.

Матрица преобразования координат T содержит коэффициенты полиномов соответствующих порядков для координат x и y.

Например, в случае полиномиального преобразования *второго порядка* система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x' = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 \\ y' = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2 \end{cases}$$

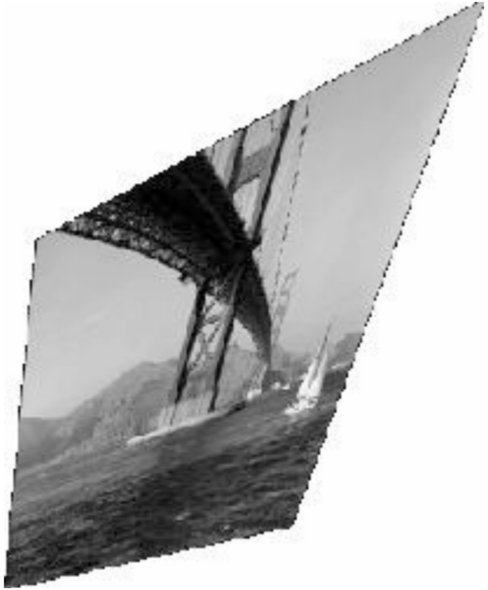
где x, y – координаты точек в одной системе координат;

x', y'– координаты этих точек в другой системе координат;

$a_1 \dots a_6$, $b_1 \dots b_6$ – коэффициенты преобразования.

Пример – полиномиальное отображение второго порядка:

$$\begin{cases} x' = 0{,}1x + 0{,}9y + 0{,}002xy \\ y' = 0{,}2x + 1{,}1y + 0{,}0022xy \end{cases}$$



Евклидова группа (конформное отображение) является частным случаем аффинной группы преобразований.

Множество аффинных преобразований образуют аффинную группу, которая является подгруппой проективной группы преобразований.

Эти группы формируют следующую иерархию преобразований:

Евклидово $\subset$ Аффинное $\subset$ Проективное

Мозаика (сшивка) – это объединение двух или более изображений в единое изображение.

Пусть два изображения получены путем сканирования по частям одного большого рисунка.

Обязательное условие: на обоих изображениях частично присутствуют одни и те же объекты.

- В общем случае склеиваемые изображения могут иметь существенные различия: из-за разного ракурса съемки, вращения камеры и движения самого фотографируемого объекта, изменения яркости, сезонных и суточных изменений, использования другой оптической системы и т.п.

- Рассмотрим задачу нахождения пространственного преобразования, которое позволяет определить пиксели обоих изображений в единой системе координат таким образом, чтобы точки, соответствующие одинаковым объектам на двух изображениях, совпали.

- В качестве общей системы координат можно использовать систему левого изображения, тогда требуется найти преобразование координат всех пикселей правого изображения (x, y) в общую систему координат (x', y').

- Для упрощения задачи будем считать, что в процессе регистрации не произошло искривления прямых линий, а только лишь аффинные трансформации.

- Аффинные преобразования являются подмножеством полиномиальных преобразований *первого порядка* и описываются двумя уравнениями:

$$\begin{cases} x' = a_1 + a_2 x + a_3 y \\ y' = b_1 + b_2 x + b_3 y \end{cases}$$

- Необходимо найти пиксели, соответствующие одинаковым объектам.

- Обозначим через (x_i, y_i) координаты таких пикселей на правом изображении в системе координат правого изображения, (x_i', y_i') – координаты этих пикселей в системе координат левого изображения.

Координаты одинаковых точек изображений известны, а коэффициенты $a_1 \dots a_3$ и $b_1 \dots b_3$ полиномиального преобразования первого порядка неизвестны:

$$\begin{cases} x' = a_1 + a_2 x + a_3 y \\ y' = b_1 + b_2 x + b_3 y \end{cases}$$

Для вычисления неизвестных коэффициентов преобразования необходимо минимальное количество общих точек $t_{min} = 3$.

В общем случае это количество может быть рассчитано для преобразования *n*-го порядка по формуле:

$$t_{min} = \frac{\big((n+1)(n+2)\big)}{2}$$

Согласно приведенной формуле минимально необходимое количество пар одинаковых пикселей равно трем.

Их известные координаты до и после трансформации $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ и (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), (x_3', y_3') подставим в систему уравнений для полиномиального преобразования первого порядка и получим три пары уравнений с неизвестными (a_i, b_i):

$$\begin{cases} x_1' = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 \\ y_1' = b_1 + b_2 x_1 + b_3 y_1 \end{cases}, \begin{cases} x_2' = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 \\ y_2' = b_1 + b_2 x_2 + b_3 y_2 \end{cases}, \begin{cases} x_3' = a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3 \\ y_3' = b_1 + b_2 x_3 + b_3 y_3 \end{cases}$$

Или в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Для вычисления коэффициентов (a_i, b_i) каждая часть матричного уравнения должна быть умножена на обратную матрицу слева. Например, для a_i:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

В матричной форме коэффициенты a_i и b_i вычисляются по формулам:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix}$$

Подставляя полученные коэффициенты преобразования в систему уравнений для полиномиального преобразования первого порядка и пересчета координат всех пикселей получим:

Преобразования более высоких порядков могут быть использованы для корректировки более сложных типов искажений, например, при сшивке изображений горной местности, снятых с самолета.

Способ решения задачи трансформации аналогичен предыдущему случаю и сводится к нахождению коэффициентов системы уравнений.

В случае *полиномиального преобразования второго порядка*, система уравнений задается в виде:

$$\begin{cases} x' = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 \\ y' = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2 \end{cases}$$

где (x, y) – координаты точек в одной системе координат (*известны*);

(x', y') – координаты этих точек в другой системе координат (*известны*);

$(a_1 \dots a_6)$, $(b_1 \dots b_6)$ – коэффициенты преобразования (*неизвестны*).

Минимальное необходимое количество пар соответствующих точек до и после трансформации для полиномиального преобразования второго порядка равно 6: $(x_1, y_1) \dots (x_6, y_6)$ и $(x_1', y_6') \dots (x_1', y_6')$.

В матричном виде:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_6' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ \dots \\ y_6' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_6 \end{bmatrix}$$

Домножив на обратные матрицы получим уравнения для поиска коэффициентов корректирующего преобразования в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_6 \end{bmatrix}$$

Пример:

Еще одним применением нелинейных преобразований является коррекция проективных искажений.

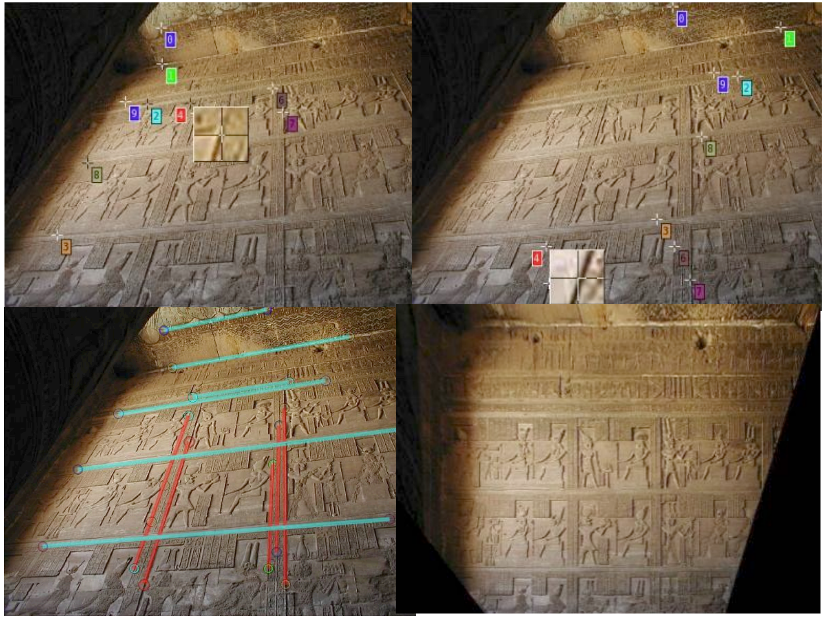
Проективное преобразование описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{Ax + By + C}{Gx + Hy + I} \\ y' = \dfrac{Dx + Ey + F}{Gx + Hy + I} \end{cases}.$$

В случае коррекции проективного искажения для определения восьми неизвестных коэффициентов $(A \dots H, I = 1)$ минимально необходимо задать восемь точек (4 пары).

Посредством решения системы линейных уравнений вычисляются неизвестные параметры преобразования $(A \dots H)$.

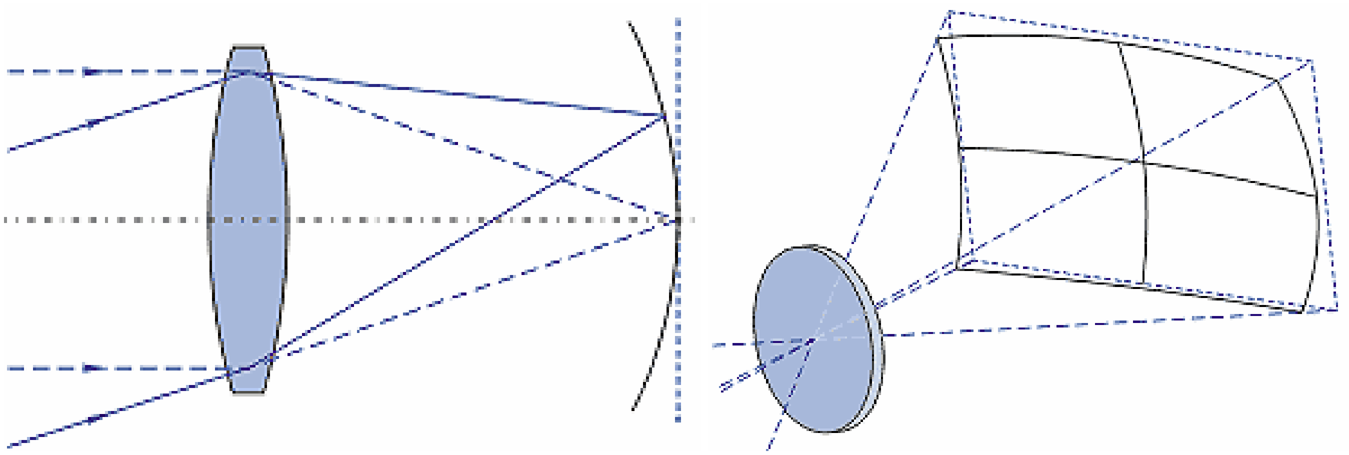
Для поиска неизвестных параметров необходимо отметить концы отрезков, которые должны быть вертикальными и горизонтальными на откорректированном изображении.



Оптические искажения при регистрации изображений

Дисторсия – это оптическое искажение, выражающееся в искривлении прямых линий.

Световые лучи, проходящие через центр линзы сходятся в точке, расположенной дальше от линзы, чем лучи, которые проходят через ее края.



Дисторсия не нарушает резкость и яркость изображения, но вносит искажение в его форму.

Прямые линии изображаются кривыми, кроме тех, которые лежат в одной плоскости с оптической осью.

1. **Подушкообразная дисторсия**: положительная, проявляется у широкоугольных объективов при съемке на максимальном фокусном расстоянии.
2. **Бочкообразная дисторсия**: отрицательная, проявляется у телеобъективов при съемке на минимальном фокусном расстоянии.

Виды дисторсии

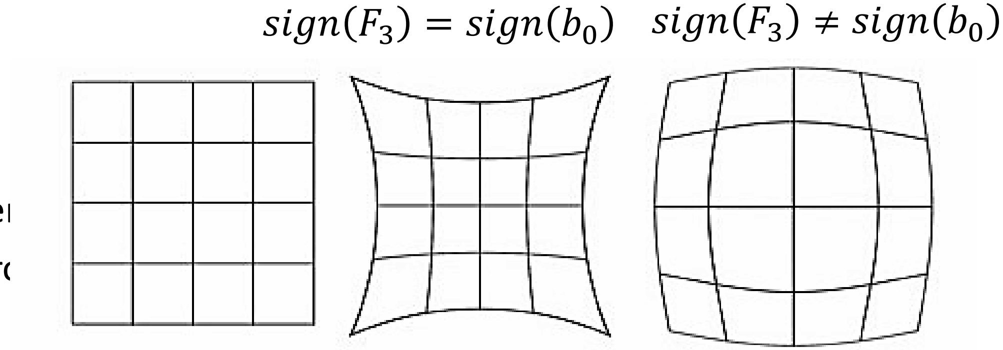
n=1: $\vec{R} = b_0\vec{r}$

n=3: $\vec{R} = b_0\vec{r} + F_3 r^2\vec{r}$

b_0 – коэффициент лине

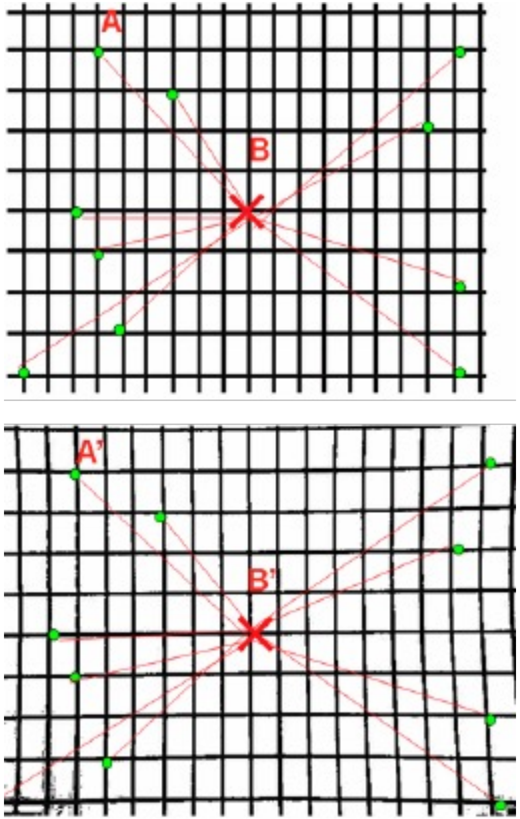
F_3 – коэффициент дисто

r – длина вектора $\vec{r}$;



$\vec{r} = (x, y)$ – вектор, задающий координаты в плоскости, расположенной перпендикулярно оптической оси; все лучи, вышедшие из этой точки и прошедшие через оптическую систему, попадут в точку изображения с координатами $\vec{R}$.

- Для одной и той же оптической системы дисторсия зависит от расстояния до объектива, а, следовательно, и от коэффициента b_0.
- У длиннофокусных объективов дисторсия меньше, чем у нормальных, а у широкоугольных – больше.
- Дисторсия незначительно зависит от длины отраженной волны.
- Для вычисления параметров корректирующего преобразования используют изображение регулярной сетки и ее искривленные изображения:
    - На них выбираются пары соответствующих точек;
    - Вычисляются векторы, соединяющие эти точки с началом координат;
    - Полученные параметры подставляются в уравнение дисторсии и решается система линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов b_0 и F_3.


A
B
A'
B'


Бочкообразная дисторсия
Подушкообразная дисторсия
Откорректированная дисторсия

Вопросы?

ITsMOre than a UNIVERSITY

s.shavetov@itmo.ru