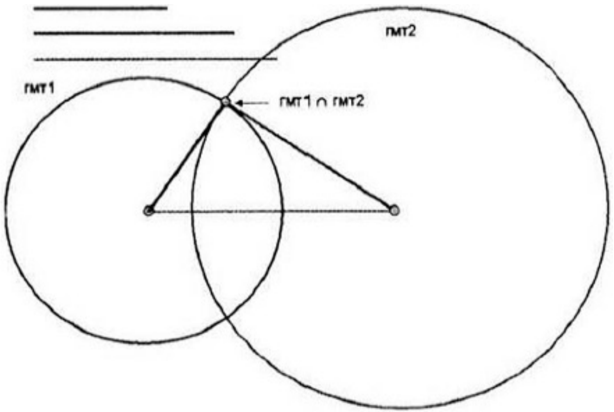
Преобразование Хафа

Техническое зрение

Идея преобразования Хафа

Преобразование Хафа

- **Популярный метод «голосования» точек:** преобразование Хафа (Хоха, Хо, от англ. Hough).
- **Идея:** метод поиска *общих геометрических мест*.
- **Пример задачи:** построение треугольника по трем заданным сторонам.



Решение задачи

1. Произвольным образом строим одну сторону треугольника;
2. Строим две окружности с центрами, совпадающими с концами первого отрезка и радиусами, соответствующими длинам второй и третьей сторонам треугольника;
3. Окружности – геометрическое место точек (ГМТ), в которых могут заканчиваться искомые стороны треугольника.
4. Для всех точек окружностей выполняются правила:
   - Расстояние от центра равно длине второй стороны;
   - Расстояние от центра равно длине третьей стороны.
5. Пересечение окружностей – общее геометрическое место (искомая третья вершина треугольник).

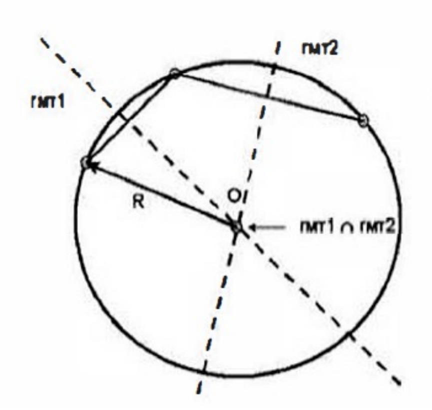
Обобщение методики

- точки окружности «проголосовали» в пользу возможного положения вершины;
- в пересечении окружностей два «голоса», в данном случая эта точка «победила», поскольку набрала максимальное число «голосов»;
- остальные точки плоскости получили ноль или один «голос»;
- форма «голосующей кривой» определяется априорными знаниями о голосующем объекте (в примере заданы стороны треугольника).

Пример

Построение окружности по трем заданным точкам:

- **Общее геометрическое место**: серединные перпендикуляры к отрезкам, попарно соединяющим заданные точки;
- **Решение задачи**: точка пересечения серединных перпендикуляров.

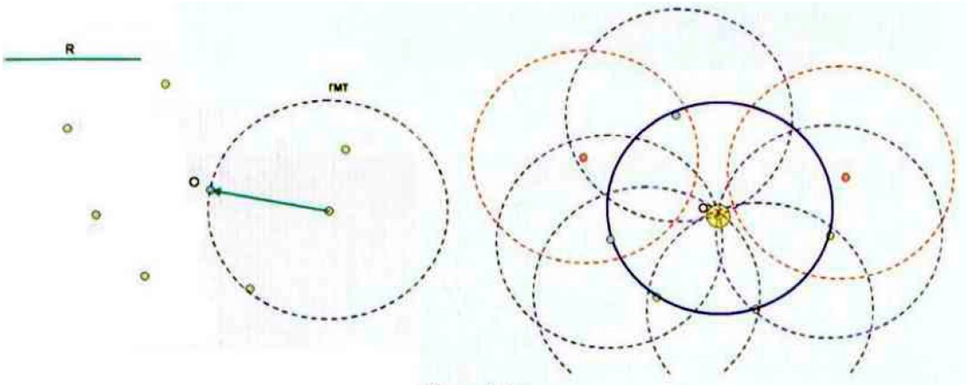


Обобщение предложенного подхода

- **Задача:** обнаружение окружности известного радиуса в бинарном множестве точек.
- **Решение**:
  - Набор центров всех окружностей радиуса R, проходящих через каждую точку, образует окружность радиуса R вокруг этой точки.
  - Геометрическое место точек – окружность такого же размера с центром в голосующей точке.
  - Наилучшее решение в поиске положения центра заданной окружности – точка пересечения максимального числа голосующих окружностей.

Обобщение предложенного подхода

- **Задача:** обнаружение окружности известного радиуса в бинарном множестве точек.
- **Решение**:
    - Победитель «голосования» – большая желтая точка в центре и сплошная окружность.



Подход «голосования»

- **Достоверность решения:** чем больше отношение числа точек, лежащих на найденной окружности, к общему числу точек, тем лучше соотношение «сигнал/шум».
- В рассмотренной задаче осуществлялся **поиск одной наиболее вероятной окружности**, поэтому менее популярные гипотезы были проигнорированы.
- Для поиска **всех возможных окружностей** необходимо определить порог или «избирательный ценз».
- **Основная проблема**: как вычислительно организовать процесс порождения гипотез и сбора голосов, если количество точек на изображении исчисляется тысячами?

Преобразование Хафа

Классическое преобразование Хафа

- **Классическое преобразование Хафа** (HT, Hough Transform) было предложено в 1962 году для выделения прямых на бинарном изображении.
- **Идея:** использование пространства параметров.
  - Пусть задана прямая:

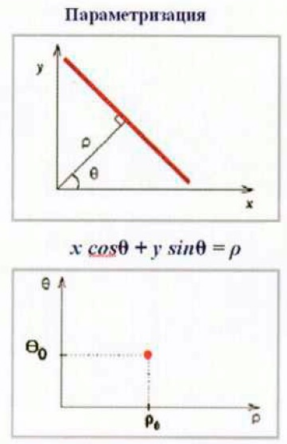
$$Y = kX + b,$$

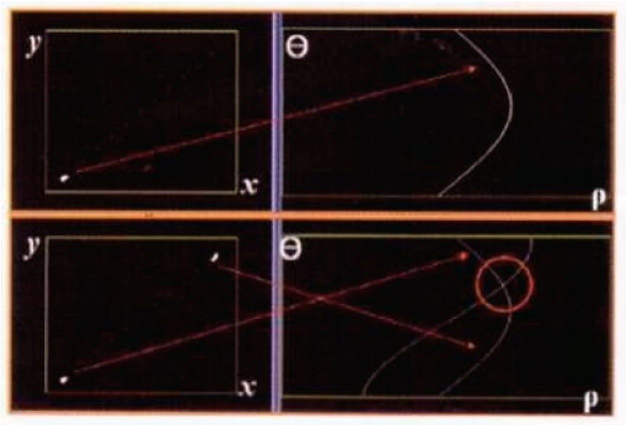
$$X\cos\theta + Y\sin\theta = \rho.$$

  - Поскольку прямая на плоскости характеризуется двумя параметрами, то пространство параметров имеет размерность $n = 2$.
  - Классическое преобразование Хафа использует параметры (ρ, θ).

Классическое преобразование Хафа

- **Пусть контурное изображение** – множество точек (x, y) в исходном пространстве $E = (X, Y)$.
- Множество прямых, проходящих через каждую точку (x, y), может быть изображено как множество точек (ρ, θ) в пространстве $\{\rho, \theta\}$.
- Функция отображения точки в пространстве Хафа называется «*функцией отклика*».

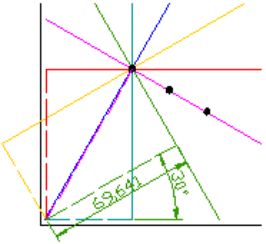




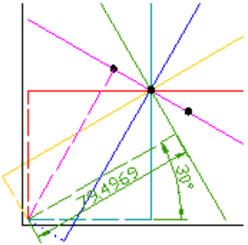
Классическое преобразование Хафа

- **Идея:** для каждой точки пространства параметров суммируется количество голосов, поданных за нее:
  - число точек исходного пространства, порождающих в пространстве параметров отклики, проходящие через данную точку (ρ, θ).
- Каждая точка в исходном пространстве порождает синусоидальную функцию отклика в пространстве параметров.
- Любые две синусоиды в пространстве параметров пересекутся в точке (ρ, θ) только тогда, когда порождающие их точки в исходном пространстве лежат на прямой.

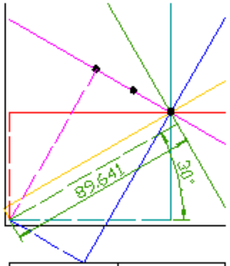
Классическое преобразование Хафа



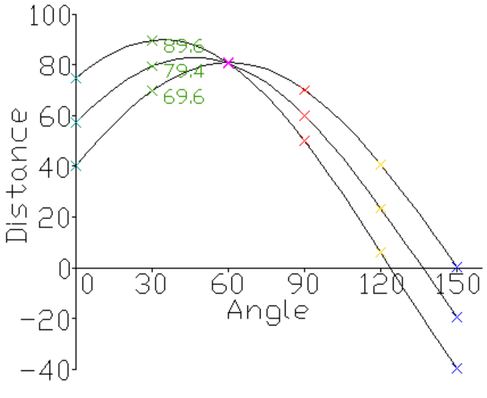
Angle	Dist.
0	40
30	69.6
60	81.2
90	70
120	40.6
150	0.4



Angle	Dist.
0	57.1
30	79.5
60	80.5
90	60
120	23.4
150	-19.5



Angle	Dist.
0	74.6
30	89.6
60	80.6
90	50
120	6.0
150	-39.6



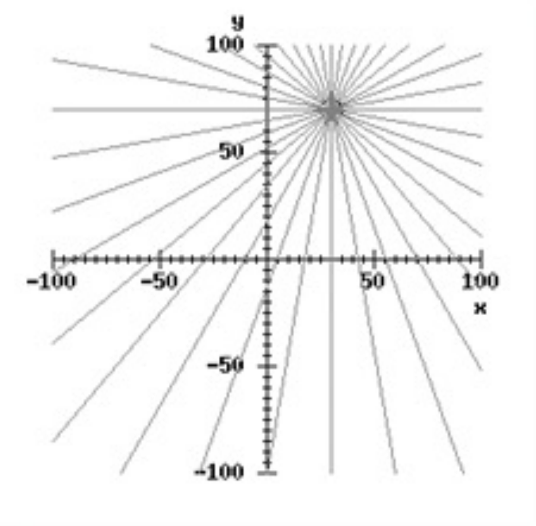
Классическое преобразование Хафа

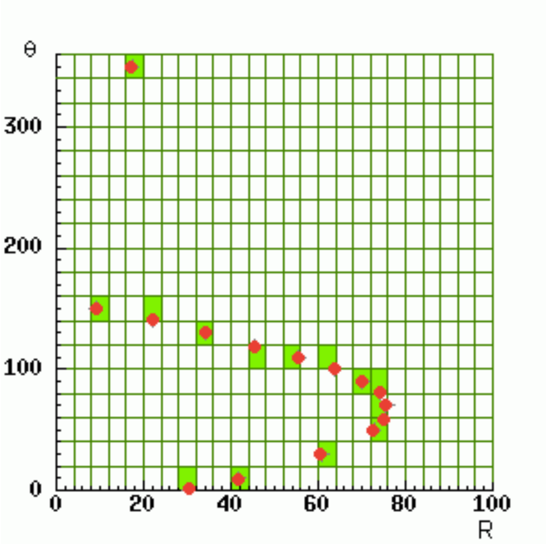
- Исходя из перечисленных соображений вводится ***аккумуляторная функция*** $A(\rho, \theta)$.
- Абсолютное значение аккумуляторной функции в точке (ρ, θ) равно числу точек контура, лежащих на соответствующей прямой в исходном пространстве.
- Если на изображении представлено m прямых, то аккумуляторная функция $A(\rho, \theta)$ будет иметь ровно m локальных максимумов.
- Для обнаружения прямых на исходном изображении необходимо найти все значительные локальные максимумы аккумуляторной функции.

Классическое преобразование Хафа

- Алгоритм не опирается на предположение о связности анализируемой линии, поэтому методы голосования хорошо работают в условиях загораживания или наличия других помех.
- Аккумуляторная функция $A(\rho, \theta)$ вычисляется не для каждой точки пространства параметров, а для каждой «ячейки аккумулятора».
- ***Ячейки аккумулятора*** – некоторые прямоугольные области, на которые разбивается пространство параметров.
- Дискретизируем фазовое пространство. После этого каждой прямой пространства (x, y) соответствует точка фазового пространства (ρ, θ).

Классическое преобразование Хафа





За каждую ячейку «голосуют» точки (x, y), удовлетворяющие:

$$X\cos\theta + Y\sin\theta = \rho,$$

где $\Theta_i \leq \Theta \leq \Theta_{i+1}$,
$\rho_i \leq \rho \leq \rho_{i+1}$.

Инвариантность преобразования Хафа

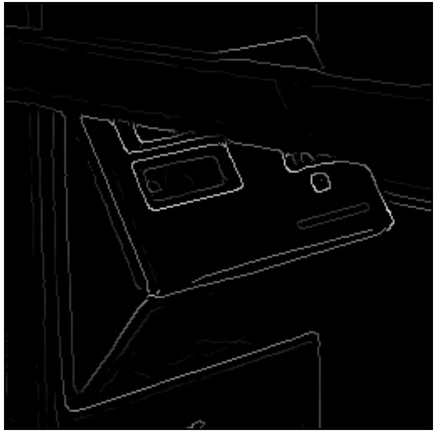
- Преобразование Хафа инвариантно к **сдвигу**, **масштабированию** и **повороту**.
- Поскольку прямые линии при любых проективных преобразованиях трехмерного пространства всегда переходят только в прямые линии (в вырожденном случае – в точки), преобразование Хафа позволяет обнаруживать линии инвариантно **не только к аффинным преобразованиям *в плоскости***, но и **к группе проективных преобразований *в пространстве***.

Эффективность преобразования Хафа

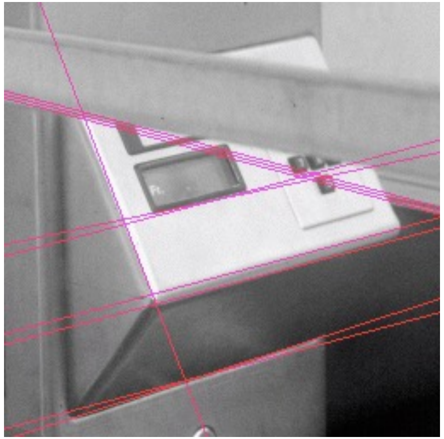
- При проективных преобразованиях прямая всегда переходит в прямую, поэтому формируется **пространство параметров низкой размерности** ($n = 2$).
- **Каждый пиксель изображения опрашивается только один раз**, при этом дальнейшие вычисления производятся только для пикселей, несущих полезную информацию (в данном случае – контурных).
  - Чем меньше пикселей, несущих полезную информацию, тем выше вычислительная эффективность.

Пример работы

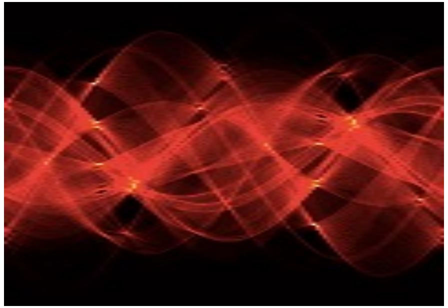
Исходное изображение



Выделенные контуры



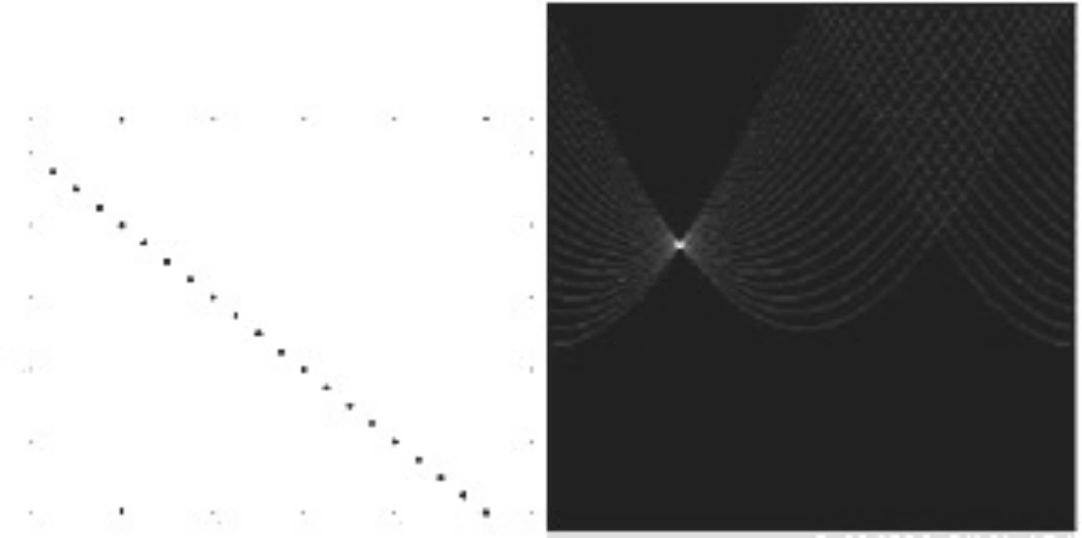
Найденные прямые



Пространство параметров

Недостатки преобразования Хафа

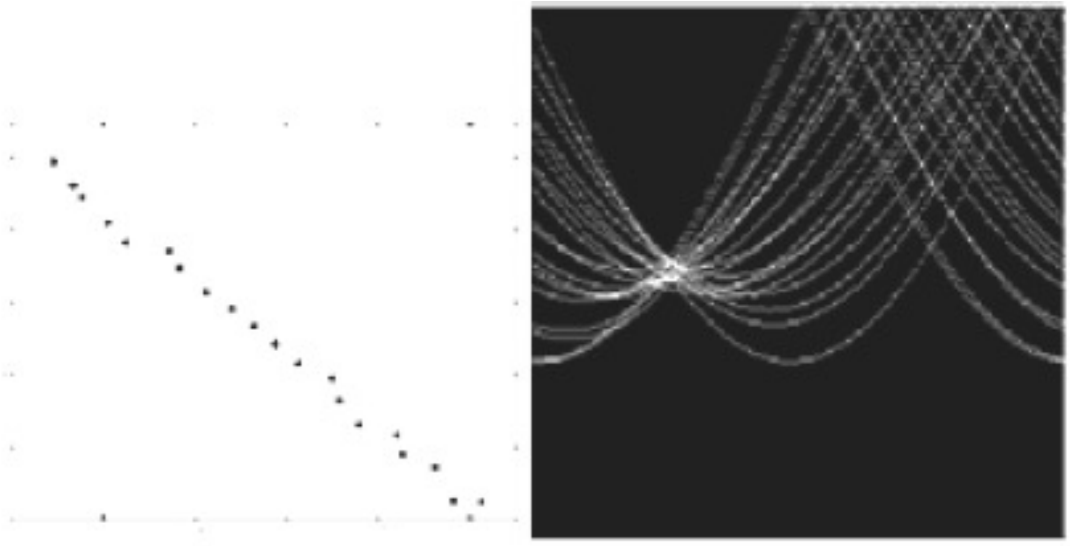
1. Ручной выбор дискретизации фазового пространства.



Точки и фазовое пространство без шума

Недостатки преобразования Хафа

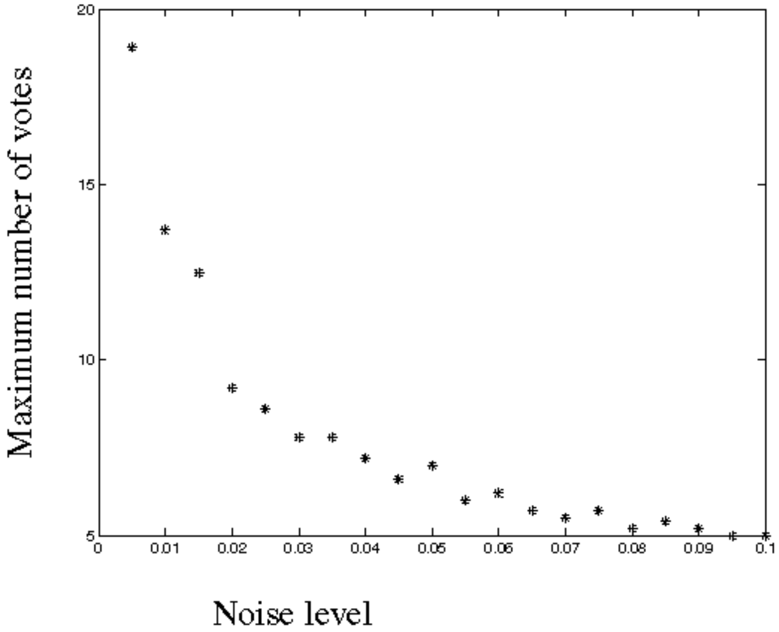
2. Шум приводит к размытию максимумов:



Зашумленные точки и размытие максимума в фазовом пространстве

Недостатки преобразования Хафа

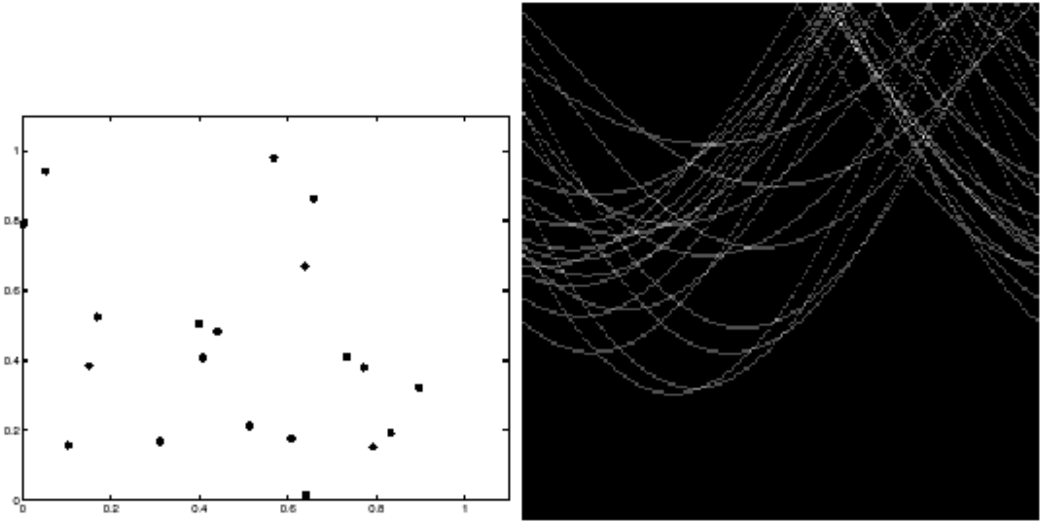
2. Шум приводит к размытию максимумов:



Зависимость количества голосов от уровня шума

Недостатки преобразования Хафа

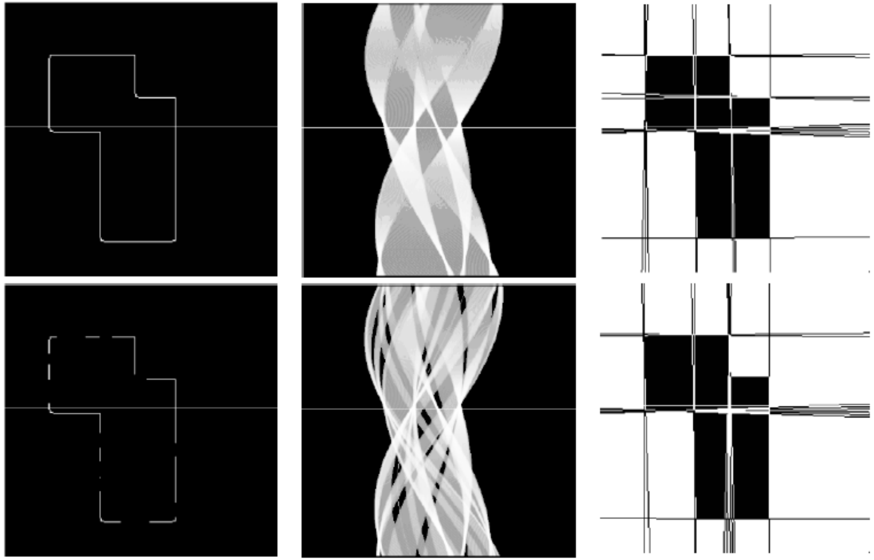
3. Равномерно распределенные точки могут приводит к случайным пикам в аккумуляторе:



Слева выделенные особые точки; справа – функции отклика

Недостатки преобразования Хафа

4. Пропущенные данные приводят к размытию значений в аккумуляторе:



Размытие данных в аккумуляторе из-за разрывов

Оптимизация преобразования Хафа

1. **Фильтрация лишних признаков**: для линий стоит брать точки на краях только с большим градиентом.
2. **Выбор правильной сетки** (шага дискретизации):
   - **Слишком грубая**: несколько близких линий будут голосовать за одну ячейку;
   - **Слишком мелкая**: можно пропустить линии, т.к. зашумленные точки будут голосовать за разные ячейки.
3. Для поиска максимумов можно **сглаживать значения в аккумуляторе**.
4. Какая точка соответствует какой линии: **необходимо помечать голоса**.

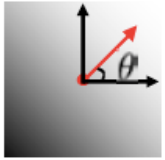
Оптимизация преобразования Хафа

- В классическом варианте преобразование Хафа можно представить в виде следующего кода:

```
For each edge point (x,y)
   For θ = 0 to 180
      ρ = x cos θ + y sin θ
      H(θ, ρ) = H(θ, ρ) + 1
   end
end
```

Оптимизация преобразования Хафа

- Чтобы не перебирать все возможные углы, можно учесть влияние градиента, поскольку при детектировании контура значение градиента уже вычислено.
- С учетом градиента:



$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

```
For each edge point (x,y)
   θ = gradient orientation at (x,y)
   ρ = x cos θ + y sin θ
   H(θ, ρ) = H(θ, ρ) + 1
end
```

Способы параметризации

Способы параметризации прямых

- Как известно, изображения в цифровых системах определены на дискретной прямоугольной сетке, которая допускает лишь некоторую соответствующую дискретную параметризацию семейства прямых.
- Рассмотрим естественное множество прямых линий, порождаемое целочисленной решеткой $N \times N$ точек, содержащей N^2 элементов.
- Любые две различные точки решетки определяют прямую, поэтому размер множества составит $N^2(N^2 - 1)$ линий.
- Многие линии будут определены несколько раз своими различными отрезками, если на них лежит более двух точек исходной решетки.

Способы параметризации прямых

- Представление множества прямых в виде четырехпараметрового массива $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ концевых точек является избыточным.
- Заметим, что множество прямых порождает также и множество углов (θ_a), которое можно описать как $\mathrm{tg}\theta_a = \frac{i}{j}$, где $\{i, j\} \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.
- Учитывая симметрию тангенса $0 < \mathrm{tg}\theta_a \leq 1$, причем углы повторяются во всех четырех квадрантах:

$$\mathrm{tg}\theta = [\mathrm{tg}(90° - \theta)]^{-1} = -[\mathrm{tg}(90° + \theta)]^{-1} = -[\mathrm{tg}(180° + \theta)]$$

Способы параметризации прямых

- Все возможные углы θ_a могут быть получены с использованием $N(N-1)/2$ линий. В четырех квадрантах число уникальных углов N_a должно быть $2N(N-1)$.
- Данное описание также избыточно: некоторые отношения $\frac{i}{j}$ являются кратными (например, 3/12 = 2/8 = 1/4). Вероятность того, что два целых числа соотносятся заданным образом, равна $6/\pi^2$.
- Поэтому размер неизбыточного множества углов N_a и линий N_L на решетке равны:

$$N_a = \frac{12}{\pi^2} N(N-1) = 1{,}216N(N-1)$$
$$N_L = 0{,}23N^2(N^2-1)$$

1. Точки периметра $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$

- Прямые описываются парой концевых точек, лежащих на периметре решетки $N\times N$.
- Очевидно, число точек будет равно $4N$ или (с учетом симметрии)

$1/2 \cdot (4N\times 4N) = 8N^2$ линий.

- Так как четверть из этих точек лежит на одной прямой (стороне квадрата), окончательный размер массива параметров составит $6N^2$.
- **Преимущество:** применение в случае изображения, разбитого на области меньшего размера позволяет легко соединять линии, проходящие через несколько таких областей, так как они смыкаются по периметру.
- **Недостаток:** информация об угловом положении прямых не содержится в явном виде.

2. Точка периметра и угол (a, n)

- Используется одна точка пересечения прямой с периметром n $(0 \leq n < N)$,
- и угол, определяемый прямой, проходящей через центр решетки и точку периметра a $(-N + 1 \leq a \leq N - 1)$.
- Массив аккумулятора содержит $4N^2$ элементов.

3. Наклон и смещение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$

- Используется угол a, определяемый направлением из центра к некоторой точке на периметре квадратной решетки.
- Смещение линии по вертикали или горизонтали из центра фиксируется при помощи расстояния из центра до пересечения прямой с осью $O\mathrm{y}$ или $O\mathrm{x}$.
- Порождает $3N^2$ или $4N^2$ элементов аккумулятора.
- (a, d)-параметризация тесно связана с (ρ, θ)-параметризацией и с параметрами уравнения $y = ax + b$, где a – интерпретируется как наклон прямой.

3. Наклон и смещение (a, d)

- Для линий с наклоном меньше 45° d отсчитывается от центра до пересечения прямой с вертикальной осью Oy.
- Для линий с наклоном больше 45° d измеряется вдоль горизонтальной оси Ox.
- Чтобы сохранить непрерывность отображения необходимо поменять знак d для углов $45° < \theta_a \leq 90°$.
- Отображение (x, y) на (a, d):

$$d = \begin{cases} y - 2ax(N-1) \text{ для } 0 \leq |a| \leq \dfrac{N-1}{2}, \\ -\left[x - 2y + \dfrac{2ay}{N-1}\right] \text{ для } \dfrac{N-1}{2} < a \leq N-1, \\ \left[x + 2y + \dfrac{2ay}{N-1}\right] \text{ для } -N+1 \leq a < -\dfrac{N-1}{2}. \end{cases}$$

4. Основание нормали

- Прямая характеризуется координатами точки (x_0, y_0) основания нормали (перпендикуляра), который опущен на прямую из начала координат (либо другой опорной точки).
- Применим к исходному изображению в плоскости (x, y) дифференциальный градиентный оператор Собела и получим в каждой характерной контурной точке компоненты локального градиента (g_x, g_y).
- Определим точку (x_0, y_0) как «основание нормали» прямой (ρ, θ), проходящей через голосующую точку (x, y).

4. Основание нормали

- Получим соотношения:

$$\frac{g_y}{g_x} = \frac{y_0}{x_0},$$
$$(x - x_0)x_0 + (y - y_0)y_0 = 0.$$

- Решая уравнения относительно x_0 и y_0, получим:

$$x_0 = Vg_x,$$
$$y_0 = Vg_y,$$
$$V = \frac{\left(xg_x + yg_y\right)}{\left(g_x^2 + g_y^2\right)}.$$

4. Основание нормали

- Обратное преобразование:

$$x = x_0 + W g_y,$$
$$y = y_0 - W g_x,$$
$$W = \frac{\left(x g_y - y g_x\right)}{\left(g_x^2 + g_y^2\right)}.$$

Преобразование Хафа для поиска окружностей

Поиск окружностей

- Описанный алгоритм может работать совершенно аналогично при обнаружении любой кривой, которую можно описать на плоскости конечным числом параметров: $F = (a_1, a_2, \dots, a_n, x, y)$.
- В рассмотренной ранее задаче поиска окружностей заданного радиуса R имеет место двухпараметрическое семейство кривых $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.
- Нужно производить поиск максимума аккумуляторной функции $A(x, y)$ в пространстве параметров (x, y).
- В этом случае пространство параметров практически совпадает с исходным (x, y).

Поиск окружностей

- Набор центров всех возможных окружностей радиуса R, проходящих через заданную точку, образует окружность радиуса R вокруг этой точки.
- Функция отклика в преобразовании Хафа для поиска окружностей известного размера представляет собой окружность такого же размера с центром в голосующей точке.
- Максимум аккумулятора соответствует положению центра окружности на изображении.

Алгоритм поиска окружностей

Алгоритм поиска окружностей заданного радиуса на полутоновых изображениях:

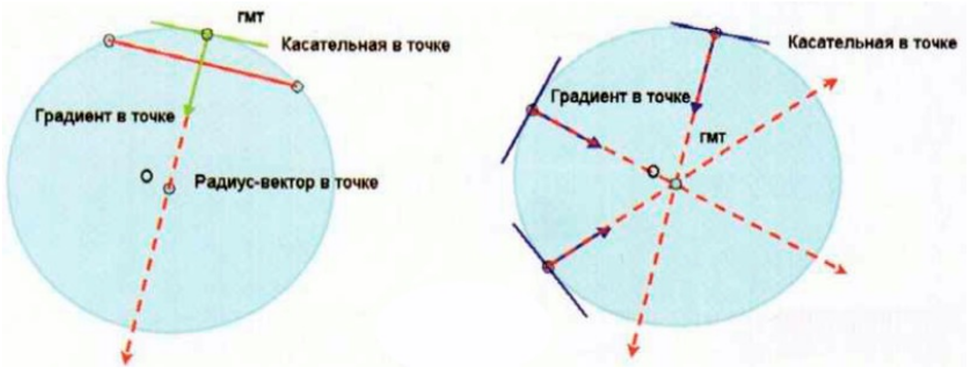
1. **Обнаружение пикселей края**, окружающих периметр объекта. Может использоваться градиентный оператор, например, оператор Собеля.
   - Голосующими контурными точками считаются точки с высоким значением модуля градиента.
   - Для каждого обнаруженного краевого пикселя используется оценка положения и ориентации контура с целью оценки центра окружности радиуса R путем движения на расстояние R от краевого пикселя в направлении нормали к контуру (в направлении вектора-градиента).
   - Повторение операции для каждого краевого пикселя позволит найти множество положений предполагаемых точек центра, которое может быть усреднено для определения точного местонахождения центра.

Алгоритм поиска окружностей

- Если радиус окружности является неизвестным или переменным, необходимо включить R в качестве дополнительной переменной в параметрическое пространство-аккумулятор.
- Процедура поиска пика должна определить радиус, также, как и положение центра путем рассмотрения изменений вдоль третьего измерения параметрического пространства.
- Если размер обнаруженной окружности не интересует и требуется обнаружить только ее центр, то можно не увеличивать размерность пространства параметров.

Алгоритм поиска окружностей

- Для каждого возможного направления на «центр» контурная точка голосует лучом в этом направлении.
- В результате окажутся задействованы все возможные положения «центра» при любом масштабе объекта, что позволит искать окружности независимо от их радиуса.



Алгоритм поиска окружностей

2. После обнаружения потенциальных центров окружностей, необходимо уточнить радиус окружностей с центрами в найденных точках.

- В случае точечного множества, а не непрерывного контура окружности, можно реализовать голосование пар точек в пользу соответствующих серединных перпендикуляров, и, таким образом, решить задачу выделения окружностей неизвестного размера в бинарном точечном множестве.

Поиск геометрических примитивов

- Анализ аккумулятора
  1. Непосредственный поиск фиксированного числа локальных максимумов (одного глобального максимума) в пространстве параметров. Возможны различные способы отыскания таких максимумов.
  2. Пороговая сегментация аккумуляторной функции и последующий анализ связных областей пространства параметров.
- Выбирая порог равным значению минимального локального максимума, получим при помощи второго метода то же, что и при использовании первого.
- Остается проблема оптимального выбора порога для конкретного изображения.

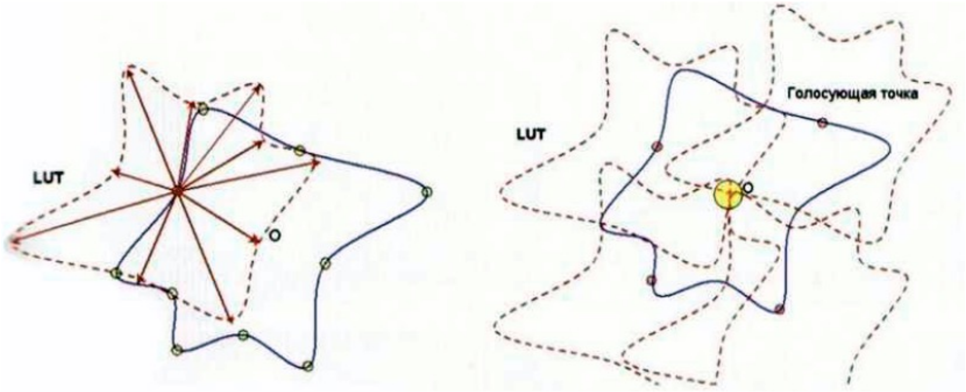
Поиск геометрических примитивов

- Короткие линии (отрезки кривых) дадут относительно низкие пики аккумуляторной функции по сравнению с длинными. Они будут обнаружены лишь в случае, когда до настройки порога известно, что они присутствуют на изображении.
- **Как исключить порог?**
- **Идея:** на каждом этапе анализа ведется поиск одного глобального максимума аккумуляторной функции, после чего из всех ячеек аккумулятора вычитаются «вклады» всех тех точек исходного изображения, которые принадлежат кривой, соответствующей обнаруженному максимуму; после этого повторяется поиск.
- **Результат:** большая чувствительность к небольшим отрезкам и устойчивость к шуму.

Обобщенное преобразование Хафа

Обобщенное преобразование Хафа

- В 1966 году метод голосования контурных точек был обобщен на случай кривых, не описываемых аналитически, и получил название *Обобщенного преобразования Хафа* (GHT).
- Сначала рассмотрим задачу обнаружения объекта произвольной формы, заданного эталонным изображением, в случае, когда требуется обеспечить инвариантность результатов обнаружения к сдвигу изображения, но не к его масштабу.



Обобщенное преобразование Хафа

- В данном случае важно, что расстояние R от текущего пикселя границы до ее центра больше не константа, а является функцией $R(\varphi)$ от угла φ радиус-вектора, направленного от точки контура к центру (условной точки локализации).
- Для определения простых форм функция $R(\varphi)$ может быть описана аналитически.
- Для сложных форм подход остается жизнеспособным при использовании просмотровых таблиц (look-up-table), содержащих дискретные значения $R(\varphi)$ для различных значений углов.
- Алгоритм состоит из обучения детектора Хафа путем составления LUT по эталонному изображению и этапа обнаружения объекта на тестовом изображении путем голосования контурных точек с использованием этой LUT.

Обобщенное преобразование Хафа

- Обобщим рассмотренный подход на случай, когда объект помимо перемещения может вращаться (инвариантность к вращению).
- В данном случае радиус-вектор в краевой точке является не функцией от абсолютного угла φ направления на центр, а функцией относительного угла между направлением градиента и направлением радиуса-вектора.

Резюме GHT

- Модификации преобразования Хафа обеспечивают инвариантное обнаружение геометрических примитивов и объектов на изображении с высокой степенью помехозащищенности и значительной точностью определения параметров местоположения и ориентации
- Описанные алгоритмы обнаруживают не сами полутоновые объекты, а их контуры. Объекты, не имеющие четко выраженного контура, не могут быть подвергнуты детектированию с использованием GHT.

Рекуррентное преобразование Хафа

Рекуррентное преобразование Хафа

Рекуррентное преобразование Хафа в скользящем окне (RHT)

- Служит для получения информации о проходящих через каждую точку прямых и их параметрах.
- Определим окно размером $W \times W$, движущееся по изображению слева-направо и снизу-вверх.
- Для каждого положения окна заполняется соответствующий аккумулятор преобразования Хафа.
- После этого результаты переносятся в общий аккумуляторный массив для всего изображения.
- В результате каждая точка общего аккумулятора характеризуется параметрами наиболее достоверного отрезка прямой, проходящего через него.

Рекуррентное преобразование Хафа

- Для корректного переноса результата голосования в каждом отдельном окне в общий аккумулятор изменим параметризацию пространства Хафа.
- Будем описывать прямую в окне параметрами (x, Q), где x – координата пересечения оси X окна, а Q – угол наклона этой прямой к оси X.
- После голосования всех точек окна получим аккумулятор, в котором в точке (x, Q) будет содержаться количество точек, лежащих на прямой, проходящей в этом окне через точку (x, Q) под углом Q.

Рекуррентное преобразование Хафа

- Для переноса в конечный массив необходимо определить для каждой точки на оси Ox окна прямую, за которую проголосовало наибольшее количество точек.
- Однако, при параметризации (x, Q) будут захвачены не все прямые, так как часть из них будут пересекать ось Ox далеко за пределами окна или не пересекать вообще.
- Для решения этой проблемы введем дополнительную параметризацию (y, Q).

Рекуррентное преобразование Хафа

- Проход с параметризацией (x, Q) назовем проходом по строкам и будем идти окном от нижнего левого положения и полностью проходить по строке исходного изображения до крайне правого положения, а затем подниматься на строку вверх.
- При проходе (y, Q) по столбцам будем идти от самого нижнего левого положения и полностью проходить по столбцу исходного изображения до самого верхнего положения, а затем смещаться на столбец вправо.
- После обоих проходов результаты объединяются максимизацией и в аккумуляторе оказываются отрезки, за которые подано наибольшее количество голосов.

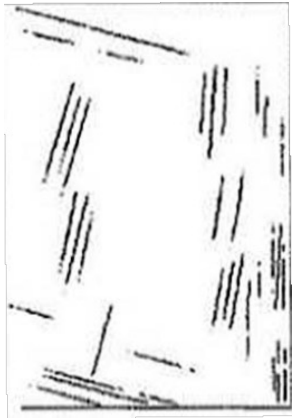
Рекуррентное преобразование Хафа

- В итоге аккумулятор содержит все возможные для данного изображения варианты расположения элементов прямых линий.
- После этого необходимо выделить наиболее достоверные отрезки. Возможны следующие варианты такой обработки:
  1. пороговое отсечение (параметр – порог);
  2. выделение локальных максимумов (параметры – размеры прямоугольной области в которой ведется поиск максимума).

Рекуррентное преобразование Хафа

исходное полутоновое изображение

исходные бинарные контуры



результат обнаружения линий

Рекуррентное преобразование Хафа

маленький
размер окна

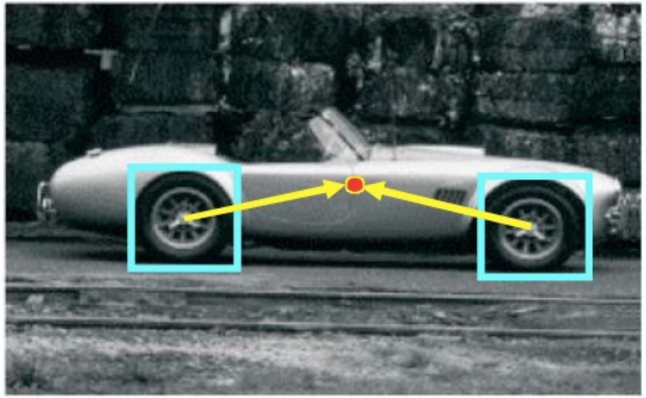
средний
размер окна

большой
размер окна

Применение преобразования Хафа в задаче распознавания

Использование Хафа в распознавании

- Можно, например, определить, где располагаются характерные фрагменты изображения относительно центра объекта, а также вектора смещения фрагментов относительно центра.



Использование Хафа в распознавании

- **Задача:** поиск центра объекта.
- Каждый характерный фрагмент изображения проголосует за центры объектов на тестовом изображении, причем точка с максимумом голосов будет центром объекта.

Вопросы?

s.shavetov@itmo.ru