1 Крайни Автомати

Дефиниция 1.1. *Краен автомат* дефинираме като петорка $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \Delta \rangle$, където

- Σ е *крайна азбука от символи*
- Q е *крайно множество от състояния*
- $I \subseteq Q$ е *множество от начални състояния*
- $F \subseteq Q$ е *множество от финални състояния*
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ е *релация на прехода*

Тройки от вида $\langle q_1, m, q_2 \rangle \in \Delta$ наричаме *преходи* и казваме, че започва състояние q_1, има етикет m и завършва в състояние q_2. Алтернативно, тези преходи обозначаваме като $q_1 \to^m q_2$.

Дефиниция 1.2. Нека $\mathcal{A}$ е краен автомат. *Разширена релация на прехода* $\Delta^* \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$ дефинираме индуктивно:

- $\langle q, \epsilon, q \rangle \in \Delta^*$ за всяко $q \in Q$
- $\langle q_1, wa, q_2 \rangle \in \Delta^*$ за всяко $q_1, q_2, q \in Q$, $a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$, ако $\langle q_1, w, q \rangle \in \Delta^*$ и $\langle q, a, q_2 \rangle \in \Delta$

Дефиниция 1.3. Нека $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \Delta \rangle$ е краен автомат. *Път* в $\mathcal{A}$ наричаме крайна редица от преходи с дължина $k > 0$

$$\pi = q_0 \to^{a_1} q_1 \to^{a_2} \ldots \to^{a_k} q_k$$

където $\langle q_{i-1}, a_i, q_i \rangle \in \Delta$ за $i = 1 \ldots k$. Казваме, че *пътят* започва от състояние q_0 и завършва в състояние q_k. Елементите $q_0, q_1, \ldots, q_k$ наричаме *състояния на пътя*, а думата $w = a_1 a_2 \ldots a_k$ наричаме *етикет на пътя.*
Успешен път в автомата е *път*, който започва от начално състояние и завършва във финално състояние.

Дефиниция 1.4. Нека $\mathcal{A}$ е краен автомат. Множеството от етикети на всички успещни пътища в $\mathcal{A}$ наричаме *език на* $\mathcal{A}$ и обозначаваме като $L(\mathcal{A})$.

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists i \in I, f \in F : \langle i, w, f \rangle \in \Delta^*\}$$

Дефиниция 1.5. Нека $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ са крайни автомати. Казваме, че $\mathcal{A}_1$ е еквивалентен на $\mathcal{A}_2$ ($\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$), ако езиците им съвпадат ($L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$)

2 Детерминистични Крайни Автомати

Дефиниция 2.1. Краен автомат $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \Delta \rangle$ е *детерминистичен*, ако:

- $\mathcal{A}$ има единствено начално състояние $I = \{q_0\}$.
- За всяко $q_1 \in Q$ и символ $a \in \Sigma$, съществува не повече от едно $q_2 \in Q$, такова че $\langle q_1, a, q_2 \rangle \in \Delta$.

Иначе казано, релацията на прехода може да се представи като частична функция $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ и *детерминистичните автомати* можем преставим в следния вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$$

Предимството на *детерминистичните автомати* се изразява в това, че могат да разпознават дали дума w принадлежи на езика на автомата $L(\mathcal{A}_{\mathcal{D}})$ за линейно време спрямо дължината ѝ - $O(|w|)$.

Дефиниция 2.2. Нека $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ е *детерминистичен краен автомат*. *Разширена функция на прехода* $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ дефинираме както следва:

- $\delta^*(q, \epsilon) = q$
- $\delta^*(q, aw) = \delta^*(\delta(q, a), w)$, където $a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$

3 Бимашини

Дефиниция 3.1. *Бимашина* дефинираме като тройка $\mathcal{B} = \langle \mathcal{A}_L, \mathcal{A}_R, \psi \rangle$, където

- $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} = \langle \Sigma, Q_L, s_L, Q_L, \delta_L \rangle$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} = \langle \Sigma, Q_R, s_R, Q_R, \delta_R \rangle$ са *детерминистични крайни автомати* и ги наричаме съответно *ляв и десен автомат* на бимашината. Всички състояния на тези автомати са финални.
- $\psi : (Q_L \times \Sigma \times Q_R) \to \Sigma^*$ е частична функция, която наричаме *функция на изхода*.

Дефиниция 3.2. Нека $\mathcal{B} = \langle \mathcal{A}_L, \mathcal{A}_R, \psi \rangle$ е бимашина. *Разширената функция на изхода* ψ^* дефинираме както следва:

- $\psi^*(l, \epsilon, r) = \epsilon$ за всяко $l \in Q_L, r \in Q_R$
- $\psi^*(l, aw, r) = \psi^*(l, w, \delta_R(r, a)) \cdot \psi(\delta_L^*(l, w), a, r)$, за $l \in Q_L, r \in Q_R, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

4 Токенизиращи Релации