Съдържание

1 Крайни Автомати

Дефиниция 1.1. *Краен автомат* дефинираме като петорка $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \Delta \rangle$, където

- Σ е *крайна азбука от символи*
- Q е *крайно множество от състояния*
- $I \subseteq Q$ е *множество от начални състояния*
- $F \subseteq Q$ е *множество от финални състояния*
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ е *релация на прехода*

Тройки от вида $\langle q_1, m, q_2 \rangle \in \Delta$ наричаме *преходи* и казваме, че започва състояние q_1, има етикет m и завършва в състояние q_2. Алтернативно, тези преходи обозначаваме като $q_1 \to^m q_2$.

Дефиниция 1.2. Нека $\mathcal{A}$ е краен автомат. *Разширена релация на прехода* $\Delta^* \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$ дефинираме индуктивно:

- $\langle q, \epsilon, q \rangle \in \Delta^*$ за всяко $q \in Q$
- $\langle q_1, wa, q_2 \rangle \in \Delta^*$ за всяко $q_1, q_2, q \in Q$, $a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$, ако $\langle q_1, w, q \rangle \in \Delta^*$ и $\langle q, a, q_2 \rangle \in \Delta$

Дефиниция 1.3. Нека $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \Delta \rangle$ е краен автомат. *Път* в $\mathcal{A}$ наричаме крайна редица от преходи с дължина $k > 0$

$$\pi = q_0 \to^{a_1} q_1 \to^{a_2} \ldots \to^{a_k} q_k$$

където $\langle q_{i-1}, a_i, q_i \rangle \in \Delta$ за $i = 1 \dots k$. Казваме, че *пътят* започва от състояние q_0 и завършва в състояние q_k. Елементите $q_0, q_1, \dots, q_k$ наричаме *състояния на пътя*, а думата $w = a_1 a_2 \dots a_k$ наричаме *етикет на пътя*.
Успешен път в автомата е *път*, който започва от начално състояние и завършва във финално състояние.

Дефиниция 1.4. Нека $\mathcal{A}$ е краен автомат. Множеството от етикети на всички успещни пътища в $\mathcal{A}$ наричаме *език на* $\mathcal{A}$ и обозначаваме като $L(\mathcal{A})$.

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists i \in I, f \in F : \langle i, w, f \rangle \in \Delta^*\}$$

Дефиниция 1.5. Нека $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ са крайни автомати. Казваме, че $\mathcal{A}_1$ е еквивалентен на $\mathcal{A}_2$ ($\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$), ако езиците им съвпадат ($L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$)

2 Детерминирани Крайни Автомати

Дефиниция 2.1. Краен автомат $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \Delta \rangle$ е *детерминиран*, ако:

- $\mathcal{A}$ има единствено начално състояние $I = \{q_0\}$.
- За всяко $q_1 \in Q$ и символ $a \in \Sigma$, съществува не повече от едно $q_2 \in Q$, такова че $\langle q_1, a, q_2 \rangle \in \Delta$.

Иначе казано, релацията на прехода може да се представи като частична функция $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ и *детерминираните автомати* можем преставим в следния вид

$$\mathcal{A}_D = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$$

Предимството на *детерминираните автомати* се изразява в това, че могат да разпознават дали дума w принадлежи на езика на автомата $L(\mathcal{A}_D)$ за линейно време спрямо дължината ѝ - $O(|w|)$.

Дефиниция 2.2. Нека $\mathcal{A}_D = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ е *детерминиран краен автомат. Разширена функция на прехода* $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ дефинираме индуктивно:

- $\delta^*(q, \epsilon) = q$
- $\delta^*(q, aw) = \delta^*(\delta(q, a), w)$, където $a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$

Теорема 2.1. За всеки краен автомат $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \Delta \rangle$, съществува еквивалентен на него, детерминиран краен автомат $\mathcal{A}_D$.

Доказателство. □

3 Бимашини

Дефиниция 3.1. *Бимашина* дефинираме като тройка $\mathcal{B} = \langle \mathcal{A}_L, \mathcal{A}_R, \psi \rangle$, където

- $\mathcal{A}_L = \langle \Sigma, Q_L, s_L, Q_L, \delta_L \rangle$ и $\mathcal{A}_R = \langle \Sigma, Q_R, s_R, Q_R, \delta_R \rangle$ са *детерминирани крайни автомати* и ги наричаме съответно *ляв и десен автомат* на бимашината. Всички състояния на тези автомати са финални.
- $\psi : (Q_L \times \Sigma \times Q_R) \rightarrow \Sigma^*$ е частична функция, която наричаме *изходна функция*.

Дефиниция 3.2. Нека $\mathcal{B} = \langle \mathcal{A}_L, \mathcal{A}_R, \psi \rangle$ е класическа бимашина, Σ е азбуката на на автоматите $\mathcal{A}_L$ и $\mathcal{A}_R$ и $w = a_1 a_2 \dots a_k \in \Sigma^*$ $(k \geq 0)$, дума и $a_i \in \Sigma$ $(1 \leq i \leq k)$ са букви. Ако $\delta_L^*(a_1 a_2 \dots a_k)$ и $\delta_R^*(a_k a_{k-1} \dots a_1)$ са дефинирани, то можем да получим двата пътя:

$$\pi_L = l_0 \rightarrow^{a_1} l_1 \rightarrow^{a_2} \dots l_{k-1} \rightarrow^{a_k} l_k$$

$$\pi_R = r_0 \leftarrow^{a_1} r_1 \leftarrow^{a_2} \dots r_{k-1} \leftarrow^{a_k} r_k$$

Където π_L и π_R са пътища в съответно левия и десния автомат и думата w се разпознава от $\mathcal{A}_L$ в посока от ляво на дясно, а от $\mathcal{A}_R$, съответно от дясно на ляво. Ако за всички тройки $\langle l_{i-1}, a_i, r_i \rangle$, изходната функция $\psi(l_{i-1}, a_i, r_i)$ е дефинирана, то двойката пътища $\langle \pi_L, \pi_R \rangle$ наричаме *успешно изпълнение* на $\mathcal{B}$ с етикет $w = a_1 a_2 \dots a_k$ и *изход*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(w) = \psi(l_0, a_1, r_1) \cdot \psi(l_1, a_2, r_2) \cdot \dots \cdot \psi(l_{k-1}, a_k, r_k)$$

$\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ наричаме *изходна функция на бимашината* и казваме, че бимашината *превежда* w в m, ако $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(w) = m$, където m е резултат от конкатенация на всички $\psi(l_{i-1}, a_i, r_i)$ $1 \leq i \leq k$.

Бимашината чете входната дума и за всеки символ извежда дума над азбуката си. На всяка стъпка изведената от изходната функция ψ дума зависи от входния символ и двете състояния в които биха преминали левият и десният автомат, четейки входа съответно от ляво на дястно и от дясно на ляво. Крайният резултат е конкатенацията на всички така изведени думи.

Пример 3.1. Бимашина и изпълнение ...

Дефиниция 3.3. Нека $\mathcal{B} = \langle \mathcal{A}_L, \mathcal{A}_R, \psi \rangle$ е бимашина. *Разширената изходна функция* ψ^* дефинираме индуктивно:

- $\psi^*(l, \epsilon, r) = \epsilon$ за всяко $l \in Q_L, r \in Q_R$
- $\psi^*(l, wa, r) = \psi^*(l, w, \delta_R(r, a)) \cdot \psi(\delta_L^*(l, w), a, r)$, за $l \in Q_L, r \in Q_R, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

Дефиниция 3.4. Бимашина $\mathcal{B} = \langle \mathcal{A}_L, \mathcal{A}_R, \psi \rangle$ наричаме *тотална*, ако функциите на прехода $\delta_L : Q_L \times \Sigma \rightarrow Q_L$ и $\delta_R : Q_R \times \Sigma \rightarrow Q_R$ на левия и десния автомат съответно, както и функцията на изхода $\psi : (Q_L \times \Sigma \times Q_R) \rightarrow \Sigma^*$ са *тотални* .

4 Правила за заместване

4.1 Стратегии за разрешаване на конфликти

4.2 Токенизация чрез правила за заместване