

# 1 Крайни Автомати

**Дефиниция 1.1.** *Краен автомат* дефинираме като петорка  $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \Delta \rangle$ , където

- $\Sigma$  е крайна азбука от символи
- $Q$  е крайно множество от състояния
- $I \subseteq Q$  е множество от начални състояния
- $F \subseteq Q$  е множество от финални състояния
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$  е релация на прехода

Тройки от вида  $\langle q_1, t, q_2 \rangle \in \Delta$  наричаме *преходи* и казваме, че започва състояние  $q_1$ , има етикет  $t$  и завършва в състояние  $q_2$ . Алтернативно, тези преходи обозначаваме като  $q_1 \xrightarrow{t} q_2$ .

**Дефиниция 1.2.** Нека  $\mathcal{A}$  е краен автомат. *Разширена релация на прехода*  $\Delta^* \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$  дефинираме индуктивно:

- $\langle q, \epsilon, q \rangle \in \Delta^*$  за всяко  $q \in Q$
- $\langle q_1, wa, q_2 \rangle \in \Delta^*$  за всяко  $q_1, q_2, q \in Q, a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$ , ако  $\langle q_1, w, q \rangle \in \Delta^*$  и  $\langle q, a, q_2 \rangle \in \Delta$

**Дефиниция 1.3.** Нека  $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \Delta \rangle$  е краен автомат. *Път* в  $\mathcal{A}$  наричаме крайна редица от преходи с дължина  $k > 0$

$$\pi = q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_k} q_k$$

където  $\langle q_{i-1}, a_i, q_i \rangle \in \Delta$  за  $i = 1 \dots k$ . Казваме, че *пътят* започва от състояние  $q_0$  и завършва в състояние  $q_k$ . Елементите  $q_0, q_1, \dots, q_k$  наричаме *състояния на пътя*, а думата  $w = a_1 a_2 \dots a_k$  наричаме *етикет на пътя*.

*Успешен път* в автомата е *път*, който започва от начално състояние и завършва във финално състояние.

**Дефиниция 1.4.** Нека  $\mathcal{A}$  е краен автомат. Множеството от етикети на всички възможни успешни пътища в  $\mathcal{A}$  наричаме *език на  $\mathcal{A}$*  и обозначаваме като  $L(\mathcal{A})$ .

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists i \in I, f \in F : \langle i, w, f \rangle \in \Delta^*\}$$

**Дефиниция 1.5.** Нека  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  са крайни автомати. Казваме, че  $\mathcal{A}_1$  е еквивалентен на  $\mathcal{A}_2$  ( $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$ ), ако езиците им съвпадат ( $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$ )

## 2 Детерминистични Крайни Автомати

**Дефиниция 2.1.** Краен автомат  $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \Delta \rangle$  е *детерминистичен*, ако:

- $\mathcal{A}$  има единствено начално състояние  $I = \{q_0\}$ .
- За всяко  $q_1 \in Q$  и символ  $a \in \Sigma$ , съществува не повече от едно  $q_2 \in Q$ , такова че  $\langle q_1, a, q_2 \rangle \in \Delta$ .

Иначе казано, релацията на прехода може да се представи като частична функция  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  и *детерминистичните автомати* можем преставим в следния вид

$$\mathcal{A}_D = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$$

Предимството на *детерминистичните автомати* се изразява в това, че могат да разпознават дали дума  $w$  принадлежи на езика на автомата  $L(\mathcal{A}_D)$  за линейно време спрямо дължината ѝ -  $O(|w|)$ .

**Дефиниция 2.2.** Нека  $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$  е *детерминистичен краен автомат*. *Разширена функция на прехода*  $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$  дефинираме както следва:

- $\delta^*(q, \epsilon) = q$
- $\delta^*(q, aw) = \delta^*(\delta(q, a), w)$ , където  $a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$

## 3 Бимашини

**Дефиниция 3.1.** *Бимашина* дефинираме като тройка  $\mathcal{B} = \langle \mathcal{A}_L, \mathcal{A}_R, \psi \rangle$ , където

- $\mathcal{A}_L = \langle \Sigma, Q_L, s_L, Q_L, \delta_L \rangle$  и  $\mathcal{A}_R = \langle \Sigma, Q_R, s_R, Q_R, \delta_R \rangle$  са *детерминистични крайни автомати* и ги наричаме съответно *ляв и десен автомат* на бимашината. Всички състояния на тези автомати са финални.
- $\psi : (Q_L \times \Sigma \times Q_R) \rightarrow \Sigma^*$  е частична функция, която наричаме *функция на изхода*.

**Дефиниция 3.2.** Нека  $\mathcal{B} = \langle \mathcal{A}_L, \mathcal{A}_R, \psi \rangle$  е бимашина. *Разширената функция на изхода*  $\psi^*$  дефинираме както следва:

- $\psi^*(l, \epsilon, r) = \epsilon$  за всяко  $l \in Q_L, r \in Q_R$
- $\psi^*(l, aw, r) = \psi^*(l, w, \delta_R(r, a)) \cdot \psi(\delta_L^*(l, w), a, r)$ , за  $l \in Q_L, r \in Q_R, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

## 4 Токенизиращи Релации