Type Theory workbook

Denis Mazzucato

May 2019

Workbook for exercises given in the Type Theory (Maietti and Sambin) course at Padua in 2019

Contents

Assunzioni

Per semplificare la scrittura degli esercizi utilizzo alcune semplificazioni, l'unico esercizio svolto per intero senza omettere alcun tipo di passaggio è la preservazione dell'uguaglianza tra programmi (1)

- Il tipo delle variabili dentro il contesto deve essere specificato solo dove è necessario. Ovvero quando la variabile è inserita per la prima volta dentro al contesto oppure durante l'utilizzo della regola *var)* che richiede di abbinare il giudizio con la variabile dentro al contesto. In qualche raro caso se compare una Γ al posto del contesto è per problemi di spazio e significa che il contesto non è mutato dal passo precedente.

- Se devo derivare un giudizio del tipo $a \in A\ [\Gamma, a \in A, \Delta]$ e il contesto $\Gamma, a \in A, \Delta$ è *semplice* allora concludo che riesco a derivarlo. Solo in casi dove il contesto non è banale continuo con la derivazione.

- Se il contesto è *banale* allora posso indebolirlo senza dover utilizzare le regole di indebolimento.

- Posso concludere con i tre punti verticali quando la stessa parte della dimostrazione è già stata svolta in un altro ramo differente nello stesso albero.

- Quando mi riferisco ad una *Label* la trovo definita sempre sopra il punto in cui mi trovo, per problemi di spazio alcune volte ometto di ripetere la formula e la rimpiazzo con dei puntini.

1 Equality preservation among programs

$$\mathbf{pf} \in Id(B, f(a), f(b))\ [w \in Id(A, a, b)]$$

Date le seguenti assunzioni:

$\pi_1)$ $A\ \mathit{type}\ [\Gamma]$

$\pi_2)$ $a \in A\ [\Gamma]$

$\pi_3)$ $b \in A\ [\Gamma]$

$\pi_4)$ $B\ \mathit{type}\ [\Gamma]$

$\pi_5)$ $f(x) \in B\ [\Gamma, x \in A]$

$$\dfrac{\overset{\pi_5}{f(x) \in B\ [w, x \in A]}}{id(f(x)) \in Id(B, f(x), f(x))\ [w, x \in A]}\ \text{I-Id)}$$

(B)

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{A\ \mathit{type}\ [w,x,y]} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{A\ \mathit{type}\ [w,x]}}{w,x,y \in A\ \mathit{cont}}\ \text{F-c)}}{x \in A\ [w, x \in A, y]}\ \text{var)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{A\ \mathit{type}\ [w,x]}}{w,x,y \in A\ \mathit{cont}}\ \text{F-c)}}{y \in A\ [w, x, y \in A]}\ \text{var)}}{Id(A,x,y)\ \mathit{type}\ [w,x,y]}\ \text{F-Id)}$$

(D)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{(D)}}{Id(A,x,y)\ \mathit{type}\ [w,x,y]}}{w,x,y,z \in Id(A,x,y)\ \mathit{cont}}\ \text{F-c)}}{y \in A\ [w,x,y \in A, z]}\ \text{var)} \qquad \dfrac{\overset{\pi_5}{f(x) \in B\ [w, x \in A]} \qquad \dfrac{\overset{\text{(D)}}{Id(A,x,y)\ \mathit{type}\ [w,x,y]}}{w,x,y,z \in Id(A,x,y)\ \mathit{cont}}\ \text{F-c)}}{f(x) \in B\ [w,x,y,z]}\ \text{ind-te)}}{f(y) \in B\ [w,x,y,z]}\ \text{sub-ter)}$$

(E)

$$\dfrac{\overset{\pi_4}{B\ \mathit{type}\ [w,x,y,z]} \qquad \dfrac{\overset{\pi_5}{f(x) \in B\ [w, x \in A]} \qquad \dfrac{\overset{\text{(D)}}{Id(A,x,y)\ \mathit{type}\ [w,x,y]}}{w,x,y,z \in Id(A,x,y)\ \mathit{cont}}\ \text{F-c)}}{f(x) \in B\ [w,x,y,z]}\ \text{ind-te)} \qquad \overset{\text{(E)}}{f(y) \in B\ [w,x,y,z]}}{Id(B, f(x), f(y))\ \mathit{type}\ [w, x \in A, y \in A, z \in Id(A,x,y)]}\ \text{F-Id)}$$

(A)

$$\dfrac{\overset{\text{(A)}}{\cdots} \qquad \overset{\pi_2}{a \in A\ [w]} \qquad \overset{\pi_3}{b \in A\ [w]} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{A\ \mathit{type}\ [\ ]} \quad \overset{\pi_2}{a \in A\ [\ ]} \quad \overset{\pi_3}{b \in A\ [\ ]}}{Id(A,a,b)\ \mathit{type}\ [\ ]}}{w \in Id(A,a,b)\ \mathit{cont}}\ \text{F-c)}}{w \in Id(A,a,b)\ [w \in Id(A,a,b)]}\ \text{var)} \qquad \overset{\text{(B)}}{\cdots}}{El_{Id}(w, (x).id(f(x))) \in Id(B, f(a), f(b))\ [w \in Id(A,a,b)]}\ \text{E-Id)}$$

2 Simmetry

$$\mathbf{pf} \in Id(A,b,a)\ [w \in Id(A,a,b)]$$

Date le seguenti assunzioni: $\pi_1)$ $A\ type\ [\Gamma]$ $\pi_2)$ $a \in A\ [\Gamma]$ $\pi_3)$ $b \in A\ [\Gamma]$

$$Id(A,y,x)\ type\ [w, x \in A, y \in A, z \in Id(A,x,y)]$$
$$\text{(A)}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\text{(A)} \\ \cdots\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2 \\ a \in A\ [w]\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3 \\ b \in A\ [w]\end{matrix} \quad w \in Id(A,a,b)\ [w] \quad \dfrac{x \in A\ [w,x]}{id(x) \in Id(A,x,x)\ [w, x \in A]}\ \text{I-Id)}}{El_{Id}(w, id) \in Id(A,b,a)\ [w \in Id(A,a,b)]}\ \text{E-Id)}$$

3 Transitivity, Path Induction

$$\mathbf{pf} \in Id_p(A,e,g)\ [w_1 \in Id_p(A,e,f), w_2 \in Id_p(A,f,g)]$$

Date le seguenti assunzioni: $\pi_1)$ $A\ type\ [\Gamma]$ $\pi_2)$ $e \in A\ [\Gamma]$ $\pi_3)$ $f \in A\ [\Gamma]$ $\pi_4)$ $g \in A\ [\Gamma]$

$$Id_p(A,e,y)\ type\ [w_1, w_2, y \in A, z \in Id_p(A,f,y)]$$
$$\text{(A)}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\text{(A)} \\ \cdots\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3 \\ f \in A\ [w_1, w_2]\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_6 \\ g \in A\ [w_1, w_2]\end{matrix} \quad w_2 \in Id_p(A,f,g)\ [w_1, w_2] \quad w_1 \in Id_p(A,e,f)\ [w_1, w_2]}{El_{Id_p}(w_2, w_1) \in Id_p(A,e,g)\ [w_1 \in Id_p(A,e,f), w_2 \in Id_p(A,f,g)]}\ \text{E-Id}_p)$$

4 Transitivity, Martin-Löf's

$$\mathbf{pf} \in Id(A,a,c)\ [w_1 \in Id(A,a,b), w_2 \in Id(A,b,c)]$$

Date le seguenti assunzioni:

π_1) $A\ type\ [\Gamma]$

π_2) $a \in A\ [\Gamma]$

π_3) $b \in A\ [\Gamma]$

π_4) $c \in A\ [\Gamma]$

$$\dfrac{w \in Id(A,a,x)[w_1,w_2,x,w \in Id(A,a,x)]}{\lambda w.w \in Id(A,a,x) \to Id(A,a,x)[w_1,w_2,x \in A]}\ \text{I-}\to)$$

(B)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A\ type\ [\Gamma]\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ a \in A\ [\Gamma]\end{matrix} \quad x \in A\ [w_1,w_2,x \in A,y]}{Id(A,a,x)\ type\ [w_1,w_2,x,y]} \quad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ A\ type\ [\Gamma]\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_2\\ a \in A\ [\Gamma]\end{matrix} \quad y \in A\ [w_1,w_2,x,y \in A]}{Id(A,a,y)\ type\ [w_1,w_2,x,y]}}{Id(A,a,x) \to Id(A,a,y)\ type\ [w_1,w_2,x \in A, y \in A, z \in Id(A,x,y)]}\ \text{F-}to)$$

(A)

$$\dfrac{w_1 \in Id(A,a,b)\ [w_1,w_2] \quad \dfrac{\begin{matrix}(A)\\ \cdots\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_3\\ b \in A\ [w_1,w_2]\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_4\\ c \in A\ [w_1,w_2]\end{matrix} \quad w_2 \in Id(A,b,c)\ [w_1,w_2] \quad \begin{matrix}(B)\\ \cdots\end{matrix}}{El_{Id}(w_2,\lambda w.w) \in Id(A,a,b) \to Id(A,a,c)\ [w_1,w_2]}\ \text{E-Id)}}{Ap(El_{Id}(w_2,\lambda w.w),w_1) \in Id(A,a,c)\ [w_1 \in Id(A,a,b), w_2 \in Id(A,b,c)]}\ \text{E-}\to)$$

5 Propositional Equality among sum operators (Basic) [Nat]

$$\mathbf{pf} \in Id(Nat, x' +_1 0, x' +_2 0)\ [x' \in Nat]$$

Per questo esercizio uguaglianze composizionali e *definizionali* sono svolte *in place*, questi passaggi saranno indicati da linee tratteggiate. Date le seguenti definizioni:

- $x' +_1 y' \equiv El_{Nat}(y', x', (x,z).succ(z))$
- $x' +_2 y' \equiv El_{Nat}(x', y', (x,z).succ(z))$

La dimostrazione è basata sulla proposizione $x +_2 0 = 0$ e la si prova induttivamente. Se vale nel caso base, quindi applicata a 0 ($0 +_2 0 = 0$), e se vale nel passo induttivo, quindi applicata al successore, allora vale per un qualsiasi x. Quando la applichiamo al passo successivo ipotizziamo di avere una prova che vale al passo precedente.
Le sostituzioni composizionali e definizionali sono specificate alla fine, con l'identificativo associato per identificarle facilmente durante la prova. Possiamo eseguire queste sostituzioni formalmente utilizzando le regole di sostituzione e conversione.

$$id(succ(\hat{x})) \in Id(Nat, succ(\hat{x}), succ(\hat{x}))[x', x, z, \hat{x} \in Nat]$$

(D)

$$z \in Id(Nat, x, x +_2 0)\ [x', x, z \in Id(Nat, x, x +_2 0)]$$

(C)

$$Id(Nat, succ(\hat{x}), succ(\hat{y}))\ type\ [x', x, z, \hat{x} \in Nat, \hat{y} \in Nat, \hat{z} \in Id(Nat, \hat{x}, \hat{y})]$$

(B)

$$\dfrac{\dfrac{\overset{(B)}{\cdots} \qquad x \in Nat\ [x', x, z] \qquad x +_2 0 \in Nat\ [x', x, z] \qquad \overset{(C)}{\cdots} \qquad \overset{(D)}{\cdots}}{El_{Id}(z, (\hat{x}).id(succ(\hat{x}))) \in Id(Nat, succ(x), succ(x +_2 0))\ [x', x \in Nat, z \in Id(Nat, x, x +_2 0)]}\ \text{E-Id)}}{El_{Id}(z, (\hat{x}).id(succ(\hat{x}))) \in Id(Nat, succ(x), succ(x) +_2 0)\ [x', x \in Nat, z \in Id(Nat, x, x +_2 0)]}\ (3)$$

(A)

$$\dfrac{\dfrac{x' \in Nat\ [x' \in Nat] \qquad Id(Nat, x', x' +_2 0)\ type\ [x'] \qquad \dfrac{id(0) \in Id(Nat, 0, 0)\ [x']}{id(0) \in Id(Nat, 0, 0 +_2 0)\ [x']}\ (2) \qquad \overset{(A)}{\cdots}}{El_{Nat}(x', id(0), (x,z).El_{Id}(z, (\hat{x}).id(succ(\hat{x})))) \in Id(Nat, x', x' +_2 0)\ [x' \in Nat]}\ \text{Nat-e)}}{El_{Nat}(x', id(0), (x,z).El_{Id}(z, (\hat{x}).id(succ(\hat{x})))) \in Id(Nat, x' +_1 0, x' +_2 0)\ [x' \in Nat]}\ (1)$$

(1) $x' +_1 0 \equiv El_{Nat}(0, x', (x,z).succ(z)) = x'$

(2) $0 +_2 0 \equiv El_{Nat}(0, 0, (x,z).succ(z)) = 0$

(3) $succ(x) +_2 0 \equiv El_{Nat}(succ(x), 0, (x,z).succ(z)) = succ(El_{Nat}(x, 0, (x,z).succ(z))) \equiv succ(x +_2 0)$

6 Axiom of choice [ac]

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B(x))C(x,y) \rightarrow (\exists f \in A \rightarrow B)(\forall x \in A)C(x, Ap(f,x))\ \mathit{true}$$

Per questo esercizio sono state svolte alcune semplificazioni:

- Nessun tipo è stato provato essere derivabile in quanto essendo derviabili

  $$A\ \mathit{type}\ [\Gamma],\ B(x)\ \mathit{type}\ [\Gamma, x \in A]\ \mathit{and}\ C(x,y)\ \mathit{type}\ [\Gamma, x \in A, y \in B(x)]$$

  saranno derivabili pure loro combinazioni tra somme indiciate e prodotti dipendenti

- Per non inquinare eccessivamente lo spazio delle variabili utilizzo queste convenzioni:

  $$x \in A,\ y \in B(x),\ f \in \Pi_{x\in A}B(x)\ \mathit{and}\ z \in \Pi_{x\in A}\Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)$$

- La precedente assunzione può creare confusione nello *scoping* delle variabili, per questo definisco una metrica di priorità per identificare univocamente lo *scope* di una variabile:

  1. *Abstraction* (la più forte)
  2. *Indexed sum type* oppure *Dependent product type*
  3. *Context* (il più debole)

La dimostrazione è basata nell'interpretazione intuzionistica delle costanti logiche con le sostituzioni $\forall = \Pi$ e $\exists = \Sigma$ (*propositions-as-sets* - *Curry-Howard*). Iniziamo supponendo di avere una prova della prima parte $(\forall x)(\exists y)C(x,y)$, significa che abbiamo un metodo che quando applicato ad x tiene una prova di $(\exists y)C(x,y)$. Prendiamo f come metodo che dato una arbitraria x assegna la prima componente. Quindi sia $C(x, f(x))$ che segua con la seconda componente. Abbiamo così (ri)composto l'operatore.

$$\text{E-}\Pi)\ \dfrac{\dfrac{x \in A\ [z,x] \qquad z \in \Pi_{x\in A}\Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)\ [z,x]}{Ap(z,x) \in \Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)\ [z,x]}\ }{\pi_1(Ap(z,x)) \in B(x)\ [z,x]}\ \pi_1)$$

(A)

$$\dfrac{\dfrac{x \in A\ [z,x] \qquad z \in \Pi_{x\in A}\Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)\ [z,x]}{Ap(z,x) \in \Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)\ [z,x]}\ \text{E-}\Pi)}{\pi_2(Ap(z,x)) \in C(x, \pi_1(Ap(z,x)))\ [z,x]}\ \pi_2)$$

(C)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in A\ [z,x] \qquad \overset{(A)}{\pi_1(Ap(z,x)) \in B(x)\ [z,x]}}{Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)),x) = \pi_1(Ap(z,x)) \in B(x)\ [z,x]}\ \beta\text{C-}\Pi)}{C(x, Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)),x)) = C(x, \pi_1(Ap(z,x)))\ \mathit{type}\ [z,x]}\ \text{sub}) \qquad \overset{(C)}{\pi_2(Ap(z,x)) \in C(x, \pi_1(Ap(z,x)))\ [z,x]}}{\pi_2(Ap(z,x)) \in C(x, Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)),x))\ [z, x \in A]}\ \text{conv})}{\lambda x.\pi_2(Ap(z,x)) \in \Pi_{x\in A}C(x, Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)),x))\ [z]}\ \text{I-}\Pi)$$

(B)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(A)}{\pi_1(Ap(z,x)) \in B(x)\ [z, x \in A]}}{\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)) \in \Pi_{x\in A}B(x)\ [z]}\ \text{I-}\Pi) \qquad \overset{(B)}{\lambda x.\pi_2(Ap(z,x)) \in \Pi_{x\in A}C(x, Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)),x))\ [z]}}{\langle \lambda x.\pi_1(Ap(z,x)), \lambda x.\pi_2(Ap(z,x))\rangle \in \Sigma_{f\in\Pi_{x\in A}B(x)}\Pi_{x\in A}C(x, Ap(f,x))\ [z \in \Pi_{x\in A}\Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)]}\ \text{I-}\Sigma)}{\lambda z.\langle \lambda x.\pi_1(Ap(z,x)), \lambda x.\pi_2(Ap(z,x))\rangle \in \Pi_{z\in\Pi_{x\in A}\Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)}\Sigma_{f\in\Pi_{x\in A}B(x)}\Pi_{x\in A}C(x, Ap(f,x))\ [\ ]}\ \text{I-}\Pi)$$

7 Bool terms inequality

$$\mathbf{pf} \in Id(Bool, true, false) \to N_0\ [\ ] \quad \equiv \quad \neg(true = false)$$

Date le seguenti definizioni:

$$\begin{array}{rcl} f & \equiv & El_{Bool}(z, (x).\hat{N}_1, (x).\hat{N}_0) \in U_0\ [z \in Bool] \\ p_f & \equiv & El_{Id}(w, (x).id(f(x))) \in Id(U_0, f(true), f(false))\ [w \in Id(Bool, true, false)] \\ k & \equiv & El_{Id}(w, (x).\langle \lambda y.y, \lambda y.y\rangle) \in T(x) \leftrightarrow T(y)\ [x \in U_0, y \in U_0, w \in Id(U_0, x, y)] \end{array}$$

La dimostrazione è basata sull'utilizzo degli universi, altrimenti non potremmo mai distinguere termini diversi all'interno della nostra teoria dei tipi. La funzione f propaga elementi diversi all'interno di universi distinti per poterne poi effettuare l'uguaglianza. La funzione k invece crea l'*isomorfismo* necessario per distinguere $\hat{N}_1$ da $\hat{N}_0$.

$$\begin{array}{c}
El_{Id}(El_{Id}(w, (x).id(El_{Bool}(x, (x).\hat{N}_1, (x).\hat{N}_0))), (x).\langle \lambda y.y, \lambda y.y\rangle) \in T(\hat{N}_1) \leftrightarrow T(\hat{N}_0)\ [w] \\
\hdashline
El_{Id}(El_{Id}(w, (x).id(f(x))), (x).\langle \lambda y.y, \lambda y.y\rangle) \in T(\hat{N}_1) \leftrightarrow T(\hat{N}_0)\ [w] \\
\hdashline
El_{Id}(p_f(w), (x).\langle \lambda y.y, \lambda y.y\rangle) \in T(\hat{N}_1) \leftrightarrow T(\hat{N}_0)\ [w] \\
\hdashline
k(\hat{N}_1, \hat{N}_0, p_f(w)) \in N_1 \leftrightarrow N_0\ [w]
\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\star \in N_1\ [w] \qquad \dfrac{k(\hat{N}_1, \hat{N}_0, p_f(w)) \in N_1 \leftrightarrow N_0\ [w]}{\pi_1(k(\hat{N}_1, \hat{N}_0, p_f(w))) \in N_1 \to N_0\ [w]}\ \text{E}_1\text{-}\times)}{Ap(\pi_1(k(\hat{N}_1, \hat{N}_0, p_f(w))), \star) \in N_0\ [w \in Id(Bool, true, false)]}\ \text{E-}\to)}{\lambda w.Ap(\pi_1(k(\hat{N}_1, \hat{N}_0, p_f(w))), \star) \in Id(Bool, true, false) \to N_0\ [\ ]}\ \text{I-}\to)$$

$$\dfrac{\dfrac{y \in T(x')\ [\Gamma, y \in T(x')]}{\lambda y.y \in T(x') \to T(x')\ [\Gamma]}\ \text{I-}\to) \qquad \dfrac{y \in T(x')\ [\Gamma, y \in T(x')]}{\lambda y.y \in T(x') \to T(x')\ [\Gamma]}\ \text{I-}\to)}{\langle \lambda y.y, \lambda y.y\rangle \in T(x') \leftrightarrow T(x')\ [x, y, w, x' \in U_0]}\ \text{I-}\times)$$

(B)

$$\dfrac{\dfrac{x' \in U_0\ [x, y, w, x' \in U_0, y', z]}{T(x')\ type\ [x, y, w, x', y', z]}\ \text{E-Un}_0) \qquad \dfrac{y' \in U_0\ [x, y, w, x', y' \in U_0, z]}{T(y')\ type\ [x, y, w, x', y', z]}\ \text{E-Un}_0)}{T(x') \leftrightarrow T(y')\ type\ [x, y, w, x' \in U_0, y' \in U_0, z \in Id(U_0, x', y')]}\ \text{F-}\times)$$

(A)

$$\dfrac{\begin{matrix}(A)\\ \cdots\end{matrix} \quad x \in U_0\ [x, y, w] \quad y \in U_0\ [x, y, w] \quad w \in Id(U_0, x, y)\ [x, y, w] \quad \begin{matrix}(B)\\ \cdots\end{matrix}}{El_{Id}(w, (x).\langle \lambda y.y, \lambda y.y\rangle) \in T(x) \leftrightarrow T(y)\ [x \in U_0, y \in U_0, w \in Id(U_0, x, y)]}\ \text{E-Id})$$

(k)

$$\dfrac{z \in Bool\ [z \in Bool] \qquad \hat{N}_1 \in U_0\ [z, x \in Bool] \qquad \hat{N}_0 \in U_0\ [z, x \in Bool]}{El_{Bool}(z, (x).\hat{N}_1, (x).\hat{N}_0) \in U_0\ [z \in Bool]}$$

(f)

$$\dfrac{\text{(Equality preservation among programs 1)}}{El_{Id}(w, (x).id(f(x))) \in Id(U_0, f(true), f(false))\ [w \in Id(Bool, true, false)]}$$

(p_f)

8 Nat terms inequality

$$\mathbf{pf} \in Id(Nat, 0, 1) \rightarrow N_0 \ [\ ] \quad \equiv \quad \neg(0 = 1)$$

Date le seguenti definizioni:

$$\begin{aligned} f &\equiv El_{Nat}(m, \hat{N_1}, (x, z).\hat{N_0}) \in U_0 \ [m \in Nat] \\ p_f &\equiv El_{Id}(w, (x).id(f(x))) \in Id(U_0, f(0), f(1)) \ [w \in Id(Nat, 0, 1)] \\ k &\equiv El_{Id}(w, (x).\langle \lambda y.y, \lambda y.y \rangle) \in T(x) \leftrightarrow T(y) \ [x \in U_0, y \in U_0, w \in Id(U_0, x, y)] \end{aligned}$$

In maniera simile alla prova 7, la dimostrazione si basa sull'utilizzo degli universi. La funzione f propaga elementi diversi all'interno di universi distinti per poterne poi effettuare l'uguaglianza, al posto di utilizzare l'eliminatore dei *Bool* lo utilizzo sui Nat propagando $\hat{N_1}$ se ho come input 0 altrimenti $\hat{N_0}$. La funzione k invece crea l'*isomorfismo* necessario per distinguere $\hat{N_1}$ da $\hat{N_0}$.

$$\cfrac{\vdots}{\lambda w.Ap(\pi_1(k(\hat{N_1}, \hat{N_0}, p_f(w))), \star) \in Id(Nat, 0, 1) \rightarrow N_0 \ [\ ]} \text{ I-}\rightarrow)$$

$$\cfrac{m \in Nat \ [m \in Nat] \qquad U_0 \ type \ [m] \qquad \hat{N_1} \in U_0 \ [m] \qquad \hat{N_0} \in U_0 \ [m, x \in Nat, z \in U_0]}{El_{Nat}(m, \hat{N_1}, (x, z).\hat{N_0}) \in U_0 \ [m \in Nat]}$$

(f)

9 Peano Axioms

Dimostrare quali assiomi di Peano continuano a valere dentro la nostra teoria dei tipi:

Ax1. $\vdash 0 \in Nat$

Ax2. $\vdash \forall x.x = x$ $(eq.\ is\ reflexive)$

Ax3. $\vdash \forall x.\forall y.x = y \rightarrow y = x$ $(eq.\ is\ symmetric)$

Ax4. $\vdash \forall x.\forall y.\forall z.x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$ $(eq.\ is\ transitive)$

Ax5. $x \in Nat, x = y \vdash y \in Nat$ $(Nat\ are\ closed\ under\ eq.)$

Ax6. $x \in Nat \vdash succ(x) \in Nat$

Ax7. $\vdash \forall x.\forall y.x = y \leftrightarrow succ(x) = succ(y)$ $(succ\ is\ injective)$

Ax8. $\vdash \forall x.\neg(0 = succ(x))$

Ax9. $D\ set, 0 \in D, \forall x.succ(x) \in D \vdash D\ true$ $(axiom\ of\ induction)$

Per essere derivabili significa che siano derivabili i seguenti giudizi:

Ax1. $0 \in Nat$

Ax2. $\mathbf{pf} \in \Pi_{x \in Nat} Id(Nat, x, x)$

Ax3. $\mathbf{pf} \in \Pi_{x \in Nat} \Pi_{y \in Nat} Id(Nat, x, y) \rightarrow Id(Nat, y, x)$

Ax4. $\mathbf{pf} \in \Pi_{x \in Nat} \Pi_{y \in Nat} \Pi_{z \in Nat} Id(Nat, x, y) \rightarrow Id(Nat, y, z) \rightarrow Id(Nat, x, z)$

Ax5. $b \in Nat \ [a \in Nat, w \in Id(Nat, a, b)]$

Ax6. $succ(x) \in Nat \ [x \in Nat]$

Ax7. $\mathbf{pf} \in \Pi_{x \in Nat} \Pi_{y \in Nat} Id(Nat, x, y) \leftrightarrow Id(Nat, succ(x), succ(y))$

Ax8. $\mathbf{pf} \in \Pi_{x \in Nat} Id(Nat, 0, succ(x)) \rightarrow N_0$

Ax9. $\pi_1)\ D\ type\ [\ ],\ \pi_2)\ 0 \in D\ [\ ],\ \pi_3)\ succ(x) \in D\ [x \in Nat]$
$\mathbf{pf} \in D\ [x \in Nat]$

$$\dfrac{[\,]\ cont}{0 \in Nat\ [\,]}\ \text{Nat-I}_1)$$

(**Ax1**)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\,]\ cont}{Nat\ type\ [\,]}\ \text{Nat-F)}}{x \in Nat\ cont}\ \text{F-c)}}{x \in Nat\ [x \in Nat]}\ \text{var)}}{id(x) \in Id(Nat,x,x)\ [x \in Nat]}\ \text{I-Id)}}{\lambda x.id(x) \in \Pi_{x \in Nat} Id(Nat,x,x)\ [\,]}\ \text{I-}\to)$$

(**Ax2**)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{(Simmetry 2)}}{El_{Id}(w,id) \in Id(Nat,y,x)\ [x \in Nat, y \in Nat, w \in Id(Nat,x,y)]}\ \text{E-Id)}}{\lambda w.El_{Id}(w,id) \in Id(Nat,x,y) \to Id(Nat,y,x)\ [x \in Nat, y \in Nat]}\ \text{I-}\to)}{\lambda y.\lambda w.El_{Id}(w,id) \in \Pi_{y \in Nat} Id(Nat,x,y) \to Id(Nat,y,x)\ [x \in Nat]}\ \text{I-}\Pi)}{\lambda x.\lambda y.\lambda w.El_{Id}(w,id) \in \Pi_{x \in Nat}\Pi_{y \in Nat} Id(Nat,x,y) \to Id(Nat,y,x)\ [\,]}\ \text{I-}\Pi)$$

(**Ax3**)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{(Transitivity, Martin-Löf's 4)}}{Ap(El_{Id}(w_2,\lambda w.w),w_1) \in Id(Nat,x,z)\ [x \in Nat, y \in Nat, z \in Nat, w_1 \in Id(Nat,x,y), w_2 \in Id(Nat,y,z)]}\ \text{E-}\to)}{\lambda w_2.Ap(El_{Id}(w_2,\lambda w.w),w_1) \in Id(Nat,y,z) \to Id(Nat,x,z)\ [\Gamma, w_1 \in Id(Nat,x,y)]}\ \text{I-}\Pi)}{\lambda w_1.\lambda w_2.Ap(El_{Id}(w_2,\lambda w.w),w_1) \in Id(Nat,x,y) \to Id(Nat,y,z) \to Id(Nat,x,z)\ [\Gamma, z \in Nat]}\ \text{I-}\Pi)}{\lambda z.\lambda w_1.\lambda w_2.Ap(El_{Id}(w_2,\lambda w.w),w_1) \in \Pi_{z \in Nat} Id(Nat,x,y) \to Id(Nat,y,z) \to Id(Nat,x,z)\ [\Gamma, y \in Nat]}\ \text{I-}\Pi)}{\lambda y.\lambda z.\lambda w_1.\lambda w_2.Ap(El_{Id}(\cdots),w_1) \in \Pi_{y \in Nat}\Pi_{z \in Nat} Id(Nat,x,y) \to Id(Nat,y,z) \to Id(Nat,x,z)\ [x \in Nat]}\ \text{I-}\Pi)}{\lambda x.\lambda y.\lambda z.\lambda w_1.\lambda w_2.Ap(El_{Id}(\cdots),w_1) \in \Pi_{x \in Nat}\Pi_{y \in Nat}\Pi_{z \in Nat} Id(Nat,x,y) \to Id(Nat,y,z) \to Id(Nat,x,z)\ [\,]}\ \text{I-}\Pi)$$

(**Ax4**)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{[\,]\ cont}{\vdots} \\ a \in Nat\ [a \in Nat, w \in Id(Nat,a,b)]\end{array} \qquad \begin{array}{c}(1) \\ a = b \in Nat\ [a \in Nat, w \in Id(Nat,a,b)]\end{array}}{b \in Nat\ [a \in Nat, w \in Id(Nat,a,b)]}$$

(**Ax5**)

(1) sse $nf(a) \equiv nf(b)$ allora con la prova w posso concludere con l'uguaglianza computazionale

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\,]\ cont}{Nat\ type\ [\,]}\ \text{Nat-F)}}{x \in Nat\ cont}\ \text{F-c)}}{x \in Nat\ [x \in Nat]}\ \text{var)}}{succ(x) \in Nat\ [x \in Nat]}\ \text{Nat-I}_2)$$

(**Ax6**)

$$
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c}\underline{[\ ]\ cont}\\ \vdots \\ x' \in Nat\ [\Gamma]\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\underline{[\ ]\ cont}\\ \vdots \\ 0 \in Nat\ [\Gamma]\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\underline{[\ ]\ cont}\\ \vdots \\ x \in Nat\ [\Gamma, x \in Nat, z \in Nat]\end{array}
}{
\begin{array}{c} El_{Nat}(x', 0, (x,z).x) \in Nat\ [\Gamma, x' \in Nat)] \\ \hdashline prec(x') \in Nat\ [\Gamma, x' \in Nat)] \end{array}
}\ \text{Nat-e)}
}{
id(prec(x')) \in Id(Nat, prec(x'), prec(x'))\ [\Gamma, x' \in Nat)]
}\ \text{I-Id)}
$$

(C)

$$
Id(Nat, prec(\hat{x}), prec(\hat{y}))\ type\ [\Gamma, \hat{x} \in Nat, \hat{y} \in Nat, z \in Id(Nat, \hat{x}, \hat{y})]
$$

(B)

$$
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c}(B)\\ \cdots\end{array}
\quad succ(x) \in Nat\ [\Gamma]
\quad succ(y) \in Nat\ [\Gamma]
\quad b \in Id(Nat, succ(x), succ(y))
\quad \begin{array}{c}(C)\\ \cdots\end{array}
}{
\begin{array}{c} El_{Id}(b, (x').id(prec(x'))) \in Id(Nat, prec(succ(x)), prec(succ(y)))\ [\Gamma, b \in Id(Nat, succ(x), succ(y))] \\ \hdashline El_{Id}(b, (x').id(prec(x'))) \in Id(Nat, x, y)\ [\Gamma, b \in Id(Nat, succ(x), succ(y))] \end{array}
}\ \begin{array}{l}\text{E-Id)}\\ (2)\end{array}
}{
\lambda b. El_{Id}(b, (x').id(prec(x'))) \in Id(Nat, succ(x), succ(y)) \to Id(Nat, x, y)\ [\Gamma]
}\ \text{I-}{\to}\text{)}
$$

(A)

$$
\dfrac{
\dfrac{
\text{I-}{\times}\text{)}\ \dfrac{
\text{I-}{\to}\text{)}\ \dfrac{
\text{E-Id)}\ \dfrac{\text{(Equality preservation among programs 1)}}{El_{Id}(a, (z).id(succ(z))) \in Id(Nat, succ(x), succ(y))\ [\Gamma, a \in Id(Nat, x, y)]}
}{
\lambda a. El_{Id}(a, (z).id(succ(z))) \in Id(Nat, x, y) \to Id(Nat, succ(x), succ(y))\ [\Gamma]
}
\quad \begin{array}{c}(A)\\ \cdots\end{array}
}{
\langle \lambda a. \cdots, \lambda b. \cdots \rangle \in Id(Nat, x, y) \leftrightarrow Id(Nat, succ(x), succ(y))\ [x \in Nat, y \in Nat]
}
}{
\lambda y. \langle \lambda a. \cdots, \lambda b. \cdots \rangle \in \Pi_{y \in Nat} Id(Nat, x, y) \leftrightarrow Id(Nat, succ(x), succ(y))\ [x \in Nat]
}\ \text{I-}\Pi\text{)}
}{
\lambda x. \lambda y. \langle \lambda a. \cdots, \lambda b. \cdots \rangle \in \Pi_{x \in Nat} \Pi_{y \in Nat} Id(Nat, x, y) \leftrightarrow Id(Nat, succ(x), succ(y))\ [\ ]
}\ \text{I-}\Pi\text{)}
$$

(**Ax7**)

$$
\begin{array}{llll}
(2) & prec & \equiv & El_{Nat}(x, 0, (x,z).x) \in Nat\ [x \in Nat]\ Dove: \\
 & & & El_{Nat}(succ(x), 0, (x,z).x) = x \in Nat\ [x \in Nat] \\
 & & & El_{Nat}(0, 0, (x,z).x) = 0 \in Nat\ [x \in Nat]
\end{array}
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{\text{(Nat terms inequality 8)}}{\lambda w. Ap(\pi_1(k(\hat{N}_1, \hat{N}_2, p_f(w))), \star) \in Id(Nat, 0, succ(x)) \to N_0\ [x \in Nat]}\ \text{I-}{\to}\text{)}
}{
\lambda x. \lambda w. Ap(\pi_1(k(\hat{N}_1, \hat{N}_2, p_f(w))), \star) \in \Pi_{x \in Nat} Id(Nat, 0, succ(x)) \to N_0\ [\ ]
}\ \text{I-}\Pi\text{)}
$$

(**Ax8**)

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}\pi_1\\ D\ type\ [\Gamma]\end{array}
\quad
\dfrac{\dfrac{[\ ]\ cont}{Nat\ type\ [\ ]}\ \text{Nat-F)}}{x \in Nat\ [x \in Nat]}\ \text{var)}
\quad
\begin{array}{c}\pi_2\\ 0 \in D\ [\Gamma]\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\pi_3\\ succ(x') \in D\ [x \in Nat, x' \in Nat, z \in Nat]\end{array}
}{
El_{Nat}(x, 0, (x', z).succ(x')) \in D\ [x \in Nat]
}\ \text{Nat-e)}
$$

(**Ax9**)

10 Propositional Equality among sum operators [Nat]

$$\mathbf{pf} \in Id(Nat, x' +_1 y', x' +_2 y')\ [x' \in Nat, y' \in Nat]$$

Date le seguenti definizioni:

$$\begin{array}{rcl} s & \equiv & succ \\ x' +_1 y' & \equiv & El_{Nat}(y', x', (x,z).s(z)) \\ x' +_2 y' & \equiv & El_{Nat}(x', y', (x,z).s(z)) \\ Id_N(a,b) & \equiv & Id(Nat, a, b) \\ c & \equiv & id(s(x)) \\ e & \equiv & El_{Id}(z, c) \\ w & \equiv & El_{Nat}(x', id(s(y)), e) \\ e' & \equiv & Ap(\lambda w_1'.Ap(\lambda w_2'.Ap(El_{Id}(w_2', \lambda w'.w'), w_1'), w), e) \end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\text{(Transitivity 4)}}{Ap(El_{Id}(w_2', \lambda w'.w'), w_1') \in Id_N(s(x' +_1 y), x' +_2 s(y))\ [\Gamma, w_2 \in Id_N(s(x' +_2 y), x' +_2 s(y))]}}{\lambda w_2'.Ap(El_{Id}(w_2', \lambda w'.w'), w_1') \in Id_N(s(x' +_2 y), x' +_2 s(y)) \to Id_N(s(x' +_1 y), x' +_2 s(y))\ [\Gamma]}\ \text{I-}\to)$$

(D)

$$\dfrac{\dfrac{\text{(Equality preservation 1)}}{El_{Id}(z,c) \in Id_N(s(s(x +_2 y)), s(x +_2 s(y)))\ [\Gamma]}}{El_{Id}(z,c) \in Id_N(s(s(x) +_2 y), s(x) +_2 s(y))\ [\Gamma, x \in Nat, z' \in Id_N(s(x +_2 y), x +_2 s(y))]}$$

(E)

$$\dfrac{\dfrac{\cdots \quad \dfrac{id(s(y)) \in Id_N(s(y), s(y))\ [\Gamma]}{id(s(y)) \in Id_N(s(0 +_2 y), 0 +_2 s(y))\ [\Gamma]} \quad \begin{matrix}(E)\\ \cdots\end{matrix}}{El_{Nat}(x', id(s(y)), e) \in Id_N(s(x' +_2 y), x' +_2 s(y))\ [\Gamma]}\ \text{Nat-e)}}{w \in Id_N(s(x' +_2 y), x' +_2 s(y))\ [\Gamma]}$$

(C)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}(C)\\ w \in Id_N(s(x' +_2 y), x' +_2 s(y))\ [\Gamma]\end{matrix} \quad \begin{matrix}(D)\\ \cdots\end{matrix}}{Ap(\lambda w_2'.Ap(\cdots), w) \in Id_N(s(x' +_1 y), x' +_2 s(y))\ [\Gamma, w_1 \in Id_N(s(x' +_1 y), s(x' +_2 y))]}\ \text{E-}\to)}{\lambda w_1.Ap(\lambda w_2'.Ap(\cdots), w) \in Id_N(s(x' +_1 y), s(x' +_2 y)) \to Id_N(s(x' +_1 y), x' +_2 s(y))\ [\Gamma]}\ \text{I-}\to)$$

(B)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{(Equality preservation 1)}}{e \in Id_N(s(x' +_1 y), s(x' +_2 y))\ [\Gamma]} \quad \begin{matrix}(B)\\ \cdots\end{matrix}}{Ap(\lambda w_1'.Ap(\cdots), e) \in Id_N(s(x' +_1 y), x' +_2 s(y))\ [\Gamma]}\ \text{E-}\to)}{e' \in Id_N(x' +_1 s(y), x' +_2 s(y))\ [\Gamma, y \in Nat, z \in Id_N(x' +_1 y, x' +_2 y)]}$$

(A)

$$\dfrac{\cdots \quad \text{Nat-e)}\ \dfrac{\dfrac{\text{(Propositional Eq. (Basic) 5)}}{El_{Nat}(x', id(0), e) \in Id_N(x', x' +_2 0)\ [x', y']}}{El_{Nat}(x', id(0), e) \in Id_N(x' +_1 0, x' +_2 0)\ [x', y']} \quad \begin{matrix}(A)\\ \cdots\end{matrix}}{El_{Nat}(y', El_{Nat}(x', id(0), e), e') \in Id_N(x' +_1 y', x' +_2 y')\ [x' \in Nat, y' \in Nat]}\ \text{Nat-e)}$$

11 Product η-conversion

$$\mathbf{pf} \in Id(A \times B, \langle \pi_1(z), \pi_2(z) \rangle, z)\ [z \in A \times B]$$

Dati i seguenti lemmi:

- (Lemma 1), dato π_1) $a = b \in A$ derivo $id(a) \in Id(A, a, b)$ su contesto $[\Gamma, a \in A, b \in B]$

Il primo punto dell'esercizio richiede anche di provare $\langle \pi_1(z), \pi_2(z) \rangle = z \in A \times B\ [z \in A \times B]$, ma questo non si avvera dato che le loro forme normali non sono equivalenti, ovvero $nf(\langle \pi_1(z), \pi_2(z) \rangle) \equiv \langle \pi_1(z), \pi_2(z) \rangle \neq z \equiv nf(z)$. Questo deriva dal teorema:

$$\begin{gathered} a = b \in A\ [\,]\ \text{derivabile} \\ \textit{sse} \\ p \in Id(A, a, b)\ [\,]\ \text{derivabile per qualche p} \\ \textit{sse} \\ nf(a) \equiv nf(b) \end{gathered}$$

La prova riportata di seguito mostra che la seconda ipotesi del teorema è derivabile quindi rende falsa l'equivalenza definizionale.

$$\dfrac{\dfrac{a \in A\ [\Gamma]}{id(a) \in Id(A,a,a)\ [\Gamma]}\ \text{I-Id)} \qquad \dfrac{\dfrac{a \in A\ [\Gamma]}{a = a \in A\ [\Gamma]}\ \text{ref)} \qquad \begin{matrix}\pi_1 \\ a = b \in A\ [\Gamma]\end{matrix}}{Id(A,a,a) = Id(A,a,b)\ type\ [\Gamma]}\ \text{sub)}}{id(a) \in Id(A,a,b)\ [a \in A, b \in A]}\ \text{conv)}$$

(Lemma 1)

$$\dfrac{\dfrac{a \in A\ [\Gamma] \qquad b \in B\ [\Gamma]}{\langle a,b \rangle \in A \times B\ [\Gamma]}\ \text{F-}\times)}{id(\langle a,b \rangle) \in Id(A \times B, \langle a,b \rangle, \langle a,b \rangle)\ [\Gamma, b \in B]}\ \text{I-Id)}$$

(B)

$$\dfrac{\pi_2(\langle a,y \rangle) \in B\ [\Gamma] \qquad y \in B\ [\Gamma] \qquad \dfrac{\dfrac{a \in A\ [\Gamma] \qquad y \in B\ [\Gamma]}{\pi_2(\langle a,y \rangle) = y \in B\ [\Gamma]}\ \beta_2\text{-}\times)}{id(y) \in Id(B, \pi_2(\langle a,y \rangle), y)\ [\Gamma]}\ \text{L1)} \qquad \begin{matrix}(B) \\ \cdots\end{matrix}}{El_{Id}(id(y), (b).id(\langle a,b \rangle)) \in Id(A \times B, \langle a, \pi_2(\langle a,y \rangle) \rangle, \langle a,y \rangle)\ [\Gamma, a \in A]}\ \text{E-Id)}^{(2)}$$

(A)

$$\dfrac{z \in A \times B\ [z \in A \times B] \qquad \dfrac{\pi_1(\langle x,y \rangle) \in A\ [\Gamma] \qquad x \in A\ [\Gamma] \qquad \dfrac{\dfrac{x \in A\ [\Gamma] \qquad y \in B\ [\Gamma]}{\pi_1(\langle x,y \rangle) = x \in B\ [\Gamma]}\ \beta_1\text{-}\times)}{id(x) \in Id(A, \pi_1(\langle x,y \rangle), x)\ [\Gamma]}\ \text{L1)} \qquad \begin{matrix}(A) \\ \cdots\end{matrix}}{El_{Id}(id(x), El_{Id}(\cdots) \in Id(A \times B, \langle \pi_1(\langle x,y \rangle), \pi_2(\langle x,y \rangle) \rangle, \langle x,y \rangle)\ [z, x \in A, y \in B]}\ \text{E-Id)}^{(1)}}{El_{\Sigma}(z, El_{Id}(id(x), (a).El_{Id}(id(y), (b).id(\langle a,b \rangle)))) \in Id(A \times B, \langle \pi_1(z), \pi_2(z) \rangle, z)\ [z \in A \times B]}\ \text{E-}\Pi)$$

$$\begin{array}{rl} (1) & C(a,b,p) \equiv Id(A \times B, \langle a, \pi_2(\langle b,y \rangle) \rangle, \langle b,y \rangle) \\ \textit{equivalentemente} & C(a,b,p) \equiv Id(A \times B, \langle \pi_1(\langle x,y \rangle), \pi_2(\langle x,y \rangle) \rangle, \langle x,y \rangle)\{\pi_1(\langle x,y \rangle) \mapsto a, x \mapsto b\} \\ & \\ (2) & C(a',b',p) \equiv Id(A \times B, \langle a,a' \rangle, \langle a,b' \rangle) \\ \textit{equivalentemente} & C(a',b',p) \equiv Id(A \times B, \langle a, \pi_2(\langle a,y \rangle) \rangle, \langle a,y \rangle)\{\pi_2(\langle a,y \rangle) \mapsto a', y \mapsto b'\} \end{array}$$