Type Theory workbook

Denis Mazzucato

May 2019

Workbook for exercises given in the Type Theory (Maietti and Sambin) course at Padua in 2019

Contents

Assunzioni

Per semplificare la scrittura degli esercizi utilizzo alcune semplificazioni, l'unico esercizio svolto per intero senza omettere alcun tipo di passaggio è la preservazione dell'uguaglianza tra programmi (1)

- Il tipo delle variabili dentro il contesto deve essere specificato solo dove è necessario. Ovvero quando la variabile è inserita per la prima volta dentro al contesto oppure durante l'utilizzo della regola *var)* che richiede di abbinare il giudizio con la variabile dentro al contesto. In qualche raro caso se compare una Γ al posto del contesto è per problemi di spazio e significa che il contesto non è mutato dal passo precedente.
- Se devo derivare un giudizio del tipo $a \in A\ [\Gamma, a \in A, \Delta]$ e il contesto $\Gamma, a \in A, \Delta$ è *semplice* allora concludo che riesco a derivarlo. Solo in casi dove il contesto non è banale continuo con la derivazione.
- Se il contesto è *banale* allora posso indebolirlo senza dover utilizzare le regole di indebolimento.
- Posso concludere con i tre punti verticali quando la stessa parte della dimostrazione è già stata svolta in un altro ramo differente nello stesso albero.
- Quando mi riferisco ad una *Label* la trovo definita sempre sopra il punto in cui mi trovo, per problemi di spazio alcune volte ometto di ripetere la formula e la rimpiazzo con dei puntini.

1 Equality preservation among programs

$$\mathbf{pf} \in Id(B, f(a), f(b))\ [w \in Id(A, a, b)]$$

Date le seguenti assunzioni:

π_1) $A\ type\ [\Gamma]$

π_2) $a \in A\ [\Gamma]$

π_3) $b \in A\ [\Gamma]$

π_4) $B\ type\ [\Gamma]$

π_5) $f(x) \in B\ [\Gamma, x \in A]$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_5\\ f(x) \in B\ [w, x \in A]\end{array}}{id(f(x)) \in Id(B, f(x), f(x))\ [w, x \in A]}\ \text{I-Id)}$$

(B)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\ type\ [w,x,y]\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\ type\ [w,x]\end{array}}{w,x,y \in A\ cont}\ \text{F-c)}}{x \in A\ [w, x \in A, y]}\ \text{var)} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\ type\ [w,x]\end{array}}{w,x,y \in A\ cont}\ \text{F-c)}}{y \in A\ [w, x, y \in A]}\ \text{var)}}{Id(A,x,y)\ type\ [w,x,y]}\ \text{F-Id)}$$

(D)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{(D)}\\ Id(A,x,y)\ type\ [w,x,y]\end{array}}{w,x,y,z \in Id(A,x,y)\ cont}\ \text{F-c)}}{y \in A\ [w, x, y \in A, z]}\ \text{var)} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_5\\ f(x) \in B\ [w, x \in A]\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\text{(D)}\\ Id(A,x,y)\ type\ [w,x,y]\end{array}}{w,x,y,z \in Id(A,x,y)\ cont}\ \text{F-c)}}{f(x) \in B\ [w,x,y,z]}\ \text{ind-ty)}}{f(y) \in B\ [w,x,y,z]}\ \text{sub-ter)}$$

(E)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_4\\ B\ type\ [w,x,y,z]\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_5\\ f(x) \in B\ [w, x \in A]\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\text{(D)}\\ Id(A,x,y)\ type\ [w,x,y]\end{array}}{w,x,y,z \in Id(A,x,y)\ cont}\ \text{F-c)}}{f(x) \in B\ [w,x,y,z]}\ \text{ind-ty)} \quad \begin{array}{c}\text{(E)}\\ f(y) \in B\ [w,x,y,z]\end{array}}{Id(B, f(x), f(y))\ type\ [w, x \in A, y \in A, z \in Id(A,x,y)]}\ \text{F-Id)}$$

(A)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{(A)}\\ \cdots\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ a \in A\ [w]\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_3\\ b \in A\ [w]\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\ type\ [\ ]\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ a \in A\ [\ ]\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_3\\ b \in A\ [\ ]\end{array}}{Id(A,a,b)\ type\ [\ ]}}{w \in Id(A,a,b)\ cont}\ \text{F-c)}}{w \in Id(A,a,b)\ [w \in Id(A,a,b)]}\ \text{var)} \quad \begin{array}{c}\text{(B)}\\ \cdots\end{array}}{El_{Id}(w, (x).id(f(x))) \in Id(B, f(a), f(b))\ [w \in Id(A,a,b)]}\ \text{E-Id)}$$

2 Simmetry

$$\mathbf{pf} \in Id(A, b, a)\ [w \in Id(A, a, b)]$$

Date le seguenti assunzioni: $\pi_1)$ $A\ type\ [\Gamma]$ $\pi_2)$ $a \in A\ [\Gamma]$ $\pi_3)$ $b \in A\ [\Gamma]$

$$\begin{array}{c} Id(A, y, x)\ type\ [w, x \in A, y \in A, z \in Id(A, a, b)] \\ \text{(A)} \end{array}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{(A)}\\ \cdots\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ a \in A\ [w]\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_3\\ b \in A\ [w]\end{array} \quad w \in Id(A, a, b)\ [w] \quad \dfrac{x \in A\ [w, x]}{id(x) \in Id(A, x, x)\ [w, x \in A]}\text{ I-Id)}}{El_{Id}(w, id) \in Id(A, b, a)\ [w \in Id(A, a, b)]}\text{ E-Id)}$$

3 Transitivity, Path Induction

$$\mathbf{pf} \in Id_p(A, e, g)\ [w_1 \in Id_p(A, e, f), w_2 \in Id_p(A, f, g)]$$

Date le seguenti assunzioni: $\pi_1)$ $A\ type\ [\Gamma]$ $\pi_2)$ $e \in A\ [\Gamma]$ $\pi_3)$ $f \in A\ [\Gamma]$ $\pi_4)$ $g \in A\ [\Gamma]$

$$\begin{array}{c} Id_p(A, e, y)\ type\ [w_1, w_2, y \in A, z \in Id_p(A, f, y)] \\ \text{(A)} \end{array}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{(A)}\\ \cdots\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_3\\ f \in A\ [w_1, w_2]\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_6\\ g \in A\ [w_1, w_2]\end{array} \quad w_2 \in Id_p(A, f, g)\ [w_1, w_2] \quad w_1 \in Id_p(A, e, f)\ [w_1, w_2]}{El_{Id_p}(w_2, w_1) \in Id_p(A, e, g)\ [w_1 \in Id_p(A, e, f), w_2 \in Id_p(A, f, g)]}\text{ E-Id}_p)$$

4 Transitivity, Martin-Löf's

$$\mathbf{pf} \in Id(A, a, c)\ [w_1 \in Id(A, a, b), w_2 \in Id(A, b, c)]$$

Date le seguenti assunzioni:

π_1) $A\ type\ [\Gamma]$

π_2) $a \in A\ [\Gamma]$

π_3) $b \in A\ [\Gamma]$

π_4) $c \in A\ [\Gamma]$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{A\ type\ [\Gamma]} \quad \overset{\pi_2}{a \in A\ [\Gamma]} \quad x \in A\ [w_1, w_2, x \in A, y]}{Id(A, a, x)\ type\ [w_1, w_2, x, y]} \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{A\ type\ [\Gamma]} \quad \overset{\pi_2}{a \in A\ [\Gamma]} \quad y \in A\ [w_1, w_2, x, y \in A]}{Id(A, a, y)\ type\ [w_1, w_2, x, y]}}{Id(A, a, x) \to Id(A, a, y)\ type\ [w_1, w_2, x \in A, y \in A, z \in Id(A, x, y)]}\ \text{F-}to)$$

(A)

$$\dfrac{w \in Id(A, a, x)[w_1, w_2, x, w \in Id(A, a, x)]}{\lambda w.w \in Id(A, a, x) \to Id(A, a, x)[w_1, w_2, x \in A]}\ \text{I-}\to)$$

(B)

$$\dfrac{w_1 \in Id(A, a, b)\ [w_1, w_2] \qquad \dfrac{\overset{(A)}{\cdots} \quad \overset{\pi_3}{b \in A\ [w_1, w_2]} \quad \overset{\pi_4}{c \in A\ [w_1, w_2]} \quad w_2 \in Id(A, b, c)\ [w_1, w_2] \quad \overset{(B)}{\cdots}}{El_{Id}(w_2, \lambda w.w) \in Id(A, a, b) \to Id(A, a, c)\ [w_1, w_2]}\ \text{E-Id})}{Ap(El_{Id}(w_2, \lambda w.w), w_1) \in Id(A, a, c)\ [w_1 \in Id(A, a, b), w_2 \in Id(A, b, c)]}\ \text{E-}\to)$$

5 Propositional Equality among sum operators (Basic)

$$\mathbf{pf} \in Id(Nat, x' +_1 0, x' +_2 0)\ [x' \in Nat]$$

Date le seguenti definizioni:

- $x' +_1 y' \equiv El_{Nat}(y', x', (x,y).succ(y))$
- $x' +_2 y' \equiv El_{Nat}(x', y', (x,y).succ(y))$

$$El_{Id}(\cdots,\cdots) \in Id(Nat, succ(x) +_1 0, succ(x) +_2 0)\ [x', x \in Nat, z \in Id(Nat, x +_1 0, x +_2 0)]$$

(C)

$$\dfrac{\dfrac{0 \in Nat\ [x'] \qquad Nat\ type\ [x'] \qquad 0 \in Nat\ [x'] \qquad \dfrac{z \in Nat\ [x', x, z \in Nat]}{succ(z) \in Nat\ [x', x \in Nat, z \in Nat]}\ \text{Nat-I}_2)}{El_{Nat}(0,0,(x,z).succ(z)) \in Nat\ [x']}\ \text{Nat-e})}{El_{Nat}(0,0,(x,z).succ(z)) = El_{Nat}(0,0,(x,z).succ(z)) \in Nat\ [x']}\ \text{ref}$$

(F)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ 0 +_1 0 \in Nat\ [x']\end{array}}{id(0 +_1 0) \in Id(Nat, 0 +_1 0, 0 +_1 0)\ [x']}\ \text{I-id}) \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ 0 +_1 0 \in Nat\ [x']\end{array}}{0 +_1 0 = 0 +_1 0 \in Nat\ [x']}\ \text{ref}) \qquad \begin{array}{c}(F)\\ 0 +_2 0 = 0 +_1 0 \in Nat\ [x']\end{array}}{Id(Nat, 0 +_1 0, 0 +_2 0) = Id(Nat, 0 +_1 0, 0 +_1 0)[x']}\ \text{sub-b})}{id(0 +_1 0) \in Id(Nat, 0 +_1 0, 0 +_2 0)\ [x']}\ \text{conv})$$

(B)

$$\dfrac{Nat\ type\ [x'] \qquad \begin{array}{c}(D)\\ El_{Nat}(0, x', (x,z).succ(z)) \in Nat\ [x']\end{array} \qquad \begin{array}{c}(E)\\ El_{Nat}(x', 0, (x,z).succ(z)) \in Nat\ [x']\end{array}}{Id(Nat, x' +_1 0, x' +_2 0)\ type\ [x']}\ \text{F-Id})$$

(A)

$$\dfrac{x' \in Nat\ [x' \in Nat] \qquad \begin{array}{c}(A)\\ Id(Nat, x' +_1 0, x' +_2 0)\ type\ [x']\end{array} \qquad \begin{array}{c}(B)\\ id(0 +_1 0) \in Id(Nat, 0 +_1 0, 0 +_2 0)\ [x']\end{array} \qquad \begin{array}{c}(C)\\ \cdots\end{array}}{El_{Nat}(x', id(0 +_1 0), (x,z).El_{Id}(\cdots,\cdots)) \in Id(Nat, x' +_1 0, x' +_2 0)\ [x' \in Nat]}\ \text{Nat-e})$$

6 Axiom of choice

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B(x))C(x,y) \to (\exists f \in A \to B)(\forall x \in A)C(x, Ap(f,x))\ true$$

Per questo esercizio sono state svolte alcune semplificazioni:

- Nessun tipo è stato provato essere derivabile in quanto essendo derviabili

$$A\ type\ [\Gamma],\ \ B(x)\ type\ [\Gamma, x \in A]\ and\ C(x,y)\ type\ [\Gamma, x \in A, y \in B(x)]$$

  saranno derivabili pure loro combinazioni tra somme indiciate e prodotti dipendenti

- Per non inquinare eccessivamente lo spazio delle variabili utilizzo queste convenzioni:

$$x \in A,\ \ y \in B(x),\ \ f \in \Pi_{x \in A}B(x)\ and\ z \in \Pi_{x\in A}\Sigma_{y \in B(x)}C(x,y)$$

- La precedente assunzione può creare confusione nello *scoping* delle variabili, per questo definisco una metrica di priorità per identificare univocamente lo *scope* di una variabile:

  1. *Abstraction* (la più forte)
  2. *Indexed sum type* oppure *Dependent product type*
  3. *Context* (il più debole)

La dimostrazione è basata nell'interpretazione intuzionistica delle costanti logiche con le sostituzioni $\forall = \Pi$ e $\exists = \Sigma$ (*propositions-as-sets* - *Curry-Howard*). Iniziamo supponendo di avere una prova della prima parte $(\forall x)(\exists y)C(x,y)$, significa che abbiamo un metodo che quando applicato ad x tiene una prova di $(\exists y)C(x,y)$. Prendiamo f come metodo che dato una arbitraria x assegna la prima componente. Quindi sia $C(x, f(x))$ che segua con la seconda componente. Abbiamo così (ri)composto l'operatore.

$$\text{E-}\Pi)\ \dfrac{\dfrac{x \in A\ [z,x] \qquad z \in \Pi_{x\in A}\Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)\ [z,x]}{Ap(z,x) \in \Sigma_{y \in B(x)}C(x,y)\ [z,x]}}{\pi_1(Ap(z,x)) \in B(x)\ [z,x]}\ \pi_1) \qquad \dfrac{\dfrac{x \in A\ [z,x] \qquad z \in \Pi_{x\in A}\Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)\ [z,x]}{Ap(z,x) \in \Sigma_{y \in B(x)}C(x,y)\ [z,x]}\ \text{E-}\Pi)}{\pi_2(Ap(z,x)) \in C(x, \pi_1(Ap(z,x)))\ [z,x]}\ \pi_2)$$

(A) (C)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in A\ [z,x] \qquad \overset{(A)}{\pi_1(Ap(z,x)) \in B(x)\ [z,x]}}{Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)), x) = \pi_1(Ap(z,x)) \in B(x)\ [z,x]}\ \beta\text{C-}\Pi)}{C(x, Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)), x)) = C(x, \pi_1(Ap(z,x)))\ type\ [z,x]}\ \text{sub}) \qquad \overset{(C)}{\pi_2(Ap(z,x)) \in C(x, \pi_1(Ap(z,x)))\ [z,x]}}{\dfrac{\pi_2(Ap(z,x)) \in C(x, Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)), x))\ [z, x \in A]}{\lambda x.\pi_2(Ap(z,x)) \in \Pi_{x\in A}C(x, Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)), x))\ [z]}\ \text{I-}\Pi)}\ \text{conv})$$

(B)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(A)}{\pi_1(Ap(z,x)) \in B(x)\ [z, x \in A]}}{\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)) \in \Pi_{x\in A}B(x)\ [z]}\ \text{I-}\Pi) \qquad \overset{(B)}{\lambda x.\pi_2(Ap(z,x)) \in \Pi_{x \in A}C(x, Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)), x))\ [z]}}{\langle \lambda x.\pi_1(Ap(z,x)), \lambda x.\pi_2(Ap(z,x))\rangle \in \Sigma_{f \in \Pi_{x\in A}B(x)}\Pi_{x \in A}C(x, Ap(f,x))\ [z \in \Pi_{x\in A}\Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)]}\ \text{I-}\Sigma)}{\lambda z.\langle \lambda x.\pi_1(Ap(z,x)), \lambda x.\pi_2(Ap(z,x))\rangle \in \Pi_{z \in \Pi_{x\in A}\Sigma_{y \in B(x)}C(x,y)}\Sigma_{f\in\Pi_{x\in A}B(x)}\Pi_{x\in A}C(x, Ap(f,x))\ [\ ]}\ \text{I-}\Pi)$$