Type Theory workbook

Denis Mazzucato

May 2019

Workbook for exercises given in the Type Theory (Maietti and Sambin) course at Padua in 2019

Contents

1 Equality preservation among programs 3

2 Simmetry 4

3 Transitivity, Path Induction 4

4 Transitivity, Martin-Löf's 5

5 Axiom of choice 6

Assunzioni

Per semplificare la scrittura degli esercizi utilizzo alcune semplificazioni, l'unico esercizio svolto per intero senza omettere alcun tipo di passaggio è la preservazione dell'uguaglianza tra programmi (1)

- Il tipo delle variabili dentro il contesto deve essere specificato solo dove è necessario. Ovvero quando la variabile è inserita per la prima volta dentro al contesto oppure durante l'utilizzo della regola *var)* che richiede di abbinare il giudizio con la variabile dentro al contesto. In qualche raro caso se compare una Γ al posto del contesto è per problemi di spazio e significa che il contesto non è mutato dal passo precedente.
- Se devo derivare un giudizio del tipo $a \in A\ [\Gamma, a \in A, \Delta]$ e il contesto $\Gamma, a \in A, \Delta$ è *semplice* allora concludo che riesco a derivarlo. Solo in casi dove il contesto non è banale continuo con la derivazione.
- Se il contesto è *banale* allora posso indebolirlo senza dover utilizzare le regole di indebolimento.
- Posso concludere con i tre punti verticali quando la stessa parte della dimostrazione è già stata svolta in un altro ramo differente nello stesso albero.
- Quando mi riferisco ad una *Label* la trovo definita sempre sopra il punto in cui mi trovo, per problemi di spazio alcune volte ometto di ripetere la formula e la rimpiazzo con dei puntini.

1 Equality preservation among programs

$$\mathbf{pf} \in Id(B, f(a), f(b))\ [w \in Id(A, a, b)]$$

Date le seguenti assunzioni:

$\pi_1)$ $A\ \mathit{type}\ [\Gamma]$

$\pi_2)$ $a \in A\ [\Gamma]$

$\pi_3)$ $b \in A\ [\Gamma]$

$\pi_4)$ $B\ \mathit{type}\ [\Gamma]$

$\pi_5)$ $f(x) \in B\ [\Gamma, x \in A]$

$$\dfrac{\overset{\pi_5}{f(x) \in B\ [w, x \in A]}}{id(f(x)) \in Id(B, f(x), f(x))\ [w, x \in A]}\ \text{I-Id)}$$

(B)

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{A\ \mathit{type}\ [w,x,y]} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{A\ \mathit{type}\ [w,x]}}{w,x,y \in A\ \mathit{cont}}\ \text{F-c)}}{x \in A\ [w, x \in A, y]}\ \text{var)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{A\ \mathit{type}\ [w,x]}}{w,x,y \in A\ \mathit{cont}}\ \text{F-c)}}{y \in A\ [w, x, y \in A]}\ \text{var)}}{Id(A,x,y)\ \mathit{type}\ [w,x,y]}\ \text{F-Id)}$$

(D)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(D)}{Id(A,x,y)\ \mathit{type}\ [w,x,y]}}{w,x,y,z \in Id(A,x,y)\ \mathit{cont}}\ \text{F-c)}}{y \in A\ [w,x,y \in A, z]}\ \text{var)} \qquad \dfrac{\overset{\pi_5}{f(x) \in B\ [w, x \in A]} \qquad \dfrac{\overset{(D)}{Id(A,x,y)\ \mathit{type}\ [w,x,y]}}{w,x,y,z \in Id(A,x,y)\ \mathit{cont}}\ \text{F-c)}}{f(x) \in B\ [w,x,y,z]}\ \text{ind-ty)}}{f(y) \in B\ [w,x,y,z]}\ \text{sub-ter)}$$

(E)

$$\dfrac{\overset{\pi_4}{B\ \mathit{type}\ [w,x,y,z]} \qquad \dfrac{\overset{\pi_5}{f(x) \in B\ [w, x \in A]} \qquad \dfrac{\overset{(D)}{Id(A,x,y)\ \mathit{type}\ [w,x,y]}}{w,x,y,z \in Id(A,x,y)\ \mathit{cont}}\ \text{F-c)}}{f(x) \in B\ [w,x,y,z]}\ \text{ind-ty)} \qquad \overset{(E)}{f(y) \in B\ [w,x,y,z]}}{Id(B, f(x), f(y))\ \mathit{type}\ [w, x \in A, y \in A, z \in Id(A,x,y)]}\ \text{F-Id)}$$

(A)

$$\dfrac{\overset{(A)}{\cdots} \qquad \overset{\pi_2}{a \in A\ [w]} \qquad \overset{\pi_3}{b \in A\ [w]} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{A\ \mathit{type}\ [\ ]} \quad \overset{\pi_2}{a \in A\ [\ ]} \quad \overset{\pi_3}{b \in A\ [\ ]}}{Id(A,a,b)\ \mathit{type}\ [\ ]}}{w \in Id(A,a,b)\ \mathit{cont}}\ \text{F-c)}}{w \in Id(A,a,b)\ [w \in Id(A,a,b)]}\ \text{var)} \qquad \overset{(B)}{\cdots}}{El_{Id}(w, (x).id(f(x))) \in Id(B, f(a), f(b))\ [w \in Id(A,a,b)]}\ \text{E-Id)}$$

2 Simmetry

$$\mathbf{pf} \in Id(A,b,a)\ [w \in Id(A,a,b)]$$

Date le seguenti assunzioni: $\pi_1)$ A *type* $[\Gamma]$ $\pi_2)$ $a \in A\ [\Gamma]$ $\pi_3)$ $b \in A\ [\Gamma]$

$$\frac{}{Id(A,y,x)\ type\ [w, x \in A, y \in A, z \in Id(A,a,b)]}$$

(A)

$$\dfrac{\begin{array}{c}(A)\\ \cdots\end{array} \quad \dfrac{\pi_2}{a \in A\ [w]} \quad \dfrac{\pi_3}{b \in A\ [w]} \quad w \in Id(A,a,b)\ [w] \quad \dfrac{x \in A\ [w,x]}{id(x) \in Id(A,x,x)\ [w, x \in A]}\ \text{I-Id)}}{El_{Id}(w, id) \in Id(A,b,a)\ [w \in Id(A,a,b)]}\ \text{E-Id)}$$

3 Transitivity, Path Induction

$$\mathbf{pf} \in Id_p(A,e,g)\ [w_1 \in Id_p(A,e,f), w_2 \in Id_p(A,f,g)]$$

Date le seguenti assunzioni: $\pi_1)$ A *type* $[\Gamma]$ $\pi_2)$ $e \in A\ [\Gamma]$ $\pi_3)$ $f \in A\ [\Gamma]$ $\pi_4)$ $g \in A\ [\Gamma]$

$$\frac{}{Id_p(A,e,y)\ type\ [w_1, w_2, y \in A, z \in Id_p(A,f,y)]}$$

(A)

$$\dfrac{\begin{array}{c}(A)\\ \cdots\end{array} \quad \dfrac{\pi_3}{f \in A\ [w_1,w_2]} \quad \dfrac{\pi_6}{g \in A\ [w_1,w_2]} \quad w_2 \in Id_p(A,f,g)\ [w_1,w_2] \quad w_1 \in Id_p(A,e,f)\ [w_1,w_2]}{El_{Id_p}(w_2,w_1) \in Id_p(A,e,g)\ [w_1 \in Id_p(A,e,f), w_2 \in Id_p(A,f,g)]}\ \text{E-Id}_p)$$

4 Transitivity, Martin-Löf's

$$\mathbf{pf} \in Id(A, a, c)\ [w_1 \in Id(A, a, b), w_2 \in Id(A, b, c)]$$

Date le seguenti assunzioni:

π_1) $A\ type\ [\Gamma]$

π_2) $a \in A\ [\Gamma]$

π_3) $b \in A\ [\Gamma]$

π_4) $c \in A\ [\Gamma]$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{A\ type\ [\Gamma]} \quad \overset{\pi_2}{a \in A\ [\Gamma]} \quad x \in A\ [w_1, w_2, x \in A, y]}{Id(A, a, x)\ type\ [w_1, w_2, x, y]} \quad \dfrac{\overset{\pi_1}{A\ type\ [\Gamma]} \quad \overset{\pi_2}{a \in A\ [\Gamma]} \quad y \in A\ [w_1, w_2, x, y \in A]}{Id(A, a, y)\ type\ [w_1, w_2, x, y]}}{Id(A, a, x) \to Id(A, a, y)\ type\ [w_1, w_2, x \in A, y \in A, z \in Id(A, x, y)]}\ \text{F-}to)$$

(A)

$$\dfrac{w \in Id(A, a, x)[w_1, w_2, x, w \in Id(A, a, x)]}{\lambda w.w \in Id(A, a, x) \to Id(A, a, x)[w_1, w_2, x \in A]}\ \text{I-}\!\to)$$

(B)

$$\dfrac{w_1 \in Id(A, a, b)\ [w_1, w_2] \quad \dfrac{\overset{(A)}{\cdots} \quad \overset{\pi_3}{b \in A\ [w_1, w_2]} \quad \overset{\pi_4}{c \in A\ [w_1, w_2]} \quad w_2 \in Id(A, b, c)\ [w_1, w_2] \quad \overset{(B)}{\cdots}}{El_{Id}(w_2, \lambda w.w) \in Id(A, a, b) \to Id(A, a, c)\ [w_1, w_2]}\ \text{E-Id})}{Ap(El_{Id}(w_2, \lambda w.w), w_1) \in Id(A, a, c)\ [w_1 \in Id(A, a, b), w_2 \in Id(A, b, c)]}\ \text{E-}\!\to)$$

5 Axiom of choice

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B(x))C(x,y) \rightarrow (\exists f \in A \rightarrow B)(\forall x \in A)C(x, Ap(f,x))\ true$$

Per questo esercizio sono state svolte alcune semplificazioni:

- Nessun tipo è stato provato essere derivabile in quanto essendo derviabili

  $$A\ type\ [\Gamma],\ B(x)\ type\ [\Gamma, x \in A]\ and\ C(x,y)\ type\ [\Gamma, x \in A, y \in B(x)]$$

  saranno derivabili pure loro combinazioni tra somme indiciate e prodotti dipendenti

- Per non inquinare eccessivamente lo spazio delle variabili utilizzo queste convenzioni:

  $$x \in A,\ y \in B(x),\ f \in \Pi_{x\in A}B(x)\ and\ z \in \Pi_{x\in A}\Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)$$

- La precedente assunzione può creare confusione nello *scoping* delle variabili, per questo definisco una metrica di priorità per identificare univocamente lo *scope* di una variabile:

  1. *Abstraction* (la più forte)
  2. *Indexed sum type* oppure *Dependent product type*
  3. *Context* (il più debole)

La dimostrazione è basata nell'interpretazione intuzionistica delle costanti logiche con le sostituzioni $\forall = \Pi$ e $\exists = \Sigma$ (*propositions-as-sets* - *Curry-Howard*). Iniziamo supponendo di avere una prova della prima parte $(\forall x)(\exists y)C(x,y)$, significa che abbiamo un metodo che quando applicato ad x tiene una prova di $(\exists y)C(x,y)$. Prendiamo f come metodo che dato una arbitraria x assegna la prima componente. Quindi sia $C(x, f(x))$ che segua con la seconda componente. Abbiamo così (ri)composto l'operatore.

$$\text{E-}\Pi)\ \dfrac{\dfrac{x \in A\ [z,x] \qquad z \in \Pi_{x\in A}\Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)\ [z,x]}{Ap(z,x) \in \Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)\ [z,x]}}{\pi_1(Ap(z,x)) \in B(x)\ [z,x]}\ \pi_1)$$

(A)

$$\dfrac{\dfrac{x \in A\ [z,x] \qquad z \in \Pi_{x\in A}\Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)\ [z,x]}{Ap(z,x) \in \Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)\ [z,x]}\ \text{E-}\Pi)}{\pi_2(Ap(z,x)) \in C(x, \pi_1(Ap(z,x)))\ [z,x]}\ \pi_2)$$

(C)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in A\ [z,x] \qquad \overset{(A)}{\pi_1(Ap(z,x)) \in B(x)\ [z,x]}}{Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)),x) = \pi_1(Ap(z,x)) \in B(x)\ [z,x]}\ \beta C\text{-}\Pi)}{C(x, Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)),x)) = C(x, \pi_1(Ap(z,x)))\ type\ [z,x]}\ \text{sub}) \qquad \overset{(C)}{\pi_2(Ap(z,x)) \in C(x, \pi_1(Ap(z,x)))\ [z,x]}}{\pi_2(Ap(z,x)) \in C(x, Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)),x))\ [z, x \in A]}\ \text{conv})}{\lambda x.\pi_2(Ap(z,x)) \in \Pi_{x\in A}C(x, Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)),x))\ [z]}\ \text{I-}\Pi)$$

(B)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(A)}{\pi_1(Ap(z,x)) \in B(x)\ [z, x \in A]}}{\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)) \in \Pi_{x\in A}B(x)\ [z]}\ \text{I-}\Pi) \qquad \overset{(B)}{\lambda x.\pi_2(Ap(z,x)) \in \Pi_{x\in A}C(x, Ap(\lambda x.\pi_1(Ap(z,x)),x))\ [z]}}{\langle \lambda x.\pi_1(Ap(z,x)), \lambda x.\pi_2(Ap(z,x)) \rangle \in \Sigma_{f\in\Pi_{x\in A}B(x)}\Pi_{x\in A}C(x, Ap(f,x))\ [z \in \Pi_{x\in A}\Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)]}\ \text{I-}\Sigma)}{\lambda z.\langle \lambda x.\pi_1(Ap(z,x)), \lambda x.\pi_2(Ap(z,x)) \rangle \in \Pi_{z\in\Pi_{x\in A}\Sigma_{y\in B(x)}C(x,y)}\Sigma_{f\in\Pi_{x\in A}B(x)}\Pi_{x\in A}C(x, Ap(f,x))\ [\ ]}\ \text{I-}\Pi)$$