ERA Praktikum - Entropie (A406) - Gruppe 233

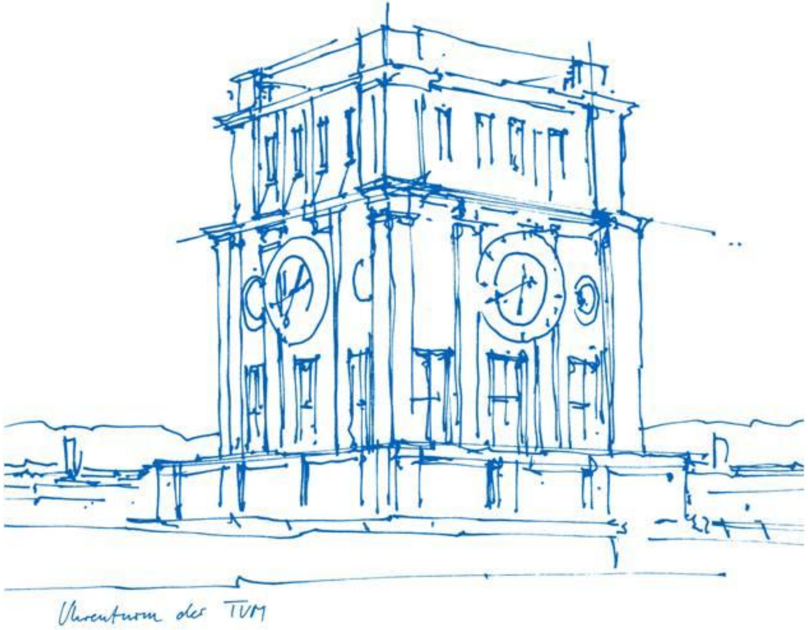
Fikret Ardal | Denis Paluca | Mert Corumlu

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

Lehrstuhl für Rechnerarchitektur und Parallele Systeme

München, Juli 2021



Inhalt

Einführung

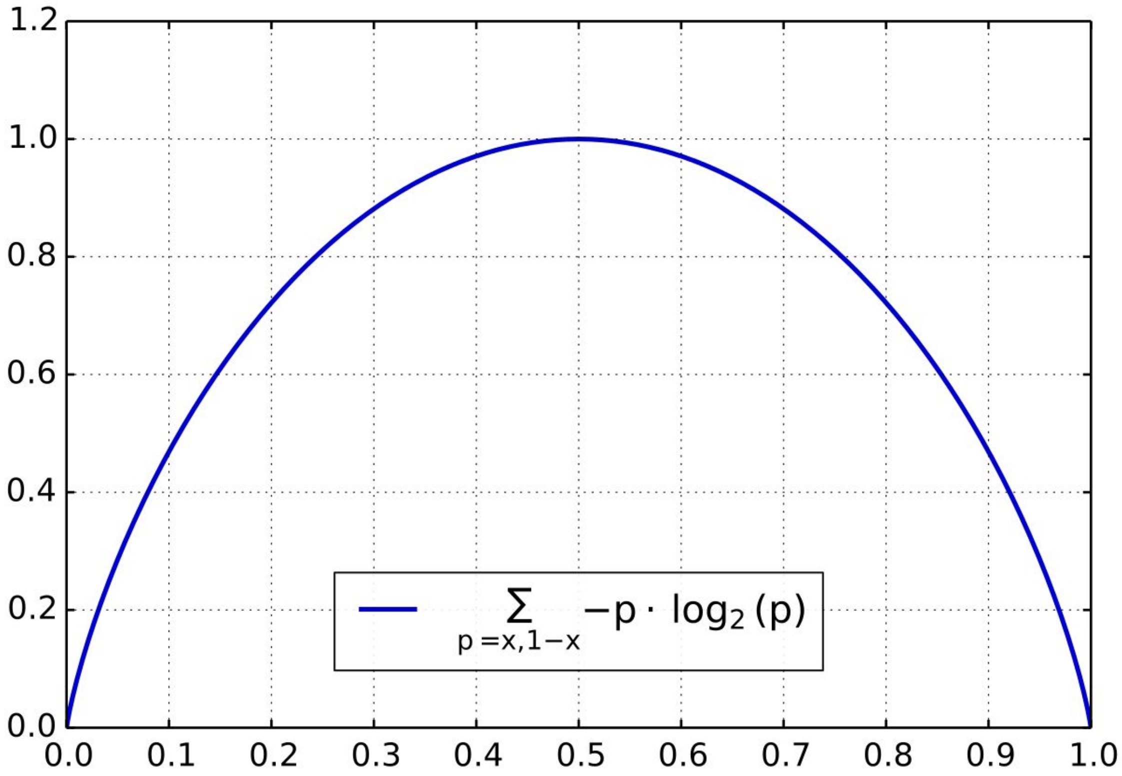
- Entropie

$$\mathrm{H}(X) = -\sum_{x \in X} \mathrm{P}(X = x) \cdot \log_2(\mathrm{P}(X = x))$$

$$0 \leq H(X) \leq \log_2(|X|)$$

Einführung

Entropie eines Münzwurfs



Lösungsansatz

Hauptprobleme bei der Entropiefunktion

1. Rundungsfehler -> Kahan’s Summe
2. Logarithmusfunktion

$$\mathrm{H}(X) = -\boxed{\sum_{x \in X}} \mathrm{P}(X = x) \cdot \boxed{\log_2(\mathrm{P}(X = x))}$$

Lösungsansatz

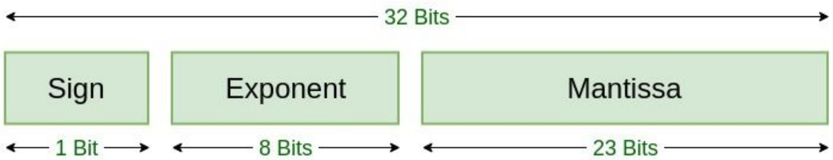
Logarithmusfunktion

- Approximation als Polynom
  - ARTANH Approximation
  - Remez Algorithmus
- Lookup-Tabelle
- Approximation als Polynom mit Hilfe einer Lookup-Tabelle
  - Glibc

Lösungsansatz

Extrahieren des Exponenten

$$x = 2^k \cdot z$$
$$log_2(x) = k + log_2(z)$$
$$log_2(x) = k + ln(z)/ln(2)$$



- Bei normalisierte Gleitkommazahlen liegt z zwischen 1 und 2
- Nur die Approximation der Logarithmusfunktion zwischen 1 und 2 notwendig

Lösungsansatz

ARTANH Approximation

$$\ln(z) = 2 \cdot artanh\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2k+1}\right)$$

$$S_n = 2\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \cdot \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2k+1}\right)$$

- Wenn die Zahl eine Zweierpotenz ist, liefert dies genaues Ergebnis

Lösungsansatz

REMEZ Algorithmus

- Mini-Max Approximationsalgorithmus für bestimmtes Intervall

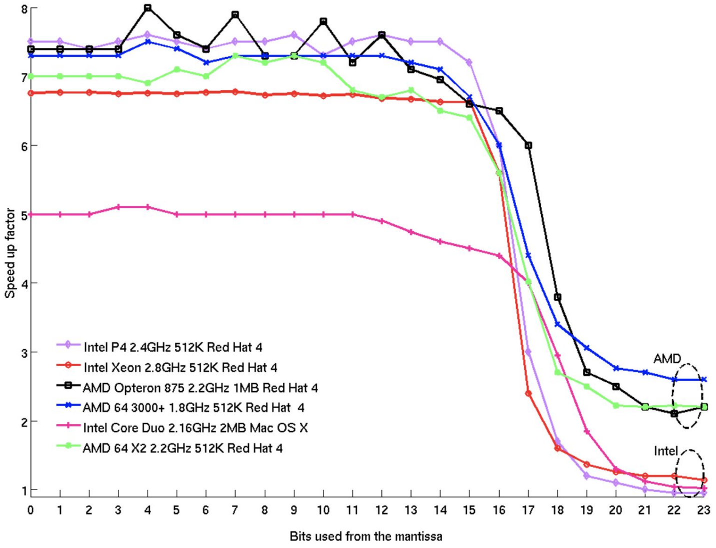
Das Algorithmus liefert für $\log_2(z)$ im Intervall [1,2):

$$P_2(z) = -0.344845 \cdot z^2 + 2.024658 \cdot z - 1.674873$$
$$P_4(z) = -0.081616 \cdot z^4 + 0.645142 \cdot z^3 - 2.120675 \cdot z^2 + 4.070091 \cdot z - 2.512854$$

Lösungsansatz

Lookup Tabelle

- Speicherung der $\log_2(z)$ Werte statt rechnen
- Insgesamt 2^{23} Einträge notwendig für 100% Genauigkeit
- Wir benutzen trotzdem 2^{16} Einträge
- Trade-off zwischen Genauigkeit und Performanz
- 100% Genauigkeit bei Zweierpotenzen



Lösungsansatz

Glibc Methode

$$log_2(x) = k + log_2(z/c) + log_2(c)$$

- Mittels z findet man in einer Lookup-tabelle c und $\log_2$(c)
- z/c ist sehr nahe an 1
- $\log_2$(z/c) wird mittels Taylor-Reihe approximiert $ln(x+1) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$
- 100% Genauigkeitkeit bei Zweierpotenzen

Lösungsansatz

Denormalen Zahlen

- Bei den denormalen Gleitkommazahlen liegt z zwischen 0 und 1.
- Unsere Methoden funktionieren im Intervall [1,2)

$$log_2(x \cdot 2^{23} / 2^{23}) = log_2(x \cdot 2^{23}) - log_2(2^{23}) = log_2(y) - 23$$

- Wir multiplizieren die Zahl mit 2^23 und subtrahieren 23 von dem Exponent
- Wir führen die normale Schritte der Logarithmusfunktion für y

Genauigkeit

$$\mathrm{H}(X) = -\sum_{x \in X} \mathrm{P}(X = x) \cdot \boxed{\log_2(\mathrm{P}(X = x))}$$

FehlerAbsMax = Max{ | $\log_2$(x) - log2_approx(x) | }

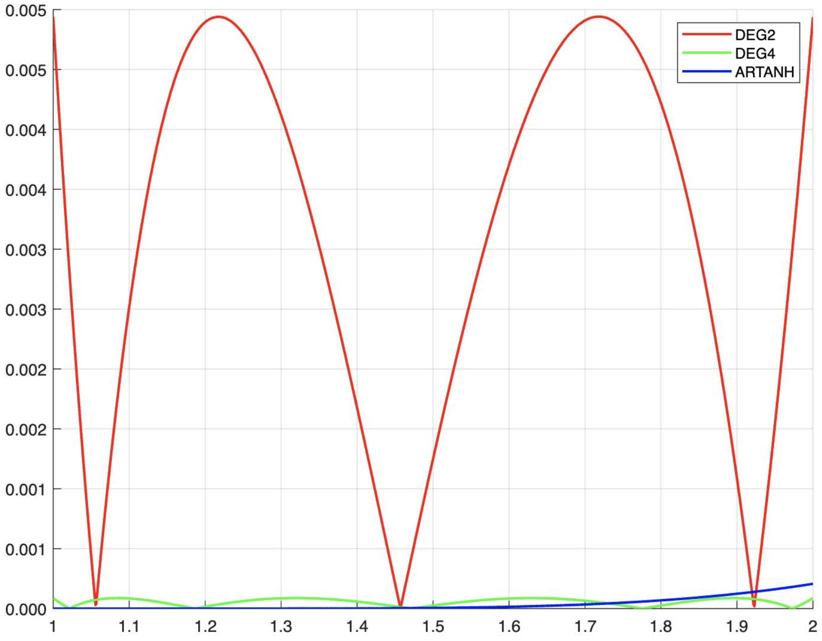
Genauigkeit

Maximale Absolute Fehler

- DEG2: 4,491 $\times 10^{-3}$
- DEG4: 8,752644 $\times 10^{-5}$
- ARTANH: 2,063996 $\times 10^{-4}$

Durchschnittlicher Fehler

- Lookup-Tabelle: 6.55 $\times 10^{-6}$



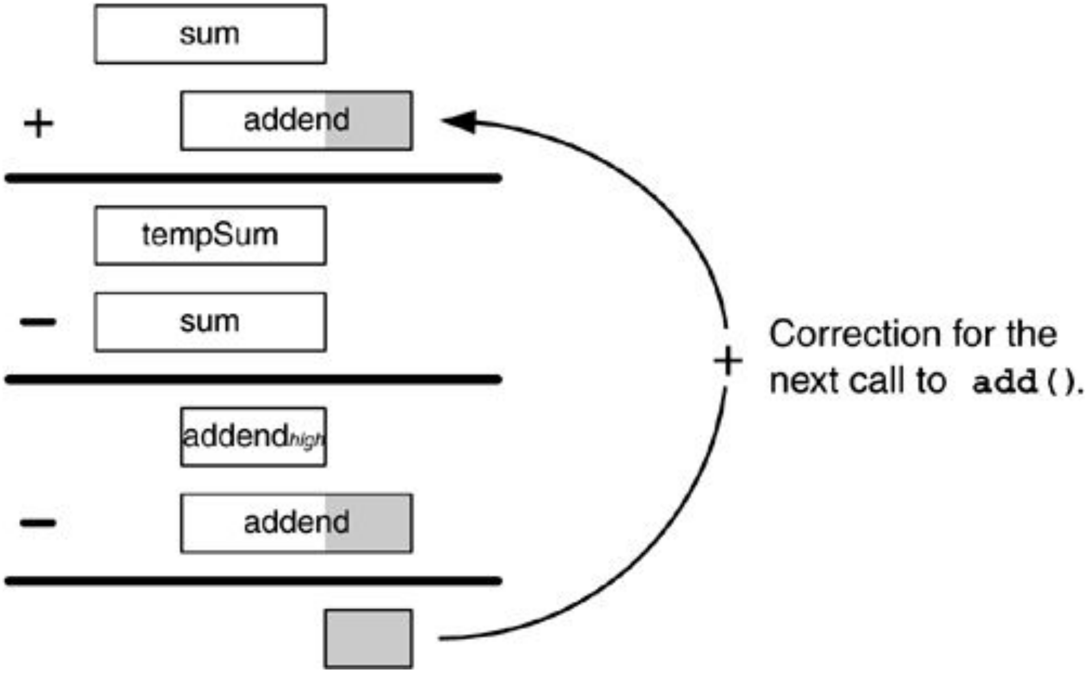
Genauigkeit

Rundungsfehler

- Sequentielle Addition
- Zahlen werden auf Zwischensumme addiert
- Zwischensumme wird immer größer
- Stellen der nächste Zahl werden ignoriert

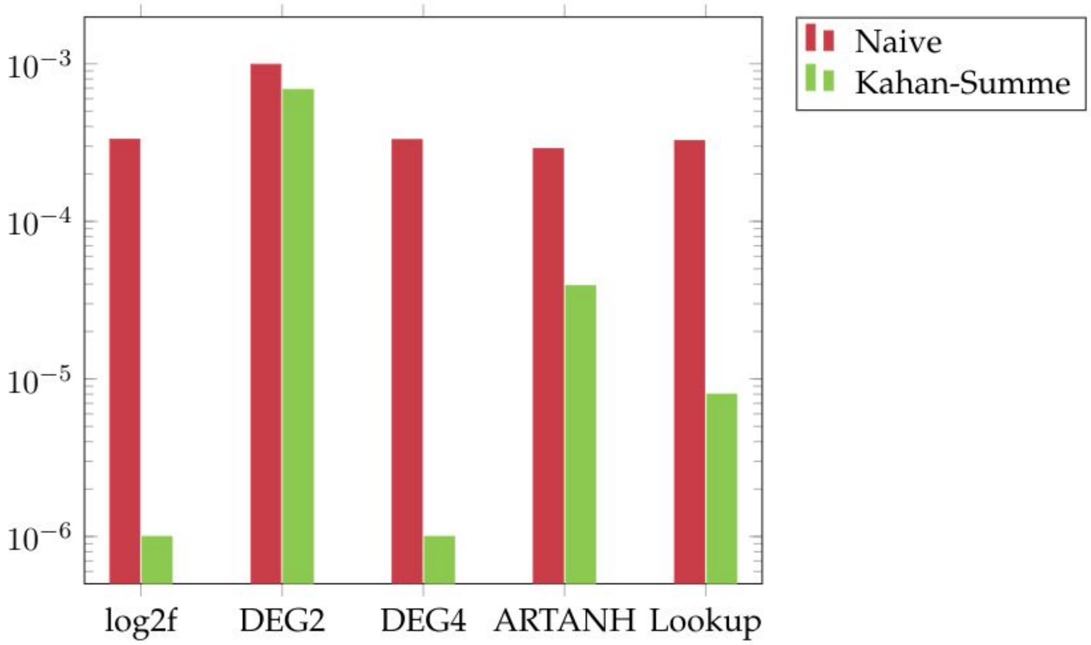
Genauigkeit

Kahan-Summe-Algorithmus



Genauigkeit

Entropiefehler Größenordnung



Performanz

Optimierungen unter 5 Hauptüberschriften :

- SIMD
- Speicher Allokation
- Ersparen von Branches
- ABI Verstoß

Performanz

SIMD

- Die Entropiefunktion ist leicht zu vektorisieren.
- Spezielle vektorisierte Logarithmusfunktionen.
- Maximale Speed-up von 4.
- Auch Lookup-Table Ansatz ist vektorisierbar.
- Speedup kleiner als Approximations.

Performanz

Speicher Allokation

- Wir stellen uns Sicher, dass die Länge der Entropiefunktion übergebene Float-Array immer ein Vielfaches 4 ist.
- Der Rest wird mit Nullen erfüllt.
- Damit keine skalare Schritte in SIMD-Funktion benötigt.
- Speicherallokation mit *aligned_alloc()*
- *movaps* Statt *movups*

Beispiel für [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]

Allokation im Heap

0x...01c	0
0x...018	0
0x...014	0
0x...010	0.5
0x...00c	0.4
0x...008	0.3
0x...004	0.2
0x...000	0.1

Zusätzliche Allokation

Startadresse

Performanz

Ersparen von Branches

- Auslassen einige Randfälle

$$\mathrm{P}(X = x) \cdot \log_2(\mathrm{P}(X = x))$$

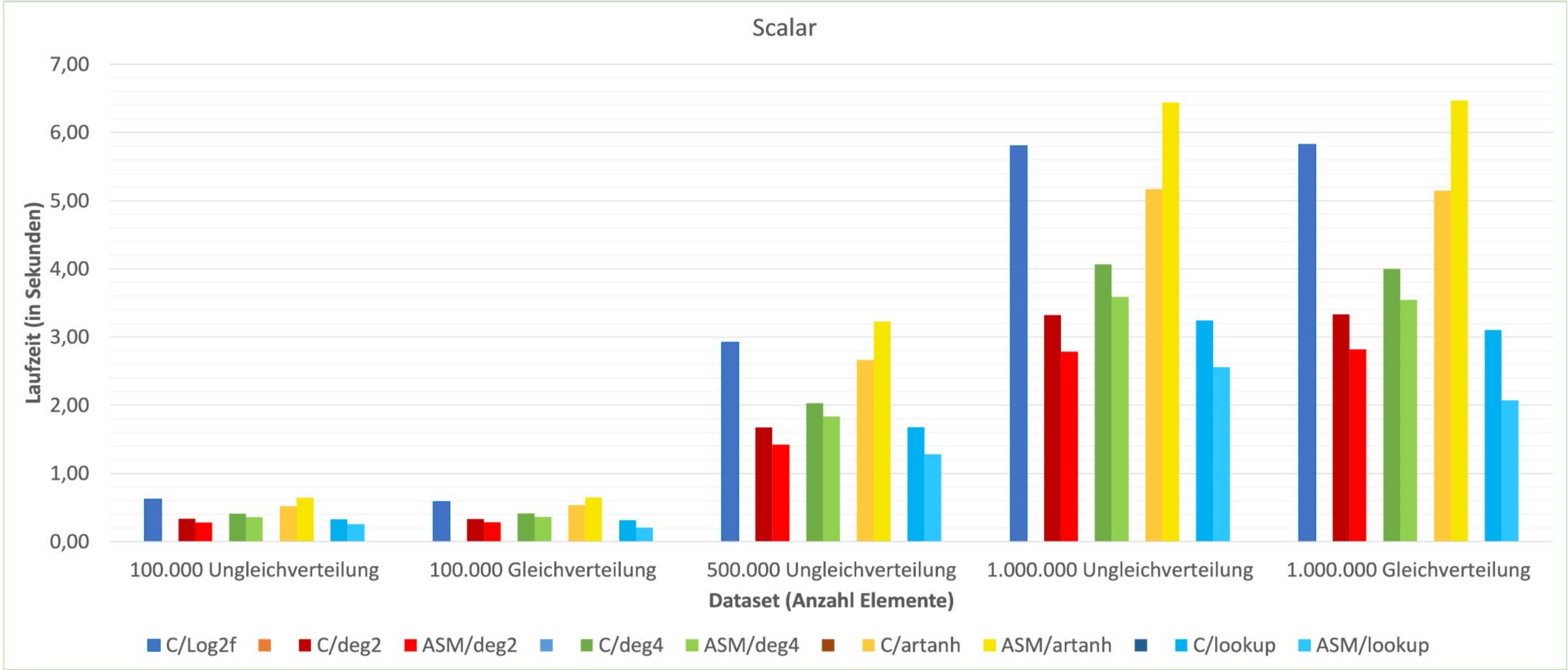
- NaN, +- Infinity, 0, negative Zahlen
- Die Korrektheit der Zahl wird in der Entropiefunktion überprüft
- Damit sparen wir einige Instruktionen

Performanz

ABI Verstoß

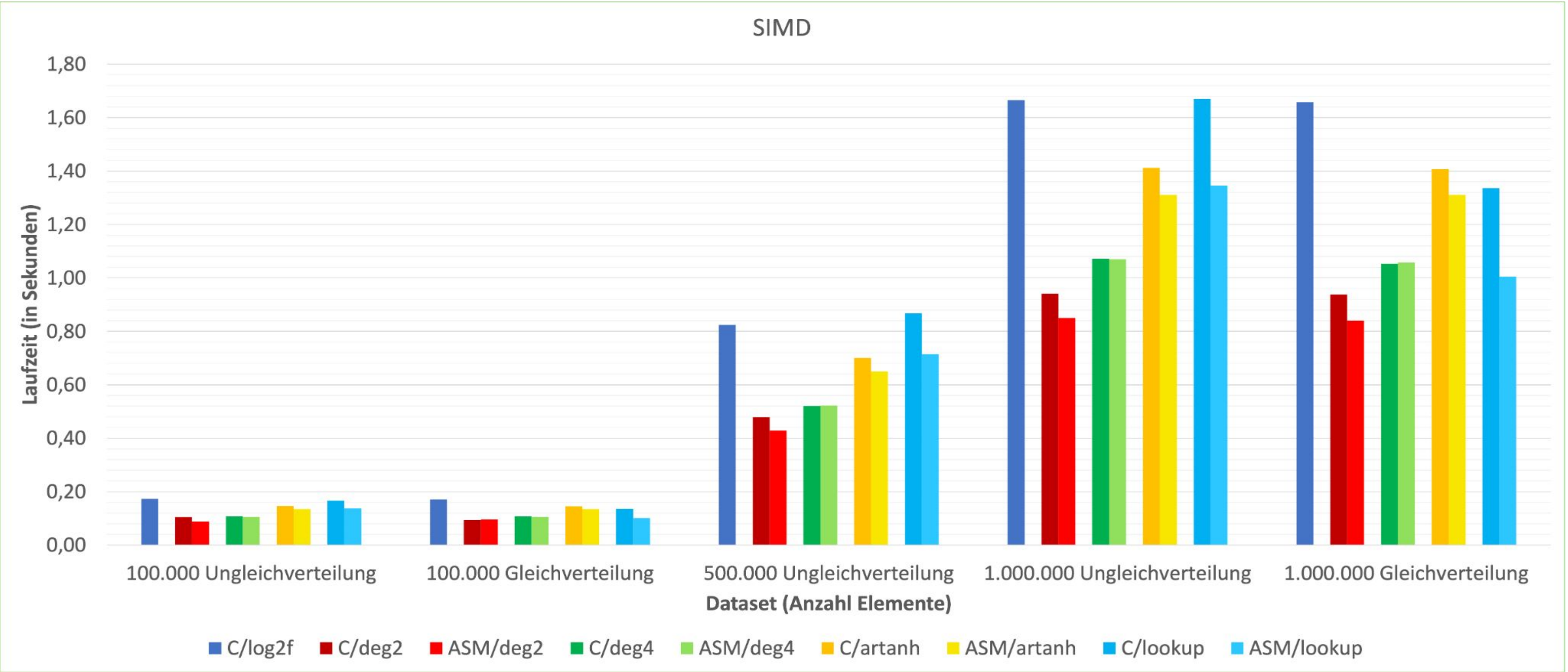
- Wir wissen genau welche Registern in Logarithmusfunktion verändert wird
- Caller-Saved Register werden nicht in Entropiefunktion gesichert
- Kein Stack benötigt

Vergleich unter verschiedenen skalaren Implementationen

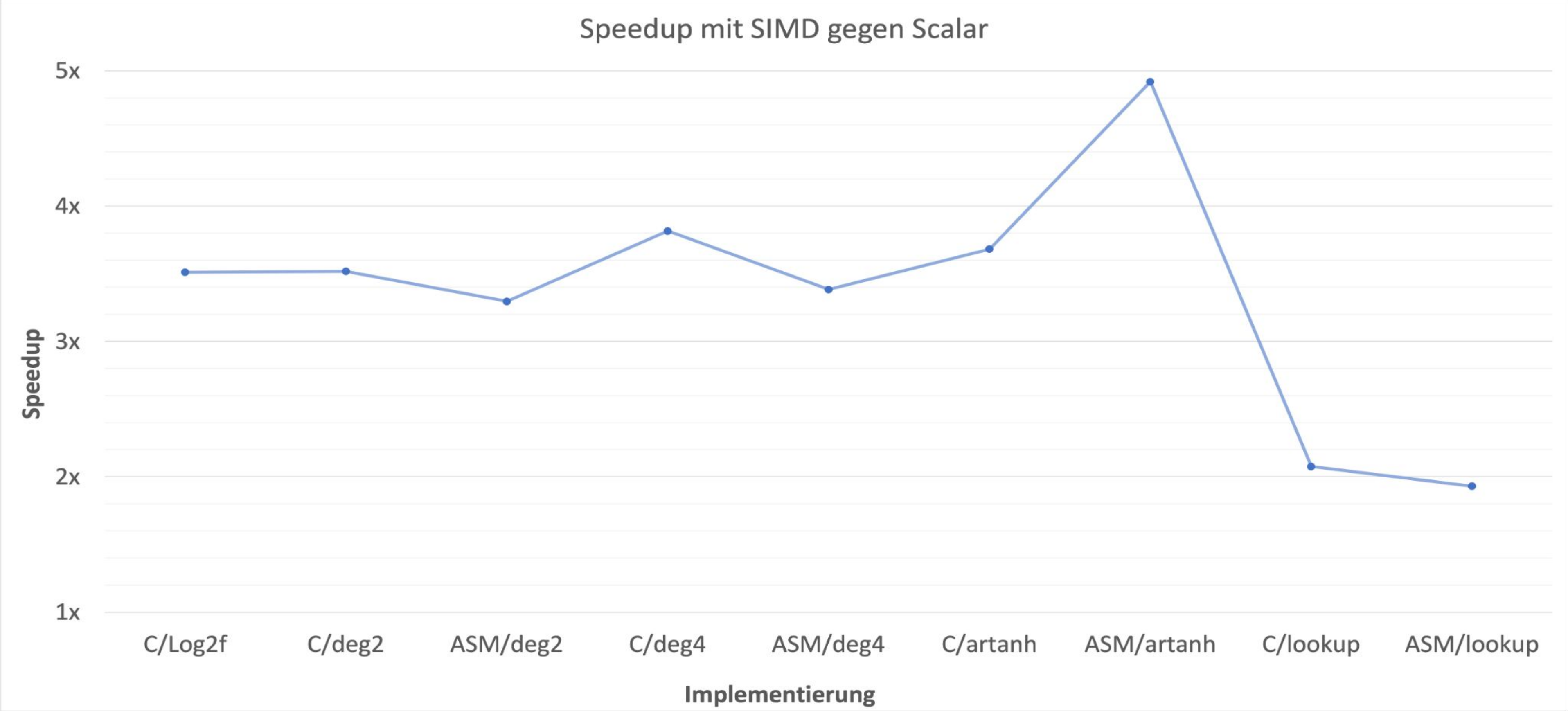


1000 Iterationen mit gcc 11.2.0 -O3 auf i7-10750H @ 2.6 GHz im Arch Linux kompiliert

Vergleich unter verschiedenen SIMD Implementationen



1000 Iterationen mit gcc 11.2.0 -O3 auf i7-10750H @ 2.6 GHz im Arch Linux kompiliert


Speedup mit SIMD gegen Scalar
5x
4x
3x
2x
1x
Speedup
C/Log2f
C/deg2
ASM/deg2
C/deg4
ASM/deg4
C/artanh
ASM/artanh
C/lookup
ASM/lookup
Implementierung

Zusammenfassung

- Die Entropiefunktion wurde mit unterschiedlichen Algorithmen erfolgreich implementiert
- Das Umsetzen von SIMD Prinzip führt zu offensichtlicher Steigerung von der Leistung
- Kahan-Summe reduziert deutlich den Rundungsfehler bei der Summe von Fließkommazahlen
- Grundsätzlich ist die DEG4 Implementation zu benutzen

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Haben Sie noch Fragen?

Bildquellen

1. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mplwp_shannon_entropy.svg
2. https://www.geeksforgeeks.org/program-for-conversion-of-32-bits-single-precision-ieee-754-floating-point-representation
3. http://www.icsi.berkeley.edu/pubs/techreports/TR-07-002.pdf
4. https://flylib.com/books/en/2.758.1.39/1/