Universidad Veracruzana

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

Graficación por computadora

Mallado2D v3 - Triangulación de Delaunay

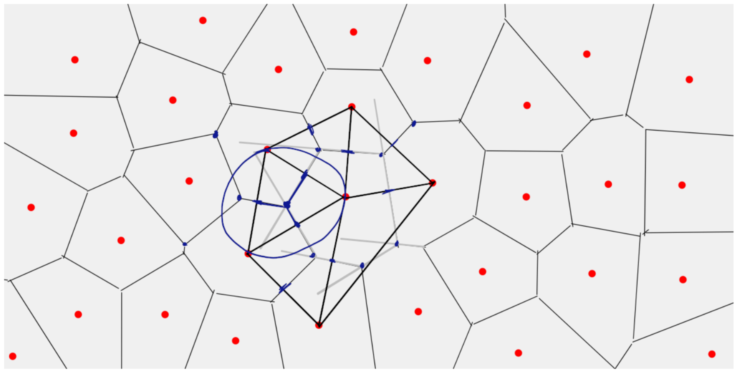
Lara Xocuis Martha Denisse

S22002213

October 13, 2024

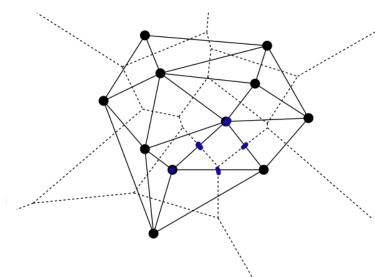
Diagrama de Voronoi

VORONOI

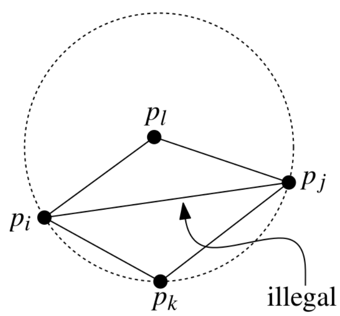


Triangulación de Delaunay

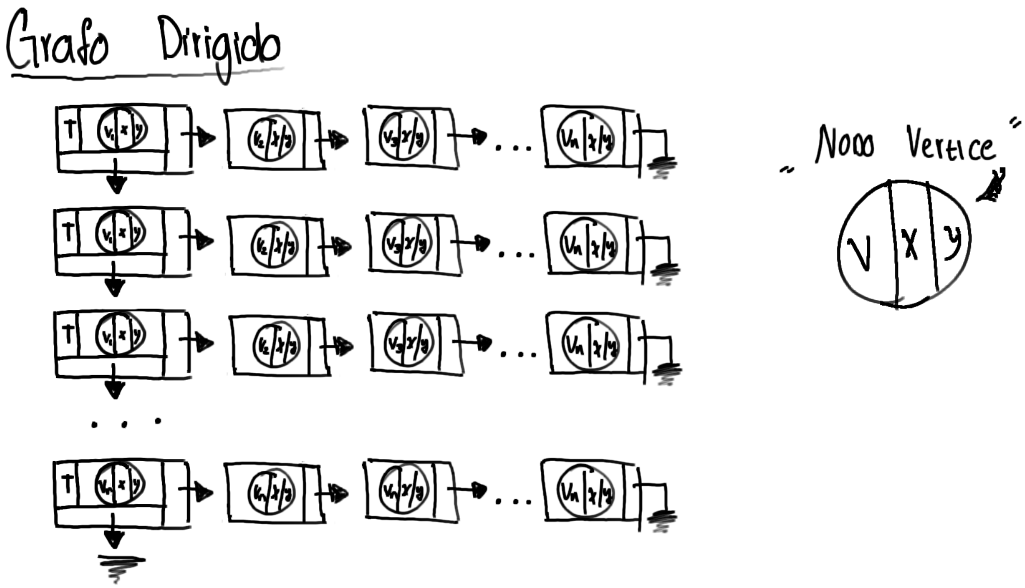
DELAUNAY TRIANGULATION



triangulaciones 'legales'

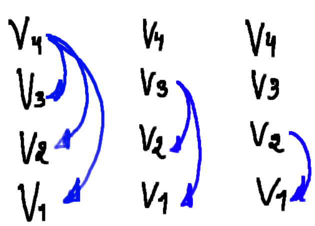


1 Estructura de dato



2 Criterio de distancias

Sacando distancias con todos los puntos se hace una lista de distancias ordenada

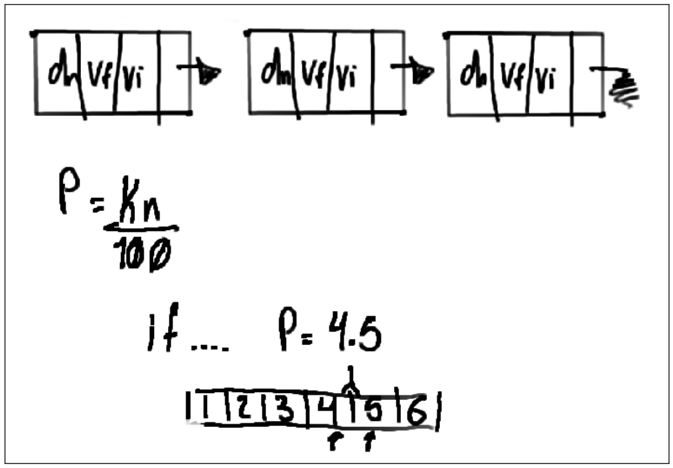


ya que:

$$|\vec{AB}| = |\vec{BA}| = d(a,b) = d(b,a)$$

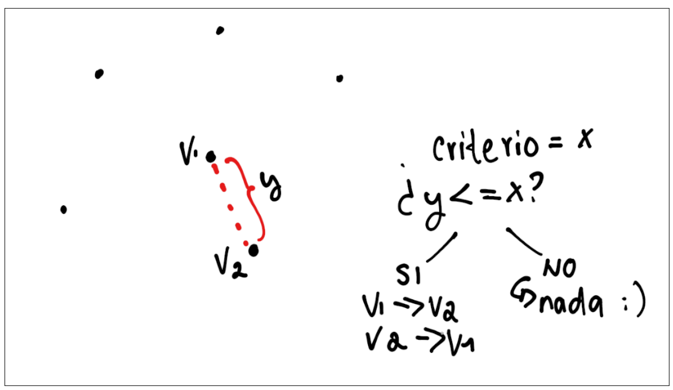
$$d(a,b) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se saca un criterio (percentil) promedio entre todas las distancias de la lista de distancias



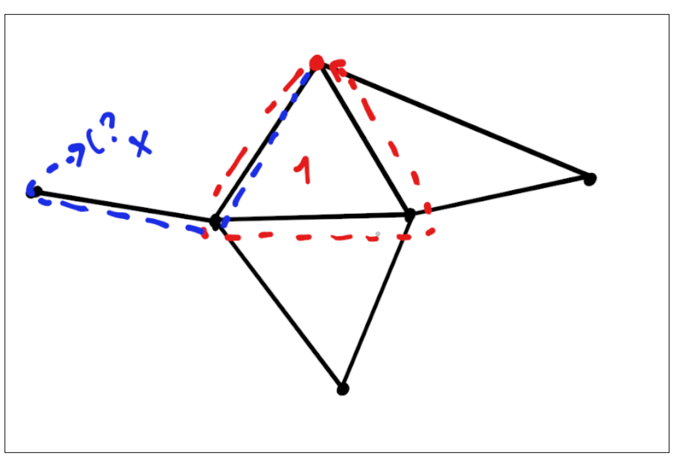
Nota: Se reemplazó el uso de la mediana con percentiles por flexibilidad

Checar cuales vértices cumplen con el criterio, de ahí crear adyacencia



3 Contar triangulos

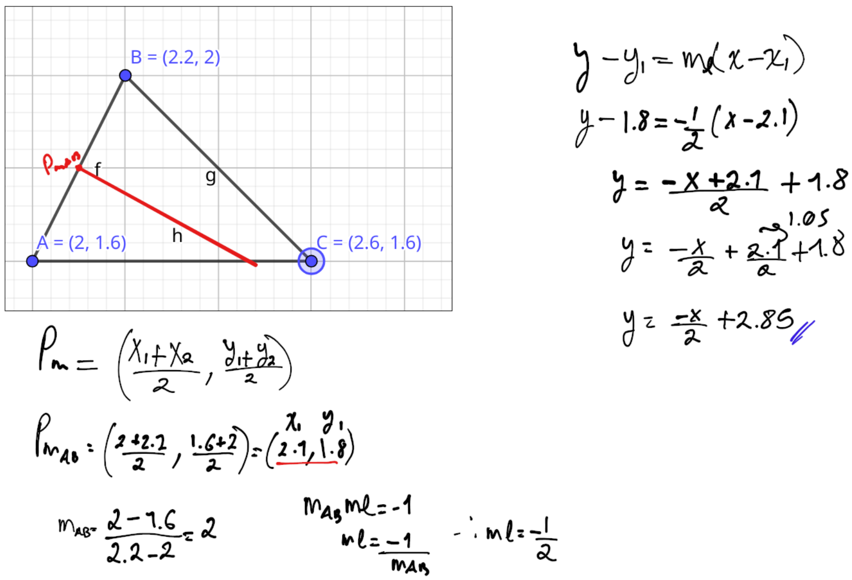
Checa si da la 'vuelta'



4 Delaunay

4.1 Circucentro

Utilidad de circucentro, calculos manuales:



Para evitar incluir variables y ecuaciones de recta, se opta por sacar el circucentro de otra forma.

Formula de area de un triangulo que pasa a través de un circulo

$$A = \frac{abc}{4R}$$

Se despeja para sacar R (radio del círculo)

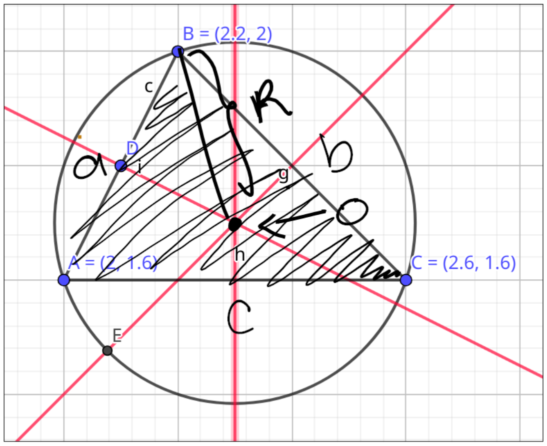
$$R = \frac{abc}{4A}$$

El área de un triangulo puede sacarse por la fórmula de Herón

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Donde a,b y c son los lados del triángulo

Si hay un triangulo, saca las distancias de cada lado



$$A = \frac{abc}{4R} \Rightarrow AR = \frac{abc}{4} \Rightarrow R = \frac{abc}{4A}$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$OC = Oa = OB = R$$

El radio será nuestro criterio para averiguar si hay puntos dentro de la circunferencia

Para hacerlo desde el centro como un 'barrido', necesitamos las coordenadas del circucentro

Nos encontramos con la ecuación de circulo de forma general, ordinaria o canónica

ECUACIÓN DEL CIRCULO:

(Forma general) $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$

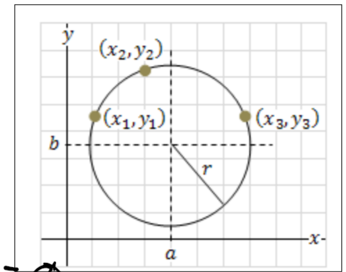
(Ordinaria o canónica) $x^2 + y^2 = r^2$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ecuación de un círculo que pasa por 3 puntos (triángulo)

Ec. de un circulo que pasa por 3 puntos

$(x_1,y_1)\ (x_2,y_2)\ (x_3,y_3)$



$$Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=\emptyset$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \emptyset$$

Cramer

$$x^2+y^2 M_{11} - xM_{12} + yM_{13} - M_{14} = \emptyset$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{M_{12}}{M_{11}} \; ; \; y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{M_{13}}{M_{11}}$$

$$x^2+y^2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_1 \\ x_3^2+x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Para un punto $O_{x0,y0}$ (circucentro), tiene una ecuación de $(x-x_0)^2+(x-y_0)^2-r_0^2=0$

$$(x^2+y^2)M_{11} - xM_{12} + yM_{13} - M_{14} = \emptyset$$

$$O(x_0,y_0) \Rightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r_0^2=\emptyset$$

$$x^2-2xx_0+x_0^2+y^2-2yy_0+y_0^2-r_0^2=\emptyset$$

$$x^2+y^2-2xx_0-2yy_0+(x_0^2+y_0^2-r_0^2)=\emptyset \; \ast$$

$$(x^2+y^2)M_{11} - xM_{12} + yM_{13} - M_{14} = \emptyset \; \ast$$

$$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$x^2M_{11} - xM_{12} + y^2M_{11} + yM_{13} - M_{14} = \emptyset$$

$$M_{11}\left[\left(x+\frac{M_{12}}{2M_{11}}\right)^2 - \left(\frac{M_{12}}{2M_{11}}\right)^2\right] + M_{11}\left[\left(y+\frac{M_{13}}{2M_{11}}\right)^2 - \left(\frac{M_{13}}{M_{11}}\right)^2\right] - M_{14} = \emptyset$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r_0^2=\emptyset$$

$$x_0 = \frac{M_{12}}{2M_{11}} \qquad y_0 = \frac{M_{13}}{M_{11}}$$

Determinantes

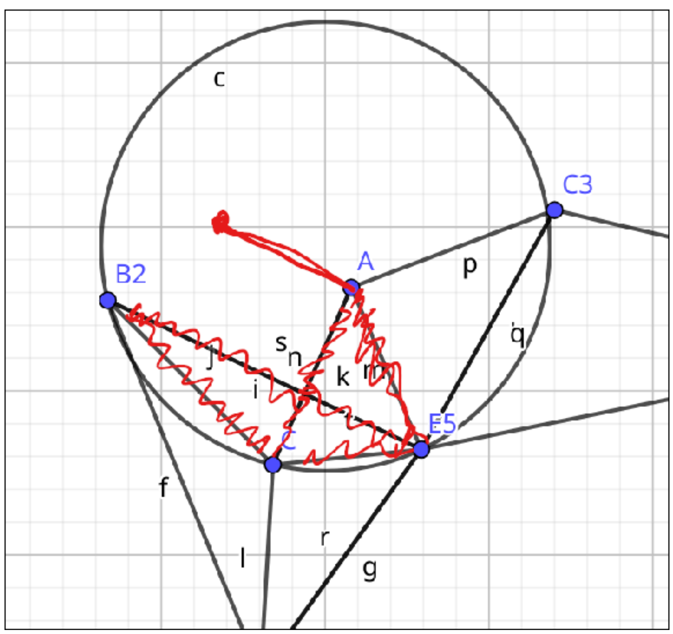
The coefficients A, B, C and D can be found by solving the following determinants:

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad B = -\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \quad D = -\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

The values of A, B, C and D will be after solving the determinants:

$$A = x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2$$
$$B = (x_1^2 + y_1^2)(y_3 - y_2) + (x_2^2 + y_2^2)(y_1 - y_3) + (x_3^2 + y_3^2)(y_2 - y_1)$$
$$C = (x_1^2 + y_1^2)(x_2 - x_3) + (x_2^2 + y_2^2)(x_3 - x_1) + (x_3^2 + y_3^2)(x_1 - x_2)$$
$$D = (x_1^2 + y_1^2)(x_3y_2 - x_2y_3) + (x_2^2 + y_2^2)(x_1y_3 - x_3y_1) + (x_3^2 + y_3^2)(x_2y_1 - x_1y_2)$$

Calcula todas las distancias desde el punto del circucentro y verifica si existe un punto (que NO sean los del triangulo) que sea menor o igual al radio, si es así, hay que hacer 'flip'



Si hay otro vertice dentro del círculo, eliminar todas las conexiones con todos los puntos dentro del círculo (radio), sacar un nuevo percentil tomando el algoritmo de criterio anterior y volver a unir.

Este proceso se va a repetir siempre y cuando exista un triángulo, si el flip anterior sigue sin cumplir el criterio del área del circulo, se volverá a reunir hasta que sea válido