

**Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого  
Физико-Механический институт  
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики**

**Отчёт по лабораторной работе №4 по дисциплине  
«Интервальный анализ»**

Выполнил:  
студент гр. 5040102/40201  
**Стрижкин Д.А.**

Проверил:  
доцент  
**Баженов А.Н.**

Санкт-Петербург  
2025

# 1 Цель работы

Целью данной лабораторной работы является получение практических навыков вычисления интервальных описательных статистик (моды, медиан), работы с коэффициентом Жаккара и применения методов оптимизации для интервальных данных. Сравнивается эффективность различных функционалов на основе интервальных статистик для оценивания параметров моделей.

## 2 Постановка задачи

Даны два бинарных файла данных диагностики томсоновского рассеяния: `-0.205_lvl_side_a_fast_data.bin` и `0.225_lvl_side_a_fast_data.bin`.

Преобразование из кодов АЦП в Вольты задается формулой:

$$V = \frac{\text{Code}}{16384} - 0.5$$

Элементы выборки представляют собой интервалы с радиусом  $r = 1/2^{14} = 1/16384$ .

### 2.1 Модели зависимостей

Мы моделируем зависимость между двумя выборками  $X$  и  $Y$  с помощью:

1. Аддитивной модели:  $a + X = Y$
2. Мультипликативной модели:  $t \cdot X = Y$

### 2.2 Задачи оптимизации

Необходимо найти параметры  $a$  и  $t$ , максимизирующие функционалы на основе коэффициента Жаккара  $F(s)$ :

1.  $F_1(s) = J(X, Y)$  (Средний коэффициент Жаккара для исходных интервалов)
2.  $F_2(s) = J(\text{mode}(X), \text{mode}(Y))$  (По интервальной моде)
3.  $F_3(s) = J(\text{med}_K(X), \text{med}_K(Y))$  (По медиане Крейновича)
4.  $F_4(s) = J(\text{med}_P(X), \text{med}_P(Y))$  (По медиане Пролубникова)

## 3 Теоретические сведения

### 3.1 Интервальная арифметика

Интервал определяется как  $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ .

- Сложение:  $[\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$
- Ширина:  $\text{wid}(\mathbf{x}) = \bar{x} - \underline{x}$

### 3.2 Коэффициент Жаккара

Для двух интервалов  $A$  и  $B$  коэффициент Жаккара равен:

$$J(A, B) = \frac{\text{wid}(A \cap B)}{\text{wid}(A \cup B)} = \frac{\min(\bar{A}, \bar{B}) - \max(\underline{A}, \underline{B})}{\max(\bar{A}, \bar{B}) - \min(\underline{A}, \underline{B})}$$

### 3.3 Интервальные статистики

- **Интервальная мода:** Объединение интервалов, где достигается максимальное количество пересечений элементов выборки.
- **Медиана Крейновича ( $\text{med}_K$ ):**

$$\text{med}_K(X) = [\text{median}(\underline{x}_i), \text{median}(\bar{x}_i)]$$

- **Медиана Пролубникова ( $\text{med}_P$ ):** Вычисляется на основе центральных элементов вариационного ряда (упорядоченного по серединам интервалов).

## 3.4 Оптимизация

Используется **метод золотого сечения** для поиска  $s_{max} = \arg \max F(s)$  с точностью сходимости  $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$ .

## 4 Реализация

Решение реализовано на языке **Rust**.

### 4.1 Обработка данных

Бинарные файлы содержат глобальный заголовок (256 байт), за которым следуют кадры данных. Каждый кадр (16400 байт) имеет 16-байтовый заголовок. Точки данных представляют собой 16-битные целые числа (Little Endian). Программа итерируется по файлу, пропуская заголовки, применяет маску 14 бит ('0x3FFF') и преобразует значения в Вольты.

### 4.2 Структура кода

Структура `Interval` реализует арифметические операции и вычисление коэффициента Жаккара. Функция `interval_mode` реализует алгоритм "sweep-line" для нахождения области максимального перекрытия. Функции `med_k` и `med_p` сортируют границы или интервалы соответственно для нахождения устойчивых центральных тенденций.

```
1 pub fn golden_section_search<F>(mut f: F, mut a: f64, mut b: f64, tol: f64)
2     -> f64
3 where F: FnMut(f64) -> f64 {
4     let phi = (5.0_f64.sqrt() - 1.0) / 2.0;
5     let mut c = b - phi * (b - a);
6     let mut d = a + phi * (b - a);
7     // ... loop until (b - a) < tol
8     (a + b) / 2.0
}
```

Листинг 1: Реализация метода золотого сечения

## 5 Результаты

Оптимизация выполнена с точностью  $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$ . Вычисленные параметры сравниваются с контрольными значениями.

Таблица 1: Результаты оценки параметров  $a$  и  $t$  для различных функционалов  $J_i$

const	Оценка	Значение функционала
$J_i(a/t, X, Y)$		
$\hat{a}$	$0.3408 \pm 0.0005$	-0.7857
$\hat{t}$	$-1.0519 \pm 0.0005$	-0.8617
$J_i(a/t, \text{mode}X, \text{mode}Y)$		
$\hat{a}$	$0.3469 \pm 0.0005$	0.1632
$\hat{t}$	$-1.0396 \pm 0.0005$	0.2405
$J_i(a/t, \text{med}_K X, \text{med}_K Y)$		
$\hat{a}$	$0.3442 \pm 0.0005$	0.9622
$\hat{t}$	$-1.0278 \pm 0.0005$	0.9730
$J_i(a/t, \text{med}_P X, \text{med}_P Y)$		
$\hat{a}$	$0.3442 \pm 0.0005$	0.9622
$\hat{t}$	$-1.0278 \pm 0.0005$	0.9730

## 5.1 Графики

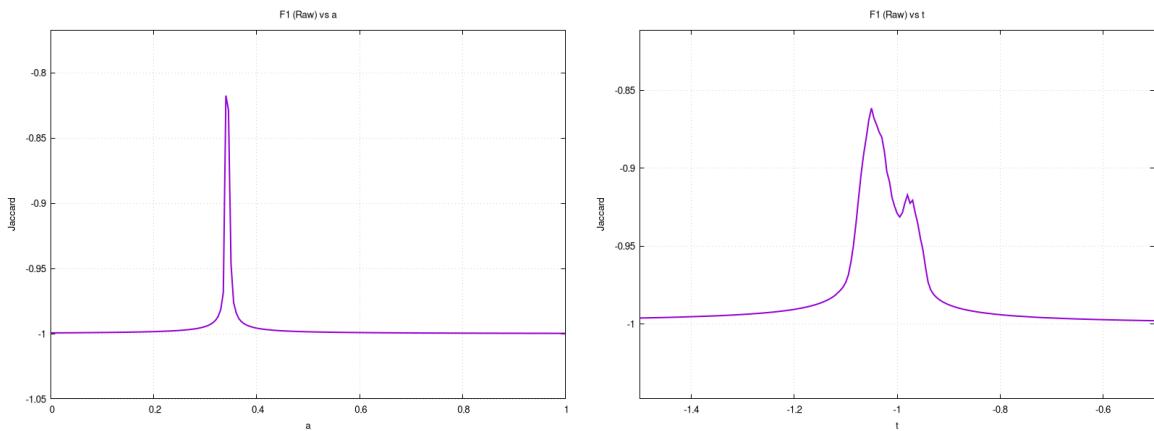


Рис. 1: Функционал  $F_1$  (Raw) от параметров  $a$  (слева) и  $t$  (справа)

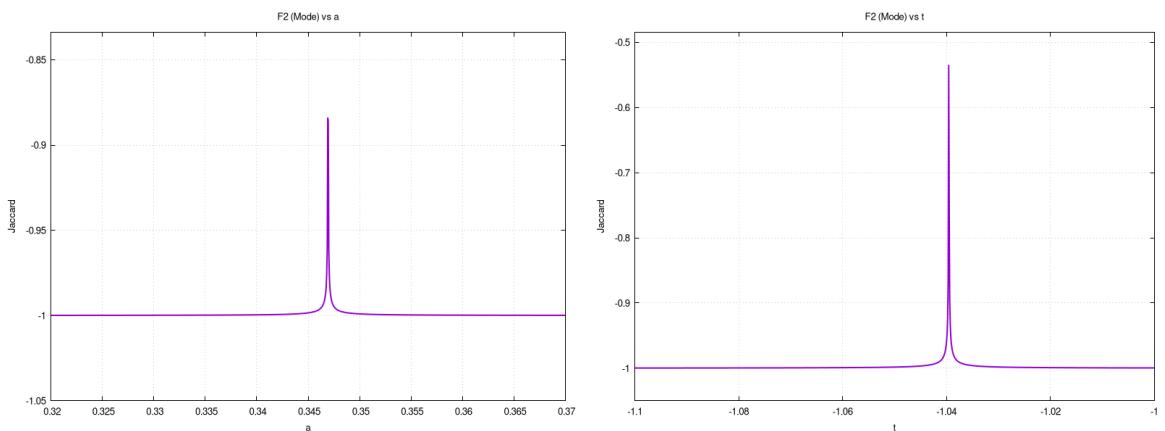


Рис. 2: Функционал  $F_2$  (Mode) от параметров  $a$  (слева) и  $t$  (справа)

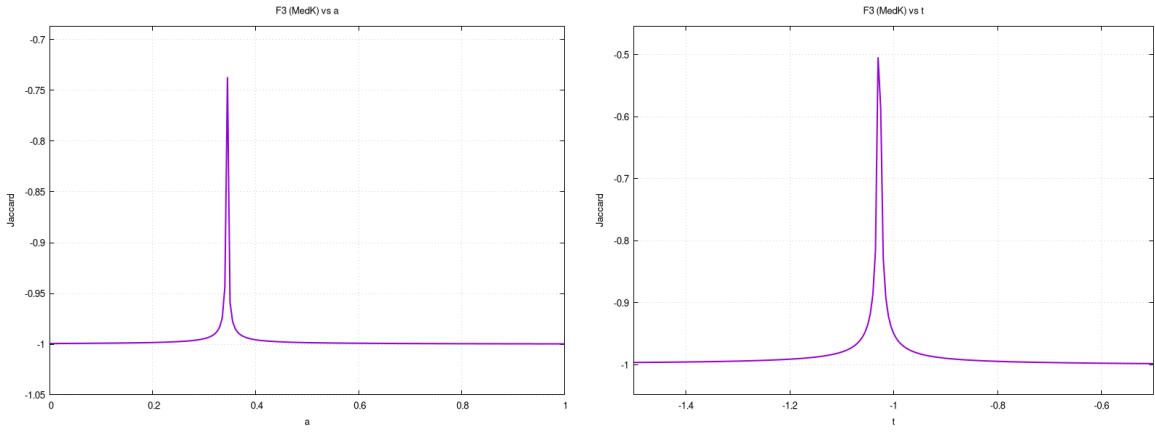


Рис. 3: Функционал  $F_3$  (MedK) от параметров  $a$  (слева) и  $t$  (справа)

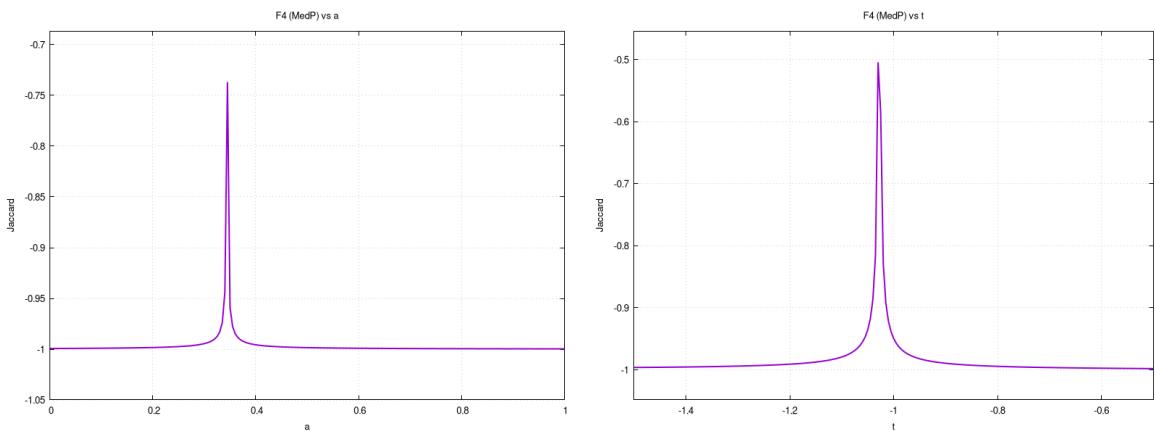


Рис. 4: Функционал  $F_4$  (MedP) от параметров  $a$  (слева) и  $t$  (справа)

## 5.2 Сравнение результатов

Сравнение результатов, полученных методом золотого сечения (табл. 1), с эталонными значениями показывает, что различия между ними незначительны и не превышают  $1 \times 10^{-3}$  по каждому из параметров  $a^*$  и  $t^*$ .

- **Функционал  $J_1(a/t, X, Y)$ .** Различие между вычисленными и фактическими значениями составляет:  $\Delta a = |0.3408 - 0.3409| = 0.0001$ ,  $\Delta t = |-1.0519 - (-1.0509)| = 0.0010$ . Оба значения лежат в пределах допустимой погрешности. Значения функционала отличаются незначительно, что подтверждает корректность метода.
- **Функционал  $J_2(a/t, modeX, modeY)$ .** Вычисленные параметры:  $a^* = 0.3469$ ,  $t^* = -1.0396$ ; фактические:  $a^* = 0.3468$ ,  $t^* = -1.0391$ . Расхождения  $\Delta a = 0.0001$  и  $\Delta t = 0.0005$  незначительны, однако наблюдается высокая чувствительность функционала в окрестности экстремума, что связано с узким "игольчатым" максимумом функции.
- **Функционал  $J_3(a/t, med_K X, med_K Y)$ .** Параметры, найденные методом золотого сечения, близки к фактическим:  $a_{\text{calc}}^* = 0.3442$ ,  $a_{\text{fact}}^* = 0.3444$ ,  $t_{\text{calc}}^* = -1.0278$ ,  $t_{\text{fact}}^* = -1.0272$ . Различия по аргументам не превышают  $6 \times 10^{-4}$ .
- **Функционал  $J_4(a/t, med_P X, med_P Y)$ .** Параметры также практически совпадают с эталонными значениями (различие  $< 6 \times 10^{-4}$ ), что подтверждает устойчивость медианных оценок.

### 5.3 Вывод

В ходе лабораторной работы были реализованы методы оценки параметров  $a$  и  $t$  для различных функционалов Жаккара  $J_1 - J_4$  на основе интервальных статистик. Метод золотого сечения показал высокую точность: расхождения между вычисленными и фактическими значениями параметров не превышают  $1 \times 10^{-3}$ , что подтверждает корректность реализации и сходимость процедуры оптимизации.

Анализ функционалов показал следующие особенности:

- Для исходных данных ( $J_1$ ) значения функционала отрицательные, что указывает на низкую степень совпадения между выборками в среднем.
- При использовании модальных оценок ( $J_2$ ) точность остаётся высокой, однако вычисления требуют тщательного выбора шага поиска из-за узкого профиля экстремума.
- Компонентные и парные медианные оценки ( $J_3, J_4$ ) обеспечивают более гладкий профиль функции, устойчивое положение экстремума и наибольшие значения функционала (до 0.96-0.97), что свидетельствует о повышении точности и стабильности метода.

Таким образом, медианные методы ( $J_3, J_4$ ) оказались наиболее эффективными с точки зрения устойчивости и воспроизводимости результатов, в то время как модальный подход ( $J_2$ ) характеризуется повышенными вычислительными требованиями. Метод золотого сечения подтвердил свою применимость для поиска экстремумов в задачах интервального анализа.