Домашнее задание по майнору 2. Вариант 30

Денис Тарасов

1. Пусть алфавит состоит из цифры 1, слово на входе – унарная запись числа n, функция вычисляет факториал от числа и выдает его в унарной записи. Как минимум для записи числа понадобится время, зависящее как факториал от исходного числа, что больше полинома.

2. Докажем от обратного. Пусть P = NP, тогда для задачи из NP существует машина Тьюринга (МТ), решающая эту задачу за полиномиальное время. Для того, чтобы задача из NP стала задачей из coNP, нужно лишь инвертировать ответ этой «полиномиальной» МТ: ответ «да» перейдет в ответ «нет», ответ «нет» — в «да». Таким образом, мы можем также решить любую задачу из coNP, сделав из нее задачу из NP и решив затем ее за полиномиальное время и инвертировав ответ. Т.е. можно взять задачу из NP, решить ее за полиномиальное время, инвертировать ответ и условие и получить задачу из coNP и ответ к ней. Получается coNP = NP. Противоречие.

3. Верно. Для этого построим такую МТ: она будет выдавать 1 там же, где исходная МТ из условия принимает слово языка L; и 0, где исходная МТ не справилась за полиномиальное время T (будем считать это самое время для каждого входного слова длины n, т.е. подставлять его в формулу n^c, где c — какое-то известное число, при этом само возведение в степень, прибавление 1 ко времени и последующая проверка – все вместе укладывается в $O(n)$, но тогда нужно не забыть добавить потраченное на это время к исходному полиному, за которое слово принимается машиной из условия). Тогда, по определению класса P, L лежит в P.

4. Судоку. Будем сводить к SAT таким способом: Пусть a_{xyz} означает, что в точке с координатами (x, y) стоит число z (пусть начало координат в левом нижнем углу, начиная с (1, 1)); а z принимает значения от 1 до n^2. Таким образом $a_{ijk} = 1 \iff$ в клетке с координатами (i, j) находится число k. Также за конъюнкцию примем обозначение $\bigwedge$, за дизъюнкцию – $\bigvee$. Например, $\bigwedge\limits_{i=1}^{10} x_i$ означает конъюкцию $x_1 \bigwedge x_2 \bigwedge ... \bigwedge x_{10}$.

Теперь составим список «правил», чтобы судоку решалось правильно:

1) Как минимум одно число из $1...n^2$ находится в клетке (x, y):

$$\bigwedge_{x=1}^{n^2} \bigwedge_{y=1}^{n^2} \bigvee_{z=1}^{n^2} a_{xyz}$$

2) Каждое число появляется в каждом ряду не более одного раза (попарно обходим клетки в ряду):

$$\bigwedge_{y=1}^{n^2} \bigwedge_{z=1}^{n^2} \bigwedge_{x=1}^{n^2-1} \bigwedge_{i=x+1}^{n^2} (\overline{a}_{xyz} \bigvee \overline{a}_{iyz})$$

3) Каждое число появляется в каждом столбце не более одного раза (попарно обходим клетки в столбце):

$$\bigwedge_{x=1}^{n^2} \bigwedge_{z=1}^{n^2} \bigwedge_{y=1}^{n^2-1} \bigwedge_{i=y+1}^{n^2} (\overline{a}_{xyz} \bigvee \overline{a}_{iyz})$$

4) Каждое число появляется в каждой клетке $n \times n$ не более одного раза:

$$\bigwedge_{z=1}^{n^2} \bigwedge_{i=0}^{n-1} \bigwedge_{j=0}^{n-1} \bigwedge_{x=1}^{n} \bigwedge_{y=1}^{n} \bigwedge_{k=y+1}^{n} (\overline{a}_{(ni+x)(nj+y)z} \bigvee \overline{a}_{(ni+x)(nj+k)z})$$

$$\bigwedge_{z=1}^{n^2}\bigwedge_{i=0}^{n-1}\bigwedge_{j=0}^{n-1}\bigwedge_{x=1}^{n}\bigwedge_{y=1}^{n}\bigwedge_{k=x+1}^{n}\bigwedge_{l=1}^{n}(\overline{a}_{(ni+x)(nj+y)z}\bigvee\overline{a}_{(ni+k)(nj+l)z})$$

5) Для всех уже расставленных чисел поступим так:

$\bigwedge\limits_{i=1}^{m} a_{xyz}$, где a_{ijk} (равняющаяся единице) означает, что изначально на доске на (i, j) стояло число k, а m – число таких чисел.

Теперь сделаем SAT: $(1)\bigwedge(2)\bigwedge(3)\bigwedge(4)\bigwedge(5)$.

Проверим, что если судоку не решается, то и булева формула невыполнима. Для этого должно быть неверно какое-то непустое подмножество из условий (1) – (5). Проверим их все (при этом проверять 1 и 5 смысла особого нет): если в двух клетках ряда (столбца, поля $n \times n$) одно и то же число появилось дважды (как минимум), то обнулятся соответствующие дизъюнкты и вся получившаяся КНФ обнулится. Если же для судоку существует решение, то оно будет удовлетворять всем дизъюнктам, а значит их конъюнкция будет равна 1.

Таким образом свели SUDOKU к SAT.

5 (hard). Для этого, чтобы доказать, что задача 3COLOR является NP-полной, сведем к ней задачу 3SAT. Для этого сделаем такую конструкцию:

1) Создаем три вершины (True, False и Neutral, они же 3 цвета), попарно соединяем их. Получились вершины, раскрашенные в 3 цвета, которыми мы можем пользоваться.

2) Для каждой переменной x_i из $x_1, ..., x_n$ (переменные из булевой формулы) сделаем две вершины v_i и $\overline{v}_i$, соединив их ребром. Затем каждую из вершин в паре соединим с вершиной Neutral.

3) Для каждой булевой формулы вида $(a \vee b \vee c)$ сделаем особую конструкцию такого вида: сделаем два «треугольника», соединим a и b попарно с его основанием (т.е. a соединено с одной вершиной, а b с другой), третью же вершину треугольника (которая будет обозначать $a \vee b$) соединим с вершиной основания другого треугольника. К оставшей вершине основания второго труегольника «подключим» вершину c. В третьей, незадействованной вершине треугольника будет находиться выражение $a \vee b \vee c$. Ее мы соединим с вершиной Neutral и False. Заметим, что выполняются два **свойства**:

1) если a, b и c ложны и, следовательно, окрашены в цвет F, тогда вершина второго треугольника $(a \vee b \vee c)$ должна быть окрашена в цвет F. Тогда из-за того что она уже соединена с вершиной, окрашенной в такой цвет, (так получилось по построению), то это символизирует невозможность раскрасить граф в три цвета и невыполнение исходной булевой формулы (так все три переменные в дизъюнкте были ложными (окрашены в F));

2) если же хоть одна переменная является истинной, то тогда можно раскрасить вершину «$a \vee b \vee c$» в цвет T и покраска в три цвета удастся.

Теперь докажем это явно:

1) пусть $x_1, ..., x_n$ – выполняющее означивание, т.е. булева формула при таком означивании истинна. Тогда пусть если x_i истинно, то v_i окрашена в цвет T, $\overline{v}_i$ в цвет F. Иначе – v_i окрашено в F, $\overline{v}_i$ – в T. Так как означивание верное, то любой дизъюнкт $a \vee b \vee c$ – истинен, и по вышеописанному свойству (2), присутствует 3-раскрашиваемость.

2) пусть граф можно раскрасить в 3 цвета. Тогда если v_i покрашено в цвет T, то соответсвующая ей переменная x_i истинна, если в F – то ложна. Докажем от противного, что это означивание является выполняющим, т.е. обращает булеву формулу в истинную. Допустим, что означивание невыполняющее. Тогда существует как минимум один ложный дизъюнкт. Тогда все переменные в таком дизъюнкте должны быть ложными. Тогда по свойству (1) выходная вершина $(a \vee b \vee c)$ должна быть окрашена в F. Но она уже соединена с вершиной, окрашенной в F. Тогда граф нельзя раскрасить в 3 цвета, а это противоречит условию.

Таким образом, сведя 3-SAT к нашей задаче, доказали ее NP-полноту.