

Санкт-Петербургский государственный университет

**УЖВА Денис Романович**

**Выпускная квалификационная работа**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ МЕЖДУ  
ЧАСТИЦАМИ ОТ РАСПАДА СТРУННЫХ КЛАСТЕРОВ ПРИ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЯДЕР ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ**

Уровень образования: бакалавриат

Направление: 03.03.02 «Физика»

Основная образовательная программа: СВ.5011.2015 «Физика»

Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор кафедры ФВЭиЭЧ **Вечернин В.В.**

Рецензент:  
к.ф.-м.н., ассистент кафедры ЯФМИ **Алцыбеев И.Г.**

Санкт-Петербург  
2019

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1.1	Модельный статистический анализ в ФВЭиЭЧ . . . . .	3
1.2	Модель кварк-глюонных струн в КХД . . . . .	4
1.3	Слияние струн . . . . .	4
1.4	Генераторы событий Монте-Карло в мягкой области . . . . .	5
1.5	Постановка задачи . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Разработка генератора событий</b>	<b>5</b>
2.1	План разработки и расчётов . . . . .	5
2.2	Выбор среды разработки . . . . .	6
2.3	Структура программы . . . . .	6
2.3.1	Генерация струн . . . . .	7
2.3.2	Заполнение графа и нахождение компонент связности; поиск максимальной компоненты . . . . .	7
2.3.3	Количество струн в кластере и его площадь . . . . .	8
2.3.4	Генерация множественности вперёд-назад . . . . .	8
2.3.5	Генерация поперечного импульса вперёд-назад . . . . .	9
2.3.6	Расчёт корреляционного коэффициента . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Результаты расчётов</b>	<b>10</b>
3.1	Перколяционный переход . . . . .	10
3.1.1	Равномерное распределение струн . . . . .	10
3.1.2	Параболическое распределение . . . . .	11
3.2	Учёт слияния струн до адронизации . . . . .	12
3.3	Вычисление корреляционного коэффициента . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Список литературы</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Приложение</b>	<b>16</b>
6.1	Изображения . . . . .	16
6.2	Таблицы . . . . .	22
6.2.1	Перколяционный переход при равномерном распределении струн . . . . .	22
6.2.2	Перколяционный переход при параболическом распределении струн . . . . .	22
6.2.3	Учёт слияния струн до адронизации . . . . .	23
6.2.4	Вычисление корреляционного коэффициента . . . . .	23
6.3	Код программы . . . . .	24

## Аннотация

В рамках квантовой хромодинамики большую роль играют феноменологические подходы к рассмотрению процессов рассеяния одних ядер на других, для проверки которых прибегают к помощи компьютерных симуляций на дискретной решётке, моделирующей сечение сталкивающихся ядер. При всём многообразии реализаций и успешности имплементации решёточных симуляций интереса заслуживает рассмотрение непрерывной модели, более детально отображающей действительность, что и было сделано в данной работе. В качестве взаимодействующих ядер были взяты ядра свинца, радиус которых  $R_{Pb} \approx 7.5$  фм, и основной задачей являлась проверка корреляций множественности ( $nn$ ) и поперечного импульса ( $p_t p_t$ ) при учёте и без учёта слияния цветных кварк-глюонных струн – растянутых из-за большого импульса налетающих частиц полей сильного взаимодействия – до начала процесса адронизации. В результате вычислений оказалось, что расчёты на непрерывной области взаимодействия совпадают с расчётами на дискретной решётке и, вместе с тем, с теорией, дающей асимптотическую оценку коэффициентов корреляции в зависимости от плотности струн при больших её значениях. На данном этапе работы особых преимуществ непрерывных симуляций по сравнению с дискретными не наблюдалось, однако, благодаря проверке на непрерывной области можно заключить, что более грубый метод вычислений на решётке действительно работает правильно, и им можно пользоваться для упрощения вычислений.

## 1 Введение

### 1.1 Модельный статистический анализ в ФВЭиЭЧ

В современной физике высоких энергий и элементарных частиц верификация феноменологической гипотезы не всегда возможна прямым сравнением данных из эксперимента с предсказанием гипотезы вследствие вероятностного характера описываемых величин. Данная характеристика порой влечёт за собой чрезмерную сложность формульного анализа, необходимого для конкретных математических результатов. Для проверки такого рода гипотез на помощь приходят компьютерные симуляции, позволяющие эффективно набрать необходимую выборку статистических данных для анализа.

Симуляции представляют из себя, во-первых, модельное воспроизведение так называемых “событий” (event generation) – физических процессов, необходимых для наблюдения определённых явлений, в виде сгенерированного на основе гипотезы набора величин; во-вторых, машинные расчёты по генерируемым значениям величин – для удобного сравнения результатов симуляций с аналогичными результатами на основе экспериментальных данных [1]. К типичным моделируемым в рамках физики высоких энергий процессам можно отнести, к примеру, процесс множественного рождения частиц при столкновении (рассеянии) ядер в коллайдере.

На этапе генерации физических процессов, происходящих в коллайдере, можно провести прямую аналогию непосредственно с самой методикой эксперимента: для изучения какого-либо явления в физике элементарных частиц зачастую требуется большая выборка для уменьшения статистической погрешности. Так, например, после автоматической селекции “интересных” событий в LHC скорость их счёта составляет порядка сотен в секунду (до селекции – порядка сотен миллионов в секунду), что соответствует передаче информации на скорости приблизительно 1 ГБ/с. Дальнейший анализ оставляет на обработку намного меньше интересующих событий: за период работы с 2011 по 18 июня 2012 года количество собранных данных с детектора CMS позволило обнаружить лишь около 800-900 взвешенных по отношению сигнал-шум событий с инвариантной массой  $m_{\gamma\gamma} \approx 125$  GeV,

соответствующих бозону Хиггса [2], но при этом погрешность была достаточно малой для утверждения об обнаружении ранее не наблюдавшейся частицы.

## 1.2 Модель кварк-глюонных струн в КХД

Квантовая хромодинамика (КХД) возникла в результате развития кварковой модели [3], и на данный момент является общепризнанной теорией сильных взаимодействий. Идея КХД заключается в присвоении кваркам так называемого цветового заряда, отвечающего за сильное взаимодействие подобно электрическому – за электромагнитное. Всего цветовых зарядов три (плюс три антицвета): красный, зелёный и синий (и парные антикрасный, антизелёный и антисиний соответственно). Характерная особенность сильного взаимодействия заключается в конфайнменте – невозможности существования кварков по отдельности: данные частицы могут быть лишь в “обесцвеченной” (“белой”) совокупности (обесцвечивание происходит по закону аддитивного смешения цветов, например, красного с зелёным и синими или зелёного с антизелёным). Причиной конфайнмента служит возрастание энергии поля сильного взаимодействия при отдалении кварков друг от друга, в отличие от того же электромагнитного поля. Стоит отметить также, что “цвета” кварков – лишь удобная репрезентация группы  $SU(3)$ , классифицирующей адроны, и не имеют отношения к оптическим цветам.

Столкновения ядер в коллайдере можно разделить на две категории: мягкие и жёсткие. При жёстком рассеянии частицы встречных ядер сталкиваются “лоб в лоб”, порождая так называемые адронные струи с большим поперечным импульсом  $p_t$  [4]. До недавних пор физики принимали в расчёт только эту категорию столкновений, воспринимая мягкое рассеяние как возмущение. Важно также отметить, что расчёты в рамках жёсткой области можно проводить из первичных принципов, используя модели столкновений частиц как шаров. Позже было выяснено, что рассеяние в мягкой области нельзя свести к возмущению, так как на малых масштабах нарушаются сильные связи между партонами [5, 6].

С точки зрения феноменологии удобной описательной моделью мягкой адронизации является модель цветных кварк-глюонных струн [7–10]. Суть модели заключается в понимании кварк-глюонного поля в партонном облаке как совокупности струн, связывающих эти партоны. В момент столкновения двух ядер струны из встречных партонных облаков переплетаются, натягиваются и рвутся (фрагментируют); “обрывки” струн при этом вследствие конфайнмента рекомбинируют в адроны (см. рис. 1 в приложении).

## 1.3 Слияние струн

Множественность рождённых в столкновении адронов напрямую зависит от энергии налетающих частиц и от центральности столкновения. Пусть все рассматриваемые столкновения центральны, тогда чем больше энергия, тем больше струн – следовательно, процесс фрагментации более интенсивный. Это суть следствие из связи количества струн с количеством морских кварков [11]. Однако, при ядро-ядерных столкновениях на энергиях порядка ЛНС плотность струн может оказаться столь высокой, что приходится прибегать к нелинейным поправкам, вызванным эффектом взаимодействия струн между собой [12].

Для случая рассеяния тяжелых ядер М.А. Брауном и К. Пахаресом была предложена модификация струнной модели, учитывающая процессы возможного слияния первичных струн до начала процесса их фрагментации [13–16]. Слившиеся струны образуют так называемые кластеры (совокупности слившихся струн, отдельные от других подобных совокупностей), а множественность адронов зависит от параметров того или иного кластера, причём чем больше плотность струн (больше энергия), тем слабее прирост плотности струн влияет на прирост значения средней множественности [17]: адронизация происхо-

дит от одной большой “струны” вместо суммы составляющих её. Стоит отметить, что учёт нелинейности можно определять как при локальном сложении полей (локальное слияние), так и при сложении по всему поперечному сечению каждого кластера (глобальное слияние) [17].

За счёт слияния струн могут меняться корреляции множественности ( $nn$ ) и поперечного импульса ( $p_t p_t$ ) адронов в переднем и заднем быстротных окнах, возникающие благодаря флуктуациям числа участников столкновения (в струнной модели – числа струн). Причём на корреляции  $p_t p_t$  учёт кластеризации струн оказывает большее влияние, нежели на  $nn$  [17, 18]. Связано это с тем, что усреднённая по событию величина  $\langle p_t \rangle$  является интенсивной, в отличие от экстенсивной  $\langle n \rangle$ , и поэтому практически не зависит от числа струн, принимая малые значения при отбрасывании эффекта слияния. Однако, если кластеризацию учесть, начнут проявляться ощутимые отклонения  $\langle p_t \rangle$  от нуля, влекущие за собой наличие  $p_t p_t$  корреляций.

## 1.4 Генераторы событий Монте-Карло в мягкой области

В качестве компьютерной симуляции физики мягкой области рассеяния используются “Монте-Карловские генераторы” [19, 20] – пакеты программ, использующие, к примеру, модель кварк-глюонных струн для воспроизведения процесса адронизации. Примером такой программы может послужить широко используемый в теоретическом анализе инструмент Pythia. Данная программа использует решёточные симуляции [21, 22]: моделируется поперечное сечение ядро-ядерного столкновения, в котором происходит наложение распределённых сечений участвующих в адронизации струн. По измерениям площадей этих сечений и плотности струн можно рассчитывать  $nn$ ,  $p_t p_t$  и  $p_t n$  корреляции в различных быстротных окнах.

## 1.5 Постановка задачи

При всей удобности и высокой скорости расчётов решёточных симуляций интересно также рассмотреть более детальный подход: вместо дискретной решётки использовать непрерывную область сечения, так как непрерывная область позволяет точнее смоделировать сечение, что влечёт за собой более качественную проверку теории. Именно такой подход был использован для определения и исследования  $nn$  и  $p_t p_t$  корреляций в данной работе.

Результатом данной работы является качественное и количественное сравнение  $nn$  и  $p_t p_t$  корреляций в переднем и заднем (FB – Forward-Backward) быстротных окнах с учётом слияния струн и без, определение влияния учёта эффекта слияния струн на множественность адронов, а также сравнение результата с выкладками из [23] и [24].

# 2 Разработка генератора событий

## 2.1 План разработки и расчётов

Для реализации генератора решено использовать объектно-ориентированный подход с целью обеспечить удобство дальнейших усовершенствований программы. В самой программе первоначально генерируется некоторое количество поперечных сечений струн в виде кругов фиксированного радиуса по заданному распределению (радиус струн соответствует параметрам распределения пропорционально реальному масштабу), затем производятся необходимые расчёты. Принципиальная схема работы программы представлена

на рис. 2 в приложении. Также в приложении (рис. 3) представлена визуализация генерируемых струн.

Для расчёта корреляций множественности и поперечного импульса адронов в переднем и заднем быстротных окнах (всюду далее величина корреляционного коэффициента будет обозначаться как  $b$ ) необходимо сгенерировать соответственно значения множественности  $n$  по сгенерированным струнами и значения поперечного импульса  $p_t$  по струнной конфигурации и полученным значениям множественности. В качестве реализации учёта эффекта слияния струн  $n$  и  $p_t$  рассчитывается из плотности наложения (пересечения) струн друг на друга подсчётом количества струн в отдельно взятом кластере, а также подсчётом поперечной площади данного кластера (как наиболее физичное далее рассматриваться будет только глобальное слияние).

Таким образом, разработка генератора разбивается на четыре этапа в порядке возрастания сложности, причём каждый следующий этап нуждается в завершённости предыдущих:

1. Генерация струн.
2. Поиск кластеров.
  - 2.1. Подсчёт количества струн в каждом кластере.
  - 2.2. Вычисление площади каждого кластера.
3. Генерация значений множественности и поперечного импульса.
4. Расчёт FB корреляций множественности и поперечного импульса с учётом и без учёта слияния струн.

## 2.2 Выбор среды разработки

Первоначально в качестве языка разработки был выбран MATLAB как очень удобный инструмент для быстрой и качественной реализации вычислительных алгоритмов. С помощью MATLAB были преодолены первые два этапа разработки, пока не был выявлен существенный недостаток данного решения – слишком невысокая скорость расчётов по сравнению с более низкоуровневыми языками программирования, такими как C++ (приблизительно в 15-25 раз медленнее). На последнем впоследствии было заострено внимание, и далее было принято решение остановиться на нём для дальнейшей разработки.

Скорость расчётов и оптимизация кода особенно важна в данной работе, так как предполагается расчёт большого количества симуляций. Так, в программе была задействована технология OpenMP, позволяющая создавать многопоточные приложения.

## 2.3 Структура программы

Программа состоит из класса “Simulation”, представляющего собой модель одной симуляции, и “оболочки”, которая необходимое количество раз повторяет объект-симуляцию с загружаемым в неё извне средним количеством струн  $\langle N \rangle$ . Само значение  $\langle N \rangle$  находится из значения параметра  $\langle \eta \rangle$  (средняя плотность струн) через соотношение

$$\langle \eta \rangle = \frac{\langle N \rangle \sigma_0}{S}, \quad (1)$$

где  $\sigma_0$  – площадь одной струны,  $\sigma_0 = \pi r_s^2$ ,  $r_s = 0.2 \div 0.3$  фм – радиус струны;  $S$  – общая площадь взаимодействия в поперечном сечении. Так, для энергий RHIC значение  $\langle \eta \rangle \approx 3$ , а для LHC  $\langle \eta \rangle \approx 11$  [25].

Класс симуляции состоит из нескольких основных (см. листинг 1 в приложении) и вспомогательных (листинг 2 в приложении) функций-методов. Каждый из основных методов класса выполняется один раз за симуляцию в соответствии с порядком в листинге. Описание данных методов следует ниже по порядку.

### 2.3.1 Генерация струн

Чтобы сгенерировать струны, изначально следует задать их количество  $N$ . Для проверки корректности работы программы на этапах 1-3 достаточно полагать  $N = \langle N \rangle$ , а для расчёта  $b$  (4 этап) решено генерировать  $N$  с помощью распределения Пуассона с математическим ожиданием равным  $\langle N \rangle$ , что должно смоделировать реалистичный разброс  $N$  от события к событию:

$$f(N) = \frac{\langle N \rangle^N}{N!} e^{-\langle N \rangle}. \quad (2)$$

В качестве функций плотности распределения (PDF) координат струн в зависимости от того или иного расчёта берётся равномерное непрерывное распределение в круге, или же более физичное параболическое распределение, приближающее гауссово:

$$z = \frac{2}{\pi}(-x^2 - y^2 + 1), \quad (3)$$

где  $2/\pi$  – нормировочный множитель. Выбор распределения влияет также на определение площади взаимодействия: так, при равномерной PDF и максимальной центральности столкновения (в данной работе рассчитываются именно такие события) достаточно полагать  $S = \pi R^2$  (площадь взаимодействия – сечение ядра), где  $R$  – радиус ядра (7.5 фм), но при расчётах с параболическим распределением лучше брать  $S$  как сумму площадей всех кластеров. Объяснение этому следующее: главным результатом является расчёт коэффициентов корреляции и сравнение их с теоретической асимптотой [24] при  $\langle \eta \rangle = 5 \div 11$ ; при данных плотностях, как правило, почти все струны уже слипаются в единый большой кластер, и, в то время как при равномерном распределении площадь этого кластера примерно равна площади ядра в поперечном сечении, при параболической PDF струны плотнее лежат к центру, оставляя некоторое пространство на периферии сечения ядра. Таким образом, сечение ядра не всегда можно считать площадью взаимодействия.

Неравномерная генерация координат струн происходит методом Неймана как универсальным методом генерации значений случайной величины по любой функции плотности распределения (в перспективе – использование в качестве PDF довольно сложный потенциал Вудса-Саксона, поэтому использование метода Неймана оправдано). Метод Неймана заключается в следующем: на бруске, полностью покрывающем носитель функции плотности распределения  $f(x)$ , равномерно разыгрывается число  $A$ ; затем равномерно разыгрывается число  $B$  от 0 до 1, и если  $B < f(A)$ , то  $A$  утверждается как величина, распределённая по  $f(x)$ .

### 2.3.2 Заполнение графа и нахождение компонент связности; поиск максимальной компоненты

Граф пересечений струн представляет из себя симметричную матрицу  $N \times N$ , заполненную номерами струн, которые пересекаются со струной с номером соответствующей строки или столбца, либо нулевых элементов (в случае, если струна под номером столбца или строки не пересекается ни с какой другой). Факт пересечения двух струн равносильен тому, что расстояние между их центрами меньше либо равно двум радиусам одной струны  $2r_s$  (проверяется с помощью 5-й вспомогательной функции из листинга 2 в приложении).

Для определения кластеров ищутся компоненты связности графа. Здесь используется метод Depth-first search: в качестве первой компоненты связности берётся первая струна  $s_1$ , затем производится поиск пересечённых с ней струн  $\{s'_i\}$  и берётся первая пересечённая струна  $s'_1$ , далее ищутся струны  $\{s''_i\}$ , пересечённые с  $s'_1$ , и так далее, пока пересечённых струн не останется (до  $s_1^{(n)}$ ); эта же процедура проводится для  $s_2^{(n-1)}$  и всех остальных из  $\{s_i^{(n-1)}\}$ , из  $\{s_i^{(n-2)}\}$  и так далее до самой  $s'_2$ . Одновременно “проверенные” струны вычёркиваются из списка поиска, и следующая компонента связности ищется по струне  $s_j$ , где  $j > 1$  – первый номер струны, не вошедшей в первую компоненту. Проще говоря, каждую компоненту связности можно представить как куст, состоящий из веток, веток этих веток и т.д. до самых листьев, а метод Depth-first search – счётчик узлов веток (листья тоже считаются узлом – на поверхности). Если этот счётчик установить в каком-нибудь узле внутри куста, то он будет на каждом шаге стремиться к листьям, чтобы посчитать сначала узлы на поверхности, затем уйдёт на первый слой узлов, предшествующий листьям, потом на второй и далее до самого глубокого слоя, где остановится. Слово “Depth” в названии метода произошло из терминологии в теории графов: глубокими уровнями компоненты называются именно поверхностные уровни куста. Наглядная схема начала обхода небольшого графа представлена на рис. 4 в приложении. Помимо неё в приложении представлен код, реализующий алгоритм поиска компонент методом DFS (листинг 3).

### 2.3.3 Количество струн в кластере и его площадь

Количество струн  $N_k$  в кластере находится как длина массива компоненты связности, соответствующей данному кластеру. Таким образом, например, можно найти кластер с максимальным количеством струн  $N_{cl}$ , которым будет являться самый длинный массив из всех компонент связности – данный приём понадобится для некоторых тестов программы на первых этапах разработки.

Менее тривиальной задачей является вычисление площади кластера  $S_k$ . Здесь на помощь приходит метод Монте-Карло вычисления площадей фигуры произвольной формы: фигурой в данном случае является граничный контур наложенных друг на друга кругов-струн. Суть метода в следующем: на прямоугольник, покрывающий фигуру, разбрасывается сетка из точек, и тогда площадь фигуры примерно равна площади прямоугольника, помноженной на отношение количества попавших на фигуру точек к количеству не попавших.

### 2.3.4 Генерация множественности вперёд-назад

С помощью описанных выше методов сперва вычисляется площадь каждого кластера  $S_k$  и количество струн в них  $N_k$ . Следуя [17], средняя множественность  $\langle n \rangle_k$  для  $k$ -го кластера (как было отмечено ранее, рассматривается случай глобального слияния) в данном быстрой интервале вычисляется как

$$\langle n \rangle_k = \mu_0 \frac{S_k}{\sigma_0} \sqrt{l_k}, \quad l_k = \frac{N_k \sigma_0}{S_k}, \quad (4)$$

где  $\sigma_0$  – площадь одной струны,  $\mu_0$  – средняя множественность от одной струны в данном быстрой интервале. Для единичного интервала быстрой  $\mu_0 = 1.1$  в соответствии с [26] (в дальнейших расчётах бралось  $\mu_0 = 1$ ). Формулу 4 можно упростить до

$$\langle n \rangle_k = \mu_0 \sqrt{\frac{N_k S_k}{\sigma_0}}, \quad (5)$$

подставив явно выражение для  $l_k$  в выражение для  $\langle n \rangle_k$ .



Найденное значение  $\langle n \rangle_k$  показывает лишь среднее число частиц, рождённых кластером  $k$ . Пусть в симуляции  $i$  кластер  $k$  имеет среднее значение множественности  $\langle n \rangle_{ki}$ . Для генерации значения множественности в переднем  $n_{ki}^F$  и заднем  $n_{ki}^B$  быстротных окнах используется распределение Пуассона с математическим ожиданием равным  $\langle n \rangle_{ki}$ . Таким образом, для каждого кластера получается своя выборка значений  $n_{ki}^F$  и  $n_{ki}^B$ , эти выборки суммируются для каждого события

$$\begin{aligned} n_i^F &= \sum_{k=1}^{M_i} n_{ki}^F, \\ n_i^B &= \sum_{k=1}^{M_i} n_{ki}^B, \end{aligned} \tag{6}$$

где  $n_i^F$  и  $n_i^B$  – FB множественности в событии  $i$ ,  $M_i$  – количество кластеров в событии  $i$ . Стоит отметить, что, так как речь идёт о каком-то отдельном событии, данные вычисления проводятся для фиксированного параметра  $\eta$ , сгенерированного для данного события.

Представленный способ генерации множественности используется для ситуаций, где требуется учесть влияние слияния струн. Данные выкладки легко преобразуются для ситуаций, где требуется расчёт без учёта слияния: в этом случае  $M_i = N_i$  (чисто струн в событии  $i$ ),  $N_k = 1$ ,  $S_k = \sigma_0$ , а значит,  $\langle n \rangle_{ki} = \mu_0$ .

### 2.3.5 Генерация поперечного импульса вперёд-назад

В соответствии с [24] значения поперечного импульса генерируются не поочерёдно для каждого кластера, а сразу для всего события. Для этого необходимо знать вычисленные по описанной выше схеме значения  $n_{ki}^F$  и  $n_{ki}^B$ . Тогда значения  $(p_t)_i^F$ ,  $(p_t)_i^B$  в соответствии с формулами 6.137-6.138 из [24] (согласно центральной предельной теореме, распределение  $(p_t)_i^F$  и  $(p_t)_i^B$  является гауссовым, так как данные величины являются суммой поперечных импульсов частиц из кластеров – то есть величин, распределённых одинаково) распределены по гауссу, то есть функция распределения выглядит следующим образом (с точностью до замены F на B):

$$\begin{aligned} f((p_t)_i^F) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{(p_t)_i^F}} \exp \left( -\frac{((p_t)_i^F - \overline{(p_t)_i^F})^2}{2(\sigma_{(p_t)_i^F})^2} \right), \\ \overline{(p_t)_i^F} &= \frac{\bar{p}}{n_i^F} \sum_{k=1}^{M_i} n_k \sqrt{\eta_k} = \bar{p} \cdot p_\Sigma, \\ \sigma_{(p_t)_i^F}^2 &= \frac{\sigma_p^2}{(n_i^F)^2} \sum_{k=1}^{M_i} n_k \sqrt{\eta_k} = \sigma_p^2 \cdot \sigma_\Sigma^2, \end{aligned} \tag{7}$$

где  $\overline{(p_t)_i^F}$  и  $\sigma_{(p_t)_i^F}$  – среднее и корень из дисперсии величины  $(p_t)_i^F$ ;  $\bar{p}$  и  $\sigma_p^2$  – некоторые константы, которые, согласно [24], связаны соотношением  $\sigma_p^2 = \gamma \bar{p}$ ; для расчётов бралось  $\gamma = 1/\sqrt{2}$ . Для расчётов корреляционного коэффициента  $b$  можно не задавать явно  $\overline{(p_t)_i^F}$

и  $\sigma_{(p_t)_i^F}$ , а достаточно преобразовать распределение 7, вынеся  $\overline{(p_t)_i^F}$  и  $\sigma_{(p_t)_i^F}$  из

$$\begin{aligned} f\left(\frac{(p_t)_i^F}{\bar{p}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p\sigma_\Sigma} \exp\left(-\frac{\bar{p}^2\left(\frac{(p_t)_i^F}{\bar{p}} - p_\Sigma\right)^2}{2\sigma_p^2\sigma_\Sigma^2}\right) \Rightarrow \\ f\left(\frac{(p_t)_i^F}{\bar{p}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p\sigma_\Sigma} \exp\left(-\frac{\left(\frac{(p_t)_i^F}{\bar{p}} - p_\Sigma\right)^2}{2\gamma^2\sigma_\Sigma^2}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

и тогда можно задать только  $\gamma$ , так как при расчёте  $b$ , как будет описано далее, входит только частное статистически равных величин, распределённых по формуле 8.

### 2.3.6 Расчёт корреляционного коэффициента

Выборки значений  $\{(n_F)_i\}$ ,  $\{(n_B)_i\}$ ,  $\{(p_F)_i\}$  и  $\{(p_B)_i\}$  непосредственно используются в расчёте  $b$  с помощью вспомогательного метода 1 (см. листинг 2 в приложении). Для фиксированного  $\langle\eta\rangle$  в соответствии с [23] величина  $b$  находится как

$$\begin{aligned} b_{nn} &= \frac{\langle n_F n_B \rangle - \langle n_F \rangle \langle n_B \rangle}{\langle n_F^2 \rangle - \langle n_F \rangle^2}, \\ b_{p_t p_t} &= \frac{\langle p_F p_B \rangle - \langle p_F \rangle \langle p_B \rangle}{\langle p_F^2 \rangle - \langle p_F \rangle^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где усреднение происходит по всем симуляциям. Финальной проверкой корректности расчётов является сравнение значений  $b$  с теоретическими асимптотами из [24]:

$$\begin{aligned} b_{nn} &= \frac{1}{1 + 4 \cdot \sqrt{\langle\eta\rangle}}, \\ b_{p_t p_t} &= \frac{1}{1 + 16 \cdot \gamma^2 \cdot \sqrt{\langle\eta\rangle}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\gamma^2$  – такое же, как было описано выше, то есть  $\gamma = 1/\sqrt{2}$ .

## 3 Результаты расчётов

### 3.1 Перколяционный переход

#### 3.1.1 Равномерное распределение струн

Как указано выше, первоначально алгоритм расчётов был реализован в среде MATLAB. Функции, которые были применены в разработке на этом языке, аналогичны описанным выше для C++ за исключением уже встроенной в MATLAB функции `conncomp(G)`, возвращающей компоненты связности графа  $G$ .

С помощью MATLAB первые два этапа работы были преодолены с положительным результатом. Данный результат заключается в наблюдении так называемого “перколяционного перехода”: фазового перехода кластеризации, при котором в некоторой области  $[\eta, \eta + \Delta\eta]$  резко возрастает размер максимального кластера при малом увеличении  $\eta$ , где под “размером” максимального кластера подразумевается как количество струн в нём  $N_{cl}$ , так и его площадь  $S_{cl}$  – расчёт проведён для обеих величин. Для наблюдения перколяционного перехода достаточно положить  $\eta = \langle\eta\rangle$  и  $N = \langle N \rangle$ , поэтому для данного расчёта

угловые скобки опущены. Также для простоты кода радиус струны и радиус ядра были пропорционально уменьшены до 1 и 0.03 условных единиц соответственно.

С целью наблюдения вышеописанного явления удобно построить нормированные графики зависимостей  $N_{cl}/N$  и  $S_{cl}/S$  от  $\eta$ , что и было сделано (рис. 5 и 6 в приложении) для небольшого количества симуляций. На обоих графиках можно выделить три интервала: при  $\eta$  от 0 до  $0.2 \div 0.3$ ;  $\eta$  от  $0.2 \div 0.3$  до  $1.8 \div 1.9$ ;  $\eta$  от  $1.8 \div 1.9$  до 10.2. Первый интервал соответствует ситуации малой плотности струн в области взаимодействия, из-за чего они редко перекрываются, образуя кластеры. В данной области значение  $N_{cl}$  близко к 1, в то время как  $N$  растёт, что приводит к образованию небольшой “ямки” на графике в данной области значений  $\eta$ . Далее по мере роста  $N$  и приближения ко второму интервалу происходит уплотнение струн в области взаимодействия и воссоединение небольших кластеров, причём каждая новая струна может соединить один или несколько максимальных кластеров в один значительно больший кластер (например, три близких кластера из 20 струн каждый могут соединиться добавленной струной в кластер из 61 струны); и такая соединительная струна может попасться в любой симуляции при заданном  $N$ , что вызывает довольно большую погрешность значений  $N_{cl}/N$  и  $S_{cl}/S$  во втором интервале значений  $\eta$ . В третьем интервале происходит своеобразное насыщение: при больших  $N$  струны всё плотнее заполняют область взаимодействия, сливаясь в единственный большой кластер; как следствие,  $N_{cl} \rightarrow N$  и  $S_{cl} \rightarrow S$ .

### 3.1.2 Параболическое распределение

Несмотря на высокую скорость разработки подобных математических программ в MATLAB, их производительность получается очень низкой ввиду высокого уровня абстракции языка, влекущей сильную перегруженность машинного кода. Так, на расчёт 60-ти симуляций с вычислением  $S_{cl}/S$  для множества  $\eta$  ушло 1-2 часа. Так как далее расчёты будут только сложнее, а симуляций потребуется почти в тысячи раз больше, было принято решение переписать алгоритмы на C++ и работать дальше только с ним.

Для ещё большей уверенности в корректности работы программы были проведены расчёты зависимости  $N_{cl}/N$  и  $S_{cl}/S$  от  $\eta$  при разбрасывании струн в область взаимодействия не равномерно, а с помощью параболического распределения (формула 3). Соответствующие графики приведены на рис. 7 и 8 в приложении. Можно заметить, что область перколяционного перехода теперь не такая резкая, какой была при вычислениях с равномерным распределением. Данный результат связан с тем, что, так как струны разыгрываются теперь плотнее к центру, единый большой кластер начинает образовываться при меньших значениях  $\eta$ , но при всём вышесказанном это уплотнение препятствует быстрому насыщению, группируя много струн в центре и оставляя периферию области взаимодействия для образования небольших кластеров, тогда как при равномерном распределении все струны сцепляются и нигде не накапливаются. Погрешности  $\Delta\eta$  (см. таблицу 3 в приложении) связаны с непостоянным значением  $\eta$  для каждого события из-за разброса значений площади взаимодействия  $S$ , вычисляемой для расчёта с параболическим распределением не как площадь единичного круга, а как суммарная площадь всех кластеров, так как даже при больших  $\eta$  площадь взаимодействия может быть меньше площади единичного круга из-за уплотнения струн.

С помощью программы было проведено 3638 симуляций с вычислением как  $N_{cl}/N$ , так и  $S_{cl}/S$ , и на оба расчёта ушло 5 часов суммарно. Это значит, что расчёт 60 симуляций занял бы приблизительно 5 минут, что намного быстрее вычислений в MATLAB.

### 3.2 Учёт слияния струн до адронизации

Описанные выше результаты получены благодаря преодолению первых двух этапов разработки. Чтобы пронаблюдать явно учёт влияния кластеризации на множественность адронов в событии и проверить слова из [17], необходимо работать уже с третьим этапом. Всюду далее в вычислениях используется равномерное распределение струн по области взаимодействия.

Описанный выше процесс генерации множественности в программе используется для сравнения множественности адронов  $\langle n_f \rangle$  (f – fusion), рождённых каждым кластером в совокупности событий, с множественностью  $\langle n_{nf} \rangle$  (nf – no fusion), полученную от каждой струны по отдельности (усреднение данных величин ведётся по совокупности событий при фиксированной величине  $\eta$ ). Сравнение можно провести при помощи графика зависимости  $\langle n_f \rangle / \langle n_{nf} \rangle$  от  $\eta$  (рис. 9). На данном графике отчётливо наблюдается монотонное убывание отношения  $\langle n_f \rangle / \langle n_{nf} \rangle$  при значениях  $\eta$  характерных для перколяционного перехода и выше, что свидетельствует об ослаблении влияния увеличения количества струн на прирост множественности при учёте их слияния. При этом в области низких плотностей струн данное отношение близко к единице, что вполне естественно, так как струны перекрываются редко.

### 3.3 Вычисление корреляционного коэффициента

Теперь, когда появилась возможность генерировать множественности (а значит, и поперечные импульсы), можно приступить к 4 этапу – расчётам коэффициентов корреляции  $b_{nn}$  и  $b_{p_t p_t}$ . Важно отметить, что количество струн здесь разыгрывалось по функции вероятности Пуассона (см. формулу 2), поэтому  $\eta$  и  $\langle \eta \rangle$ , вообще говоря, различны.

Значения множественности  $n_F$  и  $n_B$  (и  $p_F$  и  $p_B$ ) для каждого события подставляются в формулы 9, затем строятся графики зависимости  $b(\langle \eta \rangle)$ . Полученные графики представлены на рис. 10 и 11 в приложении; значения  $\langle \eta \rangle \approx 3$  соответствует энергиям RHIC, а  $\langle \eta \rangle \approx 11$  – LHC. Как можно заметить, учёт кластеризации достаточно сильно влияет на поведение  $b$ : количественно различие  $b_{\text{fusion}}$  и  $b_{\text{no fusion}}$  можно выразить средним процентным соотношением  $\langle D \rangle$  (как для  $b_{nn}$ , так и для  $b_{p_t p_t}$ ):

$$\langle D \rangle = \left\langle 1 - \frac{\min(b_{\text{fusion}}, b_{\text{no fusion}})}{\max(b_{\text{fusion}}, b_{\text{no fusion}})} \right\rangle, \quad (11)$$

усреднение ведётся по всем  $\langle \eta \rangle$ ; тогда для проведённых симуляций  $\langle D \rangle_{nn} = 40.7\%$ , а  $\langle D \rangle_{p_t p_t} = 97.7\%$ .

В качестве проверки правильности вычисления  $b$  программой можно рассмотреть график зависимости  $b(\langle \eta \rangle)$  (к примеру, для  $nn$ -корреляций) при симуляциях с  $N = \langle N \rangle$ , т.е. вместо равномерно распределённого значения  $N$  взять среднее. Ожидается, что в таком случае коррелятор  $b$  будет близок к нулю, так как при расчётах с фиксированным  $N$  корреляции наблюдать невозможно, и числитель в формуле 6 становится малым. Действительно, первое слагаемое в числителе можно расписать как

$$\langle n_F n_B \rangle = \langle n_F \rangle \langle n_B \rangle + K_{n_F n_B}, \quad K_{n_F n_B} = \langle (n_F - \langle n_F \rangle)(n_B - \langle n_B \rangle) \rangle,$$

где  $K_{n_F n_B}$  – корреляционный момент случайных величин  $n_F$  и  $n_B$ , тогда второе слагаемое в числителе сократится с первым из выражения  $\langle n_F n_B \rangle$ , и останется лишь  $K_{n_F n_B}$ . При постоянном  $N$  в каждой симуляции величины  $n_F$  и  $n_B$  становятся независимыми, так как генерируются последовательно для одной и той же конфигурации кластеров технически независимо, следовательно

$$K_{n_F n_B} = \langle (n_F - \langle n_F \rangle)(n_B - \langle n_B \rangle) \rangle = \langle n_F - \langle n_F \rangle \rangle \langle n_B - \langle n_B \rangle \rangle = 0.$$

Из графика зависимости  $b(\langle\eta\rangle)$  (симуляции проведены с учётом слияния струн) в приложении (рис. 12) видно, что на практике вышеуказанное предположение выполняется.

Вычисления  $b(\langle\eta\rangle)$  в случае со слиянием струн занимали приблизительно 2 часа для 10000 симуляций, а в случае без слияния – около 2 минут, тоже для 10000. Столь большая разница в скоростях расчёта связана с отсутствием необходимости во втором случае вводить граф пересечений струн и пресчитывать кластеры.

## 4 Заключение

Феноменологическая модель кварк-глюонных струн неоднократно доказывала свою превосходную адекватность описания хромодинамических процессов, происходящих в мягкой области рассеяния ультрарелятивистских ядер. Её важность для более глубокого понимания принципов Стандартной модели неоспорим, так как она хорошо описывает взаимодействие одного кварк-глюонного поля с другими.

В данной работе приведены результаты модельного теоретического анализа рассеяний ультрарелятивистских ядер при высоких энергиях порядка RHIC (200 ГэВ), LHC (13 ТэВ). Для получения этих результатов была постепенно, в 4 этапа, разработана специальная программа – генератор событий – моделирующая поперечное сечение столкновения ядер в виде непрерывно распределённых сечений струн фиксированного радиуса, а также проводящая расчёты множественности рождённых адронов и их корреляций, выражаемых корреляционными коэффициентами  $b$ , в переднем и заднем быстротных окнах с учётом слияния (пересечения) данных струн и без. Результатами являются построенные графики зависимости  $\langle n_f \rangle / \langle n_{nf} \rangle$  от  $\langle \eta \rangle$  – для проверки ослабления зависимости множественности в одном событии от изменения числа струн в сечении при большом количестве этих струн и зависимости корреляционных коэффициентов  $b_{nn}$  и  $b_{p_t p_t}$  от  $\langle \eta \rangle$  – для проверки влияния учёта кластеризации струн на FB-корреляции множественности; величина  $\langle \eta \rangle$  играет роль средней плотности струн в области взаимодействия. Из вида этих графиков можно сделать два вывода:

1. При учёте слияния струн усреднённая по событиям при фиксированном  $\langle \eta \rangle$  множественность адронов действительно получает более слабый прирост при увеличении плотности струн на больших значениях  $\langle \eta \rangle$  (таких, что почти вся область взаимодействия покрыта струнами, слившимися в один кластер).
2. Корреляционные коэффициенты  $b_{nn}$  и  $b_{p_t p_t}$ , как и ожидалось, сильно зависят от введения учёта слияния струн: количественное различие как среднее процентное соотношение составляет  $\langle D \rangle_{nn} = 40.7\%$ ,  $\langle D \rangle_{p_t p_t} = 97.7\%$ .

Таким образом, основные поставленные задачи были выполнены.

Разработка генератора на текущий момент ещё не закончена. В перспективе планируется использование более реалистичных распределений струн (например, потенциал Вудса-Саксона), введение переменной центральности столкновений, а также оптимизация кода.

## 5 Список литературы

- [1] D. Perret-Gallix (2013). *Computational Particle Physics for Event Generators and Data Analysis*. J. Phys. Conf. Ser. **454**. 012051 arXiv:1301.1211
- [2] L. Taylor (2012). *Observation of a New Particle with a Mass of 125 GeV*. CMS Experiment, CERN <http://cms.web.cern.ch/news/observation-new-particle-mass-125-gev>
- [3] F.J. Yndurain (1993). *Quantum Chromodynamics: An Introduction to the Theory of Quarks and Gluons*. ISBN 978-3-540-33210-7
- [4] S. Sapeta (2016). *QCD and Jets at Hadron Colliders*. Prog. Part. Nucl. Phys. **89**. 1-55 arXiv:1511.09336
- [5] E. Nurse (2011). *Soft-QCD at Hadron Colliders* (slides). [http://www.hep.ucl.ac.uk/~mw/Post\\_Grads/2011-12/SoftQCDLecture.pdf](http://www.hep.ucl.ac.uk/~mw/Post_Grads/2011-12/SoftQCDLecture.pdf)
- [6] D.S. Cerci (2017). *Soft and Hard QCD Processes in CMS* (slides). [https://indico.cern.ch/event/614845/contributions/2728799/attachments/1529660/2398415/13\\_DSunarCerci.pdf](https://indico.cern.ch/event/614845/contributions/2728799/attachments/1529660/2398415/13_DSunarCerci.pdf)
- [7] A.A. Kaidalov (1982). *The quark-gluon structure of the pomeron and the rise of inclusive spectra at high energies*. Phys. Lett. B **116**. 459-463 [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90168-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90168-X)
- [8] A.A. Kaidalov, K.A. Ter-Martirosyan (1982). *Pomeron as quark-gluon strings and multiple hadron production at SPS-Collider energies*. Phys. Lett. B **117B**. 247-251 [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90556-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90556-1)
- [9] A. Capella, U. Sukhatme, Tan Chung-I, J. Tran Thanh Van (1979). *Jets in small- $p_T$  hadronic collisions, universality of quark fragmentation, and rising rapidity plateaus*. Phys. Lett. B **81**. 68-74 [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(79\)90718-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(79)90718-4)
- [10] A. Capella, U. Sukhatme, Tan Chung-I, J. Tran Thanh Van (1994). *Dual parton model*. Phys. Rep. **236**. 225-329 [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(94\)90064-7](https://doi.org/10.1016/0370-1573(94)90064-7)
- [11] G.I. Lykasov, M.N. Sergeenko (1996). *Semihard Hadron Processes and Quark-gluon String Model*. Z.Phys. **C70**. 455-462 arXiv:hep-ph/9502316
- [12] T.S. Biro, H.B. Nielsen, J. Knoll (1984). *Colour rope model for extreme relativistic heavy ion collisions*. Nucl. Phys. B **245**. 449-468 [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(84\)90441-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90441-3)
- [13] M.A. Braun and C. Pajares (1992). *Particle production in nuclear collisions and string interactions*. Phys. Lett. B **f287**. 154
- [14] M.A. Braun and C. Pajares (1993). *A probabilistic model of interacting strings*. Nucl. Phys. B **f390**. 542
- [15] N.S. Amelin, N. Armesto, M.A. Braun, E.G. Ferreira and C.Pajares (1994). *Long and Short Range Correlations: A Signature of String Fusion*. Phys. Rev. Lett. **f73** 2813
- [16] V.V. Vechernin, C. Pajares, M.A. Braun (2001). *Forward-backward multiplicity correlations, low  $p_T$  distributions in the central region and the fusion of colour strings*. CERN, Geneva. ALICE Collaboration. <http://cds.cern.ch/record/689450>

- [17] В.В. Вечернин, Р.С. Колеватов (2007). *О корреляциях множественности и  $p_t$  в столкновениях ультрарелятивистских ионов*. Ядерная физика **70** 1846-1857 <http://elibrary.ru/item.asp?id=9549732>
- [18] В.В. Вечернин, Р.С. Колеватов (2007). *Дальние корреляции между поперечными импульсами заряженных частиц в релятивистских ядерных столкновениях* Ядерная физика **70** 1858-1867 <http://elibrary.ru/item.asp?id=9549733>
- [19] S. Weinzierl (2000). *Introduction to Monte Carlo methods*. Topical lectures given at the Research School Subatomic Physics, Amsterdam, June 2000 arXiv:hep-ph/0006269
- [20] N. Srimanobhas (2010). *Introduction to Monte Carlo for Particle Physics Study* (slides). <https://indico.cern.ch/event/92209/contributions/2114409/attachments/1098701/1567290/CST2010-MC.pdf>
- [21] V.V. Vechernin, R.S. Kolevatov (2004). *Cellular Approach to Long-Range  $p_t$  and Multiplicity Correlations in the String Fusion Model*. Vestnik SPbU **ser.4, no.4**. 11-27 arXiv:hep-ph/0305136
- [22] V.V. Vechernin, R.S. Kolevatov (2004). *Simple Cellular Model of Long-Range Multiplicity and  $p_t$  Correlations in High-Energy Nuclear Collisions*. Vestnik SPbU **ser.4, no.2**. 12-23 arXiv:hep-ph/0305136
- [23] M.A. Braun, C. Pajares (2000) *Implication of percolation of colour strings on multiplicities, correlations and the transverse momentum*. Eur. Phys. J. **C16**. 349–359 arXiv:hep-ph/9907332
- [24] V.V. Vechernin (2005) *Кумулятивные явления и дальние корреляции во взаимодействиях с ядрами при высоких энергиях*. диссертация ... доктора физико-математических наук
- [25] J. Dias de Deus, A.S. Hirsch, C. Pajares, et al. (2012). *Clustering of color sources and the shear viscosity of the QGP in heavy ion collisions at RHIC and LHC energies*. Eur. Phys. J. C **72**:2123 <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-2123-x>
- [26] D. Kharzeev, M. Nardi (2001). *Hadron production in nuclear collisions at RHIC and high density QCD*. Phys. Lett. B **507** 121-128 arXiv:nucl-th/0012025

## 6 Приложение

### 6.1 Изображения

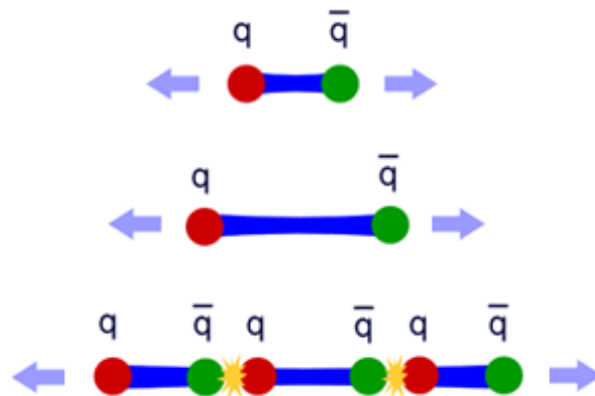


Рис. 1: Схема фрагментации кварк-глюонной струны при её натяжении с последующей адронизацией (прим.: разные цвета использованы не с целью изобразить цветовой заряд, а лишь для наглядности)

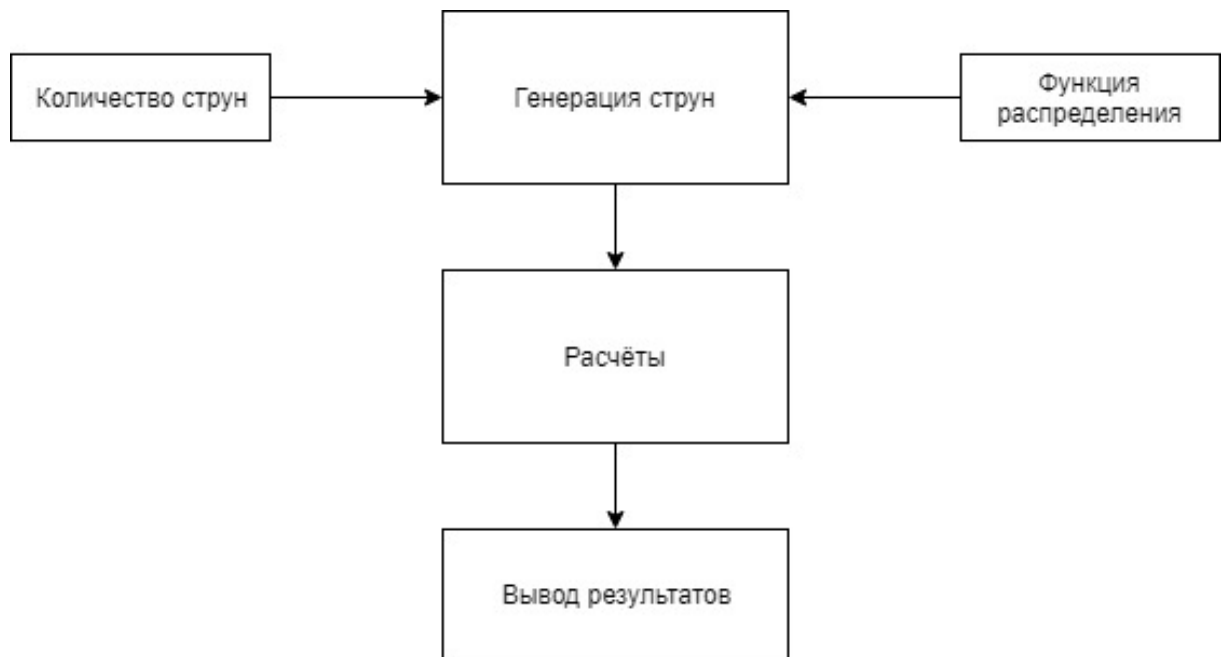


Рис. 2: Принципиальная схема работы генератора



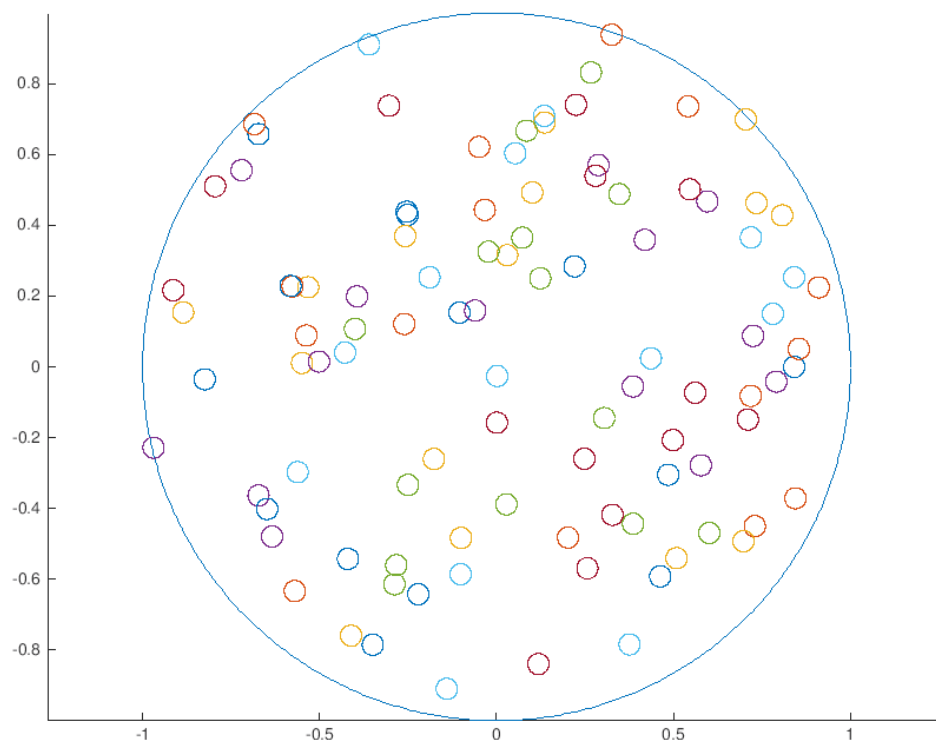


Рис. 3: Визуализация разыгрывания 100 струн при равномерном распределении в области единичного круга. Отношение радиуса круговой области к радиусу генерируемых струн примерно соответствует отношению радиуса реального ядра к радиусу реальных струн в поперечном сечении ( $7.5 \text{ фм}$  к  $0.2 \div 0.3 \text{ фм}$  соответственно)

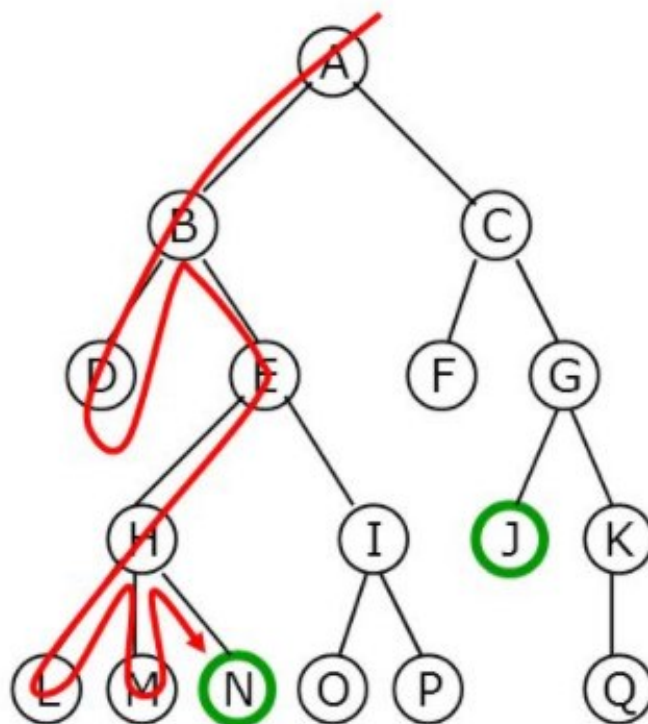


Рис. 4: Схема обхода графа методом Depth-first search

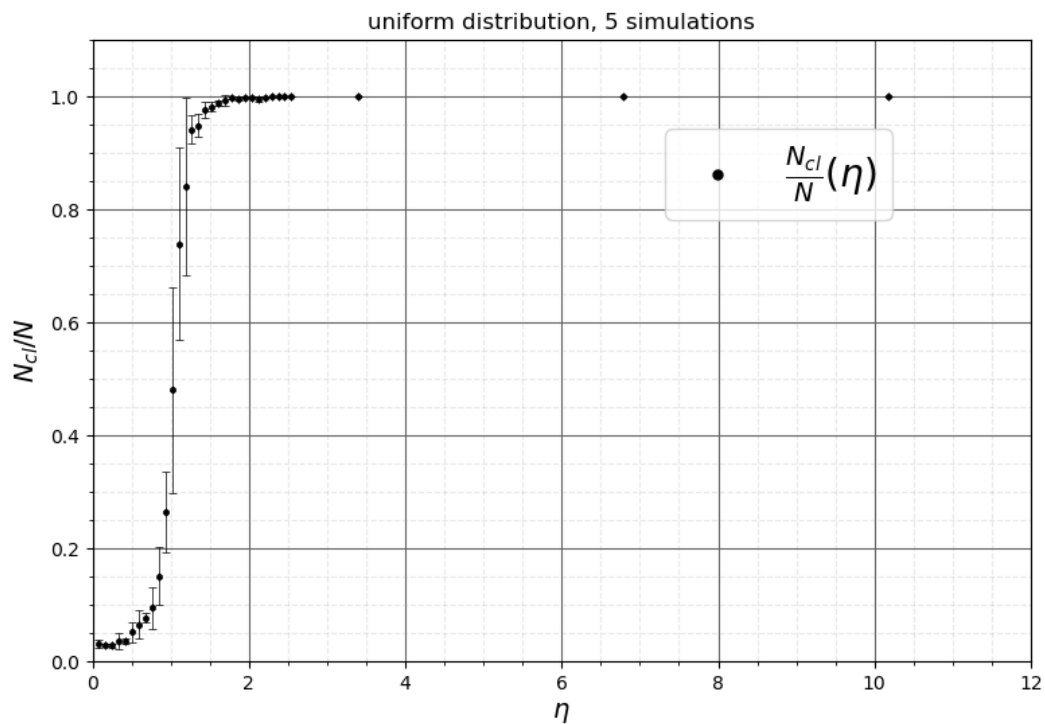


Рис. 5: График зависимости  $N_{cl}/N$  от  $\eta$  (MATLAB, усреднено по 5 симуляциям)

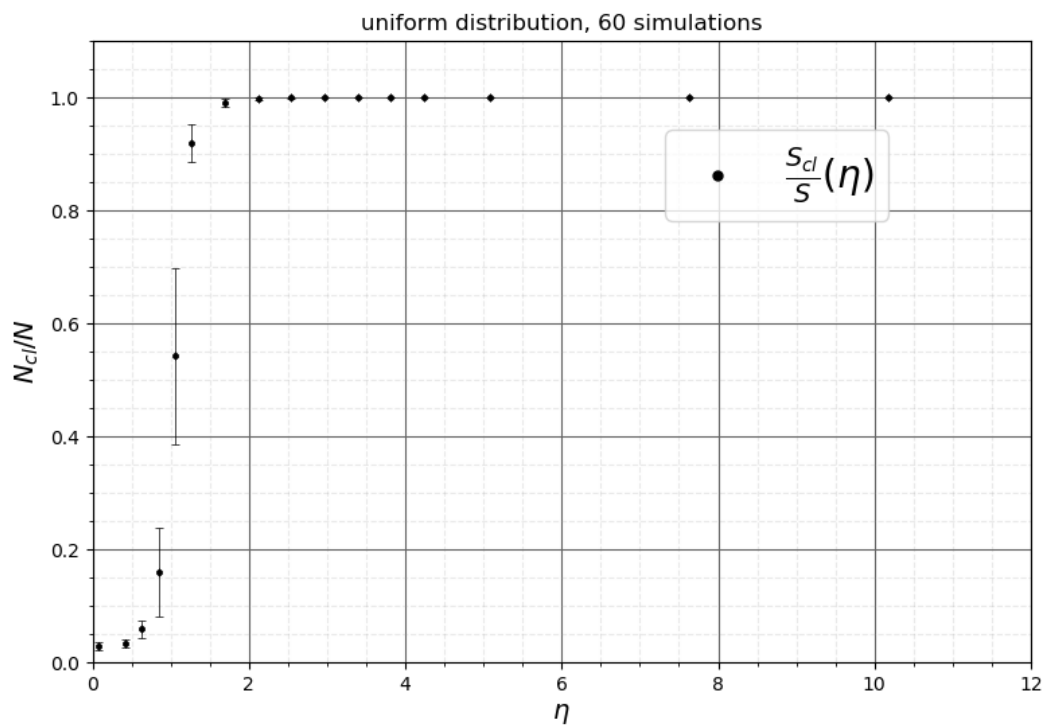


Рис. 6: График зависимости  $S_{cl}/S$  от  $\eta$  (MATLAB, усреднено по 60 симуляциям)

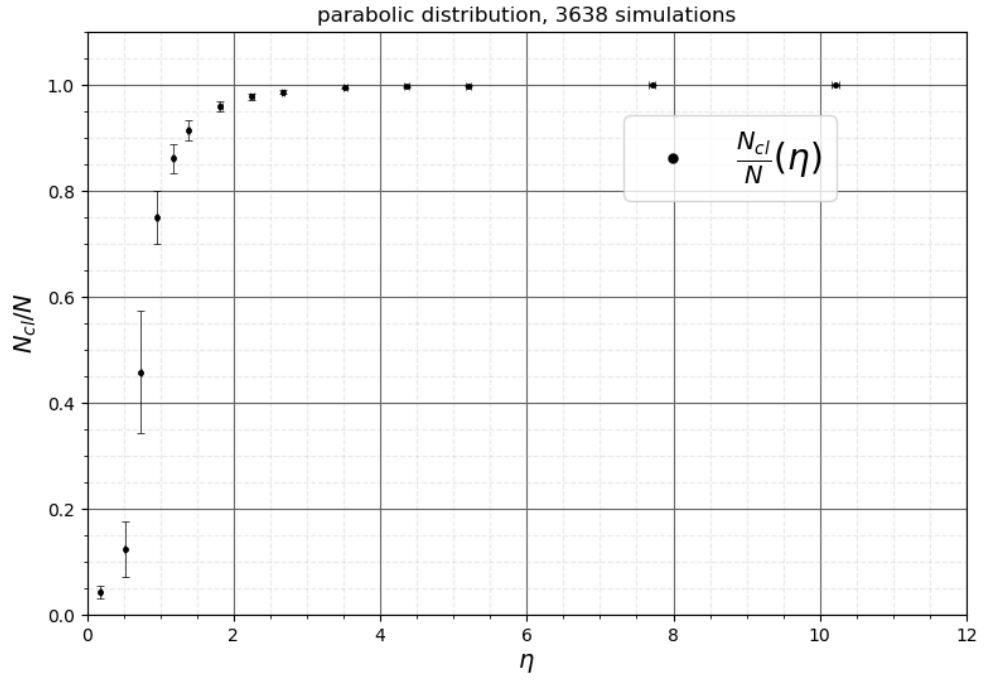


Рис. 7: График зависимости  $N_{cl}/N$  от  $\eta$  (C++, усреднено по 3638 симуляциям)

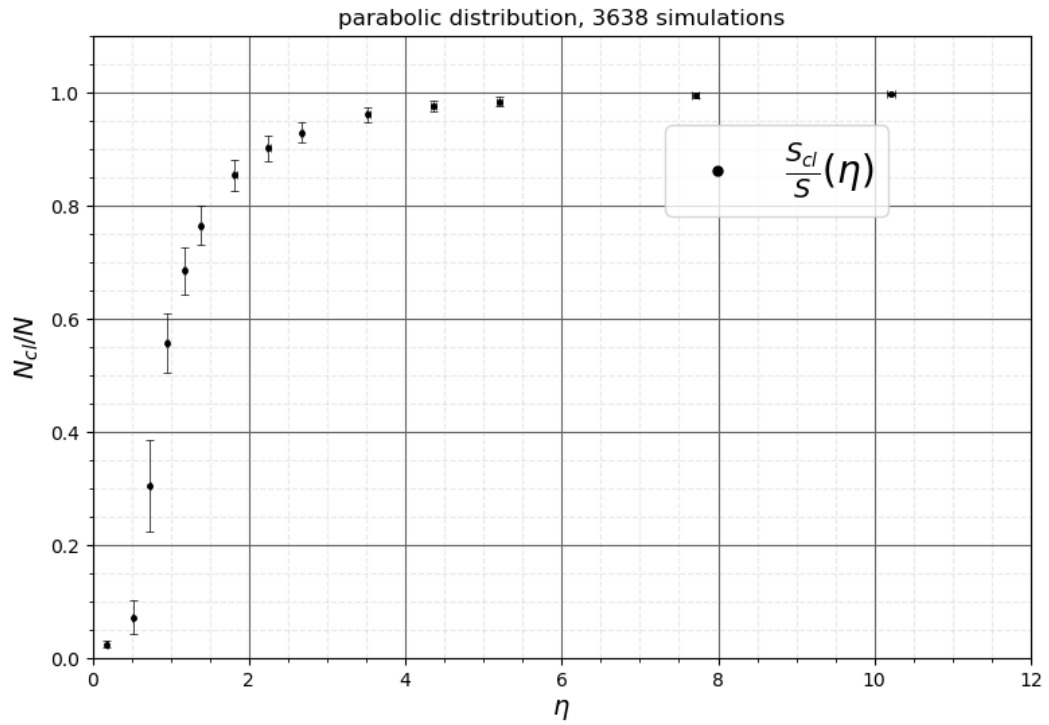


Рис. 8: График зависимости  $S_{cl}/S$  от  $\eta$  (C++, усреднено по 3638 симуляциям)

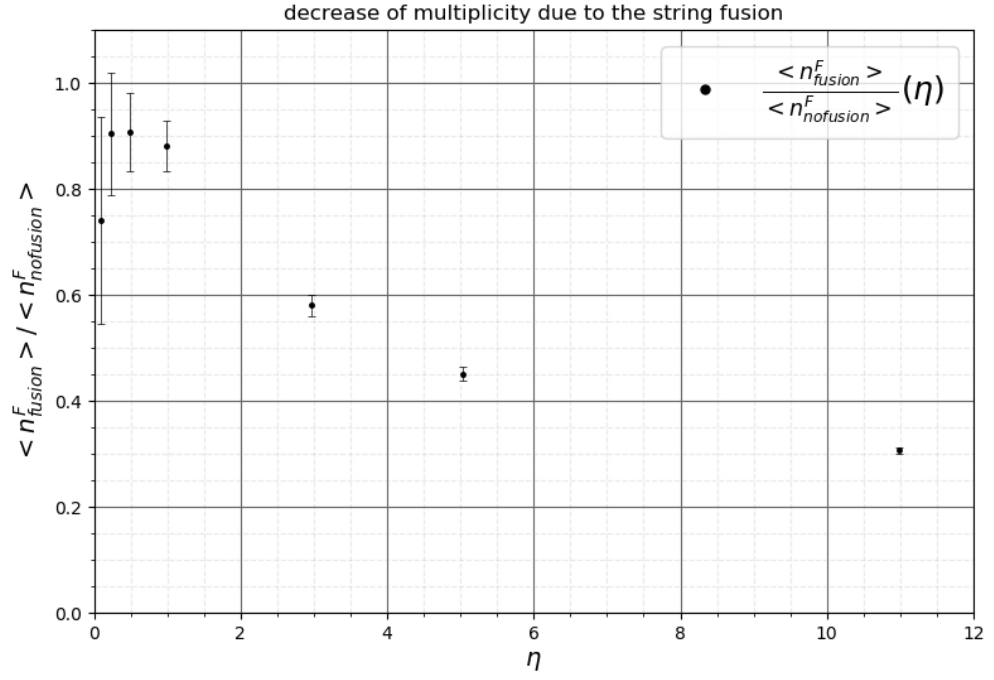


Рис. 9: График зависимости  $\langle n_f \rangle / \langle n_{nf} \rangle$  от  $\eta$ , демонстрирующий ослабление влияния прироста количества струн на прирост множественности в модели со слиянием струн (C++, усреднено по 40000 симуляциям)

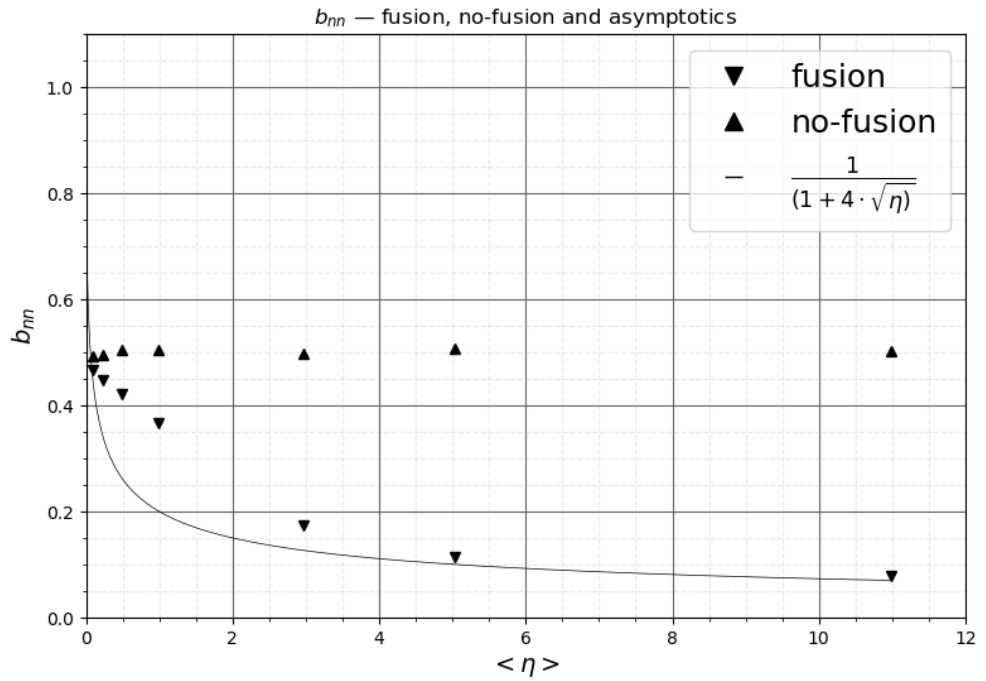


Рис. 10: График зависимости коэффициента корреляции  $b_{nn}$  от  $\langle \eta \rangle$  (C++, усреднено по 40000 симуляциям)

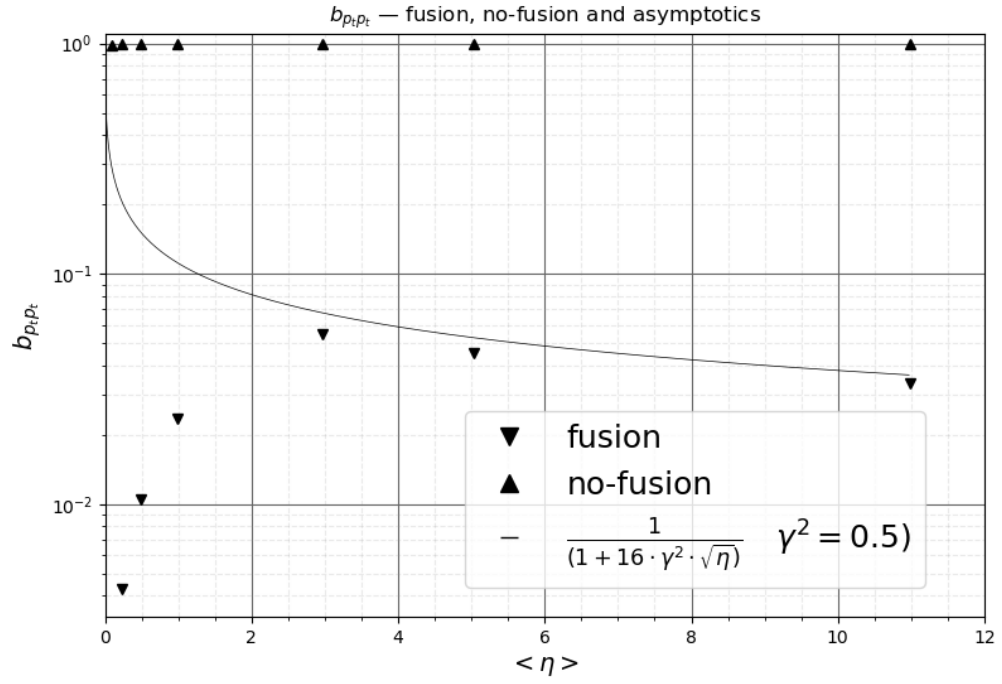


Рис. 11: График зависимости коэффициента корреляции  $b_{p_t p_t}$  от  $\langle \eta \rangle$  (C++, усреднено по 40000 симуляциям)

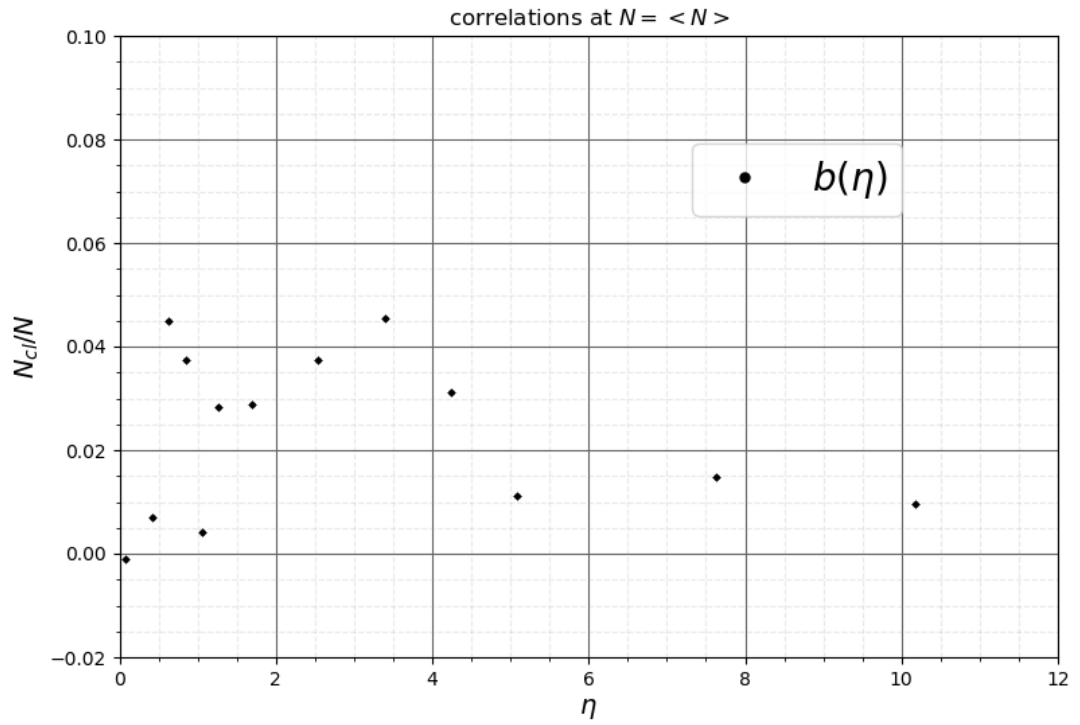


Рис. 12: Демонстрация отсутствия корреляций при  $N = \langle N \rangle$  со сливанием (C++, 10000 симуляций)

## 6.2 Таблицы

### 6.2.1 Перколяционный переход при равномерном распределении струн

$\eta$	$N_{cl}/N$	$\Delta(N_{cl}/N)$	$\eta$	$N_{cl}/N$	$\Delta(N_{cl}/N)$	$\eta$	$N_{cl}/N$	$\Delta(N_{cl}/N)$
0.085	0.030	0.007	1.018	0.480	0.182	1.951	0.999	0.001
0.170	0.028	0.003	1.103	0.739	0.170	2.036	0.998	0.001
0.255	0.028	0.004	1.188	0.840	0.157	2.121	0.996	0.004
0.339	0.036	0.014	1.273	0.941	0.025	2.206	0.999	0.001
0.424	0.036	0.005	1.357	0.948	0.020	2.291	1.000	0.001
0.509	0.052	0.018	1.442	0.976	0.013	2.375	1.000	0
0.594	0.065	0.026	1.527	0.982	0.008	2.460	0.999	0
0.679	0.077	0.009	1.612	0.989	0.004	2.545	1.000	0
0.764	0.095	0.037	1.697	0.992	0.009	3.393	1.000	0
0.848	0.151	0.051	1.782	0.997	0.003	6.787	1.000	0
0.933	0.265	0.071	1.866	0.996	0.004	10.18	1.000	0

Таблица 1: Значения  $\eta$  и соответствующие  $N_{cl}/N$  с погрешностями  $\Delta(N_{cl}/N)$  к рис. 5

$\eta$	$S_{cl}/S$	$\Delta(S_{cl}/S)$	$\eta$	$S_{cl}/S$	$\Delta(S_{cl}/S)$
0.085	0.029	0.007	2.545	0.999	0.001
0.424	0.033	0.008	2.969	1.000	0
0.636	0.058	0.016	3.393	1.000	0
0.848	0.159	0.079	3.818	1.000	0
1.060	0.542	0.156	4.242	1.000	0
1.273	0.919	0.034	5.090	1.000	0
1.697	0.990	0.006	7.635	1.000	0
2.121	0.998	0.002	10.18	1.000	0

Таблица 2: Значения  $\eta$  и соответствующие  $S_{cl}/S$  с погрешностями  $\Delta(S_{cl}/S)$  к рис. 6

### 6.2.2 Перколяционный переход при параболическом распределении струн

$\eta$	$N_{cl}/N$	$\Delta\eta$	$\Delta(N_{cl}/N)$	$\eta$	$N_{cl}/N$	$\Delta\eta$	$\Delta(N_{cl}/N)$
0.186	0.043	0.008	0.012	2.249	0.978	0.023	0.006
0.520	0.124	0.011	0.052	2.676	0.987	0.025	0.004
0.739	0.458	0.013	0.115	3.523	0.994	0.029	0.002
0.957	0.750	0.014	0.051	4.366	0.997	0.033	0.001
1.175	0.861	0.016	0.028	5.206	0.998	0.036	0.001
1.391	0.914	0.018	0.019	7.714	1.000	0.045	0
1.822	0.960	0.020	0.009	10.212	1.000	0.054	0

Таблица 3:  $\eta$  и соответствующие  $N_{cl}/N$  с погрешностями  $\Delta\eta$  и  $\Delta(N_{cl}/N)$  к рис. 7

$\eta$	$S_{cl}/S$	$\Delta\eta$	$\Delta(S_{cl}/S)$	$\eta$	$S_{cl}/S$	$\Delta\eta$	$\Delta(S_{cl}/S)$
0.186	0.025	0.008	0.007	2.249	0.901	0.023	0.022
0.520	0.072	0.011	0.031	2.676	0.93	0.025	0.018
0.739	0.304	0.013	0.081	3.523	0.961	0.029	0.013
0.957	0.557	0.014	0.053	4.366	0.976	0.033	0.010
1.175	0.686	0.016	0.042	5.206	0.984	0.036	0.008
1.391	0.765	0.018	0.035	7.714	0.995	0.045	0.004
1.822	0.854	0.020	0.027	10.212	0.998	0.054	0.003

Таблица 4:  $\eta$  и соответствующие  $S_{cl}/S$  с погрешностями  $\Delta\eta$  и  $\Delta(S_{cl}/S)$  к рис. 8

### 6.2.3 Учёт слияния струн до адронизации

$\eta$	$\langle n_f \rangle / \langle n_{nf} \rangle$	$\Delta\eta$	$\Delta(\langle n_f \rangle / \langle n_{nf} \rangle)$	$\eta$	$\langle n_f \rangle / \langle n_{nf} \rangle$	$\Delta\eta$	$\Delta(\langle n_f \rangle / \langle n_{nf} \rangle)$
1.063	0.968	0.017	0.008	2.879	0.587	0.027	0.003
1.326	0.865	0.019	0.007	3.304	0.549	0.028	0.002
1.499	0.814	0.020	0.006	4.169	0.489	0.031	0.002
1.680	0.769	0.022	0.005	5.044	0.445	0.033	0.002
1.868	0.729	0.023	0.005	5.926	0.410	0.036	0.001
2.061	0.694	0.024	0.004	8.581	0.341	0.043	0.001
2.463	0.635	0.025	0.003	11.236	0.298	0.052	0.001

Таблица 5: Значения  $\eta$  и  $\langle n_f \rangle / \langle n_{nf} \rangle$  с погрешностями  $\Delta\eta$  и  $\Delta(\langle n_f \rangle / \langle n_{nf} \rangle)$  к рис. 9

### 6.2.4 Вычисление корреляционного коэффициента

$\langle \eta \rangle$	$b_{nn}$ (fusion)	$b_{nn}$ (no fusion)	$\langle \eta \rangle$	$b_{nn}$ (fusion)	$b_{nn}$ (no fusion)
0.090	0.468	0.493	2.970	0.173	0.498
0.225	0.448	0.495	5.040	0.115	0.507
0.495	0.421	0.505	10.980	0.079	0.502
0.990	0.368	0.505	-	-	-

Таблица 6: Значения  $\langle \eta \rangle$  и соответствующие  $b_{nn}$  (fusion) и  $b_{nn}$  (no fusion) к рис. 10

$\langle \eta \rangle$	$b_{p_t p_t}$ (fusion)	$b_{p_t p_t}$ (no fusion)	$\langle \eta \rangle$	$b_{p_t p_t}$ (fusion)	$b_{p_t p_t}$ (no fusion)
0.090	-0.008	0.980	2.970	0.055	1.000
0.225	0.004	0.999	5.040	0.045	1.000
0.495	0.010	1.000	10.980	0.033	1.000
0.990	0.023	1.000	-	-	-

Таблица 7: Значения  $\langle \eta \rangle$  и соответствующие  $b_{p_t p_t}$  (fusion) и  $b_{p_t p_t}$  (no fusion) к рис. 11

$\langle \eta \rangle$	$b_{\text{fusion}}$	$\eta$	$b_{\text{fusion}}$
0.085	-0.001	2.545	0.037
0.424	0.007	3.393	0.046
0.636	0.045	4.242	0.031
0.848	0.037	5.090	0.011
1.060	0.004	7.635	0.015
1.273	0.028	10.180	0.010
1.697	0.029	-	-

Таблица 8: Значения  $\eta$  и соответствующие  $b_{\text{fusion}}$  к рис. 12

## 6.3 Код программы

Листинг 1: Основные методы класса “Simulation”

```
void f_nGen(); // 1
void f_GenerateXY_Neym(); // 2
void f_FillGraph(); // 3
void f_FindConnComp(); // 4
void f_FindMaxComp(); // 5
void f_FindNN(); // 6
void f_FindSS(); // 7
void f_FindMulFB(); // 8
void f_FindMulRatio(); // 9
void f_WriteData(); // 10
```

По порядку: 1 – генерация значения  $N$  через заданное среднее  $\langle N \rangle$ ; 2 – генерация координат струн методом Неймана; 3 – создание графа пересекающихся струн; 4 – поиск компонент связности графа; 5 – поиск самого большого кластера по количеству струн; 6 – расчёт отношения количества струн в максимальном кластере к общему количеству разбросанных струн; 7 – расчёт отношения площади максимального кластера к общей площади взаимодействия; 8 – генерация множественности вперёд-назад с учётом слияния струн и без; 9 – генерация множественности с учётом слияния струн и без; 10 – запись данных в файл для последующей обработки.

Листинг 2: Вспомогательные методы класса “Simulation”

```
void f_bCalc(); // 1
void f_dfs(unsigned short int); // 2
unsigned short int f_in_PDF_N(unsigned short int); // 3
float f_in_PDF(float, float); // 4
float f_in_distXY(float, float, float, float, unsigned short int); // 5
```

По порядку: 1 – расчёт корреляционного параметра  $b$  и запись его в файл; 2 – функция обхода графа для поиска компонент связности методом DFS (Depth-first search); 3 – метод, хранящий функцию распределения (или генератор) значения  $N$  через заданное среднее  $\langle N \rangle$ ; 4 – метод, хранящий функцию распределения разброса струн в области взаимодействия; 5 – метод, возвращающий расстояние между двумя заданными точками.

Листинг 3: Поиск компонент связности с помощью DFS

```
void Simulation::f_FindConnComp()
{
    v_compData.clear(); // clear the vcm
    v_comp.clear(); // clear the temporary cluster array
    v_used.clear(); // clear the trigger marks
    for(usint i = 0; i < N; ++i)
        v_used.push_back(false); // make all the coordinates unused
    for(usint i = 0; i < N; ++i)
        if(!v_used[i]) // if unused...
        {
            v_comp.clear();
            f_dfs(i); // go depth-first search
            if(!v_comp.empty())
            {
                v_compData.resize(i + 1);
                v_compData[i] = v_comp; // write into the vcm
            }
        }
}
```



```

}

void    Simulation::f_dfs(usint v)
{
    v_used[v] = true; // string v searching for nearby strings
    v_comp.push_back(v); // push v'th string to a component being made
    for(usint i = 0; i < N; ++i)
    {
        if(g_connGraph[v][i] < 65535) // 65535 is default (if usint is used)
        {
            usint to = g_connGraph[v][i]; // get a neighbor from the graph
            if(! v_used[to]) // check if a neighbor was not checked yet
                f_dfs(to); // recursively repeat dfs
        }
    }
}

```