

SAYISAL YÖNTEMLER

DERS NOTLARI

Doç. Dr. Hüseyin Bayıroğlu

İSTANBUL 2018

İÇİNDEKİLER

	SAYFA
1-GİRİŞ	4
1.1 SAYISAL HESAPLAMALARDA HATA ANALİZİ	4
1.2 HATA TANIMI.....	4
2 SAYISAL YÖNTEMLERİN SINIFLANDIRILMASI	5
3 DENKLEMLERİN KÖKLERİNİN BULUNMASI.....	7
3.1 GRAFİK METODU.....	7
3.2 ORTA NOKTA METODU.....	7
3.3 HATALI KONUM METODU (Lineer interpolasyon yöntemi).....	9
3.4 BASİT TEK NOKTALI ARDIŞIK METOD.....	10
3.5 NEWTON-RAPHSON METODU.....	12
3.5.1 Newton-Raphson yönteminde hata analizi.....	12
3.5.2 Newton-Raphson yönteminin iki bilinmeyenli lineer olmayan denklem sisteminin çözümüne uygulanması	13
3.6 SEKANT METODU.....	15
3.7 KATLI KÖKLER	16
4 LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ.....	19
4.1 GRAFİK METODU.....	20
4.2 DETERMİNANTLAR VE CRAMER KURALI	21
4.3 BİLİNMEYENLERİN ELİMİNASYONU (yok edilmesi) YÖNTEMİ.....	22
4.4 GAUSS ELİMİNASYONU METODU.....	23
4.5 GAUSS-JOURDAN METODU	27
4.6 TERS MATRİS METODU	29
4.6.1 Gauss-Jordan yönteminin matrislerin tersinin bulunmasına uygulanışı.....	29
4.7 ALT ÜST ÜÇGEN MATRİSLERE AYIRMA METODU.....	35
4.7.1 Gauss eliminasyon yöntemi ile alt üst üçgen matrislere ayırma işlemi	35
4.7.2 Crout Bileşenlere ayırma yöntemi (Crout decomposition).....	38
4.8 KAREKÖK METODU (Cholesky yöntemi).....	42
4.9 İTERASYON YÖNTEMİ (Gauss-Seidel yöntemi).....	46
5 EĞRİYE UYDURMA.....	47
5.1 YAKLAŞTIRMA (Regresssion) METODU.....	47
5.1.1 Doğruya yaklaştırma metodu.....	47
5.1.2 Polinoma yaklaştırma metodu.....	50
5.1.3 İki değişkenli lineer bağıntılarda tablo değerlerini lineer denkleme çekmek	52
5.1.4 Çok değişkenli lineer bağıntılarda tablo değerlerini lineer denkleme çekmek.....	53

5.2 İNTERPOLASYON.....	55
5.2.1. Lineer interpolasyon (ara değeri bulma).....	55
5.2.2. Kuadratik interpolasyon.....	56
5.2.3. Newton interpolasyon polinomunun genel formu:.....	57
5.2.4. İnterpolasyon polinomlarının katsayılarını bulmak için diğer bir yöntem.	58
5.2.5. Lagrange interpolasyon polinomu.....	59
6 SAYISAL İNTEGRAL.....	62
6.1 NEWTON-KOT İNTEGRAL FORMÜL.....	62
6.2 Trapez (yamuk kuralı).....	62
6.2.1 İntegral bölgesini n eşit parçaya bölerek yamuk kuralının uygulanışı.....	63
6.3 Simpson'un 1/3 kuralı.....	64
6.4 IMPROPER İNTEGRAL (sınırları sonsuz olan integral).....	68
7 SAYISAL TÜREV.....	69
7.1 İLERİ DOĞRU FARKLAR METODU İLE TÜREVLER.....	70
7.2 GERİYE DOĞRU FARKLAR METODU İLE TÜREVLER.....	71
7.3 MERKEZİ FARKLAR METODU İLE TÜREVLER.....	71
8 ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	73
8.1 EULER METODU.....	73
8.1.1 İyileştirilmiş Euler metodu	74
8.2 HEUN METODU.....	75
8.3 RUNGE-KUTTA METODU.....	76
8.3.1 İKİNCİ DERECEDEDEN RUNGE-KUTTA METODU.....	76
8.3.2 ÜÇÜNCÜ DERECEDEDEN RUNGE-KUTTA METODU.....	76
8.3.3 DÖRDÜNCÜ DERECEDEDEN RUNGE-KUTTA METODU.....	76
8.4 DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ YÖNTEMİ.....	79
8.5 SINIR DEĞER PROBLEMLERİ.....	81
8.5.1 ATIŞ YÖNTEMİ.....	82
8.5.2 SONLU FARKLAR YÖNTEMİ.....	83
9 KİMİ TÜREVLİ DENKLEMLER.....	85
9.1 SONLU FARKLAR YÖNTEMİ.....	87
9.1.1 LAPLACE DENKLEMİ.....	87
9.1.2 ÇÖZÜM TEKNİĞİ.....	88
EK A Taylor Serisi.....	93
Referanslar	96

1-GİRİŞ

Mühendislikte doğadaki olayların ve oluşumların bilimsel yöntemlerle anlaşılan işleyiş kuralları çok önemlidir. Bu kurallar insanlığın kullanımına sunulacak alet, cihaz, makine, yapı ve sistemlerinin oluşturulmasında, işletilmesinde ve geliştirilmesinde kullanılmaktadır.

Doğadaki olaylar ve oluşumlar bilimsel yöntemlerle incelenirken değeri değıştikçe olayların seyrini veya oluşumların sonucunu etkileyen büyüklüklere değışkenler denir. İnceleme sonucunda değışkenler arasındaki ilişkilerden tablo değeri çeşitli grafikler veya cebirsel, diferansiyel ve integral denklemler veya sistemleri elde edilir.

İkinci dereceden cebirsel denklemler sayısı fazla olmayan cebirsel denklem sistemleri lineer diferansiyel denklemler ve sistemleri , düzgün geometriye sahip kısmi türevli lineer diferansiyel denklemler ve sistemlerinin analitik yöntemlerle çözüme gidilmesine karşılık diğer durumlarda pek kolay olmamaktadır. Hatta çoğu kere bu imkansızdır. Bundan dolayı büyük denklem sistemleri, lineer olmama durumu ve karmaşık geometri durumlarında sayısal yöntemler veya deneysel yöntemler uygulanmaktadır. Son yıllarda bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler sayısal yöntemlerin yoğunluğunu ve etkinliğini artırmıştır.

1.1 SAYISAL HESAPLAMALARDA HATA ANALİZİ

Sayısal yöntemlerde oluşabilecek hataları kesme , yuvarlatma hatası ve seçilen matematik modelden kaynaklanan hatalar olarak sayabiliriz.

Kesme hatası, yüksek matematik fonksiyonları hesaplanırken kullanılan serilerde alınan terim sayısına bağlıdır.

Yuvarlatma hatası, yapılan işlemlerde ger çel sayılarda virgülden sonra alınan rakam sayısına bağlıdır.

Matematik modelden kaynaklanan hata Gerçek durum ile matematik model arasındaki farka bağlıdır.

1.2 HATA TANIMI

$$\text{Doğru değer} = \text{yaklaşık değer} + \text{Hata}$$

$$\text{Hata} = \text{Doğru değer} - \text{yaklaşık değer}$$

$$E_t = \text{Doğru değer} - \text{yaklaşık değer}$$

$$\text{Bağıl hata} = \text{hata} / \text{doğru değer}$$

$$\text{Bağıl gerçek yüzde hata} \quad \epsilon_t = (\text{gerçek hata} / \text{doğru değer}) 100 \%$$

$$\text{Bağıl yaklaşık yüzde hata} \quad \epsilon_a = (\text{yaklaşık hata} / \text{yaklaşık değer}) 100 \%$$

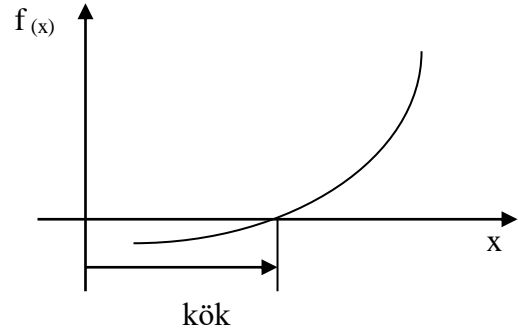
Ardışık metotlarda uygulması

$$\epsilon_a = ((\text{şimdiki yaklaşık değer} - \text{bir önceki yaklaşık değer}) / (\text{şimdiki yaklaşık değer})) 100 \%$$

2 SAYISAL YÖNTEMLERİN SINIFLANDIRIMASI

2.1 Denklemlerin kökleri

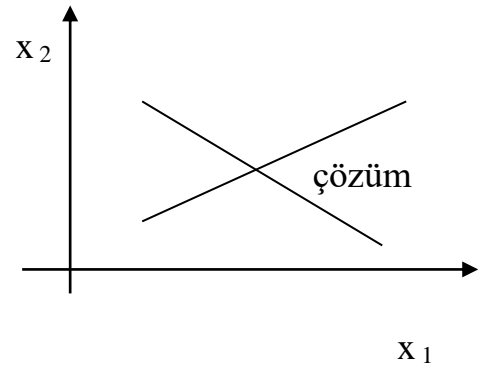
$f(x) = 0$ denklemini sağlayan x değerlerinin hesabı



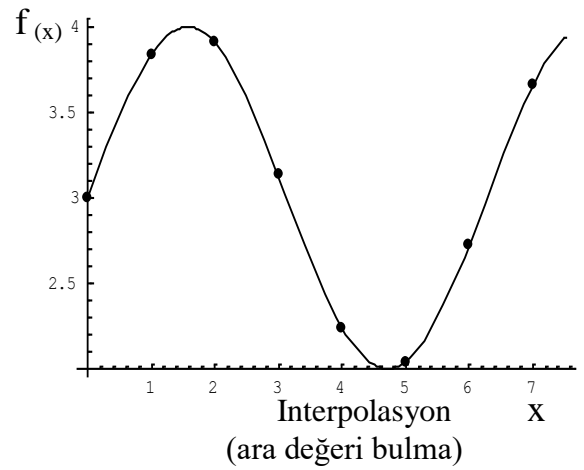
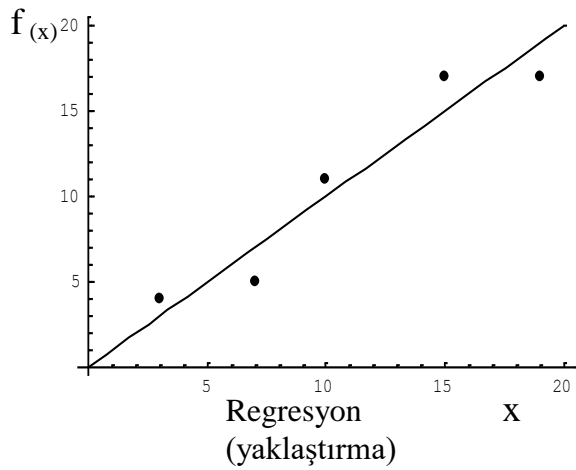
2.2 Lineer denklem sistemlerinin çözümü

$$A_{11} x_1 + A_{12} x_2 = C_1$$

$$A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = C_2$$

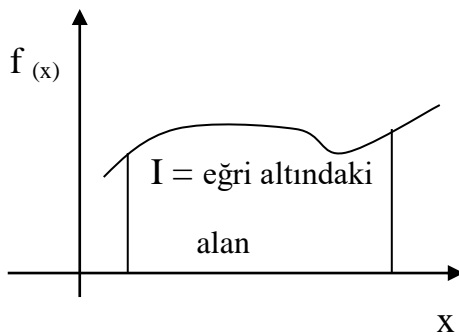


2.3 Eğri uydurulması



2.4 Nümerik integral

$$I = \int_a^b f(x) dx$$



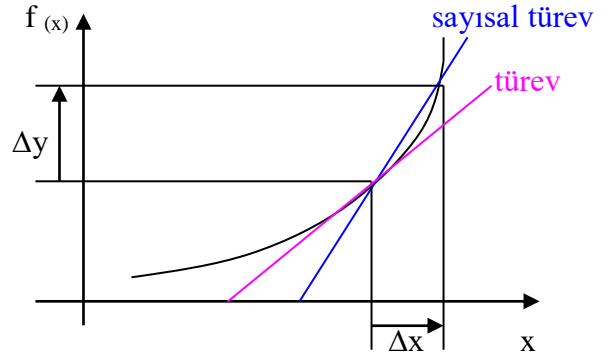
2.5 Nümerik türev

Türev:

$$\frac{df_{(x)}}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x}$$

Nümerik türev :

$$\frac{df_{(x)}}{dx} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x}$$

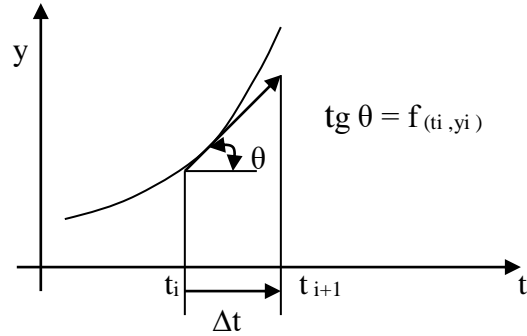


2.6 Adi diferansiyel denklemler

$$\frac{dy}{dt} \cong \frac{\Delta y}{\Delta t} = f_{(t,y)}$$

y nin t ye bağlı çözümü:

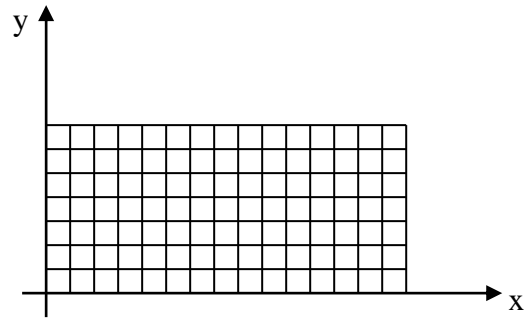
$$y_{i+1} = y_i + f_{(t,y)} \Delta t$$



2.7 Kısmi türevli diferansiyel denklemler

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{(x,y)}$$

x ve y ye bağlı olarak u hesaplanır.



3 DENKLEMLERİN KÖKLERİNİN BULUNMASI

$f(x) = 0$ denklemini sağlayan x değerlerine bu denklemin kökleri denir.

Örnek olarak 2. dereceden

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

denkleminin kökleri $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ eşitliği ile kolaylıkla bulunur.

Herhangi bir $f(x) = 0$ denkleminin kökleri her zaman bu kadar kolay hesaplanamaz. Bunun için sayısal yöntemler geliştirilmiştir.

3.1 GRAFİK METODU

Bu yöntemde $f(x)$ denklemini ölçekli bir şekilde çizilir. Eğrinin x eksenini kestiği noktalar okunmaya çalışılır.

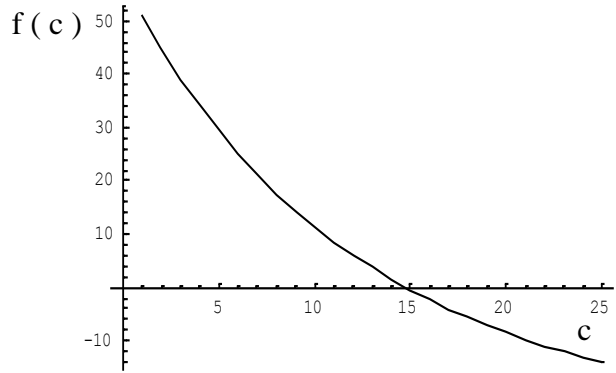
Örnek olarak paraşütün inişini karakterize eden denklemini ele alalım.

$$v = \frac{gm}{c} [1 - e^{-(c/m)t}]$$

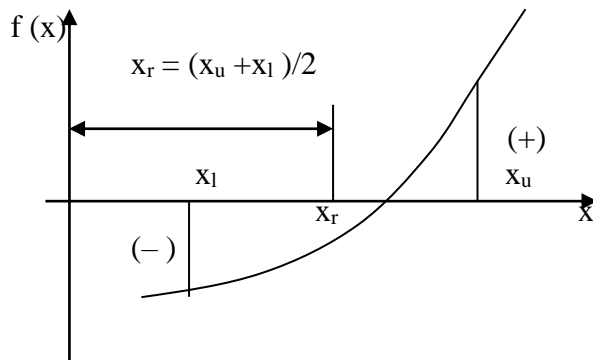
Burada v hızı, g yerçekimi ivmesini, m Kütleyi ve c de havanın direncini gösteriyor.

Verilen $v = 40$ m/s, $m = 68,1$ kg, $g = 9.8$ m/s², $t = 10$ s değerleri ile c hava direncini hesaplamak için

$f(c) = \frac{gm}{c} [1 - e^{-(c/m)t}] - v$ şeklinde yukarıdaki denklemini düzenleyip bunu sıfır yapan c değerini yukarıdaki grafikten $c = 14,7$ değerini okuyabiliriz.



3.2 ORTA NOKTA METODU



$f(x_l) * f(x_u) < 0$ ise $f(x)$ denkleminin (x_l, x_u) aralığında en az bir kökü vardır.

$$x_r = (x_l + x_u)/2$$

$f(x_l) * f(x_r) < 0$ ise $x_u = x_r$

$f(x_l) * f(x_r) > 0$ ise $x_l = x_r$

$f(x_l) * f(x_r) = 0$ ise x_r köktür.

Örnek 3.2.1

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad \text{“çözüm } x_1 = -1 \quad x_2 = 3 \text{”}$$

$$(x_l = 2 \quad x_u = 5) \quad f(2) = -3 \quad f(5) = 12 \quad f(2) * f(5) = -36 < 0$$

$$x_r = (2+5)/2 \quad x_r = 3,5 \quad f(3,5) = 2,25 \quad f(2) * f(3,5) < 0 \quad x_u = 3,5$$

$$(x_l = 2 \quad x_u = 3,5) \quad x_r = (2+3,5)/2 \quad x_r = 2,75 \quad f(2,75) = -0,93$$

$$f(2) * f(2,75) > 0 \quad x_l = 2,75$$

$$(x_l = 2,75, x_u = 3,5) \quad x_r = 3,125 \quad f(3,125) = 0,516 \quad f(2,75) * f(3,125) < 0 \quad x_u = 3,125$$

$$|\epsilon_a| = |(3,125 - 2,75)/3,125| 100 \% \quad |\epsilon_a| = 12 \%$$

$$(x_l = 2,75, x_u = 3,125) \quad x_r = 2,94 \quad f(2,94) = -0,24 \quad f(2,75) * f(2,94) > 0 \quad x_l = 2,94$$
$$|\epsilon_a| = 6,3 \%$$

$$(x_l = 2,94, x_u = 3,125) \quad x_r = 3,03 \quad f(x_r) = 0,12 \quad f(x_l) * f(x_r) < 0 \quad x_u = 3,03 \quad |\epsilon_a| = 2,97 \%$$

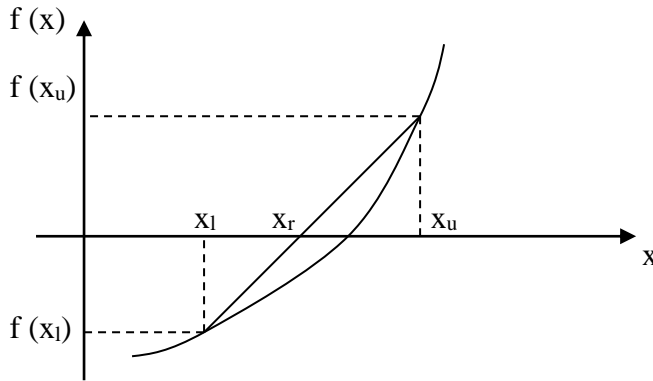
$$(x_l = 2,94, x_u = 3,03) \quad x_r = 2,985 \quad f(x_r) = -0,06 \quad f(x_l) * f(x_r) > 0 \quad x_l = 2,985 \quad |\epsilon_a| = 1,5 \%$$

$$(x_l = 2,985, x_u = 3,03) \quad x_r = 3,0075 \quad f(x_r) = -0,03 \quad f(x_l) * f(x_r) < 0 \quad x_u = 3,0075 \quad |\epsilon_a| = 0,75 \%$$

$$(x_l = 2,985, x_u = 3,0075) \quad x_r = 2,99 \quad f(x_r) = -0,0399 \quad f(x_l) * f(x_r) > 0 \quad x_l = 2,99 \quad |\epsilon_a| = 0,59 \%$$

$$(x_l = 2,99, x_u = 3,0075) \quad x_r = 2,999 \quad |\epsilon_a| = 0,3 \%$$

3.3 HATALI KONUM METODU (Linear interpolasyon yöntemi)



$$\frac{f(x_r)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Örnek 3.3.1

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad \text{“ (çözüm } x_1 = -1, \quad x_2 = 3 \text{) }"$$

$x_l = 2 \quad x_u = 5$ için $f(x_l) = -3 \quad f(x_u) = 12 \quad f(x_l) f(x_u) < 0$ olduğundan $f(x)$ denkleminin (x_l, x_u) aralığında en az bir kökü vardır.

$$x_r = 5 - 12 (2-5) / (-3-12) \quad x_r = 2,6 \quad |\epsilon_a| = | (2,6 - 2) / 2,6 | 100 \% = 23 \%$$

$$x_l = 2,6 \quad f(x_l) = -1,44 \quad x_r = 5 - 12 (2,6 - 5) / (-1,44-12) \quad x_r = 2,86 \quad |\epsilon_a| = 9,1 \%$$

$$x_l = 2,86 \quad f(x_l) = -0,54 \quad x_r = 5 - 12 (2,86 - 5) / (-0,54-12) \quad x_r = 2,95 \quad |\epsilon_a| = 3,05 \%$$

$$x_l = 2,95 \quad f(x_l) = -0,1975 \quad x_r = 5 - 12 (2,95 - 5) / (-0,1975-12) \quad x_r = 2,983 \quad |\epsilon_a| = 1,1 \%$$

$$x_l = 2,983 \quad f(x_l) = -0,068 \quad x_r = 5 - 12 (2,983 - 5) / (-0,068-12) \quad x_r = 2,994 \quad |\epsilon_a| = 0,37 \%$$

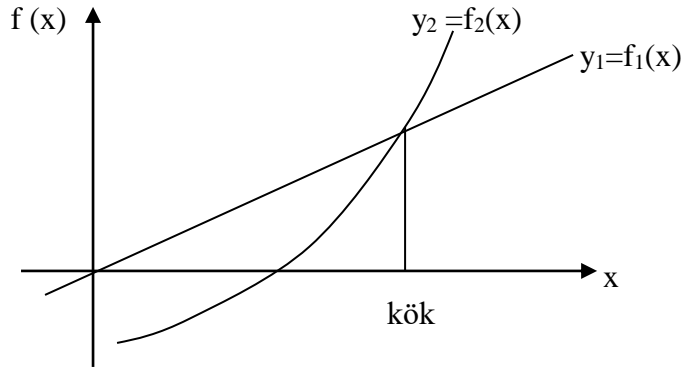
$$x_l = 2,994 \quad f(x_l) = -0,024 \quad x_r = 5 - 12 (2,994 - 5) / (-0,024-12) \quad x_r = 2,983 \quad |\epsilon_a| = 0,13 \%$$

$$|\epsilon_a| = | (2,998 - 2,994) / 2,998 | 100 \% = 0,13 \%$$

3.4 BASİT TEK NOKTALI ARDIŞIK METOD

Bu yöntemde $f(x)$ fonksiyonu $f_1(x) = f_2(x)$ olacak şekilde iki parçaya ayrılır.

Bu ayırım $x_{i+1} = g(x_i)$ şeklinde olabilir.



$$x_{i+1} = g(x_i)$$

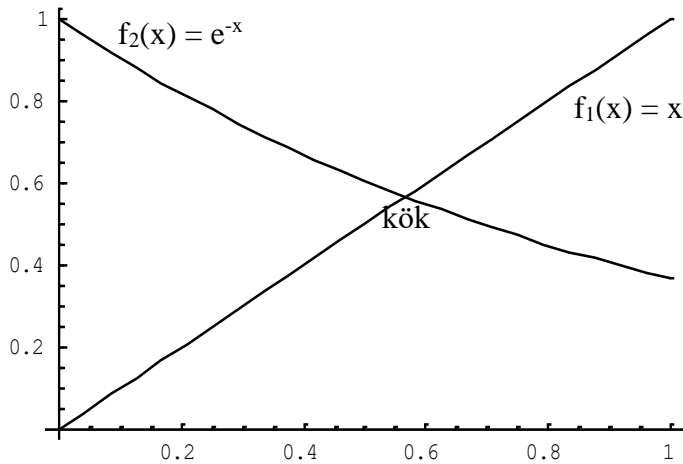
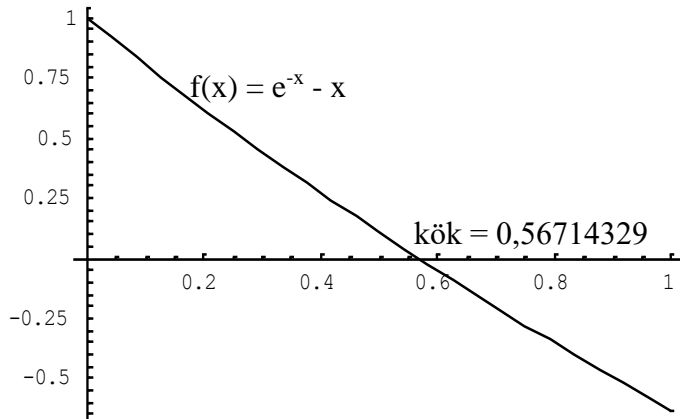
$$|\epsilon_a| = |(x_{i+1} - x_i) / x_{i+1}| 100 \%$$

$$|\epsilon_t| = |(x_t - x_i) / x_t| 100 \%$$

Örnek 3.4.1

$$f(x) = e^{-x} - x$$

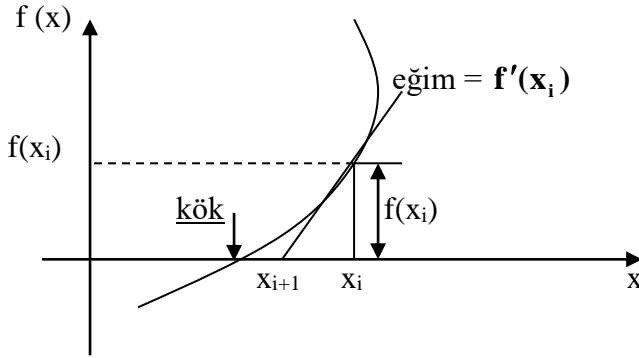
$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = e^{-x}$$



Yukarıdaki eşitliklerle aşağıdaki tablo yazılabilir.

x_i	$x_{i+1} = e^{-x_i}$	$ \epsilon_t $ %	$ \epsilon_a $ %
0	1	100	100
1	0,36789	76,3	171
0,36789	0,6922	35,1	46,9
0,6922	0,500473	22,1	38,3
0,500473	0,60624	11,8	17,4
0,60624	0,545396	6,89	11,2
0,545396	0,57961	3,83	5,9
0,57961	0,560115	2,2	3,48
0,560115	0,571143	1,24	1,93
0,571143	0,564879	0,705	1,102
0,564879	0,568428	0,399	0,624
0,568428	0,566415	0,226	0,355
0,566415	0,567557	0,128	0,2
0,567557	0,56691	0,07	0,11
0,56691	0,56728	0,04	0,065
0,56728	0,567066	0,014	0,038

3.5 NEWTON – RAPHSON METODU



$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Newton- Raphson yöntemini ayrıca Taylor serisinden çıkarabiliriz ve bu yolla hata analizi de yapılır. Ek 1 deki tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonun x_0 noktasında Taylor serisine açılımını göz önüne alalım. Buradaki açılımda x_0 yerine x_i , x yerine x_{i+1} yazarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f''(\xi) \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)^2$$

Burada ξ , x_i ile x_{i+1} arasında bir değerdir.

1. mertebeden türevi içeren terimlerden sonrakiler alınmaz ve $f(x_{i+1}) = 0$ alınırsa

$$0 \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

eşitliği yazılır. Buradan Newton-Raphson yönteminden elde edilen aşağıdaki denklemi elde edilir.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

3.5.1 Newton-Raphson yönteminde hata analizi

x_r : kökün gerçek değeri Taylor serine yerleştirilip bundan yaklaşık denklem çıkarılırsa

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_r - x_i) + f''(\xi) \frac{1}{2}(x_r - x_i)^2$$

$$- 0 \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$0 = f'(x_i)(x_r - x_{i+1}) + f''(\xi) \frac{1}{2}(x_r - x_i)^2$$

$$E_{t,i} = x_r - x_i \quad (\text{önceki gerçek hata})$$

$$E_{t,i+1} = x_r - x_{i+1} \quad (\text{gerçek hata})$$

eşitliklerini yukarıdaki denkleme yerleştirirsek

$$0 = f'(x_i) E_{t,i+1} + f''(\xi) \frac{1}{2} E_{t,i}^2$$

eşitliğini elde ederiz. Çözümün yakınsadığı düşünülürse x_i ve ξ , x_r gerçek kök değerine yakınsar ve böylece

$$E_{t,i+1} \cong \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{t,i}^2$$

denkleminde hatanın kabaca önceki hatanın karesiyle orantılı olduğu görülür. (Kuadratik yakınsaklık)

Örnek 3.5.1.1

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad (\text{Gerçek çözüm } x_1 = -1, x_2 = 3)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad f'(x) = 2x - 2 \quad |\epsilon_a| = |(x_{i+1} - x_i) / x_{i+1}| \cdot 100 \%$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - 2x_i - 3}{2x_i - 2}$$

x_i	x_{i+1}	$ \epsilon_a , \%$
0	-1,5	100
-1,5	-1,05	43
-1,05	-1,000609756	4,94
-1,000609756	-1,000000093	0,061
-1,000000093	-1	0,000009

3.5.2 Newton – Raphson yönteminin iki bilinmeyenli lineer olmayan denklem sisteminin çözümüne uygulanması

Ek 1 deki iki değişkenli fonksiyonların Taylor serisinde x_0 yerine x_i , y_0 yerine y_i , x yerine x_{i+1} , y yerine y_{i+1} alıp birinci mertebeden türevli terimlerden sonraki terimleri almazsak aşağıdaki denklemi elde ederiz

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}) = f(x_i, y_i) + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} (x_{i+1} - x_i) + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} (y_{i+1} - y_i)$$

İki bilinmeyenli lineer olmayan denklem sistemini

$$u(x, y) = 0$$

$$v(x, y) = 0$$

şeklinde gösterirsek yukarıdaki Taylor serisinden elde edilen eşitliği bu her iki denkleme ayrı ayrı uygulamamız gerekir.

$$u(x_{i+1}, y_{i+1}) = u(x_i, y_i) + \frac{\partial u(x_i, y_i)}{\partial x} (x_{i+1} - x_i) + \frac{\partial u(x_i, y_i)}{\partial y} (y_{i+1} - y_i)$$

$$v(x_{i+1}, y_{i+1}) = v(x_i, y_i) + \frac{\partial v(x_i, y_i)}{\partial x} (x_{i+1} - x_i) + \frac{\partial v(x_i, y_i)}{\partial y} (y_{i+1} - y_i)$$

Sistemin çözümünü aradığımız için

$$u(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0$$

$$v(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0$$

olmalıdır. Ayrıca

$$u(x_i, y_i) = u_i$$

$$v(x_i, y_i) = v_i$$

alınırsa denklem sistemini aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} x_{i+1} + \frac{\partial u_i}{\partial y} y_{i+1} = -u_i + x_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + y_i \frac{\partial u_i}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} x_{i+1} + \frac{\partial v_i}{\partial y} y_{i+1} = -v_i + x_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + y_i \frac{\partial v_i}{\partial y}$$

Böylece x_{i+1} ve y_{i+1} büyüklüklerini bilinmeyen kabul eden iki bilinmeyenli lineer denklem sistemini elde edilir. Bu sistem Kramer kuralına göre çözülürse aşağıdaki eşitlikler bulunur.

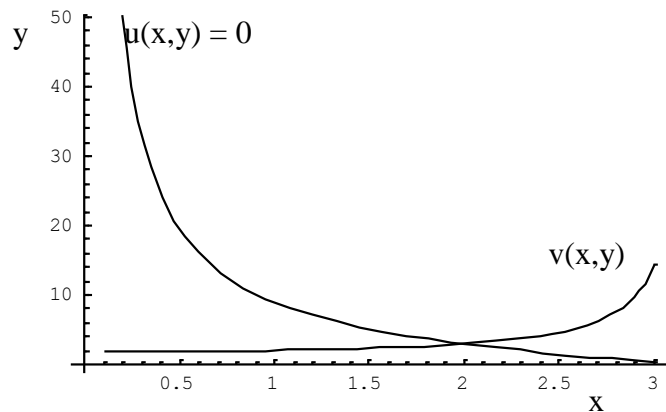
$$x_{i+1} = x_i - \frac{u_i \frac{\partial v_i}{\partial y} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial y}}{\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial v_i}{\partial x}}$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial x}}{\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial v_i}{\partial x}}$$

Örnek 3.5.2.1

$$u(x,y) = x^2 + x y - 10 = 0$$

$$v(x,y) = y + 3 x y^2 - 57 = 0$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + 6xy$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^2 + x_i y_i - 10)(1 + 6x_i y_i) - (y_i + 3x_i y_i^2 - 57)x_i}{(2x_i + y_i)(1 + 6x_i y_i) - x_i(3y_i^2)}$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{(x_i^2 + x_i y_i - 10)3y_i^2 - (y_i + 3x_i y_i^2 - 57)(2x_i + y_i)}{(2x_i + y_i)(1 + 6x_i y_i) - x_i(3y_i^2)}$$

x_i	y_i	x_{i+1}	y_{i+1}
1	4	2,176470588	1,941176471
2,176470588	1,941176471	1,900833044	3,215237987
1,900833044	3,215237987	1,999127152	2,997166652
1,999127152	2,997166652	1,999999679	3,000002741
1,999999679	3,000002741	2	3

3.6 SEKANT METODU

Newton-Raphson yöntemi için gerekli olan türev alma işlemi bazı polinom ve fonksiyonlarda zordur. Bu yöntemde türev yerine sonlu farklar türev formülü kullanılır.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (\text{Newton - Raphson Yöntemi})$$

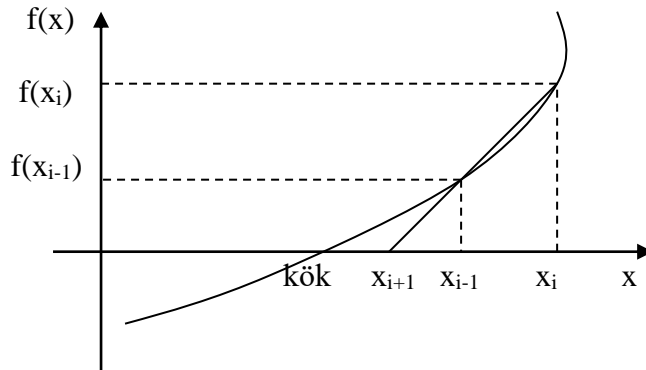
buradaki $f'(x_i)$ yerine

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

yaklaşık değeri alınır. Bu denklemden x_{i+1} aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

iki değer x_i ve x_{i-1} başlangıçta verilmelidir. Bu başlangıçta verilen iki değer kökün ayrı taraflarında olmak zorunda değildir.



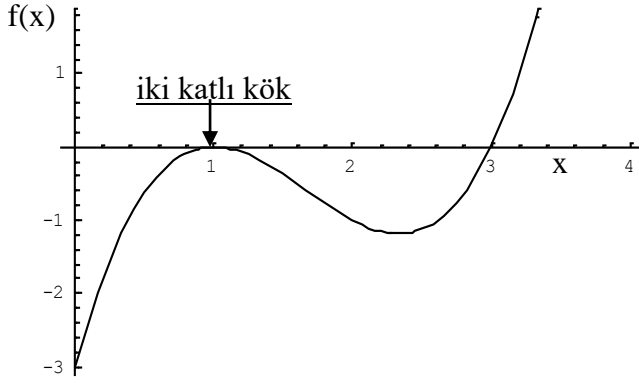
Örnek 3.6.1

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad (\text{çözüm } x_1 = -1, x_2 = 3)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^2 - 2x_i - 3)(x_{i-1} - x_i)}{(x_{i-1}^2 - 2x_{i-1} - 3) - (x_i^2 - 2x_i - 3)}, \quad |\varepsilon_a| = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\%$$

	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$ \varepsilon_a , \%$
1	0	-3	-0,6	400
2	-3	-0,6	-0,8571428571	30
3	-0,6	-0,8571428571	-1,016528926	15,7
4	-0,8571428571	-1,016528926	-0,9993904297	1,715
5	-1,016528926	-0,9993904297	-0,9999974911	0,061
6	-0,9993904297	-0,9999974911	-1	0,00025

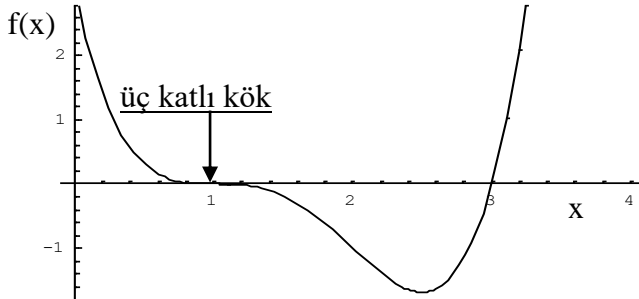
3.7 KATLI KÖKLER



$$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1)$$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

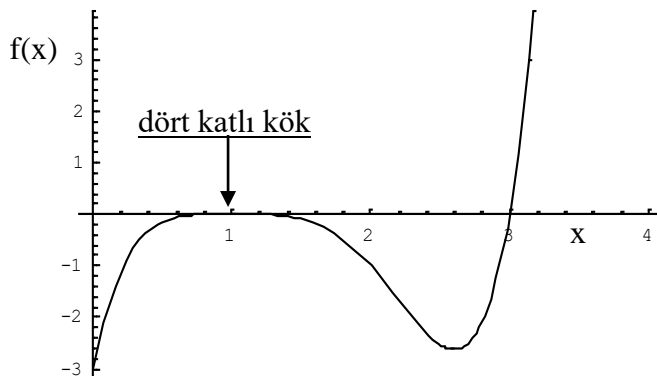
Burada $x = 1$ iki katlı köktür.



$$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1)(x-1)$$

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$$

Burada $x = 1$ 3 katlı köktür.



$$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)$$

$$f(x) = x^5 - 7x^4 + 18x^3 - 22x^2 + 13x - 3$$

Burada $x = 1$ 4 katlı köktür.

$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ fonksiyonu ile $f(x)$ fonksiyonunun kökleri aynıdır.

Bu durumda $f(x)$ yerine $u(x)$ fonksiyonunun kökleri araştırılır. Örnek olarak Newton-Raphson yöntemi uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)}$$

Bu denklemde $u'(x)$ yerine $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ ifadesinin x 'e göre türevi alınıp konursa

$$u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$$

katlı kökler için yeniden düzenlenmiş Newton –Raphson yönteminin yaklaşım denklemi elde edilir.

Örnek 3.7.1

$$f(x) = (x-1)(x-1) \quad f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad (x = 1 \text{ iki katlı köktür.})$$

Standart Newton-Raphson yöntemi ile çözüm

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad f'(x) = 2x - 2$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - 2x_i + 1}{2x_i - 2}$$

x_i	x_{i+1}	$ \epsilon_a \%$
0	0,5	100
0,5	0,75	33,33
0,75	0,875	14,29
0,875	0,9375	6,67
0,9375	0,96875	3,226
0,96875	0,984375	1,587
0,984375	0,9921875	0,7874
0,9921875	0,99609375	0,3922
0,99609375	0,998046875	0,1957
0,998046875	0,9990234375	0,0978

Örnek 3.7.2

$$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1)$$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

Standart Newton-Raphson yöntemi ile çözüm için

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7, \quad f''(x) = 6x - 10$$

eşitliklerini [3.1.5. (1)] denkleminde yerine yazarsak

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3}{3x_i^2 - 10x_i + 7}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemi kullanarak aşağıdaki tabloyu düzenleyebiliriz.

x_i	x_{i+1}	$ \epsilon_a , \%$
0	0,4285714286	100
0,4285714286	0,6857142857	37,5
0,6857142857	0,8328654005	17,668
0,8328654005	0,9133298932	8,81
0,9133298932	0,9557832929	4,441
0,9557832929	0,9776551012	2,237
0,9776551012	0,9887661674	1,123
0,9887661674	0,9943674405	0,563
0,9943674405	0,9971797707	0,282
0,9971797707	0,9985888917	0,141
0,9985888917	0,9992941948	0,070

Geliştirilmiş Newton-Raphson yöntemi için elde edilen

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(3x_i^2 - 10x_i + 7)}{(3x_i^2 - 10x_i + 7)^2 (x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(6x_i - 10)}$$

eşitliğini kullanarak aşağıdaki tablo oluşturulur.

x_i	x_{i+1}	$ \epsilon_a , \%$
0	1,105263158	100
1,105263158	1,003081664	10,1868
1,003081664	1,000002393	0,308
1,000002393	1,000002393	0

4 LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Önceki bölümde tek bir $f(x) = 0$ denklemini sağlayan x değerlerinin bulunuşu anlatıldı. Şimdi ise

$$f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

şeklinde n adet denklemi aynı anda sağlayan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ değerleri araştırılacaktır. ?

Eğer bu $f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$ denklemleri aşağıdaki gibi olursa bu denklem sistemine lineer denklem sistemi denir.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = c_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = c_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n = c_3$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \dots + a_{nn} x_n = c_n$$

Burada a_{ij} , c_i sabitlerdir.

Lineer denklem sisteminin matris gösterilimi

$[A] \{x\} = \{C\}$ şeklindedir.

Buradan çözüm matrisi

$$\{x\} = [A]^{-1} \{C\}$$

şeklinde yazılır. Bu matrisler aşağıdaki gibi açık şekilde yazılabilir.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad [x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$

Lineer denklem sisteminin çözümünde aşağıdaki metodlar uygulanır.

1. Grafik metodu.
2. Determinantlar ve Cramer kuralı.
3. Bilinmeyenlerin eliminasyonu (yok edilmesi)
4. Gauss Eliminasyon metodu
5. Ters matris metodu (Gauss – Jordan yöntemi).
6. İterasyon yöntemi (Gauss – Seidel yöntemi)
7. Alt üst üçgen matrislere ayırma metodu.
8. Karekök metodu (Cholesky yöntemi , simetrik bant matrisler için).

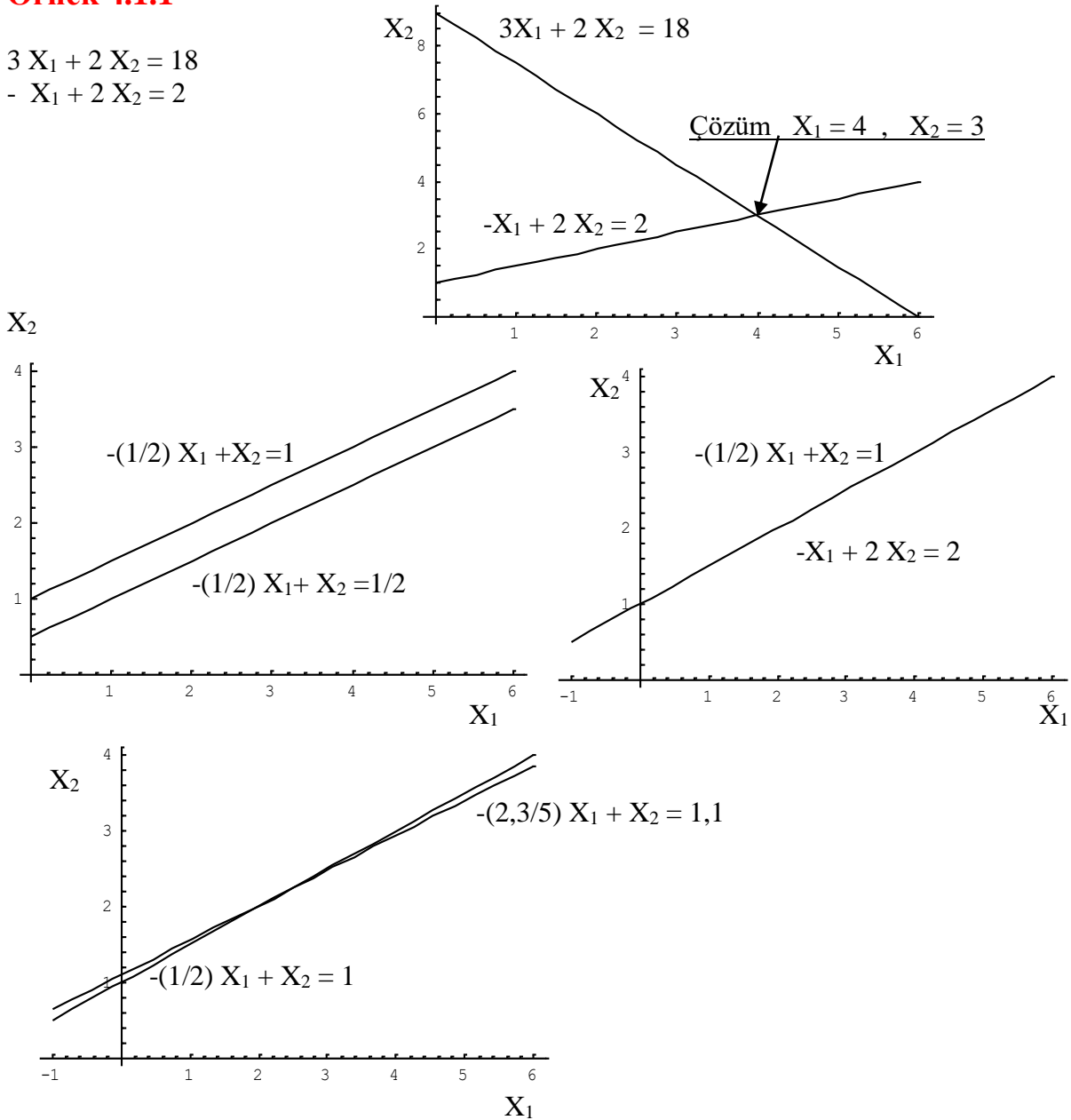
4.1 GRAFİK METODU

Bu yöntem ikiden fazla bilinmeyen içeren denklem sistemlerine uygulanamaz. Fakat çözümün geometri yardımı ile yorumu yapılabilir.

Örnek 4.1.1

$$3X_1 + 2X_2 = 18$$

$$-X_1 + 2X_2 = 2$$



4.2 DETERMINANTLAR VE CRAMER KURALI

Bu yöntem 3 den fazla bilinmeyenli denklem sistemleri için kullanışlı değildir.

Üç Bilinmeyenli denklem sistemi için bu yöntemi aşağıdaki gibi uygulanır.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Örnek 4.2.1

$$0,3x_1 + 0,52x_2 + x_3 = 0,01$$

$$0,5x_1 + x_2 + 1,9x_3 = 0,67$$

$$0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 = -0,44$$

$$D = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,52 & 1 \\ 0,5 & 1 & 1,9 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{vmatrix} = -0,0022$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0,01 & 0,52 & 1 \\ 0,67 & 1 & 1,9 \\ -0,44 & 0,3 & 0,5 \end{vmatrix}}{D} = \frac{0,03278}{-0,0022} = -14,9$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0,3 & -0,01 & 1 \\ 0,5 & 0,67 & 1,9 \\ 0,1 & -0,44 & 0,5 \end{vmatrix}}{D} = \frac{0,0649}{-0,0022} = -29,5$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0,3 & 0,52 & -0,01 \\ 0,5 & 1 & 0,67 \\ 0,1 & 0,3 & -0,44 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-0,04356}{-0,0022} = 19,8$$

4.3 BİLİNMIYENLERİN ELİMİNASYONU (yok edilmesi) YÖNTEMİ

Bu yöntemi iki bilinmiyenli lineer denklem sistemleri üzerinde gösterelim.

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$$

$$(2) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2$$

(1) denklemi a_{21} , (2) denklemi $-a_{11}$ ile çarpılıp toplanırsa x_1 yok edilmiş olur.

$$a_{21} * (1) - a_{11}(2)$$

$$a_{21} * (1) \quad = \quad a_{21}a_{11}x_1 + a_{21}a_{12}x_2 = a_{21}c_1$$

$$-a_{11} * (2) \quad = \quad -a_{11}a_{21}x_1 - a_{11}a_{22}x_2 = -a_{11}c_2$$
$$\quad \quad \quad + \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad}$$

$$a_{21} * (1) - a_{11}(2) = (a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) x_2 = a_{21}c_1 - a_{11}c_2$$

$$x_2 = \frac{a_{21}c_1 - a_{11}c_2}{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}}$$

Bu x_2 değeri (1) denkleminde yerine yerleştirilirse

$$x_1 = \frac{a_{21}c_1 - a_{21}a_{12}x_2}{a_{21}a_{11}}$$

Örnek 4.3.1

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

$$x_2 = \frac{-1(18) - 3(2)}{-1(2) - 3(2)} = 3 \quad , \quad x_1 = \frac{-1(18) - (-1)2(3)}{-1(3)} = 4$$

4.4 GAUSS ELİMİNASYONU METODU

Bilinmeyenlerin eliminasyonu yönteminin sistematik hale getirilmiş şeklidir. Bu yöntem lineer denklem sistemlerine aşağıdaki şekilde uygulanır.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\
 (2) \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\
 (3) \quad & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = c_3 \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 (n) \quad & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = c_n
 \end{aligned}$$

İlk önce (1) denklemi dışındaki bütün denklemlerde x_1 yok edilir. Bunun için (1) dışındaki bütün denklemlere aşağıdaki işlem uygulanır.

$$(i) - \frac{a_{i1}}{a_{11}} * (1) \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Bu işlem uygulandıktan sonra denklem sistemi aşağıdaki duruma gelir.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\
 (2') \quad & a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = c'_2 \\
 (3') \quad & a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = c'_3 \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 (n') \quad & a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \dots + a'_{nn}x_n = c'_n
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde ikinci denklemden itibaren sonraki denklemlerde sıra ile x_2, x_3, \dots, x_n bilinmeyenleride yok edilirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\
 (2') \quad & a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = c'_2 \\
 (3'') \quad & a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = c''_3 \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 (n^{(n-1)}) \quad & a^{(n-1)}_{nn}x_n = c^{(n-1)}_n
 \end{aligned}$$

Bu sistemde x_n bilinmeyeninden başlayarak geriye doğru yerine koyma işlemi ile bütün bilinmeyenler aşağıdaki formüller ile hesaplanır .

$$x_n = \frac{c_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_i = \frac{c_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Örnek 4.4.1

$$\begin{aligned} (1) \quad & 3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 = 7,85 \\ (2) \quad & 0,1x_1 + 7x_2 - 0,3x_3 = -19,3 \\ (3) \quad & 0,3x_1 - 0,2x_2 + 10x_3 = 71,4 \end{aligned}$$

Bu denklem sistemine $(2) - \frac{0,1}{3} * (1)$ ve $(3) - \frac{0,3}{3} * (1)$ işlemleri yapılırsa

$$(1) \quad 3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 = 7,85$$

$$(1) \quad 3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 = 7,85$$

$$(2') \quad (0,1 - \frac{0,1}{3} * 3)x_1 + [7 - \frac{0,1}{3} * (-0,1)]x_2 + [-0,3 - \frac{0,1}{3} * (-0,2)]x_3 = -19,3 - \frac{0,1}{3} * 7,85$$

$$(3') \quad (0,3 - \frac{0,3}{3} * 3)x_1 - [0,2 - \frac{0,3}{3} * (-0,1)]x_2 + [10 - \frac{0,3}{3} * (-0,2)]x_3 = 71,4 - \frac{0,3}{3} * 7,85$$

$$(1) \quad 3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 = 7,85$$

$$(2') \quad 7,00333x_2 - 0,293333x_3 = -19,5617$$

$$(3') \quad -0,19x_2 + 10,02x_3 = 70,6150$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde son satıra $(3') - \frac{(-0,19)}{7,0033} * (2')$ işlemi yapılırsa

$$(1) \quad 3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 = 7,85$$

$$(2') \quad 7,00333x_2 - 0,293333x_3 = -19,5617$$

$$(3'') \quad 10,012x_3 = 70,0843$$

Bu son elde edilen sistemden bilinmeyenler son denklemden ilk denkleme doğru yerine koyma ile elde edilir.

Son $(3'')$ denklemden $x_3 = \frac{70,0843}{10,0120} = 7,00003$ bulunur. Bu x_3 değeri ile $(2')$

denkleminde gidilip oradan x_2 hesaplanır

$$7,00333x_2 - 0,293333(7,00003) = -19,5617$$

$$x_2 = -2,5$$

Bulunan bu x_2 ve x_3 değerlerini (1) denkleminde yerine yerleştirerek x_1 bilinmiyenide çözülür.

$$3x_1 - 0,1(-2,5) - 0,2(7,00003) = 7,85 \quad x_1 = 3$$

Örnek 4.4.2

$$(x_1 = 3, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 2)$$

$$4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 15$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 26$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 27$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -1 & 26 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 3 - \frac{3}{4} * 4 & 1 - \frac{3}{4} * (-2) & -2 - \frac{3}{4} * (-1) & 1 - \frac{3}{4} * 3 & 0 - \frac{3}{4} * 15 \\ 2 - \frac{2}{4} * 4 & 3 - \frac{2}{4} * (-2) & 5 - \frac{2}{4} * (-1) & -1 - \frac{2}{4} * 3 & 26 - \frac{2}{4} * 15 \\ 1 - \frac{1}{4} * 4 & -1 - \frac{1}{4} * (-2) & 3 - \frac{1}{4} * (-1) & 4 - \frac{1}{4} * 3 & 27 - \frac{1}{4} * 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 2,5 & -1,25 & -1,25 & -11,25 \\ 0 & 4 & 5,5 & -2,5 & 18,5 \\ 0 & -0,5 & 3,25 & 3,25 & 23,25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 2,5 & -1,25 & -1,25 & -11,25 \\ 0 & 4 - \frac{4}{2,5} * 2,5 & 5,5 - \frac{4}{2,5} * (-1,25) & -2,5 - \frac{4}{2,5} * (-1,25) & 18,5 - \frac{4}{2,5} * (-11,25) \\ 0 & -0,5 - \frac{(-0,5)}{2,5} * 2,5 & 3,25 - \frac{(-0,5)}{2,5} * (-1,25) & 3,25 - \frac{(-0,5)}{2,5} * (-1,25) & 23,25 - \frac{(-0,5)}{2,5} * (-11,25) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 2,5 & -1,25 & -1,25 & -11,25 \\ 0 & 0 & 7,5 & -0,5 & 36,5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 2,5 & -1,25 & -1,25 & -11,25 \\ 0 & 0 & 7,5 & -0,5 & 36,5 \\ 0 & 0 & 3 - \frac{3}{7,5} * 7,5 & 3 - \frac{3}{7,5} * (-0,5) & 21 - \frac{3}{7,5} * (36,5) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 2,5 & -1,25 & -1,25 & -11,25 \\ 0 & 0 & 7,5 & -0,5 & 36,5 \\ 0 & 0 & 0 & 3,2 & 6,4 \end{bmatrix}$$

$$3,2x_4 = 6,4 \quad , \quad x_4 = \frac{6,4}{3,2} \quad , \quad x_4 = 2$$

$$7,5x_3 - 0,5 * 2 = 36,5 \quad , \quad x_3 = \frac{36,5 + 0,5 * 2}{7,5} \quad , \quad x_3 = 5$$

$$2,5x_2 - 1,25 * 5 - 1,25 * 2 = -11,25 \quad x_2 = \frac{-11,25 + 6,25 + 2,5}{2,5} \quad , \quad x_2 = -1$$

$$4x_1 - 2(-1) - 1 * 5 + 3 * 2 = 15 \quad x_1 = \frac{15 - 2 + 5 - 6}{4} \quad , \quad x_1 = 3$$

Elde edilen çözüm değerlerinin sağlanması

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 * 3 + (-2) * (-1) + (-1) * 5 + 3 * 2 \\ 3 * 3 + 1 * (-1) + (-2) * 5 + 1 * 2 \\ 2 * 3 + 3 * (-1) + 5 * 5 + (-1) * 2 \\ 1 * 3 + (-1) * (-1) + 3 * 5 + 4 * 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix}$$

4.5 GAUSS-JOURDAN METODU

Bu yöntemde $[A]\{x\} = \{c\}$ denklem sistemi her iki tarafı $[A]^{-1}$ ile soldan çarpılarak $[I]\{x\} = [A]^{-1}\{c\}$ Sistemine dönüştürülür.

Örnek 4.5.1

$$4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 15$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 26$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 27$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -1 & 26 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4/4 & -2/4 & -1/4 & 3/4 & 15/4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -1 & 26 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,25 & 0,75 & 3,75 \\ 3-3*1 & 1-3*(-0,5) & -2-3*(-0,25) & 1-3*0,75 & 0-3*3,75 \\ 2-2*1 & 3-2*(-0,5) & 5-2*(-0,25) & -1-2*(0,75) & 26-2*3,75 \\ 1-1*1 & -1-1*(-0,5) & 3-1*(-0,25) & 4-1*(0,75) & 27-1*3,75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,25 & 0,75 & 3,75 \\ 0 & 2,5 & -1,25 & -1,25 & -11,25 \\ 0 & 4 & 5,5 & -2,5 & 18,5 \\ 0 & -0,5 & 3,25 & 3,25 & 23,25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,5+0,5*1 & -0,25+0,5(-0,5) & 0,75+0,5(-0,5) & 3,75+0,5*(-4,5) \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 & -4,5 \\ 0 & 4-4*1 & 5,5-4*(-0,5) & -2,5-4*(-0,5) & 18,5-4*(-4,5) \\ 0 & -0,5+0,5*1 & 3,25+0,5*(-0,5) & 3,25+0,5(-0,5) & 23,25+0,5(-4,5) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5 & 0,5 & 1,5 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 & -4,5 \\ 0 & 0 & 7,5 & -0,5 & 36,5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5 + 0,5 * 1 & 0,5 + 0,5 * (-0,06667) & 1,5 + 0,5(4,86667) \\ 0 & 1 & -0,5 + 0,5 * 1 & -0,5 + 0,5 * (-0,06667) & -4,5 + 0,5 * 4,86667 \\ 0 & 0 & 1 & -0,06667 & 4,86667 \\ 0 & 0 & 3 - 3 * 1 & 3 - 3(-0,06667) & 21 - 3 * 4,86667 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,46665 & 3,9333 \\ 0 & 1 & 0 & -0,5333 & -2,0666 \\ 0 & 0 & 1 & -0,06667 & 4,86667 \\ 0 & 0 & 0 & 3,2 & 6,4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,46665 - 0,4665 * 1 & 3,9333 - 0,4665 * 2 \\ 0 & 1 & 0 & -0,5333 + 0,533 * 1 & -2,0666 + 0,533 * 2 \\ 0 & 0 & 1 & -0,06667 + 0,0667 * 1 & 4,86667 + 0,0667 * 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bu elde edilen arttırılmış matris aşağıdaki arttırılmış matrise eşit olduğundan

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & 2 \end{bmatrix}$$

böylece

$$x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = -1 \quad , \quad x_3 = 5 \quad , \quad x_4 = 2$$

çözüm değerleri bulunmuş olur.

4.6 TERS MATRİS METODU

Ters matris yönteminde aynı katsayılar matrisine sahip lineer denklem sistemlerinde farklı ikinci taraf vektörleri için çözümler daha kolay elde edilir.

4.6.1 Gauss-Jordan yönteminin matrislerin tersinin bulunmasına uygulması

$[A]\{x\} = \{c\}$ denklem sisteminin her iki tarafı $[A]^{-1}$ ile çarpılırsa

$\{x\} = [A]^{-1} \{c\}$ elde edilir.

$[A]$ matrisi ile aşağıdaki gibi n tane denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu n tane sistem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & \dots & y_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \dots & y_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y_{1n} & y_{2n} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A][Y] = [I] \rightarrow [Y] = [A]^{-1}$$

şeklinde gösterilebilir. Buradan yazılacak $[A \ I]$ arttırılmış matrisi $[I \ K]$ (yani $[I][Y] = [K] \rightarrow [Y] = [K]$) matrisine dönüştürülürse $[K] = [A]^{-1}$ elde edilir.

Çünkü $[A][Y] = [I]$ olduğuna göre $[I][Y] = [K]$ olur. Ayrıca $[Y] = [A]^{-1}$ ve birim matrisle bir matrisin çarpımı kendisine eşit olduğundan $[I][Y] = [Y]$ dır.

buradan $[Y] = [K]$ ve sonuç olarak $[K] = [A]^{-1}$ bulunur.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{nn} \end{bmatrix}$$

Örnek 4.6.1.1

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 &= 7,85 \\ 0,1x_1 + 7x_2 - 0,3x_3 &= -19,3 \\ 0,3x_1 - 0,2x_2 + 10x_3 &= 71,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 &= 20 \\ 0,1x_1 + 7x_2 - 0,3x_3 &= 50 \\ 0,3x_1 - 0,2x_2 + 10x_3 &= 15 \end{aligned}$$

denklem sistemlerini çözünüz.

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 7 & -0,3 & 0 & 1 & 0 \\ 0,3 & -0,2 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3/3 & -0,1/3 & -0,2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0,1 & 7 & -0,3 & 0 & 1 & 0 \\ 0,3 & -0,2 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,0333333 & -0,0666667 & 0,333333 & 0 & 0 \\ 0,1 & 7 & -0,3 & 0 & 1 & 0 \\ 0,3 & -0,2 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,0333333 & -0,0666667 & 0,333333 & 0 & 0 \\ 0,1-0,1*1 & 7-0,1*(-0,0333333) & -0,3-0,1*(-0,0666667) & 0-0,1*0,333333 & 1 & 0 \\ 0,3-0,3*1 & -0,2-0,3*(-0,0333333) & 10-0,3(-0,0666667) & 0-0,3*0,333333 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,0333333 & -0,0666667 & 0,333333 & 0 & 0 \\ 0 & 7,00333 & -0,293333 & -0,0333333 & 1 & 0 \\ 0 & -0,190000 & 10,0200 & -0,1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,0333333 & -0,0666667 & 0,333333 & 0 & 0 \\ 0 & 7,00333/7,00333 & -0,293333/7,00333 & -0,0333333/7,00333 & 1/7,00333 & 0 \\ 0 & -0,190000 & 10,0200 & -0,1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,0333333 & -0,0666667 & 0,333333 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,0417061 & -0,00473933 & 0,142180 & 0 \\ 0 & -0,190000 & 10,0200 & -0,1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,033+0,033*1 & -0,067+0,033*(-0,0417) & 0,333+0,033 & 0,033*0,142 & 0 \\ 0 & 1 & -0,041706 & -0,0047393 & 0,142180 & 0 \\ 0 & -0,19+0,19*1 & 10,02+0,19*(-0,0417) & -0,1+0,19*(-0,0047) & 0,19*0,142 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,068057 & 0,333175 & 0,004739329 & 0 \\ 0 & 1 & -0,0417061 & -0,00473933 & 0,142180 & 0 \\ 0 & 0 & 10,0121 & -0,10090 & 0,0270142 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,068057 & 0,333175 & 0,004739329 & 0 \\ 0 & 1 & -0,0417061 & -0,00473933 & 0,142180 & 0 \\ 0 & 0 & 10,0121/10,0121 & -0,10090/10,0121 & 0,0270142/10,0121 & 1/10,0121 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,068057 & 0,333175 & 0,004739329 & 0 \\ 0 & 1 & -0,0417061 & -0,00473933 & 0,142180 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0100778 & 0,0026981 & 0,0998791 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,068 + 0,068 & 0,333 + 0,068 * (-0,01) & 0,0047 + 0,068 * 0,0027 & 0,068 * 0,1 \\ 0 & 1 & -0,0417 + 0,0417 & -0,0047 + 0,0417 * (-0,01) & 0,142 + 0,0417 * 0,0027 & 0,417 * 0,1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,01008 & 0,0027 & 0,099879 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,332489 & 0,00492297 & 0,00679813 \\ 0 & 1 & 0 & -0,0051644 & 0,142293 & 0,00418346 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0100779 & 0,00269816 & 0,0998801 \end{bmatrix}$$

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} 0,332489 & 0,00492297 & 0,00679813 \\ -0,0051644 & 0,142293 & 0,00418346 \\ -0,0100779 & 0,00269816 & 0,0998801 \end{bmatrix}$$

Böylece katsayılar matrisi $[A]$ olan Bütün sistemlerin çözümü:

$$\{x\} = [A]^{-1} \{c\}$$

denklemleri ile elde edilir.

İlk sistemin çözümü:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,332489 & 0,00492297 & 0,00679813 \\ -0,0051644 & 0,142293 & 0,00418346 \\ -0,0100779 & 0,00269816 & 0,0998801 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 7,85 \\ -19,3 \\ 71,4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,0004118 \\ -2,488016 \\ 7,0002531 \end{Bmatrix}$$

ikinci sistemin çözümü:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,332489 & 0,00492297 & 0,00679813 \\ -0,0051644 & 0,142293 & 0,00418346 \\ -0,0100779 & 0,00269816 & 0,0998801 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 20 \\ 50 \\ 15 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6,9979 \\ 7,07411 \\ 1,43955 \end{Bmatrix}$$

Örnek 4.6.1.2

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \{c\} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,25 & 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 3-3(1) & 1-3(-0,5) & -2-3(-0,25) & 1-3(0,75) & 0-3(0,25) & 1 & 0 & 0 \\ 2-2(1) & 3-2(-0,5) & 5-2(-0,25) & -1-2(0,75) & 0-2(0,25) & 0 & 1 & 0 \\ 1-1(1) & -1-1(-0,5) & 3-1(-0,25) & 4-1(0,75) & 0-1(0,25) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,25 & 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,5 & -1,25 & -1,25 & -0,75 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5,5 & -2,5 & -0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 3,25 & 3,25 & -0,25 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,5+0,5(1) & -0,25+0,5(-0,5) & 0,75+0,5(-0,5) & 0,25+0,5(-0,3) & 0+0,5(0,4) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 & -0,3 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 4-4(1) & 5,5-4(-0,5) & -2,5-4(-0,5) & -0,5-4(-0,3) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5+0,5(1) & 3,25+0,5(-0,5) & 3,25+0,5(-0,5) & -0,25+0,5(-0,3) & 0+0,5(0,4) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0,1 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 & -0,3 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,5 & -0,5 & 0,7 & -1,6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -0,4 & 0,2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5+0,5 & 0,5+0,5(-0,0667) & 0,1+0,5*0,0933 & 0,2+0,5(-0,213) & 0,5*0,133 & 0 \\ 0 & 1 & -0,5+0,5 & -0,5+0,5(-0,0667) & -0,3+0,5*0,0933 & 0,4+0,5(-0,213) & 0,5*0,133 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0667 & 0,933 & -0,213 & 0,133 & 0 \\ 0 & 0 & 3-3*1 & 3-3(-0,0667) & -0,4-3*0,0933 & 0,2-3(-0,213) & 0-3*0,133 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,4667 & 0,1466 & 0,0933 & 0,0666 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,533 & -0,2533 & 0,2933 & 0,0666 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0667 & 0,0933 & -0,2133 & 0,1333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,2 & -0,68 & 0,84 & -0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,47 - 0,47 & 0,146 - 0,47(0,21) & 0,093 - 0,47(0,26) & 0,06 - 0,47(-0,12) & 0,47 * 0,31 \\ 0 & 1 & 0 & -0,533 & -0,253 & 0,293 & 0,06 + 0,53(-0,12) & 0,53 * 0,31 \\ 0 & 0 & 1 & -0,067 & 0,093 & -0,213 & 0,13 + 0,067(-0,12) & 0,067 * 0,31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,2125 & 0,2625 & -0,125 & 0,3125 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,2458 & -0,0292 & 0,125 & -0,1458 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0,3666 & 0,43335 & 0 & 0,1666 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,0788 & -0,1958 & 0,125 & 0,0208 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,2125 & 0,2625 & -0,125 & 0,3125 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2458 & -0,0292 & 0,125 & -0,1458 \\ -0,3666 & 0,43335 & 0 & 0,1666 \\ 0,0788 & -0,1958 & 0,125 & 0,0208 \\ -0,2125 & 0,2625 & -0,125 & 0,3125 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2458 & -0,0292 & 0,125 & -0,1458 \\ -0,3666 & 0,43335 & 0 & 0,1666 \\ 0,0788 & -0,1958 & 0,125 & 0,0208 \\ -0,2125 & 0,2625 & -0,125 & 0,3125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,2458 * 15 - 0,0292 * 0 + 0,125 * 26 - 0,1458 * 27 \\ -0,3666 * 15 + 0,43335 * 0 + 0 * 26 + 0,1666 * 27 \\ 0,0788 * 15 - 0,1958 * 0 + 0,125 * 26 + 0,0208 * 27 \\ -0,2125 * 15 + 0,2625 * 0 - 0,125 * 26 + 0,3125 * 27 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

4.7 LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN ALT ÜST ÜÇGEN MATRİSLERE AYIRMA METODU İLE ÇÖZÜMÜ:

$$[A]\{x\} = \{C\} \quad , \quad [A]\{x\} - \{C\} = \{0\}$$

$$[U]\{x\} = \{D\} \quad , \quad [U]\{x\} - \{D\} = \{0\}$$

$$[L] \{ [U]\{x\} - \{D\} \} = [A]\{x\} - \{C\}$$

$$[L][U] = [A] \quad (\text{Burada } [L] \text{ alt üçgen matris, } [U] \text{ ise üst üçgen matristir.})$$

$$[L]\{D\} = \{C\} \quad \text{Bu son denklemden } \{D\} \text{ çözümlenir.}$$

$[U]\{x\} = \{D\}$ denkleminde yerine konup $\{x\}$ bilinmeyen vektörü bu denklemden hesaplanır.

4.7.1 Gauss eliminasyon yöntemi ile alt üst üçgen matrislere ayırma işlemi

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} , \quad [U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a''_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a^{(n-1)}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[A] = [L][U] =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ f_{21}a_{11} & f_{21}a_{12} + a'_{12} & f_{21}a_{13} + a'_{23} & \cdots & f_{21}a_{1n} + a'_{2n} \\ f_{31}a_{11} & f_{31}a_{12} + f_{32}a'_{22} & f_{31}a_{13} + f_{32}a'_{23} + a''_{33} & \cdots & f_{31}a_{1n} + f_{32}a'_{2n} + a''_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_{n1}a_{11} & f_{n1}a_{12} + f_{n2}a'_{22} & f_{n1}a_{13} + f_{n2}a'_{23} + f_{n3}a''_{33} & \cdots & f_{n1}a_{1n} + f_{n2}a'_{2n} + f_{n3}a''_{3n} + \cdots + f_{n(n-1)}a^{(n-2)}_{(n-1)n} + a^{(n-1)}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{21}\mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_{21} \Rightarrow \mathbf{f}_{21} = \frac{\mathbf{a}_{21}}{\mathbf{a}_{11}}$$

$$\mathbf{f}_{31}\mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_{31} \Rightarrow \mathbf{f}_{31} = \frac{\mathbf{a}_{31}}{\mathbf{a}_{11}}$$

Bu durumu diğer bütün \mathbf{f}_{i1} ler için genelleştirirsek

$$\mathbf{f}_{i1}\mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_{i1} \Rightarrow \mathbf{f}_{i1} = \frac{\mathbf{a}_{i1}}{\mathbf{a}_{11}} \quad \text{Burada } i = 2, 3, \dots, n \text{ dir.}$$

elde ederiz.

$$\mathbf{f}_{31}\mathbf{a}_{12} + \mathbf{f}_{32}\mathbf{a}'_{22} = \mathbf{a}_{32} \Rightarrow \mathbf{f}_{32} = (\mathbf{a}_{32} - \mathbf{f}_{31}\mathbf{a}_{12})/\mathbf{a}'_{22} \Rightarrow \mathbf{f}_{32} = (\mathbf{a}_{32} - \frac{\mathbf{a}_{31}}{\mathbf{a}_{11}}\mathbf{a}_{12})/\mathbf{a}'_{22}$$

$$\mathbf{f}_{41}\mathbf{a}_{12} + \mathbf{f}_{42}\mathbf{a}'_{22} = \mathbf{a}_{42} \Rightarrow \mathbf{f}_{42} = (\mathbf{a}_{42} - \mathbf{f}_{41}\mathbf{a}_{12})/\mathbf{a}'_{22} \Rightarrow \mathbf{f}_{42} = (\mathbf{a}_{42} - \frac{\mathbf{a}_{41}}{\mathbf{a}_{11}}\mathbf{a}_{12})/\mathbf{a}'_{22}$$

Bu işlemler \mathbf{f}_{i2} için genelleştirilebilir.

$$\mathbf{f}_{i1}\mathbf{a}_{12} + \mathbf{f}_{i2}\mathbf{a}'_{22} = \mathbf{a}_{i2} \Rightarrow \mathbf{f}_{i2} = (\mathbf{a}_{i2} - \mathbf{f}_{i1}\mathbf{a}_{12})/\mathbf{a}'_{22} \Rightarrow \mathbf{f}_{i2} = (\mathbf{a}_{i2} - \frac{\mathbf{a}_{i1}}{\mathbf{a}_{11}}\mathbf{a}_{12})/\mathbf{a}'_{22}$$

Burada $i = 3, 4, \dots, n$ dır.

$$\mathbf{f}_{41}\mathbf{a}_{13} + \mathbf{f}_{42}\mathbf{a}'_{23} + \mathbf{f}_{43}\mathbf{a}''_{33} = \mathbf{a}_{43} \Rightarrow \mathbf{f}_{43} = (\mathbf{a}_{43} - \mathbf{f}_{41}\mathbf{a}_{13} - \mathbf{f}_{42}\mathbf{a}'_{23})/\mathbf{a}''_{33}$$

Bu eşitlik genelleştirilirse

$$\mathbf{f}_{i1}\mathbf{a}_{13} + \mathbf{f}_{i2}\mathbf{a}'_{23} + \mathbf{f}_{i3}\mathbf{a}''_{33} = \mathbf{a}_{i3} \Rightarrow \mathbf{f}_{i3} = (\mathbf{a}_{i3} - \mathbf{f}_{i1}\mathbf{a}_{13} - \mathbf{f}_{i2}\mathbf{a}'_{23})/\mathbf{a}''_{33}$$

Burada $i = 4, 5, \dots, n$ dır.

Benzer şekilde devam edilirse sonunda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{f}_{21}\mathbf{a}_{11} & \mathbf{f}_{21}\mathbf{a}_{12} + \mathbf{a}'_{12} & \mathbf{f}_{21}\mathbf{a}_{13} + \mathbf{a}'_{23} & \dots & \mathbf{f}_{21}\mathbf{a}_{1n} + \mathbf{a}'_{2n} \\ \mathbf{f}_{31}\mathbf{a}_{11} & \mathbf{f}_{31}\mathbf{a}_{12} + \mathbf{f}_{32}\mathbf{a}'_{22} & \mathbf{f}_{31}\mathbf{a}_{13} + \mathbf{f}_{32}\mathbf{a}'_{23} + \mathbf{a}''_{33} & \dots & \mathbf{f}_{31}\mathbf{a}_{1n} + \mathbf{f}_{32}\mathbf{a}'_{2n} + \mathbf{a}''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{f}_{n1}\mathbf{a}_{11} & \mathbf{f}_{n1}\mathbf{a}_{12} + \mathbf{f}_{n2}\mathbf{a}'_{22} & \mathbf{f}_{n1}\mathbf{a}_{13} + \mathbf{f}_{n2}\mathbf{a}'_{23} + \mathbf{f}_{n3}\mathbf{a}''_{33} & \dots & \mathbf{f}_{n1}\mathbf{a}_{1n} + \mathbf{f}_{n2}\mathbf{a}'_{2n} + \mathbf{f}_{n3}\mathbf{a}''_{3n} + \dots + \mathbf{f}_{n(n-1)}\mathbf{a}^{(n-2)}_{(n-1)n} + \mathbf{a}^{(n-1)}_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Örnek 4.7.1.1

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \{C\} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$[A] = [L][U]$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 & 0 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 1 \end{bmatrix} \quad [U] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2,5 & -1,25 & -1,25 \\ 0 & 0 & 7,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 3,2 \end{bmatrix}$$

$$f_{21} \cdot 4 = a_{21} \Rightarrow f_{21} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$f_{31} \cdot 4 = a_{31} \Rightarrow f_{31} = \frac{2}{4} = 0,5$$

$$f_{41} \cdot 4 = a_{41} \Rightarrow f_{41} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$f_{31}(-2) + f_{32} \cdot 2,5 = a_{32} \Rightarrow f_{32} = [3 - 0,5(-2)] / 2,5 \Rightarrow f_{32} = 1,6$$

$$f_{41}(-2) + f_{42} \cdot 2,5 = a_{42} \Rightarrow f_{42} = [-1 - 0,25(-2)] / 2,5 \Rightarrow f_{42} = -0,2$$

$$f_{41}(-1) + f_{42}(-1,25) + f_{43} \cdot 7,5 = a_{43} \Rightarrow f_{43} = (3 + 0,25 - 0,2 \cdot 1,25) / 7,5 \Rightarrow f_{43} = 0,4$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,75 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1,6 & 1 & 0 \\ 0,25 & -0,2 & 0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[L]\{D\} = \{C\}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,75 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1,6 & 1 & 0 \\ 0,25 & -0,2 & 0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{Bmatrix}$$

$$d_1 = 15$$

$$0,75d_1 + d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = -0,75 \cdot 15 \Rightarrow d_2 = -11,25$$

$$0,5d_1 + 1,6d_2 + d_3 = 26 \Rightarrow d_3 = 26 - 0,5*15 - 1,6*(-11,25) \Rightarrow d_3 = 36,5$$

$$0,25d_1 - 0,2d_2 + 0,4d_3 + d_4 = 27 \Rightarrow d_4 = -0,25*15 - 0,2*11,25 - 0,4*36,5 + 27 \Rightarrow d_4 = 6,4$$

$$[U]\{x\} = \{D\}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2,5 & -1,25 & -1,25 \\ 0 & 0 & 7,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 3,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -11,25 \\ 36,5 \\ 6,4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4.7.2 Crout Bileşenlere ayırma yöntemi : (Crout decomposition)

n=4 üzerinde gösterilişi :

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = a_{11}, \quad l_{21} = a_{21}, \quad l_{31} = a_{31}, \quad l_{41} = a_{41}$$

$$l_{i1} = a_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$l_{11}u_{12} = a_{12} \quad l_{11}u_{13} = a_{13} \quad l_{11}u_{14} = a_{14}$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} \quad u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}}$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

$$l_{21}u_{12} + l_{22} = a_{22}, \quad l_{31}u_{12} + l_{32} = a_{32}, \quad l_{41}u_{12} + l_{42} = a_{42}$$

$$l_{i1}u_{12} + l_{i2} = a_{i2} \Rightarrow l_{i2} = a_{i2} - l_{i1}u_{12}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = (a_{23} - l_{21}u_{13})/l_{22}$$

$$l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} = a_{24} \Rightarrow u_{24} = (a_{24} - l_{21}u_{14})/l_{22}$$

$$l_{21}u_{1j} + l_{22}u_{2j} = a_{2j} \Rightarrow u_{2j} = (a_{2j} - l_{21}u_{1j})/l_{22}, \quad j = 3, 4, \dots, n$$

$$l_{i3} = a_{i3} - l_{i1}u_{13} - l_{i2}u_{23} \quad , \quad i = 3, 4, \dots, n$$

$$u_{3j} = (a_{3j} - l_{31}u_{1j} - l_{32}u_{2j}) / l_{33} \quad , \quad j = 4, 5, \dots, n$$

$$l_{i4} = a_{i4} - l_{i1}u_{14} - l_{i2}u_{24} - l_{i3}u_{34} \quad , \quad i = 4, 5, \dots, n$$

Crout alt üst üçgen matrislere ayırma yönteminin herhangi bir n sayısı için formülleri:

$$l_{i1} = a_{i1} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad , \quad j = 2, 3, \dots, n$$

$$j = 2, 3, \dots, n-1 \quad \text{ için}$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{kj}u_{kj} \quad , \quad i = j, j+1, j+2, \dots, n$$

$$u_{kj} = \frac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ji}u_{ik}}{l_{jj}} \quad , \quad k = j+1, j+2, \dots, n$$

$$l_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$$

Örnek 4.7.2.1

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$l_{i1} = a_{i1} \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$l_{11} = a_{11} = 4 \quad , \quad l_{21} = a_{21} = 3 \quad , \quad l_{31} = a_{31} = 2 \quad , \quad l_{41} = a_{41} = 1$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad , \quad j = 2, 3, 4$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{-2}{4} \Rightarrow u_{12} = -0,5$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{-1}{4} \Rightarrow u_{13} = -0,25$$

$$u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}} = \frac{3}{4} \Rightarrow u_{14} = 0,75$$

$j = 2, 3$ için

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{kj} u_{kj} \quad , \quad i = j, j+1, 4$$

$$u_{kj} = \frac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ji} u_{ik}}{l_{jj}} \quad , \quad k = j+1, 4$$

$$l_{44} = a_{44} - \sum_{k=1}^3 l_{4k} u_{k4}$$

$$j = 2 \text{ ve } i = 3 \text{ için} \quad l_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} = 1 - 3(-0,5) \Rightarrow l_{22} = 2,5$$

$$j = 2 \text{ ve } i = 3 \text{ için} \quad l_{32} = a_{32} - l_{31} u_{12} = 3 - 2(-0,5) \Rightarrow l_{32} = 4$$

$$j = 2 \text{ ve } i = 4 \text{ için} \quad l_{42} = a_{42} - l_{41} u_{12} = -1 - 1(-0,5) \Rightarrow l_{42} = -0,5$$

$$j = 3 \text{ ve } i = 3 \text{ için} \quad l_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23} = 5 - 2(-0,25) - 4(-0,5) \Rightarrow l_{33} = 7,5$$

$$j = 3 \text{ ve } i = 4 \text{ için} \quad l_{43} = a_{43} - l_{41} u_{13} - l_{42} u_{23} = 3 - 1(-0,25) - (-0,5)(-0,5) \Rightarrow l_{43} = 3$$

$$j = 2 \text{ ve } k = 3 \text{ için} \quad u_{23} = (a_{23} - l_{21} u_{13}) / l_{22} = [(-2 - 3(-0,25))] / 2,5 \Rightarrow u_{23} = -0,5$$

$$j = 2 \text{ ve } k = 4 \text{ için} \quad u_{24} = (a_{24} - l_{21} u_{14}) / l_{22} = [1 - 3(0,75)] / 2,5 \Rightarrow u_{24} = -0,5$$

$$j = 3 \text{ ve } k = 4 \text{ için}$$

$$u_{34} = (a_{34} - l_{31} u_{14} - l_{32} u_{24}) / l_{33} = [-1 - 2(0,75) - 4(-0,5)] / 7,5 \Rightarrow u_{34} = -0,06667$$

son olarak

$$l_{44} = a_{44} - l_{41} u_{14} - l_{42} u_{24} - l_{43} u_{34} = 3 - 1(0,75) - (-0,5)(-0,5) - 3(0,06667) \Rightarrow l_{44} = 3,2$$

bulunur.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2,5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7,5 & 0 \\ 1 & -0,5 & 3 & 3,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,25 & 0,75 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & -0,6667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu elde edilen alt ve üst üçgen matrislerin denklem sisteminin çözümüne uygulanışı

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2,5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7,5 & 0 \\ 1 & -0,5 & 3 & 3,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$4d_1 = 15 \quad d_1 = 15/4 \Rightarrow d_1 = 3,75$$

$$3d_1 + 2,5d_2 = 0 \quad d_2 = -3 * 3,75 / 2,5 \Rightarrow d_2 = -4,5$$

$$2d_1 + 4d_2 + 7,5d_3 = 26 \quad d_3 = [26 - 2 * 3,75 - 4 * (-4,5)] / 7,5 \Rightarrow d_3 = 4,86667$$

$$d_1 - 0,5d_2 + 3d_3 + 3,2d_4 = 27 \quad d_4 = (27 - 3,75 - 0,5 * 4,5 - 3 * 4,86667) / 3,2 \Rightarrow d_4 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,25 & 0,75 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & -0,6667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,75 \\ -4,5 \\ 4,86667 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = 2$$

$$x_3 - 0,06667 * x_4 = 4,86667 \quad x_3 = 4,86667 + 0,06667 * 2 \Rightarrow x_3 = 5$$

$$x_2 - 0,5x_3 - 0,5x_4 = -4,5 \quad x_2 = -4,5 + 0,5 * 5 + 0,5 * 2 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 - 0,5x_2 - 0,25x_3 + 0,75x_4 = 3,75 \quad x_1 = 3,75 + 0,5 * (-1) + 0,25 * 5 - 0,75 * 2 \Rightarrow x_1 = 3$$

4.8 KAREKÖK METODU (Cholesky yöntemi) :

Bu yöntem simetrik ve pozitif tanımlı katsayılar matrisi için uygulanır. Özellikle bu durumdaki bant matrislerde uygulanır.

$[A]$ pozitif tanımlı olmalıdır.

Yani bütün $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$ vektörleri için

$Q = \{x\}^T [A] \{x\} \quad Q > 0$ olmalıdır veya

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \det[A]$$

hepsinin pozitif olması gerekir.

$$[A] = [L][U]$$

$$[A]^T = [U]^T [L]^T$$

Simetrik matrislerde $[A] = [A]^T$ olduğundan

$$[A] = [L][L]^T \text{ olur.}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & \dots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & \dots & l_{n2} \\ 0 & 0 & l_{33} & \dots & l_{n3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & & \dots & a_{n2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$l_{11}l_{11} = a_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{11}l_{21} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}}$$

$$l_{11}l_{i1} = a_{i1} \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

$$l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{21}l_{31})/l_{22}$$

$$l_{21}l_{i1} + l_{22}l_{i2} = a_{i2} \Rightarrow l_{i2} = (a_{i2} - l_{21}l_{i1})/l_{22}, \quad i = 3, 4, \dots, n$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33} \Rightarrow l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$$

$$l_{31}l_{41} + l_{32}l_{42} + l_{33}l_{43} = a_{43} \Rightarrow l_{43} = (a_{43} - l_{31}l_{41} - l_{32}l_{42})/l_{33}$$

$$l_{31}l_{i1} + l_{32}l_{i2} + l_{33}l_{i3} = a_{i3} \Rightarrow l_{i3} = (a_{i3} - l_{31}l_{i1} - l_{32}l_{i2})/l_{33} \quad i = 4, \dots, n$$

$k = 1, 2, \dots, n$ için genel formül:

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$l_{ki} = (a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}l_{kj})/l_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

Bu işlemlerin sonucunda elde edilen $[L]$ matrisi denklem sisteminin çözümünde aşağıdaki eşitlikler yardımıyla kullanılır.

$$[L]\{D\} = \{C\} \quad \text{denklemden elde edilen } \{D\} \text{ sütun matrisi}$$

$$[L]^T\{x\} = \{D\} \quad \text{denkleminde yerine konup } \{x\} \text{ istenen çözüm matrisi bulunur.}$$

$$d_1 = \frac{c_1}{l_{11}}$$

$$d_i = (c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}d_j)/l_{ii}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$l_{nn}x_n = d_n \rightarrow x_n = \frac{d_n}{l_{nn}}$$

$$x_i = [d_i - \sum_{j=i+1}^n l_{ji}x_j]/l_{ii}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Örnek 4.8.1

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21 \\ 27 \\ 29 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$l_{11}^2 = 4 \Rightarrow l_{11} = 2$$

$$l_{11}l_{21} = 3 \Rightarrow l_{21} = 1,5, \quad l_{11}l_{31} = 2 \Rightarrow l_{31} = 1, \quad l_{11}l_{41} = 1 \Rightarrow l_{41} = 0,5$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 6 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{6 - (1,5)^2} \Rightarrow l_{22} = 1,9365$$

$$l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 4 \Rightarrow l_{32} = (4 - 1,5 * 1) / 1,9365 \Rightarrow l_{32} = 1,291$$

$$l_{21}l_{41} + l_{22}l_{42} = 2 \Rightarrow l_{42} = (2 - 1,5 * 0,5) / 1,9365 \Rightarrow l_{42} = 0,6455$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 5 \Rightarrow l_{33} = \sqrt{5 - 1^2 - (1,291)^2} \Rightarrow l_{33} = 1,5275$$

$$l_{31}l_{41} + l_{32}l_{42} + l_{33}l_{43} = 1 \Rightarrow l_{43} = (1 - 1 * 0,5 - 1,291 * 0,6455) / 1,5275 \Rightarrow l_{43} = -0,2182$$

$$l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 = 3 \Rightarrow l_{44} = \sqrt{3 - 0,5^2 - 0,6455^2 - (-0,2182)^2} \Rightarrow l_{44} = 1,5119$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 & 1,9365 & 0 & 0 \\ 1 & 1,291 & 1,5275 & 0 \\ 0,5 & 0,6455 & -0,2182 & 1,5119 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21 \\ 27 \\ 29 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

$$2d_1 = 21 \Rightarrow d_1 = 10,5$$

$$1,5d_1 + 1,9365d_2 = 27 \Rightarrow d_2 = (27 - 1,5 * 10,5) / 1,9365 \Rightarrow d_2 = 5,81$$

$$d_1 + 1,291d_2 + 1,5275d_3 = 29 \Rightarrow d_3 = (29 - 10,5 - 1,291 * 5,81) / 1,5275 \Rightarrow d_3 = 7,2$$

$$0,5d_1 + 0,6455d_2 - 0,2182d_3 + 1,5119d_4 = 12 \quad d_4 = 3,02$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 1,9365 & 1,291 & 0,6455 \\ 0 & 0 & 1,5275 & -0,2182 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5119 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10,5 \\ 5,81 \\ 7,2 \\ 3,02 \end{Bmatrix}$$

$$1,5119x_4 = 3,02 \Rightarrow x_4 = 2$$

$$1,5275x_3 - 0,2182x_4 = 7,2 \Rightarrow x_3 = (7,2 + 0,2182 * 2) / 1,5275 \Rightarrow x_3 = 5$$

$$1,9365x_2 + 1,291x_3 + 0,6455x_4 = 5,81 \Rightarrow x_2 = (5,81 - 1,291 * 5 - 0,6455 * 2) / 1,9365$$

$$x_2 = -1$$

$$2x_1 + 1,5x_2 + x_3 + 0,5x_4 = 10,5 \Rightarrow x_1 = (10,5 - 1,5(-1) - 5 - 0,5 * 2) / 2 \Rightarrow x_1 = 3$$

4.9 İTERASYON YÖNTEMİ (Gauss – Seidel yöntemi) :

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= c_3 \\
 \vdots & \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= c_n
 \end{aligned}$$

Denklem sisteminde her i . denklemden x_i leri çözüp aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) / a_{11}$$

$$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) / a_{22}$$

$$x_3 = (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \dots - a_{3n}x_n) / a_{33}$$

$$x_n = (c_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}) / a_{nn}$$

$$|\varepsilon_{a,i}| = \left| \frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j} \right| 100\%$$

Örnek 4.9.1

$$3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 = 7,85$$

$$0,1x_1 + 7x_2 - 0,3x_3 = -19,3$$

$$0,3x_1 - 0,2x_2 + 10x_3 = 71,4$$

Denklem sisteminin iterasyon yöntemi ile çözümü için aşağıdaki denklemler kullanılır.

$$x_1 = (7,85 + 0,1x_2 + 0,2x_3) / 3$$

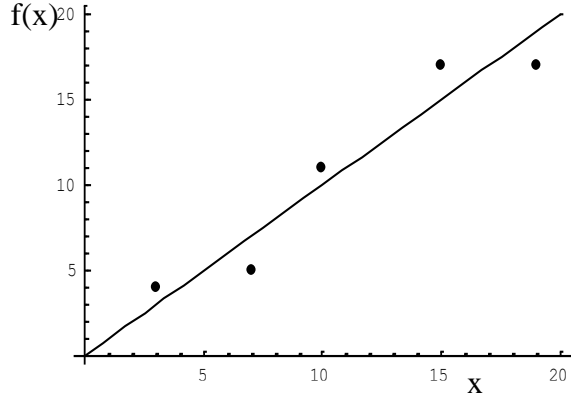
$$x_2 = (-19,3 - 0,1x_1 + 0,3x_3) / 7$$

$$x_3 = (71,4 - 0,3x_1 + 0,2x_2) / 10$$

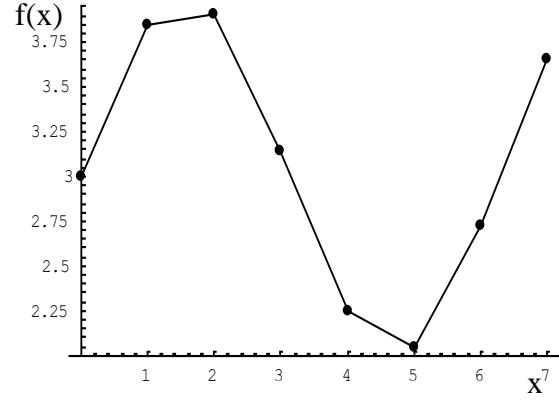
Bu denklemler yardımı ile aşağıdaki tablo oluşturulur.

i	x_1	x_2	x_3	$ \varepsilon_{a,1} , \%$	$ \varepsilon_{a,2} , \%$	$ \varepsilon_{a,3} , \%$
	2,61666666	0	0			
	2,61666666	-2,7945238	0			
	2,61666666	-2,7945238	7,005609524			
	2,99055650	-2,7945238	7,005609524	12,5		
	2,99055650	-2,4996246	7,005609524		11,8	
	2,99055650	-2,4996246	7,000290811			11,8

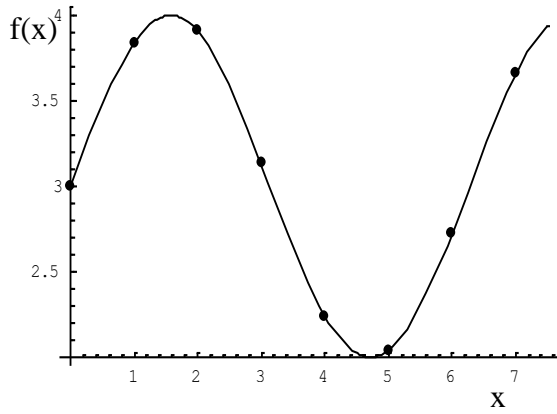
5 EĞRİYE UYDURMA



Doğruya yaklaştırma linear regression



Lineer interpolasyon



Eğrisel interpolasyon

5.1 YAKLAŞTIRMA (Regression) METODU

5.1.1 Doğruya yaklaştırma (Linear regression) yöntemi:

Bu yöntemde doğruya yaklaşımdaki hataların karelerinin toplamını minimum yapacak doğru denklemi araştırılır.

Hatayı içerecek şekilde doğru denklemi:

$$y = a_0 + a_1x + E$$

seklindedir. Burada E hatayı gösterir.

$$E = y - a_0 - a_1x$$

Hataların karelerinin toplamı:

$$S_r = \sum_{i=1}^n E_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i)^2$$

şeklinde yazılır. Bu elde edilen hataların karelerinin toplamını minimum yapacak a_0 ve a_1 değeri bunlara göre alınacak türevleri sıfıra eşitliyerek bulunur.

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n a_0 - \sum_{i=1}^n a_1 x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n a_0 x_i - \sum_{i=1}^n a_1 x_i^2 = 0$$

$$n a_0 + \sum_{i=1}^n x_i a_1 = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_i a_0 + \sum_{i=1}^n x_i^2 a_1 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - a_1 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}}$$

Tahmini standart sapma :

$$S_y = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}}$$

Toplam standart sapma : Burada $S_t = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} \quad \text{tanım katsayısı : } r \text{ correlation katsayısı:}$$

Örnek 5.1.1.1

Aşağıdaki tablo değerlerini bir doğruya yaklaştırın.

i	y_i	$(y_i - \bar{y})^2$	$y_i - a_0 - a_1 x_i$
1	0,5	8,5765	0,1687
2	2,5	0,8622	0,5625
3	2,0	2,0408	0,3473
4	4,0	0,3265	0,3265
5	3,5	0,0051	0,5896
6	6,0	6,6122	0,7972
7	5,5	4,2908	0,1993
\sum	24	22,7143	2,9911

Bu tablodaki verilerden ve aşağıdaki eşitliklerden

$$n = 7, \quad \sum_{i=1}^7 x_i y_i = 119,5, \quad \sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140, \quad \sum_{i=1}^7 x_i = 28, \quad \bar{x} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\sum_{i=1}^7 y_i = 24, \quad \bar{y} = \frac{24}{7} = 3,428571429$$

elde edilen bu değerleri kullanarak doğru denklemi için gerekli katsayılar hesaplanır.

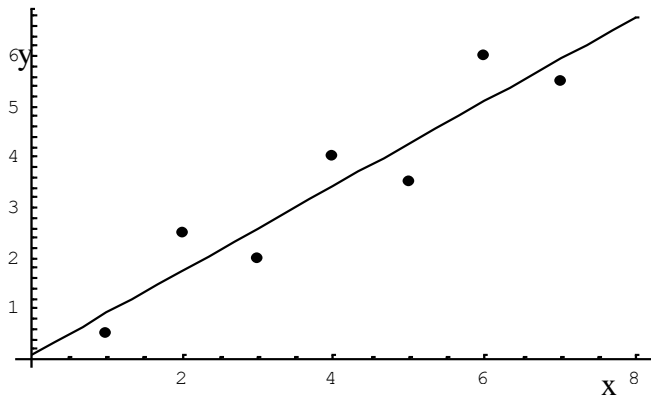
$$a_1 = \frac{7 * 119,5 - 28 * 24}{7 * 140 - (28)^2} \Rightarrow a_1 = 0,839285714$$

$$a_0 = 3,428571429 - 0,839285714 * 4 \Rightarrow a_0 = 0,07142857$$

ve doğru denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$y = 0,07142857 + 0,839285714 x$$

Bu doğrunun grafiği ve tablo değerleri aşağıdaki şekilden izlenebilir.



$$S_y = \sqrt{\frac{22,7143}{7-1}} = 1,9457 \quad (\text{Toplam standart sapma})$$

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{2,9911}{7-2}} = 0,7735 \quad (\text{Standart tahmini hata})$$

$S_{y/x} < S_y$ olduğundan bu örnek için doğruya yaklaştırma uygun bir seçimdir.

5.1.2 Polinoma yaklaştırma metodu

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m + E$$

Burada E hata veya resüdü

$$E = y - a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_mx^m$$

$$S_r = \sum_{i=1}^n (y - a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_mx^m)^2$$

Bu hataların karelerinin toplamı $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ katsayılarına göre ayrı ayrı türevleri alınırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \dots - a_mx_i^m) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \dots - a_mx_i^m) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^n x_i^2 (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \dots - a_mx_i^m) = 0$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_m} = -2 \sum_{i=1}^n x_i^m (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \dots - a_mx_i^m) = 0$$

Türev işlemi sonunda bulunan bu denklemler sıfıra eşitlenip tekrar düzenlenirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$a_0n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{2m} = \sum_{i=1}^n x_i^m y_i$$

Bu denklem sisteminden $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ çözülür.

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n - (m + 1)}} \quad \text{Standart tahmini hata.}$$

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} \quad \text{korelasyon (ilişki ,bağlantı) katsayısı}$$

$$S_t = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

Örnek 5.1.2.1

Aşağıdaki tabloda bulunan x_i , y_i değerlerini 2.dereceden polinoma yaklaştırın.

x_i	y_i	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2$
0	2,1	544,44	0,14332
1	7,7	314,47	1,00286
2	13,6	140,03	1,08158
3	27,2	3,12	0,80491
4	40,09	239,22	0,61951
5	61,1	1272,11	0,09439
\sum	152,6	2513,39	3,74657

$$m = 2 \quad , \quad n = 6 \quad , \quad \bar{x} = 2,5 \quad , \quad \bar{y} = 25,433 \quad , \quad \sum_{i=1}^5 x_i = 15 \quad , \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 152,6$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55 \quad , \quad \sum_{i=1}^5 x_i^3 = 225 \quad , \quad \sum_{i=1}^5 x_i^4 = 979 \quad , \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 585,6 \quad , \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 y_i = 2488,8$$

$$\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{aligned}$$

Yukarıda bulduğumuz a_i bilinmeyenlerinin katsayılarını bu denklem sisteminde yerine konursa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$6a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 152,6$$

$$15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 585,6$$

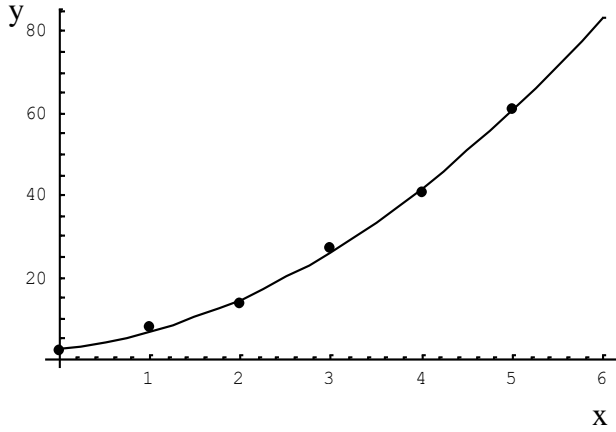
$$55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 2488,8$$

Bu denklem sisteminin çözümünden bulunan

$$a_0 = 2,47857 \quad , \quad a_1 = 2,35929 \quad , \quad a_2 = 1,86071$$

değerleri ile aşağıda çizilen 2. derecen polinom yazılır.

$$y = 2,47857 + 2,35929x + 1,86071x^2$$



$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{3,74657}{6-3}} = 1,12 \quad (\text{Standart tahmini hata})$$

$$r^2 = \frac{2513,39 - 3,74657}{2513,39} \quad (\text{kararlılık katsayısı})$$

$r = 0,99925$ (Bu sonuç uyumun çok iyi olduğunu gösterir.)

5.1.3 İki değişkenli lineer bağıntılarda tablo değerlerini lineer denkleme çekmek

Burada doğru denklemi düzlem denklemi haline döñüşür.

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + E$$

$$E = y - a_0 - a_1x_1 - a_2x_2$$

hatasının karelerinin toplamı

$$S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i})^2$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin aynı şekilde a_0 , a_1 , a_2 bilinmeyen katsayılarına göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i}) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_{1i} (y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i}) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^n x_{2i} (y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i}) = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler sıfıra eşitlenip \mathbf{a} katsayılarına göre düzenlenirse 3 bilinmeyenli 3 tane lineer denklem yazılır.

$$\mathbf{a}_0 \mathbf{n} + \mathbf{a}_1 \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{1i} + \mathbf{a}_2 \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{2i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i$$

$$\mathbf{a}_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{1i} + \mathbf{a}_1 \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{1i}^2 + \mathbf{a}_2 \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{1i} \mathbf{x}_{2i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{1i} \mathbf{y}_i$$

$$\mathbf{a}_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{2i} + \mathbf{a}_1 \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{1i} \mathbf{x}_{2i} + \mathbf{a}_2 \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{2i} \mathbf{y}_i$$

Bu denklem sistemi aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n} & \sum \mathbf{x}_{1i} & \sum \mathbf{x}_{2i} \\ \sum \mathbf{x}_{1i} & \sum \mathbf{x}_{1i}^2 & \sum \mathbf{x}_{1i} \mathbf{x}_{2i} \\ \sum \mathbf{x}_{2i} & \sum \mathbf{x}_{1i} \mathbf{x}_{2i} & \sum \mathbf{x}_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum \mathbf{y}_i \\ \sum \mathbf{x}_{1i} \mathbf{y}_i \\ \sum \mathbf{x}_{2i} \mathbf{y}_i \end{Bmatrix}$$

5.1.4 Çok değişkenli lineer bağıntılarda tablo değerlerini lineer denkleme çekmek

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{x}_3 + \cdots + \mathbf{a}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{E}$$

denklemindeki \mathbf{E} hatasının karelerinin toplamı ve türevleri yukarıdaki gibi düzenlenirse aşağıdaki matris formundaki denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n} & \sum \mathbf{x}_{1i} & \sum \mathbf{x}_{2i} & \cdot & \cdot & \cdot & \sum \mathbf{x}_{mi} \\ \sum \mathbf{x}_{1i} & \sum \mathbf{x}_{1i}^2 & \sum \mathbf{x}_{1i} \mathbf{x}_{2i} & \cdot & \cdot & \cdot & \sum \mathbf{x}_{1i} \mathbf{x}_{mi} \\ \sum \mathbf{x}_{2i} & \sum \mathbf{x}_{2i} \mathbf{x}_{1i} & \sum \mathbf{x}_{2i}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \sum \mathbf{x}_{2i} \mathbf{x}_{mi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum \mathbf{x}_{mi} & \sum \mathbf{x}_{mi} \mathbf{x}_{1i} & \sum \mathbf{x}_{mi} \mathbf{x}_{2i} & \cdot & \cdot & \cdot & \sum \mathbf{x}_{mi}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum \mathbf{y}_i \\ \sum \mathbf{x}_{1i} \mathbf{y}_i \\ \sum \mathbf{x}_{2i} \mathbf{y}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum \mathbf{x}_{mi} \mathbf{y}_i \end{Bmatrix}$$

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{\mathbf{n} - (\mathbf{m} + 1)}} \quad (\text{standart tahmini hata})$$

Örnek 5.1.4.1

Aşağıdaki iki değişkenli tablo değerlerini iki değişkenli lineer denkleme uydurun.

x_1	x_2	y	x_1^2	x_2^2	$x_1 x_2$	$x_1 y$	$x_2 y$
0	0	5	0	0	0	0	0
2	1	10	4	1	2	20	10
2,	2	9	6,25	4	5	22,5	18
1	3	0	1	9	3	0	0
4	6	3	16	36	24	12	18
7	2	27	49	4	14	189	54
$\sum 16,5$	14	54	76,25	54	48	243,5	100

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i} x_{2i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1i} y_i \\ \sum x_{2i} y_i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 16,5 & 14 \\ 16,5 & 76,25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 54 \\ 243,5 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

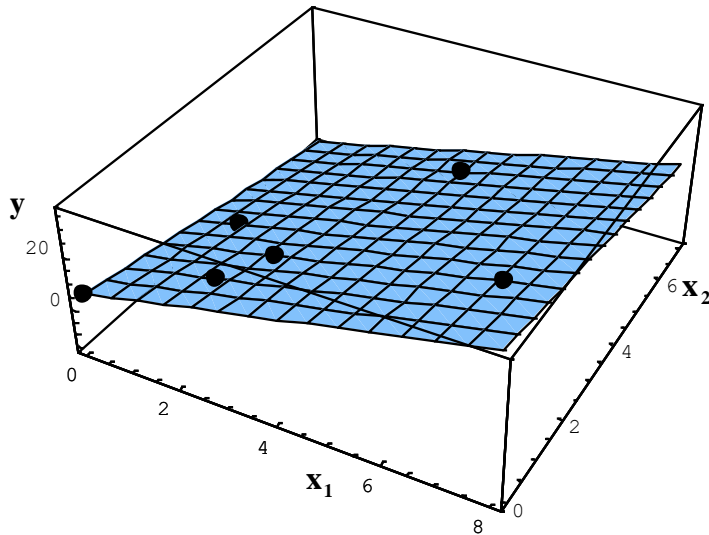
Bu denklem sisteminin çözümünden

$$a_0 = 5, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = -3$$

elde edilen değerleri ile aşağıdaki denklem yazılır.

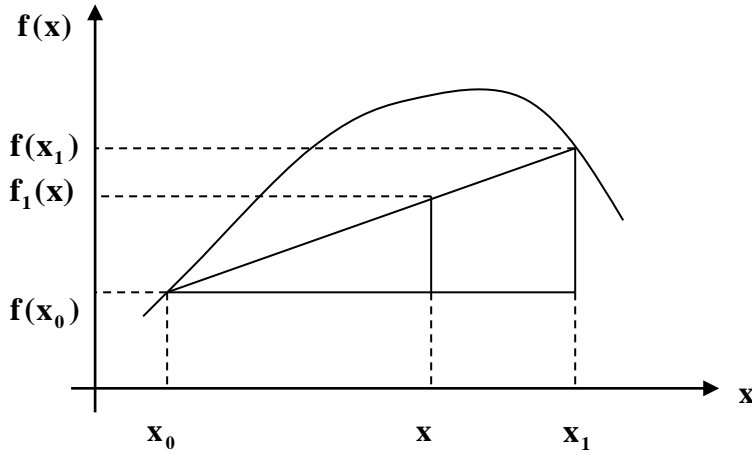
$$y = 5 + 4x_1 - 3x_2$$

Verilen tablo değerleri ile Bulunan düzlem denkleminin uyumu aşağıdaki grafik üzerinden izlenebilir.



5.2 İNTERPOLASYON

5.2.1 Lineer interpolasyon (ara değeri bulma)



$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad , \quad f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Örnek 5.2.1.1

$$\ln 1 = 0 \quad \ln 6 = 1,7917595 \quad \ln 4 = 1,3862944$$

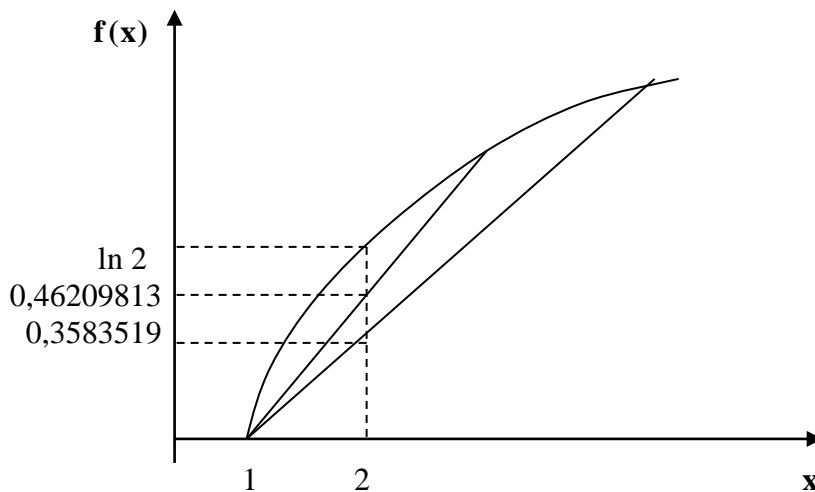
$$\ln 2 = ? \quad (\ln 2 = 0,69314718)$$

1. Çözüm: $x_0 = 1$, $x_1 = 6$

$$f_1(2) = 0 + \frac{1,7917595 - 0}{6 - 1} (2 - 1) \Rightarrow f_1(2) = 0,35835190 \quad , \quad |\varepsilon_t| = 48,3 \%$$

2. Çözüm: $x_0 = 1$, $x_1 = 4$

$$f_1(2) = 0 + \frac{1,3862944 - 0}{4 - 1} (2 - 1) \Rightarrow f_1(2) = 0,46209813 \quad , \quad |\varepsilon_t| = 33,3 \%$$



5.2.2 Kuadratik interpolasyon

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \quad (3.3.2.2.-1)$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1x - b_1x_0 + b_2x^2 + b_2x_0x_1 - b_2xx_0 - b_2xx_1 \quad (3.3.2.2.-2)$$

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (3.3.2.2.-3)$$

$$a_0 = b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1 \quad (3.3.2.2.-4)$$

$$a_1 = b_1 - b_2x_0 - b_2x_1 \quad (3.3.2.2.-5)$$

$$a_2 = b_2 \quad (3.3.2.2.-6)$$

(3.3.2.2.-1) denkleminde x yerine x_0 yazılırsa

$$b_0 = f(x_0) \quad (3.3.2.2.-7)$$

elde edilir.

Bu bulunan (3.3.2.2.-7) eşitliği ve x yerine x_1 değişkeni (3.3.2.2.-1) denkleminde yerine yazılırsa

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (3.3.2.2.-8)$$

denklemini bulunur. Bu (3.3.2.2.-8) ve (3.3.2.2.-7) denklemini (3.3.2.2.-1) de yerine konur ve ayrıca x yerine x_2 yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \quad (3.3.2.2.-9)$$

Örnek 5.2.2.1

$$x_0 = 1 \quad f(x_0) = 0 \quad , \quad x_1 = 4 \quad f(x_1) = 1,3862944 \quad , \quad x_2 = 6 \quad f(x_2) = 1,7917595$$

$$f(2) = ?$$

$$b_0 = 0 \quad b_1 = \frac{1,3862944 - 0}{4 - 1} \Rightarrow b_1 = 0,46209813$$

$$b_2 = \frac{\frac{1,7917595 - 1,3862944}{6 - 4} - 0,46209813}{6 - 1} \Rightarrow b_2 = -0,051873116$$

$$f_2(x) = 0 + 0,46209813(x-1) - 0,051873116(x-1)(x-4)$$

$$f_2(2) = 0,56584436 \quad \varepsilon_t = 18,4 \%$$

5.3 Newton interpolasyon polinomunun genel formu

n. mertebeden polinom $n+1$ adet veri noktaları gerektirir.

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \dots + b_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

.

.

.

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

Burada

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]}{x_n - x_0}$$

$$f_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_1, x_0] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_2, x_1, x_0] \\ + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$$

Örnek 5.3.1

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 4 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 5$$

$$f(x_0) = \ln 1 = 0 \quad f(x_1) = \ln 4 = 1,3862944 \quad f(x_2) = \ln 6 = 1,7917595$$

$$f(x_3) = \ln 5 = 1,6094379$$

3. dereceden polinom $n = 3$

$$f_3(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$b_0 = f(x_0) = \ln 1 \Rightarrow b_0 = 0$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{1,3862944 - 0}{4 - 1} \Rightarrow b_1 = 0,46209813$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{1,7917595 - 1,3862944}{6 - 4} = 0,20273255$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{1,6094379 - 1,7917595}{5 - 6} = 0,18232160$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{0,20273255 - 0,46209813}{6 - 1} \Rightarrow b_2 = -0,051873116$$

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{0,18232160 - 0,20273255}{5 - 4} = -0,020410950$$

$$b_3 = f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{-0,020410950 - (-0,051873116)}{5 - 1} \Rightarrow b_3 = 0,0078655415$$

$$f_3(x) = 0 + 0,46209813(x - 1) - 0,051873116(x - 1)(x - 4) + 0,0078655415(x - 1)(x - 4)(x - 6)$$

$$f_3(2) = 0,62876869 \quad \varepsilon_t = 9,3\%$$

5.4 İnterpolasyon polinomlarının katsayılarını bulmak için diğer bir yöntem

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Bu polinomdaki $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ $n+1$ tane katsayıyı bulmak için $n+1$ tane veri noktası gerekir.

Örnek olarak $n = 2$ için 3 bilinmiyenli denklem elde edilir. Bu gereken veri noktaları

$$[x_0, f(x_0)] \quad , \quad [x_1, f(x_1)] \quad , \quad [x_2, f(x_2)]$$

şeklindedir. Bunlar $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ denkleminde yerine ayrı ayrı konursa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$f(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2$$

$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2$$

$$f(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2$$

Bu denklem sisteminden bilinmiyen a_0, a_1, a_2 katsayıları bulunur.

Örnek 5.4.1

$$\ln x \quad x_0 = 1 \quad f(x_0) = 0, \quad x_1 = 4 \quad f(x_1) = 1,38629, \quad x_2 = 6 \quad f(x_2) = 1,79176$$

$$0 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$1,38629 = a_0 + 4a_1 + 16a_2$$

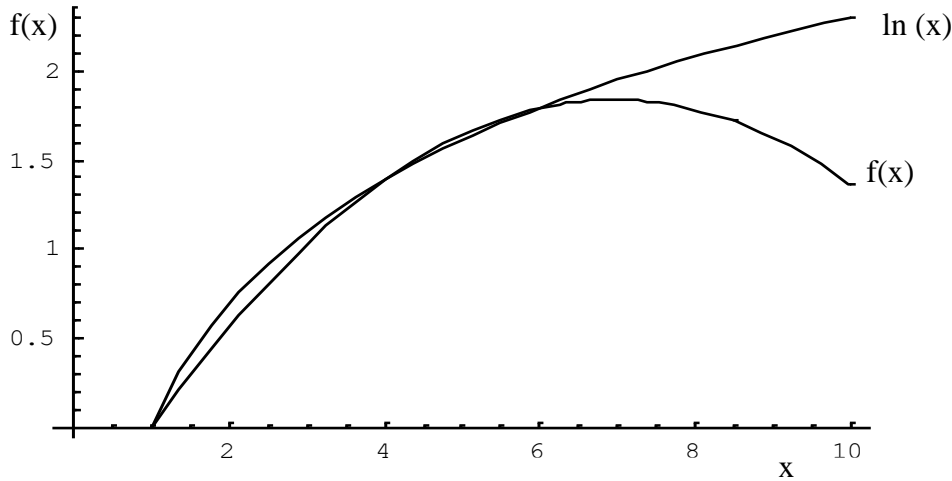
$$1,79176 = a_0 + 6a_1 + 36a_2$$

Bu denklem sisteminin çözümünden

$$a_0 = -0,669586, \quad a_1 = 0,721458, \quad a_2 = -0,0518723$$

$$f(x) = -0,6696 + 0,72146 x - 0,0518723 x^2$$

$$x = 2 \quad f(x) = 0,5658 \quad (\ln 2 = 0,69315)$$



5.5 Lagrange interpolasyon formülü

Newton interpolasyon formülünün daha kullanışlı hale getirilmiş şeklidir. Burada bölünmüş farkların hesabına gerek kalmaz.

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

$$\text{Burada } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Birinci dereceden ($n = 1$ için) Lagrange interpolasyon polinomu :

$$f_1(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^1 \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} \Rightarrow L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^1 \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} \Rightarrow L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

İkinci dereceden $n = 2$ için Lagrange interpolasyon polinomu :

$$f_2(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^2 \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} \Rightarrow L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^2 \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} \Rightarrow L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^2 \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} \Rightarrow L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$f_2(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Üçüncü dereceden $n = 3$ için Lagrange interpolasyon polinomu :

$$f_3(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + L_3(x) f(x_3)$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^3 \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} \Rightarrow L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \frac{x - x_3}{x_0 - x_3}$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^3 \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} \Rightarrow L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^3 \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} \Rightarrow L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$$

$$L_3(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 3}}^3 \frac{x - x_j}{x_3 - x_j} \Rightarrow L_3(x) = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

$$f_3(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \frac{x-x_3}{x_0-x_3} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{x-x_3}{x_1-x_3} f(x_1) \\ + \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{x-x_3}{x_2-x_3} f(x_2) + \frac{x-x_0}{x_3-x_0} \frac{x-x_1}{x_3-x_1} \frac{x-x_2}{x_3-x_2} f(x_3)$$

Lagrange interpolasyon polinomunun Newton interpolasyon polinomundan çıkarılışı.

$$f_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0]$$

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} f(x_0)$$

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Örnek 5.5.1

$$\ln x \quad x_0 = 1 \quad f(x_0) = 0, \quad x_1 = 4 \quad f(x_1) = 1,38629, \quad x_2 = 6 \quad f(x_2) = 1,79176$$

Birinci dereceden Lagrange polinomu için çözüm:

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$f_1(x) = \frac{x-4}{1-4} * 0 + \frac{x-1}{4-1} * 1,3862944$$

$$f_1(2) = \frac{2-4}{1-4} * 0 + \frac{2-1}{4-1} * 1,3862944 \Rightarrow f_1(2) = 0,4620981$$

İkinci dereceden Lagrange polinomu için çözüm:

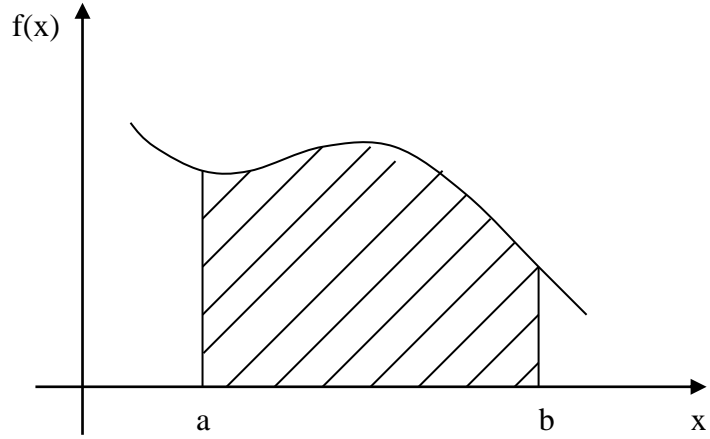
$$f_2(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

$$f_2(x) = \frac{x-4}{1-4} \frac{x-6}{1-6} * 0 + \frac{x-1}{4-1} \frac{x-6}{4-6} * 1,3862944 + \frac{x-1}{6-1} \frac{x-4}{6-4} * 1,7917595$$

$$f_2(x) = \frac{2-4}{1-4} \frac{2-6}{1-6} * 0 + \frac{2-1}{4-1} \frac{2-6}{4-6} * 1,3862944 + \frac{2-1}{6-1} \frac{2-4}{6-4} * 1,7917595 \Rightarrow f_2(x) = 0,565844$$

6 SAYISAL İNTEGRAL

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

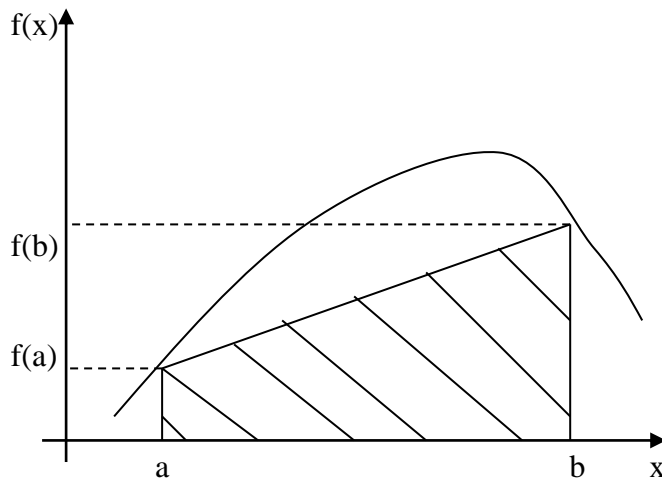


6.1 NEWTON-KOT İNTEGRAL FORMÜLÜ

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_n(x) dx$$

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

6.2 Trapez (yamuk) kuralı



$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_1(x) dx$$

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$I \cong \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right] dx$$

$$I \cong \left[f(a)x - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a x + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{x^2}{2} \right]_a^b$$

$$I \cong f(a)b - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a b + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{b^2}{2} - f(a)a + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a a - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{a^2}{2}$$

$$I \cong f(a)b - f(a)a + \frac{f(a)[ab + (-a^2 - b^2)/2] - f(b)[ab + (-a^2 - b^2)/2]}{b - a}$$

$$I \cong f(a)(b - a) + \frac{(b - a)^2 [f(b) - f(a)]}{2(b - a)}$$

$$I \cong f(a)(b - a) + \frac{(b - a)[f(b) - f(a)]}{2}$$

$$I \cong \frac{2f(a)(b - a) + (b - a)[f(b) - f(a)]}{2}$$

$$I \cong (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

6.2.1 İntegral bölgesinin n eşit parçaya bölünerek yamuk kuralının uygulaması:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

Burada $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ $n + 1$ adet noktadır.

$$h = \frac{b - a}{n} \quad \text{Parçaların genişliğidir.}$$

$$I \cong h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

$$I \cong \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)]$$

$$I = (b - a) \frac{f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i)$$

$$\bar{f}'' \cong \frac{\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)}{n}$$

Burada \bar{f}'' ikinci türevin bütün bölge içinde ortalama değeridir. Böylece yaklaşık hata aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \bar{f}''$$

Örnek 6.2.1.1

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$I = \int_0^{0,8} f(x) dx$$

Bu integral analitik olarak çözümlerse $I=1,64053334$ bulunur.

Burada $a = 0$, $b = 0,8$ dır.

$$n = 8 \text{ için } h = \frac{0,8-0}{8} = 0,1 \quad \text{ve} \quad x_0 = 0 \quad x_1 = 0,1 \quad x_2 = 0,2 \quad x_3 = 0,3 \quad x_4 = 0,4 \\ x_5 = 0,5 \quad x_6 = 0,6 \quad x_7 = 0,7 \quad x_8 = 0,8 \quad \text{değerleri aşağıdaki formülde yerine konursa}$$

$$I \cong (b-a) \frac{f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

$$I \cong (0,8-0) \frac{f(0) + 2 [f(0,1) + f(0,2) + f(0,3) + f(0,4) + f(0,5) + f(0,6) + f(0,7)] + f(0,8)}{2 * 8}$$

$$f(0) = 0,2 \quad f(0,1) = 1,289 \quad f(0,2) = 1,288 \quad f(0,3) = 1,607 \quad f(0,4) = 2,456$$

$$f(0,5) = 3,325 \quad f(0,6) = 3,464 \quad f(0,7) = 2,363 \quad f(0,8) = 0,232$$

$$I \cong 0,8 \frac{0,2 + 2 [1,289 + 1,288 + 1,607 + 2,456 + 3,325 + 3,464 + 2,363] + 0,232}{16}$$

$$I \cong 1,6008$$

$$E_t = 1,64053334 - 1,6008 \Rightarrow E_t = 0,03973334$$

$$\varepsilon_t = \left| \frac{1,64053334 - 1,6008}{1,64053334} \right| * 100 \Rightarrow \varepsilon_t = 2,42 \%$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \overline{f''}$$

$$\overline{f''} = \frac{\int_a^b f''(x) dx}{b-a}$$

$$f'(x) = 25 - 400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4$$

$$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3$$

$$\int_0^{0,8} f''(x) dx = \int_0^{0,8} (-400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3) dx$$

$$\int_0^{0,8} f''(x) dx = -400 * 0,8 + 4050 * (0,8)^2 / 2 - 10800 * (0,8)^3 / 3 + 8000 * (0,8)^4 / 4$$

$$\int_0^{0,8} f''(x) dx = -48 \qquad \overline{f''} = -60 \qquad E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \overline{f''}$$

$$E_a = -\frac{(0,8)^3}{12 * 8^2} (-60) \Rightarrow E_a = 0,04$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{E_a}{1,6008} \right| * 100 \Rightarrow \varepsilon_a = 2,499 \%$$

6.3 Simpson'un 1/3 kuralı

Buradaki $1/3$, h üçe bölündüğü içindir.

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_2(x) dx$$

Eğer $x_0 = a$ $x_2 = b$ $x_1 = \frac{b+a}{2}$ ve $f_2(x)$ yerine ikinci dereceden Lagrange polinomu alınırsa integral aşağıdaki şekle gelir.

$$I \cong \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Bu integral işlemi sonucunda elde edilen ifadede gereken kısaltmalar yapıldıktan sonra integral formülü aşağıdaki şekli alır.

$$I \cong \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Eğer (a, b) aralığı n eşit parçaya bölünürse

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$

$$I \cong (b-a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

formülü bulunur.

Örnek 6.3.1

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$I = \int_0^{0,8} f(x) dx$$

Bu integral analitik olarak çözümlerse $I=1,64053334$ bulunur.

Burada $a = 0$, $b = 0,8$ dır.

$n = 8$ için $h = \frac{0,8-0}{8} = 0,1$ ve $x_0 = 0$ $x_1 = 0,1$ $x_2 = 0,2$ $x_3 = 0,3$ $x_4 = 0,4$
 $x_5 = 0,5$ $x_6 = 0,6$ $x_7 = 0,7$ $x_8 = 0,8$ değerleri aşağıdaki formülde yerine konursa

$$I \cong (b-a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

$$I \cong (0,8-0) \frac{f(0) + 4 [f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7)] + 2[f(0,2) + f(0,4) + f(0,6)] + f(0,8)}{3*8}$$

$$f(0) = 0,2 \quad f(0,1) = 1,289 \quad f(0,2) = 1,288 \quad f(0,3) = 1,607 \quad f(0,4) = 2,456$$

$$f(0,5) = 3,325 \quad f(0,6) = 3,464 \quad f(0,7) = 2,363 \quad f(0,8) = 0,232$$

$$I \cong 0,8 \frac{0,2 + 4 [1,289 + 1,607 + 3,325 + 2,363] + 2[1,288 + 2,456 + 3,464] + 0,232}{24}$$

$$I \cong 1,6428$$

$$E_t = 1,64053334 - 1,6428 \Rightarrow E_t = -0,00226666$$

$$\varepsilon_t = \left| \frac{1,64053334 - 1,6428}{1,64053334} \right| * 100 \Rightarrow |\varepsilon_t| = 0,138 \%$$

6.4 IMPROPER İNTEGRAL (Sınırları sonsuz olan integral)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{t^2} f(1/t) dt$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int_{-A}^b f(x)dx$$

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt, \quad x = -A \Rightarrow t = -\frac{1}{A}, \quad x = -\infty \Rightarrow t = -\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \int_{-1/A}^0 f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt + \int_{-A}^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int_{-A}^B f(x)dx + \int_B^{\infty} f(x)dx$$

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt, \quad x = -A \Rightarrow t = -\frac{1}{A}, \quad x = -\infty \Rightarrow t = -\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1/A}^0 \frac{1}{t^2} f(1/t) dt + \int_{-A}^B f(x)dx + \int_0^{1/B} \frac{1}{t^2} f(1/t) dt$$

Örnek 6.4.1

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$$N(1) = ?$$

$$N(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-2} e^{-x^2/2} dx + \int_{-2}^1 e^{-x^2/2} dx \right)$$

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt, \quad x = -A \Rightarrow t = -\frac{1}{A}, \quad x = -\infty \Rightarrow t = -\frac{1}{\infty} = 0$$

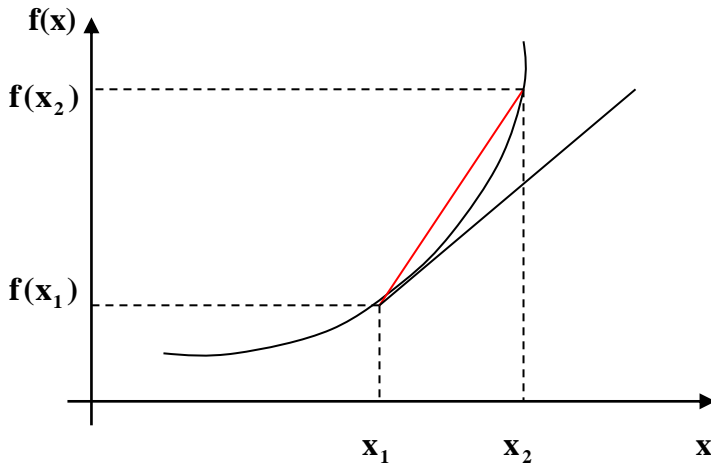
$$\int_{-\infty}^{-2} e^{-x^2/2} dx = \int_{-1/2}^0 \frac{1}{t^2} e^{-1/2t^2} dt \cong 0,0556$$

$$\int_{-2}^1 e^{-x^2/2} dx \cong 2,0523$$

$$N(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (0,0556 + 2,0523) \Rightarrow N(1) = 0,8409$$

7 SAYISAL TÜREV

Türevin tanımı :



$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{(x_2 - x_1) \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Bir fonksiyonun Taylor serisine açılımından faydalanılarak aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \dots \quad h = x_{i+1} - x_i$$

Buradan $f'(x_i)$ çözülebilir.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

Şeklinde yazılabilir. Veya

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

bu ikinci türev formülü ile birlikte aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h + O(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

7.1 İLERİ DOĞRU FARKLAR METODU İLE TÜREVLER

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \qquad f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} \qquad f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$$

7.2 GERİYE DOĞRU FARKLAR METODU İLE TÜREVLER

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} \quad f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{2h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2} \quad f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^3}$$
$$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4}))}{2h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4}))}{h^4}$$
$$f^{(4)}(x_i) = \frac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5}))}{h^4}$$

7.3 MERKEZİ FARKLAR METODU İLE TÜREVLER

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} \quad f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$
$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{12h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{2h^3}$$
$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3}))}{8h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^4}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{6h^4}$$

Örnek 7.3.1

$$f(x) = \ln x \quad f'(5) = ? \quad f''(5) = ?$$

Analitik çözüm:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f'(5) = 0,2 \quad f''(5) = -0,04$$

Sayısal çözüm:

$$f'(5) = \frac{\ln(5 + 0,01) - \ln(5)}{5,01 - 5} = \frac{1,6114435915 - 1,609437912}{0,01} \Rightarrow f'(5) = 0,199800266$$

$$f''(5) = \frac{\ln(5,02) - 2\ln(5,01) + \ln(5)}{(0,01)^2} = \frac{1,613429934 - 2 * 1,611435915 + 1,609437912}{0,0001}$$

$$f''(5) = -0,0398405$$

8 ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$$y = -0,5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8,5x + 1$$

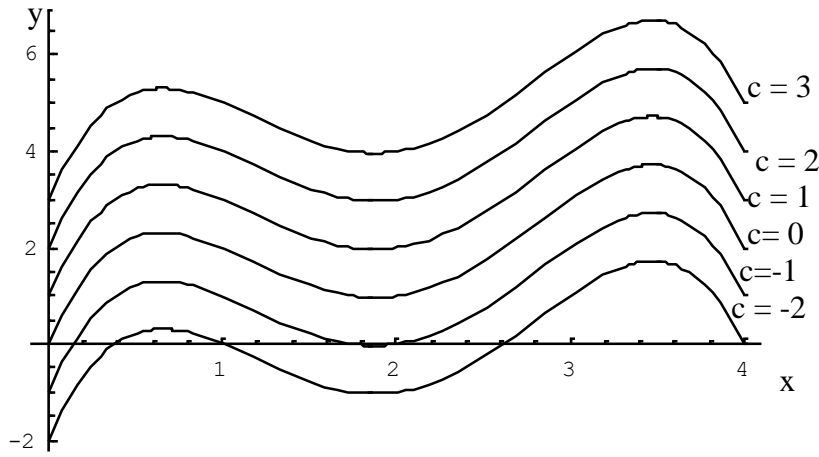
Şeklinde verilen denklem aşağıdaki diferansiyel denklemin gösterdiği eğrilerden sadece birisidir.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8,5$$

$$y = \int [-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8,5] dx$$

integralinin sonucu aşağıda gibi bir eğri ailesini gösterir.

$$y = -0,5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8,5x + C$$



Bu durumda tek bir eğrinin belirli olması için C integral sabitinin hesaplanabileceği koşulların verilmesi gerekir.

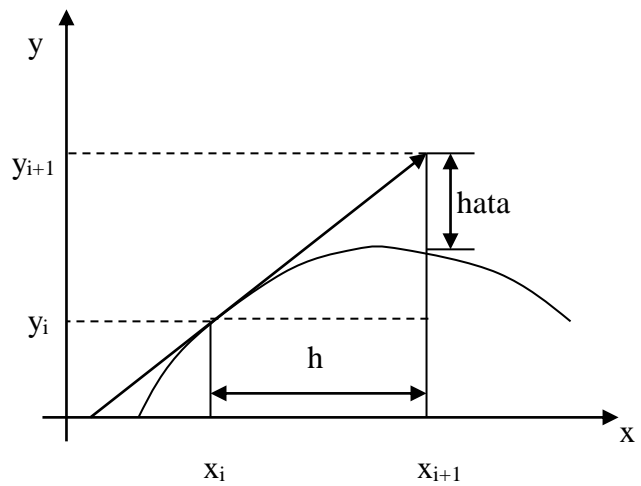
Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde geliştirilen yöntemlerden bazıları aşağıda verilmiştir.

8.1 EULER METODU

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

yeni değer = eski değer + eğim * adım



Örnek 8.1.1

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad y_{(4)} = 0,75 \quad y_{(7)} = ?$$

Analitik çözüm:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = -(\ln x - \ln c) \Rightarrow \ln y = \ln \frac{c}{x} \Rightarrow y = \frac{c}{x}$$

$$y_{(4)} = 0,75 \text{ koşulunu kullanırsak } 0,75 = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 3$$

$$\text{ve böylece } y = \frac{3}{x} \text{ bulunur. Buradan } y_{(7)} = \frac{3}{7} = 0,4285714$$

Sayısal çözüm:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

$$f(x_i, y_i) = -\frac{y_i}{x_i}$$

ve $h = 1$ alınırsa

$$y_{(5)} = y_{(4)} + (-y_{(4)} / 4) * 1 = 0,75 - (0,75/4) \Rightarrow y_{(5)} = 0,5625$$

$$y_{(6)} = y_{(5)} + (-y_{(5)} / 5) * 1 = 0,5625 - (0,5625/5) \Rightarrow y_{(6)} = 0,45$$

$$y_{(7)} = y_{(6)} + (-y_{(6)} / 6) * 1 = 0,45 - (0,45/6) \Rightarrow y_{(7)} = 0,375$$

$$\varepsilon_t = \frac{0,42857 - 0,375}{0,42857} 100\% = 12,5\%$$

8.1.1 İyileştirilmiş Euler metodu

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i) \frac{h}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$

Örnek 8.1.1.1

Yukarıdaki örnek iyileştirilmiş Euler yöntemi ile çözülmüşse

Yine aynı şekilde $h = 1$ alınırsa

$$y_{(4,5)} = y_{(4)} + (-y_{(4)} / 4) * 0,5 = 0,75 - (0,75/4) * 0,5 \Rightarrow y_{(4,5)} = 0,65625$$

$$y_{(5)} = y_{(4)} + (-y_{(4,5)} / 4,5) * 1 = 0,75 - (0,65625/4,5) * 1 \Rightarrow y_{(5)} = 0,6041666667$$

$$y_{(5,5)} = y_{(5)} + (-y_{(5)} / 5) * 0,5 = 0,6041667 - (0,6041667/5) * 0,5 \Rightarrow y_{(5,5)} = 0,54375$$

$$y_{(6)} = y_{(5)} + (-y_{(5,5)} / 5,5) * 1 = 0,6041667 - (0,54375/5,5) * 1 \Rightarrow y_{(6)} = 0,505303$$

$$y_{(6,5)} = y_{(6)} + (-y_{(6)} / 6) * 0,5 = 0,505303 - (0,505303/6) * 0,5 \Rightarrow y_{(6,5)} = 0,4631944$$

$$y_{(7)} = y_{(6)} + (-y_{(6,5)} / 6,5) * 1 = 0,505303 - (0,4631944/6,5) * 1 \Rightarrow y_{(7)} = 0,434042$$

$$\varepsilon_t = \left| \frac{0,4285714 - 0,434142}{0,4285714} \right| 100 \% \quad \varepsilon_t = 1,28 \%$$

8.2 HEUN METODU

Bu metotta Euler metodundaki i inci noktadaki türev yerine i ve $(i+1)$ inci noktadaki türevlerin aritmetik ortalaması alınır.

$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}$$

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h$$

Örnek 8.2.1

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad y_{(4)} = 0,75 \quad y_{(7)} = ? \quad (\text{analitik çözümde } y_{(7)} = \frac{3}{7} = 0,4285714)$$

$h = 1$ alınırsa

$$y_5^0 = y_4 + \left(-\frac{y_4}{4}\right) * 1 = 0,5625$$

$$y_5 = y_4 + \frac{\left(-\frac{y_4}{4}\right) + \left(-\frac{y_5^0}{5}\right)}{2} * h \Rightarrow y_5 = 0,6$$

$$y_6^0 = y_5 + \left(-\frac{y_5}{5}\right) * 1 = 0,48$$

$$y_6 = y_5 + \frac{\left(-\frac{y_5}{5}\right) + \left(-\frac{y_6^0}{6}\right)}{2} * h \Rightarrow y_6 = 0,5$$

$$y_7^0 = y_6 + \left(-\frac{y_6}{6}\right) * 1 = 0,4166667$$

$$y_7 = y_6 + \frac{\left(-\frac{y_6}{6}\right) + \left(-\frac{y_7^0}{7}\right)}{2} * h \Rightarrow y_7 = 0,4285714286$$

$$\varepsilon_t = 0 \%$$

8.3 RUNGE-KUTTA METODU

Runge-Kutta metodu, Taylor serileri ile yaklaşımdaki hassasiyeti, yüksek mertebeden türevlere ihtiyaç duymadan yakalayabildiğinden, yüksek hassasiyetin arandığı durumlarda tercih edilir. Runge-Kutta metodu aşağıdaki formda yazılabilir.

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

Burada

$\phi(x_i, y_i, h)$ fonksiyonuna artım fonksiyonu denir. Bu söz konusu aralıktaki eğimi gösterir.

Artım fonksiyonu genel formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$$

Burada a lar sabit k lar ise aşağıdaki gibidir.

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

.

.

.

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

Burada p ve q lar sabitlerdir.

8.3.1. İkinci dereceden Runge-Kutta metodu

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

y_{i+1} için y_i ve $f(x_i, y_i)$ terimleri ile ikinci mertebeden Taylor serisi yazılırsa

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2$$

Burada $f'(x_i, y_i)$ zincir kuralı ile belirlenmelidir.

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

Bu ikinci türev Taylor formülünde yerine yazılırsa

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \frac{h^2}{2!} \quad (2)$$

İki değişkenli fonksiyonlarda Taylor serisi

$$g(x+r, y+s) = g(x, y) + r \frac{\partial g}{\partial x} + s \frac{\partial g}{\partial y} + \dots$$

Bu formül yukarıdaki iki değişkenli fonksiyon içeren k_2 eşitliği için uygulanırsa

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) = f(x_i, y_i) + p_1 h \frac{\partial f}{\partial x} + q_{11} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^2)$$

Bu k_2 eşitliği $k_1 = f(x_i, y_i)$ eşitliği ile birlikte ilk y_{i+1} de yerine yazılırsa

$$y_{i+1} = y_i + a_1 h f(x_i, y_i) + a_2 h f(x_i, y_i) + a_2 p_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} h^2 f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^3)$$

ve terimler bir araya toplanırsa

$$y_{i+1} = y_i + [a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i)]h + [a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}]h^2 + O(h^3)$$

Bu denklem 2 denklemiyle $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ olduğu göz önüne alınarak karşılaştırılırsa

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Burada 3 denklem 4 bilinmeyen olduğundan çok sayıda çözüm elde edilebilir.

Tek düzeltme katsayılı Heun yöntemi ($a_2 = 1/2$)

$$a_2 = 1/2, \quad a_1 = 1/2, \quad p_1 = q_{11} = 1$$

Bu parametreler yerine konursa

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

Orta nokta metodu ($a_2 = 1$)

$$a_2 = 1, \quad a_1 = 0, \quad p_1 = q_{11} = \frac{1}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

Ralston yöntemi ($a_2 = 2/3$)

$$a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_1 = \frac{1}{3}, \quad p_1 = q_{11} = \frac{3}{4}$$

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h)$$

8.3.2. Üçüncü dereceden Runge-Kutta metodu

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 h + k_2 h)$$

8.3.3. Dördüncü dereceden Runge-Kutta metodu

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h)$$

Örnek 8.3.3.1

$$\frac{dy}{dx} = 4e^{0.8x} - 0.5y \quad , \quad y_0 = 2 \quad , \quad x=0 \text{ dan } x=0.5, \quad h=0.25$$

$$f(x, y) = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

$$k_1 = f(0.25, y_i) = 4e^{0.8*0.25} - 0.5y_i$$

$$y_{0.25} = y_0 + f(0, 2)0.25 = 2 + (4e^{0.8*0} - 0.5*2)0.25 = 2.75$$

$$k_1 = f(0.25, 2.75) = 4e^{0.8*0.25} - 0.5*2.75 = 3.510611$$

$$k_2 = f(0.25 + \frac{0.25}{2}, 2.75 + \frac{1}{2}3.510611*0.25)$$

$$k_2 = f(0.375, 3.188826) = 4e^{0.8*0.375} - 0.5*3.188826 = 3.80502$$

$$k_3 = f(0.25 + \frac{0.25}{2}, 2.75 + \frac{1}{2}3.80502*0.25)$$

$$k_3 = f(0.375, 3.22563) = 4e^{0.8*0.375} - 0.5*3.22563 = 3.78662$$

$$k_4 = f(0.25 + 0.25, 2.75 + 3.78662*0.25)$$

$$k_4 = f(0.5, 3.69665) = 4e^{0.8*0.5} - 0.5*3.69665 = 4.11897$$

$$y_{0.25} = 2 + \frac{1}{6}(3.510611 + 2*3.80502 + 2*3.78662 + 4.11897)0.25 = 2.95054$$

$$y_{0.5} = y_{0.25} + f(0.25, 2.95054)0.25 = 2.95054 + (4e^{0.8*0.25} - 0.5*2.95054)0.25 = 3.8031$$

$$k_1 = f(0.5, 3.8031) = 4e^{0.8*0.5} - 0.5*3.8031 = 4.06575$$

$$k_2 = f(0.5 + \frac{0.25}{2}, 3.8031 + \frac{1}{2}4.06575*0.25)$$

$$k_2 = f(0.625, 4.31132) = 4e^{0.8*0.625} - 0.5*4.31132 = 4.43922$$

$$k_3 = f(0.5 + \frac{1}{2}0.25, 3.8031 + \frac{1}{2}4.43922*0.25)$$

$$k_3 = f(0.625, 4.358) = 4e^{0.8*0.625} - 0.5*4.358 = 4.4159$$

$$k_4 = f(0.5 + 0.25, 3.8031 + 4.4159*0.25)$$

$$k_4 = f(0.75, 4.9071) = 4e^{0.8*0.75} - 0.5*4.9071 = 4.83492$$

$$y_{0.5} = 2.95054 + \frac{1}{6}(4.06575 + 2*4.43922 + 2*4.4159 + 4.83492)0.25 = 4.0593$$

8.4 DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ METODU

n inci mertebeden bir diferansiyel denklem n tane birinci mertebeden diferansiyel denklemden oluşan bir sisteme dönüştürülebilir.

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}$$

Bu sistemin çözümü için x in bir noktasındaki y_1, y_2, \dots, y_n değerlerinin (koşullarının) verilmesi gerekir.

Örnek 8.4.1

$$a = -\lambda s \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \lambda s = 0 \quad t = 0 \text{ da } s = s_0 \quad v = v_0$$

Analitik çözüm :

$$s = A \cos \sqrt{\lambda} t + B \sin \sqrt{\lambda} t$$

$$v = -A \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t + B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} t$$

$$A = s_0 \quad B = \frac{v_0}{\sqrt{\lambda}}$$

$$s = s_0 \cos \sqrt{\lambda} t + \frac{v_0}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} t$$

Örnek 8.4.2

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\pi^2}{36} s = 0 \quad t = 0 \text{ da } s_0 = 8 \quad v_0 = 12$$

$$t = 1 \text{ de } s_1 = ? \quad v_1 = ?$$

$$\text{Analitik çözüm : } s = 8 \cos \frac{\pi}{6} t + \frac{72}{\pi} \sin \frac{\pi}{6} t \Rightarrow s_1 = 18,38735913$$

$$v = -\frac{8\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} t + 12 \cos \frac{\pi}{6} t \Rightarrow v_1 = 8,297909743$$

Euler yöntemi ile nümerik çözüm:

Bu yöntemde $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\pi^2}{36} s = 0$ ikinci mertebeden diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi iki tane diferansiyel denklemden oluşan bir diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

$$\frac{ds}{dt} = v \quad , \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{36}s$$

$$s_{i+1} = s_i + \left(\frac{ds}{dt}\right)_i h \quad , \quad v_{i+1} = v_i + \left(\frac{dv}{dt}\right)_i h$$

$$s_{i+1} = s_i + v_i h \quad , \quad v_{i+1} = v_i - \frac{\pi^2}{36}s_i h$$

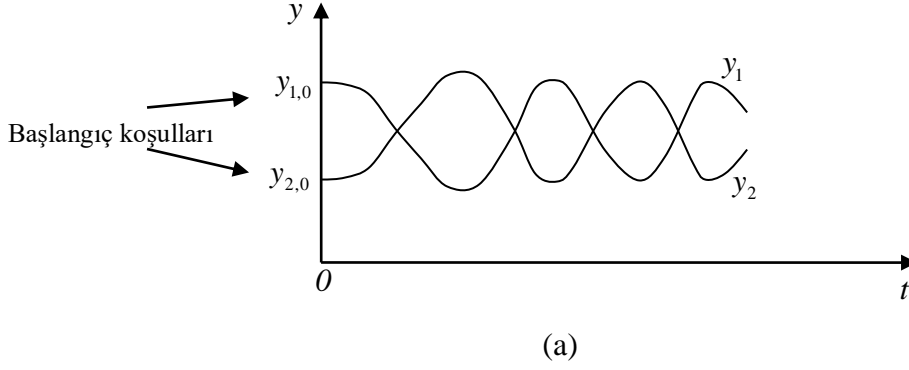
$h = 0,1$ alınırsa aşağıdaki tablo değerleri bulunur.

t	s_i	v_i	s_{i+1}	v_{i+1}
0,1	8	12	9,2	11,78067546
0,2	9,2	11,78067546	10,37806755	11,52845223
0,3	10,37806755	11,52845223	11,53091277	11,24393162
0,4	11,53091277	11,24393162	12,65530593	10,9278051
0,5	12,65530593	10,9278051	13,74808644	10,5808527
0,6	13,74808644	10,5808527	14,80617171	10,20394111
0,7	14,80617171	10,20394111	15,82656582	9,798021503
0,8	15,82656582	9,798021503	16,80636797	9,364127215
0,9	16,80636797	9,364127215	17,74278069	8,903371094
1	17,74278069	8,903371094	18,6331178	8,416942688

8.5 SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Dif. denk. $\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2)$, $\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2)$

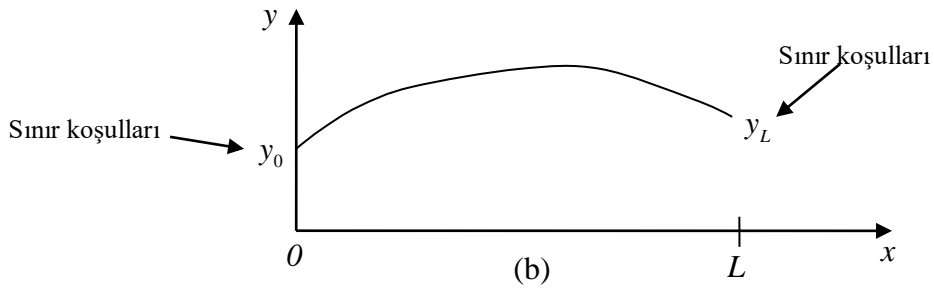
Başlangıç koşulları: $t=0$ da $y_1 = y_{1,0}$, $y_2 = y_{2,0}$



Dif. denk : $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y)$

Sınır koşulları: $x=0$ da $y = y_0$

$x=L$ de $y = y_L$



8.5.1 Atış Yöntemi

Bu yöntemde sınır değer problemi başlangıç değer problemine dönüştürülür. Bu yöntem örnek üzerinde gösterilecektir.

Örnek 8.5.1.1

Uzunluğu boyunca izole edilmemiş ve sürekli rejimdeki ince ve uzun bir çubuktaki sıcaklık dağılımı aşağıdaki denklemle verilir.

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

Burada h' ısı transferi katsayısıdır (cm^{-2}). Bu çevreye giden ısı oranını karakterize eder. T_a etraftaki havanın sıcaklığı ($^{\circ}C$)

$$T(0) = T_1$$

$$T(L) = T_2$$

Eğer, çubuğun boyu $L = 10m$, $h' = 0.01$, $T_a = 20$, $T(0) = 40$, $T(10) = 200$

Analitik çözüm:

$$T(x) = 73.4523e^{0.1x} - 53.4523e^{-0.1x} + 20$$

Sayısal Çözüm:

$$\frac{dT}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = h'(T - T_a)$$

Sayısal çözüme başlayabilmek için $z(0)$ 'ın bilinmesi gerekir.

Atış metodu için $z(0) = 10$ diyelim.

$$T_{i+1} = T_i + z_i h$$

$$z_{i+1} = z_i + h'(T_i - T_a)h$$

$h = 2m$ alalım

$$T_{i+1} = T_i + 2z_i$$

$$z_{i+1} = z_i + 0.02(T_i - 20)$$

$$T_2 = 40 + 2 * 10 = 60$$

$$z_2 = 10 + 0.02(40 - 20) = 10.4$$

$$T_4 = 60 + 2 * 10.4 = 80.8$$

$$z_4 = 10.4 + 0.02(60 - 20) = 11.2$$

$$T_6 = 80.8 + 2 * 11.2 = 103.2$$

$$z_6 = 11.2 + 0.02(80.8 - 20) = 12.416$$

$$T_8 = 103.2 + 2 * 12.416 = 128.032$$

$$z_8 = 12.416 + 0.02(103.2 - 20) = 14.08$$

$$T_{10} = 128.032 + 2 * 14.08 = 156.192$$

$z(0) = 14$ alalım

$$T_2 = 40 + 2 * 14 = 68$$

$$z_2 = 14 + 0.02(40 - 20) = 14.4$$

$$T_4 = 68 + 2 * 14.4 = 96.8$$

$$z_4 = 14.4 + 0.02(68 - 20) = 15.36$$

$$T_6 = 96.8 + 2 * 15.36 = 127.52$$

$$z_6 = 15.36 + 0.02(96.8 - 20) = 16.896$$

$$T_8 = 127.52 + 2 * 16.896 = 161.312$$

$$z_8 = 16.896 + 0.02(127.52 - 20) = 19.0464$$

$$T_{10} = 161.312 + 2 * 19.0464 = 199.4048$$

$$z_{10} = 19.0464 + 0.02(161.312 - 20) = 21.87264$$

8.5.2 Sonlu Farklar Yöntemi

Bu yöntemde Türevler yerine sonlu fark ifadeleri konur. Bu yöntem aşağıdaki örnek üzerinde açıklanabilir.

8.5.2.1 Örnek

Örnek 8.4.1.1 deki ince uzun çubuktaki ısı yayılması problemi ele alınırsa

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

Burada ikinci türev ifadesi yerine

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

sonlu farklar ifadesi konursa

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + h'(T_a - T) = 0$$

Gerekli işlemler yapılırsa

$$-T_{i-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_i - T_{i+1} = h'\Delta x^2 T_a$$

eşitliği elde edilir.



$$x = 0$$

$$x = 2m$$

$$x = 4m$$

$$x = 6m$$

$$x = 8m$$

$$x = 10m$$

$$T(0) = 40^\circ C$$

$$T(10) = 200^\circ C$$

$$-T_0 + (2 + h'\Delta x^2)T_1 - T_2 = h'\Delta x^2 T_a$$

$$-T_1 + (2 + h'\Delta x^2)T_2 - T_3 = h'\Delta x^2 T_a$$

$$-T_2 + (2 + h'\Delta x^2)T_3 - T_4 = h'\Delta x^2 T_a$$

$$-T_3 + (2 + h'\Delta x^2)T_4 - T_5 = h'\Delta x^2 T_a$$

$$h'\Delta x^2 = 0.01 * 2^2 = 0.04$$

$$2.04T_1 - T_2 = 0.04 * 20 + 40 = 40,8$$

$$-T_1 + 2.04T_2 - T_3 = 0.8$$

$$-T_2 + 2.04T_3 - T_4 = 0.8$$

$$-T_3 + 2.04T_4 = 200.8$$

Bu denklemleri aşağıdaki gibi düzenliyoruz.

$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.04 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.04 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 200.8 \end{bmatrix}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65.9698 \\ 93.7785 \\ 124.5382 \\ 159.4795 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

9 KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER

Verilen bir u fonksiyonunun keyfi bir (x,y) noktasında x ve y ye göre kısmi türevleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}$$

Eğer bir denklem iki veya daha fazla bağımsız değişkene göre kısmi türevleri içeriyorsa, bu denkleme kısmi türevli denklem denir. Aşağıdaki denklemler kısmi türevli denklemlerdir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

Kısmi türevli denklemin derecesi denklemdeki en yüksek mertebeden türeve eşittir. Yukarıdaki birinci ve sonuncu denklem ikinci dereceden diğer ikisi ise üçüncü derecedendir.

Kısmi türevli denklem bilinmeyen fonksiyon u ve bunun türevlerine göre lineer ise bu denkleme kısmi türevli lineer denklem denir.

Buna göre yukarıdaki ilk iki denklem lineer son iki denklem ise lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Mühendislikte ikinci dereceden kısmi türevli lineer diferansiyel denklemlerin geniş bir uygulama alanı vardır.

İki bağımsız değişkene göre bu denklemlerin genel formu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0$$

Burada A, B, C x ve y nin fonksiyonlarıdır. D ise $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}$ nin fonksiyonudur.

Bu denklemler A, B, C nin değerlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi sınıflandırılır.

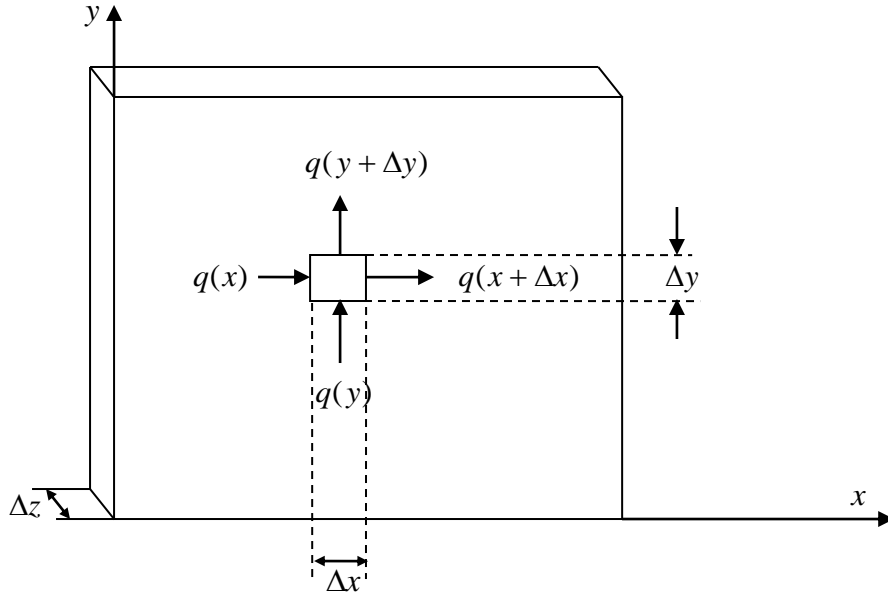
$B^2 - 4AC$	Kategori	Örnek
< 0	Eliptik	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ Laplace denklemi (iki boyutlu kararlı durum)
$= 0$	Parabolik	$\frac{\partial T}{\partial t} = k' \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ Isı iletimi denklemi (tek boyutta zaman değişkenli)
> 0	Hiperbolik	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ Dalga denklemi (tek boyutta zaman değişkenli)

9.1 Kısmi Türevli Denklemlerin Mühendislik Uygulamaları

9.1.1 Isı transfer sıcaklık dağılımı

Karalı halde (zamana göre değişim yok) iki boyutlu ısı transferi denklemi;

Kararlı halde birim zamanda elemana giren ısı akısı çıkan ısı akısına eşit olmalıdır.



Kalınlığı Δz olan ince bir plaka ve içinde ısı dengesinin gösterildiği bir eleman

Kenarları haricinde izole edilen bir plakada ısı transferi x ve y doğrultularında olabilir. Kararlı rejimde bir elemanda Δt zamanında olabilecek ısı akışı aşağıdaki denklemle ifade edilebilir.

$$q(x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y)\Delta x\Delta z\Delta t = q(x+\Delta x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y+\Delta y)\Delta x\Delta z\Delta t$$

Burada $q(x)$ ve $q(y)$, x ve y doğrultusundaki ısı akısını $[cal/(cm^2.s)]$ göstermektedir.

Eşitlik $\Delta z\Delta t$ ye bölünüp terimler bir tarafa toplanırsa

$$[q(x) - q(x+\Delta x)]\Delta y + [q(y) - q(y+\Delta y)]\Delta x = 0$$

Bu denklemin birinci terimi $\frac{\Delta x}{\Delta x}$, ikinci terimi $\frac{\Delta y}{\Delta y}$ ile çarpılırsa

$$\frac{[q(x) - q(x+\Delta x)]}{\Delta x}\Delta x\Delta y + \frac{[q(y) - q(y+\Delta y)]}{\Delta y}\Delta x\Delta y = 0$$

Denklemi elde edilir. Bu denklem $\Delta x\Delta y$ ile bölünüp limiti alınır aşağıdaki denklem elde edilir.

$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

Bu ısı enerjisinin korunumu denklemidir. Plakanın kenarları boyunca genellikle ısı akısı yerine sıcaklık koşulları belli olduğundan bu denklemin sıcaklık cinsinden yazılması gerekir. Isı akısı sıcaklıklara Fourier' in ısı iletimi yasası ile bağlanabilir.

$$q_i = -k\rho C \frac{\partial T}{\partial i}$$

Burada $q_i = i$ doğrultusundaki ısı akışıdır. [cal/(cm² .s)] ,

k = Isı yayılım katsayısı (cm²/s) ,

ρ = Malzemenin yoğunluğu (g/cm³)

C = Malzemenin ısı kapasitesi (özellik ısısı) [cal/(g . °C)]

T = Sıcaklık (°C)

Fourier'in ısı iletimi bağıntısı ısı enerjisinin korunumu denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki Laplace denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

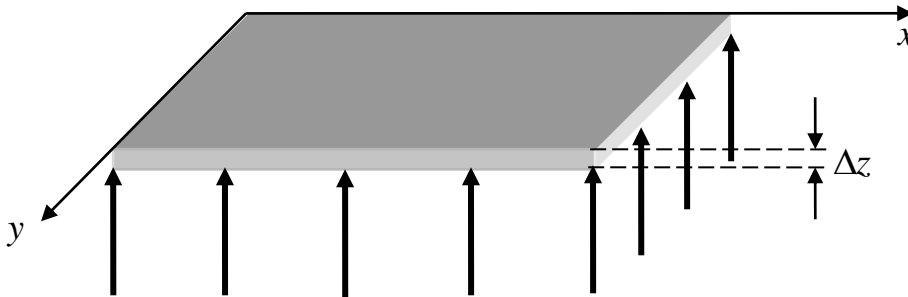
Eğer Plaka içinde ısı kaynağı veya kuyusu varsa sıcaklıklar arasındaki bağıntı

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Bu denklem Poisson denklemi olarak bilinir.

9.1.2 Bir plakanın sehim

Kenarlarından basitçe mesnetlenmiş kare bir plaka bir q alan yükünün etkisindedir. z doğrultusundaki sehim aşağıdaki eliptik kısmi türevli diferansiyel denklemin çözülmesiyle belirlenebilir.



$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

Burada sınır koşulları, kenarlarda, sınıra normal sehim ve eğimin sıfır olması şeklindedir. D parametresi eğilme rijitliğidir.

$$D = \frac{E\Delta z^3}{12(1-\nu)}$$

Burada E = Elastiklik modülü, Δz = plaka kalınlığı, ν = Poisson oranıdır.

Eğer yeni bir

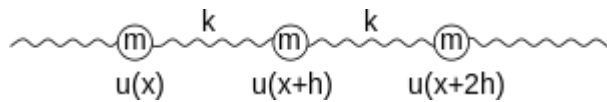
$$u = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ değişkeni tanımlanırsa diferansiyel denklem}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{q}{D}$$

Şekline gelir. Böylece 4. mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem iki tane Poisson denklemine dönüştürülmüş olur.

9.1.3 Gerili bir yayın boyuna titreşimi (Bir boyutlu dalga denklemi);

N sayıdaki küçük ağırlıklı m kütlelerinin h uzunluğundaki kütlesiz yaylarla bir L uzunluğundaki gerili teli oluşturduğunu tasarlayalım. Yaylar k yay sabitine sahiptir.



Buradaki bağımlı değişken $u(x)$ x noktasındaki kütlenin denge konumundan uzaklaşma mesafedir. Bu aslında şekil değiştirmenin elastik malzeme içindeki hareketidir. $(x + h)$ konumunda bulunan kütleyle Newtonun ikinci hareket kanunu uygulanırsa

$$F = m \cdot a(t)$$

$$F = F_{x+2h} - F_x = k[u(x+2h,t) - u(x+h,t)] - k[u(x+h,t) - u(x,t)]$$

$$a(t) = \frac{\partial^2 u(x+h,t)}{\partial t^2}$$

$$k[u(x+2h,t) - u(x+h,t)] - k[u(x+h,t) - u(x,t)] = m \cdot \frac{\partial^2 u(x+h,t)}{\partial t^2}$$

Yayın toplam, uzunluğu $L = Nh$, toplam kütlesi $M = Nm$, toplam yay katsayısı $K = \frac{k}{N} \Rightarrow$

$$\frac{k}{m} = \frac{KNN}{M} = \frac{KL^2}{Mh^2}$$

$$\frac{KL^2}{M} \frac{u(x+2h,t) - 2u(x+h,t) + u(x,t)}{h^2} = \frac{\partial^2 u(x+h,t)}{\partial t^2}$$

Eğer limitte $N \rightarrow \infty$ olursa $h = dx$ olur.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{M}{KL^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Burada $c = \sqrt{\frac{KL^2}{M}}$ dalga hızıdır.

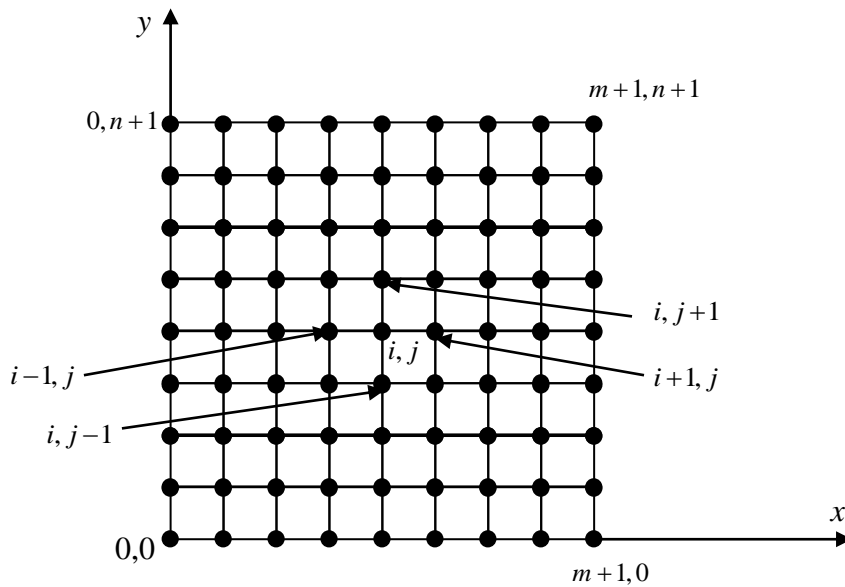
Gerili teldeki enine titreşimlerdeki dalga hızı $c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ burada σ teldeki germe kuvveti, ρ telin birim uzunluğunun kütlesi.

Bir ucuna vurulan kirişteki titreşimlerin dalga hızı $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ burada E Elastisite modülüdür.

9.2 Çözüm tekniği

9.2.1 Sonlu Farklar : Eliptik denklemler

Sayısal çözümde plaka ayırık noktaların köşelere yerleştiği bir ızgara şeklinde düşünülür ve kısmi türevli denklem yerine fark denklemleri yazılıp her bir noktaya uygulanarak lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden ayırık noktalardaki sıcaklıklar bulunur.



Merkezi farklar uygulanırsa Laplace denklemi aşağıdaki gibi fark denklemine dönüştürülür.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

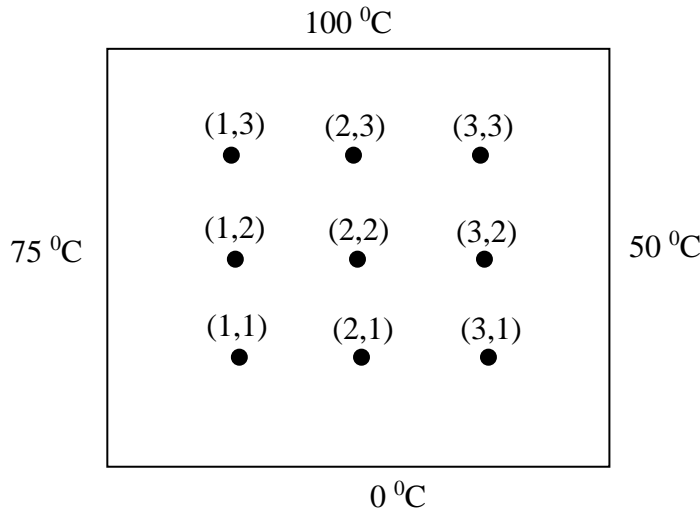
$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

Eğer ızgara birimleri kare şeklinde olursa $\Delta x = \Delta y$ olacağından sonlu farklar denklemi

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem Laplace fark denklemi olarak bilinir. Çözümüne ulaşmak için plakanın bütün iç noktalarında bu denklemi uygulamak gerekir.

Örnek 9.2.2.1:



$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$ Sonlu farklar denklemi (1,1) noduna uygulanırsa

$T_{2,1} + T_{0,1} + T_{1,2} + T_{1,0} - 4T_{1,1} = 0$ elde edilir . ve $T_{0,1} = 75^\circ C$, $T_{1,0} = 0^\circ C$ yerine yazılırsa

$$T_{2,1} + T_{1,2} - 4T_{1,1} = -75 \Rightarrow \boxed{4T_{1,1} - T_{1,2} - T_{2,1} = 75} \text{ denklemi bulunur.}$$

Sonlu farklar denklemi (2,1) noduna uygulanırsa

$$T_{3,1} + T_{1,1} + T_{2,2} + T_{2,0} - 4T_{2,1} = 0 \text{ elde edilir. } T_{2,0} = 0 \text{ yerine yazılırsa } \boxed{-T_{1,1} + 4T_{2,1} - T_{2,2} - T_{3,1} = 0}$$

denklemi bulunur.

Sonlu farklar denklemi (3,1) noduna uygulanırsa $T_{4,1} + T_{2,1} + T_{3,2} + T_{3,0} - 4T_{3,1} = 0$ elde edilir.

$$T_{4,1} = 50^\circ C, \quad T_{3,0} = 0 \text{ yerine yazılırsa } \boxed{-T_{2,1} + 4T_{3,1} - T_{3,2} = 50} \text{ elde edilir.}$$

Sonlu farklar denklemi (1,2) noduna uygulanırsa $T_{2,2} + T_{0,2} + T_{1,3} + T_{1,1} - 4T_{1,2} = 0$ elde edilir.

$T_{0,2} = 75^{\circ}C$ yerine yazılırsa $\boxed{-T_{1,1} + 4T_{1,2} - T_{1,3} - T_{2,2} = 75}$ elde edilir.

Sonlu farklar denklemi (2,2) noduna uygulanırsa $\boxed{T_{1,2} + T_{2,1} - 4T_{2,2} + T_{2,3} + T_{3,2} = 0}$ elde edilir.

Sonlu farklar denklemi (3,2) noduna uygulanırsa $T_{4,2} + T_{2,2} + T_{3,3} + T_{3,1} - 4T_{3,2} = 0$

$T_{4,2} = 50^{\circ}C$ yerine yazılırsa $\boxed{-T_{2,2} - T_{3,1} + 4T_{3,2} - T_{3,3} = 50}$ elde edilir.

Sonlu farklar denklemi (1,3) noduna uygulanırsa $T_{2,3} + T_{0,3} + T_{1,4} + T_{1,2} - 4T_{1,3} = 0$

$T_{0,3} = 75^{\circ}C$ ve $T_{1,4} = 100^{\circ}C$ yerine yazılırsa $\boxed{-T_{1,2} + 4T_{1,3} - T_{2,3} = 175}$ elde edilir.

Sonlu farklar denklemi (2,3) noduna uygulanırsa $T_{3,3} + T_{1,3} + T_{2,4} + T_{2,2} - 4T_{2,3} = 0$

$T_{2,4} = 100^{\circ}C$ yerine yazılırsa $\boxed{-T_{2,2} - T_{1,3} + 4T_{2,3} - T_{3,3} = 100}$ elde edilir.

Son olaral sonlu farklar denklemi (3,3) noduna uygulanırsa $T_{4,3} + T_{2,3} + T_{3,4} + T_{3,2} - 4T_{3,3} = 0$ elde

edilir. $T_{4,3} = 50^{\circ}C$ ve $T_{3,4} = 100^{\circ}C$ yerine yazılırsa $\boxed{-T_{3,2} - T_{2,3} + 4T_{3,3} = 150}$ elde edilir.

Bu denklemler toplu olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$4T_{1,1} - T_{2,1} - T_{1,2} = 75$$

$$-T_{1,1} + 4T_{2,1} - T_{3,1} - T_{2,2} = 0$$

$$-T_{2,1} + 4T_{3,1} - T_{3,2} = 50$$

$$-T_{1,1} + 4T_{1,2} - T_{2,2} - T_{1,3} = 75$$

$$T_{2,1} + T_{1,2} - 4T_{2,2} + T_{3,2} + T_{2,3} = 0$$

$$-T_{3,1} - T_{2,2} + 4T_{3,2} - T_{3,3} = 50$$

$$-T_{1,2} + 4T_{1,3} - T_{2,3} = 175$$

$$-T_{2,2} - T_{1,3} + 4T_{2,3} - T_{3,3} = 100$$

$$-T_{3,2} - T_{2,3} + 4T_{3,3} = 150$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 75 \\ 0 \\ 50 \\ 75 \\ 0 \\ 50 \\ 175 \\ 100 \\ 150 \end{Bmatrix}$$

Mathematica programı ile bu denklem sistemi aşağıdaki gibi kolaylıkla çözülebilir.

A={ {4,-1,0,-1,0,0,0,0,0},{-1,4,-1,0,-1,0,0,0,0},{0,-1,4,0,0,-1,0,0,0},{-1,0,0,4,-1,0,-1,0,0},{0,1,0,1,-4,1,0,1,0},{0,0,-1,0,-1,0,0,4,-1},{0,0,0,-1,0,0,0,0,4}}

```

1,4,0,0,-1},{0,0,0,-1,0,0,4,-1,0},{0,0,0,0,-1,0,-1,4,-
1},{0,0,0,0,0,-1,0,-1,4}};
b={75,0,50,75,0,50,175,100,150};
x=LinearSolve[A,b];
Print["T=",MatrixForm[x]];
Print["T=",MatrixForm[N[x]]];

```

$$T = \begin{pmatrix} \frac{300}{7} \\ \frac{3725}{112} \\ \frac{475}{14} \\ \frac{7075}{112} \\ \frac{225}{4} \\ \frac{5875}{112} \\ \frac{550}{7} \\ \frac{8525}{112} \\ \frac{975}{14} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 42.8571 \\ 33.2589 \\ 33.9286 \\ 63.1696 \\ 56.25 \\ 52.4554 \\ 78.5714 \\ 76.1161 \\ 69.6429 \end{pmatrix}$$

EK A TAYLOR SERİSİ

EK A.1 TAYLOR FORMÜLÜ

$f(x)$: Aradığımız fonksiyon

$P(x)$: Yaklaşık fonksiyon

$$P(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \cdots + C_nx^n$$

$x = 0$ da bu iki fonksiyonun değerleri ve türevleri birbirine eşitlenerek $n + 1$ koşul oluşturulur.

$$P(0) = f(0), P'(0) = f'(0), P''(0) = f''(0), \dots, P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

oluşturulan bu koşullar yardımı ile C_i , ($i = 0, \dots, n$) katsayıları bulunur.

$$x = 0 \text{ da } P(0) = C_0 \rightarrow \boxed{C_0 = f(0)}$$

$$P'(x) = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + \cdots + nC_nx^{n-1}$$

$$x = 0 \text{ da } P'(0) = C_1 \rightarrow \boxed{C_1 = f'(0)}$$

$$P''(x) = 2C_2 + 2 * 3C_3x + 3 * 4C_4x^2 + 4 * 5C_5x^3 + \cdots + (n-1)nC_nx^{n-2}$$

$$x = 0 \text{ da } P''(0) = 2C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = \frac{1}{2} f''(0)}$$

$$P'''(x) = 2 * 3C_3 + 2 * 3 * 4C_4x + 3 * 4 * 5C_5x^2 + \cdots + (n-2)(n-1)nC_nx^{n-3}$$

$$x = 0 \text{ da } P'''(0) = 2 * 3C_3 \rightarrow \boxed{C_3 = \frac{1}{2 * 3} f'''(0)}$$

$$P^{(iv)}(x) = 2 * 3 * 4C_4 + 2 * 3 * 4 * 5C_5x + \cdots + (n-3)(n-2)(n-1)nC_nx^{n-4}$$

$$x = 0 \text{ da } P^{(iv)}(0) = 2 * 3 * 4C_4 \rightarrow \boxed{C_4 = \frac{1}{2 * 3 * 4} f^{(iv)}(0)}$$

Bu işlemler devam edilirse $\boxed{C_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)}$ bulunur. Bu katsayılar $P(x)$ polinomunda yerine

konursa $\boxed{P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}$ Taylor polinomu elde edilir.

Sıfırdan farklı noktalarda da benzer formüller bulunabilir. Bunun için için Polinomu $(x - x_0)$ ın kuvvetlerine göre yazılır.

$$P(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + C_3(x - x_0)^3 + C_4(x - x_0)^4 + C_5(x - x_0)^5 + \cdots + C_n(x - x_0)^n$$

Bu polinomun x değişkenine göre türevleri alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki gibi bir $f(x)$ fonksiyonunun x_0 civarında Taylor polinomuna açılım formülü elde edilir.

$$\boxed{P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}$$

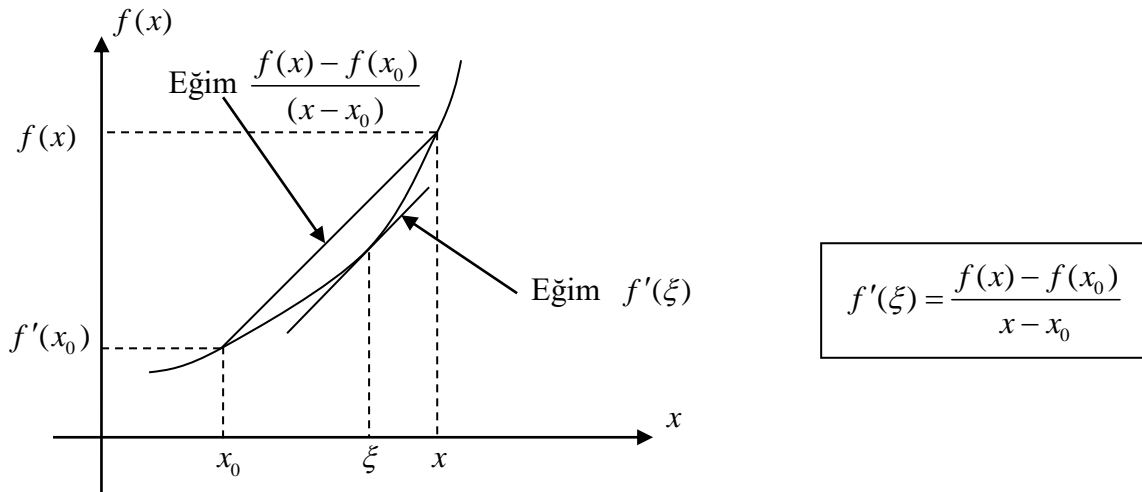
$f(x)$ fonksiyonu ile $P(x)$ fonksiyonu arasındaki farka n inci kalan denir.

$$R_n(x) = f(x) - P(x) \rightarrow f(x) = P(x) + R_n(x)$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)}$$

Bu eşitliğe kalanlı Taylor formülü denir. Eğer $x_0 = 0$ ise çoğu kere bu formüle Maclaurin formülü denir.

Kalan formülünü yazmak için ortalama değer teoremi uygulanır.



Lineer yaklaşım için $P_0(x) = f(x_0)$ ve fark $f(x) - P_0(x) = f(x) - f(x_0)$ olur.

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

Analizin temel teoreminden $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t)dt$ eşitliği yazılabilir.

$$f(x) - P_0(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t)dt \text{ bu eşitliğe integral formundaki kalan denir.}$$

Yukarıdaki integrale kısmi integrasyon işlemi uygulanırsa $u = f'(t)$, $dv = dt$ burada $v = t - x$ olmalıdır.

$$f(x) - f(x_0) = f'(t)(t - x) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x f''(t)(t - x)dt = -f'(x_0)(x_0 - x) + \int_{x_0}^x f''(t)(x - t)dt$$

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x)] = \int_{x_0}^x f''(t)(x - t)dt$$

Bu eşitliğin sol tarafı $f(x) - P_1(x)$ farkına eşittir.

Aynı şekilde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$u = f''(t), dv = (x - t)dt \text{ burada } v = \frac{(t - x)^2}{2} \text{ olur.}$$

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x)] = -f''(t) \frac{(x - t)^2}{2} \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x f'''(t) \frac{(x - t)^2}{2} dt$$

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x) + f''(t) \frac{(x - t)^2}{2}] = \int_{x_0}^x f'''(t) \frac{(x - t)^2}{2} dt$$

aynı şekilde devam edilirse integral formundaki kala formülü elde edilir.

$$R_n(x) = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt$$

Entegral formundaki kalan, aşağıdaki gibi, Lagrange formunda yazılabilir.

$x > x_0$ kabul edilirse işlemler basitleşir.

$f^{(n+1)}(t)$ nin $x_0 \leq t \leq x$ aralığında minimum değeri m , maksimum değeri M ile gösterilsin.

$$m \frac{(x-t)^n}{n!} \leq f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \leq M \frac{(x-t)^n}{n!}$$

$$\int_{x_0}^x m \frac{(x-t)^n}{n!} dt \leq \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \leq \int_{x_0}^x M \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

sınır değerlere ait integraller kolayca alınabilir.

$$m \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(x) - P_n(x) \leq M \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Bütün terimler $\frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}$ ile çarpılırsa

$$m \leq \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}} [f(x) - P_n(x)] \leq M$$

elde edilir. $f^{(n+1)}(t)$ m ile M arasında bir değer olduğuna göre, ξ de x_0 ile x arasında öyle bir

değer olur ki $f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}} [f(x) - P_n(x)]$ yazılabilir.

Böylece Lagrange formundaki kalan elde edilir.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Eğer fonksiyonun $[a,b]$ aralığındaki $(n+1)$ inci türevi sınırlı ise yani

$a \leq t \leq b$ nin her yerinde $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ ise

$$|R(x)| = \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \quad \text{elde edilir.}$$

TAYLOR SERİSİNİ KULLANARAK ELDE EDİLEN ÖZEL AÇILIMLAR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_n$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + R_n$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + R_n$$

İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN TAYLOR SERİSİ

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial^{(k+l)} f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^l} \frac{1}{k!l!} (x-x_0)^k (y-y_0)^l$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2!} [f_{xx}(x_0, y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y-y_0)^2] + \cdots$$

Referanslar

Numerical Methods for Engineers
Steven C. Chapra, Raymond P. Canale

Türkçesi:
Mühendisler için Sayısal Yöntemler
Hasan Heperkan, Uğur Kesgin