provadis Hochschule

Dr. Eric Hutter

Mathematik 2 – Vorlesung 12

Die Vorlesung basiert auf Material von Prof. Dr. Volker Scheidemann.

Lernziele Vorlesung 12

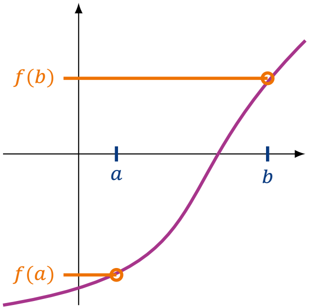
Nach dieser Vorlesung werden Sie…

- Nullstellen stetiger Funktionen **numerisch** bestimmen können und
- sich Gedanken über die Stetigkeit der **Logarithmusfunktion** gemacht haben.

Kapitel 11.1: Sätze über stetige Funktionen

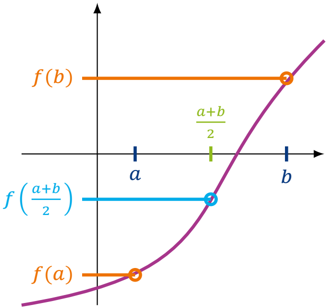
Das Bisektionsverfahren

Theorem 266 (Bisektionsverfahren). Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Dann gibt es ein x_0 mit $a < x_0 < b$, sodass $f(x_0) = 0$ ist.



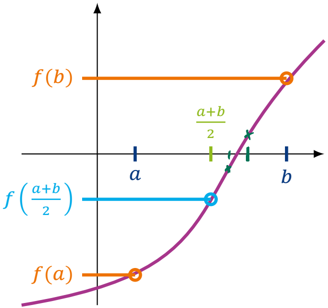
Das Bisektionsverfahren

Theorem 266 (Bisektionsverfahren). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Dann gibt es ein x_0 mit $a < x_0 < b$, sodass $f(x_0) = 0$ ist.

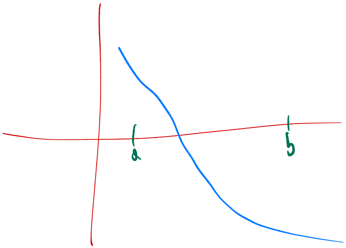


Das Bisektionsverfahren

Theorem 266 (Bisektionsverfahren). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Dann gibt es ein x_0 mit $a < x_0 < b$, sodass $f(x_0) = 0$ ist.



Bemerkung 267. Das Bisektionsverfahren funktioniert analog, wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ ist. Entscheidend ist nur, dass die **Vorzeichen** von $f(a)$ und $f(b)$ **verschieden** sind.



Der Bisektionsalgorithmus

Das Bisektionsverfahren macht eine Existenzaussage:

Wenn eine stetige Funktion ihr Vorzeichen wechselt, hat sie dazwischen (mindestens) eine Nullstelle.

Der Bisektionsalgorithmus

Das Bisektionsverfahren macht eine Existenzaussage:

Wenn eine stetige Funktion ihr Vorzeichen wechselt, hat sie dazwischen (mindestens) eine Nullstelle.

Aber gleichzeitig liefert das Bisektionsverfahren einen **Algorithmus**, um diese Nullstelle **näherungsweise** zu bestimmen!

Das Bisektionsverfahren macht eine Existenzaussage:

Wenn eine stetige Funktion ihr Vorzeichen wechselt, hat sie dazwischen (mindestens) eine Nullstelle.

Aber gleichzeitig liefert das Bisektionsverfahren einen **Algorithmus**, um diese Nullstelle **näherungsweise** zu bestimmen!

Im folgenden Flussdiagramm nutzen wir einige Abkürzungen:

- $\mathrm{MP}(I)$ ist der **Mittelpunkt** des Intervalls I,
- $\mathrm{Links}(I)$ ist die **Linke Hälfte** des Intervalls I,
- $\mathrm{Rechts}(I)$ ist die **rechte Hälfte** des Intervalls I.

Der Bisektionsalgorithmus

provadis Hochschule

Das Bisektionsverfahren macht eine Existenzaussage:

Wenn eine stetige Funktion ihr Vorzeichen wechselt, hat sie dazwischen (mindestens) eine Nullstelle.

Aber gleichzeitig liefert das Bisektionsverfahren einen **Algorithmus**, um diese Nullstelle **näherungsweise** zu bestimmen!

Im folgenden Flussdiagramm nutzen wir einige Abkürzungen:

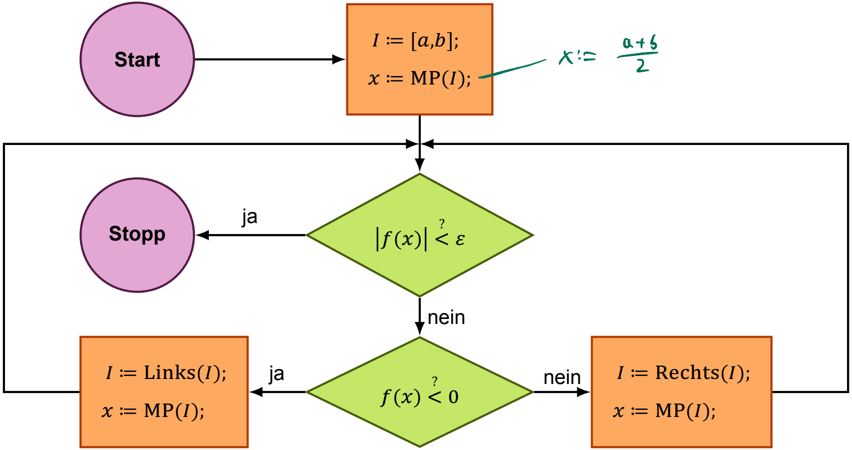
- $\mathrm{MP}(I)$ ist der **Mittelpunkt** des Intervalls I,
- $\mathrm{Links}(I)$ ist die **Linke Hälfte** des Intervalls I,
- $\mathrm{Rechts}(I)$ ist die **rechte Hälfte** des Intervalls I.

In numerischen Anwendungen liegt ε meist in der Nähe der vom Computer darstellbaren Rechengenauigkeit.

Die **Eingabe** des Algorithmus ist ein Intervall $[a,b]$ und eine (kleine) Zahl $\varepsilon > 0$.

- ε spielt die Rolle der vorgegebenen Genauigkeit: Wie nah soll der Funktionswert an Null liegen?
- Wenn wir z. B. fordern, dass der Funktionswert bis zur zweihundertsten Nachkommastelle an Null liegen soll, müssen wir $\varepsilon := 10^{-200}$ wählen.

Der Bisektionsalgorithmus



Geschwindigkeit der Bisektion

provadis Hochschule

Sei
- x_0 die gesuchte Nullstelle,
- I_n das zu untersuchende Intervall im n-ten Iterationsschritt ($n \in \mathbb{N}_0$),
- $I_0 \coloneqq [a,b]$ das Startintervall,
- x_n der Mittelpunkt von I_{n-1} (für $n \geq 1$).

Dann gilt aufgrund der Intervallhalbierung in jedem Iterationsschritt, dass

$$|x_0 - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

STUDENTS BY PROVADIS THINKING INDUSTRY NEW

Geschwindigkeit der Bisektion

provadis Hochschule

Sei

- x_0 die gesuchte Nullstelle,
- I_n das zu untersuchende Intervall im n-ten Iterationsschritt ($n \in \mathbb{N}_0$),
- $I_0 := [a,b]$ das Startintervall,
- x_n der Mittelpunkt von I_{n-1} (für $n \geq 1$).

Dann gilt aufgrund der Intervallhalbierung in jedem Iterationsschritt, dass

$$|x_0 - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Damit können wir die Anzahl der Iterationsschritte berechnen, bis sich unsere Näherungslösung bis zu einer gewünschten Anzahl m von Nachkommastellen der tatsächlichen Lösung angenähert hat:

$$|x_0 - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n} \leq 10^{-(m+1)}$$

$$2^n \geq (b-a)10^{m+1}$$

$$n \geq \log_2 ((b-a)10^{m+1})$$

$$n \geq \log_2(b-a) + (m+1)\log_2 10.$$

$$n \in \mathcal{O}\left(\log(b-a) + m\right)$$

STUDENTS BY PROVADIS THINKING INDUSTRY NEW

Schreiben Sie ein Programm in einer Programmiersprache Ihrer Wahl, in dem Sie das Bisektionsverfahren implementieren. Das Programm soll eine Nullstelle der Funktion

$$f : [0,2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 2$$

näherungsweise berechnen.

Das Programm ermittle eine Näherungslösung in den drei Terminierungsfällen

$$|f(x)| < 10^{-n}$$

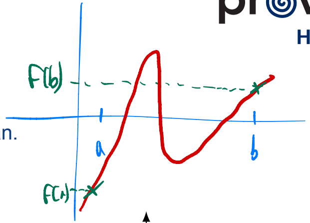
für $n = 5, 10, 15$.

Geben Sie jeweils den final ermittelten Wert x sowie den absoluten Abstand $|x - \sqrt{2}|$ des Ergebnisses von der wahren Nullstelle $\sqrt{2}$ aus.

Theorem 271 (Zwischenwertsatz).

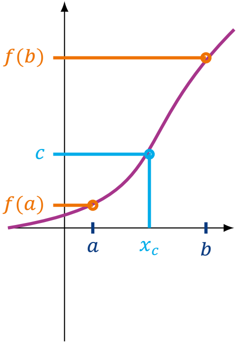
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Zwischenwertsatz

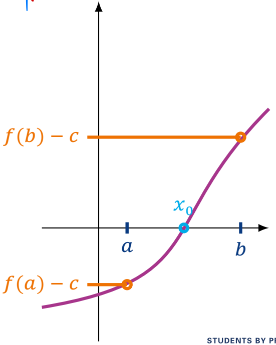


Theorem 271 (Zwischenwertsatz).
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweisidee:



Ersetze f durch $f - c$



Beispiele zum Zwischenwertsatz

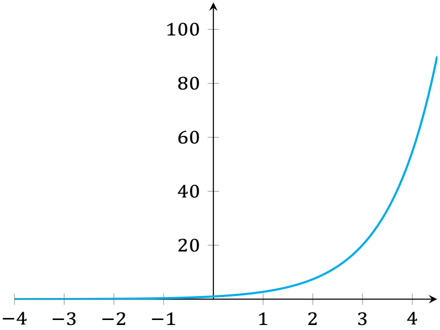
Diese (stetigen) Funktionen nehmen also **jede** reelle Zahl innerhalb der Intervalle an!

Beispiel 272. Es gilt

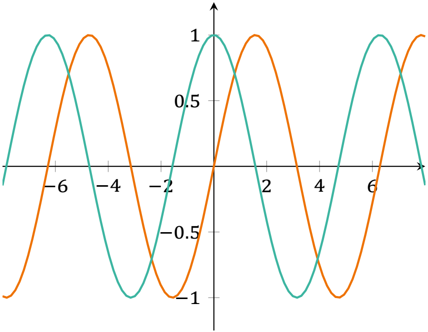
a) $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ :=]0,+\infty[$,

b) $\sin([0,2\pi]) = \cos([0,2\pi]) = [-1,1]$.

Graph von $x \mapsto \exp x$:



Graphen von $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto \cos x$:



Für zuhause

provadis Hochschule

Übung 11.6. In einem Programmierwettbewerb soll eine Software programmiert werden, die alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{\exp(\sin x) - 2}{|x| + 1} = 0$$

im Bereich der reellen Zahlen ermitteln kann. Alle Teilnehmenden müssen ein Startgeld von 100 € zahlen, als Preis winken 5.000 €. Treten Sie an? Begründen Sie Ihre Entscheidung mathematisch!

Definition 273. Ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ heißt **kompaktes** Intervall.

Kompakte Intervalle

Definition 273. Ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ heißt **kompaktes** Intervall.

Unbeschränkte Intervalle (untere Grenze $-\infty$ und/oder obere Grenze $+\infty$) sind **nicht kompakt**.

Ebenso sind offene Intervalle wie $]2,3[$ nicht kompakt.

z.B. ist $[3, \pi]$ kompakt.

provadis Hochschule

Theorem 274. Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

a) f nimmt auf $[a,b]$ (mindestens) ein **Minimum** und ein **Maximum** an, d.h. es gibt Elemente $x_m, x_M \in [a,b]$, sodass gilt

$$f(x_m) = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\},$$

$$f(x_M) = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

Reminder: Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{1}{n}$ hat das Infimum 0, aber kein Minimum, weil $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

provadis Hochschule

Theorem 274. Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

a) f nimmt auf $[a,b]$ (mindestens) ein **Minimum** und ein **Maximum** an, d.h. es gibt Elemente $x_m, x_M \in [a,b]$, sodass gilt

$$f(x_m) = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\},$$
$$f(x_M) = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

b) Ist $p \in [a,b]$ ein Punkt, in dem $f(p) \neq 0$ gilt, dann gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$, sodass gilt

$$f(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in [a,b] \text{ mit } |p - x| \leq \varepsilon.$$

Um jede Nicht-Nullstelle gibt es einen Bereich, in dem keine Nullstelle liegt.

Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

Theorem 274. Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

a) f nimmt auf $[a,b]$ (mindestens) ein **Minimum** und ein **Maximum** an, d.h. es gibt Elemente $x_m, x_M \in [a,b]$, sodass gilt

$$f(x_m) = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\},$$
$$f(x_M) = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

b) Ist $p \in [a,b]$ ein Punkt, in dem $f(p) \neq 0$ gilt, dann gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$, sodass gilt

$$f(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in [a,b] \text{ mit } |p - x| \leq \varepsilon.$$

Um jede Nicht-Nullstelle gibt es einen Bereich, in dem keine Nullstelle liegt.

c) Ist f streng monoton (wachsend oder fallend), dann bildet f das Intervall $[a,b]$ bijektiv auf das Intervall $[f(a), f(b)]$ ab und die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$$

ist ebenfalls streng monoton (wachsend oder fallend) und stetig.

Beispiel: Der Logarithmus ist stetig

Strenge Monotonie haben wir schon in Übung 10.12 nachgewiesen.

Beispiel 275. Die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und es gilt $\ln(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$.

Beispiel: Der Logarithmus ist stetig

Strenge Monotonie haben wir schon in Übung 10.12 nachgewiesen.

Beispiel 275. Die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und es gilt $\ln(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$.

Beweis:

$\ln$ ist die Umkehrfunktion der stetigen und streng monoton wachsenden Funktion $\exp$, also gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\ln : [\underbrace{\exp(-n)}_{\text{„}f(a)\text{"}}, \underbrace{\exp(n)}_{\text{„}f(b)\text{"}}] \to [\overset{\text{„}a\text{"}}{-n}, \overset{\text{„}b\text{"}}{n}]$$

aus dem Satz oben

bijektiv und stetig ist.

Beispiel: Der Logarithmus ist stetig

Strenge Monotonie haben wir schon in Übung 10.12 nachgewiesen.

Beispiel 275. Die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und es gilt $\ln(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$.

Beweis:

$\ln$ ist die Umkehrfunktion der stetigen und streng monoton wachsenden Funktion $\exp$, also gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\ln : [\exp(-n), \exp(n)] \to [-n, n]$$

bijektiv und stetig ist.

Da es zu jedem $x \in \mathbb{R}_+$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x \in [\exp(-n), \exp(n)]$, folgt, dass $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Beispiel: Der Logarithmus ist stetig

Strenge Monotonie haben wir schon in Übung 10.12 nachgewiesen.

provadis Hochschule

Beispiel 275. Die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und es gilt $\ln(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$.

Beweis:

$\ln$ ist die Umkehrfunktion der stetigen und streng monoton wachsenden Funktion $\exp$, also gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\ln : [\exp(-n), \exp(n)] \to [-n, n]$$

bijektiv und stetig ist.

Da es zu jedem $x \in \mathbb{R}_+$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x \in [\exp(-n), \exp(n)]$, folgt, dass $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \ln 2^n = \lim_{n\to\infty} (n \ln 2) = \ln 2 \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} (\ln 1 - \ln n) = -\lim_{n\to\infty} \ln n = -\infty$$

Nach oben und unten unbeschränkt, also muss wegen der Stetigkeit **jede** reelle Zahl als Funktionswert auftreten.

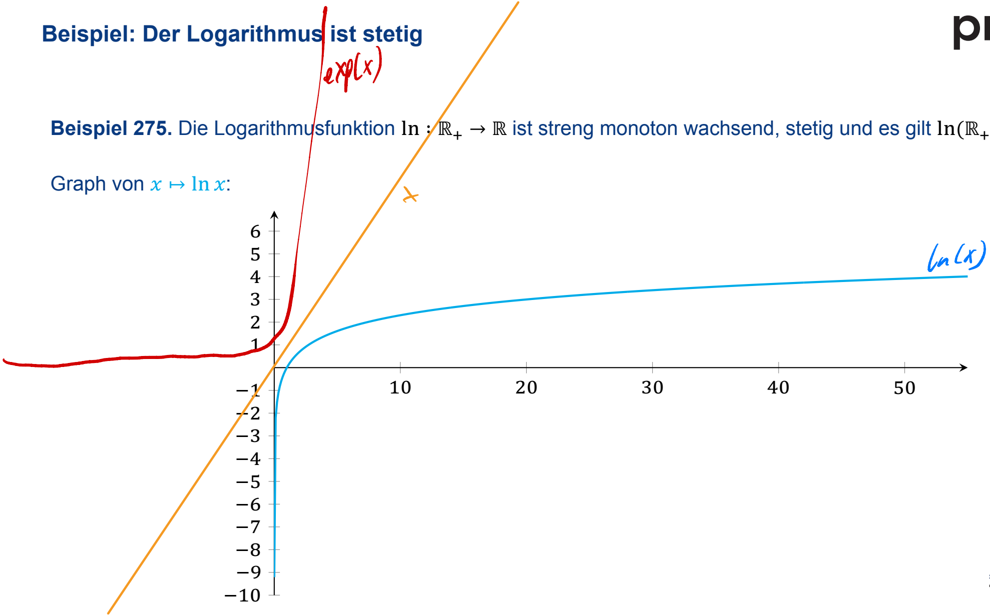
folgt aus der Stetigkeit von $\ln$, dass $\ln(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$. $\square$

STUDENTS BY PROVADIS THINKING INDUSTRY NEW

Beispiel: Der Logarithmus ist stetig

Beispiel 275. Die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und es gilt $\ln(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$.

Graph von $x \mapsto \ln x$:



Für zuhause

Übung 11.7. Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen **Fixpunkt** hat, d. h. es gibt ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = x_0$.

Übung 11.8. Geben Sie ein Beispiel an, dass eine stetige Funktion auf einem **offenen** Intervall $]a,b[$ kein Maximum annehmen muss.