САА – Упражнение 10

<u>Графи</u>

1. ***<u>Основни понятия</u>***

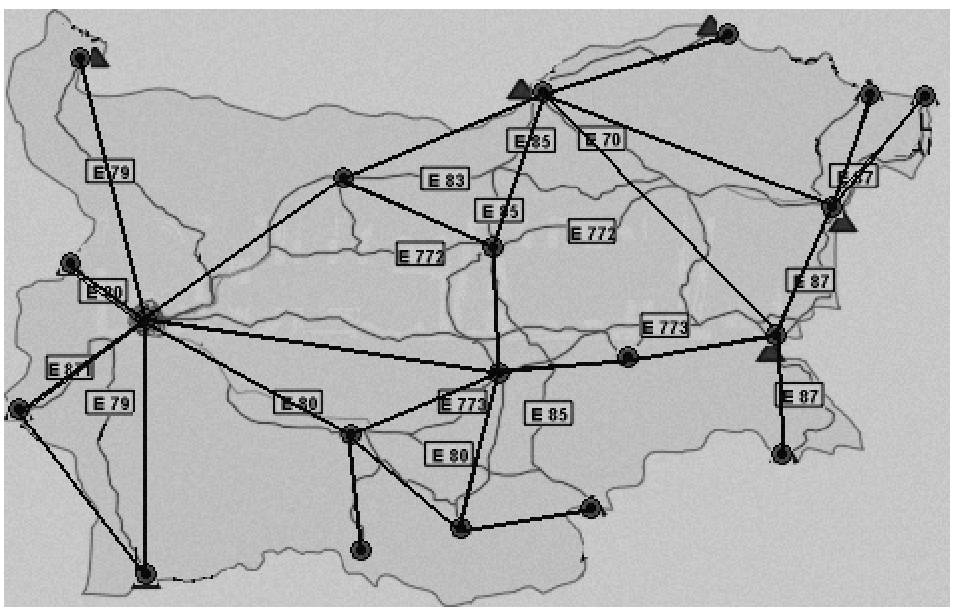
Ориентиран граф G се нарича наредената двойка (V, E), където:

- $V=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ е крайно множество от *върхове*
- $E=\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ е краен списък от *насочени ребра*. Всеки елемент $e_k \in E$ (k=1, ..., m) е *наредена* двойка (v_i, v_j), $v_i, v_j \in V$.

Ако е дадена функция f:$E \rightarrow R$, съпоставяща на всяко ребро e_k *тегло* $f(e_k)$, то графът се нарича *тегловен*.

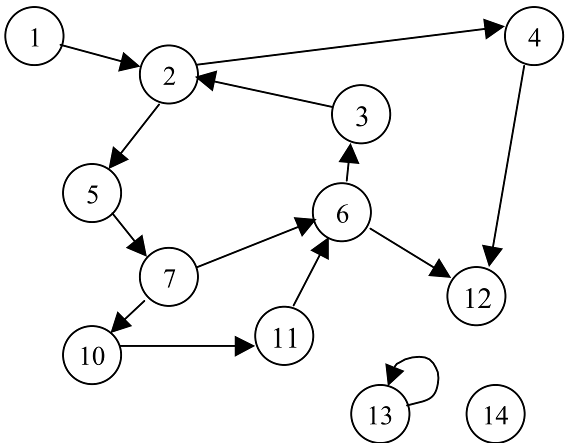
Всяка съвкупност от обекти с дефинирани връзки между тях може да бъде представена като граф. Ето няколко примера за подобни абстракции:

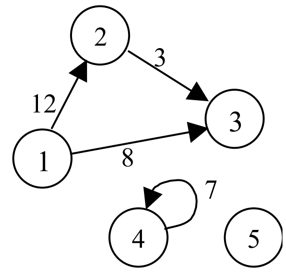
1) Няколко града могат да бъдат представени като върхове на граф, а преките пътища между тях — като ребра. Теглата на ребрата ще бъдат дължините на преките пътища. Илюстрация на примера е транспортната карта на Република България:



2) Компютърна мрежа може да бъде представена чрез граф, като компютрите са върховете на графа, а всяко ребро между два върха показва, че съответните компютри са пряко свързани в мрежата:
3) Няколко химични съединения могат да бъдат представени като върхове на граф. Всяко ребро от графа ще показва дали съответните химични съединения могат да си взаимодействат. Аналогичен пример е върховете да представят видове декоративни риби, а ребрата да показват дали два вида риби могат да съжителстват заедно, или — не.
4) Процесите в изработването на едно изделие могат да се представят с върховете на граф, а с ребрата — кой процес след кой трябва да следва в изработката.

Най-често ориентиран граф се представя графично в равнината чрез множество от точки (означаващи върховете му) и свързващи ги стрелки (ребрата на графа).

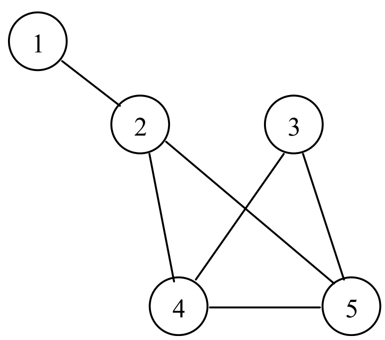




Фиг. 1.а. Ориентиран граф **Фиг. 1.б.** Ориентиран тегловен граф

На *фиг. 1.а* е показан граф с 14 върха и 13 ребра. Всеки връх $v_i \in V$ е изобразен като кръгче с номер — уникално цяло число. Всяко ребро $(i, j) \in E$ е изобразено като стрелка, насочена от връх i към връх j. Ако графът е тегловен, то теглото на всяко ребро се записва до съответната стрелка, както е показано на *фиг. 1.б*.

Даден граф $G(V, E)$ е *неориентиран*, ако списъкът от ребра $E=\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ се състои от *ненаредени* двойки $(i, j) \in E$. Ако е дадена функция $f(i, j)$, съпоставяща стойност на всяко ребро $(i, j) \in E$, графът се нарича *тегловен неориентиран граф*, а за f е валидно $f(i, j) = f(j, i)$, за всяко i, $j \in V$.



Фиг. 1.в. Неориентиран граф

На *фиг. 1.в* е показан неориентиран граф — върховете са изобразени като кръгчета, а всяко ребро (i, j) – с линия, вместо двойка стрелки.

Даден е ориентиран граф $G(V,E)$. *Полустепен на изхода на връх* $i \in V$ се нарича броят на всички ребра (i, j), $j \in V$. Аналогично, броят на всички ребра (j, i), $j \in V$ се нарича *полустепен на входа на* i. Сборът от полустепентта на входа и полустепентта на изхода се нарича *степен* на върха i. *Изолиран* се нарича връх от графа, чиято степен е 0.

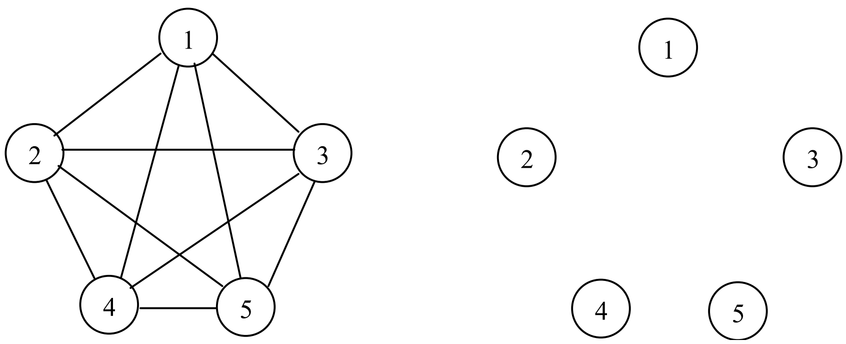
На *фиг.1.а* степента на връх с номер *2* е 4, а изолиран връх е този с номер *14*.

При неориентиран граф степен на връх i се нарича броя на всички ребра (i,j) инцидентни с него.

Два върха i и j (i, $j \in V$) се наричат *съседни*, когато поне едно от ребрата (i, j) и (j, i) принадлежат на E. Всеки от върховете i и j се нарича *инцидентен* с реброто (i, j).

Път в граф $G(V, E)$ се нарича последователност от върхове $v_1, v_2, ..., v_k$, такава че за всяко i=1, 2, …, k–1 е изпълнено $(v_i, v_{i+1}) \in E$. Върховете v_1 и v_k се наричат *краища* на пътя. Ако $v_1 = v_k$, то пътят се нарича *цикъл*. Когато граф съдържа поне един цикъл в себе си, той се нарича *цикличен*, в противен случай се нарича *ацикличен*.

Нека са дадени графите $G(V, E)$ и $G'(V, E')$, такива че за всяко $i, j \in V$ наредената двойка (i, j) принадлежи на точно един от двата списъка E' и E. Тогава G' се нарича *допълнителен* на G. Ако даден граф не съдържащ нито едно ребро, се нарича *празен* (*фиг.1.г*). Ако за даден граф е изпълнено $(i, j) \in E$ за всяко i, $j \in V$, графът се нарича *пълен*.



Фиг. 1.г. Пълен и празен неориентиран граф

2. ***Задачи:***

1. Определете степените на възлите на пълен граф с n възела. Обосновете отговора си.
2. Съставете програма, която реализира алгоритъма за обхождане на граф в дълбочина. Графът да бъде зададен чрез матрица на съседство.
3. Съставете програма, която проверява дали даден граф съдържа цикли. За целта използвайте алгоритъма за обхождане в дълбочина, реализиран в зад. 2.

Алгоритъмът за проверка на цикличност се състои в следното: Извършва се обхождане в дълбочина. На всяка стъпка, ако върха i, който се разглежда в момента има съсед, който вече е обходен, различен от предшественика на i, значи графът съдържа цикъл.

Този алгоритъм може да бъде реализиран чрез модификация на функцията за обхождане в дълбочина като се добави още един параметър, който ще показва предшественика на върха, който е текущ). Ако текущият връх i има за съсед връх, който вече е бил обходен, различен от предшественика, значи се е затворил цикъл.