「場の古典論」(ランダウ,リフシッツ著;広重徹,恒藤敏彦訳;増訂新版;東京図書,1964.9)において、作用が Lorentz 変換に対して不変な性質を用いて、相対論的な運動量とエネルギーの導出方法が記載されている。この方法では、4 元力や 4 元ベクトルを考えずに相対論的な運動量とエネルギーの導出することが可能となる。

ところで、作用が Lorentz 変換に対して不変であるかどうかの議論はなされておらず、証明が気になったので、以下で導出した。

(2026.01.15,電磁気電算機研究所,エフラムダ)

# 作用のLorentz変換に対する不変性と、相対論的エネルギー

エネルギーが保存される$x$軸上の運動を考える。

K系から見て、時刻$t_1$から$t_2$迄、K'系から見て時刻$t_1'$から$t_2'$迄の運動について、K, K'系から見た作用を夫々$S, S'$とする。

K系から見た速度を$u(t)$、加速度を$a(t)$、K'系から見た夫々を$u'(t')$, $a'(t')$とする。

K'系がK系に対し、$x$方向$v$(定数)の速度で運動するとき、

Lorentz変換は、
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{但し } \beta = \frac{v}{c}$$

ここで、K'系から見た作用$S'$は、K'系のLagrangian $L'$を用いて、

$$S' = \int_{t_1'}^{t_2'} L'(x', u')\, dt' \quad \text{(エネルギーが保存され、} L' \text{は} t' \text{に陽に依存しない。)}$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} L' \frac{dt'}{dt}\, dt$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} L' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}\, dt$$

ここで、K系から見たLagrangian $L$に対し、

$$L = L' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ と置くことが可能であれば、

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = S$$ となる。

以下、
$$F = L' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ とおく。

No. 2

Date

K'系から見た速度 $u'(t')$ について

$$u'(t') = \frac{dx'}{dt'}$$

$$= \frac{dt}{dt'}\frac{dx'}{dt}$$

$$= \left\{\frac{d}{dt'}\left(\frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right\}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right\} \quad (\because \text{Lorentz 逆変換})$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left(1 + \frac{v}{c^2}u'\right)(u - v)$$

$$\therefore (1-\beta^2)u' = \left(1 + \frac{v}{c^2}u'\right)(u-v)$$

$$= (u-v) + \frac{v}{c^2}(u-v)u'$$

$$\Leftrightarrow u'\left(1 - \beta^2 - \frac{v}{c^2}u + \frac{v^2}{c^2}\right) = u - v$$

$$\Leftrightarrow u'\left(1 - \frac{v}{c^2}u\right) = u - v$$

$$\therefore u' = \frac{u-v}{1 - \frac{v}{c^2}u} \quad \cdots ①$$

また、

$$\frac{du'}{du} = \frac{d}{du}\frac{u-v}{1-\frac{v}{c^2}u}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{v}{c^2}u\right) - (u-v)\left(-\frac{v}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}$$

$$= \frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2} \quad \cdots ②$$

K'系から見た加速度 $a'(t')$ について

$$a'(t') = \frac{du'(t')}{dt'}$$

$$= \frac{d}{dt'}\frac{u(t)-v}{1-\frac{v}{c^2}u(t)}$$

$$= \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\frac{u-v}{1-\frac{v}{c^2}u}$$

$$= \frac{1+\frac{v}{c^2}u'}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{a\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)-(u-v)\left(-\frac{v}{c^2}a\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1+\frac{v}{c^2}\cdot\frac{u-v}{1-\frac{v}{c^2}u}\right)\cdot\frac{a\left(1-\frac{v}{c^2}u+\frac{v}{c^2}u-\beta^2\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2} \quad (\because ①)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\frac{v}{c^2}u+\frac{v}{c^2}u-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{a(1-\beta^2)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^3}$$

$$= \frac{a(t)\,(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u(t)\right)^3} \quad \cdots ③$$

また、以下の値を求める。

$$\frac{\partial E'}{\partial x} = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}\right)E'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E'}{\partial x'} \quad \cdots ④$$

(∵ エネルギーが保存され、$E'$は$t'$に陽に依存しない)

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'}\frac{du'}{du}$$

$$= \frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \quad (\because ②) \quad \cdots ⑤$$

$$\frac{d\mathcal{L}'}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{du'}{dt}\frac{\partial}{\partial u'}\right)\mathcal{L}'$$

$$= \left[\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{du}{dt}\cdot\frac{du'}{du}\frac{\partial}{\partial u'}\right]\mathcal{L}'$$

$$= \left\{\frac{u-v}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial x'} + a\frac{(1-\beta^2)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}\frac{\partial}{\partial u'}\right\}\mathcal{L}' \cdots ⑥$$

ここで、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathcal{L}'\frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{L}'\frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right) + \mathcal{L}'\left(-\frac{v}{c^2}\right)\right\}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right) - \mathcal{L}'\frac{\partial}{\partial x}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} - \frac{v}{c^2}\mathcal{L}'\right\}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'}$$

($\because$ ④, ⑤, $u(=\dot{x})$ と $x$ は独立で $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.)

$$= \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-\frac{v}{c^2}u}\,\frac{\partial L'}{\partial u'}\right) - \frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{dL'}{dt}$$

$$-\frac{1}{1-\beta^2}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)\frac{\partial L'}{\partial x'}$$

$$= \sqrt{1-\beta^2}\cdot\frac{+\frac{v}{c^2}a}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}\,\frac{\partial L'}{\partial u'} + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial u'}\right)$$

$$-\frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\frac{u-v}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{\partial L'}{\partial x'} + a\,\frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}\,\frac{\partial L'}{\partial u'}\right\}$$

$$-\frac{1}{1-\beta^2}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)\frac{\partial L'}{\partial x'}$$

$$= \frac{\partial L'}{\partial u'}\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}\left(\frac{v}{c^2}a-\frac{v}{c^2}a\right)$$

$$+\frac{\partial L'}{\partial x'}\,\frac{1}{1-\beta^2}\left(-\frac{u}{c^2}v+\beta^2-1+\frac{v}{c^2}u\right)$$

$$+\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial u'}\right)$$

$$= -\frac{\partial L'}{\partial x'} + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u}\,\frac{dt'}{dt}\,\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L'}{\partial u'}\right)$$

$$= \frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L'}{\partial u'}\right)-\frac{\partial L'}{\partial x'}$$

$= 0$ ($\because$ Euler-Lagrange eq. at K'系)

No. 6

Date

即ち、 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$ で

Fは K系での Lagrangian $L$ であると見れる。

故に、
$$L' \frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}} = F = L \quad であり、$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' \frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = S$$

が成立する。

∴ 作用 $S$ は、Lorentz 変換に対し不変。

以下、自由運動を考える。

Lorentz 変換に対する不変量は、固有時 $\tau$ に比例し、定数 $\alpha$ により、

$$S = \alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \quad とおける。$$

$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ より、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \alpha\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\, dt$$

∴ K系での Lagrangian $L$ は、 $L = \alpha\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$.

$u \ll c$ の古典的極限で、 $L = \alpha\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \to \alpha\left(1-\frac{u^2}{2c^2}\right) = \alpha - \frac{\alpha u^2}{2c^2}$

古典的 Lagrangian は $L = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{df(x,t)}{dt}$

但し、$f(x,t)$ は任意の関数

$f(x,t) = \alpha t$ とおくと、

$$L = \frac{1}{2}mu^2 + \alpha = \alpha - \frac{\alpha u^2}{2c^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = -mc^2.$$

故に、相対論的 Lagrangian は、

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

K系において、
$x$ 方向の運動量 $p_x$ は、 $p_x = \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{-mc^2\left(-2\frac{u}{c^2}\right)}{2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

エネルギー $E$ は、

$$E = pu - L$$

$$= \frac{mu^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$