

「場の古典論」(ランダウ,リフシツ著;広重徹,恒藤敏彦訳;増訂新版;東京図書,1964.9)において、作用が Lorentz 変換に対して不变な性質を用いて、相対論的な運動量とエネルギーの導出方法が記載されている。

ところで、作用が Lorentz 変換に対して不变であるかどうかの議論はなされておらず、証明が気になつたので、以下で導出した。

(2026.01.15,電磁気電算機研究所,エラムダ)

作用の Lorentz 変換に対する不変性と、相対論的エネルギー

エネルギーが保存する運動を考へる。

$K$  系が見た時刻  $t_1$  の左端、 $K'$  系が見た時刻  $t'_1$  の左端の運動を考へる。

$K, K'$  系が見た作用は  $S, S'$  である。

$K$  系が見た速度を  $u(t)$ 、加速度を  $a(t)$ 、 $K'$  系が見た速度を  $u'(t')$ 、 $a'(t')$  である。

$K'$  系が  $K$  系に対して  $\gamma$  方向  $v$  (定数) の速度で運動する。

Lorentz 変換は、

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \text{ 但し } \beta := \frac{v}{c}$$

∴  $t'$ 、 $K'$  系が見た作用  $S'$  は、 $K'$  系の Lagrangian  $L'$  を用いて、

$$S' = \int_{t'_1}^{t'_2} L'(x', u') dt' \quad (\text{エネルギーが保存} \Leftrightarrow L' \text{ に } v \text{ 依存しない})$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L' \left( \frac{dx}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L' \left( \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) dt$$

∴  $t$ 、 $K$  系が見た Lagrangian  $L$  は式、

$$L = L' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ と置くことが可能である。}$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1 - \beta^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt = S \text{ となる。}$$

以下、

$$F = L' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ となる。}$$

K' のとき最大速度  $u'(T) (= \infty)$

$$u'(T') = \frac{dx'}{dT'}$$

$$= \frac{dT}{dT'} \frac{dx'}{dT}$$

$$= \left\{ \frac{d}{dT'} \left( \frac{T' \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right\} \left\{ \frac{d}{dT} \left( \frac{x-v}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right\} \quad (\because \text{Lorentz 逆変換})$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2} \left( 1 + \frac{v}{c^2} u' \right) (u-v)$$

$$\therefore (1-\beta^2) u' = \left( 1 + \frac{v}{c^2} u' \right) (u-v)$$

$$= (u-v) + \frac{v}{c^2} (u-v) u'$$

$$\Leftrightarrow u' \left( 1 - \beta^2 + \frac{v}{c^2} u + \frac{v^2}{c^2} \right) = u-v$$

$$\Leftrightarrow u' \left( 1 - \frac{v}{c^2} u \right) = u-v$$

$$\therefore u' = \frac{u-v}{1 - \frac{v}{c^2} u} \quad \cdots \textcircled{1}$$

次に、

$$\frac{du'}{du} = \frac{d}{du} \frac{u-v}{1 - \frac{v}{c^2} u}$$

$$= \frac{\left( 1 - \frac{v}{c^2} u \right) - (u-v) \left( -\frac{v}{c^2} \right)}{\left( 1 - \frac{v}{c^2} u \right)^2}$$

$$= \frac{1 - \beta^2}{\left( 1 - \frac{v}{c^2} u \right)^2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

K'軸に沿った最大加速度  $a'(T)$  は?

$$a'(T) = \frac{d^2 u'(T)}{dT^2}$$

$$= \frac{d}{dT} \frac{u(T)-v}{1-\frac{v}{c^2}u(T)}$$

$$= \frac{dT}{dT'} \frac{d}{dT'} \frac{u-v}{1-\frac{v}{c^2}u}$$

$$= \frac{1-\frac{v}{c^2}u'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{a(1-\frac{v}{c^2}u) - (u-v)(-\frac{v}{c^2}/a)}{(1-\frac{v}{c^2}u)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( 1 - \frac{\frac{v}{c^2} \cdot \frac{u-v}{1-\frac{v}{c^2}u}}{\underbrace{1-\frac{v}{c^2}u}_{(1-\frac{v}{c^2}u)^2}} \right) \cdot \frac{a(1-\frac{v}{c^2}u + \frac{v}{c^2}u - \beta^2)}{(1-\frac{v}{c^2}u)^2} \quad (\because (1))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( 1 - \frac{\frac{v}{c^2}u - \frac{v}{c^2}u - \frac{v^2}{c^2}}{(1-\frac{v}{c^2}u)^2} \right) \frac{a(1-\beta^2)}{(1-\frac{v}{c^2}u)^2}$$

$$= \frac{a(T) (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-\frac{v}{c^2}u(T))^3} \quad \dots (3)$$

次に、以下の値を代入する。

$$\frac{\partial Z'}{\partial x} = \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial T'}{\partial T'} \frac{\partial}{\partial t'} \right) Z'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial Z'}{\partial x'} \quad \dots (4)$$

(∴ 線形化が成立する;  $Z'(2T')$  は陽に依存しない。)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u} &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial u} \\ &= \frac{1-\beta^2}{(1-\frac{v}{c^2}u)^2} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \quad (\because \textcircled{②}) \quad \dots \textcircled{⑤}\end{aligned}$$

$$\frac{d\mathcal{L}'}{dt} = \left( \frac{dx'}{dt} \frac{\partial}{\partial x'}, + \frac{du'}{dt} \frac{\partial}{\partial u'} \right) \mathcal{L}'$$

$$= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u'} \right\} \right] \mathcal{L}'$$

$$= \left\{ \frac{u-v}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial}{\partial x'} + a \cdot \frac{(1-\beta^2)}{(1-\frac{v}{c^2}u)^2} \frac{\partial}{\partial u'} \right\} \mathcal{L}' \quad \dots \textcircled{⑥}$$

∴ 2:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \mathcal{L}' \frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathcal{L}' \frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u} \left( 1 - \frac{v}{c^2}u \right) + \mathcal{L}' \left( -\frac{v}{c^2} \right) \right\}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} \left( 1 - \frac{v}{c^2}u \right) - \mathcal{L}' \frac{\partial}{\partial x} \left( 1 - \frac{v}{c^2}u \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1-\beta^2}{(1-\frac{v}{c^2}u)^2} \left( 1 - \frac{v}{c^2}u \right) \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} - \frac{v}{c^2} \mathcal{L}' \right\}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( 1 - \frac{v}{c^2}u \right) \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} \right)$$

$$(\because \textcircled{④}, \textcircled{⑤}, u (=x) \text{ なら } \frac{\partial u}{\partial x} = 0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{1-\beta^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1-\frac{v}{c^2}u} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \right) - \frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\mathcal{L}'}{dt} \\
 &\quad - \frac{1}{1-\beta^2} \left( 1 - \frac{v}{c^2}u \right) \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} \\
 &= \sqrt{1-\beta^2} \cdot \frac{+\frac{v}{c^2}a}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \right) \\
 &\quad - \frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \left\{ \frac{u-v}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} + a \frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{1-\beta^2} \left( 1 - \frac{v}{c^2}u \right) \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} \\
 &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2} \left( \frac{u}{c^2}a - \frac{v}{c^2}a \right) \\
 &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} \frac{1}{1-\beta^2} \left( -\frac{u}{c^2}v + \beta^2 - 1 + \frac{v}{c^2}u \right) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \right) \\
 &= - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} - \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u} \frac{d\mathcal{L}'}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \right) \\
 &\quad - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} \\
 &= 0 \quad (\because \text{Euler-Lagrange eq. at K'系})
 \end{aligned}$$

$$\text{P.P.S. } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right) - \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \quad \text{?}$$

F12 K 系の Lagrangian L は? と見なす。

$$\text{次に: } L' \frac{1 - \frac{u}{c^2} u}{\sqrt{1 - \beta^2}} = F = L \quad \text{? は?}$$

$$S' = \int_{T_1}^{T_2} L' \frac{1 - \frac{u}{c^2} u}{\sqrt{1 - \beta^2}} dt = \int_{T_1}^{T_2} L dt = S$$

が成立する。

∴ 作用 S12. Lorentz 変換に対する不変。

以下、自由運動を考へる。

Lorentz 変換に対する不変量は、固有時  $\tau$  (比例)、定数  $\alpha = \gamma$ 。

$$S = \alpha \int_{T_1}^{T_2} d\tau \quad \text{とする。}$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$S = \int_{T_1}^{T_2} \alpha \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt$$

∴ K 系の Lagrangian L は。  $L = \alpha \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$

$$u \ll c の 古典的 枠組で: L = \alpha \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \alpha \left( 1 - \frac{u^2}{2c^2} \right) = \alpha - \frac{du^2}{2c^2}$$

$$\text{古典的 Lagrangian は } L = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{df(x, t)}{dt}$$

但し、f(x, t) は任意の関数

$$f(x, t) = d \Gamma \chi_{x < \chi}$$

$$L = \frac{1}{2} m u^2 + d = d - \frac{m u^2}{2 c^2}$$

$$\Rightarrow d = m c^2$$

次に、相対論的 Lagrangian は、

$$L = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$K$  系に於ける  
 $x$  方の運動量  $p_x$  は、  $p_x = \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{-m c^2 (-2 \frac{u}{c^2})}{2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

エネルギー  $E$  は、

$$E = p u - L$$

$$= \frac{m u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + m c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \overbrace{u}$$