

「場の古典論」(ランダウ,リフシッツ著;広重徹,恒藤敏彦訳;増訂新版;東京図書,1964.9)において、作用が Lorentz 変換に対して不変な性質を用いて、相対論的な運動量とエネルギーの導出方法が記載されている。

ところで、作用が Lorentz 変換に対して不変であるかどうかの議論はなされておらず、証明が気になったので、以下で導出した。

(2026.01.15,電磁気電算機研究所,エフラムダ)

作用の Lorentz 変換は文字通り不変性と、相対論的エネルギー

エネルギーが保存され x 軸上の運動を考え.

K 系から見、時刻 t_1 から t_2 迄、 K' 系から見、時刻 t'_1 から t'_2 迄の運動について、 K, K' 系から見た作用を S, S' とする.

K 系から見た速度を $u(t)$, 加速度を $a(t)$, K' 系から見た速さを $u'(t')$, $a'(t')$ とする.

K' 系が K 系に対し、 x 方向 v (定数) の速度で運動するとする.

Lorentz 変換は、
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{但し } \beta := \frac{v}{c}$$

そこで K' 系から見た作用 S' は、 K' 系の Lagrangian Z' を用いて、

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t'_1}^{t'_2} Z'(x', u') dt' \quad (\text{エネルギーが保存され、} Z' \text{ は } t' \text{ に陽に依存しない}) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} Z' \frac{dt'}{dt} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} Z' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1 - \beta^2}} dt \end{aligned}$$

そこで K 系から見た Lagrangian Z に対し、

$$Z = Z' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{と置くことが可能であれば、}$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} Z' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1 - \beta^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} Z dt = S \quad \text{となる.}$$

以下、
$$F = Z' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{と置く.}$$

K' 系中见大速度 $u'(t')$ 为 u

$$u'(t') = \frac{dx'}{dt'}$$

$$= \frac{dt}{dt'} \frac{dx'}{dt}$$

$$= \left\{ \frac{d}{dt'} \left(\frac{t + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right\} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right\} \quad (\because \text{Lorentz 逆变换})$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2} \left(1 + \frac{v}{c^2} u' \right) (u-v)$$

$$\therefore (1-\beta^2) u' = \left(1 + \frac{v}{c^2} u' \right) (u-v)$$

$$= (u-v) + \frac{v}{c^2} (u-v) u'$$

$$\Leftrightarrow u' \left(1 - \beta^2 + \frac{v}{c^2} u + \frac{v^2}{c^2} \right) = u-v$$

$$\Leftrightarrow u' \left(1 - \frac{v}{c^2} u \right) = u-v$$

$$\therefore u' = \frac{u-v}{1 - \frac{v}{c^2} u} \quad \dots (1)$$

故、

$$\frac{du'}{du} = \frac{d}{du} \frac{u-v}{1 - \frac{v}{c^2} u}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{v}{c^2} u \right) - (u-v) \left(-\frac{v}{c^2} \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u \right)^2}$$

$$= \frac{1-\beta^2}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u \right)^2} \quad \dots (2)$$

K'系から見た加速度 $a'(t')$ について

$$\begin{aligned}
 a'(t') &= \frac{d u'(t')}{d t'} \\
 &= \frac{d}{d t'} \frac{u(t) - v}{1 - \frac{v}{c^2} u(t)} \\
 &= \frac{d t}{d t'} \frac{d}{d t} \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2} u} \\
 &= \frac{1 + \frac{v}{c^2} u'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{a \left(1 - \frac{v}{c^2} u\right) - (u - v) \left(-\frac{v}{c^2} a\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u\right)^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2} u}\right) \cdot \frac{a \left(1 - \frac{v}{c^2} u + \frac{v}{c^2} u - \beta^2\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u\right)^2} \quad (\because \textcircled{0}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 - \frac{v}{c^2} u + \frac{v}{c^2} u - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{a (1 - \beta^2)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u\right)^3} \\
 &= \frac{a(t) (1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u(t)\right)^3} \quad \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

次に、以下の値を求めよ。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \mathcal{L}' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} \quad \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

(\because 運動エネルギー保存則、 \mathcal{L}' は T' の陽に依存しない)

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z'}{\partial u} &= \frac{\partial Z'}{\partial u'} \frac{du'}{du} \\ &= \frac{1-\beta^2}{(1-\frac{v}{c^2}u)^2} \frac{\partial Z'}{\partial u'} \quad (\because \textcircled{2}) \quad \dots \textcircled{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dZ'}{dt} &= \left(\frac{dx'}{dt} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{du'}{dt} \frac{\partial}{\partial u'} \right) Z' \\ &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{du}{dt} \cdot \frac{du'}{du} \frac{\partial}{\partial u'} \right] Z' \\ &= \left[\frac{u-v}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{(1-\beta^2)}{(1-\frac{v}{c^2}u)^2} \frac{\partial}{\partial u'} \right] Z' \quad \dots \textcircled{6}\end{aligned}$$

$z = z'$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(Z' \frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left(Z' \frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial Z'}{\partial u} \left(1-\frac{v}{c^2}u \right) + Z' \left(-\frac{v}{c^2} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\partial Z'}{\partial x} \left(1-\frac{v}{c^2}u \right) - Z' \frac{\partial}{\partial x} \left(1-\frac{v}{c^2}u \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1-\beta^2}{(1-\frac{v}{c^2}u)^2} \left(1-\frac{v}{c^2}u \right) \frac{\partial Z'}{\partial u'} - \frac{v}{c^2} Z' \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1-\frac{v}{c^2}u \right) \frac{\partial Z'}{\partial x'} \right)\end{aligned}$$

$$(\because \textcircled{4}, \textcircled{5}, u(\pm \infty) \text{ is finite and } \frac{\partial u}{\partial x} = 0)$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{1-\beta^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-\frac{v}{c^2}u} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \right) - \frac{v}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\mathcal{L}'}{dt} \\
&\quad - \frac{1}{1-\beta^2} \left(1 - \frac{v}{c^2}u \right) \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} \\
&= \sqrt{1-\beta^2} \cdot \frac{+\frac{v}{c^2}a}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \right) \\
&\quad - \frac{v}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \left\{ \frac{u-v}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} + a \frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{1-\beta^2} \left(1 - \frac{v}{c^2}u \right) \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2} \left(-\frac{u}{c^2}a - \frac{v}{c^2}a \right) \\
&\quad + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} \frac{1}{1-\beta^2} \left(-\frac{u}{c^2}v + \beta^2 - 1 + \frac{v}{c^2}u \right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \right) \\
&= -\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u} \frac{dt'}{dt} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \right) \\
&= \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} \\
&= 0 \quad (\because \text{Euler-Lagrange eq. at } K' \text{ frame})
\end{aligned}$$

RPS. $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$ 2

FはK系でのLagrangian L であることがわかる。

故に、

$$L' \frac{1 - \frac{v}{c^2} u}{\sqrt{1 - \beta^2}} = F = L \quad \text{である}$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' \frac{1 - \frac{v}{c^2} u}{\sqrt{1 - \beta^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt = S$$

が成立する。

\therefore 作用 S は、Lorentz変換に対して不変。

以下、自由運動を考えた。

Lorentz変換に対して不変量は、固有時間 τ に比例し、定数 α により、

$$S = \alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \quad \text{と表わす。}$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad \text{より}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \alpha \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt$$

\therefore K系でのLagrangian L は、 $L = \alpha \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ 。

$$u \ll c \text{ の古典的極限で: } L = \alpha \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \alpha \left(1 - \frac{u^2}{2c^2} \right) = \alpha - \frac{\alpha u^2}{2c^2}$$

$$\text{古典的Lagrangianは } L = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{d\phi(x, t)}{dt}$$

但し、 $\phi(x, t)$ は任意の関数

$$f(x, t) = d \quad x_1 < x_2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m u^2 + d = d - \frac{d u^2}{2 c^2}$$

$$\Rightarrow d = -m c^2$$

次に、相対論的 Lagrangian は、

$$\mathcal{L} = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

K系において、
x 軸の運動量 p_x は、

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \frac{-m c^2 \left(-2 \frac{u}{c^2}\right)}{2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

エネルギー E は、

$$E = p u - \mathcal{L}$$

$$= \frac{m u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + m c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$