

Resolução de Problemas por Meio de Busca

Inteligência Artificial

Pontifícia Universidade Católica de Campinas

Prof. Dr. Denis M. L. Martins

Objetivos de Aprendizado

- Compreender a formalização de problemas como busca em espaço de estados.
- Analisar diferentes estratégias de busca não-informada.

Recaptulando o modelo PEAS

- **Defina a tarefa**: Determine quais são as metas do agente (ex.: “navegar pelo labirinto”).
- **Especifique P**: Escolha métricas claras que quantifiquem sucesso (ex.: número de passos até o objetivo, tempo total, custo energético).
 - **Medir** progresso. **Indicar** caminho promissor.
- **Descreva E**: Modele o ambiente em termos de estado inicial, transições e observabilidade.
 - Representar aspectos importantes do problema. Nem toda informação é relevante.
- **Determine A**: Especifique quais ações podem ser executadas pelo agente para alterar o ambiente.
- **Liste S**: Identifique quais percepções são necessárias para tomar decisões corretas.

Representação do Problema

- Estado inicial S_0
 - Conjunto de ações $A(S)$ para cada estado S .
 - Função sucessora $Result(S, a) \rightarrow S'$.
 - Custo da ação $c(S, a, S') > 0$.
 - Função meta $Goal(S)$ ou conjunto de estados-meta.
 - Objetivo: Estado final desejado.
-
- Solução: sequência de ações que levam de um estado inicial a um **estado objetivo**.
 - Solução ótima: aquela que apresenta **custo mínimo**.

Buscar uma solução em um espaço
(geralmente) grande de soluções.

Espaço de busca (de estados)

Espaço de Estados (ou de busca)

- Conjunto completo de estados que podem ser alcançados a partir do estado inicial por meio da aplicação sucessiva das ações disponíveis.
- Representação em **grafo** ou **árvore**.
- Cada nó desta estrutura representa um estado possível e cada arco indica uma transição legal entre dois estados.

Exemplo 1: Navegação

- **Problema:** Navegação de um robô num grid 4×4 com obstáculos.
- **Objetivo:** Chegar em uma sala específica.
- **Estado inicial:** $(x=0, y=0)$.
- **Ações:** Norte, Sul, Leste, Oeste (restritas por limites e obstáculos).
- **Sucessor:** $\text{Result}((x,y), \text{Norte}) \rightarrow (x, y+1)$ se não houver obstáculo.
- **Espaço de busca:** Conjunto de todas as coordenadas possíveis (i,j) tais que $0 \leq i, j < 4$ e sem obstáculos.

Tipos de tarefas de busca

- **Planejamento**: O caminho que leva a solução é importante (e.g., labirinto, rota)
- **Identificação**: Saber/Encontrar a solução é o importante (e.g., colorir um mapa)

Exemplo 2: Torre de Hanoi

Um **puzzle de empilhamento de blocos**.

- Há 3 torres (T_1, T_2, T_3).
- Discos de tamanhos distintos (1-pequeno, 2-médio, 3-grande) são empilhados nas torres.
- Regra: um disco nunca pode ser colocado sobre outro menor.

Exemplo 2: Torre de Hanoi (cont.)


Elemento	Descrição
Estado inicial S_0	$\langle (3, 2, 1), (), () \rangle$ – todos os discos na torre T_1 (do maior ao menor).
Conjunto de ações $A(S)$	Mover o disco superior da torre T_i para a torre T_j , onde $i \neq j$ e a ação é legal.
Função sucessora $Result(S, a)$	Remove o topo da torre origem e coloca sobre a torre destino, gerando novo estado.
Custo da ação $c(S, a, S')$	1 (todos os movimentos têm custo unitário).
Condição de meta $Goal(S)$	Todos os discos na torre T_3 : $\langle (), (), (3, 2, 1) \rangle$.

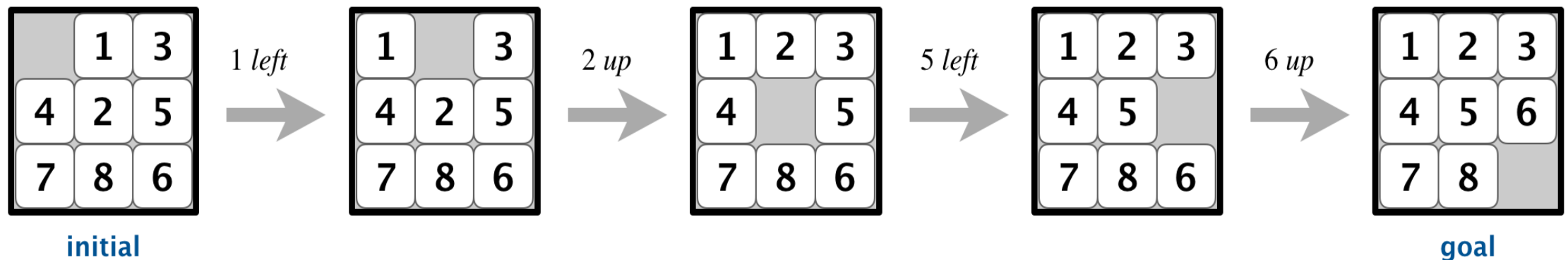
O espaço de estados possui $3^3 = 27$ combinações possíveis, mas apenas 15 são válidas quando se considera a regra de empilhamento.

Exemplo 2: Torre de Hanoi (cont.)

1. **Ação:** Mover disco 1 da T_1 para $T_3 \rightarrow$ Estado $S_1 = \langle (3, 2), (), (1) \rangle$
2. **Ação:** Mover disco 2 da T_1 para $T_2 \rightarrow$ Estado $S_2 = \langle (3), (2), (1) \rangle$
3. **Ação:** Mover disco 1 da T_3 para $T_2 \rightarrow$ Estado $S_3 = \langle (3), (2, 1), () \rangle$
4. **Ação:** Mover disco 3 da T_1 para $T_3 \rightarrow$ Estado $S_4 = \langle (), (2, 1), (3) \rangle$
5. **Ação:** Mover disco 1 da T_2 para $T_1 \rightarrow$ Estado $S_5 = \langle (1), (2), (3) \rangle$
6. **Ação:** Mover disco 2 da T_2 para $T_3 \rightarrow$ Estado $S_6 = \langle (1), (), (3, 2) \rangle$
7. **Ação:** Mover disco 1 da T_1 para $T_3 \rightarrow$ Estado $S_7 = \langle (), (), (3, 2, 1) \rangle$ (meta).

Exemplo 3: 8-Puzzle

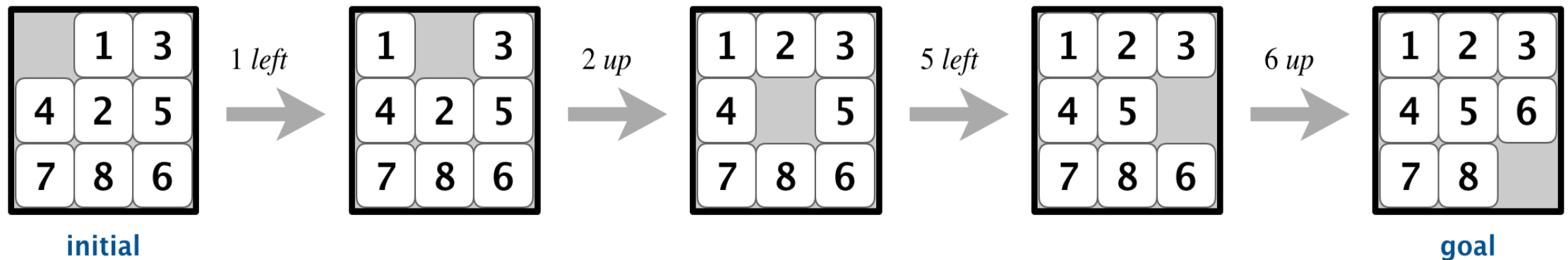
- O 8-Puzzle é um quebra-cabeça de lógica composto por nove peças quadradas, numeradas de 1 a 8, dispostas em um tabuleiro (3×3). Uma das posições permanece vazia (na figura abaixo,  cinza).
- O objetivo do jogo é reordenar as peças até que o tabuleiro esteja na configuração desejada (na figura, com as peças em ordem crescente).



Fonte da imagem: <https://8-puzzle.readthedocs.io/en/latest/>

Exemplo 3: 8-Puzzle (cont.)

- **Espaço de estados:** $9! = 362.880$ permutações possíveis.
- Como podemos representar um estado?
- Qual conjunto de ações permitidas?
- Como avaliar o progresso e o sucesso?



Fonte da imagem: <https://8-puzzle.readthedocs.io/en/latest/>

Características importantes em problemas de busca

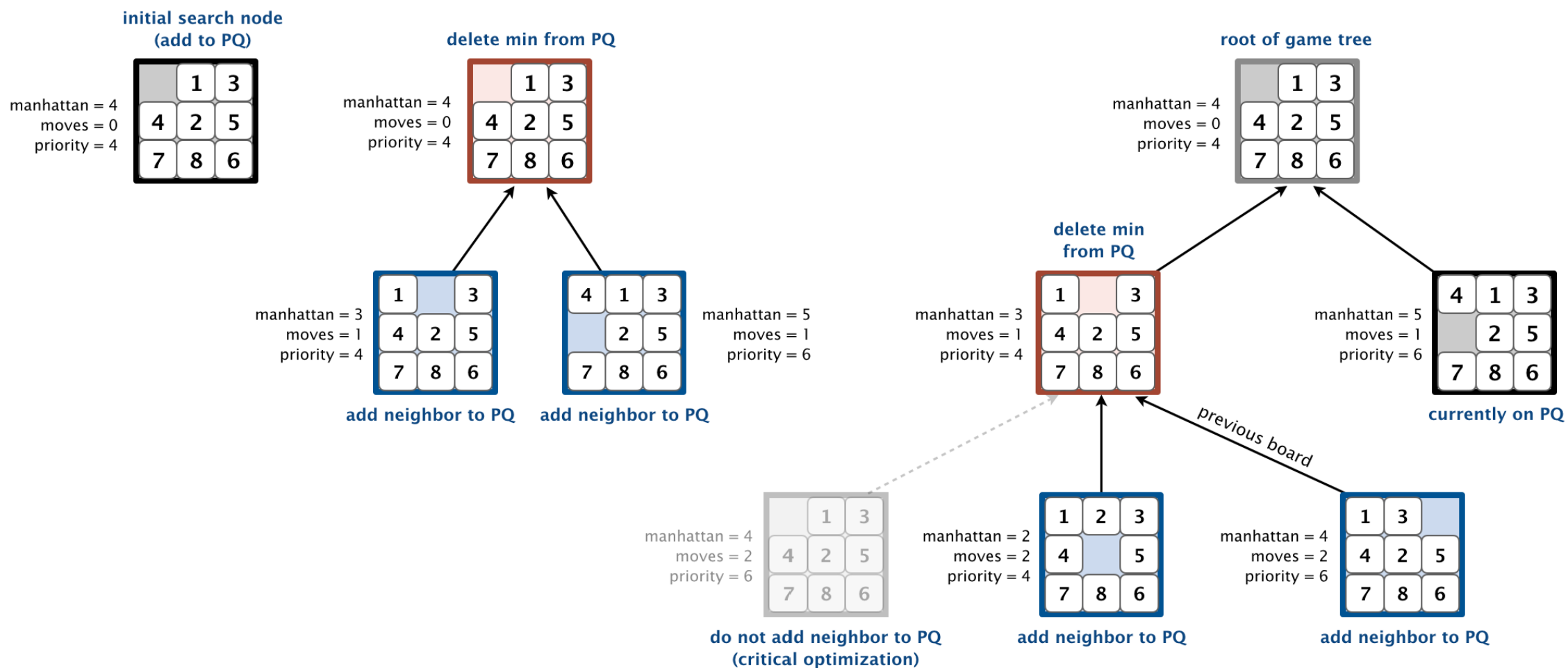
- **Compleitude:** O algoritmo encontra uma solução, dado que ela **exista**?
- **Otimalidade:** Quando o algoritmo encontra uma solução, ela é a **melhor possível**?
- **Complexidade de Tempo:** Como o **tempo** de processamento do algoritmo se comporta em função do tamanho da entrada?
- **Complexidade de Espaço:** Como o **espaço** ocupado pelas informações necessárias ao algoritmo se comporta em função do tamanho da entrada?

Buscando soluções (cont.)

- Após a formulação do problema, precisamos buscar por uma solução.
- Podemos aplicar algoritmos de busca que consideram várias sequências de ações possíveis.
 - Como navegar sistematicamente pelo espaço de busca?
 - Como representar este espaço?
- **Cuidado:** Manter o mínimo de informação armazenada, o que muitas vezes implica em não gerar/armazenar **todos** os possíveis estados em memória.

Buscando soluções (cont.)

- Os algoritmos começam de um estado inicial e as sequências de ações formam um **árvore de busca**:
 - **Nó raiz** representa o estado inicial.
 - Cada nó representa um estado e cada aresta a aplicação de uma ação.
- A cada ação, a árvore de busca é expandida.
 - **Fronteira**: nós a serem expandidos.
 - **Estratégia de expansão/busca**: escolher o nó mais promissor a ser expandido.



Fonte da imagem: <https://8-puzzle.readthedocs.io/en/latest/>

Visão geral de um algoritmo de busca

Iteração Principal – enquanto a fronteira **não estiver vazia**:

1. **Seleção**: retirar o nó mais promissor segundo a política de expansão.
 2. **Teste de Meta**: verificar se o estado extraído satisfaz a condição de objetivo; se sim, devolver caminho e terminar.
 3. **Expansão**: gerar sucessores aplicando todas as ações admissíveis ao estado atual, calculando custo e heurística de cada filho.
 4. **Atualização**: insere nós gerados na fronteira e volta para o passo 1
- **Convergência ou Terminação** – algoritmo termina quando encontra meta, quando a fronteira esvazia (sem solução) ou quando excede limites pré-estabelecidos (tempo/memória).

Estratégias de Busca Não-Informada

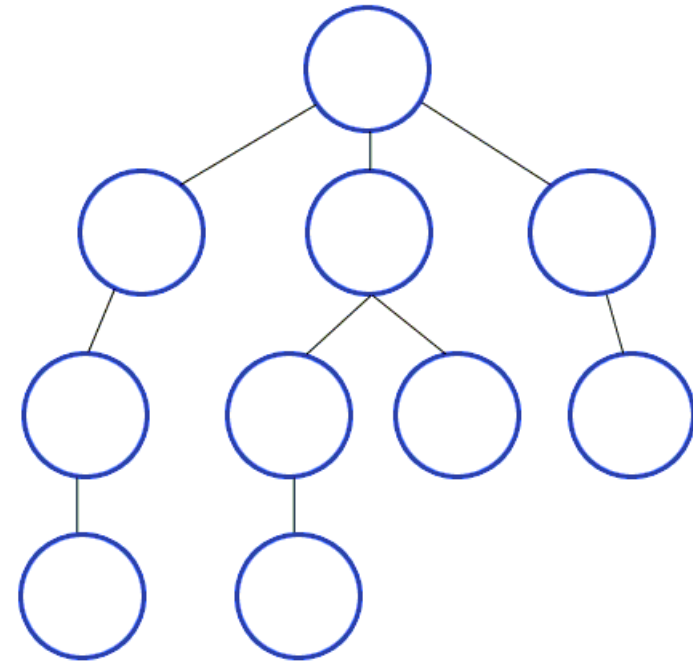
Algoritmos que exploram o espaço de estados **sem utilizar nenhuma informação adicional** (heurística) sobre a distância até o objetivo que ajude a filtrar ações, sendo necessário buscar **exaustivamente** pelo espaço de estados.

Busca em Largura (BFS) – Nós são expandidos na ordem que foram criados. Usa **fila**. Expande níveis sucessivos; garante solução ótima em custo unitário.

Busca em Profundidade (DFS) – O último nó criado é o primeiro a ser expandido. Usa **pilha**. Não é completa. Não garante otimalidade.

Busca em Largura (BFS)

- Todos os nós em dada profundidade na árvore de busca são expandidos, antes que todos os nós no nível seguinte sejam expandidos.
 - **Estrutura de dados principal:** fila FIFO (first-in, first-out).
1. Inserir o nó inicial na fila.
 2. Repetir enquanto a fila não estiver vazia:
 - a. Remover o primeiro nó **n** da fila.
 - b. Se **n** é solução, retornar caminho até **n**.
 - c. Expandir **n**, gerando todos os sucessores e inserindo-os na fila (apenas se ainda não foram visitados).



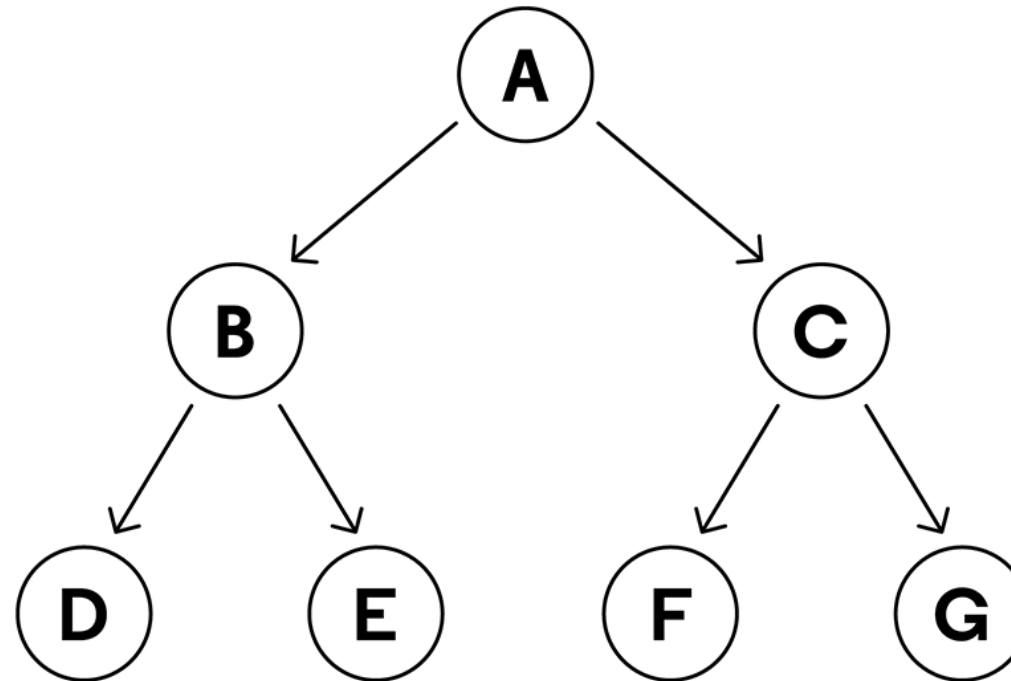
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Busca_em_largura

Busca em Largura (BFS)

Tree with an Empty Queue



Frontier Queue
FIFO (First in First Out)



BFS: Completude e Otimalidade

- **Completeness:** garante encontrar uma solução se existir, desde que a árvore seja finita.
- **Optimality:** fornece caminho mínimo em árvores com custo uniforme (quando todos os custos de passos forem iguais). Não garante otimalidade quando custos variam.

BFS: Complexidade de tempo

- Assuma uma árvore onde cada estado (nó) tem b sucessores (nós filhos).
 - A raiz da árvore de busca gera b nós no primeiro nível, cada um dos quais gera b outros nós, totalizando b^2 no segundo nível.
 - Cada nó do segundo nível gera mais b outros nós, totalizando b^3 nós no terceiro nível...
- Assumindo uma solução que esteja no nível de profundidade d :
 - No pior caso, o número total de nós gerados é $b + b^2 + b^3 + \dots + b^d$
 - Em notação Big O, temos $O(b^d)$.

BFS: Complexidade de espaço (memória)

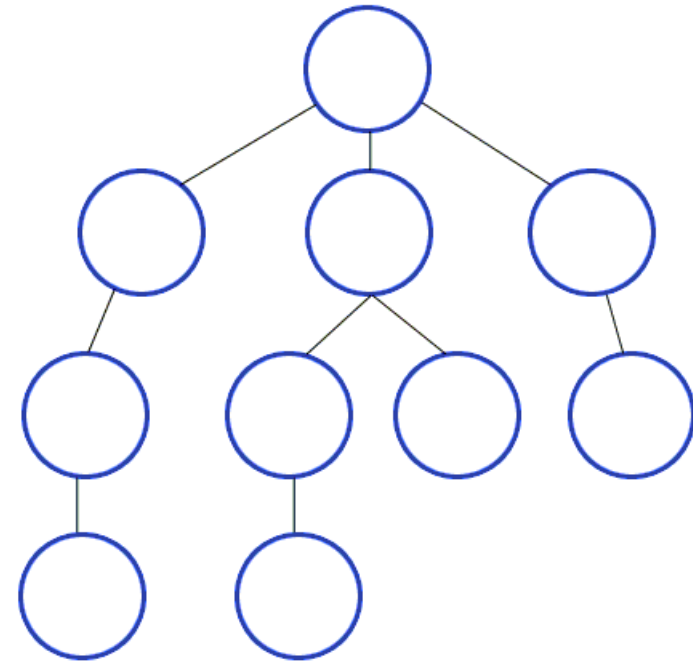
- Qualquer busca em grafos (ou árvores) que armazena todos os nós expandidos no conjunto explorado, a complexidade do espaço está sempre dentro de um fator de b da complexidade do tempo.
- Na BFS cada nó gerado permanecerá na memória. Ou seja, a fila pode conter todos os nós de uma camada inteira.
 - Complexidade de espaço: exponencial em d .
 - $O(b^{d-1})$ nós no conjunto explorado e $O(b^d)$ nós na borda.
 - Dominada pelo tamanho da borda. Então $O(b^d)$.

Note que $O(b^d)$ é **assustadoramente** ruim! Se a profundidade d é grande, então o custo de tempo e memória é **impraticável**.

- Se $b = 10$ e $d = 16$, então o número de nós é 10^{16} .
- Se precisarmos de **1000 bytes** para armazenar cada nó e gerarmos **um milhão de nós por segundo**, temos:
 - Tempo: **350 anos**
 - Memória: **10 exabytes** $\approx 10\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ bytes

Busca em Profundidade (DFS)

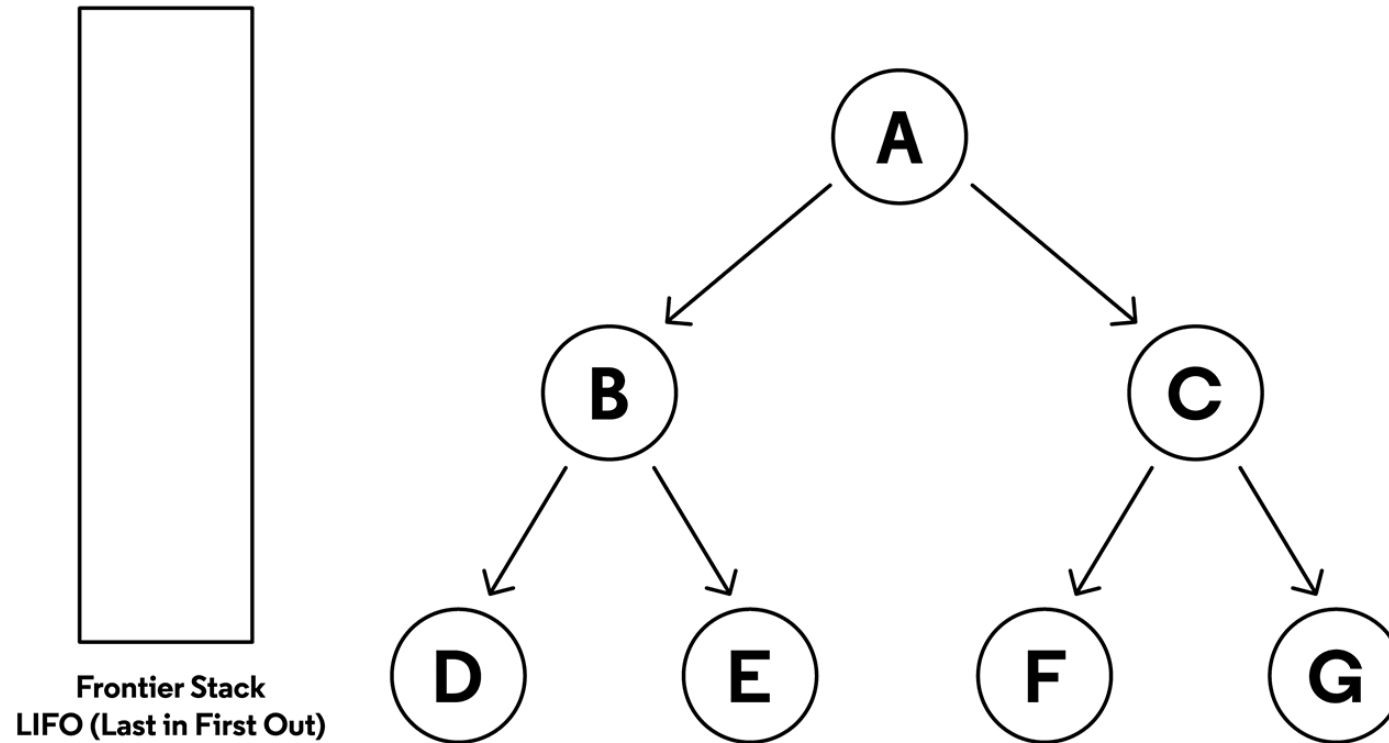
- Sempre expande o nó mais profundo na borda atual da árvore de busca
 - **Estrutura principal:** pilha LIFO (ou recursão implícita).
1. Inserir o nó inicial na pilha.
 2. Repetir enquanto a pilha não estiver vazia:
 - a. Remover o topo **n**.
 - b. Se **n** é objetivo, retornar caminho até **n**.
 - c. Expandir **n**, gerando todos os sucessores e inserindo-os na pilha (apenas se ainda não foram visitados).



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Depth-first_search

Busca em Profundidade (DFS)

Tree with an Empty Stack



DFS: Completude e Otimalidade

- **Completude**: a versão da busca em **grafos**, que evita estados repetidos e caminhos redundantes, é completa em espaços de estados finitos porque acabará por expandir cada nó. A versão da busca em **árvore** não é completa.
- **Otimalidade**: não garante caminho mínimo (mesmo que o grafo tenha custo uniforme); apenas encontra **uma** solução.

DFS: Complexidade

- **Complexidade de tempo:** $O(b^m)$.
 - No pior caso expande todos os nós até a profundidade m , onde m é a profundidade máxima de qualquer nó e b é o fator médio de sucessão.
 - Mas tende a operar melhor quando a solução está em nós-folha mais à esquerda.
- **Complexidade de espaço:** $O(b * m)$.
 - Armazena apenas o caminho atual + nós pendentes na pilha.
 - Proporcional à profundidade máxima alcançada.
 - Uma vez que um nó é expandido, ele pode ser removido da memória, assim que todos os seus descendentes tenham sido explorados.
 - Nas métricas utilizadas anteriormente: **156 kilobytes**, em vez de 10 exabytes na profundidade $d = 16$.

Observações

- **DFS** é preferido quando o espaço de estados é vasto e a solução está mais profunda ou quando não se requer caminho mínimo.
- **BFS** garante, em grafos de custo uniforme, que o primeiro nó encontrado na profundidade **d** corresponde ao caminho mais curto; porém essa garantia vem à custa de um maior uso de memória.

Busca em profundidade limitada

- **Objetivo**: combinar a simplicidade da Busca em Profundidade com controle explícito sobre a profundidade máxima explorada, evitando explorações infinitas em grafos recursivos ou ilimitados.
- **Estrutura de dados principal**: pilha LIFO (ou recursão) acompanhada de um parâmetro `limite` que indica a profundidade máxima permitida.
- Busca **Iterativa**
- Duas versões:
 - Limitada (Depth Limited Search - DLS): onde definimos um limite e não o alteramos
 - Iterativa (Iterative Depth Search): onde o limite vai sendo aumentado iterativamente

DLS: Busca em profundidade limitada

1. Iniciar com o nó raiz na pilha, profundidade atual = 0.
2. Enquanto a pilha não estiver vazia:
 - Remover o topo `n`.
 - Se `n` é solução → retornar caminho até `n`.
 - Se profundidade atual < `limite` : expandir `n`, inserir sucessores na pilha com profundidade +1 (apenas se ainda não visitados).
3. Se a pilha esvaziar sem encontrar solução → falha de busca.

Busca em profundidade limitada: Complexidades

- **Tempo:** $O(b^l)$ – no pior caso expande todos os nós até a profundidade l (b = fator médio de sucessão).
- **Espaço:** $O(bl)$ – pilha armazena apenas o caminho atual e o limite máximo.

Busca em profundidade limitada: Completude e Otimalidade

- **Completude**: Se a solução existe, ela será encontrada, desde que a profundidade da árvore seja finita e menor que a profundidade escolhida; sempre encontrará solução (existente) caso a profundidade seja iterativa.
- **Otimalidade**: não assegurada; pode retornar uma solução que não seja de menor custo ou profundidade.

Busca em Profundidade Iterativa (IDDFS)

- **Objetivo:** Combinar a **completude** de uma busca em largura com o **consumo de memória** mínimo de uma busca em profundidade, por meio da execução iterativa de buscas em profundidade limitada cujo limite aumenta gradualmente.
- **Princípio de funcionamento**
 - i. Para $l = 0, 1, 2, \dots$ executar **Busca em Profundidade Limitada (DLS)** até a profundidade l .
 - ii. Se o nó-objetivo for encontrado numa das iterações, retornar o caminho correspondente.
 - iii. Caso contrário, incrementar l e repetir.

IDDFS: Complexidades

- **Tempo:** $O(b^d)$ – cada nível de profundidade é revisitado apenas b vezes (o fator médio de sucessão), resultando em custo assintótico equivalente a uma única busca em largura na profundidade ótima d .
- **Espaço:** $O(bd)$ – no pior caso, armazena apenas o caminho atual e a pilha da última iteração.

IDDFS: Propriedades

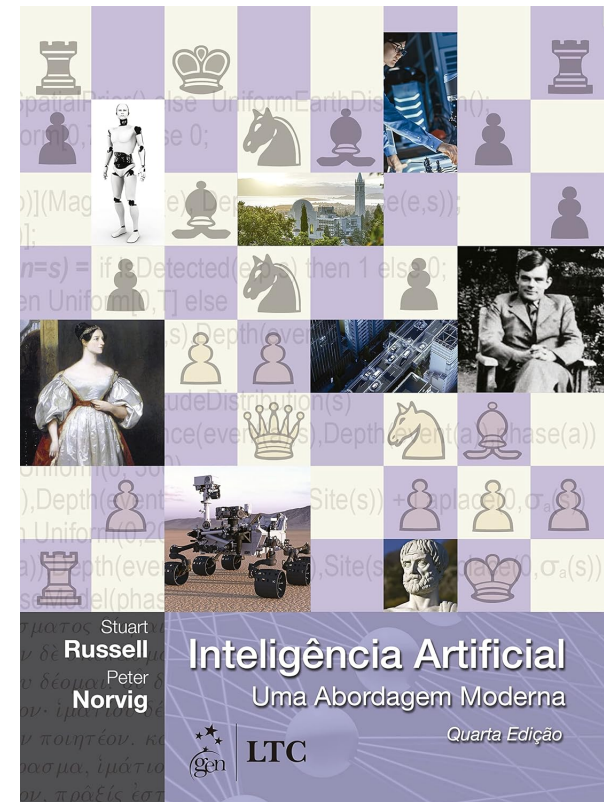
- **Completeness**: garantida (o limite eventualmente alcança qualquer profundidade finita).
- **Optimality**: assegurada quando todos os passos têm custo uniforme; IDDFS devolve um caminho de menor profundidade.
- **Robustez em grafos com ciclos**: o controle explícito de profundidade evita vácuo infinito, enquanto a re-exploração de nós já visitados não afeta a completude.

Desafios e Extensões

- **Busca em ambientes dinâmicos**
- **Controle de recursos limitados** (memória/tempo).
- **Busca com múltiplos objetivos** (trade-offs entre custos).
- **Integração de aprendizado**: heurísticas aprendidas via RL ou ML.

Resumo e Próximos Passos

- **Representação do problema:** Estado inicial, operações que geram novos estados, teste de objetivo e função de custo (quando aplicável).
- Busca não-informada explora o espaço de estados sem utilizar nenhuma informação adicional.
- A escolha entre **DFS** e **BFS** depende do trade-off entre complexidade temporal e memória.
- Próxima aula: **Estratégias de Busca Informada.**



Atividade recomendada: Leitura do capítulo 3.

Perguntas para Discussão

- Em termos simples, como a Busca em Profundidade (DFS) se comporta de maneira diferente da Busca em Largura (BFS) quando explorando o mesmo grafo?
- Explique com suas próprias palavras o que significam os termos "completude" e "ótimo" quando falamos de algoritmos de busca.
- Pense em um problema cotidiano (por exemplo, encontrar o caminho mais curto entre duas cidades usando um mapa). Qual algoritmo de busca você escolheria para resolver esse problema e por quê?