

Numeerinen integrointi: kvadratuureista kubatuureihin

Ville Väänänen

Elektroniikan, tietoliikenteen ja automaation tiedekunta



28. huhtikuuta 2010

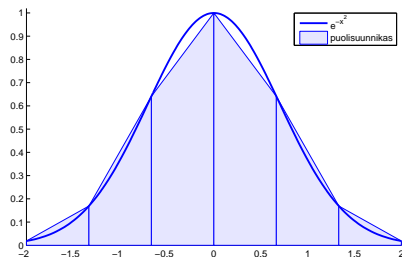
Interpolatoriset kvadratuurit

Integrointisääntö

$$\int_a^b f(x)w(x) \, dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

Puolisuunnikasmenetelmä

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{2} (f(b) + f(a))$$



Kuva: Puolisuunnikasmenetelmä

Polynomiapproksimaatio

- Approksimoidaan polynomeilla
 - tunnettuus
 - Weierstrassin teoreema
 - helppo integroida

Tarkkuusaste

Integrointisäännön tarkkuusaste on d , jos se integroi tarkasti kaikki polynomit, joiden asteluku on korkeintaan d

Gaussin kvadratuuri

- Pisteet:
ortogonaalipolynomien
0-kohdat
- tarkkuusaste $2N - 1$
- Newton-Cotes menetelmillä
 $N + 1$

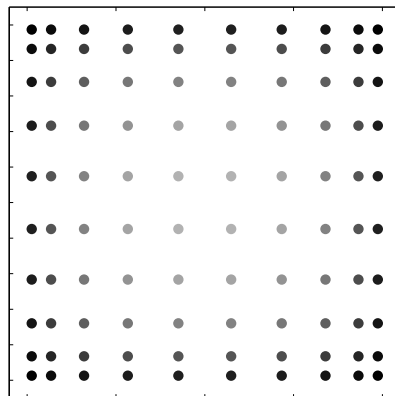


Tulosäännöt

Tulosääntö

$$\iint_{\Omega_r \times \Omega_s} w(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s) f(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}_r d\mathbf{x}_s$$

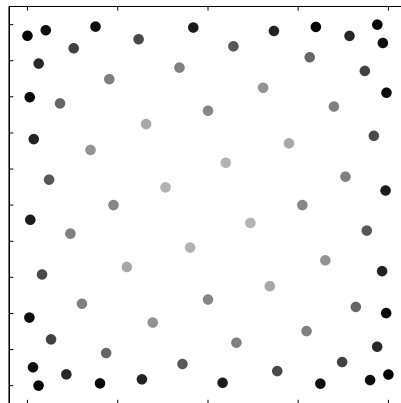
$$\approx \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_s} w_{s,j} w_{r,i} f(\mathbf{x}_{r,i}, \mathbf{x}_{s,j})$$



Kuva: Erään tulosäännön 100 pistettä

Interpolatoriset kubatuurit

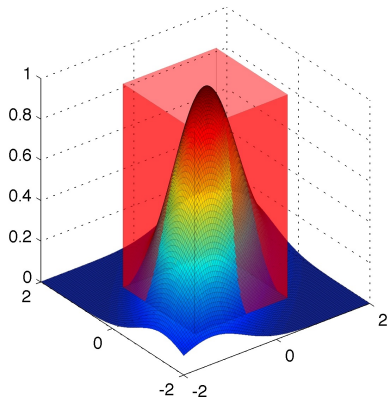
- Epälineaarinen yhtälöryhmä
- $N(n+1)$ muuttujaa



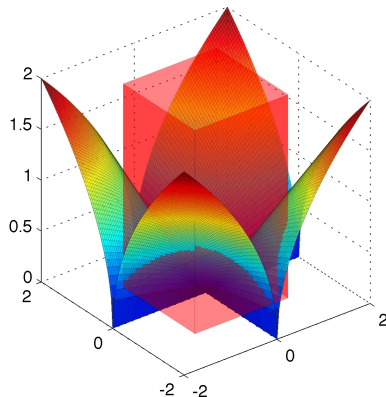
Kuva: 68-pisteinen minimisääntö

Testi-integrandit

$$F_1 = e^{-\frac{1}{1.02}(x^2+y^2-1.4xy)}$$



$$F_2 = \sqrt{|xy|}$$



Kuva: F_1 ja F_2

Tulokset

Kubatuuri	$Q[F_1]$	$E[F_1]$	$Q[F_2]$	$E[F_2]$
Q_{3^2}	2.40428	0.3%	0.95629	46.2%
Q_7	2.46015	2.6%	1.48609	16.4%
Q_{68}	2.39773	0.0%	1.83156	3.0%
Q_{10^2}	2.39773	0.0%	1.74004	2.1%

Yhteenveto

- $n = 1$
 - helppoa
- $n \geq 1$
 - vaikeaa