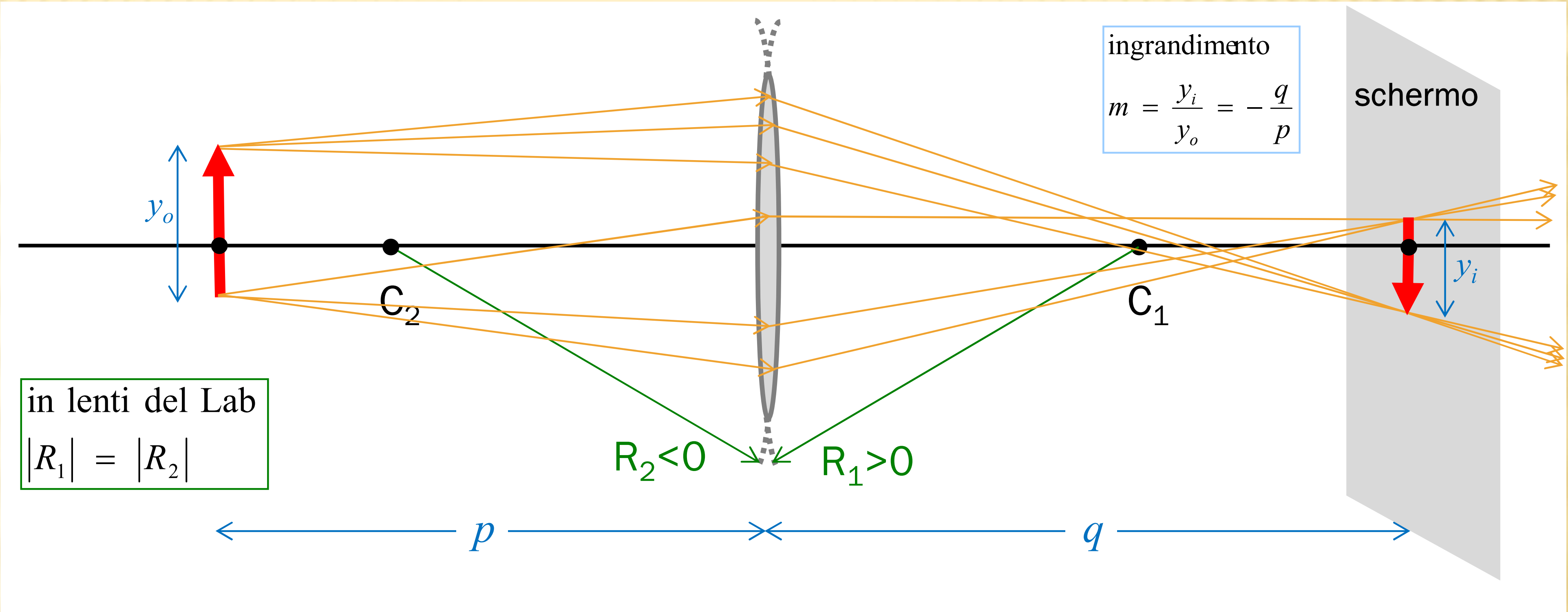
Prof. Salvatore Costa: Lezioni di

LABORATORIO DI FISICA 2

Lezione n.18

LENTI SOTTILI: MISURA DI DISTANZE FOCALI

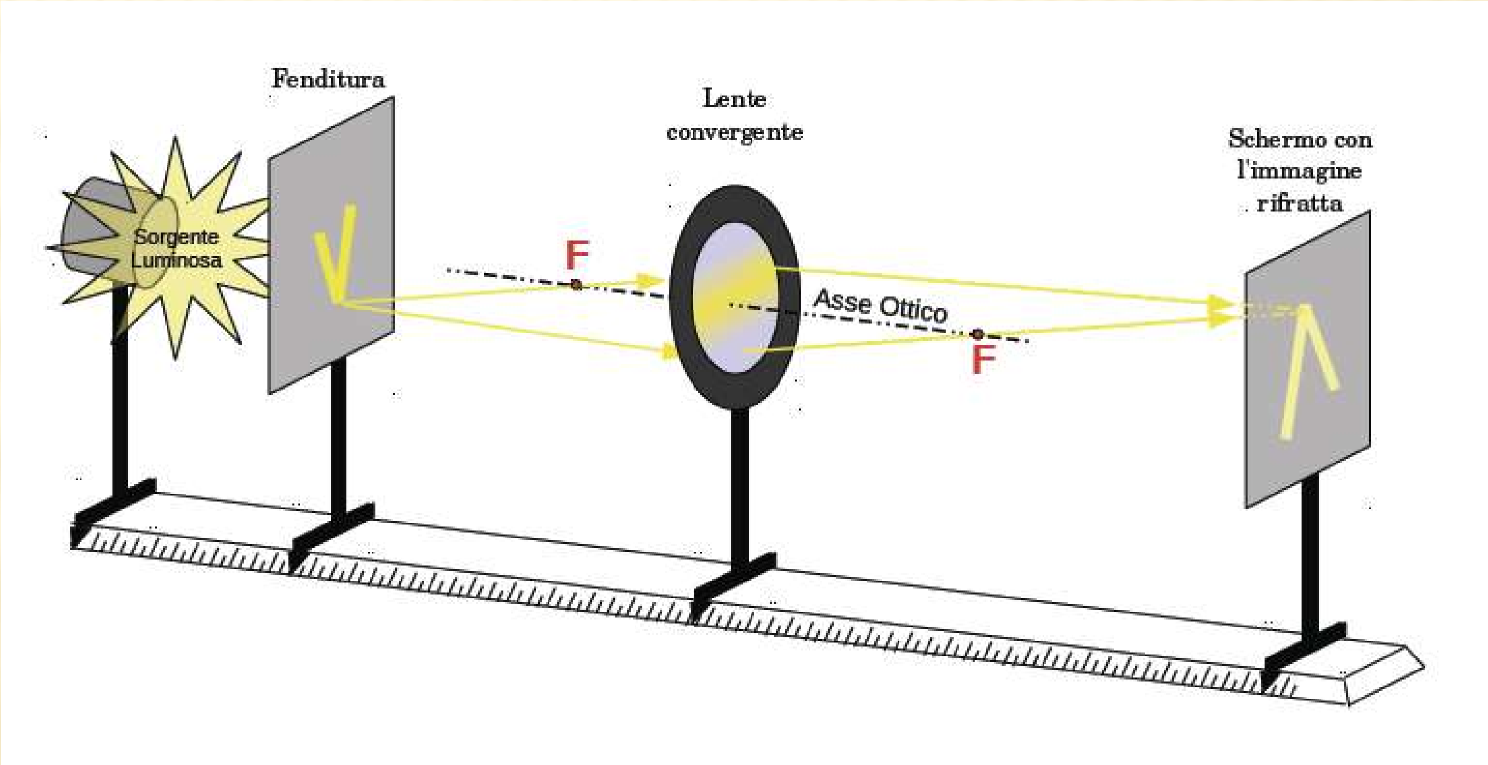
LENTE CONVERGENTE



- ***p*** lo decide lo sperimentatore
- ***q*** è una conseguenza. Sperimentalmente è
  - la distanza dalla lente alla quale, posto l' osservatore ben *al di là* della lente, l' oggetto sembra trovarsi: è la sua immagine che vediamo;
  - meglio ancora, usando uno schermo S e spostandolo avanti e/o indietro, la posizione di S in cui l' immagine appare la più nitida possibile

BANCO OTTICO

- L' attrezzatura sperimentale più elementare per lavorare con le lenti consiste quindi in un "banco ottico", ossia un binario tarato lungo il quale posizionare:
  1. un oggetto luminoso (o illuminato),
  2. una lente
  3. uno schermo



RELAZIONI SULLE LENTI SOTTILI

- Per qualunque lente sottile (convergente o divergente) si ha:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

- Il 2° membro di questa equazione è una caratteristica della lente che può essere calcolata una volta per tutte all' atto della costruzione.
- Ha le dimensioni di ***[L^{-1}]*** e quindi il suo inverso ha le dimensioni di una lunghezza.
- La chiamiamo distanza focale e la indichiamo con ***f*** :

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

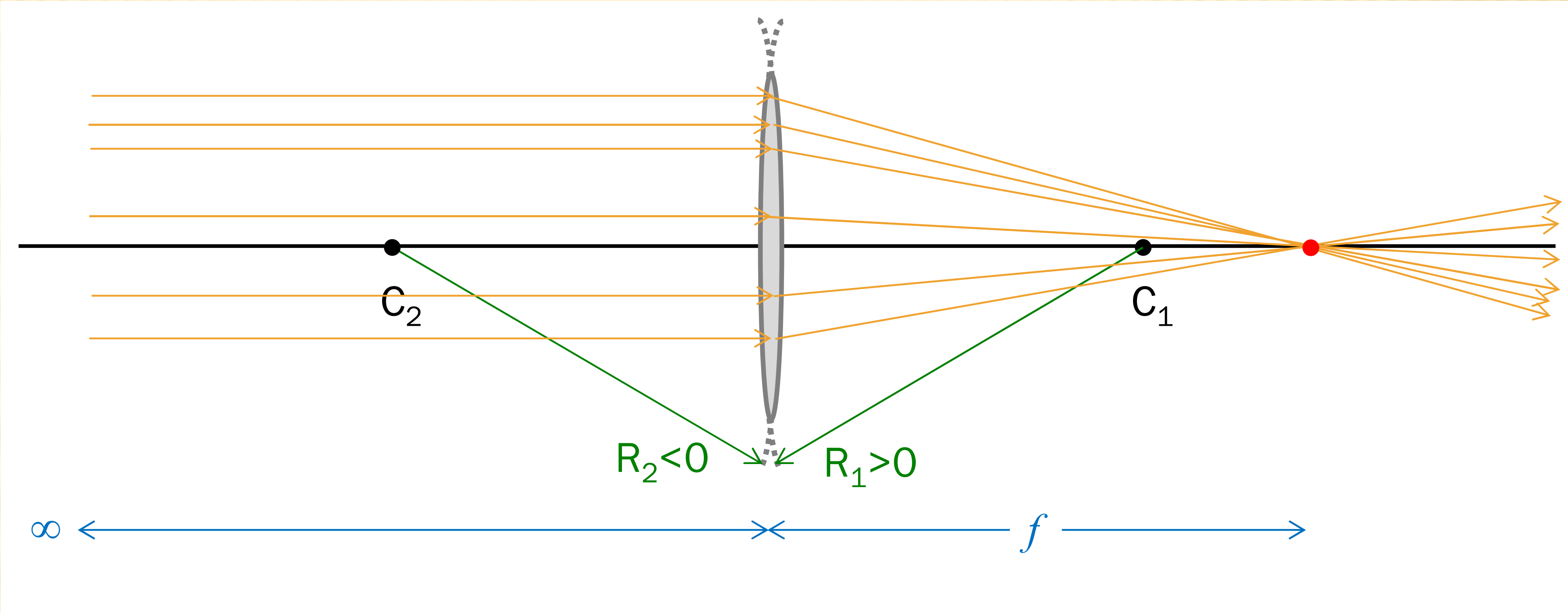
- Per una lente convergente, essendo ***$R_2<0$*** e poiché ***$n>1$***, ***f*** è positivo.
- Osservazioni sulla distanza focale ***f*** :
  1. Adoperando l' appena introdotta definizione di ***f***, l' equazione della lente si può riscrivere:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$

  2. Vedremo subito che non si tratta di una semplice posizione simbolica: ***f*** ha un ben preciso significato fisico.
  3. Può essere misurata sperimentalmente e si possono individuare 3 metodi di misura.

DISTANZA FOCALE

- Supponiamo che l' oggetto sia posto a distanza molto grande, $p \to \infty$, ma comunque "a cavallo" dell' asse ottico:



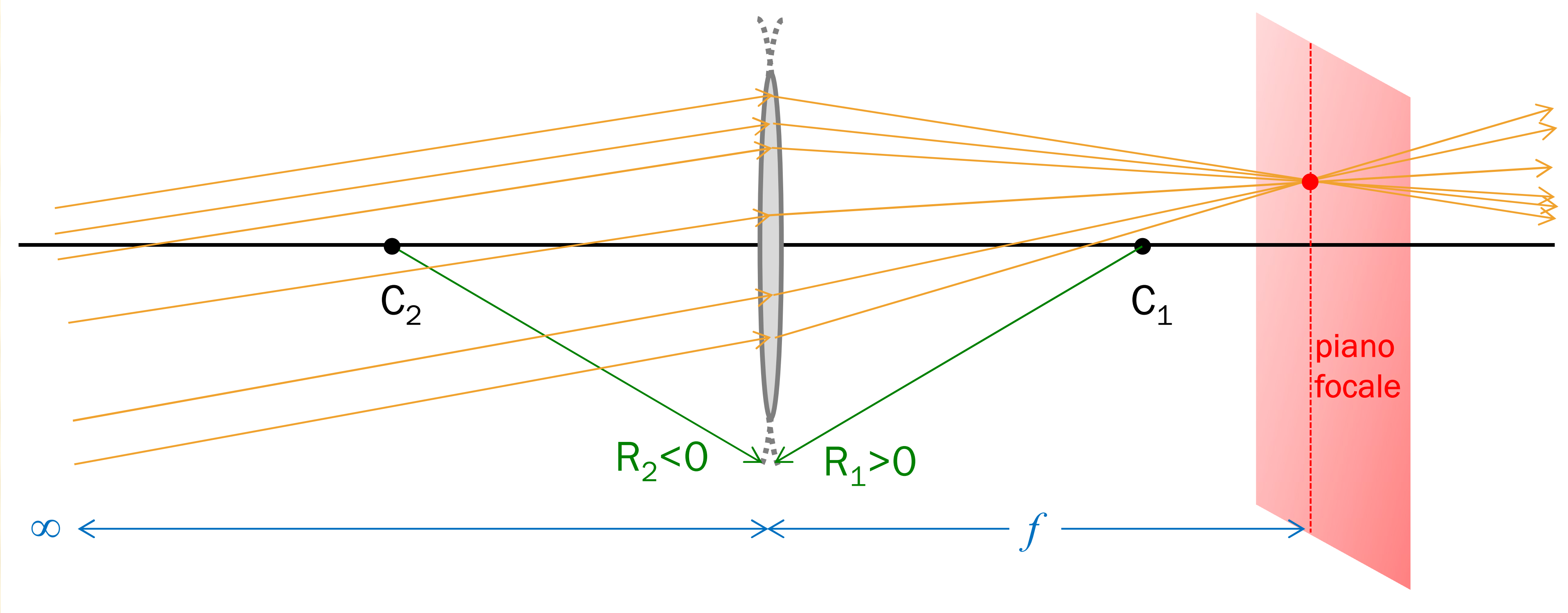
- Qualunque sia la dimensione trasversale dell' oggetto y_0 i "raggi" convergono in un punto, che è la sua immagine.
- L' equazione della lente si può riscrivere così:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow q \equiv f$$

$$m = \frac{y_i}{y_o} = -\frac{q}{p} \Rightarrow m = \frac{0}{y_o} = -\frac{f}{\infty} = 0$$

PIANO FOCALE

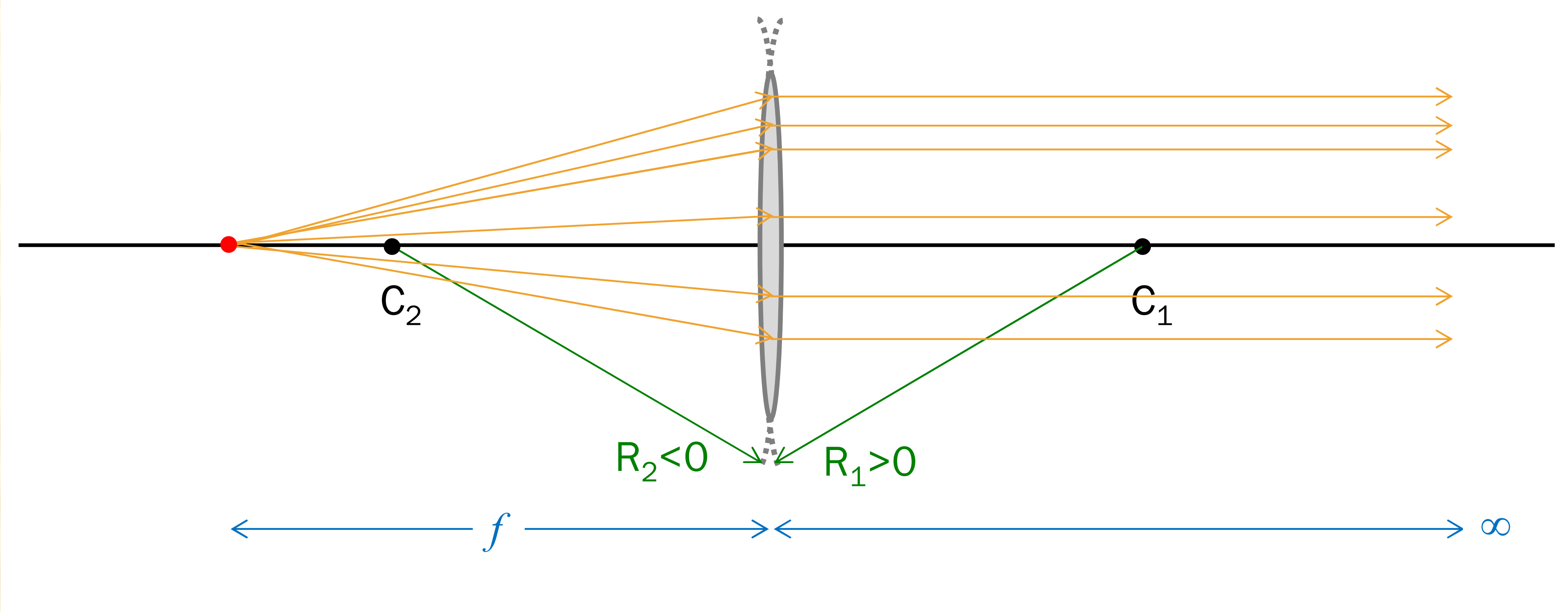
- Le leggi della rifrazione implicano che se l' oggetto è sempre a distanza molto grande: $p \to \infty$, ma i "raggi" provengono da una qualche direzione (sono paralleli tra loro ma non all' asse ottico):



- Anche in questo caso, qualunque sia la dimensione trasversale dell' oggetto y_0 i "raggi" convergono in un punto, che è la sua immagine, non giacente sull' asse ottico.
- Anche se non giace sull' asse ottico, questo punto giace in un piano a esso perpendicolare e posto a distanza f dalla lente.

SITUAZIONE COMPLEMENTARE

- Viceversa se un oggetto (**puntiforme**) è posto p.es. **sull' asse ottico** proprio a una distanza $p=f$:



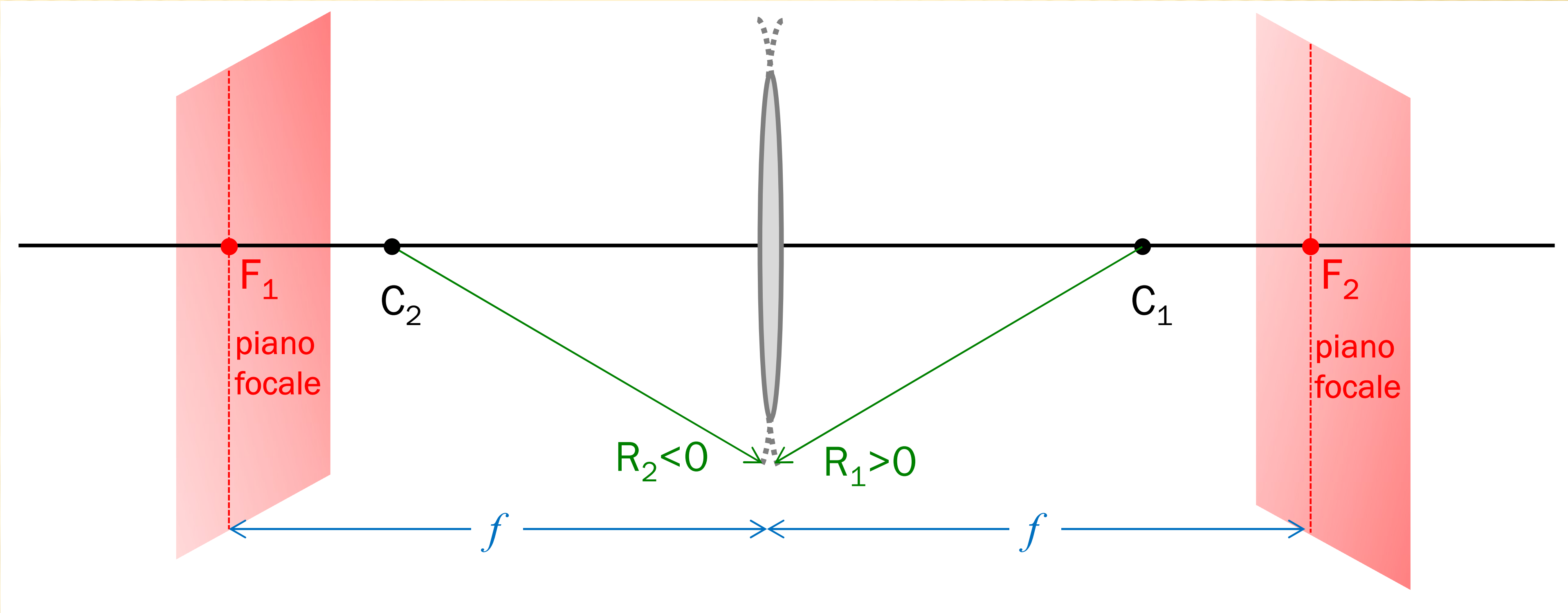
- l"**raggi**" rifratti emergono dalla lente paralleli tra loro (nell' esempio sono anche paralleli all' asse ottico) e l' immagine dell' oggetto si trova a distanza infinita.
- L' equazione della lente si può riscrivere così:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{\infty}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{p}=\frac{1}{f}\Rightarrow p\equiv f$$

$$m=\frac{y_i}{y_o}=-\frac{q}{p}\Rightarrow m=\frac{y_i}{0}=-\frac{\infty}{f}=-\infty$$

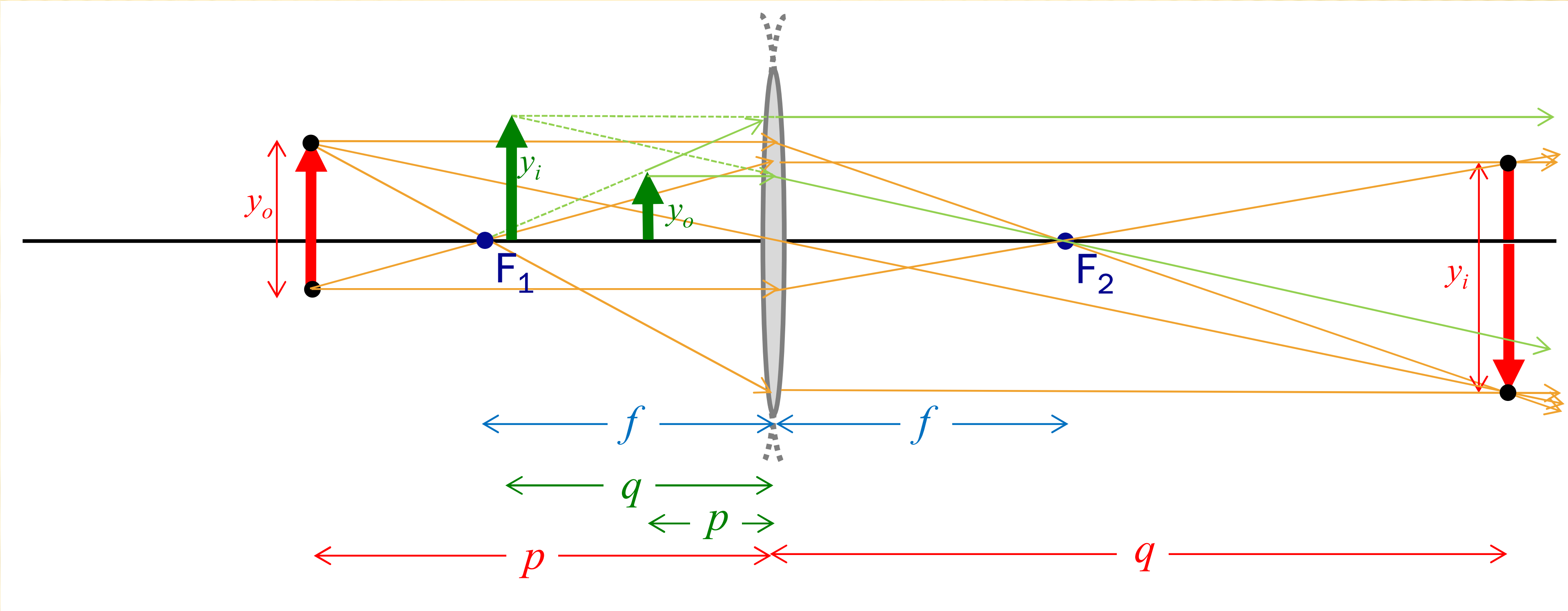
FUOCHI

- Quindi, si possono individuare ai due lati della lente due punti detti fuochi e due piani detti piani focali a distanze simmetriche f dalla lente.



- Utilizzando questi punti particolari la **costruzione** dell' immagine di un oggetto (cioè la **previsione a tavolino della sua posizione**) diventa facile, dato che si possono sfruttare proprietà speciali anziché le leggi generali della rifrazione con conseguenti calcoli di angoli e seni in ogni punto di incidenza.
- Le distanze focali f si possono determinare o *costruttivamente* (conoscendo R_1, R_2 e n) o *sperimentalmente* (misurandole con i metodi che stiamo per introdurre).

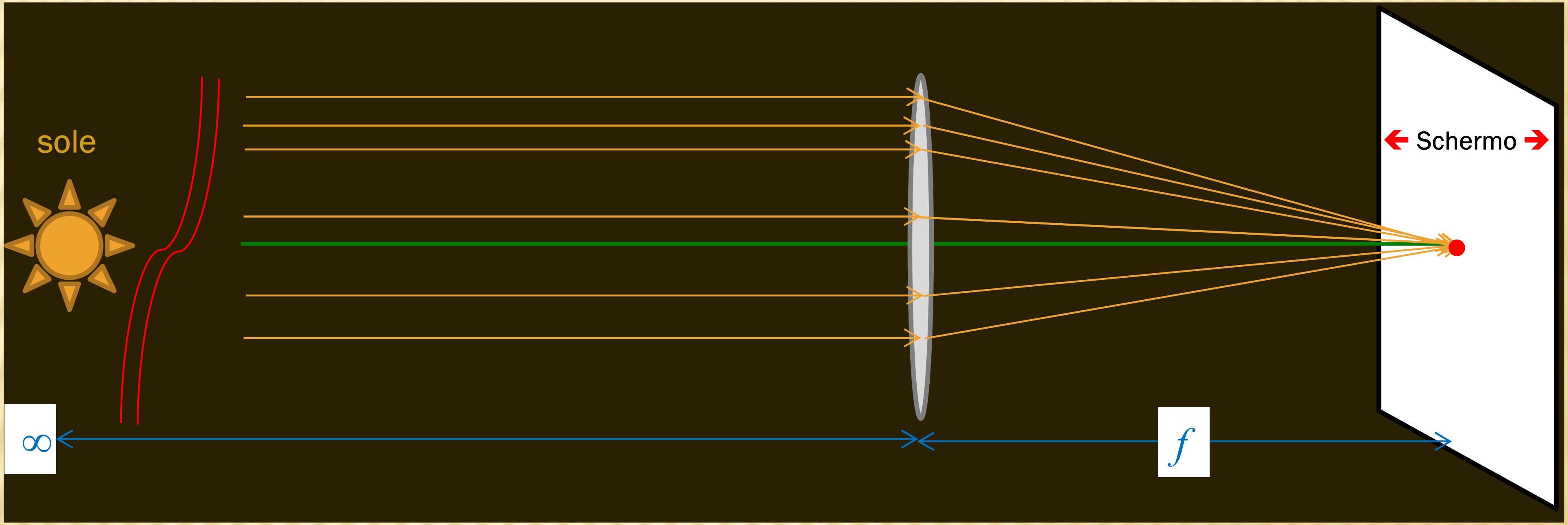
COSTRUZIONE IMMAGINI



- Vediamo gli ingrandimenti:
- Caso in rosso: $m = \frac{y_i}{y_o} = -\frac{q}{p} < -1$ ingrandito ma capovolto
- Caso in verde: $m = \frac{y_i}{y_o} = -\frac{q}{p} > 1$ ingrandito e dritto: “lente d’ ingrandimento”.

MISURA DISTANZA FOCALE LENTE CONVERGENTE - 1

- 1° metodo : misura della sola q in una condizione in cui essa è supposta essere $q \cong f$:



1. Usare una sorgente molto lontana (sole).
2. Fissare la lente in modo che i raggi solari incidano su di essa perpendicolarmente.
3. Spostare uno schermo con il suo piano parallelo alla lente fino a quando l' immagine del sole si riduce a un puntino il più piccolo possibile ➔ distanza schermo-lente = f.

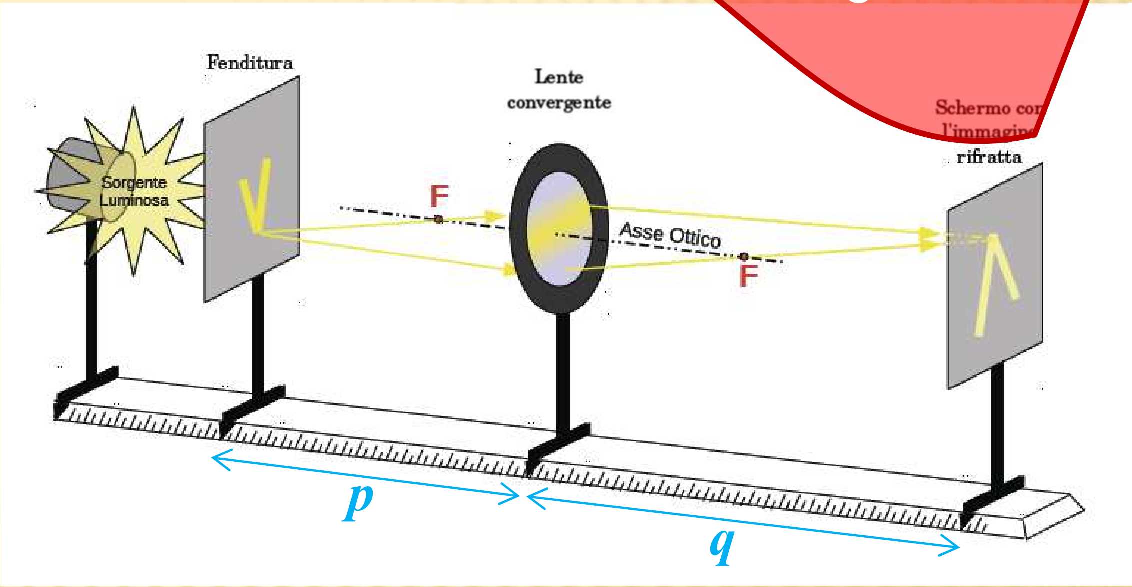
- Svantaggi pratici:

1. Incertezza nell' orientare la lente in modo che i raggi solari incidano perpendicolari alla lente (paralleli all' asse ottico)
2. Pericoloso per la grande intensità luminosa (energia) concentrata in regione molto piccola: lo schermo brucia.

MISURA DISTANZA FOCALE LENTE CONVERGENTE - 2

Esperienza in Lab 3° ciclo

- 2° metodo : misura indipendente di p e q con un banco ottico:



- Per definire il meglio possibile la sua posizione non si usa un oggetto luminoso, che avrebbe dimensioni trasversali non trascurabili, ma si illumina indirettamente una fenditura in una lastra opaca sottile, la cui distanza dalla lente sia quindi individuabile con maggiore precisione.
- Si pone la lente a una distanza arbitraria dall' oggetto: p è scelto dallo sperimentatore.
- Si sposta lo schermo avanti e indietro fino a quando l' immagine della fenditura appare la più nitida possibile: si rileva q.
  - Unico problema tecnico in questa fase: l' immagine deve essere reale, il che accade solo se $p>f$, ma f è ancora incognita. Si opera per tentativi: quando $p<f$ l' immagine sullo schermo non si forma.
- Si fanno molte misure con diverse p, arbitrarie ma $>f$, si rilevano le conseguenti q, si deduce f in due modi e se ne fa il confronto:

1. Applicando ogni volta questa equazione: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \Rightarrow \boxed{f=\frac{pq}{p+q}}$
   e facendo poi la media pesata delle f.
   - Nota: l' errore su q non è semplicemente derivante dalle sensibilità di lettura delle 2 posizioni sul regolo, ma è il **semi-intervallo** entro cui l' immagine appare ugualmente **"nitida"**.
2. Mediante best fit: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{q}=-\frac{1}{p}+\frac{1}{f} \Rightarrow y=ax+b$
   - Si deve prima verificare che $-1 \in [a \pm \sigma_a]$, rifare il best fit con $a = -1$ se così è o altrimenti speculare su errori sistematici ..., alla fine: $\boxed{f=\frac{1}{b}}$.

MISURA DISTANZA FOCALE LENTE CONVERGENTE - 3

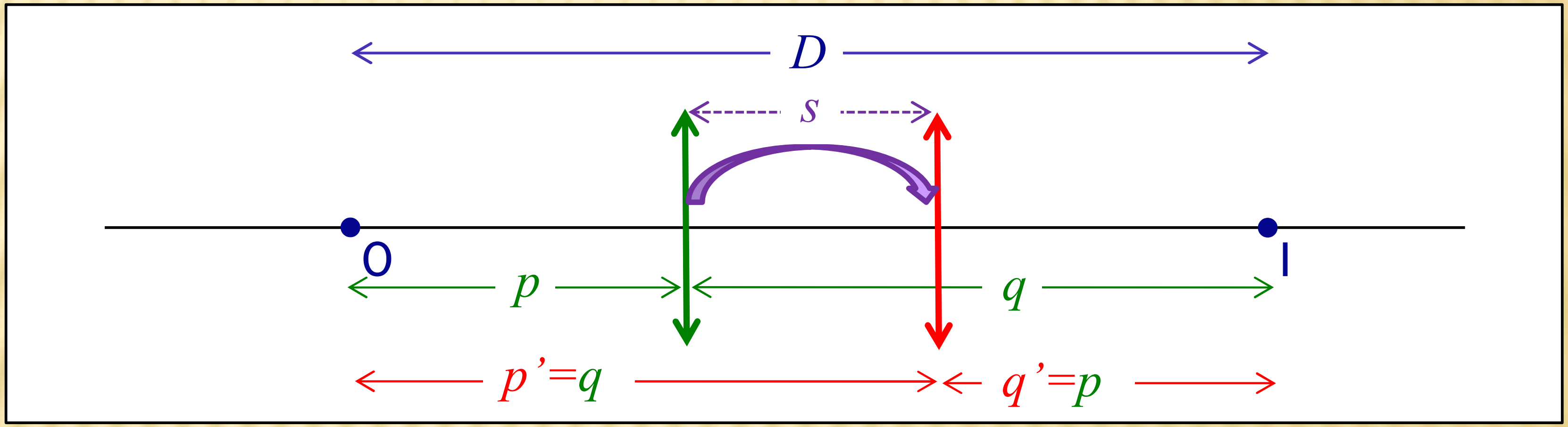
- 3° metodo : Metodo di Bessel
- Permette di effettuare la misura indiretta di f su banco ottico misurando direttamente una sola distanza (2 posizioni) anziché due (p e q, 4 posizioni) e permette una *esplicita stima degli (eventuali) errori sistematici*.
- Concettualmente, questo può avvenire solo se si realizza una condizione in cui p e q sono riconducibili l' una all' altra senza coinvolgere f
  - l' eq. delle lenti $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ lega certamente p a q, ma attraverso f che invece è da misurare)
- Scopriamo questo metodo ragionando appunto sull' equazione delle lenti.

METODO DI BESSEL - INTRODUZIONE

- Il punto chiave è che nell' equazione delle lenti matematicamente ***p*** e ***q*** sono intercambiabili:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=\frac{1}{f}$$

- Ma fisicamente e sperimentalmente questo significa che per una data lente, se in base al metodo precedente (ricerca dell' immagine nitida) abbiamo già trovato la ***q*** corrispondente a una ***p*** arbitrariamente scelta, allora se ponessimo l' oggetto a una distanza ***p'=q*** dalla lente, l' immagine dovrebbe essere nitida se lo schermo viene posto a distanza ***q'=p*** dalla lente.



- Ma in questo caso la distanza complessiva tra oggetto e schermo non è variata: $p' + q' = q + p \equiv D$
- Quindi in realtà basta semplicemente spostare la lente avanti o indietro di una quantità $|p'-p| = |q'-q| \equiv s = |q - p| = |p - q|$ senza spostare né lo schermo né, tantomeno, l' oggetto.

METODO DI BESSEL – TEORIA E VANTAGGI

- Si potrebbe pensare a questo punto di ricavare f da una misura diretta di D e s anziché p e q:

$$\left\{\begin{aligned} D &= p+q = p+(p+s) = 2p+s \Rightarrow p = \frac{D-s}{2} \\ D &= p+q = (q-s)+q = 2q-s \Rightarrow q = \frac{D+s}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{f} = \frac{pq}{p+q} = \frac{\frac{D-s}{2}\cdot\frac{D+s}{2}}{\frac{D-s}{2}+\frac{D+s}{2}} = \boxed{\frac{D^2-s^2}{4D}}$$

- Ma questo non avrebbe vantaggi sperimentali: sempre 2 distanze (4 posizioni) si dovrebbero leggere.
- L' equazione precedente implica però una correlazione tra s^2 e D con parametro f che potrebbe essere sfruttata:

$$f = \frac{D^2-s^2}{4D} \Rightarrow s^2 = D^2 - 4Df = D(D-4f)$$

- Questa si rivela una via interessante e molto vantaggiosa da seguire sperimentalmente !
- Infatti se effettivamente si è realizzata una situazione in cui si forma una immagine sullo schermo allora poiché $s^2 \geq 0$ e $D > 0$, è sempre certamente $D \geq 4f$.
- Se ora riuscissimo a realizzare sperimentalmente la condizione particolare in cui $D = 4f$ allora si avrebbe:

$$D = 4f \Rightarrow s = 0 \Rightarrow \boxed{f} = \frac{D^2-s^2}{4D} = \boxed{\frac{D}{4}}$$

e la misura di f sarebbe ricondotta alla misura diretta della sola D (1 distanza, 2 posizioni) con l' ulteriore vantaggio che determinata l' incertezza sperimentale di D, quella di f sarebbe, per la propagazione degli errori, 4 volte minore: $\Delta f = \frac{df}{dD}\Delta D = \frac{1}{4}\Delta D$

- Notiamo che in questo caso la condizione $s=0$ implica anche che $p = q = \frac{D}{2} = 2f$.

METODO DI BESSEL – PRATICA

- Realizzare sperimentalmente la condizione particolare in cui si ha $p = q = 2f\ ;\ s = 0\ ;\ D = 4f$ è in realtà molto facile! Basta:

1. Disporre inizialmente **Oggetto**, **Lente** e **Schermo** vicinissimi tra loro, così è sicuro che $D < 4f$ e immagine non se ne forma.
2. Tenendo fermo l' **Oggetto**, allontanare **Lente** e **Schermo** gradualmente avendo cura di tenere uguali tra loro ***p*** e ***q*** mentre li si incrementa entrambi (in pratica si allontana lo schermo dall' **Oggetto** e si riposiziona la **Lente** ogni volta a metà strada.
3. Appena si forma per la prima volta una immagine nitida sullo **Schermo** , la distanza ***D*** raggiunta è la minima per cui non sia $D < 4f$, quindi è $D = 4f$. [Allontanando ulteriormente si avranno molte altre posizioni in cui l' immagine è nitida ma con $p \neq q$, e $p + q = D > 4f$].

- Un ulteriore vantaggio del metodo di Bessel è che quando la condizione $D = 4f$ è realizzata, allora dato che $p = q = 2f$, l' ingrandimento dovrebbe valere:

$$|m| = \left|\frac{y_i}{y_o}\right| = \left|-\frac{q}{p}\right| = 1$$

- Allora per fissare le posizioni di **Lente** e **Schermo** si deve trovare la posizione in cui non solo l' immagine appare ragionevolmente nitida ma anche le dimensioni trasversali di oggetto e immagine appaiono il più possibile uguali (misurare entrambi con calibro).
- L' incertezza da assegnare a ***D*** sarà il semi-intervallo in cui entrambe le condizioni viste appaiono soddisfatte: in molti casi questo intervallo è inferiore e quello in cui appare verificata una sola delle due.

ERRORI SISTEMATICI

- Dopo avere misurato ***f*** con i metodi 2° e 3°, si può investigare se l' apparato presenta sorgenti di errori sistematici e si possono stimare quantitativamente tali errori.
- Per ogni ***D>4f*** abbiamo visto come ci sono due posizioni della lente per cui si ha una immagine nitida sullo schermo, corrispondenti a una coppia ***p, q*** e alla coppia in cui i due valori sono scambiati.
- La simmetria matematica tra ***p*** e ***q*** implica che le due posizioni dovrebbero essere simmetriche rispetto al *punto medio* della distanza oggetto-schermo:

$$\begin{cases} D = 2p + s \Rightarrow p + \dfrac{s}{2} = \dfrac{D}{2} \\ D = 2q - s \Rightarrow q - \dfrac{s}{2} = \dfrac{D}{2} \end{cases}$$

- Eventuali deviazioni sperimentali da questa condizione sarebbero dovute a errori sistematici dell' apparecchiatura (irregolare taratura del regolo, non planarità dei supporti degli elementi, etc.)
- Queste deviazioni possono essere scoperte e valutate nel modo seguente:
  - Fissando diversi valori di ***D***, tutti ***>4f***, individuare per ciascun ***D*** scelto le due posizioni della lente che dànno un' immagine nitida sullo schermo. Misurare le distanze, ***a*** e ***b***, di tali due posizioni rispetto al *punto medio* della distanza oggetto-schermo, che ovviamente è diverso per ogni ***D***.
  - Se per ciascun ***D*** scelto, ***a*** e ***b*** sono uguali tra loro (entro gli errori con cui ciascuno è misurato) non vi sono errori sistematici. Se non lo sono, costruire l' istogramma delle frequenze della grandezza $\eta = a - b$ al variare di ***D*** e calcolare, per la distribuzione di tale variabile, assunta gaussiana, il valore medio η_{best} e lo scarto quadratico medio σ_η.
  - $\eta_{best} \pm \sigma_\eta$ costituisce la nostra migliore stima degli errori sistematici dovuti a eventuali difetti dell' apparato sperimentale nella misura della distanza focale della lente.