L3 Informatique — Université de Nantes & Université Internationale de Rabat
X5I0050 - Langages et automates — 2014/2015

Feuille de travaux dirigés nº 1

Exercice 1.1 (Monoïde)

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs (entiers positifs, négatifs ou nuls) : ... $-2, -1, 0, 1, 2, 3$...
$Impair(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des entiers relatifs impairs : ... $-5, -3, -1, 1, 3, 5$....

Les deux structures suivantes sont-elles des monoïdes ?

$< Impair(\mathbb{Z}), +, 0 >$
$< Impair(\mathbb{Z}), \times, 1 >$

Exercice 1.2 (Mots)

Soit $x = abbcc$ un mot sur l'alphabet $V = \{a, b, c\}$.

1. Quelle est la valeur de $|x|$?
2. Donner un mot de V^3 qui n'est pas un facteur de x.
3. Donner un sous-mot [1] de x qui n'est pas un facteur de x.
4. Donner tous les facteurs de x qui appartiennent à V^3 .
5. Donner l'ensemble *Pref*(x) des préfixes de x.
6. Donner l'ensemble *SuffProp*(x) des suffixes propres de x.

Reprendre ces questions en considérant maintenant x comme un mot sur l'alphabet $V = \{ab, ac, bc, c\}$.

Exercice 1.3 (Lemme de Levi)

1. Soient t, u, v, w quatre mots de V^* tels que $t \cdot u = v \cdot w$. Montrer qu'il existe un mot unique $z \in V^*$ tel que :
   — soit $u = z \cdot w$ et $v = t \cdot z$
   — soit $t = v \cdot z$ et $w = z \cdot u$
   (lemme de Levi)
2. En utilisant ce lemme, montrer que si u_1, u_2 et v sont trois mots de V^* , si $u_1 \in$ *Suff*(v) et si $u_2 \in$ *Suff*(v) alors soit $u_1 \in$ *Suff*(u_2), soit $u_2 \in$ *Suff*(u_1).
3. En utilisant le lemme de Levi, et en appliquant un raisonnement par récurrence (récurrence simple) sur $|u|$ montrer que si $a \in V$, $b \in V$ et $u \in V^*$, alors $u \cdot a = b \cdot u \Rightarrow a = b$ et $u \in \{a\}^*$.

Exercice 1.4 (Langages)

Soit l'alphabet $V = \{a, b\}$ et les langages :
— $L_1 = \{u \in V^* \mid |u|_a = |u|_b\}$,
— $L_2 = \{u \in V^* \mid |u| \text{ } modulo \text{ } 2 = 1\}$,
— $L_3 = \{u \in V^* \mid u = a^n \cdot b^m, n \geq 0, m \geq 0\}$.

1. Donner, en français, la définition de chacun de ces langages.
2. Donner les résultats des opérations suivantes :

$L_1 \cap L_2$	$L_1 \cap L_3$	$V^* - L_3$	$L_1 \cup \emptyset$	$L_1 \cap \emptyset$	$L_1 \cup \{\epsilon\}$	$L_1 \cap \{\epsilon\}$

1. c'est-à-dire une partie de la liste des symboles de x par forcément contiguë

Exercice 1.5 (Sous-monoïde)

Soit le vocabulaire V donné par $V = \{a, b\}$. Les ensembles suivants, muni de l'operation de concatenation et de ϵ le mot vide, forment-ils des sous-monoïdes de $(V^*, ., \epsilon)$?

— A : ensemble des mots sur V de longueur paire.
— B : ensemble des mots sur V de longueur impaire.
— $C = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (n entier naturel et $(ab)^n = abab \ldots ab$: n fois ab)
— $D = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (n entier naturel et $a^n b^n = aa \ldots abb \ldots b$: n fois a puis n fois b)
— E : ensemble des mots contenant a et b en nombre identique.

Exercice 1.6 (Langages et opérateurs)

Soit l'aphabet $V = \{a, b\}$ et les langages :

— $L_1 = \{a, ab, ba\}$,
— $L_2 = \{\epsilon, b, ab\}$,

1. Donner les résultats des opérations suivantes :

$L_1 \times L_2$	$L_2 \times L_1$	$L_1 \times \{\epsilon\}$	$\{\epsilon\} \times L_2$	$L_1 \times \emptyset$	$\emptyset \times L_1$	$(L_1)^2$	$(L_2)^3$	$\{aba\}^*$

2. si L_3 et L_4 sont deux langages et que $L_3 \times L_4 = \{\epsilon\}$, que peut-on dire de L_3 et de L_4 ?
3. si L_5 et L_6 sont deux langages et que $L_5 \times L_6 = \emptyset$, que peut-on dire de L_5 et de L_6 ?

Exercice 1.7 (Palindrome)

Un palindrome sur un alphabet A est un mot pouvant être lu indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche (par exemple : Laval, été). Formellement, un mot $u \in A^*$ est un palindrome si $u = \varepsilon$ ou $u = u_1 \ldots u_n = u_n \ldots u_1$ avec $n = |u|$ et $u_i \in A$, pour $1 \leq i \leq n$.
Supposons que $A = \{a, b\}$. On définit sur A la suite de mots $(f_n)_{n>0}$ (suite de Fibonacci) de la façon suivante : f_1=a, f_2=ab et f_{n+2} = $f_{n+1} \cdot f_n$, $n > 0$
Monter que pour tout $i \geq 2$,

$$f_i = \begin{cases} u \cdot a \cdot b & \text{si } i \text{ pair} \\ \\ u \cdot b \cdot a & \text{si } i \text{ impair} \end{cases} \quad \text{où } u \text{ est un palindrome}$$