Feuille de travaux dirigés n^o 2
Utilisation de variables binaires en programmation linéaire

Exercice 2.1

Il s'agit de choisir le plus de candidats possible parmi les 10 personnes suivantes : A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Définir les variables de décision ; écrire la fonction objectif ; puis donner une ou plusieurs contraintes qui modélisent de façon linéaire, chacune des situations suivantes, indépendamment les unes des autres.

(a) La candidature de A ne peut être retenue à moins que celles de E et de F le soient.

(b) La candidature de A ne peut être retenue à moins de sélectionner E ou F.

(c) Si on retient la candidature de A, il faut retenir les candidatures d'au moins 5 autres et d'au plus 7 autres candidats.

(d) Si la candidature de A est retenue, ni celle de B, ni celle de C ne peuvent l'être.

(e) Si A et B sont retenus, ni C ni D ne peuvent l'être.

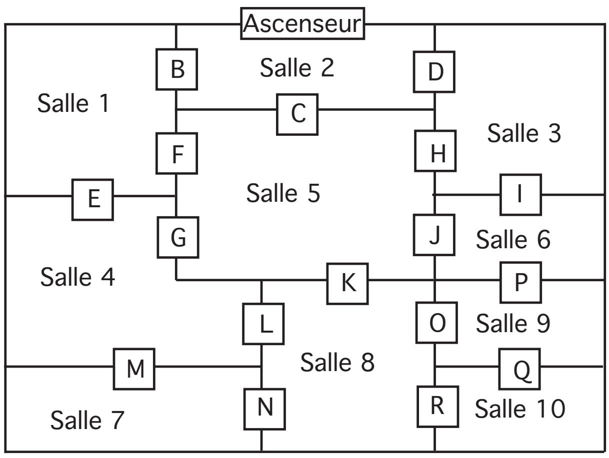
(f) Si A est retenu, B ne peut l'être à moins que C le soit ; et si C est retenu alors B le sera à coup sûr.

(g) Si on choisit D ou C, il faut prendre A et H.

(h) Si on choisit D ou C, il faut prendre A ou H.

Exercice 2.2

Afin de protéger les salles d'un musée, il a été décidé de placer des caméras de surveillance au dessus du linteau de certaines des portes donnant accès aux salles d'exposition. Chaque caméra a été installée dans une alvéole aménagée à cet effet de manière à balayer les 2 salles reliées par la porte grâce à un double objectif. Le but de la direction était d'assurer, au moindre coût, que chaque salle soit placée sous l'oeil d'au moins une caméra. Le plan de ce musée est présenté ci-dessous. Les portes sont indiquées par les lettres B à R.
Combien de caméras a-t-il fallu utiliser pour parvenir avec le moins de caméras possible, à surveiller chaque salle avec au moins une caméra tout en plaçant la salle 4 sous l'oeil d'au moins deux caméras ? Poser ce problème sous la forme d'un Programme Linéaire.

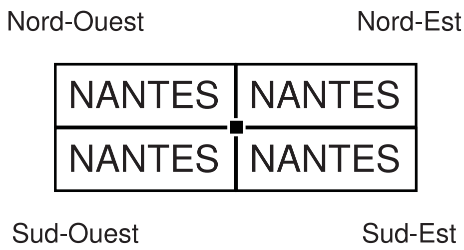


Exercice 2.3

Le positionnement de légendes est un problème d'optimisation important. Il se retrouve en cartographie où l'on doit positionner par exemple le nom des localités, mais également les interfaces graphiques notamment en ce qui concerne l'affichage sur des pages web. Avec l'accroissement du volume des données disponibles et la rapidité de leur mise à jour, il est nécessaire de concevoir des systèmes permettant de placer automatiquement une légende de sorte qu'elle ne se superpose pas avec une autre. L'algorithme de calcul doit être très rapide car il sera activé, par exemple, suite à une action interactive réalisée par un utilisateur sur une fenêtre d'un navigateur web, comme un redimensionnement ou zoom de la vue.

Soit l'exemple composé des 5 villes suivantes : Nantes, Rezé, Vertou, Saint-Sébastien sur Loire et Basse Goulaine.

On considère le cas dans lequel une étiquette peut être placée sur au plus 4 positions autour du centre géographique (carré noir) comme suit :



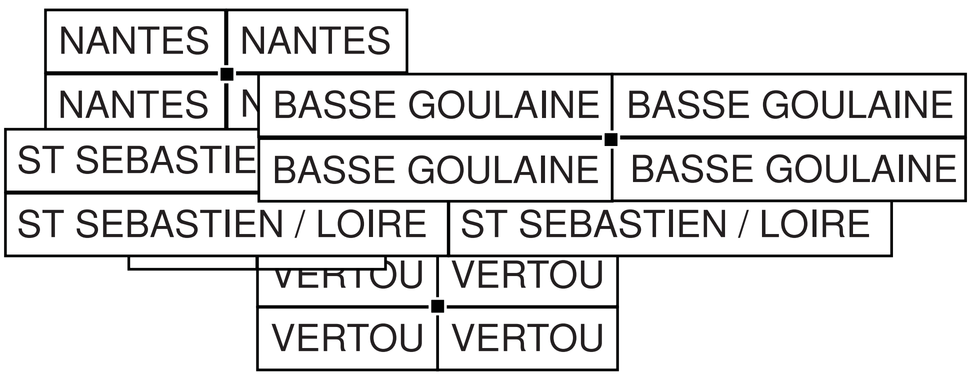
Parmi les 4 possibilités de positionnement, il y a un ordre de préférence établi qui s'énonce de la façon suivante :

Nord-Est (NE) est préféré à **Nord-Ouest (NO)** est préféré à **Sud-Ouest (SO)** est préféré à **Sud-Est (SE)**.

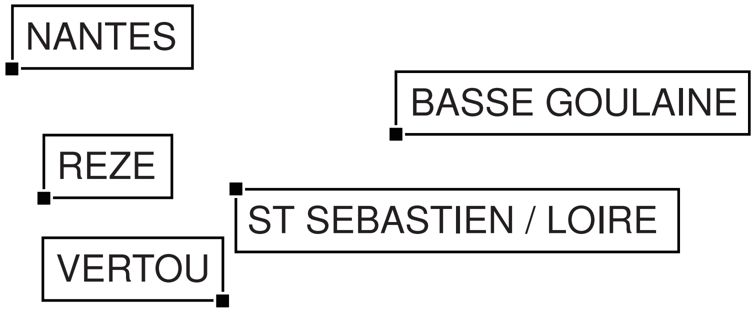
Cette préférence se traduit par l'attribution de points pour chaque position :
- 4 points pour la position **NE**
- 3 points pour la position **NO**
- 2 points pour la position **SO**
- 1 point pour la position **SE**

Nous supposons qu'un score global est obtenu en sommant les points attribués pour chaque étiquette.

La visualisation de l'ensemble des possibilités donne ceci :



Dans une solution, chaque lieu ne possède qu'une seule étiquette parmi les 4 choix. Une solution ne doit présenter aucun recouvrement entre étiquettes. On doit alors obtenir une configuration de ce type :



Un prétraitement nous permet d'identifier les recouvrements possibles. Ils sont donnés par paire sans répétition dans la liste ci-dessous.

- Nantes (SO) : St Sébastien / Loire (NO)
- Nantes (SE) : St Sébastien / Loire (NO), Basse Goulaine (NO)
- Rezé (NE) : St Sébastien / Loire (NO), St Sébastien / Loire (SO), Basse Goulaine (SO)
- Rezé (NO) : St Sébastien / Loire (NO), St Sébastien / Loire (SO)
- Rezé (SO) : St Sébastien / Loire (SO)
- Rezé (SE) : Vertou (NO), St Sébastien / Loire (SO)
- Vertou (NE) : St Sébastien / Loire (SO), St Sébastien / Loire (SE)
- Vertou (NO) : St Sébastien / Loire (SO)
- St Sébastien / Loire (NE) : Basse Goulaine (NE), Basse Goulaine (NO), Basse Goulaine (SO), Basse Goulaine (SE)
- St Sébastien / Loire (NO) : Basse Goulaine (NO), Basse Goulaine (SO)
- St Sébastien / Loire (SO) : Basse Goulaine (SO)
- St Sébastien / Loire (SE) : Basse Goulaine (SO), Basse Goulaine (SE)

Notre but sera d'obtenir une solution maximisant le score obtenu, parmi les solutions sans recouvrement.

1. Déterminer les variables de décision du problème.
2. Formuler la fonction objectif.
3. Exprimer les contraintes spécifiant que chaque lieu ne possède qu'une seule étiquette.
4. Exprimer les contraintes interdisant les recouvrements.

Exercice 2.4

Chacune des six machines d'un atelier doit recevoir un opérateur. Six personnes ont été présélectionnées. Chacune d'elles a subi un test de productivité sur chaque machine. Le tableau ci-dessous donne les productivités obtenues, en pièces par heure. Les machines sont en parallèle, c'est-à-dire que la productivité totale de l'atelier est la somme des productivités des personnes affectées aux machines.

Personnes $\downarrow$/ Machines $\rightarrow$	1	2	3	4	5	6
1	13	24	31	19	40	29
2	18	25	30	15	43	22
3	20	20	27	25	34	33
4	23	26	28	18	37	30
5	28	33	34	17	38	20
6	19	36	25	27	45	24

L'objectif est de déterminer une affectation des personnes aux machines permettant de maximiser la productivité totale. Poser ce problème sous la forme d'un Programme Linéaire.

Exercice 2.5

Un pays de l'Asie du Sud-Est vient de subir des inondations d'une rare ampleur. Le gouvernement, avec l'aide internationale, décide de mettre en place un système de ravitaillement par avion. Malheureusement, elle ne peut s'appuyer que sur sept pistes d'atterrissage encore en bon état, dont celle de la capitale, pour assurer des livraisons de vivres et de médicaments de première urgence.

Le gouvernement décide de faire partir des avions de la capitale pour qu'ils visitent les six autres aéroports et reviennent en fin de parcours à la capitale. Le tableau ci-dessous donne les distances entre aéroports. L'aéroport A1 est celui de la capitale. Quel devra être l'ordre de visite des aéroports pour parcourir une distance minimale ? Poser ce problème sous la forme d'un Programme Linéaire.

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A1	$\times$	786	549	657	331	559	250
A2	786	$\times$	668	979	593	224	905
A3	549	668	$\times$	316	607	472	467
A4	657	979	316	$\times$	890	769	400
A5	331	593	607	890	$\times$	386	559
A6	559	224	472	769	386	$\times$	681
A7	250	905	467	400	559	681	$\times$

Exercice 2.6

Une grande entreprise désire ouvrir des nouveaux entrepôts pour desservir ses centrales d'achat. Chaque nouvelle implantation d'un entrepôt a un coût fixe et permet de livrer les centrales d'achat à proximité du site. On dispose de 12 sites pour construire les entrepôts et de 12 centrales d'achat à desservir.
On dispose des informations suivantes pour chaque entrepôt : un coût fixe de construction à inclure dans la fonction objectif et une capacité limitée. On connaît également la demande de chaque client de manière précise. Ces informations sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

Entrepôt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Coût (k€)	3500	9000	10000	4000	3000	9000	9000	3000	4000	10000	9000	3500
Capacité (t)	300	250	100	180	275	300	200	220	270	250	230	180
Client	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Demande (t)	120	80	75	100	110	100	90	60	30	150	95	120

De plus, chaque livraison effectuée d'un entrepôt vers une centrale d'achat a un coût qui dépend de la distance à parcourir. Le tableau ci-dessous donne le coût (en k€) de livraison d'une centrale d'achat (en ligne) par un des entrepôts (en colonne). Ce coût correspond à la satisfaction totale de la demande d'une centrale d'achat par un même entrepôt. Une centrale d'achat peut en effet être livrée par plusieurs entrepôts. Dans ce cas, sa demande est partiellement satisfaite par plusieurs entrepôts, nous supposerons alors que le coût de livraison est proportionnel à la part de satisfaction de la demande. Certaines livraisons impossibles sont matérialisées par ∞. Dans tous les cas, la demande des clients devra être complètement satisfaite.

Entrepôt↓ / Centrale→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	100	80	50	50	60	100	120	90	60	70	65	110
2	120	90	60	70	65	110	140	110	80	80	75	130
3	140	110	80	80	75	130	160	125	100	100	80	150
4	160	125	100	100	80	150	190	150	130	∞	∞	∞
5	190	150	130	∞	∞	∞	200	180	150	∞	∞	∞
6	200	180	150	∞	∞	∞	100	80	50	50	60	100
7	100	80	50	50	60	100	120	90	60	70	65	110
8	120	90	60	70	65	110	140	110	80	80	75	130
9	140	110	80	80	75	130	160	125	100	100	80	150
10	160	125	100	100	80	150	190	150	130	∞	∞	∞
11	190	150	130	∞	∞	∞	200	180	150	∞	∞	∞
12	200	180	150	∞	∞	∞	100	80	50	50	60	100

Quels entrepôts ouvrir pour minimiser le coût total de leur construction et des livraisons qu'ils devront assurer ? Poser ce problème sous la forme d'un Programme Linéaire.

Exercice 2.7

Un manufacturier dispose de l'équipement nécessaire pour mettre en marché 4 produits alimentaires P1, P2, P3 et P4. Ces produits requièrent l'intervention de 3 ateliers distincts : A1, A2 et A3. Le tableau ci-dessous présente les données relatives aux durées de production et aux disponibilités de ces ateliers au cours des prochains mois.

	temps requis en h/unité				
Atelier	P1	P2	P3	P4	heures disponibles
A1	0,12	0,15	0,10	0,09	2760
A2	0,10	0,09	0,15	0,10	2500
A3	0,05	0,04	0,04	0,05	1200
Profit par unité	2,20€	1,90€	2,25€	1,71€	

Ce qui est fabriqué au cours d'un mois n'est livré qu'à la fin du mois suivant : en effet, une période minimale d'un mois de mûrissement est requise pour que les produits atteignent leur pleine saveur. L'espace d'entreposage requis (en m^3) pour une unité de chaque produit est donné au tableau ci-dessous.

Produit	P1	P2	P3	P4
Espace requis	0,27	0,28	0,29	0,24

Le manufacturier dispose de $4000m^3$ d'espace d'entreposage. Il peut louer de l'espace supplémentaire, par tranche de $2000m^3$, aux tarifs mensuels dégressifs donnés au tableau ci-dessous.

Espace (en 000 m^3)	2	4	6	8	10	12	14	16
Coût (en 000 €)	3	4,8	6,4	7,8	9	10	10,8	11,5

Le carnet de commandes et le maintien de ses parts de marché imposent au manufacturier de fabriquer un total d'au moins 5000 caisses de P1 et de P2 confondus, au plus 4000 caisses de P2, au moins 2000 caisses de P4 et un total d'au plus 30000 caisses des produits P1 et P3 confondus.
Modéliser ce problème sous la forme d'un PL.

Exercice 2.8

Une importante société, fabriquant d'une marque réputée de boissons gazeuses, veut construire une usine d'embouteillage dans une région. Voici le tableau des distances (en km) entre chacune des paires de villes où est concentrée la population

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
A	-												
B	15	-											
C	14	21	-										
D	24	9	16	-									
E	28	13	28	12	-								
F	37	22	29	13	9	-							
G	40	25	32	16	17	8	-						
H	59	44	47	35	36	27	19	-					
I	51	36	45	29	23	16	14	15	-				
J	46	31	38	22	18	9	7	22	7	-			
K	43	28	40	24	15	11	12	23	8	5	-		
L	63	48	57	41	35	28	26	11	12	19	20	-	
M	48	51	34	42	49	40	32	13	28	35	36	24	-
Population (en milliers d'hab.)	53	46	16	28	96	84	32	21	15	22	41	53	66

Quelle ville sera retenue pour l'établissement de l'usine d'embouteillage si la société se donne comme objectif de maximiser le nombre de personne vivant à moins de 25 km de l'usine ? S'il est possible d'implanter $p \geq 2$ usines dans la région, dans quelles villes devrait-on le faire ? Poser ce problème sous la forme d'un Programme Linéaire.

Exercice 2.9

Une étudiante élégante et coquette doit se rendre par avion aux États-Unis afin d'effectuer son stage d'été. Outre ses affaires professionnelles et quelques objets indispensables, elle doit choisir un certain nombre de vêtements dans sa garde-robe. Du fait des règlementations aériennes, il s'avère qu'il ne reste plus que quatre kilos disponibles pour ses vêtements. Une première sélection dans sa garde-robe conduit l'étudiante à retenir, en plus de la robe qu'elle a décidé de porter dans l'avion, 3 jupes, 3 pantalons, 4 hauts et 3 robes. Le poids en grammes de chaque vêtement est répertorié dans le tableau ci-dessous.

Vêtement	Jupe			Pantalon			Haut				Robe		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3
Poids (g)	500	400	700	600	500	500	400	300	300	400	600	700	800

L'étudiante décide que :
– elle doit emporter au moins une robe,
– si elle emporte la jupe 1 alors elle emportera également le haut 2 qui s'assortit si bien avec cette jupe,
– elle ne prendra pas le haut 4 si elle emporte les hauts 1 et 2.
L'objectif poursuivi est de maximiser le nombre de tenues différentes qu'elle pourra porter aux États-Unis. Une robe constitue une tenue. Les autres tenues résultent de combinaisons d'un haut et d'une jupe ou d'un pantalon. Cependant, les règles de l'élégance n'autorisent que certaines combinaisons indiquées par une croix dans le tableau ci-dessous.

		Haut			
		1	2	3	4
Jupe	1	×	×		×
	2	×			×
	3			×	
Pantalon	1	×		×	
	2		×		
	3			×	×

1. Définir les variables de décision principales
2. Exprimer les 4 contraintes du problème
3. Expression de la fonction objectif :
   a) Formuler la fonction objectif du problème en utilisant une expression quadratique
   b) Rendre linéaire la fonction objectif. Pour chaque produit de la somme précédente, on utilisera une nouvelle variable binaire et deux nouvelles contraintes

Exercice 2.10

Un meunier dispose de 8000 kg d'une céréale A et de 9000 kg d'une céréale B qu'il a déjà payés. Il veut les moudre, puis les mélanger pour produire des farines f et g, la première devant contenir au moins 50% de la céréale A, la deuxième, au moins 60% de la même céréale. La farine f rapporte 1,40 € le kg et la farine g 1,60 € le kg. Le meunier désire maximiser le revenu qu'il retirera de la vente des deux farines.

1. Poser ce problème sous la forme d'un programme linéaire
2. Après résolution de ce problème, le meunier découvre que l'unique solution optimale recommande de ne produire que de la farine f (en utilisant 8000 kg de céréale A et 8000 kg de céréale B) pour un revenu de 22 400 €. Cette solution laisse 1000 kg de céréale B inutilisée. Le meunier découvre ensuite qu'il lui serait possible de se procurer auprès d'un fournisseur jusqu'à 15000 kg de céréale A aux prix suivants :
   – Les 5000 premiers kilos à 2,20 € chacun
   – Les 5000 kilos suivants à 2 € chacun
   – Les 5000 derniers kilos à 1,80 € chaun
   Le meunier souhaite bien sûr toujours maximiser son revenu. Poser ce problème sous la forme d'un programme linéaire.