X5I0020

Étude des algorithmes

Jean-Xavier Rampon
B 219

Prérequis

Induction Nœthérienne

Théorème (Induction Nœthérienne)
Soit $P=(V(P),\leq_P)$ un ordre Nœthérien. Soit $A(p)$ une assertion définie pour tout $p \in V(P)$ et vérifiant : $\forall\ x \in V(P)$, si $A(y)$ est vraie pour tout $y <_P x$ alors $A(x)$ est vraie. Alors, pour tout $p \in V(P)$, on a $A(p)$ vraie.

Remarque : IN munis de sa relation d'ordre usuelle, que l'on note $\omega_=$, est un bon ordre et est donc Nœthérien.

Théorème (Induction Nœthérienne sur $\omega_=$)
Soit $A(n)$ une assertion définie pour tout $n \in$ IN avec $n \geq n_o$ et vérifiant :

1. $A(no)$ est vraie
2. $\forall\ n > n_o$: si $A(k)$ est vraie pour tout $n_o \leq k < n$ alors $A(n)$ est vraie.

Alors $\forall\ n \geq n_o$, $A(n)$ est vraie

Propriété : Le produit fini d'ordres Nœthériens est Nœthérien.

Cardinaux

Définition : Deux ensembles ont même **cardinal** s'il sont en bijection (ils sont dits équipotents).

Définition : Un ensemble **dénombrable** est un ensemble en bijection avec l'ensemble des entiers naturels.

Théorème (Cantor) : Soit X un ensemble, il n'existe pas d'application bijective entre X et 2^X .

Théorème

- Soit $(A_i)_{i\in[n]}$ une famille finie d'ensembles dénombrables : $\prod_{i\in[n]} A_i$ est dénombrable.
- Soit $(A_i)_{i\in IN}$ une famille d'ensembles dénombrables : $\cup_{i\geq 0}A_i$ est dénombrable.
- L'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
- Soient A et B deux ensembles: $\#B\geq 2$ et A dénombrable. L'ensemble des applications de A dans B, noté B^A, n'est pas dénombrable
- Tout ensemble infini en bijection avec une partie de IN est dénombrable.

Relations/Graphes

Définition : Une **relation binaire** sur un ensemble X est un sous-ensemble de X^2 (le produit cartésien de X avec lui-même).

Soit R une relation binaire sur X, R est :

- réflexive : $\forall x \in X, (x,x) \in R$
- antiréflexive : $\forall x \in X, (x,x) \notin R$
- symétrique : $\forall x,y \in X, (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$
- asymétrique : $\forall x,y \in X, (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$
- antisymétrique :
  $\forall x,y \in X, [(x,y) \in R \text{ et } (y,x) \in R] \Rightarrow x=y$
- transitive :
  $\forall x,y,z \in X, [(x,y) \in R \text{ et } (y,z) \in R] \Rightarrow (x,z) \in R$

Définitions :

Une **relation d'ordre** est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.

Une **relation d'ordre stricte** est une relation binaire antireflexive et transitive.

Une **relation d'équivalence** est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive.

Définitions : Un **digraphe**, ou graphe orienté sans boucle, est un couple G=(X,E) où X est un ensemble, dit ensemble des **sommets**, et où E est une relation binaire asymétrique (et antiréflexive) sur X, appelée ensemble des **arcs** de G.

Définitions : Un **graphe sans boucle** est un couple G=(X,E) où X est un ensemble, dit ensemble des **sommets** de G, et où E est

- une relation binaire, symétrique et antiréflexive, sur X.
- un ensemble de paires d'éléments de X, appelé ensemble des **arêtes** de G.

Un **pseudo-chemin** dans un digraphe G=(X,E) est une suite $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de X, où I est un segment initial de IN, telle que $(x_i,x_{i+1})\in E$ dès que $i,i+1\in I$.

Un **chemin** est un pseudo-chemin dans lequel chaque arc de G apparaît au plus une fois.

Une **chemin élémentaire** est un pseudo-chemin dans lequel chaque sommet de G apparaît au plus une fois.

Lorsque I est fini et que $x_0 = x_{\#I-1}$, on parle alors de **circuit** et de **pseudo-circuit.** Il est dit **circuit élémentaire** lorsque $(x_{0,\dots,}x_{\#I-2})$ est un chemin élémentaire.

Pour un graphe on parle de **chaîne** à la place de chemin et on parle de **cycle** à la place de circuit.