

Feuille de travaux dirigés n° 1

Introduction à la modélisation en Programmation Linéaire

Exercice 1.1

Le chapelier BC confectionne 2 modèles de casquettes M_1 et M_2 . Le profit est de 12 € pour le modèle M_1 et de 20 € pour le modèle M_2 . Chaque casquette fait l'objet, lors de sa confection, des soins de 2 ateliers, selon les données du tableau suivant.

Atelier	durée des opérations (en h/casquettes)		Heures disponibles
	M_1	M_2	
A	0,2	0,4	400
B	0,2	0,6	800

Étant assuré de vendre toute sa production, combien de casquettes de chaque modèle BC devrait-il confectionner au cours du prochain mois ? Poser ce problème sous la forme d'un programme linéaire.

Exercice 1.2

Une société forestière veut utiliser de façon optimale le bois obtenu de l'exploitation d'une concession forestière. Comme elle dispose d'une scierie et d'une usine de déroulement des billes, les deux débouchés possibles pour son bois sont le bois de sciage et le contre-plaqué. La production de 300 mètres de planche requiert 1000 unités d'épinette ou 1200 unités de sapin. La fabrication de 90 mètres carrés de contre-plaqué requiert 2000 unités d'épinette et 4000 unités de sapin.

Des boisés concédés, la société pourra obtenir au plus 150 000 unités d'épinette et au plus 200 000 unités de sapin. L'entreprise s'est engagée à produire 12 000 mètres de planche et 2700 mètres carrés de contre-plaqué. Produire 300 mètres de planche rapporte 800 € alors que produire 90 mètres carrés de contre-plaqué rapporte 5200 €. Quel plan de production la société devrait-elle envisager ? Poser ce problème sous la forme d'un Programme Linéaire.

Exercice 1.3

Un industriel se voit proposer, au début d'un mois donné, les quantités suivantes de 4 liquides : 8 000 litres du liquide A au coût de 5,50 € l'unité, 4 250 litres de B au coût de 4,50 €, 16 000 litres de C à 7,50 € l'unité et 2 000 litres de D à 11,25 € l'unité. L'industriel peut revendre ces liquides directement, sans leur faire subir de transformations, et en retirer un bénéfice de 0,50€ le litre. Il peut aussi s'en servir pour élaborer les mélanges E, F et G. Ces mélanges doivent présenter les caractéristiques données dans le tableau suivant.

Mélange	Liquide A	Liquide B	Liquide C	Liquide D
E	30%	Au moins 10%	40%	Au plus 5%
F	Au moins 25%	Au plus 20%	20%	Au moins 10%
G	20%	Au moins 15%	40%	Au plus 20%

Ces mélanges se vendent 11 €, 15 € et 14 € le litre respectivement, et le marché peut en absorber autant que peut en fabriquer l'industriel. Le carnet de commandes exige cependant la livraison d'au moins 400 litres de E, d'au moins 800 litres de F et d'au moins 200 litres de G. Le but du problème est de prendre les décisions qui maximiseront le profit de l'industriel. Modéliser ce problème sous la forme d'un Programme Linéaire.

Exercice 1.4

M. Schedule est chargé d'organiser le planning des infirmières du service Cardiologie de l'hôpital Saint-Joseph. Une journée de travail dans ce service est divisée en douze tranches de deux heures chacune. Les besoins en personnel varient d'une tranche horaire à l'autre. Le tableau ci-dessous donne les besoins de personnel pour chacune des tranches horaires.

Tranches horaires	Nombre minimal d'infirmières
06h - 08h	35
08h - 10h	40
10h - 12h	40
12h - 14h	35
14h - 16h	30
16h - 18h	30
18h - 20h	35
20h - 22h	30
22h - 00h	20
00h - 02h	15
02h - 04h	15
04h - 06h	15

1. M. Schedule souhaite déterminer le nombre minimal d'infirmières nécessaires pour couvrir tous les besoins, sachant qu'une infirmière travaille huit heures par jour de la façon suivante : 4 heures de travail, 2 heures de pause, 4 heures de travail. Poser ce problème sous la forme d'un programme linéaire.
2. Par la résolution du programme linéaire donné en 1, on apprend qu'il faut 100 infirmières pour couvrir tous les besoins et ce service n'en compte que 80. M. Schedule propose alors à son personnel de faire deux heures supplémentaires par jour. Ces deux heures supplémentaires sont effectuées immédiatement après les quatre dernières heures de travail, sans pause. M. Schedule souhaite minimiser le nombre d'infirmières effectuant des heures supplémentaires. Poser ce problème sous la forme d'un programme linéaire.

Exercice 1.5

L'entreprise DeRoo fabrique des bicyclettes pour enfants. Les prévisions de ventes en milliers d'unités pour l'année à venir sont données dans le tableau ci-dessous. La capacité de production de l'entreprise est de 30 000 bicyclettes par mois. Elle peut produire plus en faisant faire des heures supplémentaires à ses employés. Mais le coût de revient d'une bicyclette est alors plus élevé : 30 € au lieu de 20 €.

Janv	Fév	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil	Août	Sept	Oct	Nov	Déc
30	15	15	25	33	40	45	45	26	14	25	30

Actuellement, il y a 2000 bicyclettes en stock. On peut calculer les coûts de stockage en considérant un coût de 3 € par unité contenue dans le stock en fin de mois. On considère que les capacités de stockage de l'entreprise sont illimitées. Nous sommes le premier janvier. Quelles quantités doivent être fabriquées et stockées dans les douze prochains mois, de façon à respecter les demandes prévisionnelles tout en minimisant les coûts ? Poser le problème sous la forme d'un Programme Linéaire.

Exercice 1.6

Le bâtiment où la firme Vitrex entreposait ses surplus de production vient d'être la proie des flammes. Il faut que Vitrex s'assure de disposer d'espaces d'entreposage suffisants pour les 6 prochains mois, en attendant la mise en service du nouvel entrepôt. Voici les besoins minimaux en espaces d'entreposage prévus pour le prochain semestre.

Mois	besoins minimaux en espace (en 100 m ²)
1	35
2	20
3	30
4	10
5	15
6	20

Vitrex peut louer les espaces nécessaires auprès de GG, spécialiste de l'entreposage et administrateur d'un immense entrepôt situé à proximité de l'usine Vitrex, en signant des baux pour autant de mois qu'elle le souhaite et pour autant de mètres carrés qu'il lui en faudra. Les coûts de locations sont proportionnels à la surface louée, mais ils varient selon la durée. La tableau ci-dessous donne les coûts unitaires (100 m²) pour des périodes allant de 1 à 6 mois.

Durée du bail (en mois)	1	2	3	4	5	6
Coût (pour 100 m ²)	200 €	360 €	500 €	625 €	745 €	850 €

Vitrex souhaite minimiser ses frais d'entreposage durant les 6 prochains mois. Modéliser ce problème comme un programme linéaire.

Exercice 1.7

Une société de distribution de GPL alimente, tout au long de l'année les citernes de ses clients. Compte tenu de l'usage de ce gaz (chauffage, cuisine, eau chaude) on connaît précisément le volume des livraisons à effectuer en fonction des températures attendues pour chacune des saisons. Si en réalité l'analyse se fait selon un découpage fin du temps (en mois, voire en semaine), nous adopterons ici, pour alléger l'analyse, un découpage trimestriel. Le tableau ci-dessous présente le volume des livraisons à réaliser pour une année standard.

Trimestre	1	2	3	4
Quantité à livrer (t)	5190	2760	900	3150

Les livraisons sont supposées uniformément réparties à l'intérieur de chaque trimestre. Compte tenu de la stabilité de ce marché, on peut considérer que le volume des livraisons est identique chaque année. Pour effectuer ces livraisons, la société peut :

- louer des camions “grande capacité” d’une capacité de livraison de 200 t par mois, à un tarif de 5000 € par mois,
- louer des camions “petite capacité” d’une capacité de livraison de 120 t par mois, à un tarif de 3500 € par mois,
- faire appel à un prestataire de service (affrètement) qui facture 35 € la tonne livrée.

Les trois modes de livraison peuvent être utilisés simultanément.

La société de distribution cherche à définir pour l'année A à venir son plan de location et/ou d'affrètement (appel au prestataire) compte tenu des contraintes suivantes dues à la spécificité du matériel :

- Le contrat de location d'un camion de grande capacité est obligatoirement de 6 mois consécutifs. Le contrat de location d'un camoin de petite capacité est obligatoirement de 3 mois consécutifs.
- L'affrètement ne peut dépasser 500 t/trimestre. Les dates de mise à disposition des camions loués sont : le 1er janvier, 1er avril, 1er juillet, 1er octobre.
- On dispose au maximum de 10 chauffeurs pendant les 1er, 2ème et 4ème trimestres, de 5 chauffeurs pendant le 3ème trimestre (vacances). Ces chauffeurs conduisent tout type de camion loué.

1. Le plan de location de l'année en cours ($A - 1$) a été défini comme suit :

- au 1/01 : 6 camions de grande capacité et 4 camions de petite capacité,
- au 1/04 : pas de camion loué,
- au 1/07 : 1 camion de grande capacité,
- au 1/10 : 1 camion de grande capacité et 6 camions de petite capacité.

Pour toutes les périodes, il est possible de faire appel à des prestataires pour combler l'éventuelle insuffisance de capacité.

a) Tracer un graphique représentant l'évolution trimestrielle des besoins de livraison et de la capacité totale de la flotte louée pendant l'année $A - 1$.

b) Quel est le coût global annuel de transport pour les livraisons de $A - 1$?

2. On cherche à modéliser la recherche du plan de l'année A (location + affrètement) de moindre coût, sous forme de programme linéaire.

(a) Définir les variables de décision.

(b) Écrire les différentes contraintes caractérisant le problème (on se rappellera que pour le premier trimestre de A on dispose d'un gros camion loué le 1/10 de l'an $A - 1$).

(c) Exprimer la fonction objectif.