

Contrôle continu

durée : 1h20

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

On considère le programme linéaire suivant

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 - x_2 \\ \text{s. c.} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

1. Résoudre ce problème graphiquement.
2. Déterminer une solution de base admissible en utilisant la phase 1 de l'algorithme du simplexe.
3. Déterminer une solution de base optimale en utilisant la phase 2 de l'algorithme du simplexe.

Indication : en cas d'échec dans la question 2., on pourra partir du tableau simplexe suivant

\bar{c}	0	-2	0	2	-2
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	1	5
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	-1	1

Pour chaque changement de base, on justifiera bien les choix de variables entrantes et sortantes.

Exercice 2

M. Amazing est chargé d'organiser la surveillance d'un gigantesque entrepôt appartenant à une entreprise de vente en ligne. Le problème qu'il considère ici est l'emploi du temps des surveillants. Il faut en effet savoir que le nombre de surveillants nécessaires n'est pas le même dans chaque tranche horaire, et que ces surveillants travaillent 8 heures d'affilée sans pause. Le tableau ci-dessous indique les besoins en surveillants pour une journée type.

Tranches horaires	Besoins
00h - 04h	24
04h - 08h	56
08h - 12h	90
12h - 16h	116
16h - 20h	40
20h - 00h	60

1. Bien entendu, l'objectif de l'entreprise est de contenir les coûts. On suppose dans un premier temps que les surveillants ont le même salaire quelque soit l'heure à laquelle commence leur travail.
 - a) Définir les variables de décision.
 - b) Écrire la fonction objectif.
 - c) Écrire les contraintes.
2. Après résolution, M. Amazing se rend compte que l'enveloppe budgétaire qui lui est accordée est insuffisante. Il pense un moment à demander une rallonge, mais a peur de passer pour un incompetent ! Il a donc l'idée d'avoir recours aux heures supplémentaires. Les surveillants effectuant des heures supplémentaires travailleront 12 heures d'affilée sans pause ! Cependant, les 4 heures supplémentaires seront payées 50% plus chères que les heures "normales".
 - a) Définir les variables de décision additionnelles.
 - b) Écrire la fonction objectif.
 - c) Écrire les contraintes.

Exercice 3

La verrerie Grand Siècle exploite une usine de verre dépoli dans chacune des 5 villes suivantes : A, B, C, D et E. Le procédé de fabrication exige de l'acide fluorhydrique que, jusqu'à maintenant, Grand Siècle entreposait sur l'emplacement même de ses usines. Le ministère de l'Environnement exige qu'à compter de l'an prochain, les fûts d'acide soient entreposés à la campagne en des endroits où d'éventuelles émanations accidentelles se diffuseraient dans l'atmosphère. Grand Siècle a repéré 4 emplacements, qui ont reçu l'agrément du ministère, où il serait possible de stocker les fûts en attendant de les acheminer, au fur et à mesure des besoins, vers les différentes usines. Les coûts reliés à l'acquisition des terrains et à la construction des installations de stockage sont les mêmes pour chaque emplacement : 85000 €. Par contre les coûts annuels d'entretien des chemins d'accès diffèrent significativement, le tableau ci-dessous les résume :

Emplacement	Coût
1	12 000€
2	4 000€
3	4 000€
4	10 000€

Le tableau ci-dessous donne les coûts annuels (en milliers d'euros) d'acheminement des fûts d'acide de chacun des emplacements vers chaque usine.

Emplacements ↓ / Usines →	A	B	C	D	E
1	7	13	11	6	11
2	9	18	5	10	23
3	16	8	5	17	15
4	12	8	7	12	8

L'objectif de Grand Siècle est de minimiser les coûts de l'opération "Approvisionnement annuel des usines en fûts d'acide fluorhydrique". La direction se pose deux questions :

- Sur quel(s) emplacement(s) faut-il construire des installations de stockage ?
- Quelles sont les usines qui seront approvisionnées en acide à partir de chaque emplacement où des installations de stockage auront été construites ?

Questions :

1. Nous supposons dans un premier temps que la capacité de stockage en chaque emplacement est illimitée, et que chaque usine sera approvisionnée à partir d'un seul emplacement.
 - (a) Définir les 24 variables de décision du problème (rôle et type).
 - (b) Définir la fonction objectif.
 - (c) Définir les contraintes du problème répondant aux spécifications suivantes :
 - Chaque usine est approvisionnée à partir d'un seul emplacement.
 - Une usine ne peut être approvisionnée par un emplacement que si des installations de stockage y ont été construites.
2. Nous supposons maintenant que la capacité de stockage en chaque emplacement est limitée et variable suivant l'emplacement, de plus la demande en fûts d'acide est également variable suivant l'usine. Nous supposons également qu'une usine peut maintenant être approvisionnée à partir de plusieurs emplacements afin de répondre à sa demande. En cas d'approvisionnement partiel d'une usine à partir d'un emplacement, le coût d'acheminement est proportionnel à la part de satisfaction de la demande.

Le tableau ci-dessous résume les capacités potentielles des installations dans les différents emplacements et les demandes de chaque usine.

Emplacement	1	2	3	4	
Capacité (t)	300	250	100	180	
Usine	A	B	C	D	E
Demande (t)	120	80	75	100	110

Modifier la modélisation obtenue dans la question précédente de manière à tenir compte de ce nouveau contexte.