

Feuille de travaux dirigés n° 2

Exercice 2.1 (Langages rationnels)

Soit L des chaînes construites sur $\{a, b\}$ contenant exactement 2 b . Montrer que L est rationnel.

Exercice 2.2 (Expressions rationnelles (1))

- Écrire les expressions rationnelles décrivant les langages suivants :
 - $\{ab\}$
 - $\{a^n b a^m, n \geq 0, m \geq 0\}$
 - $\{a^n, n \geq 2\}$
- Décrire les langages définis par les expressions rationnelles suivantes. On donne d'abord l'alphabet puis l'expression. La notation $[c_1 - c_2]$ désigne un symbole parmi tous les symboles entre c_1 et c_2 .
 - $A_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, H\}, ([1-9][0-9]^*(0|2|4|6|8))|(0|2|4|6|8)$
 - $A_1, ([0-9]|10|11|12)H[0-5][0-9]$
 - $A_2 = \{a, b, \dots, z\}, \text{regarder}(ai|as|a|ons|ez|ont)$
 - $A_3 = \{a, b, c\}, ((a|b|c)(a|b|c)(a|b|c))^*$
 - $A_3, (a|b|c)^* a (a|b|c)^* a (a|b|c)^*$
 - $A_3, (b|c)^* a (b|c)^* a (b|c)^*$

Exercice 2.3 (Expressions rationnelles (2))

- Proposer quelques mots vérifiant les expressions régulières suivantes. Essayer de simplifier ces expressions régulières.
 - $\text{Reg1} = ((a|b)^* c^*)^*$
 - $\text{Reg2} = a^* (b^* | c^*) (b^* | c^*) (b^* | c^*)$
 - $\text{Reg3} = (aab|aac|abb|abc|bab|bac|bbb|bbc|cab|cac|cbb|cbc)^*$
- Proposer des expressions régulières définissant les langages suivants :
 - L_1 = les identificateurs en Pascal
 - L_2 = les nombres décimaux sans 0 inutiles (ni à gauche de la partie entière, ni à droite de la partie décimale)
 - L_3 = les mots binaires contenant un nombre pair de 1.

Exercice 2.4 (Définition rationnelle : Expression des cellules sous Excel)

Une cellule Excel est repérée par son numéro de ligne et son numéro de colonne (exprimé en lettres). Par exemple, **L2** définit la cellule en ligne **2** et colonne **L**. De même, **AB23** définit la cellule en ligne **23** et colonne **AB**.

Une zone est indiquée par la cellule en haut à gauche et la cellule en bas à droite, toutes les deux séparées par deux points (:). Par exemple, **L2:M6** indique la zone allant de la cellule **L2** à la cellule **M6**. L'ordre des cellules n'importe pas. Par exemple, **M6:L2** est identique à **L2:M6**.

Une colonne entière est définie par son nom seul. Par exemple, **L:L** indique la zone contenant toute la colonne **L**. De même, une ligne est définie par son numéro seul.

Une zone peut être aussi une seule cellule ou une suite de zones séparées par un point-virgule (;). Par exemple, **M6;A3:C18;G:I;4:18** indique la zone composée de la cellule **M6**, de la zone **A3:C18**, des colonnes **G** à **I** et des lignes 4 à 18.

Écrire l'expression rationnelle décrivant une zone sous Excel. Vous utiliserez la notation des définitions rationnelles pour simplifier l'expression.

Exercice 2.5 (Systèmes d'équations rationnelles (1))

Démontrer que : $a(ba)^*b = (ab)^+$.

Exercice 2.6 (Systèmes d'équations rationnelles (2))

Résoudre les systèmes suivants :

1. $L_1 = aL_2 \mid bL_3$
 $L_2 = bL_2 \mid \epsilon$
 $L_3 = bL_3 \mid aL_2$
2. $L_1 = bL_2 \mid bL_3$
 $L_2 = aL_2 \mid aL_4 \mid \epsilon$
 $L_3 = cL_4$
 $L_4 = cL_4 \mid \epsilon$

Exercice 2.7 (Lemme de l'étoile (1))

Monter que $\{a^{nn}, n \geq 0\}$ n'est pas rationnel.

Exercice 2.8 (Lemme de l'étoile (2))

Les langages suivants sont-ils rationnels ? Le prouver.

1. $\{a^n b^p \mid n \equiv p \text{ modulo } 2\}$
2. $\{a^n b^p \mid n \geq p\}$