Feuille de travaux dirigés n° 3

Exercice 3.1 (Grammaires : génération et typage)

Pour chacune des grammaires suivantes :

1. générer deux mots et préciser leurs longueurs,
2. donner le type de la grammaire,
3. définir sous forme ensembliste le langage engendré par la grammaire,
4. existe-t'il une grammaire de type plus élevé pour le même langage ?

$$
\begin{array}{lclrcl}
G1 & = & (\{a,b,c\},\{S\},S,\{ & S & \rightarrow & aSbSa \mid c\}) \\
G2 & = & (\{a,b,ch,d\},\{S,A,B,C\},S,\{ & S & \rightarrow & BCaCbbA, \\
 & & & A & \rightarrow & CaCbbA \mid \varepsilon, \\
 & & & Ca & \rightarrow & ba, \\
 & & & Cbb & \rightarrow & da, \\
 & & & B & \rightarrow & cha\}) \\
G3 & = & (\{cha,bada\},\{S,A\},S,\{ & S & \rightarrow & chaA, \\
 & & & A & \rightarrow & badaA \mid bada\}) \\
G4 & = & (\{a,b\},\{S,A,B\},S,\{ & S & \rightarrow & aAB, \\
 & & & B & \rightarrow & SA, \\
 & & & bB & \rightarrow & a, \\
 & & & Aa & \rightarrow & Sab, \\
 & & & Ab & \rightarrow & SBb\}) \\
G5 & = & (\{a,b\},\{S,S_1\},S,\{ & S & \rightarrow & \varepsilon \mid S_1, \\
 & & & S_1 & \rightarrow & aS_1 \mid b\}) \\
G6 & = & (\{a,b\},\{S\},S,\{ & S & \rightarrow & \varepsilon \mid aS \mid b\}) \\
G7 & = & (\{a,b,c\},\{S,A,B,C\},S,\{ & S & \rightarrow & \varepsilon \mid A, \\
 & & & A & \rightarrow & aA \mid B, \\
 & & & B & \rightarrow & bB \mid C, \\
 & & & C & \rightarrow & cC \mid c\})
\end{array}
$$

Exercice 3.2 (Grammaire de la calculatrice)

Soit la grammaire :

$$
G : (\quad \{a,b,...,z,+,(,)\},\{S, somme, produit, facteur, terme\}, S,
\left\{\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & somme \\
produit & \rightarrow & produit\ facteur \mid facteur \\
facteur & \rightarrow & (\ somme\ ) \mid terme \\
somme & \rightarrow & somme + produit \mid produit \\
terme & \rightarrow & a \mid b \mid c \mid \cdots \mid y \mid z
\end{array}\right\})
$$

1. Donner une génération de la chaîne $ab + (a + b)c + a(bc)$.
2. En cherchant une génération de la chaîne $a + ()$, justifier sa non-appartenance au langage engendré par la grammaire ci-dessus.
3. Modifier la grammaire pour qu'elle prenne en compte les operations $-$ et $/$, dont les propriétés sont respectivement égales à celles de l'addition et du produit. Pour cette nouvelle grammaire, donner une génération de la chaîne $a/(d + e - f)$

Exercice 3.3 (Représentation de langages par des grammaires formelles)

Donner une grammaire du type le plus élevé possible pour les langages suivants. En déduire le type du langage. Dans quel cas pouvez-vous certifier votre réponse ?

1. $L1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = a^n b^n, n > 0\}$
2. $L2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = a^p b^q, p \neq q, p \geq 0, q \geq 0\}$
3. $L3 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w = a^p b^q c^r, p + q \geq r, p > 0, q > 0, r \geq 0\}$
4. $L4 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \in L((a|b)^* a(a|b)^2)\}$
5. $L5 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ contient ab en facteur $\}$

Exercice 3.4 (Grammaires algébriques)

Donner une grammaire algébrique associée à chacun des langages suivants :

— $L1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|$ est paire$\}$
— $L2 = \{xcy \mid x, y \in \{a,b\}^*$ et $|x|_a > |y|_b\}$
— $L3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = x_1 c x_2$ avec $x_1, x_2 \in \{a,b\}^*$ et $|x_1|_a = |x_2|_a\}$
— $L4 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = a^n b^m a^n, n \geq 0, m \geq 0\}$
— $L5 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = a^n b^{2n}, n \geq 0\}$
— $L6 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = a^i b^j, i \neq j\}$
— $L7 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
— $L8 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w = xcx^r$ avec $x \in a, b^*\}$
— $L9 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ est un palindrome$\}$

Exercice 3.5 (Analyse des grammaires contextuelles)

Soient les grammaires contextuelles suivantes :

— $G_1 = (\{a,b,c\}, \{S,A\}, S, \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & abc \mid aBSc \\ Ba & \rightarrow & aB \\ Bb & \rightarrow & bb \end{array} \right\}$

— $G_2 = (\{a,b,c\}, \{S,A,B\}, S, \left\{ \begin{array}{lcllcl} S & \rightarrow & Cc & & & \\ C & \rightarrow & cAa \mid CAa \mid cBb \mid CBb & & & \\ Aa & \rightarrow & aA & Ab & \rightarrow & bA \\ Ba & \rightarrow & aB & Bb & \rightarrow & bB \\ Ac & \rightarrow & ca & Bc & \rightarrow & cb \end{array} \right\}$

Pour chacune des grammaires :

1. trouver 2 mots appartenant au langage et 2 mots n'appartenant pas au langage,
2. utiliser l'algorithme de recherche (ascendante) par force brute pour déterminer si $cbcb$ et abc appartiennent au langage,
3. déterminer le langage associé à la grammaire.

Exercice 3.6 (Analyse des grammaires algébriques sous forme normale de Chomsky)

Soient les grammaires algébriques suivantes :

— $G_1 = (\{a,b\}, \{S\}, S, \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \mid AX \\ X & \rightarrow & SB \\ A & \rightarrow & a \\ B & \rightarrow & b \end{array} \right\}$

— $G_2 = (\{a,b\}, \{S,B\}, S, \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AX \mid AS \\ X & \rightarrow & b \mid XB \\ A & \rightarrow & a \\ B & \rightarrow & b \end{array} \right\}$

Pour chacune des grammaires :

1. trouver 2 mots appartenant au langage et 2 mots n'appartenant pas au langage,
2. utiliser l'algorithme de Cocke-Youger-Kasami pour déterminer si $aabb$ et $aaabb$ appartiennent au langage,
3. déterminer le langage associé à la grammaire (ainsi que son type)

Exercice 3.7 (Formes normales de Chomsky et de Greibach)

Soient les grammaires suivantes :

— $G_1 = (\{0,1\}, \{S\}, S, \{\ S \ \rightarrow \ 0S1 \mid 01\ \}$

— $G_2 = (\{a,b\}, \{S,A,B\}, S, \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aB \mid bA \\ A & \rightarrow & aS \mid bAA \mid a \\ B & \rightarrow & bS \mid aBB \mid b \end{array} \right\}$

— $G_3 = (\{cha, bada\}, \{S,A\}, S, \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & chaA \\ A & \rightarrow & badaA \mid bada \end{array} \right\}$

— $G_4 = (\{a,b\}, \{S,A,B\}, S, \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aAB \mid BA \\ B & \rightarrow & Ba \mid BbA \mid aA \mid b \mid ab \\ A & \rightarrow & a \end{array} \right\}$

— $G_5 = (\{a,b\}, \{S,S_1\}, S, \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & \varepsilon \mid S_1 \\ S_1 & \rightarrow & aS_1 \mid b \end{array} \right\}$

— $G_6 = (\{a,b\}, \{S\}, S, \{\ S \ \rightarrow \ aS \mid b\ \}$

— $G_7 = (\{a,b,c\}, \{S,A,B,C\}, S, \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & \varepsilon \mid A \\ A & \rightarrow & aA \mid B \\ B & \rightarrow & bB \mid C \\ C & \rightarrow & cC \mid c \end{array} \right\}$

1. Transformer chacune de ces grammaires en une grammaire équivalente sous forme normale (binaire) de Chomsky.
2. Transformer chacune de ces grammaires en une grammaire équivalente sous forme normale de Greibach.

Exercice 3.8 (Elimination des règles à membre droit vide)

Il est possible de définir les grammaires de type 2 ou 3 avec des règles $X \rightarrow \varepsilon$ (on ne suppose plus que $X = S$ ni que S ne doit pas apparaître sur la partie droite d'une règle si la règle $X \rightarrow \varepsilon$ appartient à la grammaire). **Cela ne change pas la classe des langages de type 2 ou de type 3**.

En d'autres termes, pour toute grammaire (de type 2 ou 3) sans restriction sur les règles $X \rightarrow \varepsilon$, il existe une grammaire équivalente (de type 2 ou 3) avec la restriction que la règle ne peut s'appliquer qu'à l'axiome et que dans ce cas, l'axiome ne doit pas apparaître dans le membre droit d'une règle.

Soit la grammaire suivante :

$$G_1 = (\{a,b,c,d\}, \{S,A,B,\}, S, \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aB \\ B & \rightarrow & bB \mid A \mid \varepsilon \\ A & \rightarrow & a \mid aB \end{array} \right\}$$

1. Ecrire une expression régulière qui lui correspond.
2. Ecrire une grammaire de type 3 équivalente.
3. Comment peut-on transformer directement une grammaire (de type 2 ou 3) avec règles vides en une grammaire (de type 2 ou 3) sans règle vide.