

Feuille d'exercices no. 10

Introduction aux graphes et arbres recouvrants

Exercice 1. Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté à n sommets et m arcs, sans boucles et sans arêtes multiples. Pour chacun des problèmes P suivants, écrire deux algorithmes - en fonction de la représentation de G en machine - et comparer leurs complexités. Qu'en déduit-on sur l'efficacité des deux représentations ?

- P1. Calculer le degré entrant de chaque sommet de G . Le *degré entrant* $d^-(v)$ d'un sommet v de G est le nombre d'arcs qui ont v comme cible.
- P2. Calculer le graphe G^t (appelé le *transposé* de G) obtenu de G en inversant le sens de tous les arcs. Le graphe G^t doit avoir la même représentation en machine que G .

Exercice 2. Dans un graphe non-orienté, le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes qui ont ce sommet pour extrémité. Une suite décroissante d'entiers naturels est dite *graphique* s'il existe un graphe simple dont les degrés des sommets sont ces entiers.

1. Parmi les suites suivantes, lesquelles sont graphiques ?
 - a. 3,3,2,1,1.
 - b. 3, 3, 1, 1.
 - c. 3,3,2,2.
 - d. 4, 2, 1, 1, 1, 1.
 - e. 5,3,2,1,1,1
 - f. 5, 4, 3, 1, 1, 1, 1.
2. Proposer un algorithme à caractère glouton pour tester si une suite décroissante donnée est graphique. Tester cet algorithme sur quelques exemples.

Exercice 3. On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres... Comment doit-on faire ?

Exercice 4. Considérons huit petits villages situés respectivement aux distances ci-dessous l'un de l'autre :

| | | | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | | 2.6 | 4.2 | 1.8 | 1.4 | 3.6 | 4 | 3 |
| 2 | 2.6 | | 1.8 | 3.6 | 2.4 | 5.2 | 4.6 | 2.2 |
| 3 | 4.2 | 1.8 | | 5.2 | 3.4 | 5 | 3.8 | 2 |
| 4 | 1.8 | 3.6 | 5.2 | | 1.4 | 3.2 | 3 | 1.8 |
| 5 | 1.4 | 2.4 | 3.4 | 1.4 | | 1.8 | 2.1 | 1.6 |
| 6 | 3.6 | 5.2 | 5 | 3.2 | 1.8 | | 1.2 | 2 |
| 7 | 4 | 4.6 | 3.8 | 3 | 2.1 | 1.2 | | 1 |
| 8 | 3 | 2.2 | 2 | 1.8 | 1.6 | 2 | 1 | |

Pour faciliter les déplacements d'un village à l'autre, on a décidé de tracer un réseau de chemins qui permette de se rendre de tout village à tout autre village. Les coûts de construction de ces chemins sont proportionnels à leurs longueurs. Compte tenu des données ci-dessus (qui sont les seules dont on dispose) quel réseau proposeriez-vous de construire si votre objectif est de minimiser les coûts de construction ?

Pour aller plus loin

Exercice 5. Utilisant l'algorithme *ArbresRecouvrants* du cours, calculer tous les arbres recouvrants du graphe dont la suite décroissante des degrés est 3, 2, 2, 1.