LICEO CIENTIFICO HUMANISTA BRAINSTORM TEMUCO

$a^n = b$

$a^{\frac{m}{n}}$

MATEMÁTICA

Raíz enésima y Propiedades de raíces

“Siempre parece imposible
hasta que se hace” (Nelson Mandela) .

$\sqrt[n]{b} = a$

$\sqrt[n]{a^m}$

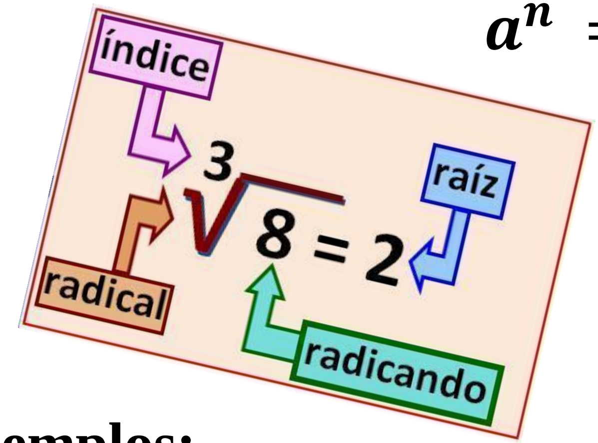
Docentes: Montserrat Guerrero – Susana Hueicha
Docente: Diferencial: Verónica Jara

Cursos: Segundo A – Segundo B

Temuco, Junio de 2020

Raíz enésima

Si un número real a multiplicado por si mismo "*n veces*" da como resultado el número real b, tal que se tiene la potencia $\boldsymbol{a^n} = \boldsymbol{b}$ entonces siempre se cumple $\sqrt[n]{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a}$ y se dice: "***a** es la raíz enésima de **b***"



$$\boldsymbol{a^n} = \boldsymbol{b} \leftrightarrow \sqrt[n]{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a}$$

"***a** es la **raíz enésima** de **b***"

***n** es número natural* (ℕ) *mayor que* 1.
a y ***b*** pertenecen al conjunto de los números reales ℝ

Cuando el índice es 2, no es necesario escribirlo en la raíz. $\sqrt[2]{9} = \sqrt{9}$

Si el índice es 2, la raíz se llama raíz ***cuadrada.***
Si el índice es 3, la raíz se llama raíz ***cúbica.***
Si el índice es 4, la raíz se llama raíz ***cuarta.***
Etc.

Ejemplos:

- $\sqrt{9} = 3$ porque $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ "*3 es la raíz **cuadrada** de 9*"
- $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ "*2 es la raíz **cúbica** de 8*"
- $\sqrt[5]{-19} = x$ porque $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5 = -19$ "*x es la raíz **quinta** de* -19"

Restricción de Raíces

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Si el índice de la raíz (n) es un valor par, las raíces pueden clasificarse según el signo del radicando, es decir:

Caso 1:

Cuando el radicando es un número positivo $\boldsymbol{a > 0}$, el resultado de la raíz (b) <u>**siempre será positivo**</u> y por lo tanto **pertenece** al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$

<u>Ejemplos:</u>

- $\sqrt[4]{16} = 2$ porque $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
- $\sqrt{9} = 3$ porque $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$

Caso 2:

Si el radicando es un número negativo $\boldsymbol{a < 0}$, el resultado de la raíz (b) **no existe** en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$

<u>Ejemplos:</u>

- $\sqrt{-9} = x$ porque $x^2 = -9$. Sin embargo no existe un número real tal que al elevarse al cuadrado de como resultado -9. Por lo tanto $\sqrt{\boldsymbol{-9}} = \boldsymbol{no\ existe}$

Restricción de Raíces

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Si el índice de la raíz (n) es un valor impar, las raíces pueden clasificarse según el signo del radicando, es decir:

Caso 1:

Cuando el radicando es un número positivo $\boldsymbol{a > 0}$, el resultado de la raíz (b) **siempre será positivo** y por lo tanto **pertenece** al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{27} = 3$ porque $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$
- $\sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^5 = 32$

Caso 2:

Cuando el radicando es un número negativo $\boldsymbol{a < 0}$, el resultado de la raíz (b) **siempre será negativo** y por lo tanto **pertenece** al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $-2 \cdot -2 \cdot -2 = (-2)^3 = -8$
- $\sqrt[5]{-100.000} = -10$ porque $-10 \cdot -10 \cdot -10 \cdot -10 \cdot -10 = (-10)^5 = -100.000$

Calcular Raíces

<u>Exactas *(Perfectas)*</u>

Para resolver una raíz $\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}}$ basta con buscar el número que multiplicado por si mismo *n veces (índice de la raíz)* de como resultado $\boldsymbol{a}$ *(radical)*. Cuando el resultado de la raíz es un número entero ($\mathbb{Z}$), entonces la raíz se denomina **raíz exacta o raíces perfecta.**

a) $\sqrt[3]{-27}$?

Si $-3 \cdot -3 \cdot -3 = (-3)^3 = -27$ entonces $\sqrt[3]{-27} = -3$

b) $\sqrt[4]{625}$?

Si $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (5)^4 = 625$ entonces $\sqrt[4]{625} = 5$

<u>Inexactas *(Imperfectas)*</u>

Si el resultado es un número irracional, por ejemplo $\sqrt{12} = 3{,}46410$ .... se llaman **raíces inexactas o imperfectas**. Para resolverlas, se debe descomponer en factores el radical de modo que uno de los factores sea una raíz exacta. Por ejemplo: $\sqrt{12} = ?$

Paso 1: Buscar los factores $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$

Paso 2: Reducir la raíz perfecta $\sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$

Paso 3: Expresar el resultado $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Adición y Sustracción de raíces

Se operan reduciendo términos semejantes, considerándose como condición que los radicandos e índices de las raíces involucradas deben ser iguales.

Ejemplo 1:

¿Cuál es el resultado de $5\sqrt[4]{3} + 2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3}$?

$$5\sqrt[4]{3} + 2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = 6\sqrt[4]{3}$$

Pueden reducirse ya que los radicandos y los índices en las tres raíces son iguales.

Ejemplo 2:

¿Cuál es el resultado de $3\sqrt{18} - \sqrt{27}$?

$$3\sqrt{18} - \sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 3}$$

$$= 3 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{3}$$

$$= 3 \cdot \ 3 \ \cdot \sqrt{2} \ - \ 3 \ \cdot \sqrt{3}$$

$$= 9\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$$

No pueden reducirse más ya que los radicandos en ambas raíces son diferentes.

Adición y Sustracción de raíces

Se operan reduciendo términos semejantes, considerándose como condición que los radicandos e índices de las raíces involucradas deben ser iguales.

Ejemplo 3:

¿Cuál es el resultado de $2\sqrt[3]{24} - \sqrt{75} + 3\sqrt{48}$?

$$= 2 \cdot \sqrt[3]{8 \cdot 3} - \sqrt{25 \cdot 3} + 3 \cdot \sqrt{16 \cdot 3}$$

$$= 2 \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{3}$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3} - 5 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt[3]{3} - 5\sqrt{3} + 12\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt[3]{3} + 7\sqrt{3}$$

No pueden reducirse más ya que los índices en ambas raíces son diferentes.

Observación: Tener cuidado con:

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \neq a + b$$

Raíz enésima y potencias de exponente fraccionario

Toda raíz se puede expresar como una potencia con exponente fraccionario y viceversa, a partir de la siguiente fórmula:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

n es número natural ($\mathbb{N}$) mayor que 1.
a y **b** pertenecen al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$

<u>Simbología:</u>

n: Índice de la raíz.

a: Subradical de la raíz.

m: Exponente del subradical de la raíz.

Ejemplos:

a) ¿Cuál es la potencia de la raíz $\sqrt{18}$?

$$\sqrt{18} = \sqrt[2]{18^1} = 18^{\frac{1}{2}}$$

b) ¿Cuál es la potencia de la raíz $\sqrt[5]{9}$?

$$\sqrt[5]{9} = \sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}}$$

c) ¿Cuál es la raíz de la potencia $5^{\frac{4}{2}}$?

$$5^{\frac{4}{2}} = \sqrt{5^4}$$

d) ¿Cuál es la raíz de la potencia $2^{\frac{5}{3}}$?

$$2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$$

Propiedades de las raíces

1. Cambio de índice de una raíz

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}}}$$

Ejemplo

- $\sqrt[2]{7^5} = \sqrt[2 \cdot 2]{7^{5 \cdot 2}} = \sqrt[4]{7^{10}}$

En este caso, para amplificar una raíz, se multiplica por cualquier número el índice y el exponente, siempre y cuando este sea el mismo para ambos.

- $\sqrt[4]{7^{10}} = \sqrt[2 \cdot 2]{7^{5 \cdot 2}} = \sqrt[2]{7^5}$

En este caso, para amplificar una raíz, se multiplica por cualquier número el índice y el exponente, siempre y cuando este sea el mismo para ambos.

RECUERDA QUE LAS PROPIEDADES SE PUEDEN APLICAR PARA "AMBOS LADOS" DE DERECHA A IZQUIERDA O VICEVERSA, COMO SE OBSERVA EN LOS EJEMPLOS

2. Multiplicación de raíces con igual índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

En este caso, para multiplicar raíces con igual índice, se conserva el índice y se multiplican los subradicales

En este caso, para descomponer una raíz en dos raíces con igual índice, el subradical se descompone en dos factores

Ejemplo

- $\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{9 \cdot 5} = \sqrt[5]{45}$

- $\sqrt[5]{45} = \sqrt[5]{9 \cdot 5} = \sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{5}$

RECUERDA QUE LAS PROPIEDADES SE PUEDEN APLICAR PARA "AMBOS LADOS" DE DERECHA A IZQUIERDA O VICEVERSA, COMO SE OBSERVA EN LOS EJEMPLOS

3. División de raíces con igual índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo

- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

En este caso, para dividir raíces con igual índice, se conserva el índice y se dividen los subradicales

- $\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

En este caso, un subradical fraccionario se puede separar en una fracción compuesta por dos raíces con igual índice

RECUERDA QUE LAS PROPIEDADES SE PUEDEN APLICAR PARA "AMBOS LADOS" DE DERECHA A IZQUIERDA O VICEVERSA, COMO SE OBSERVA EN LOS EJEMPLOS

4. Potencia de una raíz

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

En este caso, el exponente de toda la raíz puede introducirse como exponente del subradical

En este caso, el exponente del subradical puede extraerse como exponente para toda la raíz.

Ejemplo

- $\left(\sqrt[9]{13}\right)^{5} = \sqrt[9]{13^{5}}$
- $\sqrt[9]{13^{5}} = \left(\sqrt[9]{13}\right)^{5}$

RECUERDA QUE LAS PROPIEDADES SE PUEDEN APLICAR PARA “AMBOS LADOS” DE DERECHA A IZQUIERDA O VICEVERSA, COMO SE OBSERVA EN LOS EJEMPLOS

5. Raíz de una raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

Ejemplo

- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{10}} = \sqrt[3\cdot 5]{10} = \sqrt[15]{10}$

- $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{10}}} = \sqrt[3\cdot 3\cdot 3]{10} = \sqrt[27]{10}$

Cuando se tienen raíces de otras raíces, se deben multiplicar los índices para reducir a una sola raíz.

6. Introducción y Extracción de términos de una raíz

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo

- $3 \cdot \sqrt[7]{8} = \sqrt[7]{3^7} \cdot \sqrt[7]{8} = \sqrt[7]{3^7 \cdot 8}$

El número que está fuera de la raíz se introduce a esta con un exponente cuyo número es el mismo que el índice de la raíz.

- $\sqrt[7]{3^7 \cdot 8} = \sqrt[\cancel{7}]{3^{\cancel{7}}} \cdot \sqrt[7]{8} = 3 \cdot \sqrt[7]{8}$

Se descompone la raíz en factores conservando el mismo índice, luego si uno de los factores tiene el exponente cuyo número es igual al índice de la raíz, estos se eliminan.