



# MATEMÁTICAS BÁSICAS

## RADICALES

### OPERACIONES CON RADICALES

Un *radical* es cualquier raíz indicada de una expresión. La radicación es la operación inversa de la potenciación y se representa por el símbolo  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ , donde  $n$  es el índice del radical y dentro se ubica una expresión denominada *subradical*.

Para resolver una raíz, se busca una cantidad que elevada a un exponente igual al índice del radical sea igual al subradical.

El radical puede ser *racional* si la raíz indicada es exacta o *irracional* si no lo es.

Ejemplos.

- 1) El subradical de la expresión  $\sqrt{5x+3}$  es  $5x+3$
- 2)  $\sqrt{16x^2}$  es un radical racional porque su resultado,  $4x$ , es exacto.
- 3)  $\sqrt[3]{17x^4}$  es un radical irracional porque su resultado no es exacto.
- 5)  $\sqrt[4]{6c-4d}$  es un radical de cuarto grado

En los radicales de segundo grado se omite su índice, esto es:  $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$ .

Si  $a^n = b$ ,  $a$  es una raíz enésima de  $b$ .

Ejemplos

- 1) Si  $3^2 = 9$  entonces 3 es una raíz cuadrada de 9
- 2) Si  $5^4 = 625$  entonces 5 es una raíz cuarta de 625

Si  $n$  es par,  $a^n \geq 0$ , por lo que un número negativo no puede tener raíz enésima.

Ejemplos

- 1) Si  $\sqrt{-16}$  no tiene raíz cuadrada en  $\mathbf{R}$ .
- 2) Si  $\sqrt[6]{-64}$  no tiene raíz sexta en  $\mathbf{R}$ .

Si  $n$  es par y  $b = a^n$ , también  $b = (-a)^n$ , así que  $b$  tiene dos raíces enésimas,  $a$  y  $-a$ .

Ejemplos

- 1) Como  $5^2 = 25$  y  $(-5)^2 = 25$ , 5 y  $-5$  son raíces cuadradas de 25.
- 2) Como  $3^4 = 81$  y  $(-3)^4 = 81$ , 3 y  $-3$  son raíces cuartas de 25.

Si  $n$  es impar, todo número real tiene exactamente una raíz  $n$ -ésima.

Ejemplos

$$1) \sqrt[3]{216} = 6.$$

$$2) \sqrt[5]{-32} = -2$$

Si  $b \geq 0$ , hay una única raíz  $n$ -ésima no negativa de  $b$  representada por  $\sqrt[n]{b}$

Ejemplo.

Si  $49 = 7^2$ , entonces 7 es una raíz cuadrada de 49 y como  $49 = (-7)^2$ ,  $-7$  es otra raíz cuadrada de 49. Pero  $\sqrt{49}$  denota exclusivamente a la raíz no negativa de 49.

Si  $x \geq 0$ ,  $m, n \in \mathbf{N}$ , la ley de exponentes fraccionarios establece que:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Esto es, cualquier expresión elevada a un exponente fraccionario es igual a una raíz cuyo índice es el denominador y el subradical es la misma expresión elevada a la potencia que tiene el numerador.

En el caso particular, si  $m = n$ , se tiene que:  $x = \sqrt[n]{x^n}$

Los radicales cumplen con las siguientes propiedades:

- 1) El producto de dos radicales de un mismo índice es igual a la raíz del producto de los subradicales.  
Esto es:  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$  si  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .
- 2) El cociente de dos radicales de un mismo índice es igual a la raíz del cociente de los subradicales.  
Esto es:  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  si  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .
- 3) Un radical de índice  $n$  elevado a una potencia  $m$  equivale a una raíz de índice  $n$  y de subradical elevado a la potencia  $m$ . Esto es:  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$  si  $a > 0$ ,  $m, n \in \mathbf{N}$ .
- 4) La raíz de índice  $m$  de un radical de índice  $n$  es equivalente a una raíz de índice  $n$  de un radical de índice  $m$  y es igual a una raíz de índice  $m \cdot n$ . Esto es:  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$  si  $a > 0$ ,  $m, n \in \mathbf{N}$ .

Es importante notar que la suma algebraica de dos radicales de cualquier índice no es igual a la raíz de la suma algebraica de los subradicales. Es decir:  $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a \pm b}$

De acuerdo con la ley de exponentes fraccionarios y de las propiedades de los radicales, el objetivo de simplificar un radical es expresarlo en su forma más simple. Es decir, un radical está simplificado cuando:

- No se puede extraer ningún factor del radicando (es el menor posible).
- No puede reducirse su índice (es el menor posible).
- El radicando no es una fracción.
- No hay radicales en el denominador de una fracción.

## SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES A TRAVÉS DE LA EXTRACCIÓN DE FACTORES DEL SUBRADICAL

Un radical se puede simplificar cuando contiene factores cuyos exponentes son divisibles por el índice y se procede de la siguiente manera:

- La parte numérica del subradical se descompone en factores de tal forma que sean potencias con exponentes múltiplos del índice de la raíz, a fin de poder extraer del radical.
- La parte literal del subradical se descompone de tal manera que se exprese la mayor parte posible con exponentes múltiplos del índice de la raíz.

Ejemplos.

$$\begin{aligned}
 1) \sqrt{18a^5} &= \sqrt{9 \cdot 2 \cdot a^4 \cdot a} = \sqrt{3^2 \cdot 2 \cdot a^4 \cdot a} = 3a^2\sqrt{2a} \\
 2) \sqrt[4]{243k^7} &= \sqrt[4]{81 \cdot 3 \cdot k^4 \cdot k^3} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3 \cdot k^4 \cdot k^3} = 3k\sqrt[4]{3k^3} \\
 3) \sqrt[3]{500x^5y^7} &= \sqrt[3]{125 \cdot 4 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot y^6 \cdot y} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 4 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot y^6 \cdot y} = 5xy^2\sqrt[3]{4x^2y} \\
 4) \sqrt[5]{64v^8w^6z^9} &= \sqrt[5]{32 \cdot 2 \cdot v^5 \cdot v^3 \cdot w^5 \cdot w \cdot z^5 \cdot z^4} = 2vwz\sqrt[5]{2v^3wz^4} \\
 5) \sqrt{4a^4 - 8a^3b} &= \sqrt{4a^2(a^2 - 2ab)} = \sqrt{2^2 a^2 (a^2 - 2ab)} = 2a\sqrt{a^2 - 2ab} \\
 6) \sqrt{2am^2 + 4amn + 2an^2} &= \sqrt{2a(m^2 + 2mn + n^2)} = \sqrt{2a(m+n)^2} = \sqrt{2a}(m+n) \\
 7) \sqrt[3]{\frac{729a^4}{16b^5}} &= \sqrt[3]{\frac{729 \cdot a^3 \cdot a}{8 \cdot 2 \cdot b^3 \cdot b^2}} = \sqrt[3]{\frac{3^6 \cdot a^3 \cdot a}{2^3 \cdot 2 \cdot b^3 \cdot b^2}} = \frac{3^2 a}{2b} \sqrt[3]{\frac{a}{2b^2}} = \frac{9a}{2b} \sqrt[3]{\frac{a}{2b^2}} \\
 8) \sqrt{44a^3b^7c^9} &= \sqrt{4 \cdot 11 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^6 \cdot b \cdot c^8 \cdot c} = \sqrt{2^2 \cdot 11 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^6 \cdot b \cdot c^8 \cdot c} = 2ab^3c^4\sqrt{11abc}
 \end{aligned}$$

## INCLUSIÓN DE UN FACTOR EN UN SUBRADICAL

En este caso se eleva la expresión por introducir a la potencia que indique el índice del radical, se efectúa el producto de subradicales y el resultado se expresa con el mismo índice.

Ejemplos.

$$\begin{aligned}
 1) 4\sqrt{5} &= \sqrt{4^2} \sqrt{5} = \sqrt{16} \sqrt{5} = \sqrt{80} \\
 2) 2a\sqrt{3a} &= \sqrt{(2a)^2} \sqrt{3a} = \sqrt{4a^2} \sqrt{3a} = \sqrt{12a^3} \\
 3) 5\alpha\sqrt{\beta} &= \sqrt{(5\alpha)^2} \sqrt{\beta} = \sqrt{25\alpha^2} \sqrt{\beta} = \sqrt{25\alpha^2\beta} \\
 4) \frac{1}{3}\sqrt{18} &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \sqrt{18} = \sqrt{\frac{1}{9}} \sqrt{18} = \sqrt{2} \\
 5) (x+y)\sqrt{\frac{x}{x+y}} &= \sqrt{(x+y)^2} \sqrt{\frac{x}{x+y}} = \sqrt{\frac{(x+y)^2 x}{x+y}} = \sqrt{(x+y)x} = \sqrt{x^2 + xy} \\
 6) 4w\sqrt[3]{2w^2} &= \sqrt[3]{(4w)^3} \sqrt[3]{2w^2} = \sqrt[3]{64w^3} \sqrt[3]{2w^2} = \sqrt[3]{128w^5} \\
 7) 2a\sqrt[4]{6ab^3} &= \sqrt[4]{(2a)^4} \sqrt[4]{6ab^3} = \sqrt[4]{16a^4} \sqrt[4]{6ab^3} = \sqrt[4]{96a^5b^3} \\
 8) 3k^2m\sqrt[5]{\frac{k^3}{27m^4}} &= \sqrt[5]{(3k^2m)^5} \sqrt[5]{\frac{k^3}{27m^4}} = \sqrt[5]{243k^{10}m^5} \sqrt[5]{\frac{k^3}{27m^4}} = \sqrt[5]{9k^{13}m}
 \end{aligned}$$

## EXPRESAR UN RADICAL COMO UNO DE ÍNDICE MENOR

Otra forma de simplificación de un radical consiste en transformarlo a uno equivalente que posea un índice menor. Para ello, se expresa cada uno de los factores del subradical en su forma de exponente fraccionario, se simplifican las fracciones y se vuelve a transformar a radical.

Ejemplos.

$$1) \sqrt[4]{x^2} = x^{\frac{2}{4}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$2) \sqrt[8]{k^6} = (k^6)^{\frac{1}{8}} = k^{\frac{6}{8}} = k^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{k^3}$$

$$3) \sqrt[12]{216} = (6^3)^{\frac{1}{12}} = 6^{\frac{3}{12}} = 6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$$

$$4) \sqrt[6]{m^2 n^2} = (m^2 \cdot n^2)^{\frac{1}{6}} = m^{\frac{2}{6}} n^{\frac{2}{6}} = \sqrt[3]{mn}$$

$$5) \sqrt[10]{\frac{a^5}{32}} = \left(\frac{a^5}{2^5}\right)^{\frac{1}{10}} = \frac{a^{\frac{5}{10}}}{2^{\frac{5}{10}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a}{2}}$$

$$6) \sqrt[4]{25e^2 h^2} = (5^2 \cdot e^2 \cdot h^2)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{2}{4}} \cdot e^{\frac{2}{4}} \cdot h^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5eh}$$

$$7) \sqrt[9]{64\alpha^6 \beta^6} = (2^6 \cdot \alpha^6 \cdot \beta^6)^{\frac{1}{9}} = 2^{\frac{6}{9}} \alpha^{\frac{6}{9}} \beta^{\frac{6}{9}} = 2^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4\alpha^2 \beta^2}$$

$$8) \sqrt[8]{16x^2 y^4} = (2^4 \cdot x^2 \cdot y^4)^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{4}{8}} x^{\frac{2}{8}} y^{\frac{4}{8}} = 2^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{4xy^2}$$

## OPERACIONES CON RADICALES DEL MISMO ÍNDICE.

Radicales semejantes son aquellos que tienen igual radicando y el mismo índice, es decir, sólo difieren por el coeficiente.

Ejemplos.

$$1) 4\sqrt{x} \text{ y } 9\sqrt{x} \text{ son radicales semejantes}$$

$$2) -6\sqrt[3]{ab^2} \text{ y } \frac{5}{4}\sqrt[3]{ab^2} \text{ son radicales semejantes}$$

$$3) 8\sqrt{x} \text{ y } 7\sqrt[3]{x} \text{ no son radicales semejantes}$$

Para sumar o restar radicales se simplifican a su forma más elemental y se reducen los radicales semejantes.

Ejemplos.

$$1) \sqrt{80} + \sqrt{20} = \sqrt{16 \cdot 5} + \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 5} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$2) \sqrt{45} - \sqrt{27} - \sqrt{20} = \sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} - \sqrt{3^2 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5} \\ = \sqrt{5} - 3\sqrt{3}$$

$$3) \sqrt{175} + \sqrt{243} - \sqrt{63} - 2\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 7} + \sqrt{81 \cdot 3} - \sqrt{9 \cdot 7} - 2\sqrt{25 \cdot 3}$$

$$= \sqrt{5^2 \cdot 7} + \sqrt{9^2 \cdot 3} - \sqrt{3^2 \cdot 7} - 2\sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{7} + 9\sqrt{3} - 3\sqrt{7} - 2 \cdot 5\sqrt{3} = 5\sqrt{7} + 9\sqrt{3} - 3\sqrt{7} - 10\sqrt{3} \\ = 2\sqrt{7} - \sqrt{3}$$

$$4) \sqrt{75} + \sqrt{12} - \sqrt{147} = \sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{49 \cdot 3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{7^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 0$$

$$5) 7\sqrt{450} - 4\sqrt{320} + 3\sqrt{80} - 5\sqrt{800} = 7\sqrt{25 \cdot 9 \cdot 2} - 4\sqrt{16 \cdot 5 \cdot 4} + 3\sqrt{16 \cdot 5} - 5\sqrt{25 \cdot 16 \cdot 2} \\ = 7\sqrt{5^2 \cdot 3^2 \cdot 2} - 4\sqrt{4^2 \cdot 5 \cdot 2^2} + 3\sqrt{4^2 \cdot 5} - 5\sqrt{5^2 \cdot 4^2 \cdot 2} = 7 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{2} - 4 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{5} + 3 \cdot 4\sqrt{5} - 5 \cdot 5 \cdot 4\sqrt{2} \\ = 105\sqrt{2} - 32\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 100\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 20\sqrt{5}$$

$$6) \sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{72} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{4^2 \cdot 2} + \sqrt{5^2 \cdot 2} - \sqrt{6^2 \cdot 2} = 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ = 3\sqrt{2}$$

$$7) \sqrt{162} + \sqrt{50} - \sqrt{200} = \sqrt{81 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{9^2 \cdot 2} + \sqrt{5^2 \cdot 2} - \sqrt{10^2 \cdot 2} \\ = 9\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$8) 9\sqrt{48} - 5\sqrt{27} + 3\sqrt{12} = 9\sqrt{16 \cdot 3} - 5\sqrt{9 \cdot 3} + 3\sqrt{4 \cdot 3} = 9\sqrt{4^2 \cdot 3} - 5\sqrt{3^2 \cdot 2} + 3\sqrt{2^2 \cdot 3} \\ = 9 \cdot 4\sqrt{3} - 5 \cdot 3\sqrt{3} + 3 \cdot 2\sqrt{3} = 36\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$$

Para efectuar la multiplicación de radicales se multiplican respectivamente los coeficientes y los subradicales, ubicando este último producto bajo el signo de radical y se simplifica.

Ejemplos.

$$1) \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$$2) 5\sqrt{21} \cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{63} = 10\sqrt{3^2 \cdot 7} = 10 \cdot 3\sqrt{7} = 30\sqrt{7}$$

$$3) \frac{3}{4} \sqrt[3]{9a^2} \cdot 8\sqrt[3]{3ab} = \frac{24}{4} \sqrt[3]{27a^3b} = 6 \cdot 3a \sqrt[3]{b} = 18a \sqrt[3]{b}$$

$$4) 3\sqrt[3]{45} \cdot \frac{1}{6} \sqrt[3]{15} \cdot 4\sqrt[3]{20} = 2\sqrt[3]{13,500} = 2\sqrt[3]{5^3 \cdot 3^3 \cdot 4} = 2 \cdot 5 \cdot 3 \sqrt[3]{4} = 30\sqrt[3]{4}$$

Para dividir dos radicales, se dividen respectivamente los coeficientes y los subradicales, ubicando este último cociente bajo el signo de radical y se simplifica.

Ejemplos.

$$1) \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$2) \frac{2\sqrt{3a}}{10\sqrt{a}} = \frac{1}{5}\sqrt{3}$$

$$3) \frac{3\sqrt[3]{16k^5}}{4\sqrt[3]{2k^2}} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{8k^3} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{2^3 k^3} = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot k = \frac{6}{4}k = \frac{3}{2}k$$

$$4) \frac{\frac{1}{2} \sqrt{36xy^8}}{\frac{3}{4} \sqrt{4xy^5}} = \frac{4}{6} \sqrt{9y^3} = \frac{4}{6} \sqrt{3^2 y^2 \cdot y} = \frac{4}{6} \cdot 3y \sqrt{y} = 2y\sqrt{y}$$

## SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES DE ÍNDICE DIFERENTE

Los radicales no semejantes no se pueden reducir, por lo que la suma y la resta no son posibles.

Para multiplicar dos radicales de diferente índice:

- Se halla el MCM de los índices.
- El MCM se divide entre cada índice de la raíz y cada radicando se eleva a este resultado.
- Se resuelven los radicandos como potencia de otra potencia, es decir multiplicando los exponentes.
- Se multiplican los radicandos como potencias de la misma base, es decir sumando los exponentes.
- El radicando se descompone en factores procurando que sean potencias con exponentes múltiplos del índice de la raíz, a fin de poder extraer del radical aquella parte que lo permita.

Ejemplos.

$$1) \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{2x^2}$$

el índice común es 6, por lo tanto:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{2x^2} = \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{(2x^2)^2} = \sqrt[6]{x^3 \cdot 4x^4} = \sqrt[6]{4x^7} = \sqrt[6]{4x^6 \cdot x} = x \sqrt[6]{4x}$$

$$2) 3\sqrt{2ab} \cdot 4\sqrt[4]{8a^3}$$

el índice común es 8, por lo tanto:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2ab} \cdot 4\sqrt[4]{8a^3} &= 3\sqrt[8]{(2ab)^4} \cdot 4\sqrt[8]{(8a^3)^2} = 12\sqrt[8]{2^4 a^4 b^4 \cdot (2^3)^2 a^6} = 12\sqrt[8]{2^4 a^4 b^4 \cdot 2^6 a^6} \\ &= 12\sqrt[8]{2^{10} a^{10} b^4} = 12\sqrt[8]{2^8 2^2 a^8 a^2 b^4} = 12 \cdot 2a \sqrt[8]{2^2 a^2 b^4} = 24a \sqrt[4]{2ab^2} \end{aligned}$$

$$3) \sqrt[3]{a^2 b^2} \cdot 2\sqrt[4]{3a^3 b}$$

el índice común es 12, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^2 b^2} \cdot 2\sqrt[4]{3a^3 b} &= 2\sqrt[12]{(a^2 b^2)^4} \cdot 2\sqrt[12]{(3a^3 b)^3} = 2\sqrt[12]{a^8 b^8 \cdot 3^3 a^9 b^3} = 2\sqrt[12]{3^3 a^{17} b^{11}} = 2\sqrt[12]{3^3 a^{12} a^5 b^{11}} \\ &= 2a \sqrt[12]{27a^5 b^{11}} \end{aligned}$$

$$4) \frac{2}{3} \sqrt[3]{4m^2} \cdot \frac{3}{4} \sqrt[5]{16m^4 n}$$

el índice común es 15, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \sqrt[3]{4m^2} \cdot \frac{3}{4} \sqrt[5]{16m^4 n} &= \frac{6}{12} \sqrt[15]{(4m^2)^5} \cdot \sqrt[15]{(16m^4 n)^3} = \frac{1}{2} \sqrt[15]{4^5 m^{10} \cdot 16^3 m^{12} n^3} = \frac{1}{2} \sqrt[15]{(2^2)^5 m^{10} \cdot (2^4)^3 m^{12} n^3} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt[15]{2^{10} m^{10} \cdot 2^{12} m^{12} n^3} = \frac{1}{2} \sqrt[15]{2^{22} m^{22} n^3} = \frac{1}{2} \sqrt[15]{2^{15} 2^7 m^{15} m^7 n^3} = \frac{1}{2} \cdot 2m \sqrt[15]{2^7 m^7 n^3} = m \sqrt[15]{128m^7 n^3} \end{aligned}$$

Para dividir dos radicales de diferente índice:

- Se halla el MCM de los índices.
- El MCM se divide entre cada índice de la raíz y cada radicando se eleva a este resultado.
- Se resuelven los radicandos como potencia de otra potencia, es decir multiplicando los exponentes.
- Se dividen los radicandos como potencias de la misma base, es decir restando los exponentes.
- El radicando se descompone en factores procurando que sean potencias con exponentes múltiplos del índice de la raíz, a fin de poder extraer del radical aquella parte que lo permita.

Ejemplos.

$$1) \frac{\sqrt{3x^2}}{\sqrt[3]{3x}}$$

el índice común es 6, por lo tanto:

$$\frac{\sqrt{3x^2}}{\sqrt[3]{3x}} = \frac{\sqrt[6]{(3x^2)^3}}{\sqrt[6]{(3x)^2}} = \sqrt[6]{\frac{27x^6}{9x^2}} = \sqrt[6]{3x^4}$$

$$2) \frac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[4]{4a^2}}$$

el índice común es 12, por lo tanto:

$$\frac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[4]{4a^2}} = \frac{\sqrt[12]{(8a^3b)^4}}{\sqrt[12]{(4a^2)^3}} = \sqrt[12]{\frac{8^4 a^{12} b^4}{4^3 a^6}} = \sqrt[12]{\frac{4,096 a^{12} b^4}{64 a^6}} = \sqrt[12]{64 a^6 b^4} = \sqrt[12]{8^2 a^6 b^4} = \sqrt[6]{8 a^3 b^2}$$

$$3) \frac{\sqrt[3]{5m^4n^3}}{\sqrt[5]{mn^2}}$$

el índice común es 15, por lo tanto:

$$\frac{\sqrt[3]{5m^4n^3}}{\sqrt[5]{mn^2}} = \frac{\sqrt[15]{(5m^4n^3)^5}}{\sqrt[15]{(mn^2)^3}} = \sqrt[15]{\frac{3,125 m^{20} n^{15}}{m^3 n^6}} = \sqrt[15]{3,125 m^{17} n^9} = \sqrt[15]{3,125 m^{15} m^2 n^9} = m \sqrt[15]{3,125 m^2 n^9}$$

$$4) \frac{\sqrt[6]{18x^3y^4z^5}}{\sqrt[4]{3x^2y^2z^3}}$$

el índice común es 12, por lo tanto:

$$\frac{\sqrt[6]{18x^3y^4z^5}}{\sqrt[4]{3x^2y^2z^3}} = \frac{\sqrt[12]{(18x^3y^4z^5)^2}}{\sqrt[12]{(3x^2y^2z^3)^3}} = \sqrt[12]{\frac{324x^6y^8z^{10}}{27x^6y^6z^9}} = \sqrt[12]{12y^2z}$$

para extraer la raíz de un radical, se multiplican los índices y se simplifica.

Ejemplos.

$$1) \sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$$

$$2) \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

$$3) \sqrt{\sqrt[4]{25a^2}} = \sqrt[8]{25a^2} = \sqrt[8]{(5a)^2} = \sqrt[4]{5a}$$

$$4) \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}} = \sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[15]{(x^2)^5} = \sqrt[3]{x^2}$$

## RACIONALIZACIÓN DE RADICALES

Racionalizar consiste en eliminar los radicales del denominador de una fracción. Para lograr esto, se multiplican las dos componentes del cociente por una expresión que contenga el radical por eliminar y que cumpla que al multiplicarse, el denominador resulte una expresión racional.

Ejemplos.

Racionalizar las siguientes fracciones:

$$1) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

multiplicando el numerador y el denominador por  $\sqrt{3}$  :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$2) \frac{3}{4\sqrt{5}}$$

multiplicando el numerador y el denominador por  $\sqrt{5}$  :

$$\frac{3}{4\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{4(5)} = \frac{3\sqrt{5}}{20}$$

$$3) \frac{3}{\sqrt[4]{9a}}$$

multiplicando el numerador y el denominador por  $\sqrt[4]{(9a)^3}$  :

$$\frac{3}{\sqrt[4]{9a}} \cdot \frac{\sqrt[4]{(9a)^3}}{\sqrt[4]{(9a)^3}} = \frac{3\sqrt[4]{(9a)^3}}{9a} = \frac{3\sqrt[4]{729a^3}}{9a} = \frac{\sqrt[4]{729a^3}}{3a}$$

$$4) \frac{6}{5\sqrt[3]{3x}}$$

multiplicando el numerador y el denominador por  $\sqrt[3]{(3x)^2}$  :

$$\frac{6}{5\sqrt[3]{3x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(3x)^2}}{\sqrt[3]{(3x)^2}} = \frac{6\sqrt[3]{(3x)^2}}{5(3x)} = \frac{6\sqrt[3]{9x^2}}{15x} = \frac{2\sqrt[3]{9x^2}}{5x}$$

Ejemplo.

Efectuar la operación  $\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{4}}$  y racionalizar el resultado.

Solución.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{4}} &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{5}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Cuando se quiere racionalizar una fracción cuyo denominador sea un binomio que posea radicales de segundo grado, se multiplican las dos componentes del cociente por el binomio conjugado del denominador y se simplifica.

Ejemplos.

Racionalizar las siguientes fracciones:



$$1) \frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

multiplicando el numerador y el denominador por  $1-\sqrt{2}$ , que es el binomio conjugado del denominador:

$$\frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{3-3\sqrt{2}-\sqrt{2}+2}{1-2} = \frac{5-4\sqrt{2}}{-1} = 4\sqrt{2}-5$$

$$2) \frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$$

multiplicando el numerador y el denominador por  $4+\sqrt{3}$ , que es el binomio conjugado del denominador:

$$\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} \cdot \frac{4+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = \frac{20+5\sqrt{3}+8\sqrt{3}+6}{16-3} = \frac{26+13\sqrt{3}}{13} = 2+\sqrt{3}$$

$$3) \frac{19}{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}}$$

multiplicando el numerador y el denominador por  $5\sqrt{2}+4\sqrt{3}$ , que es el binomio conjugado del denominador:

$$\frac{19}{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}} \cdot \frac{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}} = \frac{95\sqrt{2}+76\sqrt{3}}{25 \cdot 2 - 16 \cdot 3} = \frac{95\sqrt{2}+76\sqrt{3}}{50-48} = \frac{95\sqrt{2}+76\sqrt{3}}{2}$$

$$4) \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{7}}$$

multiplicando el numerador y el denominador por  $2\sqrt{3}-3\sqrt{7}$ , que es el binomio conjugado del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{7}} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{7}} &= \frac{8 \cdot 3 - 12\sqrt{21} - 6\sqrt{21} + 9 \cdot 7}{4 \cdot 3 - 9 \cdot 7} = \frac{24 - 18\sqrt{21} + 63}{12 - 63} = \frac{87 - 18\sqrt{21}}{-51} \\ &= \frac{18\sqrt{21} - 87}{51} = \frac{6\sqrt{21} - 29}{17} \end{aligned}$$