GUÍA N° 8: LOGARITMOS

Unidad Programática:	N° 1		
Objetivo priorizado N°:	OA 2	Guía N°	8
Semana N°		Fecha :	29 - 10 al 06 - 11
Nombre:		Curso:	

Querida/o estudiante, a través de esta guía aprenderás conceptos y propiedades de los logaritmos, que te permitirán relacionar potencias, raíces y logaritmos.

Objetivo: Establecer relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos.

Habilidad:
Argumentar y comunicar.

- Describir relaciones y situaciones matemáticas, usando **lenguaje matemático,** esquemas y gráficos.
- Explicar soluciones propias y los procedimientos utilizados.

Objetivo: Adquirir concepto de logaritmos.

En la expresión $a^n = b$ **la incógnita podría tener 3 posiciones diferentes.**

$$a^n = b \begin{cases} a^n = x & \textbf{se busca el resultado de la potencia.} \\ x^n = b & \textbf{se busca el valor de la base de la potencia.} \\ a^x = b & \textbf{se busca el valor del exponente.} \end{cases}$$

Def. logaritmos:

Sean $a, x \in IR^+$, $a \neq 1$. Diremos que y es el **logaritmo en base a de x** ssi $x = a^y$
es decir:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Ejemplo:

1) $y = \log_4 16 \Leftrightarrow 4^y = 16 \Rightarrow y = 2$

2) $y = \log_2 32 \Leftrightarrow 2^y = 32 \Rightarrow y = 5$

3) $y = \log_6 36 \Leftrightarrow 6^y = 36 \Rightarrow y = 2$

4) $y = \log_3 27 \iff \mathbf{3^y = 27 \Rightarrow y = 3}$

5) $y = log_{\left(\frac{2}{3}\right)} \frac{4}{9} \iff \left(\frac{2}{3}\right)^y = \frac{4}{9} \Rightarrow y = 2$

6) $y = \log_{64} 8 \iff 64^y = 8 \Longrightarrow y = \frac{1}{2}$

7) $y = log_{\left(\frac{1}{5}\right)} 25 \iff \left(\frac{1}{5}\right)^y = \mathbf{25} \Rightarrow y = -2$

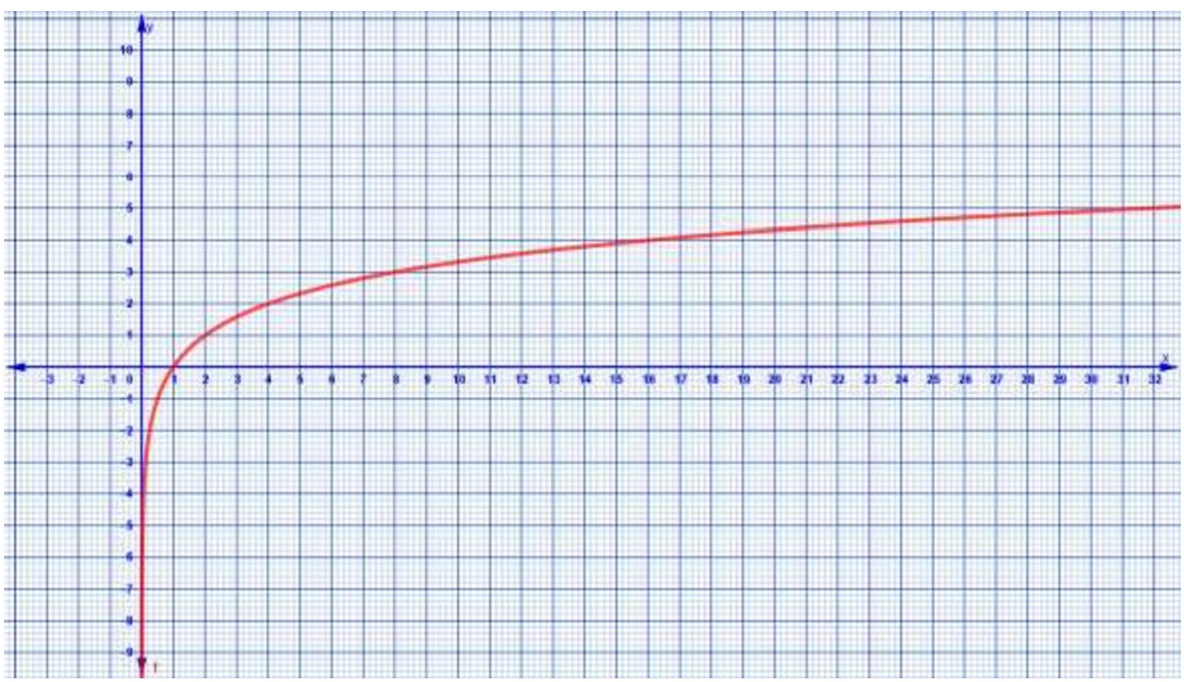
Tarea

8) $y = log_{\left(\frac{3}{4}\right)} \frac{27}{64}$

9) $y = log_{\left(\frac{2}{7}\right)} \frac{49}{4}$

10) $y = \log_{81} 3$

Gráfica de la función logarítmica $\mathbf{y = \log_2 x}$



Observación:

i) $\mathbf{y = \log_a x}$ es una función real cuyo dominio es $\mathbb{R}^+$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.

ii) Cada valor real positivo distinto de 1 que toma la base **a** da origen a un **sistema completo de logaritmos.**

iii) Si la **base es 10** no se escribe el sistema completo de logaritmos de base 10 se llama **logaritmos comunes, decimales o logaritmos de Briggs**.

iv) Si la base es **e = 2,7128……..**, entonces el sistema se denomina **logaritmos naturales o neperianos** se denota por **y = ln x**

v) En los logaritmos la incógnita puede estar en **la base del logaritmo, en el argumento o en el exponente**.

Ejemplo:

1) $\log_a 125 = 3 \iff a^3 = 125 \implies a = 5$

2) $\log_2 x = 5 \iff 2^5 = x \implies x = 32$

3) $\log_4 64 = y \iff 4^y = 64 \implies y = 3$

Ahora resuelves tú

4) $\log x = 3$

5) $log_{\left(\frac{1}{2}\right)} 16 = y$

6) $log_a \frac{125}{27} = -3$

Objetivo: Determinar el valor de la base del logaritmo, del argumento o del exponente, aplicando la definición de logaritmos.

Ejercicios de tarea

Determina el valor de la incógnita en las siguientes expresiones, aplicando la definición de logaritmos:

1) $\log_3 81 = x$

2) $\log_x 49 = 2$

3) $\log_5 x = 4$

4) $\log_{12}\left(\frac{1}{144}\right) = x$

5) $\log_4 x = -4$

6) $\log_x 27 = -3$

7) $log_x \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$

8) $log_9 x = -\frac{1}{2}$

9) $log_{\left(\frac{1}{216}\right)} 6 = x$

10) $\log_9 x = \frac{1}{2}$

11) $\log_8 x = 0$

12) $\log x = -5$

Objetivo: Adquirir las propiedades de los logaritmos, para aplicarlas en la resolución de **expresiones logarítmicas**.

Habilidad: Identificar y aplicar propiedades de los logaritmos.

Propiedades de los logaritmos

i) **Logaritmo de la base**: El logaritmo de la base es uno, es decir:

$\log_a a = 1$ **dem:** $a^1 = a$ (por definición de logaritmos)

Ejm. $\log_3 3 = 1$ **porque** $3^1 = 3$

ii) **Logaritmo de la unidad**: El logaritmo de uno es cero, es decir:

$\log_a 1 = 0$ **dem:** $a^0 = 1$ (por definición de logaritmos)

Ejm. $\log_7 1 = 0$ **porque** $7^0 = 1$

iii) **Logaritmo de un producto**: El logaritmo de un **producto** es igual a la suma de los logaritmo, es decir:

$\log_a m\,n = \log_a m + \log_a n$

Ejm. $\log_5 3pq = \log_5 3 + \log_5 p + \log_5 q$

iv) **Logaritmo de un cociente**: El logaritmo de un **cociente** es igual a la diferencia de los logaritmo, es decir:

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

Ejm.1) $\log \left(\frac{7}{12}\right) = \log_7 - \log 12$

2) $\log_2 \left(\frac{1}{32}\right) = \log_2 1 - \log_2 32$

$= 0 - 5$

$= -5$

v) **Logaritmo de una potencia**: El logaritmo de una **potencia** es igual al producto del exponente por el logaritmo, es decir:

$$\log_a m^n = n \log_a m$$

Ejm.1) $\log_3 4^2 = 2 \log_3 4$

2) $\log 100x^2y^3 = \log 100 + 2\log x + 3 \log y$

$= 2 + 2 \log x + 3 \log y$

vi) **Logaritmo de una raíz**: El logaritmo de una **raíz** es igual al producto del exponente fraccionario por el logaritmo, es decir:

$$\log_a \sqrt[n]{b^m} = \frac{m}{n} \log_a b$$

Ejm. 1) $\log_2 \sqrt[3]{8^2} = \frac{2}{3} \log_2 8$

$= \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}$

$= 2$

2) $\log \sqrt[4]{100x^4y^5} = \frac{1}{4} \log 100 + \frac{4}{4} \log x + \frac{5}{4} \log y$

$= \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{2} + \log x + \frac{5}{4} \log y$

$= \frac{1}{2} + \log x + \frac{5}{4} \log y$

3) $\log_5 \left(\frac{\sqrt{125}\, x^3}{25\, y^4} \right) = \frac{3}{2} \log_5 5 + 3\log_5 x - 2\log_5 5 - 4 \log_5 y$

$= \frac{3}{2} \cdot 1 + 3\log_5 x - 2 \cdot 1 - 4 \log_5 y$

$= \frac{3}{2} - 2 + 3\log_5 x - 4 \log_5 y$

$= -\frac{1}{2} + 3\log_5 x - 4 \log_5 y$

vii) Teorema del cambio de base.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Obs: Este teorema nos permite llevar al logaritmo a una base que se pueda calcular

Ejm. 1) $\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5}$ Como puedes observar la base 5 la cambiamos a base 10 para poder realizar el cálculo en la calculadora que sólo nos permite calcular en base **10** o **e. (log y ln)**

$$\frac{\log 3}{\log 5} = \frac{0{,}477121254}{0{,}698970004}$$

$$\frac{\log 3}{\log 5} = 0{,}682606194 \approx 0{,}683$$

Obs: Cuando resuelvas ejercicios de este tipo debes usar calculadora científica.

Ejercicios:

I. Desarrolla las siguientes expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:

1) $\log (2ab) =$

2) $\log \frac{3a}{4} =$

3) $\log \frac{2a^2}{3} =$

4) $\log a^5 b^4 =$

5) $\log \sqrt{ab} =$

6) $\log \frac{\sqrt{x}}{2y} =$

7) $\log 2a\sqrt{b} =$

8) $\log \dfrac{3a\sqrt[3]{b}}{c} =$

9) $\log \dfrac{5a^2 b\sqrt[4]{c}}{2xy} =$

10) $\log(abc)^3 =$

11) $\log(\dfrac{a\sqrt{c}}{2})^4 =$

12) $\log 7ab\sqrt[3]{5c^2} =$

13) $\log \sqrt{\dfrac{2ab}{x^2 y}} =$

14) $\log(a^2 - b^2) =$

15) $\log \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[5]{b^3}} =$

16) $\log \dfrac{m-n}{2} =$

17) $\log \sqrt{\dfrac{a(b-c)}{d^2 m}} =$

18) $\log \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{5c}} =$

II. Reduce a un solo logaritmo las siguientes expresiones:

1) log a + log b =

2) log x – log y =

3) $\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y =$

4) log a – log x – log y =

5) log p + log q – log r – log s =

6) log 2 + log 3 + log 4 =

7) $\frac{1}{3}\log a - \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{2}\log c =$

8) $\frac{3}{2}\log a + \frac{5}{2}\log b =$

9) $\log a + \frac{1}{2}\log b - 2\log c =$

10) log (a + b) + log (a – b) =

11) $\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{3}\log y + \frac{1}{4}\log z \; =$

12) log(a – b) – log 3 =

13) $\log a - 4\log b + \frac{1}{5}(\log c - 2\log d) =$

14) $\frac{p}{n}\log a + \frac{q}{n}\log b =$

III. Si log 2 = 0,3; log 3 = 0,47; log 5 = 0,69 y log 7 = 0,84. Calcula:

Ejm. log 4 - log 2 + log 2 = 0,3 + 0,3 = 0,6

1) log 6 =

2) log 27 =

3) log 14 =

4) $\log\sqrt{2} \; =$

5) $\log\sqrt[3]{15} =$

6) $\log\frac{2}{3} \; =$

7) log 3,5 =

8) $3\log\frac{2}{5} - 4\log\frac{1}{7} \; =$

9) $\log 18 - \log 16 =$

IV.- Determina el valor de las siguientes expresiones aplicando teorema de cambio de base cuando sea necesario y utilizando calculadora científica:

Ejm. $\log_7 4 = \dfrac{\boldsymbol{log\ 4}}{\boldsymbol{log\ 7}} \approx \mathbf{0{,}712}$

1) $\log_4 5 =$

2) $\log_9 2 - \log_3 6 =$

3) $\log_2 10 - \log_5 8 + \log_6 36 =$

4) $3\log_2 16 - \log_6 12 + \log 20 =$

5) $4\log_3 81 + \log_8 16 - 2\log_{11} 9 =$