Curs 4
Metode numerice directe pentru rezolvarea sistemelor liniare:
Metoda lui Gauss, Metoda factorizării LU

Octavia-Maria BOLOJAN

octavia.nica@math.ubbcluj.ro

25 Octombrie 2017

1. Metoda lui Gauss

- Considerăm sistemul liniar de "m" ecuații cu "n" necunoscute de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Matricea sistemului:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matricea extinsă

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

- În notație matriceală, un sistem se scrie sub forma

$$Ax = b,$$

unde A este matricea sistemului,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix},$$

unde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$.

- Soluția: $x = A^{-1}b$

- În majoritatea problemelor practice inversarea este nerecomandabilă

Exemplu: pentru $m = n = 1$:

$$7x_1 = 21,\ \text{cu soluția}\ x_1 = \frac{21}{7} = 3. \quad \text{(o operație: /)}$$

Rezolvat prin inversare:

$$x_1 = 7^{-1} \cdot 21 = 0.1429 \cdot 21 = 3.0009 \quad \text{(două operații: /,*)}$$

- Considerații similare se aplică și la sisteme cu mai multe ecuații

Metoda lui Gauss:

- constă în transformarea echivalentă a sistemului prin prelucrări elementare, în sisteme în care necunoscuta x_1 apare numai în prima ecuație, iar în celelalte ecuații se elimină
- pentru sistemul rezultant, prima ecuație rămâne neschimbată, iar în celelalte "$m-1$" ecuații se aplică procedeul de mai sus pentru necunoscuta x_2, astfel încât aceasta să fie păstrată în a 2-a ecuație, iar din celelalte "$m-2$" ecuații să se elimine
- se repetă acest procedeu până când într-o ecuație a sistemului va rămâne o singură necunoscută
- valoarea acesteia din urmă se înlocuiește în celelalte ecuații (de jos în sus) și se determină și celelalte necunoscute

- Prin metoda lui Gauss eliminăm succesiv necunoscutele

Observație. Un sistem liniar de "n" ecuații cu "n" necunoscute are **formă triunghiulară**, dacă în a k-a ecuație, coeficienții primelor "$k-1$" necunoscute sunt 0, iar coeficientul lui x_k este diferit de 0, $\forall k = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_1 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ ... \\ a_{kk}x_k + ... + a_{kn}x_n = b_k \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Echivalent, matricea extinsă are forma triunghiulară:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} & b_3 \\ & & ... & & & ... \\ 0 & 0 & a_{kk} & ... & a_{kn} & b_k \\ & & ... & & & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

Observație. Orice sistem liniar se poate aduce, prin transformări elementare, la forma triunghiulară.

Transformările elementare care se fac asupra ecuațiilor sistemului, generând sisteme echivalente sunt:

1. Schimbarea ordinii ecuațiilor în sistem
2. Înmulțirea oricărei ecuații a sistemului cu factori nenuli
3. Adunarea unei ecuații înmulțite cu un parametru nenul la o altă ecuație

Notații:

- Interschimbarea ecuațiilor E_i și E_j se notează: $E_i \leftrightarrow E_j$
- Înmulțirea unei ecuații E_i cu $\alpha \neq 0$ se notează: αE_i
- Adunarea la ecuația E_i a ecuației E_j înmulțită cu $\alpha \neq 0 : E_i + \alpha E_j$

- În urma transformărilor elementare, se obțin sisteme echivalente cărora le corespund matrice extinse echivalente
- Transformările elementare care se fac asupra ecuațiilor unui sistem se transferă asupra liniilor matricei extinse
- Repetarea acestor operații asupra matricei extinse va furniza soluția sistemului

Exemplu numeric 1

Să se rezolve următorul sistem liniar, folosind metoda eliminării lui Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}.$$

Matricea extinsă este

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right].$$

- Pas 1. Se alege un element nenul dintre elementele nenule ale primei coloane. Acest element se numește **element pivot** sau **pivotul.** Linia care-l conține se numește **linie pivot.**
- Linia pivot se înmulțește cu diferite numere și se adună la fiecare din celelalte "$m-1$" linii rămase, astfel încât să se obțină 0 pe coloană în pozițiile $a_{21}, \dots, a_{m1}$

În cazul de față, pe coloana 1, alegem ca pivot pe $a_{11} = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[]{\substack{E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 3E_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & -5 & -6 & -17 \end{array}\right]$$

- Pas 2. La acest pas se alege un pivot dintre elementele coloanei 2 și oricare dintre liniile 2 până la m
- Linia care-l conține se interschimbă (dacă este cazul) cu linia a 2-a a matricei și devine astfel noua linie pivot
- Similar cu Pas 1 linia pivot se înmulțește cu diferite constante și se adună la fiecare dintre cele "$m-2$" linii rămase astfel încât să se obțină 0 pe coloană în pozițiile $a_{32}, ..., a_{m2}$

——————————————————————

!!! În cazul nostru, linia și coloana 1 obținute la pasul precedent rămân neschimbate

Astfel, avem în continuare următoarea prelucrare:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{-5} & -1 & -7 \\ 0 & -5 & -6 & -17 \end{array}\right] \xleftrightarrow{E_3 - E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right].$$

Am obținut forma triunghiulară a sistemului:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ \quad -5x_2 - x_3 = -7 \\ \qquad\quad -5x_3 = -10 \end{cases}.$$

Din ultima ecuație, avem $x_3 = 2$, valoare pe care o înlocuim în a 2-a ecuație și obținem $x_2 = 1$. Înlocuind valorile lui x_2 și x_3 în prima ecuație, găsim $x_1 = 1$. Soluția sistemului este:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Observație. Un sistem liniar de "m" ecuații cu "n" necunoscute are **formă trapezoidală (**sau **formă cvasitriunghiulară)**, dacă are forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_1 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{rs}x_s + ... + a_{rn}x_n = b_r \\ 0 = b_{r+1} \\ ... \\ 0 = b_m. \end{cases}$$

Echivalent, matricea extinsă are formă trapezoidală:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} & b_2 \\ & & ... & & & ... \\ & & a_{rs} & ... & a_{rn} & b_k \\ & & & & 0 & b_{r+1} \\ & & & & ... & ... \\ & & & ... & 0 & b_m \end{array}\right],$$

unde $a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{rs} \neq 0$.

Exemplu numeric 2

Fie sistemul

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Matricea extinsă a sistemului este

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Sistemul este liniar omogen având cel puțin soluția banală $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

$\rightarrow$ Căutăm să determinăm și alte soluții pe lângă soluția banală.

Aducem matricea extinsă la forma trapezoidală, folosind metoda lui Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[E_3+2E_1]{E_2+3E_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{E_3-\frac{1}{4}E_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Astfel,

$$\left\{\begin{array}{r} -x_1+x_2-x_3+3x_4=0 \\ 4x_2-4x_3+8x_4=0 \\ -3x_3+3x_4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1-x_2+x_3-3x_4=0 \\ x_2-x_3+2x_4=0 \\ x_3-x_4=0 \end{array}\right.$$

Fie $x_4=\alpha, \alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow x_3=\alpha, x_2=-\alpha, x_1=\alpha$. Sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu soluția

$$x=\begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha\in\mathbb{R}.$$

!!!Observație. Sistemul precedent putea fi adus la aceeași formă trapezoidală, dar folosind mai multe prelucrări succesive, astfel:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[E_3+2E_1]{E_2+3E_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{\frac{1}{4}E_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[E_3-E_2]{(-1)E_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{-\frac{1}{3}E_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \quad \ldots \\ \qquad\qquad x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Exemplu numeric 3

Fie sistemul

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Sistemul poate fi scris sub formă matriceală astfel:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Matricea extinsă este:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

Aducem matricea la forma triunghiulară, folosind următoarele prelucrări

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{10} & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right] \xleftrightarrow[]{\substack{E_2 + 0.3E_1 \\ E_3 - 0.5E_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.1 & 6 & 6.1 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array}\right]$$

- Am eliminat astfel necunoscuta x_1 din a doua și a treia ecuație (Pasul 1)
- Coeficientul 10 a lui x_1 se numește **pivot**, iar cantitățile -0.3 și 0.5 obținute prin împărțirea coeficienților lui x_1 din celelalte ecuații la elementul pivot se numesc **multiplicatori**
- Interschimbăm ecuațiile 2 și 3, operație numită **pivotare,** după care eliminăm coeficientul lui x_2 din a treia ecuație

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & \boxed{2.5} & 5 & 2.5 \\ 0 & -0.1 & 6 & 6.1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{E_3 + 0.04E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 6.2 & 6.2 \end{array}\right]$$

- Obs. Pivotarea nu era obligatorie în acest caz.
- Cât ar fi multiplicatorul fără interschimbare?

Astfel, obținem sistemul

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.2 \end{bmatrix}$$

sau, echivalent:

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ 2.5x_2 + 5x_3 = 2.5 \\ 6.2x_3 = 6.2 \end{cases}$$

Din ultima ecuație obținem $x_3 = 1$. Înlocuind această valoare în ultima ecuație, avem

$$2.5x_2 + 5 \cdot 1 = 2.5 \Leftrightarrow x_2 = -1.$$

Înlocuind mai departe valorile găsite pentru x_2, x_3 în prima ecuație, avem $x_1 = 0$. Soluția sistemului este

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Verificare

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Algoritmul poate fi exprimat mai compact în formă matriceală

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.3 & -0.04 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricea L este matricea multiplicatorilor, U este matricea finală obțінută ca urmare a EG (eliminării gaussiene), P descrie pivotarea
Astfel, avem:

$$LU = PA$$

Matricea originală poate fi exprimată ca produs de matrice cu o structură mai simplă

- Algoritmul folosit aproape universal pentru rezolvarea sistemelor liniare este eliminarea gaussiană (EG)
- Cercetările din perioada 1955-1965 au evidențiat aspecte ale EG netratate până atunci: alegerea pivoților și interpretarea corectă a efectului erorilor de rotunjire

EG are două stadii:
$\longrightarrow$ transformarea sistemului inițial într-unul echivalent, triunghiular (triunghiularizarea matricei inițiale)
$\longrightarrow$ rezolvarea sistemului triunghiular prin substituție inversă (substituția inversă)

Matrice de permutare și triunghiulare

O matrice de permutare se obține din matricea unitate prin permutări de linii sau coloane. O astfel de matrice are exact un element de 1 pe fiecare linie și coloană și în rest 0.

Exemplu:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Efect: PA permutare de linii, AP permutare de coloane

MATLAB utilizează și vectori de permutare ca indici de linie sau de coloană; fie $p = [4\ 1\ 3\ 2]$, $P * A$ și $A(p,:)$ sunt echivalente, la fel $A * P$ și $A(:,p)$. Notația vectorială este mai rapidă și utilizează mai puțină memorie

- Soluția sistemului $Px = b$, unde P este matrice de permutare, este $x = P^T b$, adică o rearanjare a componentelor lui b
- O **matrice triunghiulară superior** are toate elementele nenule deasupra diagonalei principale sau pe ea, adică $a_{ij} = 0$ dacă $i > j$
- Analog se definesc și matricele triunghiulare inferior
- La rezolvarea sistemelor liniare sunt importante și matricele triunghiulare inferior care au toate elementele de pe diagonala principală egale cu 1 (unit lower triangular matrices)

2. Factorizare LU (**L**ower-**U**pper)

Theorem

Dacă eliminarea gaussiană pt sistemul $Ax = b$ se poate realiza fără interschimbări de linii, atunci A se poate factoriza în $A = LU$, unde L este triunghiulară inferior, iar U este triunghiulară superior. Perechea (L, U) se numește **descompunerea** *LU* **a matricei** *A.*

Avantaje:

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow Ly = b \wedge Ux = y.$$

- U este matricea triunghiulară superior obținută în urma eliminării gaussiene

2. Factorizare LU (**L**ower-**U**pper)

Theorem

Dacă eliminarea gaussiană pt sistemul $Ax = b$ se poate realiza fără interschimbări de linii, atunci A se poate factoriza în $A = LU$, unde L este triunghiulară inferior, iar U este triunghiulară superior. Perechea (L, U) se numește **descompunerea** *LU* **a matricei** *A.*

Avantaje:

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow Ly = b \wedge Ux = y.$$

- U este matricea triunghiulară superior obținută în urma eliminării gaussiene
- L este matricea multiplicatorilor

2. Factorizare LU (**L**ower-**U**pper)

Theorem

Dacă eliminarea gaussiană pt sistemul $Ax = b$ se poate realiza fără interschimbări de linii, atunci A se poate factoriza în $A = LU$, unde L este triunghiulară inferior, iar U este triunghiulară superior. Perechea (L, U) se numește **descompunerea** LU **a matricei** A.

Avantaje:

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow Ly = b \wedge Ux = y.$$

- U este matricea triunghiulară superior obținută în urma eliminării gaussiene
- L este matricea multiplicatorilor
- dacă eliminarea gaussiană se face cu interschimbări, avem de asemenea $A = LU$, dar L nu este triunghiulară inferior

2. Factorizare LU (**L**ower-**U**pper)

Theorem

Dacă eliminarea gaussiană pt sistemul $Ax = b$ se poate realiza fără interschimbări de linii, atunci A se poate factoriza în $A = LU$, unde L este triunghiulară inferior, iar U este triunghiulară superior. Perechea (L, U) se numește **descompunerea** *LU* **a matricei** *A.*

Avantaje:

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow Ly = b \wedge Ux = y.$$

- U este matricea triunghiulară superior obținută în urma eliminării gaussiene
- L este matricea multiplicatorilor
- dacă eliminarea gaussiană se face cu interschimbări, avem de asemenea $A = LU$, dar L nu este triunghiulară inferior
- Metoda obținută se numește **factorizare** LU

Exemplu

Să se factorizeze LU matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 14 & 25 \end{bmatrix}$$

și să se rezolve sistemul $Ax = b$ pentru $b = \begin{bmatrix} 14 \\ 51 \\ 106 \end{bmatrix}$.

$\longrightarrow$ **Soluție**: Folosind formulele precedente sau EG pentru calculul matricelor L și U, avem:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Considerăm $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow L\left(Ux\right) = b \Leftrightarrow Ux = y \wedge Ly = b.$

Rezolvăm mai întâi sistemul $Ly = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 51 \\ 106 \end{bmatrix}$$

și obținem soluția

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 23 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Trecem apoi la rezolvarea sistemului $Ux = y$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 23 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ soluția sistemului este:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Factorizare LU - alternativă de calcul

Fie $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq m}$ a.î. $\Delta_k = \det(A) \neq 0, k = \overline{1, m}$
$\Rightarrow A$ se descompune unic sub forma $A = LU$, cu $L = \left(l_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq m}$ - inferior triunghiulară, $U = \left(u_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq m}$ - superior triunghiulară, cu elementele diagonale egale cu 1

- Calculul elementelor matricelor L și U se face după formulele

$$\begin{aligned} l_{i1} &= a_{i1}, \quad i = \overline{1, m} \\ u_{11} &= 1 \\ u_{1j} &= \frac{a_{1j}}{l_{11}}, \quad j = \overline{2, m} \end{aligned}$$

- Pentru $k = \overline{2, m}$:

$$\begin{aligned} l_{ik} &= a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} \cdot u_{pk}, \quad i = \overline{k, m} \\ u_{kk} &= 1 \\ u_{kj} &= \frac{a_{kj} - \sum\limits_{p=1}^{k-1} l_{kp} \cdot u_{pj}}{l_{kk}}, \quad i = \overline{k+1, m} \end{aligned}$$

Fie un sistem de ecuații liniare $Ax = b$, pentru care A admite factorizare LU. Atunci soluția y a sistemului $Ly = b$ se determină astfel:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k}{l_{ii}}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Solutia x a sistemului initial se determină cu ajutorul formulei

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{m} u_{ik} \cdot x_k, \quad i = \overline{1, m}.$$

Exemplu.

Să se factorizeze sub forma LU matricea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculăm $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \neq 0$
Obținem coloana I din L, respectiv din U :

$$\begin{aligned} l_{11} &= a_{11} = 2, \quad l_{21} = a_{21} = -1, \ldots \\ u_{11} &= 1 \\ u_{12} &= \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{4}{2} = 2, \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{-2}{2} = -1, \ldots \end{aligned}$$

Determinăm coloana II din L, respectiv din U :

$$
\begin{aligned}
l_{22} &= a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = 1,\ \ l_{32} = a_{32} - l_{31} \cdot u_{12} = -3,\ \ l_{42} = a_{42} - l_{41} \cdot u_{12} = 1 \\
u_{22} &= 1 \\
u_{23} &= \frac{a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}}{l_{22}} = 1, \quad u_{24} = \frac{a_{24} - l_{21} \cdot u_{14}}{l_{22}} = 3,
\end{aligned}
$$

apoi similar, elementele coloanei III din L, respectiv din U. Obtinem

$$
L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}
$$

Observație. Descompunerea LU este unică și în cazul în care avem $L = \left(l_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq m}$ - inferior triunghiulară, cu elementele de pe diagonala principală egale cu 1, iar $U = \left(u_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq m}$ - superior triunghiulară. În acest caz, calculul elementelor matricelor L și U se face după formulele:

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j}, & j = \overline{1, m} \\ l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, & j = \overline{2, m} \end{cases},$$

iar pentru $k = \overline{2, m}$, avem

$$\begin{aligned} u_{kj} &= a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} \cdot u_{pj}, \quad j = \overline{k, m} \\ l_{ik} &= \frac{a_{ik} - \sum\limits_{p=1}^{k-1} l_{ip} \cdot u_{pk}}{u_{kk}}, \quad i = \overline{k+1, m}. \end{aligned}$$