Curs 6: Aproximarea funcțiilor
Interpolarea funcțiilor. Interpolarea Lagrange

Octavia-Maria BOLOJAN

8 Noiembrie 2017

- Funcțiile de aproximat pot să fie definite pe:
  - un continuu (de regulă un interval) - funcții speciale pe care dorim să le evaluăm ca parte a unei subrutine
  - pe o mulțime finită de puncte - situație întâlnită în științele fizice sau inginerie, când măsurătorile fizice se fac în funcție de alte cantități (cum ar timpul)
- Deoarece o astfel de evaluare trebuie să se reducă la un număr finit de operații aritmetice, trebuie în ultimă instanță să aproximăm funcțiile prin intermediul polinoamelor sau funcțiilor raționale
- Dorim să aproximăm o funcție dată, cât mai bine posibil în termeni de funcții mai simple

Interpolarea - o metodă de aproximare

- Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim

$$H^n[a,b] = \Big\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \in C^{n-1}[a,b], \\ f^{(n-1)} \text{ absolut continuă pe } [a,b] \Big\}$$

- Orice funcție $f \in H^n[a,b]$ admite o reprezentare de tip Taylor cu restul sub formă integrală

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt.$$

- $H^n[a,b]$ este un spațiu liniar
- Funcția $f : I \to \mathbb{R}$, I-interval, se numește *absolut continuă* pe I dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ astfel încât oricare ar fi un sistem finit de subintervale disjuncte ale lui I $\{(a_k, b_k)\}_{k=\overline{1,n}}$ cu proprietatea

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

să avem

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Interpolare Lagrange

- Fie intervalul închis $[a, b] \subset \mathbb{R}, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ și o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- Dorim să determinăm un polinom P, de **grad minim** care să reproducă valorile funcției f în x_k, adică

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k = \overline{0, m}.$$

Teoremă.

Există un polinom și numai unul $L_m f \in \mathrm{P}_m$ astfel încât

$$\forall i = 0, 1, ..., m, \qquad (L_m f)(x_i) = f(x_i);$$

Acest polinom se scrie sub forma

$$(L_m f)(x) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)\, l_i(x),$$

unde

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Definiție.

Polinomul $L_m f$ definit astfel se numește **polinom de interpolare Lagrange** a lui f relativ la punctele $x_0, x_1, ..., x_m$, iar funcțiile $l_i(x), i = \overline{0, m}$ se numesc **polinoame de bază (fundamentale)** Lagrange asociate acelor puncte

Considerând

$$u(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{m} (x - x_j),$$

deducem că

$$\forall x \neq x_n, \; l_i(x) = \frac{u(x)}{(x - x_i) u'(x_i)}.$$

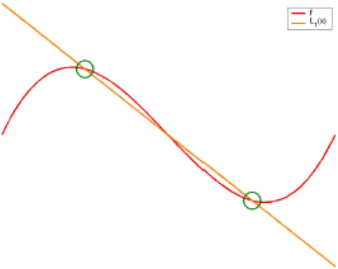
Exemple de PIL

- Polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0 și x_1 este
$$(L_1 f)(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$
adică dreapta care trece prin punctele de coordonate $(x_0, f(x_0))$ și $(x_1, f(x_1))$.

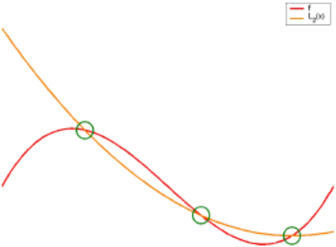
- Analog, polinomul de interpolare Lagrange corespunzător unei funcții f și nodurilor x_0, x_1 și x_2 este

$$\begin{aligned}(L_2 f)(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \\ &\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2),\end{aligned}$$

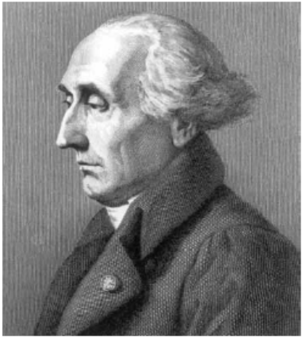
adică parabola care trece prin punctele $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$.



$L_1 f$



$L_2 f$



Joseph Louis Lagrange (1736-1813), protejat al lui Euler. Clairaut scria despre tânărul Lagrange: „...un tânăr nu mai puțin remarcabil prin talent decât prin modestie; temperamentul său este blând și melancolic; nu cunoaște altă plăcere decât studiul.”
Lagrange a avut contribuții fundamentale în calculul variațional, teoria numerelor și analiză matematică. Este cunoscut și pentru reprezentarea pe care a dat-o restului din formula lui Taylor. A dat formula de interpolare în 1794.
Lucrarea sa, "Mecanique Analytique", publicată în 1788, l-a făcut unul din fondatorii mecanicii analitice.

Expresia erorii de interpolare

- Dacă dorim să utilizăm polinomul de interpolare Lagrange pentru a aproxima funcția f într-un punct $x \in [a, b]$, distinct de nodurile de interpolare $(x_0, ..., x_m)$, trebuie să estimăm eroarea comisă

$$(R_m f)(x) = f(x) - (L_m f)(x).$$

- Dacă nu posedăm nicio informație referitoare la f în afara punctelor x_i, este clar că nu putem spune nimic despre $(R_m f)(x)$.
- Într-adevăr, este posibil să schimbăm f în afara punctelor x_i, fără a modifica $(L_m f)(x)$.
- Trebuie așadar să facem ipoteze suplimentare, care vor fi ipoteze de regularitate asupra lui f.
- Să notăm $C^m [a, b]$ spațiul funcțiilor reale de m ori continuu diferențiabile pe $[a, b]$.

Avem următoarea teoremă referitoare la estimarea erorii în interpolarea Lagrange:

Teoremă.

Presupunem că $f \in C^m[\alpha, \beta]$ și există $f^{(m+1)}$ pe (α, β), unde $\alpha = \min\{x, x_0, ..., x_m\}$ și $\beta = \max\{x, x_0, ..., x_m\}$. Atunci, pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$, există un $\zeta_x \in (a, b)$ astfel încât

$$(R_m f)(x) = \frac{1}{(m+1)!} u_m(x) f^{(n+1)}(\zeta_x),$$

unde

$$u_m(x) = \prod_{i=0}^{m} (x - x_i).$$

Corolar.

Considerăm $M_{m+1} = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(m+1)}(x) \right|$. O margine superioară a erorii de interpolare $(R_m f)(x) = f(x) - (L_m f)(x)$ este dată prin

$$|(R_m f)(x)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} |u_m(x)|.$$

Exemplu.

Pentru polinoamele de interpolare din exemplele anterioare, resturile corespunzătoare sunt

$$(R_1 f)(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(\zeta)$$

și respectiv,

$$(R_2 f)(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6} f'''(\zeta).$$

Probleme propuse

1. Cu ce eroare se poate calcula $\sqrt{115}$ cu ajutorul formulei de interpolare Lagrange folosind funcția $f(x) = \sqrt{x}$ și nodurile de interpolare $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$?

2. Să se construiască polinomul lui Lagrange cu nodurile $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. Să se determine estimarea erorii în formula de interpolare pentru $f(x) = \ln(x+2)$ în aproximarea lui $\ln(3.5)$.

Soluții.
Problema 1.

$$u(x) = (x-100)(x-121)(x-144)$$
$$u(x) = (x-10^2)(x-11^2)(x-12^2)$$

$$\Rightarrow u'(x) = (x-11^2)(x-12^2) + (x-10^2)(x-12^2) + (x-10^2)(x-11^2)$$

- $n = 2 \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}.$$

- $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-7/2} < 0, (\forall)\, x \in I = [100; 144]$
- Rezultă astfel că $f'''(x)$ este descrescătoare
- Dar $f'''(x) > 0$, ceea ce înseamnă că

$$\left\| f''' \right\| = \left| f'''(100) \right| = \frac{3}{8 \cdot 100^2 \cdot 10} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-5}.$$

- Astfel,

$$|R_2(f)(x)| \le \frac{|(x-100)\,(x-121)(x-144)|}{3!}\left\|f'''\right\|$$

$$\Leftrightarrow |R_2(f)(115)| \le \frac{15\cdot 6\cdot 29}{6}\cdot\frac{3}{8}\cdot 10^{-5} \simeq 1.6\cdot 10^{-3}.$$

- Avem

$$f(115) \simeq |L_2(f)(115)|\,,$$

unde

$$\begin{aligned}(L_2 f)(x) &= \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)}{u'(x_0)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)}{u'(x_1)}f(x_1)\\ &+ \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)}{u'(x_2)}f(x_2),\end{aligned}$$

$u'(x_0) = u'(100) = 21 \cdot 44$
$u'(x_1) = u'(121) = 21 \cdot (-23)$
$u'(x_3) = u'(144) = 44 \cdot 23$

- Avem

$$\begin{aligned}(L_2 f)(x) &= \frac{(x-121)(x-144)}{21 \cdot 44} \cdot 10 - \frac{(x-100)(x-144)}{21 \cdot 23} \cdot 11 \\ &\quad + \frac{(x-100)(x-121)}{44 \cdot 23} \cdot 12\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (L_2 f)(115) = \frac{(-6)(-29)}{21 \cdot 44} \cdot 10 - \frac{15(-29)}{21 \cdot 23} \cdot 11 + \frac{15(-6)}{44 \cdot 23} \cdot 12 \simeq \sqrt{115}$$

Problema 2.

$$\begin{aligned} u(x) &= (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ u(x) &= (x+1)x(x-1)(x-2) \\ u(x) &= x^4-2x^3-x^2+2x \\ &\Rightarrow u'(x) = 4x^3-6x^2-2x+2 \end{aligned}$$

- $n=3$

$$\begin{aligned} (L_3 f)(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{u'(x_0)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{u'(x_1)} f(x_1) \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{u'(x_2)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{u'(x_3)} f(x_3) \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)}{-6} f(-1) + \frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{2} f(0) \\ &+ \frac{x(x+1)(x-2)}{-2} f(1) + \frac{(x+1)x(x-1)}{6} f(2) \end{aligned}$$

- dar $f(x) = \ln(x+2) \Rightarrow$

$$(L_3)(\ln(t+2))(x) = \frac{(x^2-1)(x-2)}{2}\ln 2 - \frac{x(x+1)(x-2)}{2}\ln 3 + \frac{x^3-x}{6}\ln$$

- $x + 2 = 3,5 \Rightarrow x = 1,5$
- Trebuie să determinăm în continuare $R_3(\ln(t+2))(1,5)$

$$|R_n(f)(x)| \leq \frac{|u(x)|}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|$$

- $f(x) = \ln(x+2) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}, \\ f'''(x) &= \frac{2}{(x+2)^3}, \quad f^{(iv)}(x) = -\frac{6}{(x+2)^4} \end{aligned}$$

- $I = [-1; 2]$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(x+2)^5} > 0, \ \ (\forall)\, x \in [-1; 2]$$

- Rezultă astfel că $f^{(4)}(x)$ este strict crescătoare
- Dar $f^{(4)}(x) < 0$, ceea ce înseamnă că avem:

$$\left\| f^{(4)}(x) \right\| = \left| \ f^{(4)}(-1) \right| = 6.$$

- Astfel

$$\begin{aligned} R_3(\ln(t+2))(1,5) &\leq \frac{\left|(1,5+1)\cdot 1,5\cdot(1,5-1)\,(1,5-2)\right|}{24} \left\| f^{(4)} \right\| \\ &= \frac{15}{64} \end{aligned}$$