Curs 11: Diferențe finite. Derivarea numerică a funcțiilor

Octavia-Maria BOLOJAN

octavia.nica@math.ubbcluj.ro

13 Decembrie 2017

1. Diferențe finite

- Teoria diferențelor finite joacă un rol important în cadrul Analizei numerice, deoarece permite elaborarea unor metode practice de aproximare care folosesc valorile funcțiilor pe puncte echidistante sau neechidistante.

- Presupunem că se cunosc valorile unei funcții f pe punctele (nodurile) echidistante $a_i = a + ih$, unde $a, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, $i = \overline{1, n}$.

Definition

Se numește **diferență finită de ordinul I a funcției** f **pe nodul** a_i **cu pasul** h, mărimea

$$\Delta_h^1 (f) (a_i) = f(a_i + h) - f(a_i), \quad (\forall)\, 0 \leq i < n.$$

Observații:

1) $\Delta_h^1(f)(a_i)$ se mai notează cu $\Delta_h(f)(a_i)$

2) Prin convenție, $\Delta_h^0(f)(a_i) = f(a_i)$

3) Pentru a_i și h fixate, $\Delta_h^1(f)(a_i)$ este un operator liniar în funcție de f, pentru că se verifică ușor relațiile

$$\begin{aligned}
\Delta_h^1(f+g)(a_i) &= \Delta_h^1(f)(a_i) + \Delta_h^1(g)(a_i) \\
\Delta_h^1(\alpha f)(a_i) &= \alpha \Delta_h^1(f)(a_i), \quad (\forall)\,\alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Prin definiție,

$$\Delta_h^2(f)(a_i) = \Delta_h^1\left[\Delta_h^1(f)(a_i)\right]$$

se numeste *diferență finită de ordinul 2 a funcției* f *pe punctul/nodul* a_i *cu pasul* h, etc,

$$\Delta_h^k(f)(a_i) = \Delta_h^1\left[\Delta_h^{k-1}(f)(a_i)\right], \quad 0 \le k \le n-i, 0 \le i < n$$

se numeste *diferență finită de ordinul* k *a funcției* f *pe punctul/nodul* a_i *cu pasul* h.

Exemplu. Să se determine expresia pentru $\Delta_h^2(f)(a_i)$.
Soluție.

$$\begin{aligned}
\Delta_h^2(f)(a_i) &= \Delta_h^1\left[\Delta_h^1(f)(a_i)\right] \\
&= \Delta_h^1\left[f(a_i+h)-f(a_i)\right] \\
&= \Delta_h^1(f)(a_i+h)-\Delta_h^1(f)(a_i) \\
&= f(a_i+2h)-f(a_i+h)-(f(a_i+h)-f(a_i)) \\
&= f(a_i+2h)-2f(a_i+h)+f(a_i)
\end{aligned}$$

Caz particular: $f(x)=e^x$
Avem:
$\Delta_h^1(f)(a_i)=e^{a_i+h}-e^{a_i}=\left(e^h-1\right)e^{a_i}$

$\Delta_h^2(f)(a_i)=e^{a_i+2h}-2e^{a_i+h}+e^{a_i}=\left(e^h-1\right)^2e^{a_i}$

...

$\Delta_h^k(f)(a_i)=\left(e^h-1\right)^k e^{a_i}$ - relație ce se poate demonstra prin inducție matematică

Theorem

Are loc formula:

$$\Delta_h^n(f)(a) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(a + (n-1)i).$$

Observație:

$$\binom{n}{i} = C_n^i.$$

Theorem

Are loc formula:

$$\Delta_h^k(f)(a_i) = \Delta_h^{k-1}(f)(a_{i+1}) - \Delta_h^{k-1}(f)(a_i),$$

$(\forall)\, i = \overline{1, n-1}, k = \overline{1, n-i}.$

- Putem genera tabelul cu diferențe finite de forma

	f	$\Delta_h(f)$	$\Delta_h^2(f)$	...	$\Delta_h^n(f)$
a_0	f_0	$\Delta_h(f_0)$	$\Delta_h^2(f_0)$		$\Delta_h^n(f_0)$
a_1	f_1	$\Delta_h(f_1)$	$\Delta_h^2(f_1)$		0
a_2	f_2	$\Delta_h(f_2)$	$\Delta_h^2(f_2)$		0
a_3	f_3	$\Delta_h(f_3)$	$\Delta_h^2(f_3)$	...	0
...	...	...	...		0
a_{n-1}	f_{n-1}	$\Delta_h(f_{n-1})$	0		0
a_n	f_n	0	0		0

,

unde $f_i \stackrel{\text{not.}}{=} f(a_i)$ si $\Delta_h^k(f_i) = \Delta_h^{k-1}(f_{i+1}) - \Delta_h^{k-1}(f_i), i = \overline{1, n-1}, k = \overline{1, n-i}$.

2. Derivare numerică. Formule pentru derivata de ordinul I

- Derivarea numerică constă în aproximarea derivatelor de un anumit ordin a unei funcții printr-o combinație liniară de valori ale funcției în anumite puncte.

Theorem

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, $x_0 \in \mathbb{R}$ și $h > 0$ un număr real numit pas. Dacă $f \in C^2([x_0, x_0 + h])$, atunci are loc:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{R}(f), \tag{2.1}$$

unde restul $\mathcal{R}(f)$ poate fi evaluat prin

$$|\mathcal{R}(f)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0, x_0 + h]} |f''(x)| .$$

Consecință. Dacă $f \in C^2([x_0 - h, x_0])$, atunci are loc:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{R}(f), \tag{2.2}$$

unde restul $\mathcal{R}(f)$ poate fi evaluat prin

$$|\mathcal{R}(f)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0 - h, x_0]} \left| f''(x) \right|.$$

Observație. Formulele de derivare (2.1) si (2.2) sunt exacte pe mulțimea polinoamelor de grad 1.

- Dacă $f \in C^3([x_0 - h, x_0 + h])$, atunci are loc:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \mathcal{R}(f), \tag{2.3}$$

unde restul $\mathcal{R}(f)$ poate fi evaluat prin

$$|\mathcal{R}(f)| \leq \frac{h^2}{6} \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} \left| f'''(x) \right|.$$

- De asemenea, dacă $f \in C^3([x_0, x_0 + 2h])$, atunci are loc:

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} + \mathcal{R}(f), \tag{2.4}$$

unde restul $\mathcal{R}(f)$ poate fi evaluat prin

$$|\mathcal{R}(f)| \leq \frac{h^2}{3} \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} \left| f'''(x) \right|.$$

Observație. Formulele de derivare (2.3) si (2.4) sunt exacte pe mulțimea polinoamelor de grad 2.

Formule pentru derivata de ordinul II

Theorem

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă, $x_0 \in \mathbb{R}$ și $h > 0$ un număr real numit pas. Atunci are loc:

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0) - 2f(x_0+h) + f(x_0+2h)}{h^2} + \mathcal{R}(f), \tag{2.5}$$

unde, dacă $f \in C^3([x_0, x_0+2h])$, restul $\mathcal{R}(f)$ poate fi evaluat prin

$$|\mathcal{R}(f)| \leq h \max_{x \in [x_0, x_0+2h]} \left| f'''(x) \right|.$$

Observație. Formula de derivare (2.5) este exactă pe mulțimea polinoamelor de gradul 2.

Exemplu. Să se aproximeze derivatele de ordinul I si ordinul II ale funcției $f(x) = e^{-x} \sin x$, în punctul $x_0 = 1$ cu pasul $h = 0.1$.

Soluție:

$\rightarrow$ se folosesc formulele (2.1) si (2.5)

$\rightarrow$ Derivata de ordinul I:

$$f'(1) = \frac{f(1.1) - f(1)}{0.1} + \mathcal{R}(f),$$

unde restul $\mathcal{R}(f)$ poate fi evaluat prin

$$|\mathcal{R}(f)| \leq \frac{0.1}{2} \max_{x \in [1,1.1]} \left| f''(x) \right|.$$

$\rightarrow$ Derivata de ordinul II:

$$f''(1) = \frac{f(1) - 2f(1.1) + f(1.2)}{0.01} + \mathcal{R}(f),$$

unde restul $\mathcal{R}(f)$ poate fi evaluat prin

$$|\mathcal{R}(f)| \leq 0.1 \max_{x \in [1,1.2]} \left| f'''(x) \right|.$$

Observație:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^1(f)(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\Rightarrow \quad f'(a) \simeq \frac{\Delta_h^1(f)(a)}{h}$$

Similar,

$$f^{(n)}(a) \simeq \frac{\Delta_h^n(f)(a)}{h^n}$$