Laborator 6 Metode numerice:
Metode iterative pentru rezolvarea sistemelor liniare: Metoda lui Jacobi, Metoda Gauss-Seidel
- Probleme propuse -

1. Fie matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine valorile proprii ale lui A.

Observaţie.

- Valorile proprii ale unei matrice A sunt rădăcinile ecuaţiei $p(\lambda) = 0$, unde $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ se numeşte *polinomul caracteristic* al lui A.
- Coeficienţii polinomului caracteristic se calculează cu ajutorul comenzii `c=poly(A)`, iar valorile proprii se determină cu `roots(c)`.
- În locul acestor secvenţe, valorile proprii pot fi calculate direct, folosind comanda `eig(A)`.

2. Să se arate că se poate aplica metoda lui Jacobi (relativă la normele $\|.\|_1$ şi $\|.\|_\infty$) pentru sistemul de ecuaţii liniare $Ax = b$, cu

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ -0.2 & 0.8 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & -0.3 & 0.7 & -0.1 \\ -0.3 & -0.2 & -0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3.6 \\ 2 \\ 2.4 \\ 1.5 \end{bmatrix}.$$

Luând $x = [0\ 0\ 0\ 0]^t$, să se determine numărul de iteraţii necesar pentru a aproxima soluţia sistemului cu o eroare mai mică de 10^{-10}. Folosiţi observaţiile/indicaţiile de mai jos, precum şi rezolvările de la curs.

Observaţie.

- Norme de vectori şi norme de matrice:

(a) pe $\mathbb{C}^n$ se consideră normele vectoriale $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$ definite astfel:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|,$$

$(\forall)$ $x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n$.
(b) Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Avem:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- Formula de evaluare a erorii:

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\|_p \leq \frac{q^k}{1-q} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_p$$

Pentru a aproxima x^* cu $x^{(k)}$ cu eroarea ε, este suficient ca:

$$\frac{q^k}{1-q} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_p < \varepsilon.$$

!!! În Matlab, avem următoarele comenzi utile:

- Funcţia Matlab `norm()` calculează p-norma unui vector
- Ea este apelată sub forma `norm(x,p)`, cu valoarea implicită $p = 2$
- Funcţia `norm()` se poate aplica şi matricelor
- Ea se apelează sub forma `norm(A,p)`, unde A este o matrice şi $p = 1, 2, Inf$ pentru o p-normă

3. Fie sistemul de ecuaţii liniare:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ \frac{1}{5}x_1 + x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 2 \\ \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{20}x_2 + x_3 = 3 \end{array} \right. .$$

Să se arate că se poate aplica metoda Gauss-Seidel sistemului de mai sus. Folosiţi observaţiile/indicaţiile de mai jos, precum şi rezolvările de la curs.

Observaţie.

- Dacă $q = \max\limits_{1 \le i \le n} q_i$ cu $q_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, $q_i = \sum\limits_{j=1}^{n-1} |a_{ij}|\, q_j + \sum\limits_{j=1}^{n-1} |a_{ij}|\,, 2 \le i \le n$, şi $q < 1$, atunci avem evaluările:

$$\begin{aligned}\left\| x - x^{(k)} \right\|_\infty &\le \frac{q}{1-q} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|_\infty \\ &\le \frac{q^k}{1-q} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_\infty .\end{aligned}$$

- $x \leftrightarrow x^*$; În particular, $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x$.

4. Să se rezolve cu ajutorul metodei Gauss-Seidel următorul sistem liniar:

$$\left\{ \begin{array}{c} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 11 \\ 12x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 12 \end{array} \right. .$$

Observaţie.

- rescriem sistemul sub forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -0.2x_2 - 0.1x_3 + 1 \\ x_2 = -0.2x_1 - 0.1x_3 + 1.1 \\ x_3 = -1.2x_1 - 0.2x_2 + 1.2 \end{array} \right.$$

- pentru iteraţia iniţială $(x_{1;1},\ x_{2;1},\ x_{3;1})$ se consideră $x_2 = x_3 = 0$;

- obţinem $x_{1;1} = 1,\ x_{2;1} = 0.9,\ x_{3;1} = -0.18$;

- din următoarea aproximaţie/iteraţie, avem: $x_{1;2} = 0.838,\ x_{2;2} = 0.9504,\ x_{3;2} = -0.0044$;

- ulterior, aplicând acelaşi algoritm, obţinem: $x_{1;3} = 0.809,\ x_{2;3} = 0.9378,\ x_{3;3} = 0.04$ etc.