Laborator 11
- Diferenţe finite. Derivare numerică -

Probleme propuse

Problema 1. Să se genereze matricea diferenţelor finite până la $n = 5$ pentru funcţia

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

cu următoarele valori: $h = 0.25, a = 1$.

Breviar teoretic.

Presupunem că se cunosc valorile unei funcţii f pe punctele (nodurile) echidistante $a_i = a + ih$, unde $a, h \in \mathbb{R}, h \neq 0, i = \overline{1, n}$.

Se numeşte **diferenţă finită de ordinul I a funcţiei f pe nodul a_i cu pasul h**, mărimea

$$\Delta_h^1(f)(a_i) = f(a_i + h) - f(a_i), \quad (\forall)\, 0 \leq i < n.$$

Au loc formulele:

(a)

$$\Delta_h^n(f)(a) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i f(a + (n-1)i).$$

(b)

$$\Delta_h^k(f)(a_i) = \Delta_h^{k-1}(f)(a_{i+1}) - \Delta_h^{k-1}(f)(a_i),$$

$(\forall)\, i = \overline{1, n-1}, k = \overline{1, n-i}$.

- Putem genera tabelul cu diferenţe finite de forma

	f	$\Delta_h(f)$	$\Delta_h^2(f)$	...	$\Delta_h^n(f)$
a_0	f_0	$\Delta_h(f_0)$	$\Delta_h^2(f_0)$		$\Delta_h^n(f_0)$
a_1	f_1	$\Delta_h(f_1)$	$\Delta_h^2(f_1)$		0
a_2	f_2	$\Delta_h(f_2)$	$\Delta_h^2(f_2)$		0
a_3	f_3	$\Delta_h(f_3)$	$\Delta_h^2(f_3)$	...	0
...	...	...	...		0
a_{n-1}	f_{n-1}	$\Delta_h(f_{n-1})$	0		0
a_n	f_n	0	0		0

,

unde $f_i \stackrel{\text{not.}}{=} f(a_i)$ şi $\Delta_h^k(f_i) = \Delta_h^{k-1}(f_{i+1}) - \Delta_h^{k-1}(f_i), i = \overline{1, n-1}, k = \overline{1, n-i}$.

Indicaţie rezolvare.

- generăm o matrice $D(n, n)$
- considerăm pentru $i = \overline{1, 5}$

$$D(i, 1) = f(a_i) = \frac{1}{a_i} = \frac{1}{a + (i-1)h}$$

- n=dimensiunea lui D
- se generează elementele $D(i, j)$ pentru $i = \overline{1, n-1}$ şi $j = \overline{2, n-i+1}$ din matrice folosind formula (b)

Problema 2. Să se aproximeze derivatele de ordinul I şi ordinul II ale funcţiei $f(x) = e^{-x} \sin x$, în punctul $x_0 = 1$ cu pasul $h = 0.1$.

Breviar teoretic.

- Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $h > 0$ un număr real numit pas. Dacă $f \in C^2([x_0, x_0 + h])$, atunci are loc:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{R}(f), \tag{1}$$

unde restul $\mathcal{R}(f)$ poate fi evaluat prin

$$|\mathcal{R}(f)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |f''(x)|.$$

- Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă, $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $h > 0$ un număr real numit pas. Atunci are loc:

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0) - 2f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)}{h^2} + \mathcal{R}(f), \tag{2}$$

unde, dacă $f \in C^3([x_0, x_0 + 2h])$, restul $\mathcal{R}(f)$ poate fi evaluat prin

$$|\mathcal{R}(f)| \leq h \max_{x \in [x_0, x_0+2h]} |f'''(x)|.$$

Indicaţie rezolvare.

- se salvează într-un script Matlab expresia funcţiei în vederea determinării valorilor $f(1), f(1.1), f(1.2)$ din secvenţele:

→ Derivata de ordinul I:

$$f'(1) = \frac{f(1.1) - f(1)}{0.1} + \mathcal{R}(f),$$

unde restul $\mathcal{R}(f)$ poate fi evaluat prin

$$|\mathcal{R}(f)| \leq \frac{0.1}{2} \max_{x \in [1,1.1]} |f''(x)| .$$

→ Derivata de ordinul II:

$$f''(1) = \frac{f(1) - 2f(1.1) + f(1.2)}{0.01} + \mathcal{R}(f),$$

unde restul $\mathcal{R}(f)$ poate fi evaluat prin

$$|\mathcal{R}(f)| \leq 0.1 \max_{x \in [1,1.2]} |f'''(x)| .$$

- pentru $f''(x), f'''(x)$ pot fi de asemenea create script-uri separate în vederea estimărilor pentru $\mathcal{R}(f)$