Metoda bisecției

Theorem

Fie $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu $f(a)f(b) < 0$. Atunci există $z \in [a, b]$ astfel încât $f(z) = 0$.

Definim șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$, $(c_n)_{n\geq 0}$ astfel:

- $a_0 := a$, $b_0 := b$, $c_0 := (a + b)/2$
- Pentru $n \geq 1$:

$\to$ dacă $f(c_{n-1}) = 0$, atunci

$$\begin{cases} a_n := a_{n-1} \\ b_n := b_{n-1} \\ c_n := c_{n-1} \end{cases}$$

$\to$ dacă $f(a_{n-1}) \cdot f(c_{n-1}) < 0$, atunci

$$\begin{cases} a_n := a_{n-1} \\ b_n := c_{n-1} \\ c_n := (a_n + b_n)/2 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ dacă $f(a_{n-1}) \cdot f(c_{n-1}) > 0$, atunci

$$\begin{cases} a_n := c_{n-1} \\ b_n := b_{n-1} \\ c_n := (a_n + b_n)/2 \end{cases}$$

- Presupunem că funcția f are o singură rădăcină în intervalul $[a, b]$.
- Atunci șirul $(c_n)_{n\geq 0}$ construit mai sus converge la unica soluție $z \in [a, b]$ a ecuației $f(x) = 0$ și

$$|c_n - z| \leq \frac{b-a}{2^n}$$