Laborator 10 Metode Numerice: Metoda Newton-Raphson de rezolvare a ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii neliniare

1. Să se rezolve următorul sistem de ecuaţii neliniare folosind metoda grafică:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0, \end{cases}$$

unde

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x \cdot e^{xy+0.8} + e^{y^2} - 3 \\ f_2(x,y) &= x^2 - y^2 - 0.5 \cdot e^{xy}. \end{aligned}$$

Soluţie.

- Folosim următoarele secvenţe de cod:

```
clear, hold off
x1=0:0.1:2;
y1=-1:0.1:2;
[x,y]=meshgrid(x1,y1);
f1=f_f1(x,y);
f2=f_f2(x,y);
contour(x1,y1,f1,[0.00,0.00],'r');gtext('f1');
hold on
contour(x1,y1,f2,[0.00,0.00],'b');gtext('f2');
xlabel('x');ylabel('y')
```

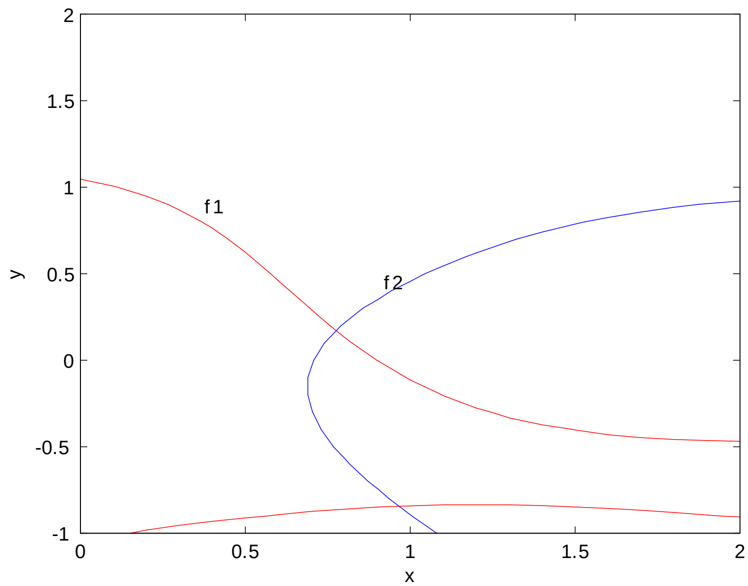
unde cele două funcţii f1 şi f2 vor fi scrise în scripturile Matlab de tip funcţie:

```
function f=f_f1(x,y)
f=x.*exp(x.*y+0.8)+exp(y.^2)-3;
```

şi respectiv:

```
function f=f_f2(x,y)
f=x.^2-y.^2-0.5*exp(x.*y);
```

- Rezultatul compilării este dat de:



Curba indică faptul că sunt două rădăcini în domeniul pozitiv al lui x, una este aproximativ în dreptul valorii $(x, y) = (0.8, 0.2)$, iar cealaltă în dreptul punctului de coordonate $(x, y) = (1, -0.8)$.

2. Să se rezolve sistem de ecuaţii neliniare de la Problema 1 folosind metoda iterativă Newton (Newton-Raphson).

Soluţie.

```
%iteratii Newton pentru cazul 2D
clear, fprintf('\n')
dx=0.01;dy=0.01;
x=input('dati valoarea iniliata a lui x:  ')
y=input('dati valoarea iniliata a lui y:  ')
for n=1:50
 s=[x,y];
 xp=x+dx;
 yp=y+dy;
 J(1,1)=(f_f1(xp,y)-f_f1(x,y))/dx;
```

```
  J(1,2)=(f_f1(x,yp)-f_f1(x,y))/dy;
  J(2,1)=(f_f2(xp,y)-f_f2(x,y))/dx;
  J(2,2)=(f_f2(x,yp)-f_f2(x,y))/dy;
  f(1)=f_f1(x,y);
  f(2)=f_f2(x,y);
  ds=-J/f;
  x=x+ds(1);
  y=y+ds(2);

  fprintf('n=%2.0f, x=%12.5e, y=%12.5e',n,x,y)
  fprintf('f(1)=%10.2e, f(2)=%10.2e \n',f(1),f(2))
  if (abs(f(1))<1.0e-9 && abs(f(2))<1.0e-9)
  break;
  end
end
```

La o primă rulare se pot folosi valorile initiale: $x = y = 1$, după care la o a doua rulare se pot furniza valorile $x = 1, y = -1$. Se va observa că în ambele cazuri se vor obţine valori mai precise decât cele obţinute prin metoda grafică.

Probleme propuse

1. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii neliniare folosind metoda grafică:

(a)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + e^{xy} - 1 = 0 \\ 2x^2y - e^{xy^2} = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} xy + e^{xy} = 0 \\ x^2y - xy^2 + 0.2e^{xy} = 0 \end{cases}$$

2. Să se verifice soluţiile sistemelor de mai sus folosind Metoda Newton-Raphson.

3. Să se implementeze în Matlab Metoda Newton-Raphson pentru cele 3 ecuaţii neliniare rezolvate la curs. Să se verifice soluţiile obţinute.

Observaţie: Construiţi algoritmul de rezolvare folosind teorema din cadrul Cursului 10:

Theorem 1 *Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie.*

Presupunem că f este de două ori derivabilă pe $[a, b]$, că f', f'' nu se anulează pe $[a, b]$ şi $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Fie $x_0 \in [a, b]$ astfel încât

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

şi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$$

Atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are o soluţie unică $z \in [a, b]$, iar şirul $(x_n)_n$ converge la z.

Problemele pentru care să se verifice algoritmul:

3.1. Să se aplice metoda lui Newton-Raphson pe intervalul $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ pentru rezolvarea ecuaţiei $2x^3 - 4x + 1 = 0$. Luând $x_0 = 1/4$, să se determine primele 5 iteraţii din metodă.

3.2. Rezolvaţi ecuaţia $x = e^{-x}$ folosind metoda Newton-Raphson începând cu $x_0 = 0$, rezolvând până la 5 paşi.

3.3. Folosiţi metoda Newton-Raphson pentru a rezolva ecuaţia $\sin 3x = \cos 2x$. Considerând $x_1 = 0$, să se determine primele 5 iteraţii din metodă.