Curs 12:
Integrarea numerică.
Formula trapezului. Formula lui Simpson

Octavia-Maria BOLOJAN

octavia.nica@math.ubbcluj.ro

19 Decembrie 2016

1. Integrarea numerică

- Integrarea numerică se aplică funcțiilor care nu pot fi integrate analitic sau celor care ar necesita calcule complicate
- Metodele de aproximare ale integralelor constau în înlocuirea unei integrale printr-o combinație, de cele mai mule ori liniară, de valori ale funcției de integrat în puncte din domeniul pe care se face integrarea
- Alegerea metodei se face în funcție de forma funcției de integrat, domeniul de integrare și performanțele calculatorului pe care se realizează calculele

- Calculul numeric al integralelor se numește **cuadratură** și se poate face astfel:

- funcția de integrat $f(x)$ se poate aproxima printr-o altă funcție $g(x)$, unde $g(x)$ se alege astfel încât integrala să poată fi ușor calculată; O bună aproximare a lui $f(x)$ conduce la o bună estimare a integralei
- folosind un set de funcții liniare sau parabolice se aproximează funcția $f(x)$ pe porțiuni. În cazul în care se aproximează cu funcții liniare pe porțiuni, aria sa se poate calcula ca sumă a trapezelor care o compun, metoda aceasta fiind cunoscută sub numele de **Metoda trapezului**, iar dacă aproximarea se va face prin funcții pătratice pe porțiuni, metoda este cunoscută sub numele de **Metoda lui Simpson**

- Folosind integrarea numerică, se atenuează erorile de aproximare ale funcției

2. Formula trapezului

Fie integrala

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

- Aproximăm $f(x)$ prin polinomul liniar $P_1(x)$ de forma:

$$P_1(x) = \frac{(b-x)f(a) + (x-a)f(b)}{b-a},$$

  care interpolează $f(x)$ în a și b.

- Integrala lui $P_1(x)$ pe intervalul $[a, b]$ este aria trapezului cuprins între reprezentarea grafică a funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x = a, x = b$ și este dată de relația:

$$T_1(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \tag{2.1}$$

Astfel,

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right],$$

formulă cunoscută sub numele de **Formula trapezului** sau **Formula de cuadratură a trapezului**.

Dacă $f \in C^2([a,b])$, din formula de evaluare a erorii de interpolare, avem

$$|I - T_1| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|. \tag{2.2}$$

Putem rescrie

$$I = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] + R(f),$$

unde $R(f)$ este eroarea de trunchiere ce poate fi aproximată conform (2.2):

$$R(f) \approx -\frac{(b-a)^3}{12} f''$$

Exemplu.
Fie integrala

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx.$$

$\rightarrow$ Valoarea reală a integralei este $I = \ln 2 \approx 0.69$

$\rightarrow$ Conform (2.1), avem

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} = 0.75$$

$\rightarrow$ Eroarea este

$$I - T_1 = 0.69 - 0.75 = -0.06$$

- Pentru a îmbunătăți aproximarea T_1 când $f(x)$ nu este o funcție liniară pe $[a, b]$, se împarte intervalul $[a, b]$ în subintervale mai mici și se aplică relația (2.1) pe fiecare subinterval

$\rightarrow$ În continuare, evaluăm exemplul anterior utilizând formula (2.1) pe două subintervale de lungimi egale

$$I = \int_0^{1/2} \frac{1}{1+x}dx + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{1+x}dx$$

$\rightarrow$ Rezultă astfel:

$$T_2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{24} \approx 0.7$$

$\rightarrow$ În acest caz, eroarea devine

$$I - T_2 = 0.69 - 0.7 = -0.01$$

Ce se observă?

- Vom obține formula generală cu scopul simplificării calculelor în situația în care alegem mai multe subintervale de lungime egală
- Fie n numărul acestor subintervale și fie $h = \frac{b-a}{n}$ lungimea fiecărui subinterval
- Punctele subintervalelor sunt de forma $x_i = a + ih$, unde $i = \overline{0, n}$
- În continuare, se împarte integrala inițială într-o sumă de n subintegrale:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \end{aligned}$$

- Aproximând fiecare subintegrală folosind formula (2.1) și ținând cont că fiecare subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ are lățimea h, avem:

$$I = h\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right] + h\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right] + ... + h\left[\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]$$

- Termenii din partea dreaptă pot fi combinați și ne dau *formula generală* pentru Metoda trapezului:

$$T_n(f) = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

Implementare Matlab pentru Metoda trapezului

Pentru a integra funcții cu metoda trapezelor (nodurile nu trebuie să fie neaparat echidistante), se folosește funcția

```
trapz(x,y),
```

unde:

`x` - este domeniul pe care se face integrarea
`y` - este expresia funcției (depinzând de `x`).

→Aceasta oferă rezultate bune la integrarea funcțiilor periodice pe intervale a căror lungime este un multiplu întreg al perioadei.

Exemplu. Dacă dorim să facem calculul integralei $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x} dx$ folosind funcția trapz(), procedăm astfel:

```
>> x=linspace(0,2*pi,10);
>> y=1./(2+sin(x));
>> trapz(x,y)
ans =
3.62759872810065
>> 2*pi*sqrt(3)/3-ans
ans =
3.677835813675756e-010
```

Valoarea exactă a integralei fiind $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$, eroarea este mai mică decât 10^{-9}.

3. Formula lui Simpson

- Se aproximează variația functiei de integrat între 3 noduri succesive x_{i-1}, x_i, x_{i+1} printr-un polinom de interpolare de gradul doi de forma:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$$

- Considerând rețeaua de "$n+1$" noduri echidistante, dar cu n par și originea în punctul x_i, putem scrie:

$$\begin{aligned} f(x_{i-1}) &= P(-h) = c_0 - c_1 h + c_2 h^2 \\ f(x_i) &= P(0) = c_0 \\ f(x_{i+1}) &= P(h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 \end{aligned}$$

- Se aproximează aria subîntinsă de funcția de integrat între punctele x_{i-1} și x_{i+1} cu aria subîntinsă de parabola P între punctele $-h$ și h

$$I_i = \int_{-h}^{h} P(x)dx = \int_{-h}^{h} \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right) dx = 2h\left(c_0 + \frac{h^2}{3} c_2\right)$$

Din condițiile de interpolare se calculează

$$\begin{aligned} c_0 &= f(x_i) \\ c_1 &= \frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i+1})}{2h^2} \\ c_2 &= \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{2h^2} \end{aligned}$$

necesare în evaluarea integralei

$$I_i = \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

Însumând toate ariile I_i pentru $i = 1, 3, 5, ..., n-1$, rezultă

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + f(x_n)\right]$$

cunoscută sub numele de **Formula lui Simpson 1/3** sau **Formula de cuadratură a lui Simpson 1/3**

- Aici, n reprezintă numărul de perechi de intervale și $h = (b-a)/2n$
- Dacă vom considera

$$\begin{aligned} s_1 &= f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + ... + f(x_{2k-1}) \\ s_2 &= f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + ... + f(x_{2k}), \end{aligned}$$

atunci formula lui Simpson $1/3$ se poate scrie sub forma:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4s_1 + 2s_2\right]$$

Integrala lui $P(x)$ pe intervalul $[a, b]$ cu $h = (b - a)/2$ și

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= \frac{a+b}{2} \\ x_2 &= b \end{aligned}$$

este dată de relația:

$$\begin{aligned} S_1(f) &= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \\ &= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \end{aligned} \tag{3.1}$$

- Dacă $f \in C^3([a,b])$, din formula de evaluare a erorii de interpolare, avem

$$|I - S_1| \leq \frac{(b-a)^4}{192} \cdot \max_{x \in [a,b]} \left| f'''(x) \right|. \tag{3.2}$$

- Putem rescrie

$$I = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] + R(f),$$

unde $R(f)$ este eroarea de trunchiere ce poate fi aproximată conform (3.2):

$$R(f) \approx -\frac{(b-a)^4}{192} f'''$$

Regula compusă poate fi scrisă de asemenea ca un produs de vectori, astfel:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \cdot c \cdot f^T,$$

unde

$$\begin{aligned} c &= [1\ 4\ 2\ 4\ 2\ \ldots\ 2\ 4\ 1], \\ f &= [f_1\ \ f_2\ \ \ldots\ \ f_{2n}] \end{aligned}$$

Exemplu.
Considerăm integrala

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx.$$

Să se aplice formula lui Simpson $1/3$ pentru estimarea integralei.
Soluție. Conform (3.1),

$$\begin{aligned} h &= \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2} \\ S_1 &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \\ &= \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)\right] \\ &= \frac{1/2}{3}\left[1 + 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{25}{36} \approx 0.6944 \end{aligned}$$

Eroarea este

$$I - S_1 = \ln 2 - S_1 = -0.0044$$

Implementare Matlab pentru Metoda Simpson

- Funcția care calculează integrala prin metoda Simpson 1/3 în Matlab este **quad()**
- Se apelează cu sintaxa:

```
quad('f',a,b)
quad('f',a,b,tol,trace)
```

unde:

`f` - este numele fișierului
`a,b` - limitele de integrare
`tol` - eroarea relativă admisă între doi pași consecutivi
`trace` - afișează valoarea intermediară opțională

Exemplu.

→ Formula lui Simpson poate fi implementată în mai multe feluri

→ De exemplu, considerăm fișierul funcție simp1.m care creează 2 vectori: un vector de coeficienti v și un vector de valori de functii y, pe care-i înmulțește

→ Pentru rularea corectă a programului, deoarece avem un fișier functie, trebuiesc date: definiția funcției care va fi integrată ($fv = x^7$), limitele intergrării (a, b) și numărul de subintervale care va fi folosit (n).

```
function q=simp1(functie,a,b,n)
if(n/2)~=floor(n/2)
 disp('n trebuie sa fie par');
end
h=(b-a)/n; x=[a:h:b];
y=feval(functie,x);
v=2*ones(n+1,1); v2=2*ones(n/2,1);
v(2:2:n)=v(2:2:n)+v2;
v(1)=1;
v(n+1)=1;
q=y*v;
q=q*h/3;
```

→ Fișierul care conține expresia funcției este de forma:

```
function fv=fc(x)
fv=x.^7;
```

→ Secvența de program care apelează funcția simp1() pentru integrarea funcției considerate pe intervalul $[a, b] = [1, 2]$, considerând $n = 6$, este:

```
n=6;
i=2;
while n<250
 q=simp1('fc',1,2,n);
 fprintf('%2.0f %12.8f \n',n,q);
 n=4*n;
 i=i+1;
end
```

→ În urma compilării se obtin următoarele rezultate:

```
>> lab12_mainsimp1
 6 31.88839592
24 31.87505272
96 31.87500021
```