Curs 10: Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare. Metoda lui Newton-Raphson

Octavia-Maria BOLOJAN

octavia.nica@math.ubbcluj.ro

5 Decembrie 2016

Metoda lui Newton-Raphson pentru rezolvarea ecuațiilor neliniare

Theorem

Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcție.*
Presupunem că f *este de două ori derivabilă pe* $[a, b]$, *că* f', f'' *nu se anulează pe* $[a, b]$ *și* $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Fie $x_0 \in [a, b]$ *astfel încât*

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

și

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$$

Atunci ecuația $f(x) = 0$ *are o soluție unică* $z \in [a, b]$, *iar șirul* $(x_n)_n$ *converge la* z.

- Formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$$

se mai numește **formula lui Newton** sau **formula Newton-Raphson.**

- Are loc următoarea formulă de evaluare a erorii:

$$|x_n - z| \leq \frac{|f(x_n)|}{\min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|}, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$$

Exemple numerice

1. Să se aplice metoda lui Newton-Raphson pe intervalul $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ pentru rezolvarea ecuației $2x^3 - 4x + 1 = 0$. Luând $x_0 = 1/4$, să se determine primele două iterații din metodă.
2. Rezolvați ecuația $x = e^{-x}$ folosind metoda Newton-Raphson începând cu $x_0 = 0$, rezolvând până la 5 pași.
3. Folosiți metoda Newton-Raphson pentru a rezolva ecuația $\sin 3x = \cos 2x$. Considerând $x_1 = 0$, să se determine primele 5 iterații din metodă.

Soluții.

1.

$\longrightarrow$ Fie $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$

$\longrightarrow$ f este de două ori derivabilă

$\longrightarrow$ $f'(x) = 6x^2 - 4$, $f''(x) = 12x$ - funcții care nu se anulează pe $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$

$\longrightarrow$ $f(1/4) \cdot f(3/4) = -\frac{37}{1024} < 0 \Rightarrow$ ecuația are o rădăcină în intervalul $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$

$\longrightarrow$ Deoarece $f(1/4) \cdot f''(1/4) = \frac{3}{32} > 0 \Rightarrow$ metoda lui Newton poate fi aplicată pentru rezolvarea ecuației din enunț

$\longrightarrow$ Avem

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{15}{58} \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{142}{549} \end{aligned}$$

2.

$\rightarrow$ Considerăm $f(x) = x - e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1 + e^{-x}$ și folosind formula Newton-Raphson, obținem:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}},$$

care ne va conduce la următoarele rezultate:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{1}{2} = 0.50000 \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.566311 \\
x_3 &= 0.567143 \\
x_4 &= 0.567143
\end{aligned}$$

3.

$\rightarrow$ Fie $f(x) = \sin 3x - \cos 2x \;\Rightarrow f'(x) = 3\cos 3x + 2\sin 2x$

$\rightarrow$ Folosind formula Newton-Raphson, obținem:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin 3x_n - \cos 2x_n}{3\cos 3x_n + 2\sin 2x_n}.$$

$\rightarrow$ Avem iterațiile:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0.33333 \\ x_3 &= 0.31388 \\ x_4 &= 0.31416 \\ x_5 &= 0.31416 \end{aligned}$$

Observație: Pentru soluția ecuației $x = \frac{\pi}{10} \Rightarrow x_4 = x_5 = 0.31416 \approx \frac{\pi}{10}$.

Metoda lui Newton-Raphson pentru rezolvarea sistemelor neliniare

Fie $m \in \mathbb{N}^*$, D o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^m$ și $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcție de clasă $C^2(D)$
Dacă presupunem că $f'(x)$ este inversabilă pentru orice $x \in D$, atunci ecuatia $f(x) = 0$ se transformă echivalent astfel:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + f'(x)(x - x) = 0 \Leftrightarrow x = x - \left(f'(x)\right)^{-1} f(x).$$

- În ipotezele de mai sus (fără a presupune că $f'(x)$ este inversabilă $(\forall)\, x \in D$), pentru orice $x_0 \in D$, definim, dacă este posibil, șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin relația de recurență:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \left(f'(x_n)\right)^{-1} f(x_n) \\ &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Fie $\|\cdot\|$ o normă pe $\mathbb{R}^m$.
Notăm tot cu $\|\cdot\|$ norma matricială asociată.

- Presupunem că există $a \in D, r > 0, M > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \mu > 0, q \in (0, 1)$ astfel încât:

1) $V := \overline{B_r(a)} := \{x \in \mathbb{R}^m | \, \|x - a\| \leq r\} \subset D$;
2) $\|f''(x)\| \leq M, \quad (\forall)\, x \in V$;
3) $(\exists)\, (f'(a))^{-1}$ și $\left\|(f'(a))^{-1}\right\| \leq \alpha$;
4) $Mr\alpha < 1$ și

$$\frac{\alpha}{1 - Mr\alpha} \leq \frac{1}{\mu};$$

5) $\left\|(f'(a))^{-1} f(a)\right\| \leq \beta \leq (1 - q)r$;

6)

$$\frac{M}{\mu^2}\|f(x)\| \leq q, \quad (\forall)\, x \in V;$$

7)

$$\frac{Mr}{\mu} \leq q.$$

- Atunci ecuația $f(x) = 0$ are o soluție unică $z \in V$ și pentru orice $x_0 \in V$ se poate construi șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (prin relația de recurență (2.1)) cu proprietățile: $x_n \in V$ și

$$\|x_n - z\| \leq \frac{2\mu}{M} q^{2^n}, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$$

Exemplu numeric

Fie sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 + 3xz^2 - 183x + 2 = 0 \\ y^3 + 3x^2y + 3yz^2 - 193y + 1 = 0 \\ z^3 + 3x^2z + 3y^2z - 188(z-1) - 1 = 0. \end{cases}$$

Folosind metoda lui Newton relativă la norma $\|\cdot\|_\infty$, să se arate că sistemul de mai sus are soluție unică v în $V = [-1,1]^2 \times [0,2]$. Pentru o eroare ε dată și pentru iterata inițială $x_0 = (0,0,1)$, să se calculeze iterata x_n, pentru care $\|x_n - v\|_\infty \le \varepsilon$.

Soluție.

$\rightarrow$ Fie $r = 1$ și $a = (0,0,1)$

$\rightarrow$ Atunci mulțimea V este $\overline{B_r(a)}$ în raport cu norma $\|\cdot\|_\infty$

$\rightarrow$ Fie funcția $F = (f,g,h) : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ cu

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^3 + 3xy^2 + 3xz^2 - 183x + 2 \\ g(x,y,z) &= y^3 + 3x^2y + 3yz^2 - 193y + 1 \\ h(x,y,z) &= z^3 + 3x^2z + 3y^2z - 188(z-1) - 1, \quad (\forall)\,(x,y,z) \in V \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Sistemul de ecuații devine astfel echivalent cu $F(x,y,z)=0$
$\longrightarrow$ Avem:

$$F'(x,y,z)=$$
$$\begin{pmatrix} 3x^2+3y^2+3z^2-183 & 6xy & 6xz \\ 6xy & 3y^2+3x^2+3z^2-193 & 6yz \\ 6xz & 6yz & 3z^2+3x^2+3y^2-188z \end{pmatrix}$$

$$F''(x,y,z)=\begin{pmatrix} 6x & 6y & 6z & 6y & 6x & 0 & 6z & 0 & 6x \\ 6y & 6x & 0 & 6x & 6y & 6z & 0 & 6z & 6x \\ 6z & 0 & 6x & 0 & 6z & 6y & 6x & 6y & 6z \end{pmatrix}$$

Așadar,

$\|F''(x,y,z)\|_\infty \leq$
$\max\left(|18x|+|12y|+|12z|, |12x|+|18y|+|12z|, |12x|+|12y|+|18z|\right) \leq$
$\max(54,54,60) = 60$

(am folosit $-1 \leq x, y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2$)

$\longrightarrow$ Considerăm $M = 60$

$\longrightarrow$ Avem

$$F'(a) = \begin{pmatrix} -180 & 0 & 0 \\ 0 & -190 & 0 \\ 0 & 0 & -185 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ $F'(a)$ este inversabilă și astfel,

$$\left(F'(a)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/180 & 0 & 0 \\ 0 & -1/190 & 0 \\ 0 & 0 & -1/185 \end{pmatrix}$$

$$\left\|\left(F'(a)\right)^{-1}\right\|_\infty = \max(1/180, 1/190, 1/185) = 1/180$$

→ Considerăm $\alpha = 1/180$

→ Deoarece

$$Mr\alpha = \frac{60}{180} < 1 \text{ si } \frac{\alpha}{1 - Mr\alpha} = \frac{1}{120} \Rightarrow \text{ putem lua } \mu = 120.$$

→ Avem

$$\begin{aligned} F(a) &= (2, 1, 0)^t \\ \left(F'(a)\right)^{-1} F(a) &= (-\frac{1}{90}, -\frac{1}{190}, 0)^t \end{aligned}$$

→ Așadar

$$\left\|\left(F'(a)\right)^{-1} F(a)\right\|_\infty = 1/90.$$

→ Luăm $\beta = 1/90$.

→ Condiția $\beta \leq (1 - q)r$ implică $q \leq 89/90$

Din faptul că

$$\begin{aligned}
& \|F(x,y,z)\|_\infty \\
\leq \quad & \max(\left|x^3\right| + \left|3xy^2\right| + \left|3xz^2\right| + |183x| + 2, \\
& \left|y^3\right| + \left|3x^2y\right| + \left|3yz^2\right| + |193y| + 1, \\
& \left|z^3\right| + \left|3x^2z\right| + \left|3y^2z\right| + |188(z-1)| + 1) \\
\leq \quad & \max(201, 210, 209) = 210
\end{aligned}$$

rezultă că

$$\left(M/\mu^2\right)\|F(x,y,z)\|_\infty \leq q \Leftrightarrow q \geq \frac{210}{240} = \frac{7}{8}.$$

Din

$$\frac{Mr}{\mu} \leq q \Rightarrow q \geq \frac{1}{2}.$$

$\rightarrow$ Așadar putem lua $q = 7/8$ și astfel ecuația $F(x,y,z) = 0$ are soluție unică.

- În continuare, pentru $x_0 = (0, 0, 1)$, se calculează x_n cu formula de recurență (2.1) (folosind la fiecare pas o procedură de inversare a matricei $\left(F'(x_n)\right)^{-1}$)
- Se oprește calculul iterativ atunci când

$$\frac{2\mu}{M} q^{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 4 \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} \leq \varepsilon.$$

Metoda iterativă Newton - alternativă de implementare

Sistemul neliniar poate fi liniarizat prin dezvoltarea în serie Taylor
Presupunem că sistemul de ecuații este în forma de mai jos:

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

unde f_i este o funcție neliniară de $x_j, j = \overline{1, n}$.
Dacă avem o valoare inițială aleasă pentru soluție, vom putea scrie formula de construcție a soluției:

$$x_j = \widehat{x}_j + \Delta x_j,$$

unde x_j este valoarea inițială aleasă și Δx_j este o corecție necunoscută.
Dacă dezvoltăm în serie Taylor, cu trunchierea seriei până la ordinul întâi, funcțiile f_i în jurul valorii x_j, vom obține

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Delta x_j = -f_i(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, ..., \widehat{x}_n)$$

unde derivatele parțiale sunt evaluate cu valorile inițiale alese.

Ecuația poate fi scrisă sub formă matriceală astfel:

$$J\Delta x = f,$$

unde J este matricea Jacobiană dată de

$$J = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right], \quad \Delta x = \left[\begin{array}{c} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{array}\right], \quad f = \left[\begin{array}{c} f_1(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n) \\ f_2(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n) \\ \dots \\ f_n(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n) \end{array}\right].$$

Derivatele parțiale pot fi evaluate prin aproximarea cu diferențe, de exemplu:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_j + \delta\widehat{x}_j, \dots, \widehat{x}_n) - f_i(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, \widehat{x}_n)}{\delta\widehat{x}_j},$$

unde $\delta\widehat{x}_j$ este o valoare mică, arbitrar aleasă.