Laborator 12 - Integrare numerică. Metoda trapezului. Metoda lui Simpson

1 Metoda trapezului

Pentru a integra functii date prin valori, nu prin expresia lor analitică, se foloseşte funcţia **trapz(x,y),** unde **x** este domeniul pe care se face integrarea, iar **y** este expresia funcţiei (depinzând de x). Ea implementează regula trapezelor (nodurile nu trebuie să fie echidistante). Aceasta oferă rezultate bune la integrarea funcţiilor periodice pe intervale a căror lungime este un multiplu întreg al perioadei.

Problema 1.1. Să se aplice funcţia `trapz()` pentru calculul integralei**:**

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x} dx.$$

Să se determine eroarea de integrare numerică.

Soluţie.

```
>> x=linspace(0,2*pi,10);
>> y=1./(2+sin(x));
>> trapz(x,y)
ans =
3.62759872810065
>> 2*pi*sqrt(3)/3-ans
ans =
3.677835813675756e-010
```

Valoarea exactă a integralei fiind $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$, eroarea este mai mică decât 10^{-9}.

Problema 1.2. Să se scrie un program Matlab prin care să se aproximeze o integrală dată prin formula repetată a trapezului.

Soluţie.

```
function I=trapez(f,a,b,n);
%TRAPEZ formula trapezelor
```

```
%apel I=trapez(f,a,b,n);
h=(b-a)/n;
I=(f(a)+f(b)+2*sum(f([1:n-1]*h+a)))*h/2;
```

→expresia funcţiei de sub integrală este reţinută într-un script Matlab de tip funcţie cu numele `f.m` şi se poate realiza un apel de forma `trapez(@f,a,b,n)` cu `a,b,n` valori numerice date de utilizator.

2 Metoda lui Simpson

MATLAB are două funcţii de bază pentru integrare numerică, **quad()** si **quad1()**. Ambele necesită ca intervalul de integrare $[a, b]$ să fie finit şi integrandul să nu aibă nici o singularitate pe acest interval. Pentru tratarea limitelor infinite sau singularităţilor se pot încerca diverse trucuri cunoscute în analiza numerică cum ar fi schimbarea de variabilă, integrare prin părţi, cuadraturi gaussiene, ş.a.m.d.

Cea mai frecventă formă de apel este

```
q=quad(fun,a,b,tol)
```

(şi similar pentru `quadl()`), unde `fun` este funcţia de integrat. Ea poate fi dată sub formă de şir de caractere, obiect inline sau function handle. Important este să accepte la intrare vectori şi să returneze vectori. Argumentul `tol` este eroarea absolută (implicit 10^{-9}).

Forma

```
q = quad(fun,a,b,tol,trace)
```

cu trace nenul trasează (urmăreste) valorile `[fcount a b-a Q]` calculate în timpul aplicării recursive (afisează valoarea intermediară optională).

Forma

```
q=quad(fun,a,b,tol,trace,p1,p2,...)
```

transmite argumentele suplimentare `p1, p2,...` , direct lui `fun`, `fun(x,p1,p2,...)`. În acest caz, pentru a utiliza valori implicite ale lui `tol` sau `trace` în locul lor pe lista de parametri se vor trece matrice vide.

Forma

```
[q,fcount]=quad(...)
```

returnează numărul de evaluări de funcţii.

Problema 2.1. Să se aproximeze

$$\int_0^\pi x \sin x dx$$

folosind funcţia `quad()`.

Soluţie.
Integrandul îl putem păstra în fişierul `xsin.m`:

```
function y=xsin(x)
y=x.*sin(x);
```

Aproximanta se obţine astfel:

```
>> quad(@xsin,0,pi)
ans =
3.1416
```

Problema 2.2. Să se scrie un program Matlab prin care să se aproximeze o integrală dată prin formula repetată a lui Simpson.

Soluţie.

```
function I=Simpson(f,a,b,n);
%SIMPSON formula lui Simpson
%apel I=Simpson(f,a,b,n);
h=(b-a)/n;
x2=[1:n-1]*h+a;
x4=[0:n-1]*h+a+h/2;
I=h/6*(f(a)+f(b)+2*sum(f(x2))+4*sum(f(x4)));
```

→expresia funcţiei de sub integrală poate fi reţinută într-un script Matlab de tip funcţie cu numele `f.m`, după care se poate realiza un apel de forma `Simpson(@f,a,b,n)` cu `a,b,n` valori numerice date de utilizator.

3 Probleme propuse

1. Să se implementeze în Matlab formula de la Metoda trapezului si să se aproximeze integrala din exemplul de la curs. Să se obţină şi eroarea de aproximare/integrare.
2. Să se implementeze în Matlab formula de la Metoda lui Simpson si să se aproximeze integrala din exemplul de la curs. Să se obţină şi eroarea de aproximare/integrare.
3. Să se aproximeze

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$$

folosind funcţiile `trapz()` şi `quad()`. Ce se observă?

Breviar teoretic şi exerciţii rezolvate - Curs 12

1. Formula trapezului

- Fie integrala
$$I = \int_a^b f(x)dx.$$
- Aproximăm $f(x)$ prin polinomul liniar $P_1(x)$ de forma:
$$P_1(x) = \frac{(b-x)f(a) + (x-a)f(b)}{b-a},$$
care interpolează $f(x)$ în a şi b.
- Integrala lui $P_1(x)$ pe intervalul $[a, b]$ este aria trapezului cuprins între reprezentarea grafică a funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x = a, x = b$ şi este dată de relaţia:
$$T_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] \tag{1}$$
- Avem relaţia:
$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right],$$

formulă cunoscută sub numele de **Formula trapezului** sau **Formula de cuadratură a trapezului**.

- Dacă $f \in C^2([a, b])$, din formula de evaluare a erorii de interpolare, avem
$$|I - T_1| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|. \tag{2}$$
Putem rescrie
$$I = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] + R(f),$$
unde $R(f)$ este eroarea de trunchiere ce poate fi aproximată conform (2):
$$R(f) \approx -\frac{(b-a)^3}{12} f''$$

- *Formula generală* pentru Metoda trapezului:

$$T_n(f) = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right],$$

  unde $x_i = a + ih$, $i = \overline{0, n}, h = \frac{b-a}{n}$.

Exemplu.
Fie integrala

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx.$$

$\rightarrow$ Valoarea reală a integralei este $I = \ln 2 \approx 0.69$
$\rightarrow$ Conform (1), avem

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} = 0.75$$

$\rightarrow$ Eroarea este

$$I - T_1 = 0.69 - 0.75 = -0.06$$

$\rightarrow$ Pentru a îmbunătăţi aproximarea T_1 când $f(x)$ nu este o funcţie liniară pe $[a, b]$, se împarte intervalul $[a, b]$ în subintervale mai mici şi se aplică relaţia (1) pe fiecare subinterval

$\rightarrow$ În continuare, evaluăm exemplul anterior utilizând formula (1) pe două subintervale de lungimi egale

$$I = \int_0^{1/2} \frac{1}{1+x}dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{1+x}dx$$

$\rightarrow$ Rezultă astfel:

$$T_2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{24} \approx 0.7$$

$\rightarrow$ În acest caz, eroarea devine

$$I - T_2 = 0.69 - 0.7 = -0.01$$

---

2. Formula lui Simpson

- Se aproximează variaţia functiei de integrat între 3 noduri succesive x_{i-1}, x_i, x_{i+1} printr-un polinom de interpolare de gradul doi de forma:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$$

- Se aproximează aria subîntinsă de funcţia de integrat între punctele x_{i-1} şi x_{i+1} cu aria subîntinsă de parabola P între punctele $-h$ şi h

$$I_i = \int_{-h}^{h} P(x)dx = \int_{-h}^{h} \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right) dx = 2h\left(c_0 + \frac{h^2}{3}c_2\right).$$

- Din condiţiile de interpolare se calculează

$$\begin{aligned} c_0 &= f(x_i) \\ c_1 &= \frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i+1})}{2h^2} \\ c_2 &= \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{2h^2} \end{aligned}$$

necesare în evaluarea integralei

$$I_i = \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

- Însumând toate ariile I_i pentru $i = 1, 3, 5, ..., n-1$, rezultă

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + f(x_n)\right]$$

cunoscută sub numele de **Formula lui Simpson 1/3** sau **Formula de cuadratură a lui Simpson 1/3**

- Aici, n reprezintă numărul de perechi de intervale şi $h = (b-a)/2n$
- Dacă vom considera

$$\begin{aligned} s_1 &= f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + ... + f(x_{2k-1}) \\ s_2 &= f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + ... + f(x_{2k}), \end{aligned}$$

atunci formula lui Simpson 1/3 se poate scrie sub forma:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4s_1 + 2s_2\right]$$

- Dacă $f \in C^3([a,b])$, din formula de evaluare a erorii de interpolare, avem

$$|I - S_1| \leq \frac{(b-a)^4}{192} \cdot \max_{x\in[a,b]} |f'''(x)|. \tag{3}$$

- Putem rescrie

$$I = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + R(f),$$

unde $R(f)$ este eroarea de trunchiere ce poate fi aproximată conform (3):

$$R(f) \approx -\frac{(b-a)^4}{192} f'''$$

- Integrala lui $P(x)$ pe intervalul $[a, b]$ cu $h = (b-a)/2$ şi

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= \frac{a+b}{2} \\ x_2 &= b \end{aligned}$$

este dată de relaţia:

$$\begin{aligned} S_1(f) &= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \\ &= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \end{aligned} \quad (4)$$

Exemplu.
Considerăm integrala

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx.$$

Să se aplice formula lui Simpson 1/3 pentru estimarea integralei.
Soluţie. Conform (4),

$$\begin{aligned} h &= \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2} \\ S_1 &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \\ &= \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)\right] \\ &= \frac{1/2}{3}\left[1 + 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{25}{36} \approx 0.6944 \end{aligned}$$

Eroarea este

$$I - S_1 = \ln 2 - S_1 = -0.0044$$
