Curs 9: Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare. Metoda bisecției. Metoda aproximațiilor succesive. Metoda secantei

Octavia-Maria BOLOJAN

octavia.nica@math.ubbcluj.ro

29 Noiembrie 2017

Ecuații neliniare

- Cel mai simplu tip de ecuații neliniare sunt ecuațiile polinomiale cu o singură variabilă de forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0, \tag{1.1}$$

  unde $a_n \neq 0$.
- Această ecuație este neliniară dacă $n \geq 2$
- Pentru $n = 2$, formula de rezolvare a ecuației (1.1) este dată de

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_1}}{2a_2}$$

- dacă $n \geq 5$, nu există nicio formulă de rezolvare exactă a ecuației (1.1)

Exemple de ecuații neliniare:

$i)\ x^3 - 2016x + 2016 = 0$
$ii)\ 3x^8 - 9x^4 + 27x^2 - 81 = 0$
$iii)\ 4\cos x - 2\cos 3x + 8\cos 5x = 0$
$iv)\ 2x = e^{-x}$
$v) x \lg x + 3x^2 = \sin x$

- pt i), ii), iii) există modele directe de rezolvare
- iii) poate fi transformat intr-un polinom de grad 5, notând $t = \cos x$ ($\cos x, \cos 3x, \cos 5x$ pot fi exprimate ca polinoame sub forma de $\cos x$)
- iv), v) nu pot fi transformate sub forma de polinoame -> se numesc *ecuații transcendente*

Metode iterative de rezolvare a ecuațiilor neliniare

- O metoda iterativă pentru rezolvarea unei ecuații cu o singură necunoscuta x, este o metodă a cărei secvență de aproximare $\{x_n\}$ a soluției este calculată folosind o formulă de tipul

$$x_n = F_n(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) \tag{2.1}$$

- Procesul este terminat atunci când unele condiții sunt satisfăcute, cum ar fi condiția

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

pentru unele valori predefinite ale lui ε (de exemplu $\frac{1}{5} \cdot 10^{-10}$)

- În practică, funcția $F_n(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ din ecuația (2.1) poate să aibă cel mult doi dintre membrii ecuației anterioare și aceștia probabil vor fi x_{n-1} și x_{n-2}, astfel încât formula folosită să fie de forma

$$x_n = F_n(x_{n-1})$$

sau

$$x_n = F_n(x_{n-1}, x_{n-2})$$

Exemplu

Folosind procedura iterativă $x_{n+1} = x_n^2 - 1$
i) începând cu $x_0 = 1$
ii) începând cu $x_0 = 2$,
să se continue determinarea iterațiilor pentru 4 pași.

Soluție.

i) $x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = -1$
ii) $x_0 = 2, x_1 = 1 = 3, x_2 = 8, x_3 = 63, x_4 = 3968$

$\rightarrow$ Este evident că nu avem convergență în niciunul dintre cele două cazuri, deși există o soluție a ecuației atașate, $x = x^2 - 1$, care se găsește între 1 și 2 ($x \simeq 1.61803$)
$\rightarrow$ Chiar dacă pornim cu o valoare inițială care să fie apropiată de soluție, cum ar fi $x_0 = 1.618$, aceasta procedură nu este convergentă.

Metoda bisecției

Theorem

Fie $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu $f(a)f(b) < 0$. Atunci există $z \in [a, b]$ astfel încât $f(z) = 0$.

Definim șirurile $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}, (c_n)_{n\geq 0}$ astfel:

- $a_0 := a$, $b_0 := b$, $c_0 := (a+b)/2$
- Pentru $n \geq 1$:

$\to$ dacă $f(c_{n-1}) = 0$, atunci

$$\begin{cases} a_n := a_{n-1} \\ b_n := b_{n-1} \\ c_n := c_{n-1} \end{cases}$$

$\to$ dacă $f(a_{n-1}) \cdot f(c_{n-1}) < 0$, atunci

$$\begin{cases} a_n := a_{n-1} \\ b_n := c_{n-1} \\ c_n := (a_n + b_n)/2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ dacă $f(a_{n-1}) \cdot f(c_{n-1}) > 0$, atunci

$$\begin{cases} a_n := c_{n-1} \\ b_n := b_{n-1} \\ c_n := (a_n + b_n)/2 \end{cases}$$

- Presupunem că funcția f are o singură rădăcină în intervalul $[a, b]$.
- Atunci șirul $(c_n)_{n \geq 0}$ construit mai sus converge la unica soluție $z \in [a, b]$ a ecuației $f(x) = 0$ și

$$|c_n - z| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

1. Să se aproximeze numărul $\sqrt{2}$ folosind Metoda bisecției cu patru pași pentru funcția $f : [1,2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2$. Să se evalueze eroarea de aproximare.
2. Să se aproximeze, folosind metoda bisecției, soluția ecuației $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ (conținută în intervalul $[-1,2]$).

Soluții.

1.

$\rightarrow$ $a_0 = a = 1, b_0 = b = 2, \ f(a) = -1, f(b) = 2$

$\rightarrow$ $c_0 = (a_0 + b_0)/2 = 3/2$

$\rightarrow$ Cum $f(c_0) = 1/4 > 0$ și astfel $f(a_0)f(c_0) = -4 < 0$, rezultă că:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 = 1 \\ b_1 &= c_0 = 3/2 \\ c_1 &= (a_1 + b_1)/2 = 5/4 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Cum $f(c_1) = f(5/4) = -7/16 < 0$ și $f(a_1) = f(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ $f(a_1)f(c_1) > 0$ și astfel:

$$\begin{aligned} a_2 &= c_1 = 5/4 \\ b_2 &= b_1 = 3/2 \\ c_2 &= (a_2 + b_2)/2 = 11/8 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Cum $f(c_2) = f(11/8) = -7/64 < 0$ și $f(a_2) = f(5/4) = -7/16 < 0 \Rightarrow$ $f(a_2)f(c_2) > 0$ și astfel:

$$\begin{aligned} a_3 &= c_2 = 11/8 \\ b_3 &= b_2 = 3/2 \\ c_3 &= (a_3 + b_3)/2 = 23/16 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Cum $f(c_3) = f(23/16) = 17/256 > 0$ și $f(a_3) = f(11/8) = -7/64 < 0 \Rightarrow f(a_1)f(c_1) < 0$ și astfel:

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 = 11/8 \\ b_4 &= c_3 = 23/16 \\ c_4 &= (a_4 + b_4)/2 = 45/32. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$Eroarea de aproximare este:

$$\left| c_4 - \sqrt{2} \right| \leq \frac{b-a}{2^4} = \frac{1}{16}$$

Metoda contracției sau Metoda aproximațiilor succesive

Definition

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție. Funcția f se numește **contracție** dacă și numai dacă
(a) există $q \in (0, 1)$ astfel încât

$$|f(x) - f(y)| \leq q\,|x - y|,$$

pentru orice $x, y \in I$;
(b) $f(I) \subset I$.

Theorem

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă.
(a) Dacă există $q\in(0,1)$ astfel încât $|f'(x)|\le q$, pentru orice $x\in[a,b]$, atunci

$$|f(x)-f(y)|\le q\,|x-y|\,,\quad (\forall)\,x,y\in[a,b].$$

(b) Dacă

$$|f(x)-f(y)|\le q\,|x-y|$$

și

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{a+b}{2}\right|\le(1-q)\,\frac{b-a}{2},$$

atunci

$$f\left([a,b]\right)\subset[a,b].$$

- Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o contracție și $x_0 \in I$.
- Definim șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ prin relația de recurență

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$$

- Atunci ecuația $f(x) = x$ are o **soluție unică** $x \in [a, b]$, iar șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ converge la x, cu următoarea **formulă de evaluare a erorii**:

$$|x_n - x| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$$

Exemple

1. Fie funcția
$$f : \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + x - \frac{7}{16}.$$
Să se arate că f este o contracție. Luând $x_0 = -\frac{5}{8}$, să se determine numărul de iterații necesare pentru a aproxima soluția ecuației $f(x) = x$ cu o eroare ε.

2. Să se calculeze primele trei iterate ale Metodei contracției pentru rezolvarea ecuației $x = \sqrt{2x}$, luând $x_0 = 1/10$.

Soluții.
1.

- Funcția f este derivabilă și $f'(x) = 2x + 1$
- Avem:

$$\max_{x\in\left[-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right]} \left|f'(x)\right| = \max_{x\in\left[-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right]} |2x+1| = -2\left(-\frac{3}{4}\right) - 1 = \frac{1}{2}$$

- Astfel,

$$\left|f'(x)\right| \leq q = \frac{1}{2} \in (0,1).$$

- Considerăm $a = -3/4, b = -1/2$
- Atunci:

$$\begin{aligned}
\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2}\right| &\leq (1-q)\,\frac{b-a}{2} \Leftrightarrow \\
\left|f\left(-\frac{5}{8}\right) + \frac{5}{8}\right| &\leq \left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{8} \Leftrightarrow \\
\left|\frac{25}{64} - \frac{5}{8} - \frac{7}{16} + \frac{5}{8}\right| &\leq \frac{1}{16} \Leftrightarrow \\
\frac{3}{64} &\leq \frac{4}{64}, \text{ relație adevărată.}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ este o contracție

- Fie z solutia ecuației $f(x) = x$ pe intervalul $[a, b]$
- Din formula de evaluare a erorii, avem:

$$|x_n - z| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| .$$

- Dacă

$$\frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon, \text{ atunci } |x_n - z| \leq \varepsilon,$$

  așadar x_n aproximează pe z cu eroarea ε.
- Avem:

$$x_1 = f(x_0) = f\left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{25}{64} - \frac{5}{8} - \frac{7}{16} = -\frac{43}{64}$$

  și

$$|x_1 - x_0| = \left|-\frac{43}{64} + \frac{5}{8}\right| = \frac{3}{64}.$$

- Atunci

$$\begin{aligned}\frac{q^n}{1-q}\left|x_1-x_0\right| &\leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{64}\leq\varepsilon\Leftrightarrow \\ \frac{3}{2^{n+5}} &\leq \varepsilon\Leftrightarrow 2^{n+5}\geq\frac{3}{\varepsilon}\Leftrightarrow n\geq\log_2\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)-5.\end{aligned}$$

- Astfel, putem considera

$$n=\left[\log_2\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)\right]-4.$$

2.

- Fie $f(x) = \sqrt{2x}$
- Avem:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0.44721 \\ x_2 &= f(x_1) = \sqrt[4]{\frac{4}{5}} = 0.94574 \\ x_3 &= f(x_2) = \sqrt[8]{\frac{64}{5}} = 1.375312. \end{aligned}$$

Metoda secantei

- Dacă x_{n-1}, x_n sunt două aproximări succesive ale soluției ecuației $f(x) = 0$, atunci alegem:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \tag{5.1}$$
ca fiind următoarea aproximare.

- Dacă $|x_{n+1} - x_n|$ este suficient de mic, ne oprim și îl luăm pe x_{n+1} ca fiind soluția
- În caz contrar, se repetă procedeul folosit în relația (5.1) înlocuind pe x_n cu x_{n+1} și pe x_{n-1} cu x_n pentru a găsi o nouă aproximare x_{n+2}.
- Procedeul se repetă până când se obține aproximarea dorită

Theorem

Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *și* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcție. Definim recurent șirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *astfel:*

$$x_0, x_1 \in [a, b], \quad x_{n+1} := \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Theorem

Presupunem că f *este derivabilă pe* $[a, b]$ *și*
a) $f'(x) \neq 0, \quad (\forall)\, x \in [a, b]$;
b) șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ *are toate valorile în intervalul* $[a, b]$;
c) $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Atunci ecuația $f(x) = 0$ *are o soluție unică* $z \in [a, b]$, *iar șirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *converge la* z.

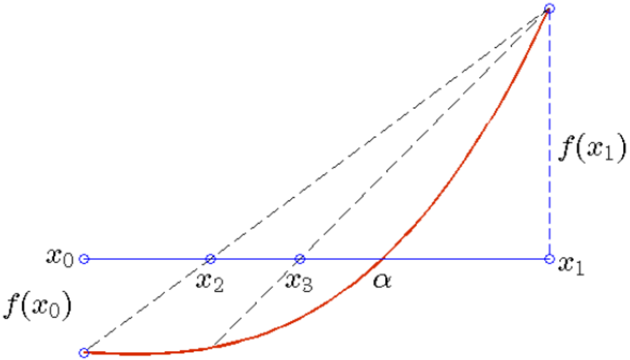

Figure: Ilustrarea metodei secantei

Exemplu

Să se aplice metoda secantei pe intervalul $[0, 1/2]$ pentru rezolvarea ecuației $4x^3 - 6x + 1 = 0$ pentru $x_0 = 1/2$ si $x_1 = 1/4$. Să se determine primele trei iterații din metodă.

Soluție.

- Fie $f(x) = 4x^3 - 6x + 1$.
- Funcția f este derivabilă pe $[0, 1/2]$ si $f'(x) = 12x^2 - 6$, funcție care nu se anulează pe $[0, 1/2]$ $(f'(x) \neq 0, \quad (\forall)\, x \in [0, 1/2])$
- Deoarece $f(0) \cdot f(1/2) = -3/2 < 0 \Rightarrow$ecuația are o rădăcină în intervalul $[0, 1/2]$.
- Avem

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{1}{5} \\
x_3 &= \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{6}{37} \\
x_4 &= \frac{x_2 f(x_3) - x_3 f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = \frac{312}{1835}.
\end{aligned}
$$