Laborator 13 - Metode Numerice

1 Elemente fundamentale de programare în Matlab. Reprezentări grafice 2D/3D

1. Determinaţi dezvoltarea în serie Taylor de ordinul 10 a lui e^x în jurul lui $x = 0$. Similar, determinaţi şi dezvoltarea în serie Taylor de ordinul 10 pentru $\sin x$, respectiv $\cos x$ în jurul lui $x = \pi$.

2. Să se implementeze în Matlab algoritmul lui Euclid de determinare a celui mai mare divizor comun a două numere. Să se citească apoi un şir de N termeni, $N \geq 3, N \in \mathbb{N}$ şi să se determine cel mai mare divizor comun al celor N numere.

3. Să se genereze în Matlab triunghiul lui Pascal.

4. Scrieţi cod Matlab care generează, pentru o valoare dată a lui n, matricea tridiagonală

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & n & & & & \\ -2 & 2 & n-1 & & & \\ & -3 & 3 & n-2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -n+1 & n-1 & 2 \\ & & & & -n & n \end{bmatrix}.$$

5. (Curba fluture). Să se reprezinte curba polară

$$r(t) = e^{\cos(t)} - a\cos(bt) + \sin^5(ct),$$

pentru valorile: (a) $a = 2, b = 4, c = 1/12$; (b) $a = 1, b = 2, c = 1/4$; (c) $a = 3, b = 1, c = 1/2$. Experimentaţi pentru t în intervale de forma $[0, 2k\pi]\,, k \in \mathbb{N}$ şi ilustraţi în aceeaşi fereastră rezultatele obţinute.

6. (Elicoid). Să se reprezinte grafic suprafaţa parametrică dată prin

$$\chi(u, v) = (av\cos u, bv\sin u, cu + ev)\,,$$

unde $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-d, d)\,, d \in \mathbb{N}$, pentru (a) $a = 2, b = c = 1, e = 0$; (b) $a = 3, b = 1, c = 2, e = 1$.

2 Metode numerice directe pentru rezolvarea sistemelor liniare

1. Se consideră sistemul

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \quad &= 1 \\ -x_{j-1} + 2x_j - x_{j+1} \quad &= j \ , \qquad j = \overline{2, n-1}. \\ -x_{n-1} + 2x_n \quad &= n \end{aligned}$$

   (a) Să se genereze matricea sistemului pentru o valoare n dată. Folosiţi (eventual) comanda `diag`.

   (b) Să se rezolve folosind descompunerea LU.

2. Să se determine matricea metodei Gauss-Seidel pentru matricea

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 10x_1 + 10^{18}x_2 = 10 + 10^{18} \end{cases}.$$

   (a) Să se rezolve sistemul prin eliminare Gaussiană;

   (b) Să se rezolve sistemul prin eliminare Gaussiană cu pivotare parţială;

   (c) Împărţiţi fiecare linie cu maximul în modul din linia respectivă şi apoi utilizaţi eliminarea Gaussiană pentru rezolvarea sistemului.

   (d) Rezolvaţi sistemul folosind toolbox-ul Symbolic.

3 Aproximarea funcţiilor. Interpolare

1. Considerăm datele

$$\begin{aligned} &x = -5 : 5; \\ &y = [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0]\,. \end{aligned}$$

   Să se determine coeficienţii aproximantei polinomiale de grad 7 în sensul celor mai mici pătrate corespunzătoare şi să se reprezinte pe acelaşi grafic aproximanta şi polinomul de interpolare Lagrange.

2. Aproximaţi
$$y = \frac{1+x}{1+2x+3x^2}$$
pentru $x \in [0,5]$ folosind interpolările Lagrange şi Spline cubică. Alegeţi cinci noduri şi reprezentaţi pe acelaşi grafic funcţia şi interpolanţii. Reprezentaţi apoi erorile de aproximare.

4 Metode iterative de rezolvare a ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii neliniare

1. Fie funcţia
$$f : \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + x - \frac{5}{16}.$$
Să se arate că f este o contracţie. Luând $x_0 = -\frac{3}{8}$, să se determine numărul de iteraţii necesare pentru a aproxima soluţia ecuaţiei $f(x) = x$ cu o eroare $\varepsilon = 10^{-5}$.

2. Să se calculeze primele zece iterate ale Metodei aproximaţiilor succesive pentru rezolvarea ecuaţiei $x = \sqrt{3x}$, luând $x_0 = 1/8$. Consideraţi apoi $x_0 = 1/2$, $x_0 = 2/3, x_0 = 1$, respectiv $x_0 = 3/2$. Precizaţi pentru care din valorile iniţiale x_0 s-au obţinut cele mai bune rezultate.

3. Să se implementeze în Matlab Metoda Newton-Raphson pe intervalul $\left[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right]$ pentru rezolvarea ecuaţiei $2x^3 - 2x + 1 = 0$. Luând $x_0 = 1/8$, să se determine primele zece iteraţii din metodă. Consideraţi ulterior $x_0 = 1/4$ şi precizaţi în care dintre cele două cazuri se obţin rezultate mai bune în ceea ce priveşte aproximarea soluţiilor ecuaţiei propuse.

4. Se doreşte rezolvarea ecuaţiei $x^3+4x^2-3 = 0$, pe intervalul $[1,2]$. Precizaţi care dintre metodele de aproximare a soluţiei unei ecuaţii neliniare poate fi aplicată (Metoda aproximaţiilor succesive, Metoda bisecţiei, Metoda secantei, Metoda Newton-Raphson). Specificaţi apoi care dintre aceste metode este cea mai eficientă pentru aproximarea soluţiei ecuaţiei date.

5 Derivare şi integrare numerică în Matlab

1. Să se aproximeze derivatele de ordinul I şi ordinul II ale funcţiei $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$, în punctul $x_0 = 2$ cu pasul $h = 0.01$.

2. Să se aproximeze integrala definită
$$\int_0^\pi x^2 \cos^2 2x dx,$$
folosind Metoda trapezului si Metoda lui Simpson. Să se precizeze (algoritmic) care metodă este mai eficientă.

3. Aproximaţi

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2} dx,$$

folosind formula repetată a trapezelor şi formula repetată a lui Simpson, pentru diverse valori ale lui n. Cum variază precizia în funcţie de n? Reprezentaţi grafic.