Curs 5:
Metode iterative pentru rezolvarea sistemelor liniare: Metoda lui Jacobi, Metoda Gauss-Seidel Metoda relaxării succesive

Octavia-Maria BOLOJAN

1 Noiembrie 2017

- p-norma unui vector $x \in \mathbb{R}^n$ se definește prin

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

- pentru $p = \infty$, norma este definită prin

$$\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$$

- Norma $\|\cdot\|_2$ se numește **normă euclidiană**
- Norma $\|\cdot\|_1$ se numește **normă Minkowski**
- Norma $\|\cdot\|_\infty$ se numește **normă Cebîșev**

- Funcția Matlab `norm()` calculează p-norma unui vector
- Ea este apelată sub forma `norm(x,p)`, cu valoarea implicită $p = 2$
- În cazul $p = -Inf$, se calculează cantitatea $\min_i |x_i|$

Exemplu:

```
>> x=1:4;
>> [norm(x,1),norm(x,2),norm(x,Inf),norm(x,-Inf)]
ans =
 10.0000 5.4772 4.0000 1.0000
```

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A^T transpusa lui A, A^* *transpusa conjugată a lui* A

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A^T transpusa lui A, A^* *transpusa conjugată a lui* A
- polinomul $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ - *polinomul caracteristic al lui* A

- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, A^T transpusa lui A, A^* *transpusa conjugată a lui* A
- polinomul $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ - *polinomul caracteristic al lui* A
- rădăcinile ecuației atașate, $p(\lambda) = 0$ se numesc *valori proprii ale lui* A

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A^T transpusa lui A, A^* *transpusa conjugată a lui* A
- polinomul $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ - *polinomul caracteristic al lui* A
- rădăcinile ecuației atașate, $p(\lambda) = 0$ se numesc *valori proprii ale lui* A
- $Ax = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}$ - *valoare proprie,* $x \neq 0$ - *vector propriu*

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, A^T$ transpusa lui A, A^* *transpusa conjugată a lui* A
- polinomul $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ - *polinomul caracteristic al lui* A
- rădăcinile ecuației atașate, $p(\lambda) = 0$ se numesc *valori proprii ale lui* A
- $Ax = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}$ - *valoare proprie*, $x \neq 0$ - *vector propriu*
- mulțimea valorilor proprii ale lui A (*spectrul lui* A) se notează cu $\lambda(A)$

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, A^T$ transpusa lui A, A^* *transpusa conjugată a lui* A
- polinomul $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ - *polinomul caracteristic al lui* A
- rădăcinile ecuației atașate, $p(\lambda) = 0$ se numesc *valori proprii ale lui* A
- $Ax = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}$ - *valoare proprie*, $x \neq 0$ - *vector propriu*
- mulțimea valorilor proprii ale lui A (*spectrul lui* A) se notează cu $\lambda(A)$
- Valoarea $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ valoare proprie a lui } A\}$ - *raza spectrală a matricei* A

- O matrice se numește:
  - normală, dacă $AA^* = A^*A$;
  - unitară, dacă $AA^* = A^*A = I_n$;
  - ortogonală, dacă $AA^T = A^TA = I_n$, A reală;
  - hermitiană, dacă $A^* = A$;
  - simetrică, dacă $A^T = A$, A reală.
- O normă matricială este o aplicație $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, care pentru orice matrice A, B și orice scalar $\alpha \in \mathbb{C}$ verifică
  1. $\|A\| \geq 0, \ \ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
  2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$;
  3. $\|A + B\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

Norme matriceale - exemple

- fiind dată o normă vectorială $\|\cdot\|$ pe $\mathbb{C}^n$, aplicația $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{R}$

$$\|A\| = \sup_{v\in\mathbb{C}^n, v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{v\in\mathbb{C}^n, \|v\|\leq 1} \|Av\| = \sup_{v\in\mathbb{C}^n, \|v\|=1} \|Av\|$$

  este o normă matricială numită *normă matriceală subordonată* (normei vectoriale date) sau *normă indusă* (de norma vectorială) sau *normă naturală*
- Orice normă subordonată verifică $\|I_n\| = 1$

Teoremă.

Fie $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Atunci

- $\|A\|_1 = \sup\limits_{v\in\mathbb{C}^m\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$;
- $\|A\|_2 = \sup\limits_{v\in\mathbb{C}^m\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A^*\|_2$;
- $\|A\|_\infty = \sup\limits_{v\in\mathbb{C}^m\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$.

Dacă A este normală $(AA^* = A^*A)$, atunci $\|A\| = \rho(A)$.

Teoremă.

- Fie A o matrice pătratică oarecare și $\|.\|$ o normă matriceală oarecare (subordonată sau nu). Atunci

$$\rho\left(A\right) \leq \left\|A\right\|.$$

- Fiind dată o matrice A și un număr $\varepsilon > 0$, există cel puțin o normă matriceală subordonată astfel încât

$$\left\|A\right\| \leq \rho\left(A\right) + \varepsilon.$$

- Funcția `norm()` se poate aplica și matricelor
- Ea se apelează sub forma `norm(A,p)`, unde A este o matrice și $p = 1, 2, Inf$ pentru o p-normă

Exemplu:

```
>> A=[1:3;4:6;7:9]
A =
 1 2 3
 4 5 6
 7 8 9
>> [norm(A,1),norm(A,2),norm(A,Inf)]
ans =
 18.0000 16.8481 24.0000
```

- Dorim să calculăm soluția sistemului liniar

$$Ax = b \tag{3.1}$$

când A este inversabilă.

- Presupunem că am găsit o matrice T și un vector c astfel încât $I - T$ să fie inversabilă și astfel încât punctul fix unic al ecuației

$$x = Tx + c \tag{3.2}$$

  să fie egal cu soluția sistemului $Ax = b$.
- Fie x^* soluția lui (3.1) sau, echivalent, a lui (3.2).

Iterații:

- se dă un $x^{(0)}$ arbitrar
- se definește șirul $\left(x^{(k)}\right)$ prin

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Teoremă.

Propozițiile următoare sunt echivalente

1. metoda (3.3) este convergentă;
2. $\rho\left(T\right) < 1$;
3. $\|T\| < 1$ pentru cel puțin o normă matriceală.

Teoremă.

Dacă există $\|.\|$ astfel încât $\|T\| < 1$, șirul $\left(x^{(k)}\right)$ definit de (3.3) este convergent pentru orice $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ și are loc

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.$$

- O metodă iterativă de rezolvare a unui sistem algebric liniar $Ax = b$ pornește de la o aproximație inițială $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ și generează un șir de vectori $\left\{x^{(k)}\right\}$ care converge către soluția x^* a sistemului.

Teoremă.

Dacă există $\|.\|$ astfel încât $\|T\| < 1$, șirul $\left(x^{(k)}\right)$ definit de (3.3) este convergent pentru orice $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ și are loc

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| \le \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.$$

- O metodă iterativă de rezolvare a unui sistem algebric liniar $Ax = b$ pornește de la o aproximație inițială $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ și generează un șir de vectori $\left\{x^{(k)}\right\}$ care converge către soluția x^* a sistemului.
- Aceste tehnici transformă sistemul inițial într-un sistem echivalent de forma

$$x = Tx + c,\ T \in \mathbb{R}^{n \times n},\ c \in \mathbb{R}^n.$$

Teoremă.

Dacă există $\|.\|$ astfel încât $\|T\| < 1$, șirul $\left(x^{(k)}\right)$ definit de (3.3) este convergent pentru orice $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ și are loc

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.$$

- O metodă iterativă de rezolvare a unui sistem algebric liniar $Ax = b$ pornește de la o aproximație inițială $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ și generează un șir de vectori $\left\{x^{(k)}\right\}$ care converge către soluția x^* a sistemului.
- Aceste tehnici transformă sistemul inițial într-un sistem echivalent de forma

$$x = Tx + c, T \in \mathbb{R}^{n \times n}, c \in \mathbb{R}^n.$$

- Se generează un șir de forma

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c.$$

Teoremă.

Dacă există $\|.\|$ astfel încât $\|T\| < 1$, șirul $\left(x^{(k)}\right)$ definit de (3.3) este convergent pentru orice $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ și are loc

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.$$

- O metodă iterativă de rezolvare a unui sistem algebric liniar $Ax = b$ pornește de la o aproximație inițială $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ și generează un șir de vectori $\left\{x^{(k)}\right\}$ care converge către soluția x^* a sistemului.
- Aceste tehnici transformă sistemul inițial într-un sistem echivalent de forma

$$x = Tx + c, T \in \mathbb{R}^{n\times n}, c \in \mathbb{R}^n.$$

- Se generează un șir de forma

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c.$$

- Un posibil criteriu de oprire este

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \leq \frac{1 - \|T\|}{\|T\|}\varepsilon.$$

El are la bază rezultatul următor:

Teoremă.

Dacă x^* este soluția sistemului (3.2) cu $\|T\| < 1$, atunci

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|.$$

- Dacă $\|T\| < 1$, inegalitatea de mai sus devine

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|,$$

  iar criteriul de oprire este

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| \leq \varepsilon.$$

Observație.

- Tehnicile iterative sunt rar utilizate pentru a rezolva sisteme de mici dimensiuni, deoarece timpul necesar pentru a obține precizia dorită depășește timpul necesar pentru eliminarea gaussiană
- Pentru sisteme rare (ale căror matrice au multe zero-uri), de mari dimensiuni, metodele iterative sunt eficiente și din punct de vedere al spațiului și din punct de vedere al timpului

- Fie sistemul $Ax = b$.
- Presupunem că putem scrie matricea inversabilă A sub forma $M - N$.
- Dacă M este ușor de inversat (diagonală, triunghiulară, etc.), este mai convenabil să procedăm astfel:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ &\Leftrightarrow \quad Mx = Nx + b \\ &\Leftrightarrow \quad x = M^{-1}Nx + M^{-1}b. \end{aligned}$$

- Ultima ecuație are forma:

$$x = Tx + c,$$

cu

$$T = M^{-1}N = I - M^{-1}A.$$

- Se obține șirul

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b, \quad k \in \mathbb{N},$$

$x^{(0)}$ vector arbitrar.

Metoda lui Jacobi

- Prima descompunere pe care o considerăm este $A = D - L - U$, unde

$$
\begin{aligned}
(D_{ij}) &= a_{ij}\delta_{ij}, \quad (-L)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i > j \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \\
(-U)_{ij} &= \begin{cases} a_{ij}, & i < j \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} .
\end{aligned}
$$

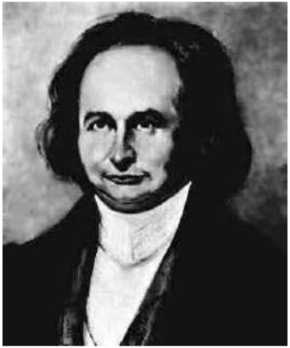
- Se ia $M = D$, $N = L + U$.
- Se obține succesiv

$$Ax = b \Leftrightarrow Dx = (L + U)\, x + b \Leftrightarrow x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b.$$

- Așadar,

$$T = T_J = D^{-1}(L + U), \; c = c_J = D^{-1}b.$$

Metoda se numește **Metoda lui Jacobi.**



Carl Gustav Jacobi (1804-1851) a fost contemporan al lui Gauss și unul dintre cei mai importanți matematicieni germani din secolul al XIX-lea. Numele său este legat de funcții eliptice, ecuațiile cu derivate parțiale ale dinamicii, mecanica cerească.

Matricea derivatelor parțiale poartă de asemenea numele său.

Este inventatorul metodei iterative de rezolvare a sistemelor algebrice liniare numită Metoda lui Jacobi și pe care a aplicat-o în mecanica cerească.

Metoda Gauss-Seidel

- Altă descompunere este

$$A = D - L - U, \quad M = D - L, \quad N = U.$$

- Se obține

$$\begin{aligned} T_{GS} &= (D - L)^{-1} U \\ c_{GS} &= (D - L)^{-1} b, \end{aligned}$$

numită **Metoda Gauss-Seidel**.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a fost unul dintre cei mai mari matematicieni ai secolului al XIX-lea și probabil al tuturor timpurilor. A trăit aproape toată viața în Gőttingen, unde a fost directorul observatorului astronomic 40 de ani. În timpul studenției la Gőttingen, Gauss a descoperit că poligonul cu 17 laturi poate fi construit cu rigla și compasul, rezolvând astfel o problemă deschisă a antichității.
În dizertația sa a dat prima demonstrație a teoremei fundamentale a algebrei. A avut contribuții fundamentale în teoria numerelor, geometrie diferențială și neeuclidiană, funcții eliptice și hipergeometrice, mecanică cerească și geodezie, precum și diverse ramuri ale fizicii, în special magnetism și optică. Eforturile sale de calcul în mecanica cerească și geodezie au necesitat rezolvarea manuală a unor sisteme de ecuații liniare mari, la care a utilizat metodele cunoscute astăzi sub numele de eliminare gaussiană și metoda relaxării.

Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896) a fost un matematician german cu importante contribuții în analiza numerică, optică, mecanică.
În 1847 a fost cel care a descoperit conceptul analitic de convergență uniformă, în timp ce analiza o demonstrație incorectă făcută de matematicianul Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
Un crater de pe Lună poartă denumirea Seidel, în cinstea contribuțiilor avute în studiul corpurilor cerești.

- Iterațiile Jacobi se scriu pe componente

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq 1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right).$$

- La calculul lui $x_i^{(k)}$ se utilizează componentele lui $x_i^{(k-1)}$ (substituție simultană).
- Deoarece pentru $i > 1$, $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_{i-1}^{(k)}$ au fost deja calculați și se presupune că sunt aproximații mai bune ale componentelor soluției decât $x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, ..., x_{i-1}^{(k-1)}$.
- La iterațiile Gauss-Seidel vom calcula $x_i^{(k)}$ utilizând valorile cele mai recente, adică

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right).$$

- Se pot da condiții necesare și suficiente pentru convergența Metodei lui Jacobi și a Metodei Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} \rho(T_J) &< 1 \\ \rho(T_{GS}) &< 1. \end{aligned}$$

- Condiții suficiente pentru o normă dată:

$$\begin{aligned} \|T_J\| &< 1 \\ \|T_{GS}\| &< 1. \end{aligned}$$

- Metoda Gauss-Seidel reprezintă o variantă superioară a Metodei Jacobi, caracterizată prin viteza de convergență sporită și necesar de memorie redus

- Metoda Gauss-Seidel reprezintă o variantă superioară a Metodei Jacobi, caracterizată prin viteza de convergență sporită și necesar de memorie redus
- Ideea de bază a metodei Gauss-Seidel constă în utilizarea în procesul iterativ Jacobi a celor mai recente componente ale soluției sistemului, pe măsura determinării lor, nu a celor de la iterația anterioară

- Metoda Gauss-Seidel reprezintă o variantă superioară a Metodei Jacobi, caracterizată prin viteza de convergență sporită și necesar de memorie redus
- Ideea de bază a metodei Gauss-Seidel constă în utilizarea în procesul iterativ Jacobi a celor mai recente componente ale soluției sistemului, pe măsura determinării lor, nu a celor de la iterația anterioară
- În general, metoda Gauss-Seidel converge mai rapid decât metoda Jacobi și, mai mult, poate converge chiar dacă algoritmul Jacobi diverge

- Metoda Gauss-Seidel reprezintă o variantă superioară a Metodei Jacobi, caracterizată prin viteza de convergență sporită și necesar de memorie redus
- Ideea de bază a metodei Gauss-Seidel constă în utilizarea în procesul iterativ Jacobi a celor mai recente componente ale soluției sistemului, pe măsura determinării lor, nu a celor de la iterația anterioară
- În general, metoda Gauss-Seidel converge mai rapid decât metoda Jacobi și, mai mult, poate converge chiar dacă algoritmul Jacobi diverge
- Cu toate acestea, sunt posibile și cazuri în care procesul Gauss-Seidel nu converge deloc

Metoda relaxării

- Putem îmbunătăți Metoda Gauss-Seidel introducând un parametru ω și alegând
$$M = \frac{D}{\omega} - L.$$
- Avem
$$A = \left(\frac{D}{\omega} - L\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + U\right),$$
iar iterația obținută este
$$\left(\frac{D}{\omega} - L\right) x^{(k+1)} = \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + U\right) x^{(k)} + b.$$
- Se obține matricea
$$\begin{aligned} T &= T_\omega = \left(\frac{D}{\omega} - L\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + U\right) \\ &= (D - \omega L)^{-1} \left((1-\omega) D + VU\right). \end{aligned}$$

Metoda se numește **Metoda relaxării**.

Avem următoarele variante:

- $\omega > 1$ - suprarelaxare (SOR - Successive Over Relaxation);
- $\omega < 1$ - subrelaxare;
- $\omega = 1$ - Gauss-Seidel.

Problema 1. Să se arate că se poate aplica metoda lui Jacobi (relativă la normele $\|.\|_1$ și $\|.\|_\infty$) pentru sistemul de ecuații liniare $Ax = b$, cu

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ -0.2 & 0.8 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & -0.3 & 0.7 & -0.1 \\ -0.3 & -0.2 & -0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3.6 \\ 2 \\ 2.4 \\ 1.5 \end{bmatrix}.$$

Luând $x^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0]^t$, să se determine numărul de iterații necesar pentru a aproxima soluția sistemului cu o eroare mai mică de 10^{-10}.

Observație.

- **Norme de vectori și norme de matrice** (A se vedea secțiunea Elemente de analiză matriceală)

(a) pe $\mathbb{C}^n$ se consideră normele vectoriale $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ definite astfel:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|,$$

$(\forall)\ x = (x_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{C}^n$.

(b) Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$. Avem:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right|, \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|.$$

- **Formula de evaluare a erorii**:

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\|_p \le \frac{q^k}{1-q} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_p$$

Pentru a aproxima x^* cu $x^{(k)}$ cu eroarea ε, este suficient ca:

$$\frac{q^k}{1-q} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_p < \varepsilon.$$

Problema 2. Fie sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ \frac{1}{5}x_1 + x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 2 \\ \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{20}x_2 + x_3 = 3 \end{cases} .$$

Să se arate că se poate aplica metoda Gauss-Seidel sistemului de mai sus.

Observație.

- Dacă

$$q = \max_{1 \le i \le n} q_i$$

cu

$$q_1 = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad q_i = \sum_{j=1}^{n-1} |a_{ij}|\, q_j + \sum_{j=1}^{n-1} |a_{ij}|, \quad 2 \le i \le n,$$

și

$$q < 1,$$

atunci avem evaluările:

$$\begin{aligned} \left\| x - x^{(k)} \right\|_\infty &\le \frac{q}{1-q} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|_\infty \\ &\le \frac{q^k}{1-q} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_\infty . \end{aligned}$$

- $x \leftrightarrow x^*$; în particular, $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$.