Curs 3: Teoria erorilor. Noțiuni introductive

Octavia-Maria BOLOJAN

octavia.nica@math.ubbcluj.ro

18 Octombrie 2017

Tipuri de erori

Aprecierea preciziei rezultatelor calculelor este un obiectiv important în Analiza numerică. Se disting mai multe tipuri de erori care pot limita această precizie:

- **erori în datele de intrare** - sunt în afara (dincolo de) controlului calculelor. Ele se pot datora, de exemplu, imperfecțiunilor inerente ale măsurătorilor fizice
- **erori de rotunjire** - apar dacă se fac calcule cu numere a căror reprezentare se restrânge la un număr finit de cifre
- **erori de aproximare** -multe metode nu dau soluția exactă a problemei P, ci a unei probleme mai simple $\widetilde{P}$, care aproximează P: integralele se aproximează prin sume finite, derivatele prin diferențe (divizate), etc. Aceste erori se numesc **erori de discretizare**.

Exemplu de eroare de aproximare

Se consideră problema (P) de aproximare a expresiei

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$$

Problema (P) se înlocuiește cu problema mai simplă $(\widetilde{P})$ a însumării unui număr finit de termeni

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

Eroarea de aproximare astfel obținută se numește **eroare de trunchiere** (totusi, acest termen este de asemenea utilizat pentru erorile de rotunjire comise prin ștergerea ultimelor cifre ale reprezentării).
Alte exemple de astfel de dezvoltări (în serie Taylor):

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \\
\ln(x) &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + ...
\end{aligned}$$

Probleme numerice

Combinația dintre o problemă matematică (PM), (de natură constructivă) și specificațiile de precizie ale rezultatului (SP) se numește **problemă numerică**.

Exemplu:

- Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Dorim să calculăm $y = f(x)$.

Probleme numerice

Combinația dintre o problemă matematică (PM), (de natură constructivă) și specificațiile de precizie ale rezultatului (SP) se numește **problemă numerică**.

Exemplu:

- Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Dorim să calculăm $y = f(x)$.
- În general, x nu este reprezentabil în calculator, iar din acest motiv vom lucra cu o aproximare x^* a sa, $x^* \approx x$.

Probleme numerice

Combinația dintre o problemă matematică (PM), (de natură constructivă) și specificațiile de precizie ale rezultatului (SP) se numește **problemă numerică**.

Exemplu:

- Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Dorim să calculăm $y = f(x)$.
- În general, x nu este reprezentabil în calculator, iar din acest motiv vom lucra cu o aproximare x^* a sa, $x^* \approx x$.
- De asemenea, este posibil ca f să nu poată fi calculată exact, astfel că vom înlocui f cu o aproximantă a sa, f_A.

Probleme numerice

Combinația dintre o problemă matematică (PM), (de natură constructivă) și specificațiile de precizie ale rezultatului (SP) se numește **problemă numerică**.

Exemplu:

- Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Dorim să calculăm $y = f(x)$.
- În general, x nu este reprezentabil în calculator, iar din acest motiv vom lucra cu o aproximare x^* a sa, $x^* \approx x$.
- De asemenea, este posibil ca f să nu poată fi calculată exact, astfel că vom înlocui f cu o aproximantă a sa, f_A.
- Valoarea calculată în calculator va fi $f_A(x^*)$.

Probleme numerice

Combinația dintre o problemă matematică (PM), (de natură constructivă) și specificațiile de precizie ale rezultatului (SP) se numește **problemă numerică**.

Exemplu:

- Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Dorim să calculăm $y = f(x)$.
- În general, x nu este reprezentabil în calculator, iar din acest motiv vom lucra cu o aproximare x^* a sa, $x^* \approx x$.
- De asemenea, este posibil ca f să nu poată fi calculată exact, astfel că vom înlocui f cu o aproximantă a sa, f_A.
- Valoarea calculată în calculator va fi $f_A(x^*)$.
- Astfel, problema numerică este următoarea:

Probleme numerice

Combinația dintre o problemă matematică (PM), (de natură constructivă) și specificațiile de precizie ale rezultatului (SP) se numește **problemă numerică**.

Exemplu:

- Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Dorim să calculăm $y = f(x)$.
- În general, x nu este reprezentabil în calculator, iar din acest motiv vom lucra cu o aproximare x^* a sa, $x^* \approx x$.
- De asemenea, este posibil ca f să nu poată fi calculată exact, astfel că vom înlocui f cu o aproximantă a sa, f_A.
- Valoarea calculată în calculator va fi $f_A(x^*)$.
- Astfel, problema numerică este următoarea:
- **PM**. dându-se x și f, să se calculeze $f(x)$;

Probleme numerice

Combinația dintre o problemă matematică (PM), (de natură constructivă) și specificațiile de precizie ale rezultatului (SP) se numește **problemă numerică**.

Exemplu:

- Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Dorim să calculăm $y = f(x)$.
- În general, x nu este reprezentabil în calculator, iar din acest motiv vom lucra cu o aproximare x^* a sa, $x^* \approx x$.
- De asemenea, este posibil ca f să nu poată fi calculată exact, astfel că vom înlocui f cu o aproximantă a sa, f_A.
- Valoarea calculată în calculator va fi $f_A(x^*)$.
- Astfel, problema numerică este următoarea:
- **PM**. dându-se x și f, să se calculeze $f(x)$;
- **SP**. $|f(x) - f_A(x^*)| < \varepsilon$, ε fiind dat.

Problemele numerice aparțin uneia din următoarele categorii:

- **Evaluarea unei funcționale**: $I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, cum ar fi, de exemplu, calcularea valorii unei funcții $f(x)$, a derivatelor $f'(x), f''(x), \ldots$(derivare numerică), a integralelor definite $\int_a^b f(x)dx$ (integrare numerică) și a normelor $\|f\|_p$, etc.
- **Rezolvarea ecuațiilor algebrice**: determinarea valorilor unor necunoscute aflate în relații algebrice prin rezolvarea unor sisteme de ecuații liniare sau neliniare.
- **Rezolvarea unor ecuații analitice**: determinarea funcțiilor (sau valorilor de funcții) soluții ale unei ecuații operatoriale, cum ar fi ecuațiile diferențiale ordinare sau cu derivate parțiale, ecuațiile integrale, ecuații funcționale, etc.

Probleme de optimizare: determinarea unor valori numerice particulare ale unor funcții, care optimizează (minimizează sau maximizează) o funcție obiectiv, cu restricții sau fără restricții.

- Problemele matematice constructive, din care provin problemele numerice, pot fi privite ca o aplicație abstractă $\mathcal{F}: X \to Y$ între două spații liniare normate.

În funcție de care dintre cantitățile y, x sau $\mathcal{F}$ este necunoscută în ecuația $\mathcal{F}x = y$, avem de-a face cu o **problemă directă**, o **problemă inversă** sau o **problemă de identificare**:

	$\mathcal{F}$	x	y
problemă directă	dată	dat	**dorit**
problemă inversă	dată	**dorit**	dat
problemă de identificare	**dorită**	dat	dat

Măsuri ale erorii

Definiția 1. Fie X un spațiu liniar normat, $A \subseteq X$ și $x \in X$. Un element $x^* \in A$ se numește **aproximantă** a lui x din A.
Notație: $x^* \approx x$.

Definiția 2. Dacă x^* este aproximantă a lui x, diferența $\Delta x = x - x^*$ se numește **eroare**, iar

$$\|\Delta x\| = \|x - x^*\|$$

se numește **eroare absolută (de aproximare a lui x prin x^*)**.

Definiția 3. Expresia

$$\delta x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}, \quad x \neq 0$$

se numește **eroare relativă (de aproximare a lui x prin x^*)**.

- Deoarece în practică x este necunoscut, se folosește aproximarea

$$\delta x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|}.$$

Dacă $\|\Delta x\|$ este mic comparativ cu x^*, atunci aproximanta este bună

- Dacă $X = \mathbb{R}$, atunci se lucrează cu

$$\delta x = \frac{|\Delta x|}{|x|} \text{ și } \Delta x = x - x^*.$$

- Δ_x este **margine superioară a erorii absolute** dacă $\Delta x \leq \Delta_x$
- Dacă valorile numerice sunt apropiate de 1, erorile absolută și relativă sunt aproximativ egale
- Dacă valorile numerice sunt depărtate de 1, pot exista diferențe foarte mari între cele două tipuri de erori

Exemple

Determinați valorile pentru erorile absolute și relative, în fiecare din cazurile de mai jos

1. Valoarea exactă și cea aproximativă ale unei mărimi sunt $x = 1$, respectiv $x^* = 0.9$.
2. $x = 0.0004$, $x^* = 0.0003$.
3. $x_1 = 100\ cm, x_1^* = 99.9\ cm$; $x_2 = 100\ m, x_2^* = 99.999\ m$

- Ce observați?

Exemple

Determinați valorile pentru erorile absolute și relative, în fiecare din cazurile de mai jos

1. Valoarea exactă și cea aproximativă ale unei mărimi sunt $x = 1$, respectiv $x^* = 0.9$.
2. $x = 0.0004$, $x^* = 0.0003$.
3. $x_1 = 100\ cm, x_1^* = 99.9\ cm;\ x_2 = 100\ m, x_2^* = 99.999\ m$

- Ce observați?
- diferențele între valorile celor două tipuri de erori

Exemple

Determinați valorile pentru erorile absolute și relative, în fiecare din cazurile de mai jos

1. Valoarea exactă și cea aproximativă ale unei mărimi sunt $x = 1$, respectiv $x^* = 0.9$.
2. $x = 0.0004$, $x^* = 0.0003$.
3. $x_1 = 100\ cm, x_1^* = 99.9\ cm;\ \ x_2 = 100\ m, x_2^* = 99.999\ m$

- Ce observați?
- diferențele între valorile celor două tipuri de erori
- eroarea relativă furnizează o imagine mai clară asupra preciziei valorii aproximative.

→**Rezolvare Ex.1**

$x = 1, x^* = 0.9$

- Determinăm valoarea erorii absolute:

$$\Delta x = |x - x^*| = |1 - 0.9| = 0.1$$

- Determinăm valoarea erorii relative:

$$\delta x = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \left|\frac{0.1}{1}\right| = 0.1 = 10\%$$

Definiția 4. Mărimea $\Delta_x = \sup\limits_{x \in \mathcal{A}(x)} |\Delta x|$, unde $\mathcal{A}$ este un procedeu de aproximare se numește **eroare absolută maximă**.

Observația 1: Δ_x este dată de *toleranța aparatului de măsură*.

Astfel,

$$|\Delta x| \leq \Delta_x \Leftrightarrow |x - x^*| \leq \Delta_x \Leftrightarrow x \in [x^* - \Delta_x, x^* + \Delta_x]$$

Observația 2:

$$\delta x = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| = \left| \frac{\Delta_x}{x^*} \right|.$$

Definiția 5. Mărimea $\delta_x = \sup\limits_{x \in \mathcal{A}(x)} |\delta x|$, unde $\mathcal{A}$ este un procedeu de aproximare se numește **eroare relativă maximă**.

Problemă. Avem de măsurat două obiecte de 1 m și 1000 m cu același aparat de măsură cu toleranța de 1 cm. Precizați care măsurătoare este mai exactă.

Rezolvare.
$\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 1\ cm = 0.01\ m$
$x_1^* = 1\ m$
$x_2^* = 1000\ m$
Astfel,

$$\begin{aligned}\delta_{x_1} &= \left|\frac{\Delta_{x_1}}{x_1^*}\right| = \frac{0.01}{1} = 0.01 = 10^{-2} (= 1\%)\\ \delta_{x_2} &= \left|\frac{\Delta_{x_2}}{x_2^*}\right| = \frac{0.01}{1000} = 0.00001 = 10^{-5} (= 0.001\%)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \delta_{x_2} < \delta_{x_1}$.

Cifre semnificative

Fie $x = \alpha_m \cdot 10^m + \alpha_{m-1} \cdot 10^{m-1} + ... + \alpha_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1} + ...$, unde α_i sunt cifrele numărului pozitiv x reprezentat în baza 10 cu $\alpha_m \neq 0$.
Considerăm $x^* \approx x$,
$x^* = \beta_m \cdot 10^m + \beta_{m-1} \cdot 10^{m-1} + ... + \beta_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1} + ...$, unde β_i sunt cifrele numărului x^* reprezentat în baza 10 cu $\beta_m \neq 0$.

- **Exemplu:** Pentru numărul

$$314.15 = 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2},$$

prin identificare cu forma generală a dezvoltării unui număr $x \rightarrow m = 2$
$m - n + 1 = -2 \Leftrightarrow 2 - n + 1 = -2 \Leftrightarrow n = 5$

Definiția 6. O cifră în scrierea zecimală a lui x se numește **semnificativă** dacă aceasta este o cifră nenulă sau un zero precedat de o cifră nenulă.

- **Exemplu**:

$$0.00234 = 2 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-5}$$

$\rightarrow$primele 3 zerouri nu sunt cifre semnificative, ele servesc doar la fixarea poziției punctului zecimal în scrierea zecimală a numărului

Convenții:

- Dacă nu există zerouri, toate cifrele sunt semnificative. Ex.: 321; 2882.

Convenții:

- Dacă nu există zerouri, toate cifrele sunt semnificative. Ex.: 321; 2882.
- Zerourile dintre alte cifre sunt semnificative. Ex.: 3015; 109702.

Convenții:

- Dacă nu există zerouri, toate cifrele sunt semnificative. Ex.: 321; 2882.
- Zerourile dintre alte cifre sunt semnificative. Ex.: 3015; 109702.
- Zerourile din stânga unei cifre nenule nu sunt semnificative. Ex.: 0.0000012.

Convenții:

- Dacă nu există zerouri, toate cifrele sunt semnificative. Ex.: 321; 2882.
- Zerourile dintre alte cifre sunt semnificative. Ex.: 3015; 109702.
- Zerourile din stânga unei cifre nenule nu sunt semnificative. Ex.: 0.0000012.
- Pentru numerele scrise cu zecimale, zerourile din dreapta unei cifre nenule sunt semnificative. Ex.: 0.000003400; 5.00

Convenții:

- Dacă nu există zerouri, toate cifrele sunt semnificative. Ex.: 321; 2882.
- Zerourile dintre alte cifre sunt semnificative. Ex.: 3015; 109702.
- Zerourile din stânga unei cifre nenule nu sunt semnificative. Ex.: 0.0000012.
- Pentru numerele scrise cu zecimale, zerourile din dreapta unei cifre nenule sunt semnificative. Ex.: 0.000003400; 5.00
- Pentru numerele fără punct zecimal, zerourile din partea dreaptă pot să fie semnificative. Ex.: 400; 400. .

Convenții:

- Dacă nu există zerouri, toate cifrele sunt semnificative. Ex.: 321; 2882.
- Zerourile dintre alte cifre sunt semnificative. Ex.: 3015; 109702.
- Zerourile din stânga unei cifre nenule nu sunt semnificative. Ex.: 0.0000012.
- Pentru numerele scrise cu zecimale, zerourile din dreapta unei cifre nenule sunt semnificative. Ex.: 0.000003400; 5.00
- Pentru numerele fără punct zecimal, zerourile din partea dreaptă pot să fie semnificative. Ex.: 400; 400. .
- Numerele exacte au o infinitate de cifre semnificative

Definiția 7. Spunem că în aproximarea lui x prin x^*, în reprezentarea zecimală a lui x, primele n cifre semnificative sunt **cifre semnificative exacte**, dacă are loc

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}.$$

(eroarea absolută nu depășește jumătate de unitate în poziția n)

Exemple:

1. Considerăm $x = 715.996$, $x^* = 716$. Să se determine numărul de cifre semnificative exacte ale lui x.
2. Aceleași cerințe pentru: (a) $x = \sqrt{2} = 1.41421356...$, $x^* = 1.414$.
   (b) $x = 35.97$, $x^* = 36.00$.

$\rightarrow$**Rezolvare Ex.1**:
Ne propunem să determinăm valoarea lui n

$$\begin{aligned} 715.996 &= 7 \cdot 10^{\mathbf{2}} + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} \\ &\Rightarrow m = \mathbf{2} \\ |x - x^*| &= 0.004 < 0.005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-\mathbf{2}} \end{aligned}$$

Punem condiția: $\mathbf{2} - n + 1 = -\mathbf{2} \Leftrightarrow n = 5$ cifre semnificative exacte.

Theorem

Dacă un număr pozitiv x are n cifre semnificative exacte, atunci eroarea relativă δx a acestui număr satisface relația:

$$\delta x \leq \frac{1}{2\alpha_m} \cdot 10^{-(n-1)}, \tag{0.1}$$

unde α_m este prima cifră semnificativă exactă a numărului x.

Proof.

$$\begin{aligned} \delta x &= \left|\frac{\Delta x}{x}\right| \leq \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}}{\alpha_m \cdot 10^m + \alpha_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1} + \ldots} \\ &\leq \frac{1}{2\alpha_m} \cdot 10^{-(n-1)} \end{aligned}$$

$\square$

Conform (0.1), numărul de cifre semnificative exacte corespunzător unei erori relative δx, va fi

$$n \leq 1 - \lg(2 \cdot \delta x \cdot \alpha_m).$$

De exemplu:

- numărul aproximativ $x^* = 3.15$ utilizat în locul numărului exact $x = \pi$ are $n \leq 2.72 \Rightarrow 2$ cifre exacte
- numărul aproximativ $x^* = 3.14$ utilizat în locul numărului exact $x = \pi$ va avea $n \leq 3.29 \Rightarrow 3$ cifre exacte

Sursele erorilor

- Erori ale problemei
- Erori ale metodei
- Trunchierea
- Operația de rotunjire
- Erori de măsurare
- Propagarea erorilor în calcule

Propagarea erorilor

O eroare care apare la efectuarea unei operații aritmetice se propagă spre următoarele operații, într-o măsură mai mare sau mai mică, în funcție de felul și ordinea acestor operații.

Fie două numere x^*, y^*, ce aproximează mărimile x și y. Erorile absolute ale celor două numere au expresiile:

$$\Delta x = x - x^*, \quad \Delta y = y - y^*,$$

iar erorile relative sunt:

$$\delta x = \left|\frac{\Delta x}{x^*}\right|, \quad \delta y = \left|\frac{\Delta y}{y^*}\right|.$$

Expresiile erorilor absolute în cele patru operații de bază sunt:

1. Adunarea: $\Delta(x+y) = \Delta x + \Delta y$
2. Scăderea: $\Delta(x-y) = \Delta x - \Delta y$
3. Înmulțirea:

$$\Delta xy = xy - x^* y^* = (x^* + \Delta x)(y^* + \Delta y) - x^* y^* \approx x^* \Delta y + y^* \Delta x.$$

!!! s-a neglijat produsul $\Delta x \Delta y$, deoarece este mult mai mic în raport cu restul termenilor
4. Împărțirea

$$\begin{aligned} \Delta x/y &= x/y - x^*/y^* = \frac{x^* + \Delta x}{y^* + \Delta y} - \frac{x^*}{y^*} \\ &= \frac{y^* \Delta x - x^* \Delta y}{(y^*)^2 + y^* \Delta y} \approx \frac{y^* \Delta x - x^* \Delta y}{(y^*)^2} \end{aligned}$$

Aici s-a considerat $(y^*)^2 >> y^* \Delta y$.

Expresiile erorilor relative în cele patru operații de bază sunt:

1. Adunarea:

$$\begin{aligned}\delta(x+y) &= \left|\frac{\Delta(x+y)}{x^*+y^*}\right| = \left|\frac{x^*}{x^*+y^*}\cdot\frac{\Delta x}{x^*} + \frac{y^*}{x^*+y^*}\cdot\frac{\Delta y}{y^*}\right| \\ &= \left|\delta x\frac{x^*}{x^*+y^*} + \delta y\frac{y^*}{x^*+y^*}\right|\end{aligned}$$

2. Scăderea:

$$\begin{aligned}\delta(x-y) &= \left|\frac{\Delta(x-y)}{x^*-y^*}\right| = \left|\frac{x^*}{x^*-y^*}\cdot\frac{\Delta x}{x^*} - \frac{y^*}{x^*-y^*}\cdot\frac{\Delta y}{y^*}\right| \\ &= \left|\delta x\frac{x^*}{x^*-y^*} - \delta y\frac{y^*}{x^*-y^*}\right|\end{aligned}$$

3. Înmulțirea:

$$\delta xy = \left|\frac{\Delta xy}{x^*y^*}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x^*} + \frac{\Delta y}{y^*}\right| = |\delta x + \delta y|$$

4. Împărțirea:

$$\delta x/y = \left|\frac{\Delta x/y}{x^*/y^*}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x^*} - \frac{\Delta y}{y^*}\right| = |\delta x - \delta y|$$

- Observând expresiile erorilor absolute și relative, în cazul operațiilor de adunare, scădere, înmulțire și împărțire, nu se poate trage concluzia, de exemplu, că în cazul operației de adunare eroarea crește, iar în cazul operației de scădere eroarea scade.
- Acest lucru îl dictează semnul erorilor absolute, precum și valorile aproximative ale numerelor.
- De exemplu, dacă se scad două numere aproximativ egale, eroarea relativă poate fi foarte mare.
- Se pot totuși stabili **limitele superioare ale erorilor operațiilor aritmetice**
- Putem astfel folosi, spre exemplu, în cazul erorii relative:

$$\delta x = \left| \frac{\Delta x}{x^*} \right| \leq 5 \cdot 10^{-s}, \quad \delta y = \left| \frac{\Delta y}{y^*} \right| \leq 5 \cdot 10^{-s},$$

unde s reprezintă numărul de cifre semnificative.

Obținem astfel relațiile

$$\begin{aligned}
\delta(x+y) &= \left|\delta x \frac{x^*}{x^*+y^*} + \delta y \frac{y^*}{x^*+y^*}\right| \le 5\cdot 10^{-s}\left(\left|\frac{x^*}{x^*+y^*} + \frac{y^*}{x^*+y^*}\right|\right);\\
\delta(x-y) &= \left|\delta x \frac{x^*}{x^*-y^*} - \delta y \frac{y^*}{x^*-y^*}\right| \le 5\cdot 10^{-s}\left(\left|\frac{x^*}{x^*-y^*} - \frac{y^*}{x^*-y^*}\right|\right);\\
\delta xy &= |\delta x + \delta y| \le 10\cdot 10^{-s};\\
\delta x/y &= |\delta x - \delta y| \le 10\cdot 10^{-s},
\end{aligned}$$

care reprezintă limitele superioare ale erorilor relative.

Observație. Dacă x^* nu este precizat folosim x.

Probleme propuse

1. Să se calculeze o margine a erorii relative pentru aproximarea numărului $\sqrt{2}$ cu 2 cifre semnificative exacte $(x^* = 1.41)$.
2. Fie $x = 5.43 \pm 1\%,\ y = -5.42 \pm 2\%,\ z = 3 \pm 1\%$. Să se calculeze $(x + y) \cdot z$. Comentați rezultatul obținut.
3. Fie $x = 2.3 \pm 2\%,\ y = 3.2 \pm 3\%,\ z = 5.5 \pm 5\%$. Să se calculeze $(x + y) + z$ și $x + (y + z)$. Comentați rezultatele obținute.

→Soluții

1. Considerăm $x = \sqrt{2} = 1.4142... \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= |x - x^*| = |1.4142... - 1.41| = 0.0042... \\
\delta x &= \left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \frac{0.0042}{1.41} < \frac{0.005}{1.4} = 0.0035... < 0.0036 = 0.36\% \\
&\Rightarrow \sqrt{2} = 1.41 \pm 0.36\%
\end{aligned}
$$

2. $x^* + y^* = 5.43 - 5.42 = 0.01$
Eroarea relativă $\delta(x+y)$ va fi mărginită de

$$\begin{aligned} |\delta x| \left| \frac{x^*}{x^*+y^*} \right| + |\delta y| \left| \frac{y^*}{x^*+y^*} \right| &= \frac{1}{100} \cdot \frac{5.43}{0.01} + \frac{2}{100} \cdot \frac{5.42}{0.01} \\ &= 5.43 + 10.84 = 16.27 = 1627\% \end{aligned}$$

Eroarea este foarte mare în acest caz, deoarece au fost scăzute două numere foarte apropiate (fenomenul de anulare prin scădere)

$$(x^* + y^*) \cdot z^* = 0.01 \cdot 3 = 0.03,$$

calculat cu o eroare relativă mărginită de

$$\delta(x+y) \cdot z = |\delta(x+y) + \delta z| = \frac{1627}{100} + \frac{1}{100} = 1628\%$$

$$\Rightarrow (x+y) \cdot z = 0.03 + 1628\%$$

Obs. Inițial, se poate aplica direct formula

$$\delta(x+y) = \left| \delta x \frac{x^*}{x^*+y^*} + \delta y \frac{y^*}{x^*+y^*} \right| = \left| \frac{1}{100} \cdot \frac{5.43}{0.01} + \frac{2}{100} \cdot \frac{-5.42}{0.01} \right| = \dots$$

- Eșecul unui sistem de rachete antirachetă Patriot din timpul războiului din Golf din 1991 s-a datorat unei erori de conversie software
- Ceasul sistemului măsura timpul în zecimi de secundă, dar îl memora într-un registru de 24 de biți, provocându-se astfel erori de rotunjire
- Datele din câmp au arătat că sistemul poate eșua să urmărească și să intercepteze o rachetă după 20 de ore de funcționare și astfel sistemul ar necesita rebootare

Eșecul rachetei Patriot II

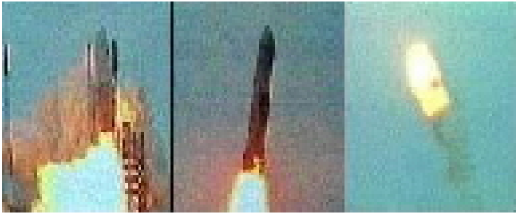
- După 100 de ore de funcționare, eșecul sistemului a cauzat moartea a 28 de soldați americani aflați într-o cazarmă din Dhahran, Arabia Saudită, deoarece nu a reușit să intercepteze o rachetă Scud irakiană
- Deoarece numărul 0.1 are o dezvoltare infinită în binar (este o fracție periodică), valoarea din registrul de 24 de biți este eronată

$$(0.00011001100110011001100)_2 \approx 0.95 \times 10^{-7}.$$

- Eroare de timp după 100 de ore a fost de 0.34 secunde
- Viteza rachetei Scud este de 3750 mile/oră, rezultând o eroare în distanță de aproximativ 573.59 m

Explozia rachetei Ariane 5

- În 1996, racheta Ariane 5 lansată de Agenția Spațială European a explodat la 40 de secunde după lansarea de la Kourou, Guyana Franceză
- Investigația de după incident a arătat că componenta orizontală a vitezei a necesitat conversia unui număr flotant în dublă precizie într-un întreg pe 16 biți
- Deoarece numărul era mai mare decât 32767, cel mai mare întreg reprezentabil pe 16 biți, componentele de control au intrat în procedura de autodistrugere
- Valoarea rachetei și a încărcăturii a fost de 500 de milioane de dolari



Referințe www

Se pot găsi informații adiționale pe World Wide Web la adresele

- http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/
- http://www5.in.tum.de/~huckle/bugse.html
- http://www-users.math.umn.edu/~arnold/disasters/ariane.html

Există și alte consemnări ale calamităților ce ar fi putut fi evitate printr-o programare mai atentă a datelor.