

**Домашнее задание № 5.** Исследование линейного объекта при случайном входном воздействии

**Цель работы:** рассмотреть прохождение случайного входного сигнала через апериодическое звено первого порядка и колебательное звено. Вычислить случайные характеристики процессов по состоянию и выходу.

**Теоретические сведения.** Рассмотрим линейный стационарный объект с одним входом и одним выходом, представленный частотной передаточной функцией  $W(j\omega)$ . На вход объекта подается стохастическое воздействие «белый шум»  $u(t) = w(t)$ .

Спектральная плотность выходного сигнала может быть вычислена по следующей формуле:

$$S_y(\omega) = |W(\omega)|^2 S_u(\omega) \quad (1)$$

Дисперсия выходного сигнала определяется через его спектральную плотность как

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega. \quad (2)$$

Корреляционная функция выхода

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_y(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим линейный стационарный объект одним входом и выходом, заданный в форме вход-состояние-выход

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4)$$

с вектором состояния  $x(t)$ , вектором выхода  $y(t)$  и входным воздействием  $u(t)$ , матрицей состояния  $A \in R^{n \times n}$ , матрицей входа  $B \in R^{n \times 1}$  и матрицей выхода  $C \in R^{1 \times n}$ .

На вход линейного объекта подается стохастическое воздействие «белый шум»  $u(t) = w(t)$ .

1) Вычислим матрицы дисперсий входа и выхода.

Установившееся значение  $D_x$  матрицы дисперсий  $D_x(t)$  вектора состояния  $x(t)$  устойчивого объекта (4) может быть вычислено как решение уравнения Ляпунова

$$AD_x + D_x A^T = -BNB^T. \quad (5)$$

Для дисперсии вектора выхода объекта (4) можно записать

$$\begin{aligned} D_y &= M[(y(t) - \bar{y}(t))(y(t) - \bar{y}(t))^T] = M[C(x(t) - \bar{x}(t))(x(t) - \bar{x}(t))^T C^T] = \\ &= CM[(x(t) - \bar{x}(t))(x(t) - \bar{x}(t))^T]C^T = CD_x C^T. \end{aligned} \quad (6)$$

2) Вычислим корреляционные матрицы векторов состояния и выхода системы

Для корреляционной матрицы  $R_x(\tau)$  вектора состояния можно записать следующие выражения

$$R_x(\tau) = M\{x(t + \tau)x^T(t)\} = M\{e^{A\tau}x(t)x^T(t)\} = e^{A\tau}D_x, \tau \geq 0, \quad (7)$$

$$R_x(\tau) = M\{x(t - \tau)x^T(t)\} = M\{e^{-A\tau}x(t)x^T(t)\} = e^{-A\tau}D_x, \tau \leq 0. \quad (8)$$

В свою очередь, корреляционная матрица вектора выхода  $R_y(\tau)$  на основе вычисляется как

$$R_y(\tau) = CR_x(\tau)C^T = Ce^{A\tau}D_x C^T, \quad \tau \geq 0, \quad (9)$$

$$R_y(\tau) = CR_x(\tau)C^T = Ce^{-A\tau}D_x C^T, \tau \leq 0. \quad (10)$$

3) Вычислим матрицы спектральных плотностей векторов состояния и выхода

Для объекта вида (4) при стохастическом внешнем воздействии типа «белый шум» матрицы  $S_x(\omega)$  спектральных плотностей мощности вектора состояния и  $S_y(\omega)$  вектора выхода могут быть вычислены по следующим формулам

$$S_x(\omega) = -2F(F^2 + \omega^2 I)^{-1}D_x, \quad (11)$$

$$S_y(\omega) = CS_x(\omega)C^T = -2CF(F^2 + \omega^2 I)^{-1}D_x C^T. \quad (12)$$

Порядок выполнения работы.

1. Реакция апериодического звена 1-го порядка на белый шум

1.1 Записать объект в форме передаточной функции и в форме вход-состояние выход в соответствии со своим вариантом задания.

- 1.2 Вычислить дисперсию, корреляционную функцию (матрицу) и спектральную плотность векторов состояния и выхода объекта по формулам (1)-(12).
  - 1.3 Составить в Simulink схему моделирования объекта. Запустить моделирование.
  - 1.4 Написать программу в Matlab, которая вычисляет значение математического ожидания и дисперсии выхода, выхода, а также построить графики корреляционной функции и спектральной плотности выхода используя данные, полученные при моделировании.
2. Реакция колебательного звена на белый шум
    - 2.1 Записать объект в форме передаточной функции и в форме вход-состояние выход в соответствии со своим вариантом задания.
    - 2.2 Вычислить дисперсию, корреляционную функцию (матрицу) и спектральную плотность векторов состояния и выхода объекта по формулам (1)-(12).
    - 2.3 Составить в Simulink схему моделирования объекта. Запустить моделирование.
    - 2.4 Написать программу в Matlab, которая вычисляет значение математического ожидания и дисперсии выхода, выхода, а также построить графики корреляционной функции и спектральной плотности выхода используя данные, полученные при моделировании.

Таблица «Варианты заданий»

Номер варианта	Параметры апериодического звена $W(s) = \frac{k}{Ts+1}$	Параметры колебательного звена $W(s) = \frac{k}{T^2s^2+2\xi T s+1}$
1	$k = 5, T = 0,1 \text{ с}$	$k = 2, T = 0,1 \text{ с}, \xi = 0,3$
2	$k = 4, T = 0,2 \text{ с}$	$k = 3, T = 0,2 \text{ с}, \xi = 0,4$
3	$k = 2,5, T = 0,3 \text{ с}$	$k = 4, T = 0,3 \text{ с}, \xi = 0,5$
4	$k = 3, T = 0,4 \text{ с}$	$k = 5, T = 0,4 \text{ с}, \xi = 0,6$
5	$k = 7, T = 0,5 \text{ с}$	$k = 2,5, T = 0,5 \text{ с}, \xi = 0,7$
6	$k = 3, T = 0,6 \text{ с}$	$k = 3,5, T = 0,6 \text{ с}, \xi = 0,3$
7	$k = 4,5, T = 0,7 \text{ с}$	$k = 4,5, T = 0,7 \text{ с}, \xi = 0,4$
8	$k = 1, T = 0,8 \text{ с}$	$k = 5,5, T = 0,8 \text{ с}, \xi = 0,5$
9	$k = 2, T = 0,9 \text{ с}$	$k = 0,5, T = 0,9 \text{ с}, \xi = 0,6$
10	$k = 6, T = 1 \text{ с}$	$k = 1,5, T = 1 \text{ с}, \xi = 0,7$
11	$k = 5, T = 1,1 \text{ с}$	$k = 1, T = 1,1 \text{ с}, \xi = 0,3$
12	$k = 4, T = 1,2 \text{ с}$	$k = 2, T = 1,2 \text{ с}, \xi = 0,4$
13	$k = 2,5, T = 1,3 \text{ с}$	$k = 3, T = 1,3 \text{ с}, \xi = 0,5$
14	$k = 3, T = 1,4 \text{ с}$	$k = 4, T = 1,4 \text{ с}, \xi = 0,6$
15	$k = 7, T = 1,5 \text{ с}$	$k = 5, T = 1,5 \text{ с}, \xi = 0,7$
16	$k = 3, T = 1,6 \text{ с}$	$k = 6, T = 1,6 \text{ с}, \xi = 0,3$
17	$k = 4,5, T = 1,7 \text{ с}$	$k = 7, T = 1,7 \text{ с}, \xi = 0,4$
18	$k = 1, T = 1,8 \text{ с}$	$k = 0,5, T = 1,8 \text{ с}, \xi = 0,5$
19	$k = 2, T = 1,9 \text{ с}$	$k = 2,5, T = 1,9 \text{ с}, \xi = 0,6$
20	$k = 6, T = 2 \text{ с}$	$k = 3,5, T = 2 \text{ с}, \xi = 0,7$
21	$k = 5, T = 2,1 \text{ с}$	$k = 1,5, T = 2,1 \text{ с}, \xi = 0,3$
22	$k = 4, T = 2,2 \text{ с}$	$k = 4, T = 2,2 \text{ с}, \xi = 0,4$
23	$k = 2,5, T = 2,3 \text{ с}$	$k = 2,5, T = 2,3 \text{ с}, \xi = 0,5$
24	$k = 3, T = 2,4 \text{ с}$	$k = 3, T = 2,4 \text{ с}, \xi = 0,6$
25	$k = 7, T = 2,5 \text{ с}$	$k = 7, T = 2,5 \text{ с}, \xi = 0,7$