Модели ВСВ дискретных объектов управления

Дискретный ОУ – это ОУ, в котором хотя бы в одном элементе при непрерывном изменении входной величины выходная величина изменяется не непрерывно, а имеет вид отдельных импульсов, появляющихся через некоторые промежутки времени.

Множество моментов времени управления и наблюдения T становится дискретным (счетным):

$T = \{t: t = t_0 + k\Delta t, k = 1, \dots N\}$,

Δt – интервал дискретности, $N = (t_k - t_0)/\Delta t$.

Функции перехода λ и выхода δ в дискретных динамических объектах управления задаются в следующей форме

$$\lambda: x(k+1) = \lambda[x(k), u(k)] \quad (1)$$

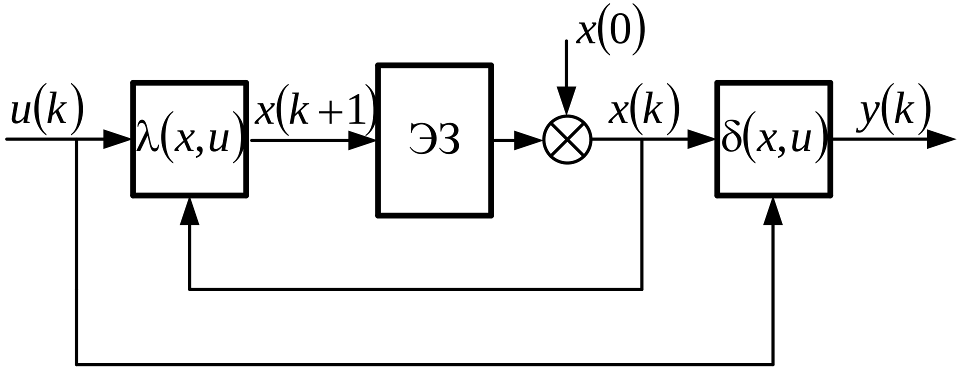
$$\delta: y(k) = \delta[x(k), u(k)] \quad (2)$$

В случае линейных дискретных ОУ функции λ и δ записываются в форме

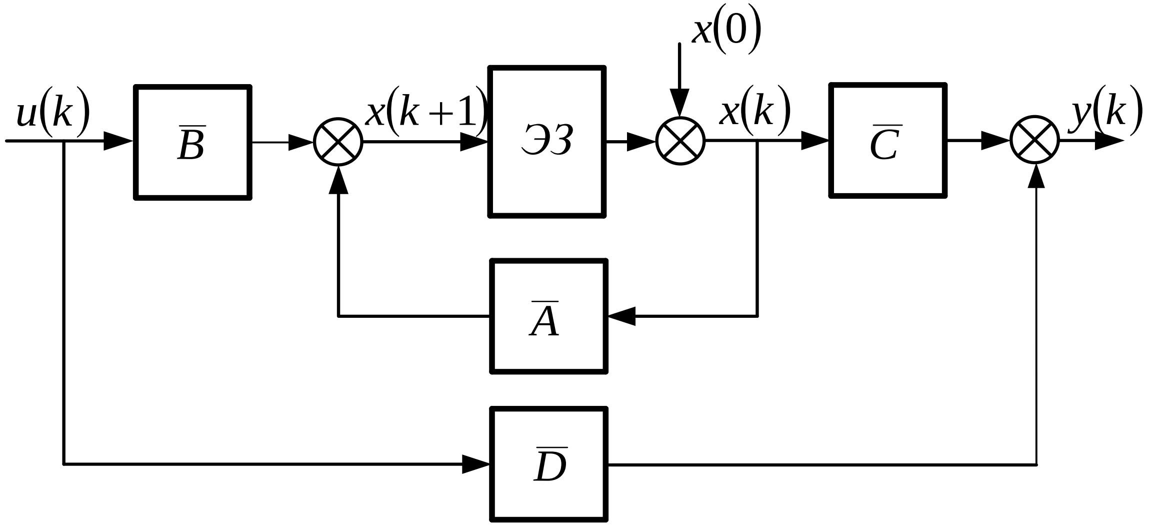
$$\begin{cases} x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k) \\ y(k) = \bar{C}x(k) + \bar{D}u(k) \end{cases} \tag{3}$$

где $\bar{A} - n \times n$ матрица состояния, $\bar{B} - n \times r$ матрица входа, $\bar{C} - m \times n$ матрица выхода, $\bar{D} - m \times r$ матрица передачи со входа на выход (матрица «вход-выход»).

Построим структурные схемы нелинейных и линейных дискретных динамических объектов, где ЭЗ – элемент задержки, реализующий преобразование $x(k+1)$ в $x(k)$.



Дискретный нелинейный объект



Дискретный линейный объект

Способы построения матриц дискретного ОУ на основе матриц исходного непрерывного ОУ и интервала дискретности

1. Использование интегральной модели исходного непрерывного ОУ

Рассмотрим модель непрерывного ОУ

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Дискретный динамический объект реализует дискретную по времени с интервалом длительности Δt выборку из управляемых переменных по состоянию и выходу непрерывного динамического процесса.

Переменные состояния между моментами выборки изменяются в соответствии с интегральной моделью состояния непрерывного объекта, переменные выхода изменяются по такому же закону, а *переменные входа (управления)* между моментами выборки *фиксируются на уровне* значений в предыдущий момент выборки.

Вычислим значение состояния и выхода в момент времени $t = \Delta t$ на основании информации об их значении в момент $t = 0$.

Зафиксируем сигнал управления на весь интеграл дискретности на уровне значения на момент начала текущего интервала:

$$
\begin{aligned}
x(t)\big|_{t=\Delta t} &= x(\Delta t) = \left\{ e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right\}\Bigg|_{t=\Delta t} = e^{A\Delta t}x(0) + \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t-\tau)}Bu(0)d\tau = \\
&= e^{A\Delta t}x(0) + e^{A\Delta t}\left(\int_0^{\Delta t} e^{-A\tau}d\tau \right)Bu(0) = e^{A\Delta t}x(0) + e^{A\Delta t}\left(1 - e^{-A\Delta t}\right)A^{-1}Bu(0) = \\
&= e^{A\Delta t}x(0) + \left(e^{A\Delta t} - 1\right)A^{-1}Bu(0).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Учтем, что

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k), \qquad (5)$$

где под $(k+1)$ и k понимается следующее представление моментов времени

$$t + \Delta t = (k+1)\Delta t \quad \text{и} \quad t = k\,\Delta t\,.$$

Тогда (5) можно переписать в форме

$$x[(k+1)\Delta t] = \bar{A}x[(k)\Delta t] + \bar{B}u[(k)\Delta t], y(k) = Cx(k) \qquad (6)$$

Положим в (6) $k = 0$. Тогда

$$x(\Delta t) = \bar{A}x(0) + \bar{B}u(0), \qquad (7)$$

Сравним левые и правые части (4)и (7):

$$\bar{A} = e^{A\Delta t}, \bar{B} = (e^{A\Delta t} - \mathrm{I})A^{-1}B, \bar{C} = C \quad \Rightarrow \quad y(k) = \bar{C}x(k)$$

2. Представление производной отношением конечных малых приращений

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cong \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x((k+1)\Delta t) - x(k\Delta t)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t}$$

Подставим полученное приближенное представление производной $\dot{x}(t)$ в модель непрерывного ОУ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t} = Ax(k) + Bu(k)$$

и разрешим относительно переменной $x(k+1)$. Тогда получим рекуррентную запись

$$x(k+1) = (I + A\Delta t)x(k) + (B\Delta t)u(k), \; y(k) = Cx(k). \tag{8}$$

Сравним рекуррентные представления (3) с (8) и запишем

$$\overline{A} = I + A\Delta t, \overline{B} = B\Delta t, \overline{C} = C.$$

Сформируем *суммарную* модель линейного дискретного ОУ. Для этого построим базу индукции на основе рекуррентного представления (3)

$$1)\ k = 0, \quad x(1) = \bar{A}x(0) + \bar{B}u(0)$$

$$2)\ k = 1, \quad x(2) = \bar{A}x(1) + \bar{B}u(1) = \bar{A}^2x(0) + \bar{A}\bar{B}u(0) + \bar{B}u(1)$$

$$3)\ k = 2, \quad x(3) = \bar{A}x(2) + \bar{B}u(2) =$$

$$= \bar{A}^3x(0) + \bar{A}^2\bar{B}u(0) + \bar{A}\bar{B}u(1) + \bar{B}u(2)$$

База индукции построена. Теперь можно записать представление для $x(k), \forall k$:

$$x(k) = \overline{A}^k x(0) + \overline{A}^{k-1}\overline{B}u(0) + \overline{A}^{k-2}\overline{B}u(1) + \ldots + \overline{A}\,\overline{B}u(k-2) + \overline{B}u(k-1) =$$

$$= \overline{A}^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \overline{A}^{k-1-i}\overline{B}u(i). \qquad (9)$$

Для выхода ОУ можно записать

$$y(k) = \overline{C}\,\overline{A}^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \overline{C}\,\overline{A}^{k-1-i}\overline{B}u(i) + \overline{D}(k). \qquad (10)$$

Получим выражения для свободной и вынужденной составляющих движения по вектору состояния

$$x_c(k) = \overline{A}^k x(0); \quad x_в(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \overline{A}^{k-1-i} \overline{B} u(i), \tag{11}$$

и по вектору выхода

$$y_c(k) = \overline{C}\overline{A}^k x(0); \quad y_в(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \overline{C}\overline{A}^{k-1-i} \overline{B} u(i) + \overline{D} u(k). \tag{12}$$

Пример. Матрицы состояния, управления и выхода непрерывного линейного объекта имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Запишите матрицы $\bar{A}, \bar{B}$ и $\bar{C}$ для значения интервала дискретности $\Delta t = 0{,}01$ с.

1) Вычислим с использованием интегральной модели исходного непрерывного ОУ

Представим $e^{A\Delta t}$ в виде бесконечного матричного ряда

$$e^{A\Delta t} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (A\Delta t)^i$$

И ограничимся первыми четырьмя членами

$$e^{A\Delta t} \approx I + A\Delta t + \frac{1}{2!}(A\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}(A\Delta t)^3 + \cdots$$

Вычисляем:

$$A\Delta t = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix} * 0{,}01 = \begin{bmatrix} 0{,}02 & -0{,}05 & 0{,}03 \\ -0{,}01 & -0{,}02 & -0{,}03 \\ 0{,}03 & 0{,}15 & 0{,}12 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = e^{A\Delta t} \approx \begin{bmatrix} 1{,}02 & -0{,}0523 & -0{,}0314 \\ -0{,}0105 & 0{,}9782 & -0{,}0314 \\ 0{,}0314 & 0{,}1569 & 1{,}1246 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \left(e^{A\Delta t} - I\right)A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0{,}0096 & -0{,}0011 \\ -0{,}0005 & 0{,}0192 \\ 0{,}032 & 0{,}044 \end{bmatrix}$$

$$C = \bar{C}$$

Вычислим самостоятельно $\bar{A} = e^{A\Delta t}$ и $\bar{B} = \left(e^{A\Delta t} - I\right)A^{-1}B$ с помощью свойств функций от матриц (с использованием Matlab)

Структурные свойства объектов управления: управляемость и наблюдаемость

Определение 1. Непрерывный {дискретный} динамический объект с парой матриц $(A, B)\{(\bar{A}, \bar{B})\}$ называется *полностью управляемым,* если его можно из произвольного начального состояния

$$x_0 = x(t)_{|t=t_0}\ \{x_0 = x(k)_{|k=k_0}\}$$

перевести за конечное время в произвольное конечное состояние $x_k = x(t)_{|t=t_k}\ \{x_k = x(k)_{|k=k_k}\}$

применив *подходящим образом выбранное управляющее воздействие* (возможно, даже неограниченное).

Определение 2. Непрерывный {дискретный} динамический объект с матрицами $(A, C)\{(\bar{A}, \bar{C})\}$ называется *полностью наблюдаемым* на интервале наблюдения

$$T = (t\colon\ t_0 < t < t_k)\{T = (k\colon k_0 < k < k_k)\},$$

если его состояние

$$x(t)\ \{x(k)\}$$

может быть определено на основе наблюдений за выходом $y(t)\ \{y(k)\}$

(а возможно, и входом $u(t)\ \{u(k)\}$) в течение интервала наблюдения.

Критерии управляемости и наблюдаемости

Критерий управляемости 1.

Объект с парой матриц$(A, B)\{(\bar{A}, \bar{B})\}$ является полностью управляемым тогда и только тогда, когда *матрица управляемости объекта,* построенная в силу матричного соотношения

$$W_{\text{y}} = [B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \ \cdots \ \vdots A^{n-1}B]$$

$$\{\bar{W}_{\text{y}} = [\bar{B} \vdots \bar{A}\bar{B} \vdots \bar{A}^2\bar{B} \vdots \ \cdots \ \vdots \bar{A}^{n-1}\bar{B}]\} \qquad (15)$$

имеет ранг, равный $n = \dim x$, т.е.

$$rank\ W_{\text{y}} = n \quad \{rank\ \bar{W}_{\text{y}} = n\}. \qquad (16)$$

Доказательство. Докажем сформулированное утверждение на примере дискретного ОУ с использованием его *рекуррентного* модельного представления.

Поставим задачу перевода дискретного ОУ (10) из произвольного ненулевого начального состояния $x(0)$ за $n = \dim x$ интервалов дискретности (тактов управления) в желаемое конечное $x(n)$.

Вычислим последовательность управляющих воздействий, образующих «*стратегию* управления», осуществляющих этот перевод. Для этой цели воспользуемся *суммарной* моделью дискретного объекта

$$x(k) = \bar{A}^k x(0) + \bar{A}^{k-1}\bar{B}u(0) + \bar{A}^{k-2}\bar{B}u(1) + \ldots + \bar{A}\bar{B}u(k-2) + \bar{B}u(k-1) =$$

$$= \bar{A}^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \bar{A}^{k-1-i}\bar{B}u(i).$$

Запишем последнее выражение для момента $k = n$, поменяв при этом порядок суммирования компонентов:

$$x(n) - \overline{A}^n x(0) = \begin{bmatrix} \overline{B} & \overline{A}\overline{B} & \dots & \overline{A}^{n-1}\overline{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^T(n-1) u^T(n-2) \dots u^T(0) \end{bmatrix}^T .$$

Разрешим полученное выражение относительно вектора «стратегии управления»:

$$\begin{bmatrix} u^T(n-1) u^T(n-2) \dots u^T(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \overline{B} & \overline{A}\overline{B} & \dots & \overline{A}^{n-1}\overline{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x(n) - \overline{A}^n x(0) \end{bmatrix}$$

Нетрудно видеть, что ключевым моментом, гарантирующим существование искомого управления является *обратимость матрицы*, которая имеет место только при выполнении условия (16).

Критерий управляемости 2. Пара матриц (A, B) является полностью управляемой тогда и только тогда, когда матрица

$$Q = W_y W_y^T \tag{17}$$

является положительно определенной, т.е. имеет все *строго* положительные собственные значения

$$\mu_{yi} > 0,\ \mu_{yi} \in \sigma\{Q\},\ :\ \det\left(\mu_y I - Q\right) = 0; \quad i = \overline{1, n}$$

Критерий наблюдаемости 1.

Объект с парой матриц $(A, C)\{(\bar{A}, \bar{C})\}$ являются полностью наблюдаемым тогда и только тогда, когда *матрица наблюдаемости объекта*

$$W_{\text{н}} = \begin{bmatrix} C^T \\ C^T A \\ C^T A^2 \\ \vdots \\ C^T A^{n-1} \end{bmatrix}, \bar{W}_{\text{н}} = \begin{bmatrix} \bar{C}^T \\ \bar{C}^T \bar{A} \\ \bar{C}^T \bar{A}^2 \\ \vdots \\ \bar{C}^T \bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (18)$$

имеет ранг, равный $n = \dim x$, т.е.

$$rank\ W_{\text{н}} = n \ \ \{rank\ \bar{W}_{\text{н}} = n\}. \qquad (19)$$

Доказательство утверждения проведем на примере непрерывного ОУ с использованием модели ВСВ при $D = 0$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Для того, чтобы получить n условий для вычисления n-компонентного вектора состояния x по *результатам измерения* векторов выхода $y(t)$ и управления $u(t)$ продифференцируем

$n - 1$ раз по времени вектор выхода.

$$y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) + CBu(t)$$

$$\ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) = CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t)$$

$$\dddot{y}(t) = CA^2\dot{x}(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t) =$$

$$= CA^3x(t) + CA^2Bu(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(t) = CA^{(n-1)}x(t) + CA^{(n-2)}Bu(t) + \ldots + CABu^{(n-1)}(t) + CBu^{(n-2)}(t)$$

Сформируем на основе полученных соотношений вектор измерений $z(t)$

$$z(t)=\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t)-CBu(t) \\ \ddot{y}(t)-CABu(t)-CB\dot{u}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}-CA^{(n-2)}Bu(t)-\ldots-CABu^{(n-1)}(t)-CBu^{(n-2)}(t) \end{bmatrix}$$

Вектор измерений $z(t)$ позволяет привести систему уравнений, построенных на производных вектора выхода $y(t)$ и управления $u(t)$ к виду

$$z(t)=[C^T \vdots A^T C^T \vdots \ldots \vdots (A^T)^{n-1} C^T]^T x(t)=W_н x(t). \qquad (20)$$

Уравнение (20) позволяет для *искомого* вектора $x(t)$ состояния объекта записать

$$x(t) = W_{\text{н}}^{-1} z(t). \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что ключевым моментом, гарантирующим *восстановление* вектора $x(t)$ состояния объекта является обратимость матрицы наблюдаемости $W_{\text{н}}$, которая имеет место только при выполнении условия $rank W_{\text{н}} = n$.

Критерий наблюдаемости 2. Пара матриц (A, C) являются полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда матрица

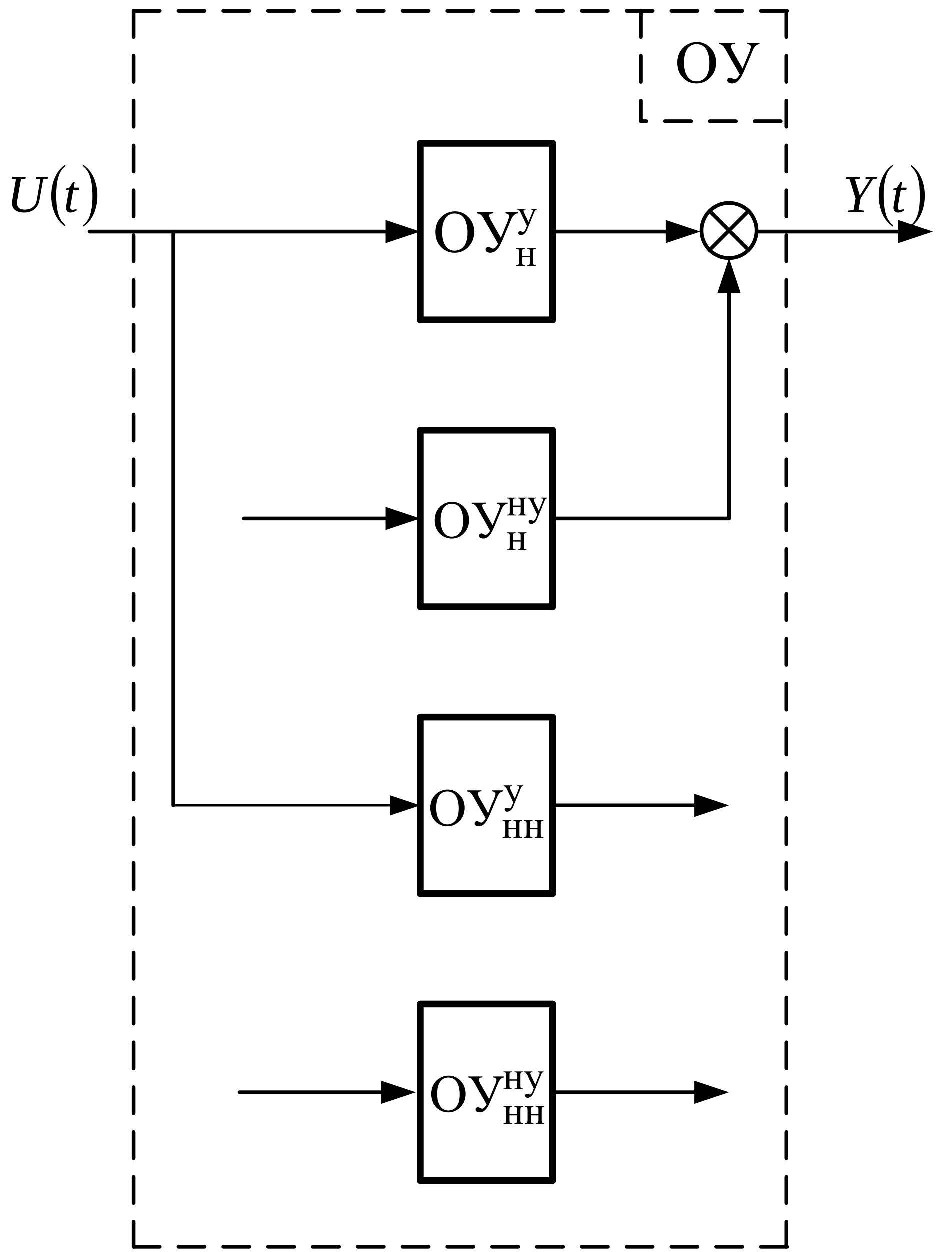
$$P = W_{\text{н}}^T W_{\text{н}} \tag{22}$$

является положительно определенной $P > 0$, т.е. имеет все *строго* положительные собственные значения.

Понятия *управляемости* и *наблюдаемости* позволяют представить исходный ОУ в виде объединения его структурных компонентов

$$OY = \{OY_{н}^{у} \bigcup OY_{н}^{ну} \bigcup OY_{нн}^{у} \bigcup OY_{нн}^{ну}\} \qquad (23)$$

Данная аналитическая конструкция иллюстрируется структурным представлением, изображенным на рисунке ниже:


ОУ
$U(t)$
$Y(t)$
$ОУ_н^у$
$ОУ_н^{ну}$
$ОУ_{нн}^у$
$ОУ_{нн}^{ну}$

Представления (23) и рисунок называются *каноническим представлением ОУ* Р. Калмана.

$OУ_{н}^{у}$ – полностью *управляемая* и *наблюдаемая* часть ОУ;

$OУ_{н}^{ну}$ – *неуправляемая*, но *наблюдаемая* часть ОУ;

$OУ_{ну}^{у}$ – *управляемая*, но *ненаблюдаемая* часть ОУ;

$OУ_{нн}^{ну}$ – *неуправляемая* и *ненаблюдаемая* часть ОУ.