Математические модели вход-выход дискретных объектов управления

В системе управления функции регулятора может выполнять цифровое(дискретное) устройство. Такие устройства реализуются в форме микро-ЭВМ, микроконтроллеров, микропроцессоров, сопрягаемых с цифро-аналоговыми преобразователями. Ввод информации в дискретное устройство осуществляется через определенные интервалы времени, поэтому для математического описания и анализа качества дискретных систем необходимо разработать специальный метод.

Дискретная система оперирует с данными, получаемыми из непрерывного сигнала путем выборки его значений в равноотстоящие интервалы времени. В результате получается временная последовательность данных, называемая дискретным сигналом.

Осуществляется переход от непрерывного времени t к дискретным моментам времени по формуле $t = k\Delta t, k$ – целое число, принимающее значения $k = 0, 1, 2, \dots$

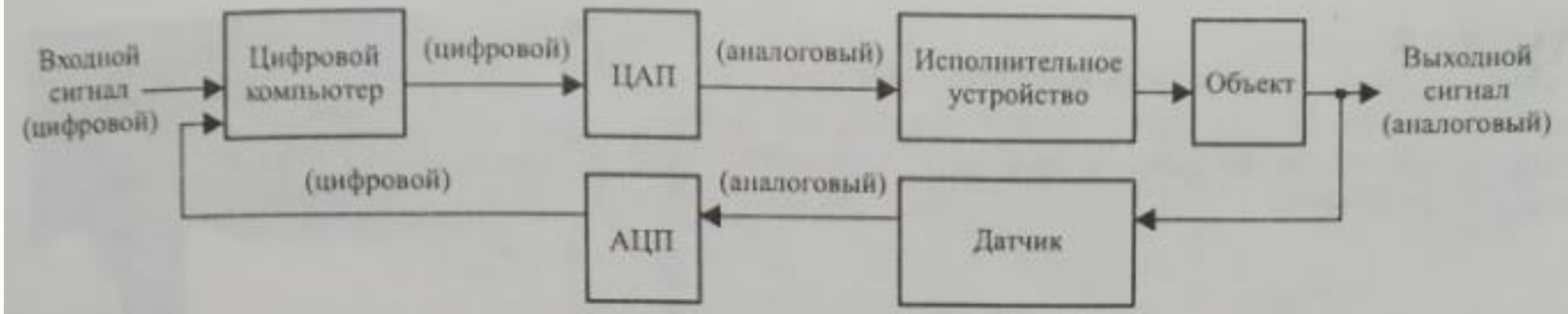

Рис. 13.1. Функциональная схема цифровой системы управления, содержащая преобразователи сигналов. На схеме указаны типы сигналов (аналоговые или цифровые)

Рассмотрим непрерывный объект управления

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + \cdots + b_m u(t). \quad (1)$$

Заменим производные отношением конечных малых:

$$\begin{aligned}
&\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} \cong \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{y(k\Delta t + \Delta t) - y(k\Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\{y(k+1) - y(k)\};\\
&\ddot{y}(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \cong \frac{\Delta(\Delta y(t))}{(\Delta t)^2} = \frac{\Delta y(t+\Delta t) - \Delta y(t)}{(\Delta t)^2} = \frac{y(t+2\Delta t) - y(t+\Delta t) - y(t+\Delta t) + y(t)}{(\Delta t)^2} =\\
&\qquad = \frac{1}{(\Delta t)^2}\{y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)\};\\
&\dddot{y}(t) = \frac{d^3 y(t)}{dt^3} \cong \frac{\Delta(\Delta(\Delta y(t)))}{(\Delta t)^3} = \frac{\Delta(\Delta y(t+\Delta t)) - \Delta(\Delta y(t))}{(\Delta t)^3} = \frac{\Delta y(t+2\Delta t) - 2\Delta y(t+\Delta t) + \Delta y(t)}{(\Delta t)^3} =\\
&\qquad = \frac{y(t+3\Delta t) - y(t+2\Delta t) - 2y(t+2\Delta t) + 2y(t+\Delta t) + y(t+\Delta t) - y(t)}{(\Delta t)^3} =\\
&\qquad = \frac{1}{(\Delta t)^3}\{y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k)\};\\
&\vdots\\
&y^{(m)}(t) \cong \frac{1}{(\Delta t)^m}\left\{\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i y(k+m-i)\right\};
\end{aligned} \quad (2)$$

Если представления (2) подставить в дифференциальное уравнение (1), то получим рекуррентное уравнение вида

$$\bar{a}_0 y(k+n) + \bar{a}_1 y(k+n-1) + \dots + \bar{a}_n y(k) = \bar{b}_0 u(k+m) + \dots + \bar{b}_m u(k). \quad (3)$$

Рекуррентное уравнение (3) является математической моделью отношения «вход-выход» дискретного объекта (ДО).

Введем в рассмотрение символ оператора сдвига ς переменных ДО по дискретному времени вправо, представимый в форме

$$\varsigma f(k) = f(k+1), \quad (4)$$

при этом операция сдвига переменной дискретного объекта на m единиц дискретного времени вправо выражается как

$$\varsigma^m f(k) = f(k+m). \quad (5)$$

Применим (5) к левой и правой частям рекуррентного уравнения (3):

$$\bar{D}(\varsigma)y(k) = \bar{B}(\varsigma)u(k), \tag{6}$$

где $\bar{D}(\varsigma) = \bar{a}_0\varsigma^n + \bar{a}_1\varsigma^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1}\varsigma + \bar{a}_n,$

$$\bar{B}(\varsigma) = \bar{b}_0\varsigma^m + \cdots + \bar{b}_m$$

Полином

$$\bar{D}(\varsigma)|_{\varsigma=\bar{\lambda}} = \bar{a}_0\bar{\lambda}^n + \bar{a}_1\bar{\lambda}^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1}\bar{\lambda} + \bar{a}_n$$

называется характеристическим полиномом линейного рекуррентного уравнения.

Найдем выражение для управляемой переменной $y(k)$. Как и для непрерывного объекта, движение дискретного объекта представимо суммой свободного и вынужденного движений. Общее решение уравнения (3) можно записать в форме:

$$y(k) = y_c(k) + y_{\text{в}}(k)$$

Слагаемое $y_c(k)$ ищется при ненулевых начальных условиях $y(i) \neq 0, i = 0, \dots n-1$ и $u(k) = 0$.

Слагаемое $y_{\text{в}}(k)$ ищется при нулевых начальных условиях $y(i) = 0, i = 0, \dots n-1$ и $u(k) \neq 0$.

Запишем однородное рекуррентное уравнение

$$\bar{a}_0 y(k+n) + \bar{a}_1 y(k+n-1) + \cdots + \bar{a}_n y(k) = 0 \qquad (7)$$

Рассмотрим случай, когда все корни уравнения (7) вещественны и различны.

Тогда

$$y_c(k) = \sum_{p=1}^{n} \bar{C}_p \bar{\lambda}_p^k, \qquad (8)$$

где $\bar{\lambda}_p$ $(p = 1, \dots n)$ – это корни характеристического уравнения $\bar{D}(\bar{\lambda}) = 0$.

Коэффициенты $\bar{C}_p$ $(p = 1, \dots n)$ определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \overline{C}_1 + \overline{C}_2 + \dots + \overline{C}_n = y(0) \\ \overline{\lambda}_1 \overline{C}_1 + \overline{\lambda}_2 \overline{C}_2 + \dots + \overline{\lambda}_n \overline{C}_n = y(1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{\lambda}_1^{n-1} \overline{C}_1 + \overline{\lambda}_2^{n-1} \overline{C}_2 + \dots + \overline{\lambda}_n^{n-1} \overline{C}_n = y(n-1) \end{array}\right\} \quad (9)$$

Систему (9) можно записать в векторно-матричной форме

$M_B(\bar{\lambda}_i)\bar{C} = col\{y(i), i = 0, \dots n - 1\}$,

где $M_B(\bar{\lambda}_i)$ – матрица Вандермонда, $\bar{C} = col\{\bar{C}_i, i = 1, \dots n\}$. Тогда для $\bar{C}$ можно записать

$$\bar{C} = M_B^{-1}(\bar{\lambda}_i) col\{y(i), i = 0, \dots n - 1\}$$

Вынужденная составляющая решения $y_{\text{в}}(k)$ ищется в форме

$$y_{\text{в}}(k) = \sum_{p=1}^{n} \eta_p(k) \bar{\lambda}_p^k \qquad (10)$$

Общее решение неоднородного рекуррентного уравнения принимает вид

$$(k) = y_c(k) + y_{\text{в}}(k) = \sum_{p=1}^{n} \bar{C}_p \bar{\lambda}_p^k + \sum_{p=1}^{n} \eta_p(k) \bar{\lambda}_p^k ,$$