Соотношения между процессами на входе и выходе линейных систем.

Рассмотрим два варианта решения задачи – при описании систем в виде вход-выход и вход-состояние-выход.

1) Описание систем в форме вход-выход

Рассмотрим линейную систему с постоянными параметрами, одним входом и одним выходом, частотной передаточной функцией $W(j\omega)$ и весовой функцией $h(t)$. Пусть на вход системы поступает гладкая функция $x(t)$, являющаяся реализацией стационарного случайного процесса $\{x(t)\}$. Тогда выход $y(t)$ будет являться реализацией стационарного случайного процесса $\{y(t)\}$.

Выходной процесс определяется выражением

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (1)$$

Для двух моментов t и $t+\tau$

$$y(t) = \iint_0^\infty h(\xi)h(\eta)x(t-\xi)x(t+\tau-\eta)d\xi d\eta. \quad (2)$$

Математическое ожидание обеих частей формулы (2) есть

$$R_y(\tau) = \iint_0^\infty h(\xi)h(\eta)R_x(\tau+\xi-\eta)d\xi d\eta. \quad (3)$$

Это выражение не зависит от t. Этот общий результат показывает, как получить автокорреляционную функцию стационарного выходного процесса, зная автокорреляционную функцию стационарного входного процесса и весовую функцию системы и пользуясь только интегрированием по времени.

Взаимная корреляционная функция $R_{xy}(\tau)$ стационарных процессов на входе $x(t)$ и на выходе $y(t+\tau)$ определяется из соотношения:

$$x(t)(y(t+\tau) = \int_0^\infty h(\xi)x(t)x(t+\tau-\xi)d\xi. \quad (4)$$

Найдя математическое ожидание произведения (4), получим

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^\infty h(\xi)R_x(\tau-\xi)d\xi. \quad (5)$$

Взаимная корреляционная функция характеризует взаимную связь двух случайных процессов в разные моменты времени, отстоящие друг от друга на промежуток времени τ.

Преобразование Фурье равенств (3) и (5) по всей области частот дает важные соотношения для спектров и взаимных спектров

$$S_y(\omega) = |W(\omega)|^2 S_x(\omega) \tag{6}$$

и

$$S_{xy}(\omega) = W(\omega) S_x(\omega). \tag{7}$$

Дисперсия случайного процесса определяется через спектральную плотность как

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega. \tag{8}$$

Весьма важным обстоятельством является то, что спектральная плотность и корреляционная функция случайных процессов представляют собой взаимные преобразования Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \tag{9}$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \tag{10}$$

Так как спектральная плотность и корреляционная функция представляют собой четные вещественные функции, то иногда формулы (9) и (10) представляют в более простом виде:

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) cos(\omega\tau) d\tau, \tag{11}$$

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) cos(\omega\tau) d\omega. \tag{12}$$

Обычно спектральная плотность вычисляется по известной корреляционной функции при помощи формул (9) или (11).

Вернемся к соотношениям (6) и (7) для спектральных плотностей. Следует заметить, что выражение (6) содержит только амплитудную частотную характеристику $|W(\omega)|$, тогда как соотношение (7) представляет собой систему из двух уравнений, содержащую как амплитудную, так и частотную характеристики. Для односторонних спектральных плотностей $G_x(\omega)$, $G_y(\omega)$, $G_{xy}(\omega)$, которые существуют только при $\omega \geq 0$, уравнения (6) и (7) принимают вид

$$G_y(\omega) = |W(\omega)|^2 G_x(\omega), \tag{13}$$

$$G_{xy}(\omega) = W(\omega) G_x(\omega). \tag{14}$$

Формула (14) эквивалентна следующей:

$$\left|G_{xy}(\omega)\right|e^{-j\theta_{xy}(\omega)} = |W(\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}|G_x(\omega)| \quad . \tag{15}$$

Таким образом,

$$\left|G_{xy}(\omega)\right| = |W(\omega)|G_x(\omega). \tag{16}$$

$$\theta_{xy}(\omega) = \varphi(\omega). \tag{17}$$

Равенства (13) и (14) составляют основу многих физических применений теории случайных процессов.

Белый шум

Случайный процесс, имеющий постоянную спектральную плотность на всех частотах, называется *белым шумом* (по аналогии с белым светом, спектр которого имеет равномерную интенсивность на всех частотах видимого диапазона). Постоянное значение спектральной плотности (или *интенсивность белого шума*) $S(\omega) = N$. Обозначим белый шум как $w(t)$.

Пример такого процесса – тепловые шумы резистора, которые дают уровень спектральной плотности напряжения на этом резисторе $N = 4RkT^o$, где R – сопротивление, k – постоянная Больцмана, T^o - абсолютная температура.

В соответствии с формулой (12) спектральной плотности белого шума соответствует корреляционная функция

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty N cos(\omega\tau) d\omega = N\delta(\tau). \tag{18}$$

Таким образом, корреляционная функция представляет собой импульсную функцию, расположенную в начале координат.

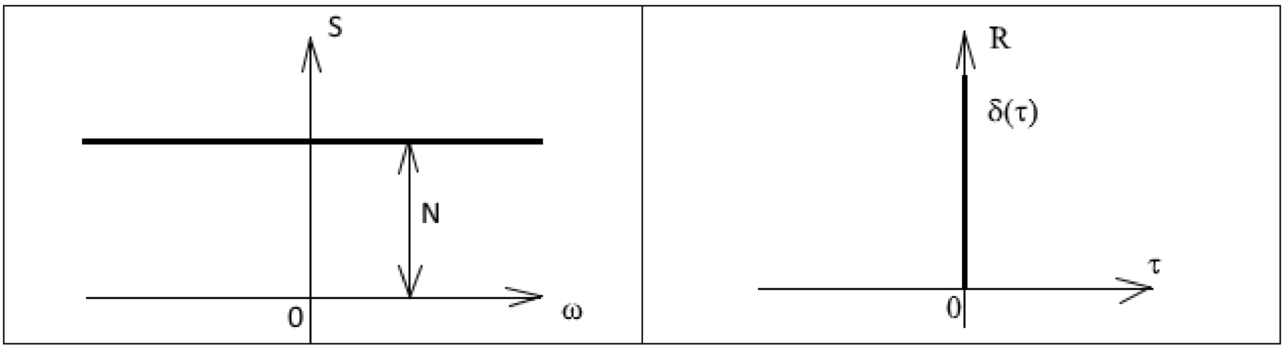

Рисунок 1.

Укажем свойства белого шума:

- Среднее значение белого шума (математическое ожидание) равно нулю: $M\{w(t)\} = 0$.

- отсчеты $w(t)$ и $w(t+\tau)$ некоррелированы при сколь угодно малом τ.

- автокорреляционная функция $R_w(\tau) = N\delta(\tau)$, где N - интенсивность шума.

- Дисперсия белого шума бесконечна $D_w = R_w(0) = N\delta(0) = N \cdot \infty = \infty$.

- белый шум характеризуется постоянной спектральной плотностью $S_w(t) = N$, что устанавливается с использованием интегрального свойства $\delta-$функции на основании цепочки равенств

$$S_w(\omega) = \mathbf{F}\{R_w(\tau) = N\delta(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} N\delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = N. \quad (19)$$

Непрерывный белый шум является примером невоспроизводимого процесса, это идеализированная математическая модель.

Ограниченный по частоте белый шум

Назовем ограниченный по частоте белый шум окрашенным шумом. Линейное звено, установившаяся реакция которого на белый шум интенсивности N имеет заданную спектральную плотность, называется *формирующим фильтром*.

Окрашенным шумом называется процесс, наблюдаемый на выходе формирующего фильтра, на вход которого подан белый шум интенсивности N.

Выделяют две модели окрашенных шумов:

1) Экспоненциально коррелированный шум, формируемый из белого шума с помощью фильтра, представляющего собой апериодическое звено 1-го порядка.
2) Окрашенный шум типа «нерегулярная качка», который формируется из белого шума фильтром, представляющим собой колебательное звено 2-го порядка.

Пример 1. Реакция фильтра нижних частот на белый шум.

На вход RC-фильтра нижних частот с постоянной времени $T = RC$ поступает белый шум. Найдем спектральную плотность и автокорреляционную функцию выходного процесса.

Частотная передаточная функция RC-фильтра нижних частот

$W(\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = |W(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$, модуль частотой передаточной функции $|W(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$, аргумент $\varphi(\omega) = arctg(\omega T)$.

Если входной процесс – это белый шум со спектром $S_w(\omega) = N$ на всех частотах, то в соответствии с (6)

$$S_y(\omega) = |W(\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{N}{1+(\omega T)^2},$$

Дисперсия выхода

$$D_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N}{1+(\omega T)^2}d\omega = \frac{N}{2T}.$$

Согласно (12) корреляционная функция выхода

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S_y(\omega)cos(\omega\tau)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{N}{1+(\omega T)^2}cos(\omega\tau)d\omega =$$

$$= \frac{N}{2T}e^{-\frac{1}{T}\tau}.$$

Пример 2. Реакция фильтра, представляющего собой колебательное звено 2-го порядка, на белый шум.

В качестве примера, иллюстрирующего процедуру вычисления спектральной плотности, корреляционной функции и дисперсии выхода при внешнем стохастическом воздействии типа «белый шум», рассмотрим систему второго порядка, представляющую собой колебательное звено, которое используется в качестве фильтра, и выходом которого является окрашенный шум типа «нерегулярная качка».

Примером такого звена может служить система с вынуждающей силой на входе и смещением массы на выходе.

В данном примере вынуждающей силой является белый шум, а выходом – смещение массы.

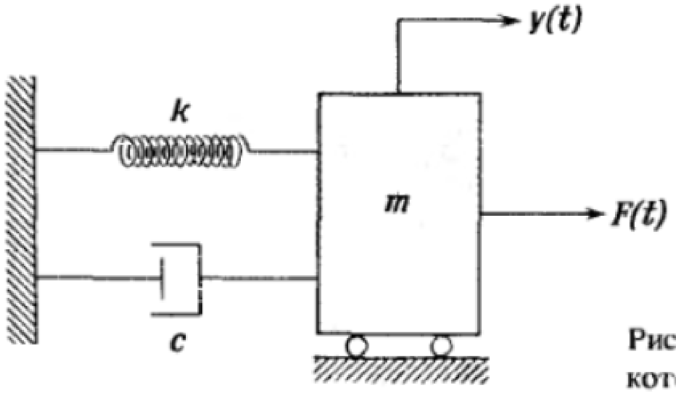

Рис. 2.2. Механическая система, входом которой служит сила.

Рисунок 2.

Выведем уравнение движения данной системы. Получим его, пользуясь одним из основных законов механики, согласно которому сумма всех сил, приложенных к массе, равна нулю.

$F(t) + F_k(t) + F_c(t) + F_m(t) = 0,$

где $F_k(t) = -ky(t)$ - упругая сила, $F_c(t) = -c\dot{y}(t)$ - сила торможения, $F_m(t) = -m\ddot{y}(t)$ - сила инерции. Следовательно, уравнение движения системы запишется в виде:

$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t).$

Передаточная функция системы $W(s) = \frac{1/k}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{c}{k}s + 1}$. Нетрудно заметить, что это колебательное звено $W(s) = \frac{1}{T_k{}^2 s^2 + 2\zeta T_k s + 1}$, для которого $T_k = \sqrt{\frac{m}{k}}$ и $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$.

Спектральная плотность выхода принимает вид:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{N}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}.$$

Корреляционная функция выхода определяется выражением

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_y(\omega)cos(\omega\tau)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{N}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}cos(\omega\tau)d\omega =$$

$$= \frac{N\omega e^{-\omega\xi\tau}}{4\xi}\left[cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}\tau) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}\tau)\right].$$

Дисперсия выхода

$$D_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)d\omega = R_y(0) = \frac{N\omega}{4\xi}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению систем, заданных в виде вход-состояние-выход.

Рассмотрим линейную непрерывную систему с постоянными параметрами

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), x(0) = x(t)|_{t=0}, \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

в которой $x(t)$ – вектор состояния, $y(t)$ – вектор выхода, $g(t)$ –внешнее воздействие. F,G,C – соответственно матрицы состояния, входа и выхода.

Будем рассматривать линейную систему с одним входом и выходом (SISO), поэтому перечисленные выше векторы и матрицы будут иметь следующие размерности: $\dim(x) = n, \dim(g) = \dim(y) = m = 1;$ $dim(F) = n \times n,$ $dim(G) = n \times m = n \times 1,$ $dim(C) = m \times n = 1 \times n$.

Подадим на вход системы (1) стохастическое воздействие типа «белый шум». Тогда $g(t) = w(t)$.

1) Вычислим матрицы дисперсий входа и выхода.

Утверждение 1. Установившееся значение D_x матрицы дисперсий $D_x(t)$ вектора состояния $x(t)$ устойчивой линейной стационарной непрерывной системы (4.1) ,на вход которой подается воздействие типа «белый шум» $w(t)$ с матрицей интенсивностей N, может быть вычислено как решение уравнения Ляпунова

$$FD_x + D_x F^T = -GNG^T. \quad (2)$$

Перейдем теперь к вычислению матриц дисперсий векторов выхода $y(t)$. В соответствии с определением матрицы дисперсии стохастической векторной переменной для дисперсии вектора выхода системы (1) можно записать

$$D_y = M\left[(y(t)-\bar{y}(t))(y(t)-\bar{y}(t))^T\right] = M\left[C(x(t)-\bar{x}(t))(x(t)-\bar{x}(t))^T C^T\right] =$$
$$= CM\left[(x(t)-\bar{x}(t))(x(t)-\bar{x}(t))^T\right]C^T = CD_xC^T. \quad (3)$$

2) Вычислим корреляционные матрицы векторов состояния и выхода системы

Рассмотрим корреляционные (автокорреляционные) матрицы (функции) векторных переменных линейной непрерывной системы (1). Тогда, если ограничиться случаем центрированных стохастических процессов по вектору состояния системы (1) корреляционная матрица $R_x(\tau)$ получает представления

$$R_x(\tau) = M\{x(t+\tau)x^T(t)\}, \tau \ge 0, \quad (4)$$

$$R_x(\tau) = M\{x(t-\tau)x^T(t)\}, \tau \le 0. \quad (5)$$

В случае $\tau = 0$ оба представления (4) и (5) приводят к равенству $R_x(0) = D_x$. Корреляционная матрица $R_y(\tau)$ для вектора выхода системы (1) получает представления

$$R_y(\tau) = M\{y(t+\tau)y^T(t)\} = CM\{x(t+\tau)x^T(t)\}C^T = CR_x(\tau)C^T, \tau \ge 0, \quad (6)$$

$$R_y(\tau) = M\{y(t-\tau)y^T(t)\} = CM\{x(t-\tau)x^T(t)\}C^T = CR_x(\tau)C^T, \tau \le 0. \quad (7)$$

Для корреляционной матрицы $R_x(\tau)$ вектора состояния в силу свойств вектора состояния можно записать

$$R_x(\tau) = M\{x(t+\tau)x^T(t)\} = M\{e^{F\tau}x(t)x^T(t)\} = e^{F\tau}D_x, \tau \ge 0 \quad (8)$$

$$R_x(\tau) = M\{x(t-\tau)x^T(t)\} = M\{e^{-F\tau}x(t)x^T(t)\} = e^{-F\tau}D_x, \tau \le 0. \quad (9)$$

В свою очередь, для корреляционной матрицы вектора выхода $R_y(\tau)$ на основании (6) – (9) получим представления

$$R_y(\tau) = CR_x(\tau)C^T = Ce^{F\tau}D_xC^T, \tau \ge 0, \quad (10)$$

$$R_y(\tau) = CR_x(\tau)C^T = Ce^{-F\tau}D_xC^T, \tau \le 0. \quad (11)$$

Несколько слов о пользовательских функциях в теории и практике динамических систем, которые выполняет корреляционная матрица. Если исследуемый стохастический процесс является скалярным, то его корреляционная матрица тоже является скалярной и именуется корреляционной функцией. Основным пользовательским параметром корреляционной функции скалярного процесса является интервал корреляции $\tau_k \le \arg\max_{\tau}\{R_y(\tau) = 0.05R_y(0)\}$, представляющий собой отрезок $[0, \tau_\kappa]$ временной оси $|\tau| \ge 0$, за пределами которого корреляционная функция становится близкой к нулю, что свидетельствует о том, что отсчеты, снятые с реализации стохастического процесса с интервалом, превышающим интервал корреляции τ_κ, оказываются не коррелированными. Информация о некоррелированности отсчетов с реализации стохастического процесса используется для организации цифровой обработки этих процессов. В этой связи основная пользовательская нагрузка ложится на корреляционные матрицы вектора выхода системы, возбуждаемой стохастическим экзогенным воздействием. Поэтому в дальнейшем предметом внимания становятся выражения (10), (11) для корреляционной матрицы $R_y(\tau)$ вектора выхода системы.

3) Вычислим матрицы спектральных плотностей векторов состояния и выхода

Матрица $S_{(*)}(\omega)$ спектральных плотностей стохастической векторной переменной $(*)(t)$ вычисляется как прямое преобразование Фурье корреляционной матрицы этой векторной стохастической переменной. Таким образом, можно записать

$$S_{(*)}(\omega) = F\{R_{(*)}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{(*)}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (12)$$

Так как корреляционная матрица $R_{(*)}(\tau)$ имеет различные представления для положительных и отрицательных значений аргумента τ, то вычисление матрицы $S_{(*)}(\omega)$ осуществляется с помощью формулы

$$S_{(*)}(\omega) = \int_{-\infty}^{0} R_{(*)}(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} R_{(*)}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (13)$$

$x(t)$ и $S_y(\omega)$ вектора выхода $y(t)$ могут быть заданы выражениями **Утверждение 2.** Для динамической системы вида (1) при стохастическом внешнем воздействии типа «белый шум» $w(t)$ матрицы $S_x(\omega)$ спектральных плотностей мощности вектора состояния

$$S_x(\omega) = -2F(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x, \quad (14)$$

$$S_y(\omega) = CS_x(\omega)C^T = -2CF(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x C^T. \quad (15)$$

Пример 1. Реакция RC-фильтра нижних частот на белый шум.

Пусть на вход RC-фильтра нижних частот с постоянной времени $T = RC$ поступает белый шум. Найдем дисперсию, спектральную плотность и автокорреляционную функцию выходного процесса. RC-фильтр представляет собой апериодическое звено первого порядка, формирующее на своем выходе окрашенное стохастическое воздействие типа «экспоненциально коррелированный» сигнал. Итак, передаточная функция RC-фильтра имеет вид:

$W(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$. Ведем обозначение $\frac{1}{T}=\Omega$ и изобразим структурную схему звена:

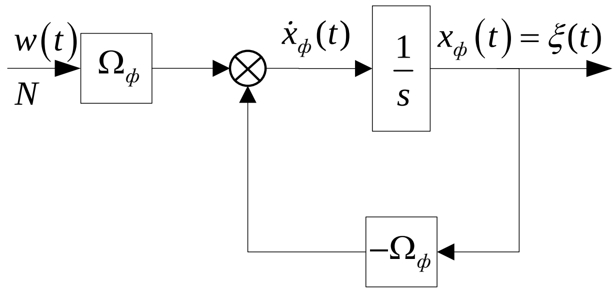

Рисунок 4.1 – Структурное представление ФФ в виде апериодического звена первого порядка

Запишем фильтр в форме (1)

$\dot{x}_\phi(t)=F_\phi x_\phi(t)+G_\phi w(t); x_\phi(0)=0;$

$\xi(t)=C_\phi x_\phi(t),$

С учетом схемы, представленной на рис.1, модель принимает вид $\dot{x}_\phi(t)=-\Omega_a x_\phi(t)+\Omega_a w(t);\ \ \xi(t)=x_\phi(t)$

Теперь матрицы, описывающие фильтр, можно записать как $F_\phi=[-\Omega_a];\ G_\phi=[\Omega_a];\ \ C_\phi=[1].$

Решение примера.

1) Вычисление дисперсий.

В силу условия $x_\phi(0)=0$ стохастические переменные ФФ являются центрированными, поэтому матрицы дисперсий его векторов состояния и выхода запишутся в форме

$$D_{x_\phi}=M\left\{x_\phi(t)x_\phi{}^T(t)\right\}=M\left\{x_\phi(t)x_\phi(t)\right\}=M\left\{x_\phi(t)^2\right\};$$

$$D_\xi=C_\phi D_{x_\phi}C_\phi{}^T=1\cdot D_{x_\phi}\cdot 1=D_{x_\phi}.$$

Уравнение Ляпунова (2) относительно матрицы дисперсий стохастического вектора состояния применительно к апериодическому ФФ записывается в форме $F_\phi D_{x_\phi}+D_{x_\phi}F_\phi{}^T=-G_\phi N G_\phi{}^T$, подстановка в которое матриц апериодического звена дает

$$(-\Omega_a)D_{x_\phi}+D_{x_\phi}(-\Omega_a)^T=-\Omega_a N\Omega_a{}^T\Rightarrow D_{x_\phi}=\frac{N\Omega_a}{2}=D_\xi.\qquad\blacksquare$$

Оценим физическую размерность интенсивности N «белого шума» $w(t)$, для которой справедливо представление $N=\dfrac{2D_{x_\phi}}{\Omega_a}=2D_{x_\phi}\Omega_a{}^{-1}$, позволяющее для физической размерности интенсивности «белого шума» записать

$$[N]=[2D_{x_ф}][\Omega_a{}^{-1}]=[(*)^2]\left[\left(c^{-1}\right)^{-1}\right]=[(*)^2][c]=(*)^2 c,$$

где $(*)$ имеет смысл:

- метра, миллиметра, микрометра и т.д. для стохастического процесса типа линейных перемещений;
- радиана, градуса, угловой секунды и т.д. для стохастического процесса типа угловых перемещений;
- вольты, милливольты, амперы, миллиамперы и т.д. для электрических стохастических процессов.

В заключение заметим, что дисперсия окрашенного шума $\xi(t)$ на выходе формирующего фильтра – апериодического звена первого порядка тем больше, чем больше его полоса пропускания, определяемая его сопрягающей частотой Ω_a.

2) Вычисление корреляционных матриц с использованием соотношений (8) и (10).

Матричные компоненты соотношений (8) и (10) имеют представления $F_ф=[-\Omega_a];\ C_ф=[1];\ D_{x_ф}=\dfrac{N\Omega_a}{2};e^{F_ф t}=e^{-\Omega_a t}$. В итоге коррреляционная матрица выхода (10), вырождающаяся в корреляционную функцию, принимает вид

$$R_y(\tau)=Ce^{F_ф\tau}D_xC^T=1\cdot e^{-\Omega_a\tau}\cdot\frac{N\Omega_a}{2}\cdot 1=\frac{N\Omega_a}{2}e^{-\Omega_a\tau}.$$

Интервал корреляции, зафиксированный на уровне $R_y(\tau_к)=0.05R_y(0)$, составляет величину $\tau_к=3/\Omega_a$.

Полученные представления и численные оценки, хорошо иллюстрируют название окрашенного шума, сформированного из экзогенного воздействия типа «белый шум» с помощью апериодического звена первого порядка, «экспоненциально коррелированный» сигнал (шум).

3) Вычисление матриц спектральных плотностей с использованием соотношений (14) и (15)

Матричные компоненты соотношений (14) и (15) имеют представления $F_ф=[-\Omega_a];\ C_ф=[1];\ D_{x_ф}=\dfrac{N\Omega_a}{2}$. В итоге матрица $S_x(\omega)$ спектральной плотности вектора состояния (14) вырождается в функцию и принимает вид

$$S_x(\omega)=-2F_ф\left(F_ф^2+\omega^2 I\right)^{-1}D_{x_ф}=(-2)(-\Omega_a)\left(\Omega_a^2+\omega^2\right)^{-1}\frac{N\Omega_a}{2}=\frac{N\Omega_a^2}{\Omega_a^2+\omega^2}.$$

В свою очередь функция $S_y(\omega)$ спектральной плотности выхода на основании (15) получает представление

$$S_y(\omega)=CS_x(\omega)C^T=1\cdot\frac{N\Omega_a^2}{\Omega_a^2+\omega^2}\cdot 1=\frac{N\Omega_a^2}{\Omega_a^2+\omega^2}=\frac{N}{T_a^2\omega^2+1}=\left|\Phi_ф(j\omega)\right|^2 N. \qquad \blacksquare$$

Пример 2. В качестве второго примера, иллюстрирующего процедуру вычисления матриц дисперсии вектора состояния и выхода при экзогенном стохастическом воздействии типа «белый шум» на основе матричного уравнения Ляпунова (2), рассмотрим систему второго порядка, представляющую собой колебательное звено, которое используется в качестве фильтра, формирующего на своем выходе окрашенное стохастическое воздействие типа «нерегулярная качка».

Примером такого звена может служить система с вынуждающей силой на входе и смещением массы на выходе.
Выведем уравнение движения данной системы. Получим его, пользуясь одним из основных законов механики, согласно которому сумма всех сил, приложенных к массе, равна нулю.
$F(t)+F_k(t)+F_c(t)+F_m(t)=0,$
где $F_k(t)=-ky(t)$ - упругая сила, $F_c(t)=-c\dot{y}(t)$ - сила торможения, $F_m(t)=-m\ddot{y}(t)$ - сила инерции. Следовательно, уравнение движения системы запишется в виде:
$m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=F(t).$
Передаточная функция системы $W(s)=\frac{1/k}{\frac{m}{k}s^2+\frac{c}{k}s+1}$. Нетрудно заметить, что это колебательное звено $W(s)=\dfrac{1}{T_k{}^2s^2+2\zeta T_k s+1}$, для которого $T_k=\sqrt{\frac{m}{k}}$ и $\xi=\frac{c}{2\sqrt{km}}$.
Представим данную систему в виде структурной схемы:

$$W(s)=\frac{1}{T_k{}^2s^2+2\zeta T_k s+1}=\frac{1/T_k^2\,s^2}{1+2\zeta/T_k\,s+1/T_k^2\,s^2}\Bigg|_{\frac{1}{T_k}=\Omega_k}=\frac{\Omega_k{}^2\,\frac{1}{s^2}}{1+2\zeta\Omega_k\,\frac{1}{s}+\Omega_k{}^2\,\frac{1}{s^2}}$$

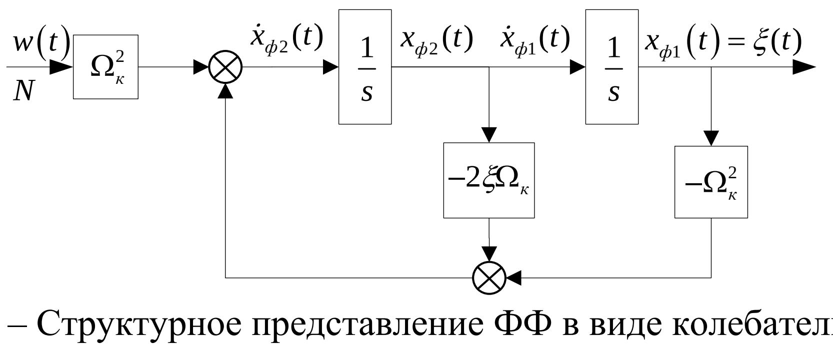

Рисунок 4.2 – Структурное представление ФФ в виде колебательного звена

Запишем матрицы системы, соответствующие описанию в форме (1)
$\dot{x}_ф(t)=F_ф x_ф(t)+G_ф w(t); x_ф(0)=0;\ y(t)=C_ф x_ф(t),$
на основании структурной схемы:

$$F_ф=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\Omega_к^2 & -2\zeta\Omega_k\end{bmatrix};\ G_ф=\begin{bmatrix}0\\ \Omega_к^2\end{bmatrix};\ C_ф=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

Решение примера.

1) Вычисление дисперсии

В силу условия $x_ф(0)=0$ стохастические переменные ФФ являются центрированными, поэтому матрица дисперсий его вектора состояния запишется в форме

$$D_{x_ф}=M\left\{x_ф(t)x_ф{}^T(t)\right\}=M\left\{\begin{bmatrix}x_{ф1}\\ x_{ф2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{ф1} & x_{ф2}\end{bmatrix}\right\}=M\left\{\begin{bmatrix}x_{ф1}{}^2 & x_{ф1}x_{ф2}\\ x_{ф2}x_{ф1} & x_{ф2}{}^2\end{bmatrix}\right\}=$$

$$=\begin{bmatrix}D_{x_{ф11}} & D_{x_{ф12}}\\ D_{x_{ф21}} & D_{x_{ф22}}\end{bmatrix},$$

при этом $D_{x_{ф12}}=D_{x_{ф21}}$, поэтому в уравнении Ляпунова $F_ф D_{x_ф}+D_{x_ф}F_ф{}^T=-G_ф N G_ф{}^T$ будем представлять матрицу $D_{x_ф}$ в форме $D_{x_ф}=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{12} & D_{22}\end{bmatrix}$, где $D_{11}=D_{x_{ф11}};D_{12}=D_{x_{ф12}};D_{22}=D_{x_{ф22}}$.

В результате уравнение Ляпунова (2) принимает вид

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\Omega_k{}^2 & -2\zeta\Omega_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{12} & D_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{12} & D_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\Omega_k{}^2\\ 1 & -2\zeta\Omega_k\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0\\ \Omega_k{}^2\end{bmatrix}N\begin{bmatrix}0 & \Omega_k{}^2\end{bmatrix}.$$

Перемножение матриц порождает систему скалярных равенств

$$\begin{cases}D_{12}+D_{12}=0\Rightarrow D_{12}=0;\\ D_{22}+\left(-\Omega_k{}^2\right)D_{11}-\left(2\zeta\Omega_k\right)D_{12}=0\Rightarrow D_{22}=\Omega_k{}^2D_{11}\Rightarrow D_{11}=\dfrac{1}{\Omega_k{}^2}D_{22}=\dfrac{N\Omega_k}{4\zeta};\text{В}\\ -\Omega_k{}^2D_{12}-2\zeta\Omega_kD_{22}-\Omega_k{}^2D_{12}-2\zeta\Omega_kD_{22}=-N\Omega_k{}^4\Rightarrow D_{22}=\dfrac{N\Omega_k{}^3}{4\zeta}.\end{cases}$$

итоге искомая матрица дисперсий $D_{x_ф}$ принимает вид

$$D_{x_ф}=\begin{bmatrix}\dfrac{N\Omega_k}{4\zeta} & 0\\ 0 & \dfrac{N\Omega_k{}^3}{4\zeta}\end{bmatrix}=\frac{N\Omega_k}{4\zeta}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \Omega_k{}^2\end{bmatrix}.$$

Дисперсия D_y выхода (окрашенного шума типа «нерегулярная качка») определится из соотношения

$$D_y = C_\phi D_{x_\phi} C_\phi{}^T = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{N\Omega_k}{4\xi} & 0 \\ 0 & \dfrac{N\Omega_k{}^3}{4\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} = \frac{N\Omega_k}{4\xi}. \qquad \blacksquare$$

2) Вычисление корреляционных матриц

Решение примера. Для этого примера матричные компоненты соотношений (8) и (10) имеют представления

$$F_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_k{}^2 & -2\xi\Omega_k \end{bmatrix}; \quad C_\phi = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}; D_{x_\phi} = \frac{N\Omega_k}{4\xi}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_k{}^2 \end{bmatrix};$$

$$e^{F_\phi t} = \exp\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_k{}^2 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix} t\right\} = e^{-\xi\Omega_k t} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} cos\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)t + \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)t & \dfrac{1}{\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}} sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)t \\ -\dfrac{\Omega_k}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)t & cos\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)t - \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)t \end{bmatrix}$$

В итоге корреляционная матрица выхода (10), вырождающаяся в корреляционную функцию, принимает вид

$$R_y(\tau) = Ce^{F_\phi \tau} D_x C^T = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \times e^{-\xi\Omega_k\tau} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau + \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau & \dfrac{1}{\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau \\ -\dfrac{\Omega_k}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau & \cos\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau - \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left(\frac{N\Omega_k}{4\zeta}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_k{}^2 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} = \frac{N\Omega_k}{4\zeta} e^{-\zeta\Omega_k\tau}\left\{\cos\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau\right\}.$$

3) Вычисления матриц спектральных плотностей

Используя (14), получим

$$S_x(\omega) = -2F\left(F^2+\omega^2 I\right)^{-1} D_x = -2\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_k^2 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_k^2 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix}\times\right.$$

$$\left.\times\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_k^2 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix}\right)^{-1}\times\frac{N\Omega_k}{4\zeta}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_k^2 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{N\Omega_k}{2\zeta}\times\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \Omega_k^2 & 2\zeta\Omega_k \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} \omega^2-\Omega_k^2 & -2\zeta\Omega_k^3 \\ 2\zeta\Omega_k^3 & \omega^2-{\Omega_k}^2+4\zeta^2\Omega_k^2 \end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_k^2 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{N\Omega_k}{2\zeta}\times\frac{1}{\left(\omega^2-\Omega_k^2\right)^2+4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2}\times\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \Omega_k^2 & 2\zeta\Omega_k \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \omega^2-\Omega_k^2+4\zeta^2\Omega_k^2 & 2\zeta\Omega_k^3 \\ -2\zeta\Omega_k^3 & \omega^2-\Omega_k^2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_k^2 \end{bmatrix}=\frac{N\Omega_k}{2\zeta}\times\frac{1}{\left(\omega^2-{\Omega_k}^2\right)^2+4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \Omega_k^2 & 2\zeta\Omega_k \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} \omega^2-{\Omega_k}^2+4\zeta^2\Omega_k^2 & 2\zeta\Omega_k^5 \\ -2\zeta\Omega_k^3 & \left(\omega^2-\Omega_\mathrm{k}^2\right) \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{N\Omega_k}{2\zeta}\times\frac{1}{\left(\omega^2-\Omega_k^2\right)^2+4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2}\times\begin{bmatrix} 2\zeta\Omega_k^3 & -\left(\omega^2-\Omega_\mathrm{k}^2\right) \\ \left(\omega^2-\Omega_\mathrm{k}^2\right)\Omega_k^2 & 2\zeta\Omega_k\left(\omega^2-\left(1-\zeta^4\right)\Omega_\mathrm{k}^2\right) \end{bmatrix}.$$

В свою очередь используя (15) для матрицы-функции спектральной функции будем иметь

$$S_y(\omega)=CS_x(\omega)C^T\Big|_{C=[1\quad 0]}=\frac{N\Omega_k^4}{\left(\omega^2-\Omega_k^2\right)^2+4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2}=\left|\Phi_\phi(j\omega)\right|^2 N.$$

Ко всему сказанному в этом параграфе необходимо отметить, что, если функция (матрица) $S_{(*)}(\omega)$ спектральной плотности стохастической переменной $(*(t))$ есть прямое преобразование Фурье от корреляционной функции, то корреляционная функция есть обратное преобразование от функции спектральной плотности, то есть выполняется соотношение

$$R_{(*)}(\tau)=F^{-1}\left\{S_{(*)}(\omega)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{(*)}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega. \qquad (16)$$

Если в выражении (16) в левой и правой частях осуществить предельный переход по τ к нулю $(\tau\to 0)$, то получим полезное соотношение

$$R_{(*)}(0)=D_{(*)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{(*)}(\omega)d\omega. \qquad (17)$$

Таким образом, на основании соотношения (17) следует констатировать, что с точностью до мультипликативного члена $1/(2\pi)$ площадь под графиком функции $S_{(*)}(\omega)$ спектральной плотности стохастической переменной $(*(t))$ равна ее дисперсии $D_{(*(t))}$.