МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ «ВХОД-ВЫХОД» (ВВ) ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Математическая модель динамического объекта –

математическое описание взаимосвязей между переменными объекта, характеризующие его поведение.

Позволяет изучать поведение объекта при воздействии на него физических сигналов (независимых переменных: задающих, командных, управляющих и возмущающих воздействий).

Математическое описание зависит от вида преобразуемых сигналов.

Непрерывное по времени преобразование сигналов: динамические объекты называются *непрерывными*, для их описания используются дифференциальные уравнения.

Дискретное по времени преобразование с интервалом дискретности Δt в моменты времени $t = k(\Delta t)$, где k - дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности: динамические объекты называются *дискретными*, для их описания используются *рекуррентные* (разностные) уравнения.

Дифференциальные и разностные уравнения связывают входной сигнал, размещаемый в правой части уравнений, с выходным сигналом в левой части, то такие математические модели называют моделями **«вход–выход» (ВВ).**

Рассмотрим нелинейный непрерывный динамический объект с одним входом и одним выходом, описываемый нелинейным ОДУ n –го порядка:

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \dots u, t\right) = 0 \qquad (1)$$

$u(t)$ – входной (независимая переменная) сигнал объекта

$y(t)$ – выходная (зависимая) переменная объекта.

Если осуществить линеаризацию (1) и оставить зависимые переменные в левой части, а независимые переменные в правой, то получим линейное (линеаризованное) дифференциальное уравнение

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)y(t) =$$
$$= b(t)u^{(m)}(t) + \dots + b_m(t)u(t) \qquad (2)$$

Динамические объекты, математические модели которых могут быть представлены в виде уравнения (2) – *непрерывные линейные объекты*.

Если объект является стационарным по времени, то все коэффициенты уравнения (2) являются постоянными величинами:

$$a_i(t) = a_i, i = 1, \dots n$$
$$b_j(t) = b_j, j = 1, \dots m,$$

Тогда (2) можно переписать как

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) =$$
$$= b_0 u^{(m)}(t) + \dots + b_m u(t) \qquad (3)$$

Первая математическая модель линейного непрерывного динамического объекта с постоянными параметрами **– ЛДУ с постоянными коэффициентами типа «вход–выход»** вида (3).

Пример линеаризации объекта в форме вход-выход

1. Рассмотрим ОУ в форме (1)

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \dots u, t\right) = 0$$

Считаем, что этот объект находится в установившемся режиме (состоянии равновесия)

$y = y^* = const, u = u^* = const,$

Т.е.

$$F(0, 0, \dots y^*, 0, 0, \dots u^*, t) = 0$$

Требуется получить линеаризованную модель в окрестности точки равновесия $y = y^*, u = u^*, \dot{y} = \cdots = y^{(n)} = 0, \dot{u} = \cdots = u^{(m)} = 0.$

Введем новые координаты – отклонения от состояния равновесия:

$$\Delta y = y - y^*$$
$$\Delta \dot{y} = \dot{y} - \dot{y}^*$$
$$\vdots$$
$$\Delta y^{(n)} = y^{(n)} - y^{(n)*} = y^{(n)}$$

$$\Delta u = u - u^*$$
$$\Delta \dot{u} = \dot{u} - \dot{u}^*$$
$$\vdots$$
$$\Delta u^{(m)} = u^{(m)} - u^{(m)*} = u^{(m)}$$

Обозначим положение равновесия через Ω.

Ω: $\Delta y = \Delta \dot{y} = \cdots = \Delta y^{(n)} = 0, \Delta u = \Delta \dot{u} = \cdots = \Delta u^{(m)} = 0$

Разложим (1) в ряд Тейлора в окрестности $(\cdot)\ \Omega$ и сохраним только линейные слагаемые ($\Delta y = 0\ \Rightarrow y = y^*, \Delta u = 0\ \Rightarrow u = u^*$):

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \dots u, t\right) \cong F(0, \dots, y^*, 0, \dots, u^*, t) +$$
$$+ \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\Omega} \Delta y + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_{\Omega} \Delta \dot{y} + \dots + \left.\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right|_{\Omega} \Delta y^{(n)} + \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{\Omega} \Delta u + \dots +$$
$$+ \left.\frac{\partial F}{\partial u^{(m)}}\right|_{\Omega} \Delta u^{(m)} = 0$$

Обозначим

$$a_n = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\Omega},\ a_{n-1} = \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_{\Omega}, \dots, a_0 = \left.\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right|_{\Omega},$$
$$b_m = -\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{\Omega}, \dots, b_0 = -\left.\frac{\partial F}{\partial u^{(m)}}\right|_{\Omega}.$$

Отличия модели (3) от (1):

1) Она является линейной
2) Модель (3) записана в отклонениях
3) Модель (3) является приближенной и справедлива только при малых отклонениях от состояния равновесия.

Задание. Найти линеаризованную модель следующего объекта:

$$\ddot{y} + y\dot{y} + y^2 = u + u\dot{u} \text{ при } u^* = 4$$

1) Найдем состояние равновесия (y^*)

$y = y^*, u = u^*, \dot{y} = \ddot{y} = \dot{u} = 0$

$$0 + y \cdot 0 + {y^*}^2 = u^* + u^* \cdot 0$$

${y^*}^2 = u^* = 4$

$y^* = 2, y^* = -2$

2) Найдем линеаризованную модель для состояния равновесия

$$y^* = 2, u^* = 4 \ \ (\Omega\text{: } y = y^*, u = u^*, \dot{y} = \ddot{y} = \dot{u} = 0)$$

$$a_2 = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_\Omega = (\dot{y} + 2y)|_\Omega = 0 + 2 \cdot 2 = 4, \ a_1 = \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_\Omega = y|_\Omega = 2,$$

$$a_0 = \left.\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right|_\Omega = 1,$$

$$b_1 = -\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_\Omega = -(-1 - \dot{u})|_\Omega = 1, b_0 = -\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right|_\Omega = -(-u)|_\Omega = 4$$

Линеаризованная модель: $\Delta\ddot{y} + 2\Delta\dot{y} + 4\Delta y = \Delta u + 4\Delta u$

3) Найдем линеаризованную модель для состояния равновесия

$$y^* = -2, u^* = 4 \ \ (\Omega\text{: } y = y^*, u = u^*, \dot{y} = \ddot{y} = \dot{u} = 0)$$

$$a_2 = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\Omega} = (\dot{y} + 2y)|_{\Omega} = 0 + 2 \cdot (-2) = -4, \ \ a_1 = \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_{\Omega} = y|_{\Omega} = -2,$$

Линеаризованная модель: $\Delta\ddot{y} - 2\Delta\dot{y} - 4\Delta y = \Delta u + 4\Delta u$

Решить самостоятельно:

1. $y\ddot{y} + \dot{y}\dot{u} + y^2 - y + uy - u + 2u\dot{y} = 0, u^* = 2$
2. $2\ddot{y}y + 5\dot{y}y + y + \cos u + uy + \dot{u}y = 0, \ \ u^* = 0$

При решении задач теории управления часто используется операционное исчисление. В частности, решение д.у. можно свести к проведению простейших алгебраических операций.

Введем обозначения $\frac{d}{dt} = p, \frac{d^2}{dt^2} = p^2, \ldots \frac{d^i}{dt^i} = p^i, i = 1, \ldots n.$

Л.ч. (3) можно переписать как

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) =$$
$$= (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n p) y(t) = A(p) y(t)$$

Пр.ч. (3) можно переписать как

$$b_0 u^{(m)}(t) + \cdots + b_m u(t) = (b_0 p^m + \cdots + b_m p) u(t) = B(p) u(t)$$

Тогда (3) принимает вид

$$A(p) y(t) = B(p) u(t), \tag{4}$$

где p – символ оператора дифференцирования по времени.

Если в (4) заменить p на λ, то получим

$$A(\lambda) = D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

– характеристический полином ЛДУ (3).

Решим уравнение (3) – найдем выражение для переменной $y(t)$.

Выходная переменная $y(t)$ уравнения (3) зависит как от входного сигнала $u(t)$, так и от и его предыстории $y(t)$ (до момента приложения $u(t)$), определяемой начальными условиями в момент $t_0 = 0$:

$$y(0) = y_0^{(0)}, \dot{y}(0) = y_0^{(1)}, \ddot{y}(0) = y_0^{(2)}, \dots y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \quad (5)$$

Общее решение ЛДУ (3) можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$y(t) = y_{\text{с}}(t) + y_{\text{в}}(t). \tag{6}$$

Первое слагаемое в (6) – **свободное движение** объекта. Свободное движение определяется энергией, запасенной объектом (начальные условия $y(0), \dot{y}(0), \dots y^{(n-1)}(0)$)

Свободное движение представляет собой решение ОДУ, соответствующего (3)

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = 0$$

Если все корни характеристического уравнения вещественны и различны, то

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}. \qquad (7)$$

$C_1, C_2, \dots\ C_n$ -- произвольные постоянные, определяемые начальными условиями (5):

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 + \dots + C_n = y(0) \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_n C_n = y^{(1)}(0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1^{n-1} C_1 + \lambda_2^{n-1} C_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} C_n = y^{(n-1)}(0) \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Если среди решений уравнения есть хотя бы одна пара комплексно–сопряженных корней, например, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, то этой паре будет соответствовать два частных вещественных решения однородного дифференциального уравнения (8) вида

$$y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t),\; y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

При этом $y_k(t) = e^{\lambda_i t}, k = 3, \ldots n$.

Если спектр корней характеристического уравнения вещественный, но среди корней есть корень кратности μ (например, λ_1), то этому корню соответствуют μ частных вещественных решений однородного дифференциального уравнения вида

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = te^{\lambda_1 t}, y_3(t) = \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t}, \ldots y_\mu(t) = \frac{t^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!}e^{\lambda_1 t}$$

Если среди решений уравнения есть хотя бы одна пара комплексно–сопряженных корней ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$) и эта пара характеризуется кратностью μ, то этой паре будет соответствовать 2μ линейно независимых вещественных решений ОДУ:

$$y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t), y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t), y_3(t) = te^{\alpha t}\cos(\beta t), y_4(t) = te^{\alpha t}\sin(\beta t) y_4(t) = \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t},$$

$$\ldots, y_{2\mu-1}(t) = \frac{t^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!}e^{\alpha t}\cos(\beta t), y_{2\mu}(t) = \frac{t^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!}e^{\alpha t}\sin(\beta t), \text{ при этом}$$

$$y_k(t) = e^{\lambda_k t}, k = \overline{(2\mu+1), n}.$$

Свободное движение обусловлено только ненулевыми начальными условиями и не зависит от входного сигнала объекта.

Второе слагаемое в (6) – вынужденное движение объекта.

Вынужденное движение объекта – частное решение уравнения (3), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Вынужденное движение полностью определяется входным сигналом и не зависит от начальных условий.

$$y_{\text{в}}(t) = \int_0^t w(t)u(t-\tau)d\tau \tag{9}$$

$w(t-\tau)$ - весовая функция объекта.

Весовая функция – реакция объекта в момент времени t на воздействие в виде δ-функции, приложенное в момент времени τ при нулевых начальных условиях.

Установившееся движение $y_y(t)$ объекта – это значение $y(t)$ при $t \to \infty$.

Передаточная функция объекта – отношение изображения Лапласа выходного и входного сигналов при нулевых начальных условиях:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}. \tag{10}$$

Передаточная функция описывает поведение в терминах вход-выход и не несет никакой информации о внутренних переменных и характере их изменения.

Между весовой и передаточной функцией есть взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое преобразованием Лапласа:

$$W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = \int_0^\infty w(t)e^{-st}dt \tag{11}$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} \tag{12}$$

Если все корни характеристического уравнения объекта являются различными, то весовая функция определяется по передаточной следующим образом:

$$w(t-\tau)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}\frac{B(\lambda_k)}{A'(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-\tau)}, t\geq\tau,\\ 0, t>\tau.\end{cases}$$

Пример. Найти полное движение объекта

$$\ddot{y} + 9y = u(t), \qquad u(t) = 2\cos 3t$$

Начальные условия $y(0) = 2,\ \dot{y}(0) = 1.$

Определить весовую и передаточную функцию объекта.

1) Находим свободную составляющую движения.

Для этого сначала ищем общее решение однородного уравнения

$$\ddot{y} + 9y = 0$$

Записываем характеристический полином

$$s^2 + 9 = 0$$

Его корни $\lambda_1 = 3j, \lambda_2 = -3j$.

Этой паре комплексно-сопряженных корней соответствует общее решение

$$y_c(t) = C_1 e^{0x}\cos 3x + C_2 e^{0x}\sin 3x = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$$

Найдем частное решение однородного уравнения. Для этого составим систему уравнений (8) относительно постоянных интегрирования C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 2 \\ -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0 = 1 \end{cases}$$

Отсюда получаем $C_1 = 2, C_2 = \frac{1}{3}$.

Таким образом, свободное движение объекта, обусловленное ненулевыми начальными условиями, принимает вид

$$y_c(t) = 2\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x$$

2) Теперь найдем вынужденную составляющую движения

$\ddot{y} + 9y = 2\cos 3t$ $\qquad$ $2\cos 3t = 2e^{0t}\cos 3t, \alpha = 0, \beta = 3$

Замечаем, что это ДУ со правой частью специального вида, причем

$\alpha = 0, \beta = 3$ совпадают с $\alpha = 0, \beta = 3$ в λ_1 и λ_2.

Поэтому решение ищем в виде $y_\text{в}(t) = t(B\cos 3t + C\sin 3t)e^{0t}$

Вычисляем производные:

$$y'_\text{в}(t) = B\cos 3t + C\sin 3t + t(-3B\sin 3t + 3C\cos 3t)$$

$$y''_\text{в}(t) == -3B\sin 3t + 3C\cos 3t + (-3B\sin 3t + C\cos 3t) + t(-9B\cos 3t - 9C\sin 3t)$$

Подставляем в исходное ДУ и получаем

$$-3B\sin 3t + 3C\cos 3t + (-3B\sin 3t + 3C\cos 3t) + t(-9B\cos 3t - 9C\sin 3t) + 9t(B\cos 3t + C\sin 3t) = \\ = 2\cos 3t$$

$$-6B\sin 3t + 6C\cos 3 = 2\cos 3t$$

Откуда $B = 0, C = \frac{1}{3}$

Тогда $y_\text{в}(t) = \frac{1}{3}t\sin 3t$

Полное движение ОУ

$$y(t) = y_c(t) + y_\text{в}(t) = 2\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{3}t\sin 3t = 2\cos 3\text{t} + \frac{1}{3}(t+1)\sin 3t$$

Передаточная функция $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2+9}$

Весовая функция $w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} = \frac{1}{3}\sin 3t$

Задание: определить полное движение объекта, описываемого уравнением

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = u(t), \qquad u(t) = 1, \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = u(t), \qquad u(t) = 1, \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

$$y(0) = 1$$