Модели вход-состояние-выход объектов управления

Вопросы:

Какие недостатки у моделей «Вход-Выход»? Почему возник запрос на модели «Вход-Состояние-Выход?

Класс моделей «Вход-Выход» исторически появился из теории электрических цепей. До определенного момента полностью удовлетворял нужды разработчиков динамических систем.

Запишем модель «Вход-Выход» в явной форме:

$$y(\nu) = \delta\big(u(\nu)\big),$$

где $u(\nu)$ – входное воздействие, ν – непрерывное время t в случае непрерывных объектов или систем и дискретное время k в случае дискретных.

По мере усложнения задач управления в описании моделей объектов (систем) в форме «Вход-Выход» обнаружился изъян – неоднозначность соответствия значения выхода одному и тому же значению входа.

Эта проблема была разрешена с помощью параметризации соотношения $y(\nu) = \delta\big(u(\nu)\big)$:

$$y(\nu) = \delta\big(x(\nu), u(\nu)\big),$$

где вектор параметров $x(\nu)$ называет вектором состояния (или просто состоянием) динамического объекта.

Определение 1. Минимальный набор параметров, полностью снимающий неопределенность отношения вход-выход динамического объекта $y(\nu) = \delta\big(u(\nu)\big)$, называется *вектором состояния* (или просто состоянием).

Если известно состояние динамического объекта $x(\nu_s)$ в некоторый момент $\nu = \nu_s$, то движение объекта при $\nu \geq \nu_s$ будет однозначно определяться только состоянием $x(\nu_s)$ и сигналом управления $u(\nu)$ при $\nu \geq \nu_s$.

Определение 2. динамическим объектом (объектом управления) называется восьмикомпонентный макровектор

$$\Sigma = \{U, X, Y, \Omega, \Gamma, \mathrm{T}, \lambda, \delta\}, \qquad (1)$$

где U – множество мгновенных значений $r -$ мерных входных (управляющих) воздействий $U \in R^r$;

X – множество n –мерных состояний $X \in R^n$;

Y – множество мгновенных значений m –мерных выходов;

T – множество моментов времени, образующих интервал управления и наблюдения;

Ω – множество допустимых входных воздействий;

Γ – множество выходных величин;

λ – функция перехода объекта из некоторого предыдущего состояния x в момент $\tau \in T$ в последующее состояние x в момент t при помощи входного воздействия U;

δ – функция выхода объекта, которая определяет правило получения мгновенного значения выхода Y в момент $t \in T$ при переходе объекта из некоторого предыдущего состояния x в момент $\tau \in T$ под воздействием входного воздействия U.

Будем пользоваться редуцированным определением динамического объекта, опуская описание множеств Ω и Γ, т.е. определять динамический объект как шестикомпонентный макровектор

$$\Sigma = \{U, X, Y, \mathrm{T}, \lambda, \delta\}. \qquad (2)$$

Вывод. Состояние ОУ – совокупность таких переменных, знание которых, наряду с входными воздействиями и уравнениями, описывающими динамику системы, позволяет определить ее будущее состояние и выходную переменную. Переменные состояния описывают поведение системы в будущем, если известны текущее состояние, внешние воздействия и уравнения динамики системы.

Модели ВСВ непрерывных объектов управления. Свободное и вынужденное движение объекта. Фундаментальная и переходная матрицы. Построение моделей ВСВ непрерывных динамических объектов по передаточным функциям

Функции перехода λ и δ в непрерывных динамических объектах задаются в следующей форме:

$$\lambda\colon\ \dot{x}(t) = \lambda\{x(t), u(t)\} \tag{3}$$

$$\delta\colon y(t) = \delta\{x(t), u(t)\}, \tag{4}$$

где $x \in R^n, y \in R^m, u \in R^r, \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$.

Если правила λ и δ в описании непрерывных объектов представимы в виде композиции линейных операций сложения и умножения матриц на вектор, то такие объекты являются *линейными*.

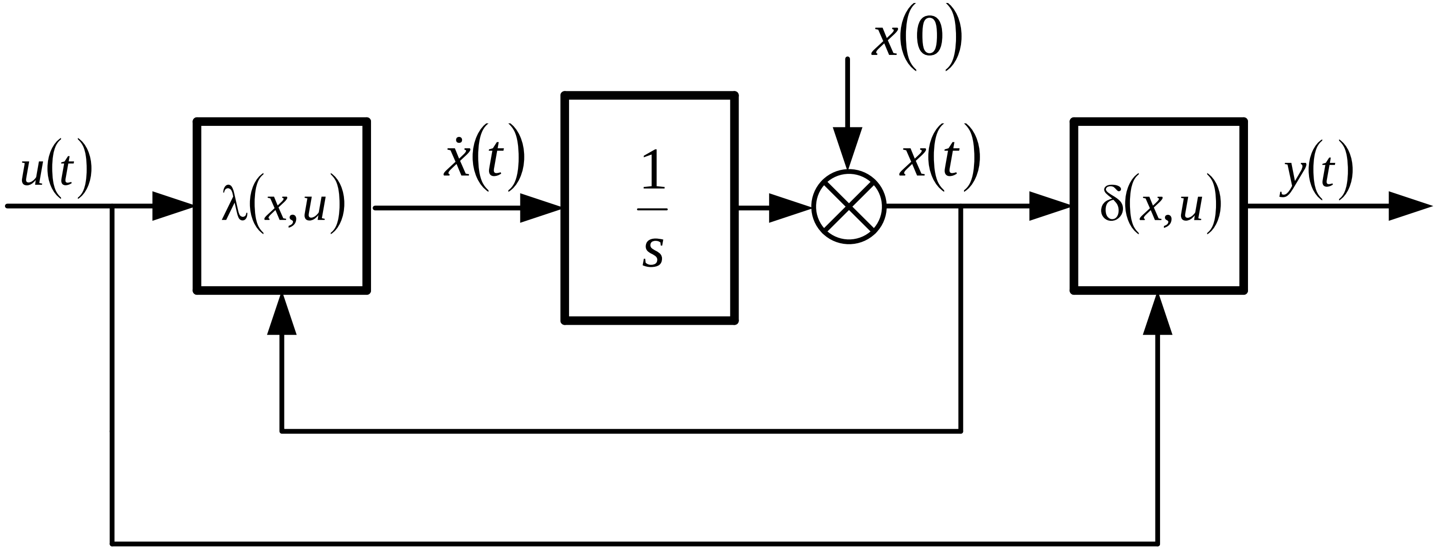
Тогда для линейных непрерывных динамических объектов описание функций λ и δ принимает вид:

$$\lambda\colon\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{5}$$

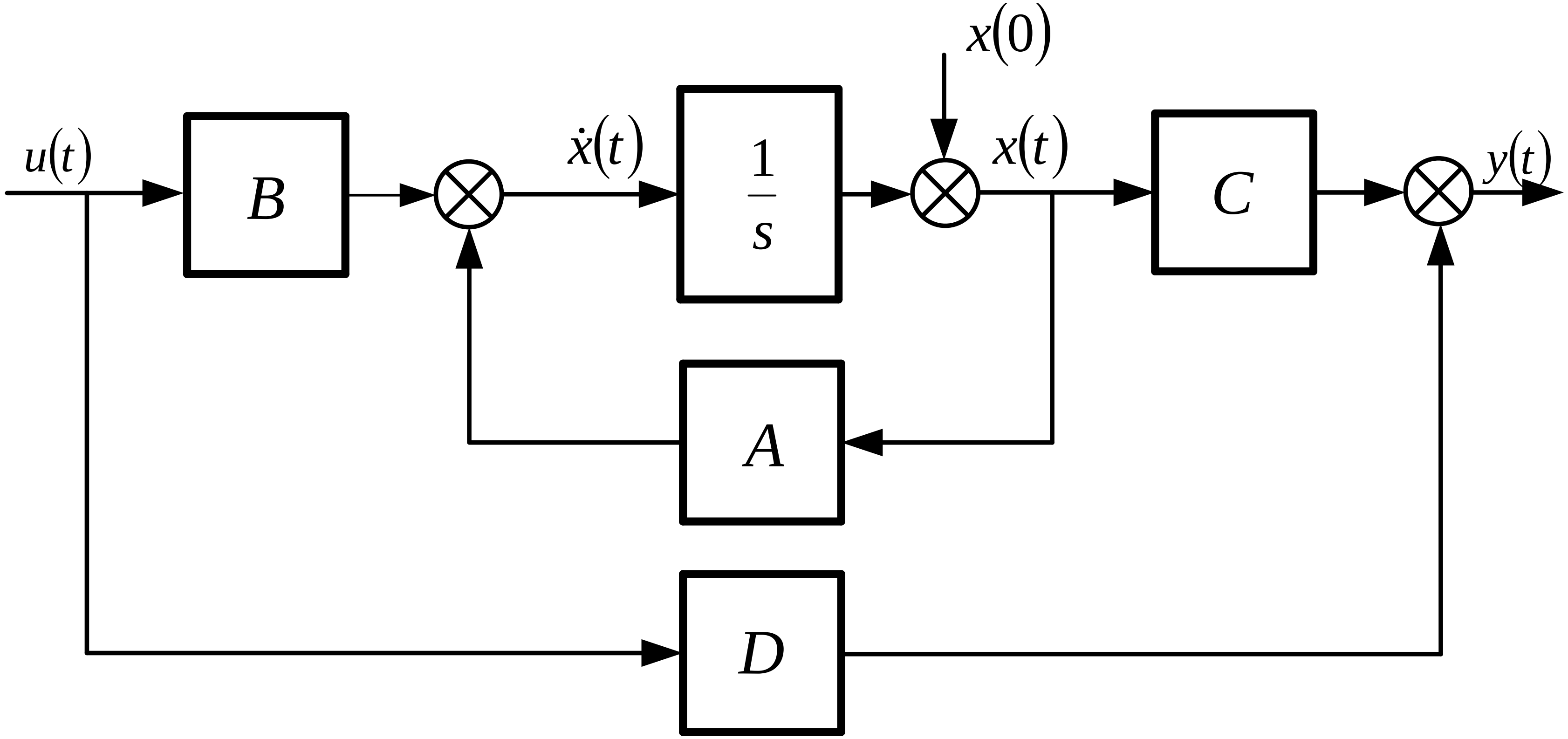
$$\delta\colon y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{6}$$

где $A-(n \times n)$ матрица состояния объекта, $B-(n \times r)$ матрица управления (входа), $C-(m \times n)$ матрица выхода объекта, $D-(m \times r)$ матрица вход-выход объекта. В дальнейшем будем полагать, что $D = 0$.

Построим структурную схемы модели «Вход-Состояние-Выход» с использованием интеграторов, решающих задачу преобразования $\dot{x}(t) \rightarrow x(t)$, нелинейных блоков $\lambda[x, u]$ и $\delta[x, u]$ или для линейного случая линейных блоков в виде матричных усилителей с матричными коэффициентами передачи A, B, C, D и сумматоров.



x(0)
u(t)
λ(x,u)
ẋ(t)
1/s
x(t)
δ(x,u)
y(t)



x(0)
u(t)
B
ẋ(t)
1/s
x(t)
C
y(t)
A
D

ОУ описывается ДУ 1-го порядка относительно каждой из переменных состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2r}u_r \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nr}u_r \\ y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n \end{cases} \quad (7)$$

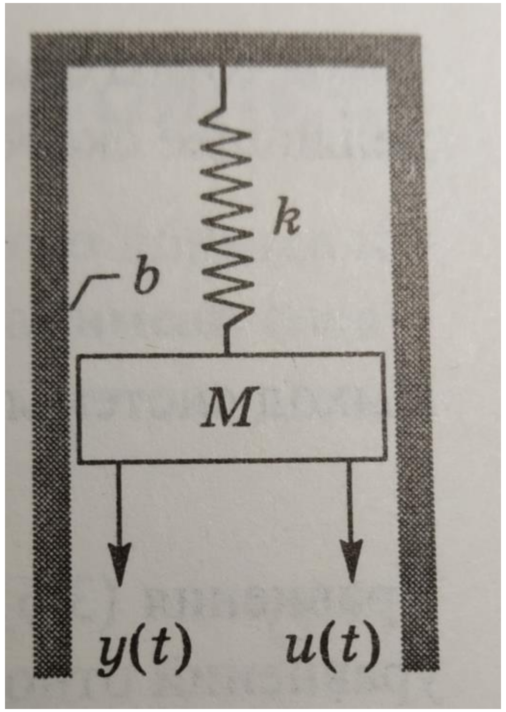
В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}u_1 & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Пример. Механическая система «масса-пружина» с затуханием

Рассмотрим систему «масса-пружина» с затуханием. Обозначим : M – масса, k – коэффициент жесткости пружины, b -- коэффициент трения о стенки, $y(t)$ -- положение массы,



Выберем в качестве переменных состояния
$x_1(t) = y(t)$ – положение массы
$x_2(t) = \dot{y}(t)$ – скорость движения массы

Число переменных состояния, выбираемых для описания системы, должно быть по возможности минимальным, чтобы среди них не было излишних.

Дифференциальное уравнение, описывающее поведение системы

$$M\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t) \tag{П1}$$

С учетом переменных состояния это уравнение принимает вид

$$M\dot{x}_2\,(t) + bx_2(t) + kx_1(t) = u(t) \tag{П2}$$

От уравнений (П1) и (П2) можно перейти к системе из двух дифференциальных уравнений и уравнения выхода:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{b}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \tag{П3}$$

Эти уравнения описывают поведение системы в терминах скорости изменения каждой переменной состояния.

Воспользуемся уравнениями (5), (6) и запишем уравнения состояния и выхода в матричной форме для механической системы:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Передаточная матрица (функция)

Применим преобразование Лапласа к уравнениям (5), (6):

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s); Y(s) = CX(s) + DU(s),$$

где $x(0) = x(t)|_{t=0}, U(s), X(s), Y(s)$ – лапласовы образы переменных $u(t), x(t), y(t)$.

Разрешим полученные выражения относительно $U(s)$ и $Y(s)$:

$$Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}B + D\}U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0). \tag{7}$$

В случае, когда начальное состояние ОУ (5), (6) нулевое, то (7) принимает вид

$$Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}B + D\}U(s) = \Phi(s)U(s),$$

где передаточная $(m \times n)$ –матрица $\Phi(s)$ принимает вид

$$\Phi(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Свободная и вынужденная составляющие движения ОУ в форме «Вход-Состояние-Выход»

Рассмотрим линейный непрерывный динамический объект (ЛНДО), описываемый уравнениями (5),(6), задающими модель ВСВ в *дифференциальной форме* с нулевой матрицей D:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0), \quad y(t) = Cx(t) \qquad (8)$$

Поставим задачу – отыскать интегральную форму модели ВСВ ЛНДО

$$x(t) = x\{x(0), u(t), t\}; y(t) = Cx(t).$$

Если воспользоваться принципом суперпозиции, который справедлив для линейных объектов, то можно записать

$$x(t) = x_c(t) + x_{\text{в}}(t)$$

где $x_c(t)$ – свободная составляющая движения, порожденная $x(0) \neq 0$, $x_{\text{в}}(t)$ – вынужденная составляющая движения, порожденная $u(t) \neq 0$.

Для вычисления $x_c(t)$ положим в исходной модели $u(t) \equiv 0$ и получим однородное дифференциальное уравнение состояния $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0)$. Будем искать $x(t)$ в форме $x(t) = \Phi(t)x(0)$, где $\Phi(t) - (n \times n)$ матрица, удовлетворяющая начальному условию $\Phi(0) = I$.

Подставим $x(t)$ в исходное однородное дифференциальное уравнение и получим матричное дифференциальное уравнение для отыскания матрицы $\Phi(t)$:

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t)x(0)$$

$$\dot{\Phi}(t)x(0) = Ax(t) = A\Phi(t)x(0)$$

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \Phi(0) = I$$

Решение для $\Phi(t)$ будем искать в виде $\Phi(t) = e^{At}x(0) = e^{At}$.

Прямая подстановка $\Phi(t) = e^{At}x(0) = e^{At}$ в матричное дифференциальное уравнение $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$ приводит к тождеству

$\mathrm{A}e^{At} = A\, e^{At}$.

Таким образом,

$$x_{\text{с}}(t) = \Phi(t)x(0) = e^{At}x(0) \tag{9}$$

$$y_{\text{с}}(t) = C\Phi(t)x(0) = Ce^{At}x(0) \tag{10}$$

Для вычисления вынужденной составляющей движения в исходном дифференциальном уравнении (8) положим $x(0) \equiv 0$. Вынужденную составляющую будем искать в виде $x(t) = \Phi(t)z(t)$, где $z(t)$ – неизвестная *вектор–функция* со значениями из R^n. Подставим $x(t)$ в (8) и получим

$$\dot{\Phi}(t)z(t) + \Phi(t)\dot{z}(t) = A\Phi(t)z(t) + Bu(t)$$

Учтем, что $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$, то

$$\dot{z}(t) = \Phi^{-1}(t)Bu(t)$$

И в интегральной форме

$$z(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Теперь для вынужденной составляющей движения можно записать

$$x_{\text{в}}(t) = \Phi(t)z(t) = \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau = \int_0^t \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad (11)$$

Где $\Phi(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$.

Вынужденная составляющая вектора выхода ОУ

$$y_{\text{в}}(t) = Cx_{\text{в}}(t) = \int_0^t C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (12)$$

Общий вид интегральной модели «вход–состояние–выход» линейного непрерывного динамического объекта принимает вид

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \\ y(t) &= C\Phi(t)x(0) + \int_0^t C\Phi(t,\tau)Bu(\tau)d = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned}\right\}, \quad (13)$$

где $\Phi(t) = e^{At}, \Phi(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) = e^{A(t-\tau)}$.

В интегральной записи (13) модели ВСВ ЛНДО используются три основные динамические матрицы линейного непрерывного объекта:

1) $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица объекта

2) $\Phi(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ – переходная матрица объекта

3) $w(t) = C\Phi(t,0) = C\ \Phi(t)B$ – весовая матрица объекта

Основные свойства переходной матрицы линейного динамического ОУ:

1) $\Phi(\tau,\tau) = \Phi(t,t) = \Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t) = I$

2) $\Phi(t,\tau) = \Phi(t,t_1)\Phi(t_1,\tau),\ \forall t, t_1, \tau;$

3) $\det \Phi(t,\tau) \neq 0,\ \forall t, \tau;$

4) $\Phi(t,\tau):\ \dot{\Phi}(t,\tau) = A\Phi(t,\tau), \quad \Phi(\tau,\tau) = I$

5) $\Phi^{-1}(t,\tau) = \Phi(\tau,t),\ \forall t, \tau;$