

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

НА ПРАВАХ РУКОПИСИ

ШИРОКОВ ДЕНИС ДМИТРИЕВИЧ

«ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ЛОКАЛЬНО-АДАПТИВНЫХ СЕТОК»

Выпускная квалификационная работа бакалавра  
Направление подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика

Выпускная квалификационная  
работа защищена

«\_\_\_»\_\_\_\_\_2021 г.

Оценка \_\_\_\_\_

Секретарь ГЭК \_\_\_\_\_ Корнеев Ф.А.  
к.ф.-м.н., доцент

Москва

23 мая 2022 г.

**Пояснительная записка**  
**к бакалаврской дипломной работе:**  
**«Численное решение уравнения**  
**теплопроводности с использованием**  
**локально-адаптивных сеток»**

Студент \_\_\_\_\_ Широков Д.Д.

Научный руководитель  
к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Кучугов П.А.

Рецензент  
к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Корнеев Ф.А.

Зам. зав. кафедрой  
к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Муравьев С.Е.

# Аннотация

Здесь будет аннотация

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Основные понятия теории разностных схем</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Разностные схемы на статических сетках</b>	<b>9</b>
3.1	Избранные разностные схемы для уравнения теплопроводности	10
3.1.1	Явная схема . . . . .	10
3.1.2	Однопараметрическое семейство неявных схем . . . . .	12
3.1.3	Локально-одномерные схемы . . . . .	15
3.2	Программный код, примеры расчётов . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Теория блочных локально-адаптивных сеток</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Замечания о программной реализации</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Основные результаты</b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>Приложения к физике, реальные задачи</b>	<b>16</b>
<b>8</b>	<b>Заключение</b>	<b>16</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>18</b>

# 1 Введение

Большинство моделей классической физики, таких как гидрогазодинамика, описываются начально-краевыми задачами для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка[1; 2]. Нахождение аналитического решения таких задач представляется возможным только в случае простых, канонических областей (таких как круг, шар, прямоугольник), простых начальных и граничных условиях, а также в случае линейных уравнений, описывающих простые физические процессы.

На практике же часто возникают нелинейные задачи, поставленные в областях сложной формы. Например, задача лазерного термоядерного синтеза (ЛТС), идея которой заключается в быстром нагреве и сжатии термоядерного топлива до температур и плотностей, необходимых для осуществления быстрого и эффективного протекания термоядерных реакций инерциально удерживаемой плазмы. Процессы распространения тепла в такой системе будут описываться нелинейным уравнением теплопроводности. Нелинейное уравнение теплопроводности также возникает в, например, задачах о самофокусировки световых пучков в нелинейных средах, эффекте  $T$ -слоя в низкотемпературной плазме, проблемы безударного сжатия; вообще с необходимостью в любой задаче, в которой присутствуют процессы самопроизвольного нарушения симметрии с понижением её степени [3]

Любой численный метод приближённого решения таких задач использует дискретизацию (то есть переход от бесконечномерного функционального пространства к конечномерному пространству). Один из основных методов — *метод конечных разностей*. Его основа заключается в том, что исходная непрерывная задача в области  $G \subset \mathbb{R}^n$  сводится к *семейству разностных задач* — системам конечного числа линейных (в общем случае — нелинейных) уравнений на т.н. *разностные функции* — функции, заданные на конечном числе точек (именуемых *сетками*), и принимающие значения (приближённые значения решения) на конечном числе точек. Такие задачи решаются алгоритмически и тем самым могут быть программно реализованы на современных ЭВМ. Более подробно метод описан в разделе 2.

Принципиальная возможность применения тех или иных алгоритмов основывается на вопросе об их сходимости, точности и устойчивости. Так, в работе [4] даётся обширное описание алгоритмов решения задач на *стати-*

ческих сетках, исследуются вопросы устойчивости и скорости сходимости. Более подробное исследование тех же вопросов в случае *неравномерных статических сеток* дан в работе [5].

Как уже отмечалось, в прикладных задачах приходится сталкиваться с квазилинейными уравнениями теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[ k_{\alpha}(u) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right]$$

Проблема использования *статических* сеток, то есть сеток, не меняющихся на протяжении всего алгоритмического процесса поиска решения, связана со следующим обстоятельством. В статьях [6; 7] показано, что одномерное уравнение теплопроводности в случае зависящего от температуры коэффициента теплопроводности имеет решения, производные которых разрывны в точках обращения в нуль решения  $u(x, t)$ , при этом поток тепла  $k(u) \frac{\partial u}{\partial x}$  — непрерывен, то есть существует фронт температуры, который, как показано в [8], распространяется с конечной скоростью. Эти „проблемные точки решения“ оказываются сильно локализованными: если для численного решения использовать достаточно грубые сетки, то основные ошибки в приближённом решении будут локализованы именно в окрестностях этих точек. Конечно, можно использовать более мелкий шаг сетки и улучшить точность решения, ибо, как предсказывает теория [4], приближённое решение должно сходиться к точному при стремлении шага сетки к нулю.

Однако даже на мощных вычислительных системах расчёт сложных трёхмерных задач со сложной пространственной геометрией требует огромного числа точек сетки, что значительно увеличивает используемую память и расчётное время [9]. Более того, точность решения в области особенностей *существенно* влияет на точность решения во всей остальной области. Поэтому хотя бы для получения приемлемой кратины решения в целом на всей области без точного учёта особенностей неизбежно приходится сильно измельчать сетку. Учитывая, что в подобластях гладкого поведения решения просто нет необходимости измельчать сетку настолько сильно, заключаем, что использование классических алгоритмов приводит к тому, что большая часть компьютерных вычислений производится напрасно.

Поэтому для данного класса гидродинамических проблем с локализован-

ными особенностями разрабатывались специальные методы *локально-адаптивных сеток* (*Adaptive mesh refinement*), учитывающие разномасштабное поведение решения. Например, в работе [10] предлагалось использовать адаптивную сетку, построение которой производится с помощью соответствующего преобразования координат. Конкретный вид преобразования задаётся с помощью некоторой функции  $Q$ , вид которой определяется особенностями решения исследуемой задачи. Т.к. вид функции  $Q$  выбирался вручную в зависимости от конкретной задачи, этот метод не обладал достаточной автономностью. Многие методы были основаны на геометрической адаптации расчётных сеток, что, в свою очередь, приводит к трудностям реализации на ЭВМ, поскольку неструктурированные сетки порождают нерегулярный доступ к памяти. С учётом современного развития массивно-параллельных архитектур процессоров с большим числом ядер, эффективность работы которых зависит в первую очередь от упорядоченности обращений в память, производительность методов с неструктурированными сетками оказывается неудовлетворительной.

*Метод структурированных адаптивных сеток* (*Block-structured adaptive mesh refinement*) был представлен в работах [11; 12] применительно к уравнениям гиперболического типа. Преимущества метода в:

- использовании простых прямоугольных областей определённого размещения, удобных для реализации на компьютере
- возможности использования архитектуры параллельных вычислений
- использовании точно таких же разностных схем, как и для статических декартовых сеток (с некоторыми алгоритмическими модификациями)

**Целью данной работы** является изучение метода структурированных декартовых локально-адаптивных сеток применительно к задачам для уравнения теплопроводности, программная реализация данного метода, сравнение со статическими аналогами.

В разделе 2 вводятся основные математические формулировки разностных задач. В разделе 3 описываются алгоритмы решения задач на статических сетках (которые в последствии непосредственно используются при решении методом адаптивных сеток), приводятся примеры решения модельных

задач. В разделе 4 приводится описание метода, программной реализации и результатов решения модельных задач.

## 2 Основные понятия теории разностных схем

Математическая формулировка физических задач, описанных во введении имеет вид:

$$\begin{cases} L[u](x) = f(x), & x = (x_1, \dots, x_n)^T \in G \subset \mathbb{R}^n, \\ \Gamma[u](x) = \mu(x), & x \in \partial G \end{cases}, \quad (1)$$

где

- $L$  — дифференциальный оператор уравнения;
- $\Gamma$  — оператор начально-краевых условий (в общем случае также дифференциальный);
- $f, \mu$  — заданные функции.

Решения исходной задачи — функции  $u(x)$  непрерывного аргумента  $x \in G$ , являются элементами некоторого функционального пространства  $H_0$  с нормой  $\|\cdot\|$ . В методе конечных разностей область  $G$  заменяется на некоторое дискретное множество точек  $\omega_h$ , именуемое *сеткой*, а функциональное пространство  $H_0$  заменяется на  $H_h$  — гильбертово пространство сеточных функций  $y_h : G \supset \omega_h \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $h$  — некоторый параметр, характеризующий сетку  $\omega_h$  в области  $G$ . Например, равномерная статическая сетка:

$$\omega_h = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in G \mid x_i = h_i \cdot k, k = 0, 1, \dots, N_i \ i = 1, \dots, n\}$$

Получив приближённое решение задачи  $y_h$ , необходимо оценивать степень „близости“ к решению исходной задачи  $u(x)$ .  $y_h$  и  $u$  являются элементами разных функциональных пространств, поэтому для оценивания близости в работе используется проекционный метод: пространство  $H_0$  отображается (проектируется) на пространство  $H_h$  оператором  $\mathcal{P}$ :

$$\mathcal{P}_h : H_0 \ni u \mapsto u_h \in H_h.$$



Простейший выбор: ограничение  $u$  на сетку  $\omega_h$ :

$$u_h(x) := u(x), \quad x \in \omega_h \subset G$$

Иногда пользуются „более равномерным“ способом ограничения с усреднением по окрестности узла:

$$u_h(x) := \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} u(x') dx'$$

Тогда близость приближённого решения  $y_h$  и исходного решения  $u$  оценивается по норме  $\|\cdot\|_h$  пространства  $H_h$ :

$$e = \|y_h - u_h\|_h,$$

при этом требуется, чтобы она аппроксимировала норму  $\|\cdot\|_0$  в слудеющем смысле[4]:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0$$

В работе используется норма  $\|y\|_h = \sqrt{\sum_{i=1}^N h y_i^2}$ . Исходному дифференциальному оператору  $L$  ставится в соответствие *разностный оператор*  $L_h$ :

$$L_h[v](x) = \sum_{x' \in T(x)} A_h(x, x') v(x'),$$

где  $T(x)$  — некоторое множество узлов сетки, называемое *шаблоном*. Например, двумерный оператор Лапласа  $L = \Delta$  на двумерной равномерной сетке можно аппроксимировать, используя шаблон „крест“ (см. рис. 1):

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \mapsto \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_1^2} + \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{h_2^2},$$

где  $u_i^j = u(x_{1i}, x_{2j})$ ,  $(x_{1i}, x_{2j}) \in \omega_h$ . Погрешность аппроксимации оператора  $L$  разностным оператором  $L_h$  определяется как сеточная функция  $\psi_h = L_h[u_h] - (L[u])_h$ ,  $u \in H_0$ . Если  $\|\psi_h\| = O(|h|^m)$ , то говорят, что оператор  $L_h$  аппроксимирует оператор  $L$  с порядком  $m$ . Если  $\psi(x) = O(h^m)$ ,  $m$ , то говорят, что оператор  $L_h$  аппроксимирует оператор  $L$  в точке  $x$  с порядком  $m$ .

Теперь сформулируем непосредственно то, что называется *разностной*

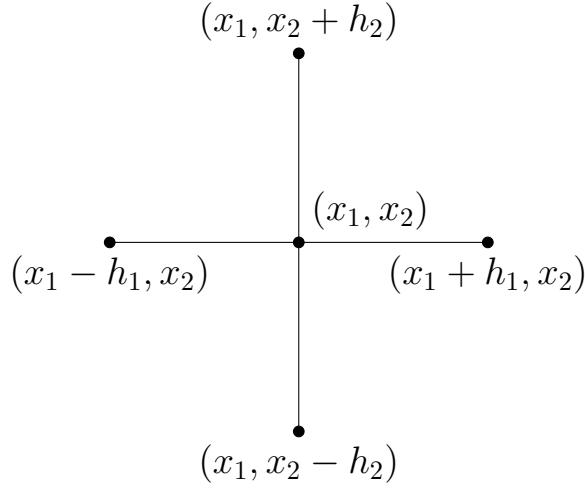


Рис. 1: Шаблон „Крест“

схемой, алгоритмы решения которой и реализуются на компьютере. Исходной задаче (1) ставится в соответствие семейство разностных задач, зависящих от параметра  $h$ , называемое разностной схемой:

$$\left\{ \left\{ \begin{array}{ll} L_h[y_h] = \varphi_h, & x \in \omega_h \\ l_h[y_h] = \chi_h, & x \in \gamma_h \end{array} \right\} \right\}_h, \quad \varphi_h = \mathcal{P}_h[f], \chi_h = \mathcal{P}_h[\mu]$$

Под погрешностью разностной схемы понимается  $z_h = y_h - u_h$ , где  $u_h = \mathcal{P}_h u$  — проекция решения исходной задачи на  $H_0$ . Решения разностной задачи сходятся к решению исходной задачи, если

$$\|z_h\|_h \rightarrow 0 \text{ при } |h| \rightarrow 0$$

Введём также понятие устойчивости схемы. Разностная схема называется устойчивой (корректной, сходящейся), если  $\exists h_0 > 0 : \forall h (|h| \leq h_0) \Rightarrow$

1.  $\forall \varphi \in H_h \quad \exists! y_h$  — решение;
2.  $\exists M > 0 : \forall \varphi_h, \tilde{\varphi}_h \|y_h - \tilde{y}_h\| \leq M \|\varphi_h - \tilde{\varphi}_h\|$

На этом только лишь математическая сторона вопроса формулирования проблемы завершена. Дальнейшие шаги по исследованию разностной схемы опираются на конкретный выбор множества сеток  $\{\omega_h\}$  и аппроксимирующего оператора  $L_h$ , выбор которого, в свою очередь, существенно зависит от некоторых вопросов реализации получаемого алгоритма на компьютере.

### 3 Разностные схемы на статических сетках

Основное преимущество статических равномерных сеток —

- относительно простая реализация в виде программного кода<sup>1</sup>;
- удобное и простое представление данных в программе. Так, например, рассматривая задачу для двумерного нестационарного уравнения теплопроводности, результаты вычислений программы могут храниться в трёхмерном массиве (в отличие от алгоритмов на нестатических и неравномерных сетках, где используются более сложные структуры, см. подробнее в разд. 4);
- существенное упрощение формул и доказательств сходимости, устойчивости получающихся разностных схем.

Всюду далее под равномерной статической сеткой будем понимать:

$$\omega_{h\tau} := \{(x_{ik} = k \cdot h_i, t_j = j \cdot \tau) \mid i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, N_i\}$$

Как указывалось выше, свойства разностной схемы зависят и от выбора аппроксимирующего оператора  $L_h$ . В [4] исследуется множество различных схем. Далее приводятся избранные схемы, каждая из которых обладает отличительной особенностью, для задачи Дирихле для линейного:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f, & (x, t) \in G \times (0, T) \\ u(x, t) = \mu_{-i}(x, t), \quad x_i = 0 \\ u(x, t) = \mu_i(x, t), \quad x_i = L_i \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G} \end{cases}, \quad t \in [0, T)$$

где  $\bar{G} = \prod_{i=1}^n [0, L_i]$ .

---

<sup>1</sup>Так, например, реализация явной схемы может занимать не более 10 строк кода (подробнее см. раздел 3.2)

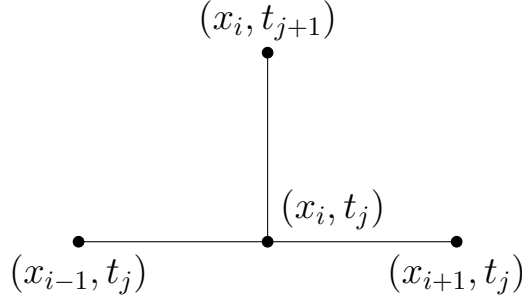


Рис. 2: Пятиточечный шаблон явной схемы

и квазилинейного уравнений теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ k_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right] + f, & (x, t) \in G \times (0, T) \\ u(x, t) = \mu_{-i}(x, t), & x_i = 0 \\ u(x, t) = \mu_i(x, t), & x_i = L_i \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G} \end{cases}, \quad t \in [0, T)$$

где  $\bar{G} = \prod_{i=1}^n [0, L_i]$ .

### 3.1 Избранные разностные схемы для уравнения теплопроводности

#### 3.1.1 Явная схема

Шаблон явной схемы нагляден в одномерном случае (см. рис. 2). Множество  $\{(x, t) \in \omega_h \mid t = t_j\}$  будем называть  $j$ -ым временным слоем. Оператор  $\frac{\partial u}{\partial t}$  аппроксимируется, используя значения функции на  $(j+1)$ -ом временном слое и  $j$ -ом временном слое, а оператор Лапласа аппроксимируется, используя значения только на  $j$ -ом временном слое:

$$L = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \mapsto L_{h\tau} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j, \quad \varphi_i^j = f(x_i, t_j)$$

В многомерном случае:

$$L \mapsto \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + \sum_{k=1}^n \frac{u_{i+}^j - 2u_i^j + u_{i-}^j}{h_k^2} + \varphi_i^j, \text{ где}$$

$$i_{\pm} = (i_1, \dots, i_{k-1}, i_k \pm 1, i_{k+1}, \dots, i_n)$$

Такой „запаздывающий“ выбор шаблона позволяет явно выразить значения функции на  $(j + 1)$ -ом временном слое через значения на  $j$ -ом временном слое:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \tau \sum_{k=1}^n \frac{u_{i+}^j - 2u_i^j + u_{i-}^j}{h_k^2} + \varphi_i^j \quad (2)$$

(отсюда и название схемы). Значения функции на 1-ом временном слое следуют из начальных условий:  $u_i^1 = u_0(x_i)$ , а граничные условия дают замкнутую систему уравнений:

$$\begin{cases} u_i^j = u_i^j + \tau \sum_{k=1}^n \frac{u_{i+}^j - 2u_i^j + u_{i-}^j}{h_k^2} + \varphi_i^j, & i_k = 2, \dots, N_k - 1 \\ u_i^1 = u_0(x_i), & i_k = 1, \dots, N_k \\ u_{i_k}^j = \mu_{-\alpha}(x_i, t_j), & i_{k \neq \alpha} = 1, \dots, N_k; \quad i_{\alpha} = 0 \\ u_{i_k}^j = \mu_{+\alpha}(x_i, t_j), & i_{k \neq \alpha} = 1, \dots, N_k; \quad i_{\alpha} = N_{\alpha} \end{cases}$$

Одно из преимуществ такой схемы — простота программной реализации. Так, задав начальные условия на 1-ом временном слое и граничные значения на всех последующих  $j > 1$ , явно считаются значения на всех последующих слоях. В приложении (бла-бла-бла) представлен код и описание программы, реализующей явную разностную схему для одномерного уравнения теплопроводности. Другое преимущество схемы — скорость счёта. Число арифметических операций, необходимых для расчёта значений функции на одном временном слое порядка  $O(N_x)$ , где  $N_x$  — число точек по оси  $x$  (в многомерном случае —  $O(\prod N_{\alpha})$ ). Ещё одно преимущество схемы — возможность параллельного счёта. Из формулы (2) видно, что расчёт значений  $u_i^{j+1}$  не зависит от  $i$ : зависимость от  $i$  присутствует в правой части, но эти значения в  $j$ -ый момент времени уже предполагаются известными, поэтому значения на новом временном слое  $u_i^{j+1}$  и  $u_k^{j+1}$  для разных  $i$  и  $k$  могут считаться независимо друг от друга.

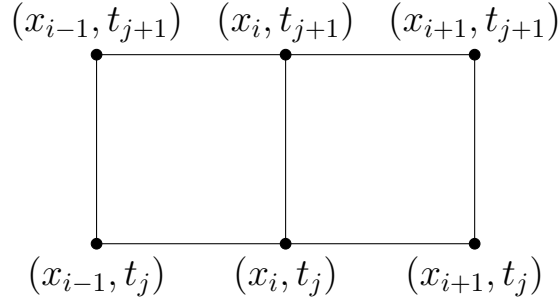


Рис. 3: Шеститочечный шаблон явной схемы

Схема обладает лишь первым порядком сходимости:  $O(h + \tau)$ , что заставляет использовать достаточно мелкую сетку. Более того, схема имеет существенный недостаток — она устойчива и сходится к решению лишь при условии  $\tau \leq \frac{h^2}{2n}$ .

Как показано в [4], в случае квазилинейных уравнений условие устойчивости приобретает вид:

$$\tau \leq \frac{h^2}{2 \cdot \max k(u)}$$

Откуда видно, что если  $k(u)$  является быстроменяющейся функцией (например  $k \sim u^\sigma$ ), то использование явных схем нецелесообразно, поскольку требуется очень мелкий шаг  $\tau$  по времени. Поэтому для квазилинейных уравнений теплопроводности применяются преимущественно неявные схемы.

### 3.1.2 Однопараметрическое семейство неявных схем

Идея неявных схем заключается в использовании шаблона, затрагивающего как значения функции на  $j$ -ом временном слое (который предполагается уже известным), так и на последующих слоях (значения функции на которых ещё не известны). Так, однопараметрическое семейство неявных схем, зависящих от параметра  $\sigma \in (0, 1]$  получается при аппроксимации дифференциального оператора на шеститочечном шаблоне (см. рис. 3), причём значения на „верхнем“ и „нижнем“ временных слоях берутся с весами  $\sigma$  и  $1 - \sigma$  соответственно. Так, аппроксимация дифференциального оператора для одномерного уравнения с постоянными коэффициентами выглядит следующим

образом:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \mapsto L_{h\tau} = \\
&= \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \sigma \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} - (1 - \sigma) \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j, \\
&\qquad\qquad\qquad \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+1})
\end{aligned}$$

В многомерном случае можно задавать целый вектор  $\sigma = (\sigma_1 \dots \sigma_n)$ :

$$\begin{aligned}
L \mapsto & \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + \\
& + \sum_{k=1}^n \left[ \sigma_k \frac{u_{i_+}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i_-}^{j+1}}{h_k^2} + (1 - \sigma_k) \frac{u_{i_+}^j - 2u_i^j + u_{i_-}^j}{h_k^2} \right] + \\
& + \varphi_i^j, \text{ где} \\
& i_{\pm} = (i_1, \dots, i_{k-1}, i_k \pm 1, i_{k+1}, \dots, i_n)
\end{aligned}$$

Аналогично явной схеме, добавляя граничные и начальные условия, получаем замкнутую систему линейных уравнений. Однако, в отличие от явной схемы, значения на новом временном слое  $u^{j+1}$  не выражаются явно через значения на предыдущем временном слое  $u^j$ , а получаются путём решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений  $Mu^{j+1} = D$ . В одномерном случае матрица системы получается *трёхдиагональной*:

$$M = \begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & B_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_n & B_n \end{pmatrix},$$

где

$$A_i = -\sigma\tau$$

$$B_i = h^2 + 2\sigma\tau$$

$$C_i = -\sigma\tau$$

$$D_i = h^2 u_i^j + \tau(1 - \sigma) \left( u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j \right) + \tau h^2 \varphi_i^{j+1}$$

В таком случае существует эффективный алгоритм расчёта, именуемый *методом прогонки*: Сначала определяем  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{C_1}{B_1}, \\ \beta_1 = \frac{D_1}{B_1}, \\ \alpha_i = -\frac{C_i}{B_i + A_i \cdot \alpha_{i-1}}, \\ \beta_i = \frac{D_i - A_i \cdot \beta_{i-1}}{B_i + A_i \cdot \alpha_{i-1}}, \\ \beta_n = \frac{D_n - A_n \cdot \beta_{n-1}}{B_n + A_n \cdot \alpha_{n-1}} \end{cases}, \quad i = 2, \dots, n-1$$

Затем по ним определяем неизвестные:

$$\begin{cases} x_n = \beta_n, \\ x_i = \alpha_i \cdot x_{i+1} + \beta_i, \quad i = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

Сложность такого алгоритма  $O(N_x)$ , что не уступает явной схеме. Преимущество же неявной схемы в том, что для неё условия устойчивости принимает вид

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}.$$

Из этого условия видно, что при  $\sigma \geq 0.5$  схема безусловно устойчива, то есть устойчива вне зависимости от выбора шагов  $h$  и  $\tau$ .

При значениях  $\sigma \neq 0.5$  схема имеет порядок точности  $O(h^2 + \tau)$ , а при  $\sigma = 0.5$  (так называемая *схема Кранка-Николсона*)  $O(h^2 + \tau^2)$ , то есть больший, явная схема.

Недостатком такой схемы является отсутствие возможности распараллеливания.



В случае многомерной задачи дело обстоит хуже. Получаемые системы линейных уравнений имеют более сложную матрицу (не трёхдиагональную). Для их решения пользуются в общем случае методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса), который работает за  $O(N^3)$ , где  $N \times N$  — размерность матрицы. Так, уже в двумерной задаче матрица будет размера  $N_x N_y \times N_x N_y$ , и расчёт будет проводиться заметно дольше, чем при расчёте явной схемой ( $\sim O(N^2)$ ).

### 3.1.3 Локально-одномерные схемы

Итак, явные схемы обладают быстрой скоростью счёта ( $\sim O(N^n)$ ), в то время как устойчивость таких систем достигается лишь при определённом выборе параметров сетки. Неявные схемы безусловно устойчивы и имеют больший порядок точности, однако требуют решения системы  $N^n$  уравнений, для чего требуется значительно больше вычислительной работы, чем для явной схемы [1].

Для сочетания лучших качеств явных (объём работы  $\sim O(N^n)$ ) и неявных (безусловная устойчивость) схем было предложено несколько *экономичных* схем. Подробнее об этом написано в [4; 13—17].

*Локально-одномерный метод* является универсальным, пригодным для решения квазилинейного уравнения теплопроводности в произвольной области  $G$  любого числа измерений. При использовании в работе блочных локально-адаптивных сеток 4 используется именно этот метод. Также будут использоваться прямоугольные области, поэтому формулировка метода будет приведена для таковых.

Итак, рассматриваемую многомерную задачу Дирихле в цилиндре  $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0, T]$ ,  $\bar{G} = \prod_{i=1}^n [0, L_i]$

$$\begin{cases} u_t = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ k_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right] + f, & (x, t) \in G \times (0, T) \\ u(x, t) = \mu_{-i}(x, t), & x_i = 0 \\ u(x, t) = \mu_i(x, t), & x_i = L_i \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G} \end{cases}, \quad t \in [0, T]$$

заменяем *цепочкой одномерных* задач „вдоль каждого из направлений“:

$$\begin{cases} \frac{1}{p} \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[ k_{\alpha}(v_{(\alpha)}) \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_{\alpha}} \right] + f_{\alpha}, & x \in G, t \in \Delta_{\alpha} = \left( t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}} \right] \\ v_{(\alpha)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), & x \in G \\ v_{(\alpha)}(x, t) = \mu_{-\alpha}(x, t), & x_{\alpha} = 0, t \in [t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}] \\ v_{(\alpha)}(x, t) = \mu_{\alpha}(x, t), & x_{\alpha} = L_{\alpha}, t \in [t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}] \end{cases}$$

$$v_{(\alpha)}(x, 0) = u_0(x)$$

$$v_{(1)}(x, t_j) = v_{(p)}(x, t_j)$$

$$u(x, t_{j+1}) = v_{(p)}(x, t_{j+1}).$$

Каждая из одномерных задач решается неявной двухслойной шеститочечной схемой с весом  $\sigma_{\alpha}$ . Пускай область  $G$  дискретизуется сеткой  $\omega_h$ , имеющий вдоль каждого направления  $N$  точек. Для каждого значения  $\alpha = 1, \dots, p$  получается  $N^{p-1}$  задач. Каждая из них решается (методом прогонки как неявная одномерная схема) за  $\sim O(N)$ . Таким образом,

### 3.2 Программный код, примеры расчётов

## 4 Теория блочных локально-адаптивных сеток

## 5 Замечания о программной реализации

## 6 Основные результаты

## 7 Приложения к физике, реальные задачи

## 8 Заключение

## Список литературы

1. *Тихонов А., Самарский А.* Уравнения математической физики.—изд. 8-е, стереотипное. — 2007.
2. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теоретическая физика: гидродинамика. 5-е изд., стереотип // М.: Физмат-лит. — 2001. — Т. 5. — С. 736.
3. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры / В. А. Галактионов [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Новейшие достижения». — 1986. — Т. 28, № 0. — С. 95—205.
4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — "Наука," Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1989.
5. *Самарский А. А.* Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Т. 3, № 3. — С. 431—466.
6. *Зельдович Я., Компанеев А.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный. — 1950. — Т. 70. — С. 61—71.
7. *Баренблатт Г.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикл. матем. и мех.—1952.—16. — 1952. — № 1. — С. 67—78.
8. *Баренблатт Г., Вишик М.* О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикладная математика и механика. — 1956. — Т. 20, № 3. — С. 411—417.
9. Метод адаптивных декартовых сеток для решения задач газовой динамики / А. Афондинов [и др.]. — "Российская академия наук", 2017.
10. *Дарьин Н. А., Мажукин В. И., Самарский А. А.* Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1988. — Т. 28, № 8. — С. 1210—1225.

11. *Berger M.* Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations [PhD Thesis]. — 1982.
12. *Berger M. J., Colella P.* Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics, *Journal of computational Physics*. — 1989. — Т. 82, № 1. — С. 64—84.
13. *Peaceman D. W., Rachford Jr H. H.* The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // *Journal of the Society for industrial and Applied Mathematics*. — 1955. — Т. 3, № 1. — С. 28—41.
14. *Douglas Jr J.* On the Numerical Integration of  $u_{xx} + u_{yy} = u_t$  by Implicit Methods // *Journal of the society for industrial and applied mathematics*. — 1955. — Т. 3, № 1. — С. 42—65.
15. *Яненко Н.* Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности // *Докл. АН СССР*. Т. 125. — 1959. — С. 1207.
16. *Дьяконов Е. Г.* Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1962. — Т. 2, № 4. — С. 549—568.
17. *Самарский А. А.* Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1962. — Т. 2, № 5. — С. 787—811.