

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

НА ПРАВАХ РУКОПИСИ

ШИРОКОВ ДЕНИС ДМИТРИЕВИЧ

«ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ЛОКАЛЬНО-АДАПТИВНЫХ СЕТОК»

Выпускная квалификационная работа бакалавра  
Направление подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика

Выпускная квалификационная  
работа защищена

«\_\_\_»\_\_\_\_\_2021 г.

Оценка \_\_\_\_\_

Секретарь ГЭК \_\_\_\_\_ Корнеев Ф.А.  
к.ф.-м.н., доцент

Москва

17 мая 2022 г.

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**  
**К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ:**  
**«ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ**  
**ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ**  
**ЛОКАЛЬНО-АДАПТИВНЫХ СЕТОК»**

Студент \_\_\_\_\_ Широков Д.Д.

Научный руководитель  
к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Кучугов П.А.

Рецензент  
к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Корнеев Ф.А.

Зам. зав. кафедрой  
к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Муравьев С.Е.

# Аннотация

Здесь будет аннотация

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Основные понятия теории разностных схем</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Разностные схемы на статических сетках</b>	<b>9</b>
3.1	Избранные разностные схемы для уравнения теплопроводности	10
3.1.1	Явная схема . . . . .	10
3.1.2	Однопараметрическое семейство неявных схем . . . . .	11
3.1.3	Локально-одномерные схемы . . . . .	11
3.2	Программный код, примеры расчётов . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Теория блочных локально-адаптивных сеток</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Замечания о программной реализации</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Основные результаты</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Приложения к физике, реальные задачи</b>	<b>11</b>
<b>8</b>	<b>Заключение</b>	<b>11</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>13</b>

# 1 Введение

Большинство моделей классической физики, таких как гидрогазодинамика, описываются начально-краевыми задачами для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка[1; 2]. Нахождение аналитического решения таких задач представляется возможным только в случае простых, канонических областей (таких как круг, шар, прямоугольник), простых начальных и граничных условиях, а также в случае линейных уравнений, описывающих простые физические процессы.

На практике же часто возникают нелинейные задачи, поставленные в областях сложной формы. Например, задача лазерного термоядерного синтеза (ЛТС), идея которой заключается в быстром нагреве и сжатии термоядерного топлива до температур и плотностей, необходимых для осуществления быстрого и эффективного протекания термоядерных реакций инерциально удерживаемой плазмы. Процессы распространения тепла в такой системе будут описываться нелинейным уравнением теплопроводности. Нелинейное уравнение теплопроводности также возникает в, например, задачах о самофокусировки световых пучков в нелинейных средах, эффекте  $T$ -слоя в низкотемпературной плазме, проблемы безударного сжатия; вообще с необходимостью в любой задаче, в которой присутствуют процессы самопроизвольного нарушения симметрии с понижением её степени [3]

Любой численный метод приближённого решения таких задач использует дискретизацию (то есть переход от бесконечномерного функционального пространства к конечномерному пространству). Один из основных методов — *метод конечных разностей*. Его основа заключается в том, что исходная непрерывная задача в области  $G \subset \mathbb{R}^n$  сводится к *семейству разностных задач* — системам конечного числа линейных (в общем случае — нелинейных) уравнений на т.н. *разностные функции* — функции, заданные на конечном числе точек (именуемых *сетками*), и принимающие значения (приближённые значения решения) на конечном числе точек. Такие задачи решаются алгоритмически и тем самым могут быть программно реализованы на современных ЭВМ. Более подробно метод описан в разделе 2.

Принципиальная возможность применения тех или иных алгоритмов основывается на вопросе об их сходимости, точности и устойчивости. Так, в работе [4] даётся обширное описание алгоритмов решения задач на *стати-*

ческих сетках, исследуются вопросы устойчивости и скорости сходимости. Более подробное исследование тех же вопросов в случае *неравномерных статических сеток* дан в работе [5].

Как уже отмечалось, в прикладных задачах приходится сталкиваться с квазилинейными уравнениями теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[ k_{\alpha}(u) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right]$$

Проблема использования *статических* сеток, то есть сеток, не меняющихся на протяжении всего алгоритмического процесса поиска решения, связана со следующим обстоятельством. В статьях [6; 7] показано, что одномерное уравнение теплопроводности в случае зависящего от температуры коэффициента теплопроводности имеет решения, производные которых разрывны в точках обращения в нуль решения  $u(x, t)$ , при этом поток тепла  $k(u) \frac{\partial u}{\partial x}$  — непрерывен, то есть существует фронт температуры, который, как показано в [8], распространяется с конечной скоростью. Эти „проблемные точки решения“ оказываются сильно локализованными: если для численного решения использовать достаточно грубые сетки, то основные ошибки в приближённом решении будут локализованы именно в окрестностях этих точек. Конечно, можно использовать более мелкий шаг сетки и улучшить точность решения, ибо, как предсказывает теория [4], приближённое решение должно сходиться к точному при стремлении шага сетки к нулю.

Однако даже на мощных вычислительных системах расчёт сложных трёхмерных задач со сложной пространственной геометрией требует огромного числа точек сетки, что значительно увеличивает используемую память и расчётное время [9]. Более того, точность решения в области особенностей *существенно* влияет на точность решения во всей остальной области. Поэтому хотя бы для получения приемлемой кратины решения в целом на всей области без точного учёта особенностей неизбежно приходится сильно измельчать сетку. Учитывая, что в подобластях гладкого поведения решения просто нет необходимости измельчать сетку настолько сильно, заключаем, что использование классических алгоритмов приводит к тому, что большая часть компьютерных вычислений производится напрасно.

Поэтому для данного класса гидродинамических проблем с локализован-

ными особенностями разрабатывались специальные методы *локально-адаптивных сеток* (*Adaptive mesh refinement*), учитывающие разномасштабное поведение решения. Например, в работе [10] предлагалось использовать адаптивную сетку, построение которой производится с помощью соответствующего преобразования координат. Конкретный вид преобразования задаётся с помощью некоторой функции  $Q$ , вид которой определяется особенностями решения исследуемой задачи. Т.к. вид функции  $Q$  выбирался вручную в зависимости от конкретной задачи, этот метод не обладал достаточной автономностью. Многие методы были основаны на геометрической адаптации расчётных сеток, что, в свою очередь, приводит к трудностям реализации на ЭВМ, поскольку неструктурированные сетки порождают нерегулярный доступ к памяти. С учётом современного развития массивно-параллельных архитектур процессоров с большим числом ядер, эффективность работы которых зависит в первую очередь от упорядоченности обращений в память, производительность методов с неструктурированными сетками оказывается неудовлетворительной.

*Метод структурированных адаптивных сеток* (*Block-structured adaptive mesh refinement*) был представлен в работах [11; 12] применительно к уравнениям гиперболического типа. Преимущества метода в:

- использовании простых прямоугольных областей определённого размещения, удобных для реализации на компьютере
- возможности использования архитектуры параллельных вычислений
- использовании точно таких же разностных схем, как и для статических декартовых сеток (с некоторыми алгоритмическими модификациями)

**Целью данной работы** является изучение метода структурированных декартовых локально-адаптивных сеток применительно к задачам для уравнения теплопроводности, программная реализация данного метода, сравнение со статическими аналогами.

В разделе 2 вводятся основные математические формулировки разностных задач. В разделе 3 описываются алгоритмы решения задач на статических сетках (которые в последствии непосредственно используются при решении методом адаптивных сеток), приводятся примеры решения модельных

задач. В разделе 4 приводится описание метода, программной реализации и результатов решения модельных задач.

## 2 Основные понятия теории разностных схем

Математическая формулировка физических задач, описанных во введении имеет вид:

$$\begin{cases} L[u](x) = f(x), & x = (x_1, \dots, x_n)^T \in G \subset \mathbb{R}^n, \\ \Gamma[u](x) = \mu(x), & x \in \partial G \end{cases}, \quad (1)$$

где

- $L$  — дифференциальный оператор уравнения;
- $\Gamma$  — оператор начально-краевых условий (в общем случае также дифференциальный);
- $f, \mu$  — заданные функции.

Решения исходной задачи — функции  $u(x)$  непрерывного аргумента  $x \in G$ , являются элементами некоторого функционального пространства  $H_0$  с нормой  $\|\cdot\|$ . В методе конечных разностей область  $G$  заменяется на некоторое дискретное множество точек  $\omega_h$ , именуемое *сеткой*, а функциональное пространство  $H_0$  заменяется на  $H_h$  — гильбертово пространство сеточных функций  $y_h : G \supset \omega_h \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $h$  — некоторый параметр, характеризующий сетку  $\omega_h$  в области  $G$ . Например, равномерная статическая сетка:

$$\omega_h = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in G \mid x_i = h_i \cdot k, k = 0, 1, \dots, N_i \ i = 1, \dots, n\}$$

Получив приближённое решение задачи  $y_h$ , необходимо оценивать степень „близости“ к решению исходной задачи  $u(x)$ .  $y_h$  и  $u$  являются элементами разных функциональных пространств, поэтому для оценивания близости в работе используется проекционный метод: пространство  $H_0$  отображается (проектируется) на пространство  $H_h$  оператором  $\mathcal{P}$ :

$$\mathcal{P}_h : H_0 \ni u \mapsto u_h \in H_h.$$



Простейший выбор: ограничение  $u$  на сетку  $\omega_h$ :

$$u_h(x) := u(x), \quad x \in \omega_h \subset G$$

Иногда пользуются „более равномерным“ способом ограничения с усреднением по окрестности узла:

$$u_h(x) := \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} u(x') dx'$$

Тогда близость приближённого решения  $y_h$  и исходного решения  $u$  оценивается по норме  $\|\cdot\|_h$  пространства  $H_h$ :

$$e = \|y_h - u_h\|_h,$$

при этом требуется, чтобы она аппроксимировала норму  $\|\cdot\|_0$  в слудеющем смысле[4]:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0$$

В работе используется норма  $\|y\|_h = \sqrt{\sum_{i=1}^N h y_i^2}$ . Исходному дифференциальному оператору  $L$  ставится в соответствие *разностный оператор*  $L_h$ :

$$L_h[v](x) = \sum_{x' \in T(x)} A_h(x, x') v(x'),$$

где  $T(x)$  — некоторое множество узлов сетки, называемое *шаблоном*. Например, двумерный оператор Лапласа  $L = \Delta$  на двумерной равномерной сетке можно аппроксимировать, используя шаблон „крест“ (см. рис. 1):

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \mapsto \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_1^2} + \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{h_2^2},$$

где  $u_i^j = u(x_{1i}, x_{2j})$ ,  $(x_{1i}, x_{2j}) \in \omega_h$ . Погрешность аппроксимации оператора  $L$  разностным оператором  $L_h$  определяется как сеточная функция  $\psi_h = L_h[u_h] - (L[u])_h$ ,  $u \in H_0$ . Если  $\|\psi_h\| = O(|h|^m)$ , то говорят, что оператор  $L_h$  аппроксимирует оператор  $L$  с порядком  $m$ . Если  $\psi(x) = O(h^m)$ ,  $m$ , то говорят, что оператор  $L_h$  аппроксимирует оператор  $L$  в точке  $x$  с порядком  $m$ .

Теперь сформулируем непосредственно то, что называется *разностной*

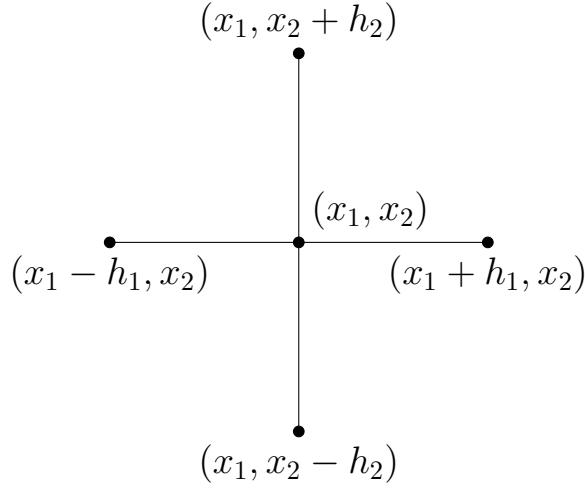


Рис. 1: Шаблон „Крест“

схемой, алгоритмы решения которой и реализуются на компьютере. Исходной задаче (1) ставится в соответствие семейство разностных задач, зависящих от параметра  $h$ , называемое разностной схемой:

$$\left\{ \left\{ \begin{array}{ll} L_h[y_h] = \varphi_h, & x \in \omega_h \\ l_h[y_h] = \chi_h, & x \in \gamma_h \end{array} \right\} \right\}_h, \quad \varphi_h = \mathcal{P}_h[f], \chi_h = \mathcal{P}_h[\mu]$$

Под погрешностью разностной схемы понимается  $z_h = y_h - u_h$ , где  $u_h = \mathcal{P}_h u$  — проекция решения исходной задачи на  $H_0$ . Решения разностной задачи сходятся к решению исходной задачи, если

$$\|z_h\|_h \rightarrow 0 \text{ при } |h| \rightarrow 0$$

Введём также понятие устойчивости схемы. Разностная схема называется устойчивой (корректной, сходящейся), если  $\exists h_0 > 0 : \forall h (|h| \leq h_0) \Rightarrow$

1.  $\forall \varphi \in H_h \quad \exists! y_h$  — решение;
2.  $\exists M > 0 : \forall \varphi_h, \tilde{\varphi}_h \|y_h - \tilde{y}_h\| \leq M \|\varphi_h - \tilde{\varphi}_h\|$

На этом только лишь математическая сторона вопроса формулирования проблемы завершена. Дальнейшие шаги по исследованию разностной схемы опираются на конкретный выбор множества сеток  $\{\omega_h\}$  и аппроксимирующего оператора  $L_h$ , выбор которого, в свою очередь, существенно зависит от некоторых вопросов реализации получаемого алгоритма на компьютере.

### 3 Разностные схемы на статических сетках

Основное преимущество статических равномерных сеток —

- относительно простая реализация в виде программного кода<sup>1</sup>;
- удобное и простое представление данных в программе. Так, например, рассматривая задачу для двумерного нестационарного уравнения теплопроводности, результаты вычислений программы могут храниться в трёхмерном массиве (в отличие от алгоритмов на нестатических и неравномерных сетках, где используются более сложные структуры, см. подробнее в разд. 4);
- существенное упрощение формул и доказательств сходимости, устойчивости получающихся разностных схем.

Всюду далее под равномерной статической сеткой будем понимать:

$$\omega_{h\tau} := \{(x_{ik} = k \cdot h_i, t_j = j \cdot \tau) \mid i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, N_i\}$$

Как указывалось выше, свойства разностной схемы зависят и от выбора аппроксимирующего оператора  $L_h$ . В [4] исследуется множество различных схем. Далее приводятся избранные схемы, каждая из которых обладает отличительной особенностью, для задачи Дирихле для линейного и квазилинейного уравнений теплопроводности.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f, & (x, t) \in G \times (0, T) \\ u(x, t) = \mu_{-i}(x, t), & x_i = 0 \\ u(x, t) = \mu_i(x, t), & x_i = L_i \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G} \end{cases}, \quad t \in [0, T)$$

$$\text{где } \bar{G} = \prod_{i=1}^n [0, L_i].$$

---

<sup>1</sup>Так, например, реализация явной схемы может занимать не более 10 строк кода (подробнее см. раздел 3.2)

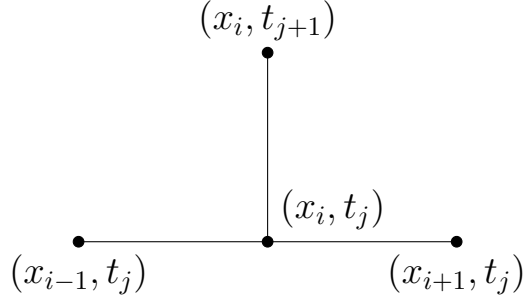


Рис. 2: Пятиточечный шаблон явной схемы

### 3.1 Избранные разностные схемы для уравнения теплопроводности

#### 3.1.1 Явная схема

Шаблон явной схемы нагляден в одномерном случае (см. рис. 2):

$$L = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \mapsto L_{h\tau} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j, \quad \varphi_i^j = f(x_i, t_j)$$

В многомерном случае:

$$L \mapsto \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + \sum_{k=1}^n \frac{u_{i_+}^j - 2u_i^j + u_{i_-}^j}{h_k^2} + \varphi_i^j, \quad \text{где}$$

$$i_{\pm} = (i_1, \dots, i_{k-1}, i_k \pm 1, i_{k+1}, \dots, i_n)$$

Откуда видно, что значение функции на  $(j+1)$ -ом временном слое явно выражается через значения функции на  $j$ -ом временном слое:

$$u_i^j = u_i^j + \tau \sum_{k=1}^n \frac{u_{i_+}^j - 2u_i^j + u_{i_-}^j}{h_k^2} + \varphi_i^j$$

(отсюда и название схемы). Значения функции на 1-ом временном слое следуют из начальных условий:  $u_i^1 = u_0(x_i)$ , а граничные условия дают замкнутую

систему уравнений:

$$\begin{cases} u_i^j = u_i^j + \tau \sum_{k=1}^n \frac{u_{i+}^j - 2u_i^j + u_{i-}^j}{h_k^2} + \varphi_i^j, & i_k = 2, \dots, N_k - 1 \\ u_i^1 = u_0(x_i), & i_k = 1, \dots, N_k \\ u_{i_k}^j = \mu_{-\alpha}(x_i, t_j), & i_{k \neq \alpha} = 1, \dots, N_k; \quad i_\alpha = 0 \\ u_{i_k}^j = \mu_{+\alpha}(x_i, t_j), & i_{k \neq \alpha} = 1, \dots, N_k; \quad i_\alpha = N_\alpha \end{cases}$$

Как уже отмечалось, главные преимущества явной схемы — простота реализации, скорость счёта  $O(N^n)$  и возможность распараллеливания программы (независимость расчёта  $u_i^j$  для разных  $i$ ). Однако у таких схем есть существенный недостаток — схема устойчива и сходится к решению лишь при условии  $\tau \leq \frac{h^2}{2n}$ .

### 3.1.2 Однопараметрическое семейство неявных схем

### 3.1.3 Локально-одномерные схемы

## 3.2 Программный код, примеры расчётов

# 4 Теория блочных локально-адаптивных сеток

# 5 Замечания о программной реализации

# 6 Основные результаты

# 7 Приложения к физике, реальные задачи

# 8 Заключение

## Список литературы

1. *Тихонов А., Самарский А.* Уравнения математической физики.—изд. 8-е, стереотипное. — 2007.
2. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теоретическая физика: гидродинамика. 5-е изд., стереотип // М.: Физмат-лит. — 2001. — Т. 5. — С. 736.
3. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры / В. А. Галактионов [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Новейшие достижения». — 1986. — Т. 28, № 0. — С. 95—205.
4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — "Наука," Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1989.
5. *Самарский А. А.* Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Т. 3, № 3. — С. 431—466.
6. *Зельдович Я., Компанеев А.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный. — 1950. — Т. 70. — С. 61—71.
7. *Баренблатт Г.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикл. матем. и мех.—1952.—16. — 1952. — № 1. — С. 67—78.
8. *Баренблатт Г., Вишик М.* О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикладная математика и механика. — 1956. — Т. 20, № 3. — С. 411—417.
9. Метод адаптивных декартовых сеток для решения задач газовой динамики / А. Афондинов [и др.]. — "Российская академия наук", 2017.
10. *Дарьин Н. А., Мажукин В. И., Самарский А. А.* Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1988. — Т. 28, № 8. — С. 1210—1225.

11. *Berger M.* Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations[P. D. Thesis]. — 1982.
12. *Berger M. J., Colella P.* Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics, Journal of computational Physics. — 1989. — T. 82, № 1. — C. 64—84.