МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Кафедра теоретической ядерной физики

На правах рукописи

Широков Денис Дмитриевич

«Численное решение уравнения теплопроводности с использованием локально-адаптивных сеток»

Выпускная квалификационная работа бакалавра
Направление подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика

Выпускная квалификационная
работа защищена

«___»____________2021 г.

Оценка ______________

Секретарь ГЭК __________ Фамилия И.О.
к.ф.-м.н., доцент

Москва
15 мая 2022 г.

Пояснительная записка

к бакалаврской дипломной работе:

«Численные методы решения задач математической физики с использованием локально-адаптивных сеток»

Студент	____________	Широков Д.Д.
Научный руководитель к.ф.-м.н.	____________	Кучугов П.А.
Соруководитель д.ф.-м.н.	____________	Тишкин В.Ф.
Рецензент к.ф.-м.н.	____________	Фамилия И.О.
Зам. зав. кафедрой к.ф.-м.н.	____________	Муравьев С.Е.

Аннотация

Здесь будет аннотация

Содержание

1 Введение

Большинство моделей классической физики, таких как гидрогазодинамика, описываются начально-краевыми задачами для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка[1; 2]. Нахождение аналитического решения таких задач представляется возможным только в случае простых, канонических областей (таких как круг, шар, прямоугольник), простых начальных и граничных условиях, а также в случае линейных уравнений, описывающих простые физические процессы.

На практике же часто возникают нелинейные задачи, поставленные в областях сложной формы. Например, задача лазерного термоядерного синтеза (ЛТС), идя которой заключается в быстром нагреве и сжатии термоядерного топлива до температур и плотностей, необходимых для осуществления быстрого и эффективного протекания термоядерных реакций инерциально удерживаемой плазмы. Процессы распространения тепла в такой системе будут описываться нелинейным уравнением теплопроводности. Нелинейное уравнение теплопроводности также возникает в, например, задачах о самофокусировки световых пучков в нелинейных средах, эффекте T–слоя в низкотемпературной плазме, проблемы безударного сжатия; вообще с необходимостью в любой задаче, в которой присутствует процессы самопроизвольного нарушения симметрии с понижением её степени [3]

Любой численный метод приближённого решения таких задач использует дискретизацию (то есть переход от бесконечномерного функционального пространства к конечномерному пространству). Один из основных методов — *метод конечных разностей*. Его основа заключается в том, что исходная непрерывная задача в области $G \subset \mathbb{R}^n$ сводится к *семейству разностных задач* — системам конечного числа линейных (в общем случае — нелинейных) уравнений на т.н. *разностные функции* — функции, заданные на конечном числе точек (именуемых *сетками*), и принимающие значения (приближённые значения решения) на конечном числе точек. Такие задачи решаются алгоритмически и тем самым могут быть программно реализованы на современных ЭВМ. Более подробно метод описан в разделе 2.

Принципиальная возможность применения тех или иных алгоритмов основывается на вопросе об их сходимости, точности и устойчивости. Так, в работе [4] даётся обширное описание алгоритмов решения задач на *стати-*

ческих сетках, исследуются вопросы устойчивости и скорости сходимости. Более подробное исследование тех же вопросов в случае *неравномерных статических сеток* дан в работе [5].

Как уже отмечалось, в прикладных задачах приходится сталкиваться с квазилинейными уравнениями теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[k_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right]$$

Проблема использования *статических* сеток, то есть сеток, не меняющихся на протяжении всего алгоритмического процесса поиска решения, связана со следующим обстоятельством. В статьях [6; 7] показано, что одномерное уравнение теплопроводности в случае зависящего от температуры коэффициента теплопроводности имеет решения, производные которых разрывны в точках обращения в нуль решения $u(x,t)$, при этом поток тепла $k(u)\frac{\partial u}{\partial x}$ — непрерывен, то есть существует фронт температуры, который, как показано в [8], распространяется с конечной скоростью. Эти „проблемные точки решения“оказываются сильно локализованными: если для численного решения использовать достаточно грубые сетки, то основные ошибки в приближённом решении будут локализованны именно в окрестностях этих точек. Конечно, можно использовать более мелкий шаг сетки и улучшить точность решения, ибо, как предсказывает теория [4], приближённое решение должно схоидтся к точному при стремлении шага сетки к нулю.

Однако даже на мощных вычислитльных системах расчёт сложных трёхмерных задач со сложной пространственной геометрией требует огромного числа точек сетки, что значительно увеличивает используемую память и расчётное время [9]. Более того, точность решения в области особенностей *существенно* влияет на точность решения во всей остальной области. Поэтому хотя бы для получения приемлемой кратины решения в целом на всей области без точного учёта особенностей неизбежно приходится сильно измельчать сетку. Учитывая, что в подобластях гладкого поведения решения просто нет необходимости измельчать сетку настолько сильно, заключаем, что использование классических алгоритмов приводит к тому, что большая часть компьютерных вычислений производится напрасно.

Поэтому для данного класса гидродинамических проблем с локализованными особенностями разрабатывались специальные методы *локально-адаптивных сеток* (*Adaptive mesh refinement*), учитывающие разномасштабное поведение решения. Например, в работе [10] предлагалось использовать адаптивную сетку, построение которой производится с помощью соответствующего преобразования координат. Конкретный вид преобразования задаётся с помощью некоторой функции Q, вид которой определяется особенностями решения исследуемой задачи. Т.к. вид функции Q выбирался вручную в завимимости от конкретной задачи, этот метод не обладал достаточной автономностью. Многие методы были основаны на геометрической адаптации рассчётных сеток, что, в свою очередь, приводит к трудностям реализации на ЭВМ, поскольку неструктурированные сетки порождают нерегулярный доступ к памяти. С учётом современного развития массивно-параллельных архитектур процессоров с большим числом ядер, эффективность работы которых зависит в первую очередь от упорядоченности обращений в память, производительность методов с неструктурированными сетками оказывается неудовлетворительной.

Метод структурированных адаптивных сеток (Block-structured adaptive mesh refinement) был представлен в работах [11; 12] применительно к уравнениям гиперболического типа. Преимущества метода в:

- использовании простых прямоугольных областей определённого размещения, удобных для реализации на компьютере
- возможности использования архитектуры параллельных вычислений
- использовании точно таких же разностных схем, как и для статических декартовых сеток (с некоторыми алгоритмическими модификациями)

.

Целью данной работы является изучение метода стрктурированных декартовых локально-адаптивных сеток применительно к задачам для уравнения теплопроводности, программная реализация данного метода, сравнение со статическими аналогами.

В разделе 2 вводятся основные математические формулировки разностных задач. В разделе 3 описываются алгоритмы решения задач на статических сетках (которые в последствии непосредственно используются при решении методом адаптивных сеток), приводятся примеры решения модельных задач. В разделе 4 приводится описание метода, программной реализации и результатов решения модельных задач.

2 Основные понятия теории разностных схем

Ну, тут я пока просто скопировал то, что было написано ранее для себя, всё это будет переформулировываться в более красивой форме, и, конечно же, добавится вода. Формулы тоже нужно переписать, всё было написано и тупо скопировано пока из markdown'а

Математическая формулировка физических задач, описанных во введении имеет вид:

$$\begin{cases} L[u](x) = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in G \subset \mathbb{R}^n \\ \Gamma[u](x) = \mu(x), \quad x \in \partial G \end{cases},$$

где

- L — дифференциальный оператор уравнения, например, в случае квазилинейного уравнения теплопроводности $L = \frac{\partial}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$;
- Γ — оператор начально-краевых условий (в общем случае также дифференциальный), например, в случае задачи с нестационарным краевым условием, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоёмкость некоторой величины, имеет вид:[13]

Сетки и сеточные функции Пусть H_0 — некоторое функциональное пространство функций $u(x)$ непрерывного аргумента $x \in G$ с нормой $\|\cdot\|_0$. В методе конечных разностей область $\bar{G}$ изменения аргумента x заменяется сеткой $\bar{\omega}_h$ — конечным множеством точек $x_i \in \bar{G}$, а функциональное пространство H_0 заменяется на H_h — гильбертово пространство сеточных функций $y_h(x)$, определённых на сетке $\bar{\omega}_h$ с нормой $\|\cdot\|_h$. Обычно будем пользоваться нормой $\|y\|_h = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} hy_i^2\right)^{1/2}$ Функции $y_h(x) \in H_h$ — численные решения, аппроксимации исходных решений $u(x) \in H_0$. Соответственно, основной интерес теории приближённых методов представляет **оценка близости** y_h к u. Эти два вектора являются элементами разных пространств. Их близость описываем следующим образом:

$\mathcal{P}_h : H_0 \to H_h, \quad u \mapsto u_h : u_h(x) = u(x), x \in \bar{\omega}_h$. Тогда близость u_h и y_h характеризуется числом $\|y_h - u_h\|_h$.

Условие согласования норм в H_h и H_0: $\lim\limits_{h\to 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0$, или другими словами "норма $\|\cdot\|_h$ аппроксимирует норму $\|\cdot\|_0$"

Разностная аппроксимация дифференциальных операторов

Пусть L — линейный дифференциальный оператор, $\mathcal{D}(L) = H_0, \quad (x) \subset \bar{\omega}_h$ — некоторое множество узлов сетки

Опр. $L_h v_h(x) = L_h v_h(x) = \sum\limits_{\xi\in(x)} A_h(x,\xi) v_n(\xi)$ — разностный оператор, разностная аппроксимация оператора L

Опр. $\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x)$ — локальная погрешность разностной аппроксимации Lv в точке x.

Опр. L_h аппроксимирует L с порядком $m > 0$ в точке x, если $\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x) = O(h^m)$

Опр. Погрешность аппроксимации оператора L разностным оператором L_h — это сеточная функция $\psi_h = L_h v_h - (Lv)_h, \quad (Lv)_h = \mathcal{P}_h(Lv), \quad v \in H_0$

Опр. Разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L с порядком $m > 0$, если

$$\|\psi_h\| = \|L_h v_h - (Lv)_h\|_h = O(|h|^m)$$

Общее утверждение, касательно аппроксимации дифференциальных операторов разностными таково, что: * погрешность аппроксимации зависит от используемого шаблона, причём можно достичь любого порядка локальной аппроксимации повышением кол-ва узлов шаблона (однако ухудшается качество операторов) * исследование локальной аппроксимации может оказаться недостаточным для суждения о порядке разностной аппроксимации на сетке и тем самым для суждения о качестве разностного оператора * рассмотрение разностной аппроксимации на решении дифференциального уравнения может использоваться для повышения порядка аппроксимации

Постановка разностных задач.

$G \subset \mathbb{R}^n$, $\partial G = \Gamma$, L, l — линейные дифференциальные операторы, $\mathcal{D}(L) =$

H_0, $\mathcal{D}(l) = H_0$. Исходной задаче

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in G \\ lu(x) = \mu(x), & x \in \Gamma \end{cases}$$

ставится в соответствие *семейство разностных задач*, зависящих от параметра h, называемое *разностной схемой*:

$$\left\{ \begin{cases} L_h y_h = \varphi_h, & x \in \omega_h \\ l_h y_h = \chi_h, & x \in \gamma_h \end{cases} \right\}_h$$

Опр. Погрешность разностной схемы $z_h = y_h - u_h$, где y_h — решение разностной задачи, а $u_h = \mathcal{P}_h u$ проекция решения исходной задачи на H_0.

Опр. Погрешность аппроксимации для уравнения $L_h y_h = \varphi_h$ на решении $u(x)$ уравнения $Lu = f$:

$$\psi_h = L_h z_h = \varphi_h - L_h u_h$$

погрешность аппроксимации для условия $l_h y_h = \chi_h$ на решении $u(x)$ исходной задачи:

$$\nu_h = l_h z_h = \chi_h - l_h u_h$$

Опр. Решение разностной задачи *сходится к решению исходной задачи*, если

$$\|z_h\|_h = \|y_h - u_h\|_h \to 0 \quad |h| \to 0$$

Опр. Разностная схема *сходится со скоростью* $O(|h|^m)$ (*имеет m-ый порядок точности*), если

$$\|z_h\|_h = \|y_h - u_h\|_h = O(|h|^m), \quad |h| \to 0$$

Опр. Разностная схема обладает n-ым порядком аппроксимации, если

$$\|\psi_h\|_h = O(|h|^n), \quad \|\nu_h\|_h = O(|h|^n)$$

Опр. Разностная схема называется корректной (устойчивой, сходящейся), если $\exists h_0 > 0 : \forall h(|h| \leqslant h_0) \Rightarrow$ 1. $\forall \varphi \in \tilde{H}_h\ \exists! y_h$ — решение; 2. $\exists M > 0 :$

$\forall \varphi_h, \tilde{\varphi}_h \quad \|y_h - \tilde{y}_h\| \leqslant M\|\varphi_h - \tilde{\varphi}_h\|$

Утв. Если схема устойчива и аппроксимирует исходную, т.е. $\|\psi_h\|_h = O(|h|^n)$, то она сходится, причём порядок сходимости совпадает с порядком аппроксимации.

3 Разностные схемы на статических сетках

3.1 Избранные разностные схемы для уравнения теплопроводности

3.1.1 Явная схема

3.1.2 Однопараметрическое семейство неявных схем

3.1.3 Локально-одномерные схемы

3.2 Программный код, примеры расчётов

4 Теория блочных локально-адаптивных сеток

5 Замечания о программной реализации

6 Основные результаты

7 Приложения к физике, реальные задачи

8 Заключение

Список литературы

1. *Тихонов А.*, *Самарский А.* Уравнения математической физики.–изд. 8-е, стереотипное. — 2007.
2. *Ландау Л.*, *Лифшиц Е.* Теоретическая физика: гидродинамика. 5-е изд., стереот // М.: Физмат-лит. — 2001. — Т. 5. — С. 736.
3. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры / В. А. Галактионов [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Новейшие достижения». — 1986. — Т. 28, № 0. — С. 95—205.
4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — "Наука,"Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1989.
5. *Самарский А. А.* Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Т. 3, № 3. — С. 431—466.
6. *Зельдович Я.*, *Компанеец А.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный. — 1950. — Т. 70. — С. 61—71.
7. *Баренблатт Г.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикл. матем. и мех.—1952.—16. — 1952. — № 1. — С. 67—78.
8. *Баренблатт Г.*, *Вишик М.* О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикладная математика и механика. — 1956. — Т. 20, № 3. — С. 411—417.
9. Метод адаптивных декартовых сеток для решения задач газовой динамики / А. Афендиков [и др.]. — "Российская академиня наук", 2017.
10. *Дарьин Н. А.*, *Мажукин В. И.*, *Самарский А. А.* Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1988. — Т. 28, № 8. — С. 1210—1225.

11. *Berger M.* Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations[P
D. Thesis]. — 1982.

12. *Berger M. J.*, *Colella P.* Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics
Journal of computational Physics. — 1989. — Т. 82, № 1. — С. 64—84.

13. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью / М. Х. Шхануков-Лафишев [и др.] // Владикавказский математический журнал. — 2013. — Т. 15, № 4.