Теорема 318. *Для* $|x| \leqslant 1$ *существует точно одно* ν *такое, что*

$$cos\, y = x, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \pi,$$

а именно,

$$\nu = \frac{\pi}{2} - arc\ sin x.$$

Доказательство. Требования

$$cos\, y = x, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

равносильны требованиям

$$sin(\frac{\pi}{2} - y) = x \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - y \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и, следовательно,

$$\frac{\pi}{2} - y = arc\, sin x.$$

Определение 74. $\arccos x$ *для* $|x| \leqslant 1$ *есть* y *из теоремы* 318.

arc cos читается: арккосинус (или аркус косинус).

Теорема 319. $\frac{d\, arc\, cos x}{dx} = -\frac{1}{1 - x^2}$ *для* $|x| < 1$.

Доказательство. Из теорем 318 и 317 следует

$$(arc\, cos x)' = (\frac{\pi}{2} - arc\, sin x)' = -(arc\, sin x)' = -\frac{1}{1 - x^2}.$$

Теорема 320. *Для каждого* x *существует точно одно* y *такое, что*

$$tg\, y = x, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

а именно,

$$\nu = arc\ sin \frac{x}{1 + x^2}.$$

Доказательство. 1) Для $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ имеем

$$(tg\, y)' = \frac{1}{cos^2 y} > 0.$$

Следовательно, может существовать, самое большое, одно требуемое у.

2)Так как

$$|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}| = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} < 1,$$

то для

$$\nu = arc\ sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

имеем

$$|y| < \frac{\pi}{2},$$
$$cos\,y > 0,$$
$$sin\,y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$cos^2 y = 1 - sin^2 y = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2},$$
$$cos\,y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$tg\,y = \frac{sin\,y}{cos\,y} = x.$$

Определение 75. *$arc\,tg\,x$ есть из теоремы* 320.
arc tg читается: аркангес (или аркус тангенс).

Теорема 321. $\dfrac{d\,arc\,tgx}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$

Доказательство. Из теорем 320 и 317 следует

$$(arc\,tgx)' = (arc\,sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})' =$$
$$= \sqrt{1+x^2}\frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Теорема 322. *Для каждого x существует точно одно y такое, что*

$$ctg\,y = x, \qquad 0 < y < \pi,$$