

**Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)**

Институт: «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»
Дисциплина: «Численные методы»

Отчёт по лабораторной работе №1

ВЫПОЛНИЛ:
Студент: Стрыгин Д.Д.
Группа: 406
Вариант: 6

Москва, 2022

1. Постановка задачи

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h .

Вариант 6

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x(\cos t + \sin t),$$

$$u(0, t) = \sin t,$$

$$u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = -\sin t,$$

$$u(x, 0) = 0,$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \sin t \cos x$.

2. Методология

Явная и неявная конечно-разностные схемы представляют собой системы уравнений, краевые решения которых заполняются из начальных данных, а значения в середине заполняются по средству вычисления уравнений с одной или несколькими неизвестными.

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

Явная схема

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

Неявная схема

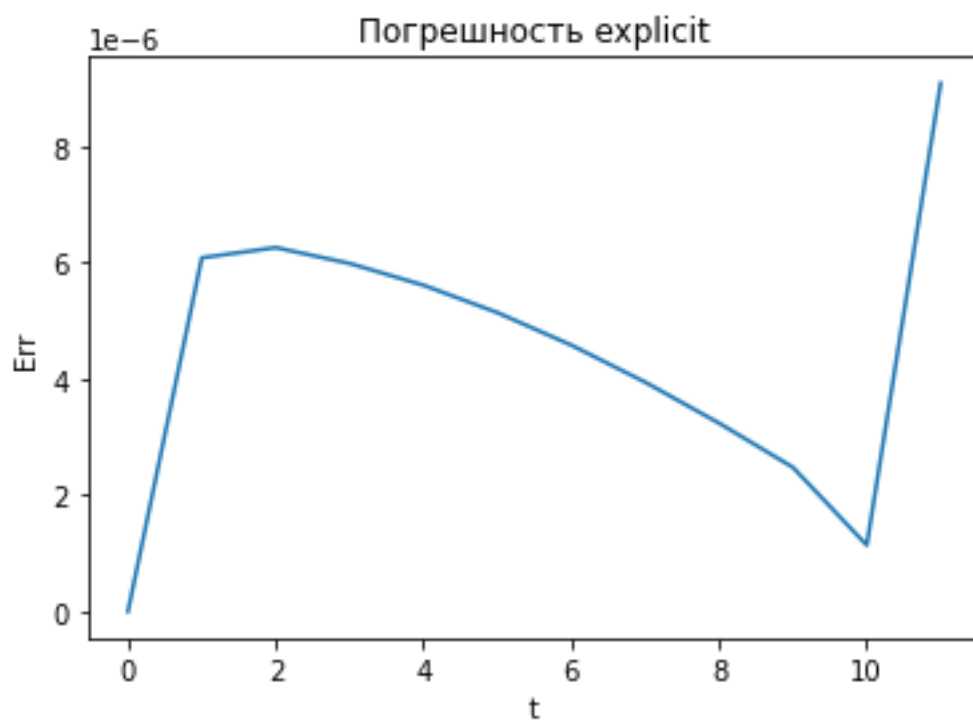
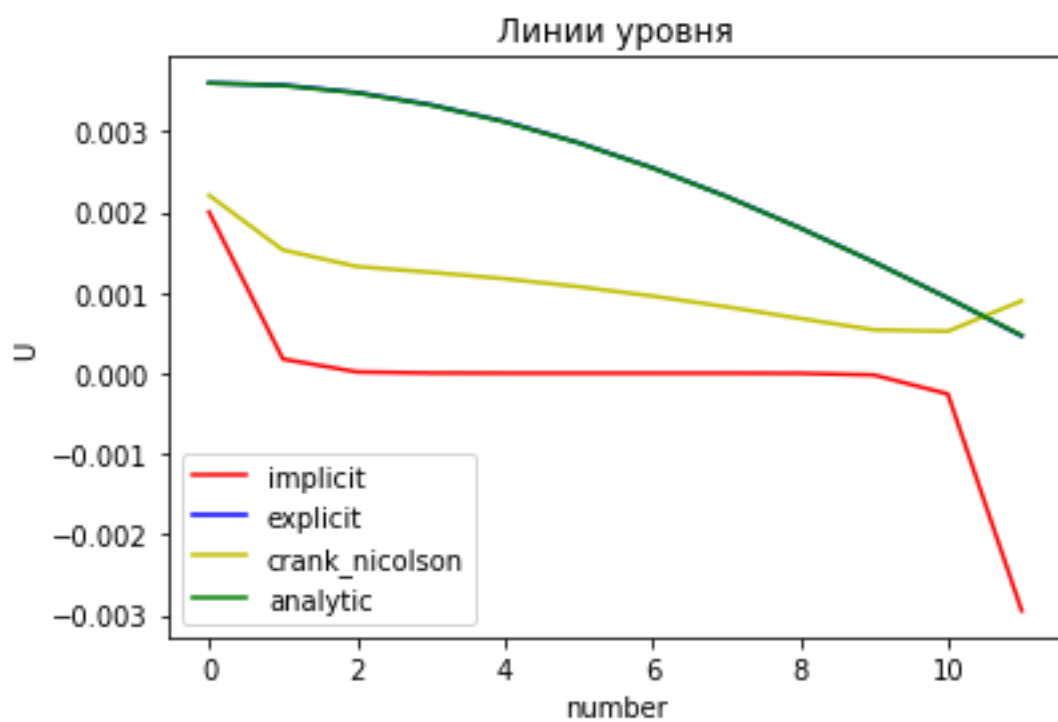
Схема Кранка Николсона подразумевает объединение в себе двух предыдущих схем, в следствии чего при подборе необходимого коэффициента, достигается наименьшая погрешность.

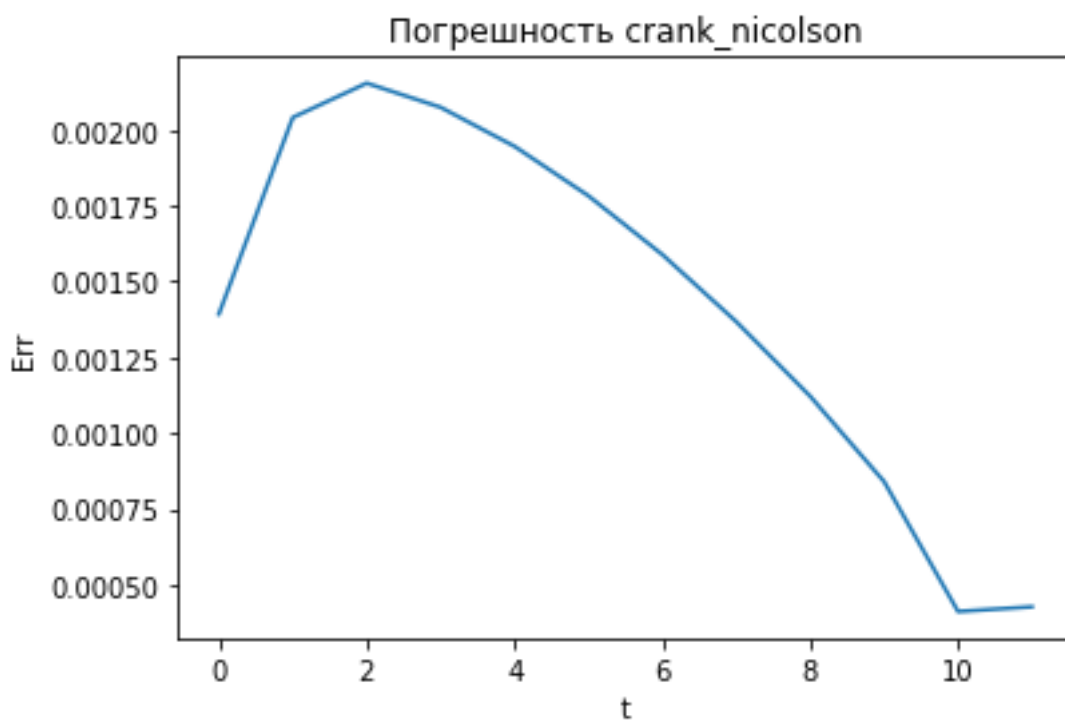
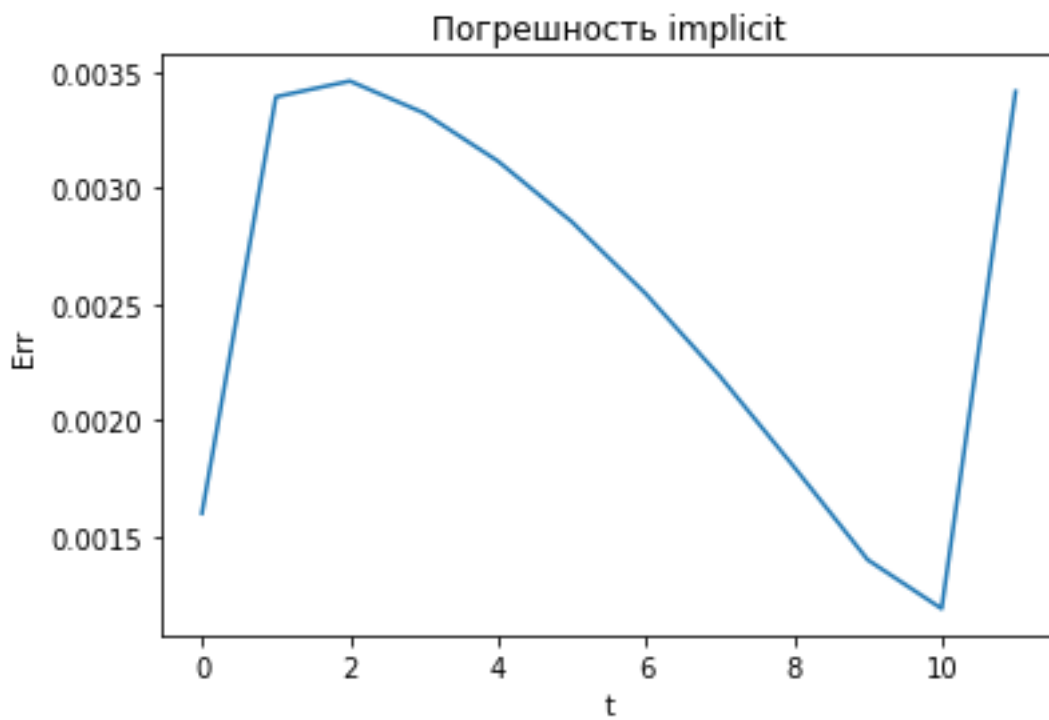
$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \theta a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + (1 - \theta) a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}$$

3. Результаты

В качестве результата я получаю графики линий уровня U . Они наиболее наглядно показывают точность методов, и в каких промежутках какой метод будет эффективен, а какой нет. Также я вывожу графики модуля ошибки каждого метода.

Исследование зависимости погрешности от параметров находится в одном файле с исходным кодом.





4. Выводы

Конечно-разностные схемы для решения уравнений параболического типа имеют высокую точность и, при достаточной мелкости τ , способны достигать настолько маленькую погрешность, что ей можно будет пренебречь при решении реальных задач математической физики.