Московский авиационный институт

(Национальный исследовательский университет)

Институт: «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»
Дисциплина: «Численные методы»

Отчёт по лабораторной работе №4

ВЫПОЛНИЛ:
Студент: Стрыгин Д.Д.
Группа: 406
Вариант: 6

Москва, 2022

1. Постановка задачи

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y.

Вариант 6

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \sinh(y)\exp(-3at),$$

$$u_x(\frac{\pi}{4}, y, t) = -2\sinh(y)\exp(-3at),$$

$$u_y(x, 0, t) = \cos(2x)\exp(-3at),$$

$$u(x, \ln 2, t) = \frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x)\sinh(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x)\sinh(y)\exp(-3at)$.

2. Методология

Метод переменных направлений

В схеме метода переменных направлений (МПН), как и во всех методах расщепления, шаг по времени τ разбивается на число независимых пространственных переменных (в двумерном случае - на два). На каждом дробном временном слое один из пространственных дифференциальных операторов аппроксимируется неявно (по соответствующему координатному направлению осуществляются скалярные прогонки), а остальные явно. На следующем дробном шаге следующий по порядку дифференциальный оператор аппроксимируется неявно, а остальные – явно и т.д.

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^{k}}{\tau/2} = \frac{a}{h_1^2}\left(u_{i+1\,j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1\,j}^{k+1/2}\right) + \frac{a}{h_2^2}\left(u_{ij+1}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{ij-1}^{k}\right) + f_{ij}^{k+1/2},$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2} = \frac{a}{h_1^2}\left(u_{i+1\,j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1\,j}^{k+1/2}\right) + \frac{a}{h_2^2}\left(u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}\right) + f_{ij}^{k+1/2}.$$

Метод дробных шагов

В отличие от МПН метод дробных шагов (МДШ) использует только неявные конечно-разностные операторы, что делает его абсолютно устойчивым в задачах, не

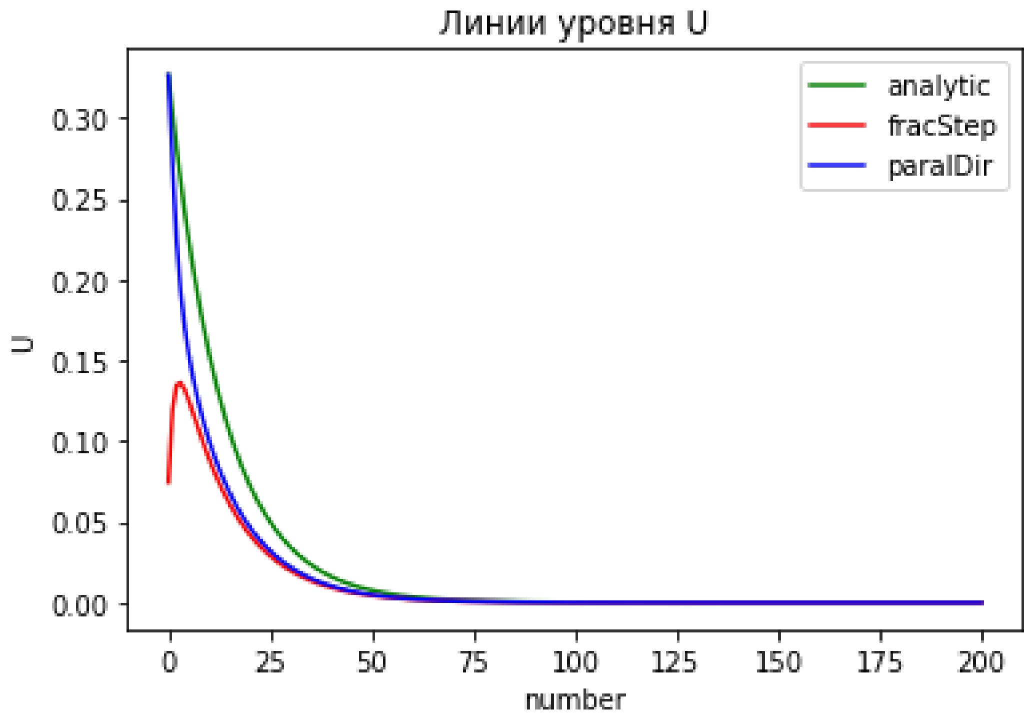
содержащих смешанные производные. Он обладает довольно значительным запасом устойчивости и в задачах со смешанными производными.
С помощью чисто неявной подсхемы осуществляются скалярные прогонки в направлении оси x в количестве, равном J −1, в результате чего получаем сеточную функцию $U_{ij}^{k+1/2}$. На втором дробном шаге по времени с помощью подсхемы осуществляются скалярные прогонки в направлении оси y в количестве, равном I −1 , в результате чего получаем сеточную функцию U_{ij}^{k+1}.

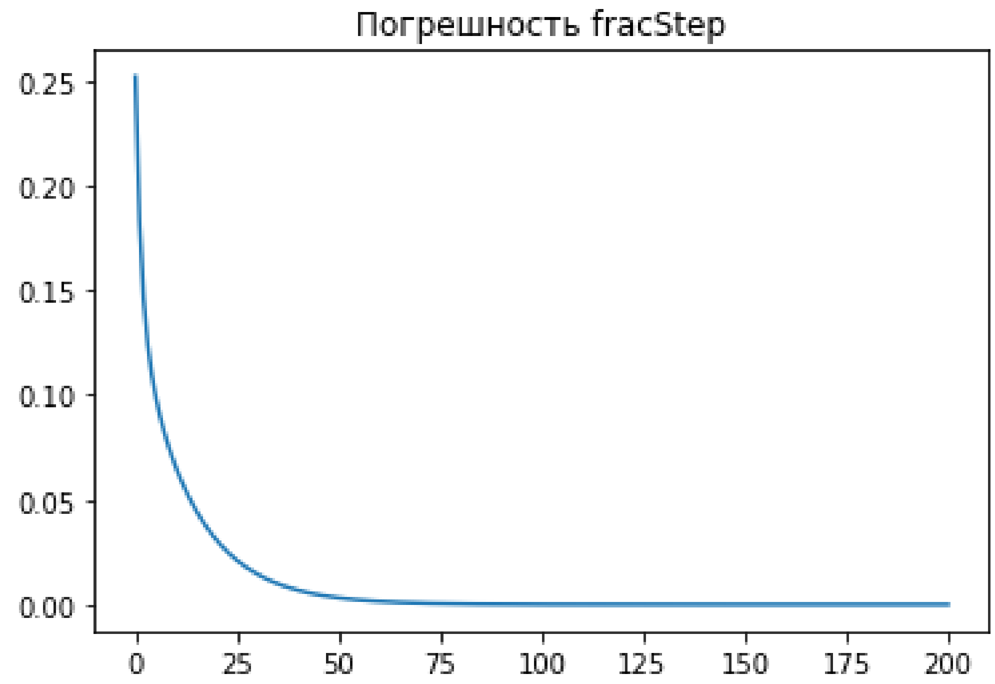
$$\frac{u_{ij}^{k+1/2}-u_{ij}^{k}}{\tau}=\frac{a}{h_1^2}\left(u_{i+1j}^{k+1/2}-2u_{ij}^{k+1/2}+u_{i-1j}^{k+1/2}\right)+\frac{f_{ij}^{k}}{2},$$

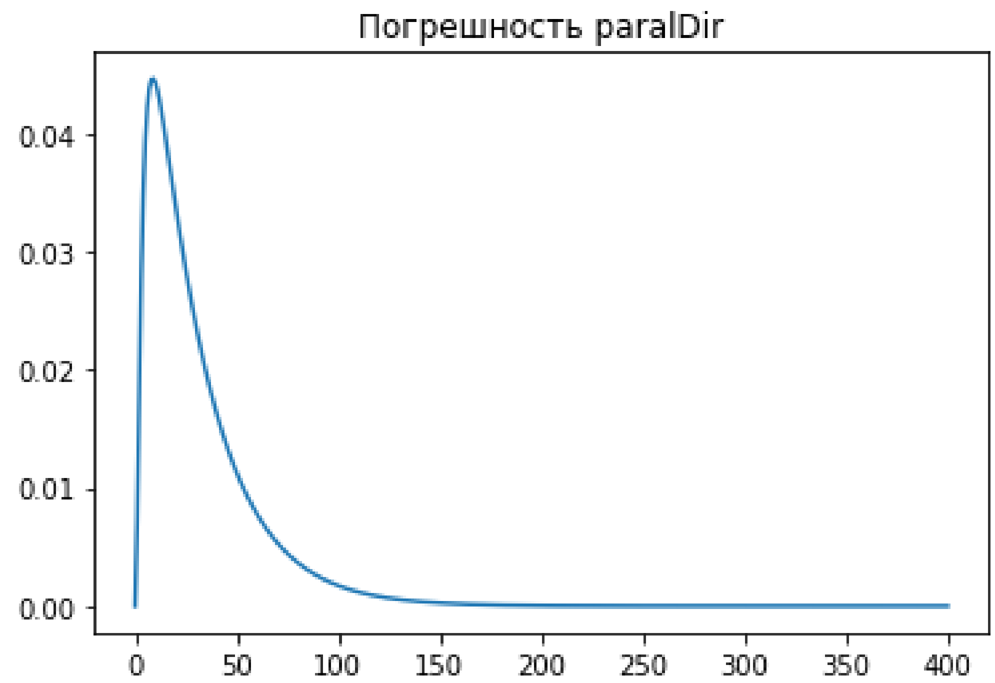
$$\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k+1/2}}{\tau}=\frac{a}{h_2^2}\left(u_{i\,j+1}^{k+1}-2u_{ij}^{k+1}+u_{i\,j-1}^{k+1}\right)+\frac{f_{ij}^{k+1}}{2}.$$

3. Результаты

В качестве результата я получаю графики линий уровня U. Они наиболее наглядно показывают точность методов, и в каких промежутках какой метод будет эффективен, а какой нет. Также я вывожу графики модуля ошибки каждого метода. Исследование зависимости погрешности от параметров находится в одном файле с исходным кодом.







4. Выводы

Как видно на графиках погрешности, МДШ на своём старте имеет высокую погрешность, но она монотонно убывает, стремясь к 0, и уже к 0.25 пути имеет приемлемо низкий показатель. МПН же в 0 точке имеет краевое значение функций, однако уже на следующем шаге погрешность кратковременно возрастает, однако после скачка, также как и МДШ, монотонно стремится к 0. Из исследования погрешности можно сделать вывод, что она зависит от мелкости параметров hx и hy, а значит при их значении, стремящемся к 0, оба метода получат результат с минимальной погрешностью, которой уже можно будет пренебречь.