Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Институт: «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»
Дисциплина: «Численные методы»

Отчёт по лабораторной работе №3

ВЫПОЛНИЛ:
Студент: Стрыгин Д.Д.
Группа: 406
Вариант: 6

Москва, 2022

1. Постановка задачи

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y.

Вариант 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$u(0, y) = y,$
$u(1, y) = 1 + y,$

$u(x,0) = x,$

$u(x,1) = 1 + x.$

Аналитическое решение: $U(x, y) = x + y$.

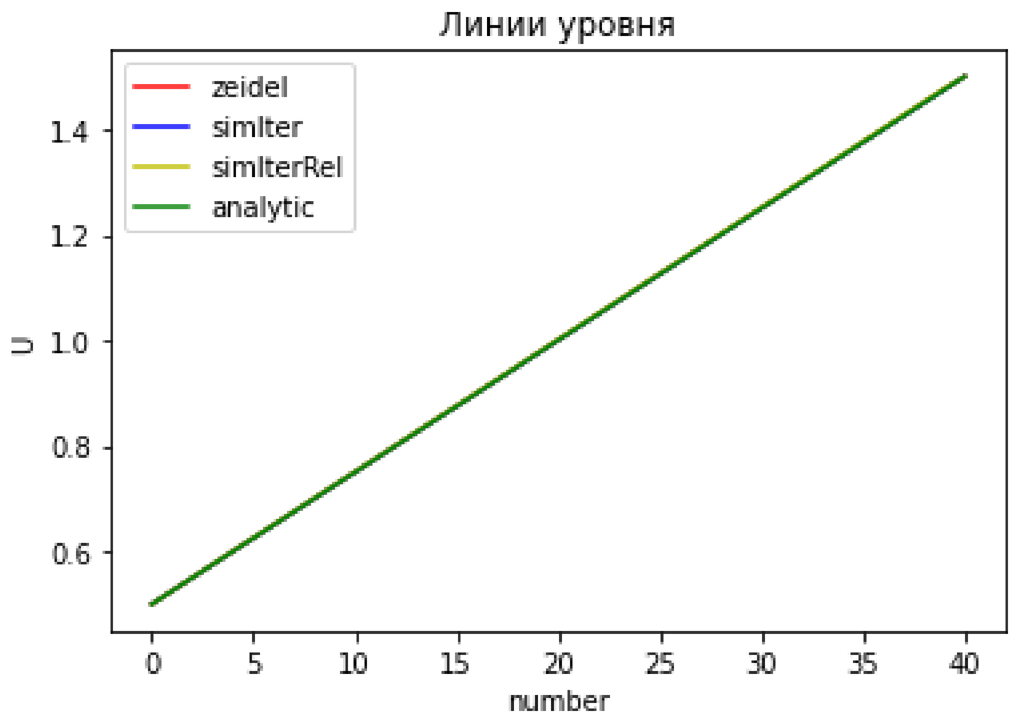
2. Методология

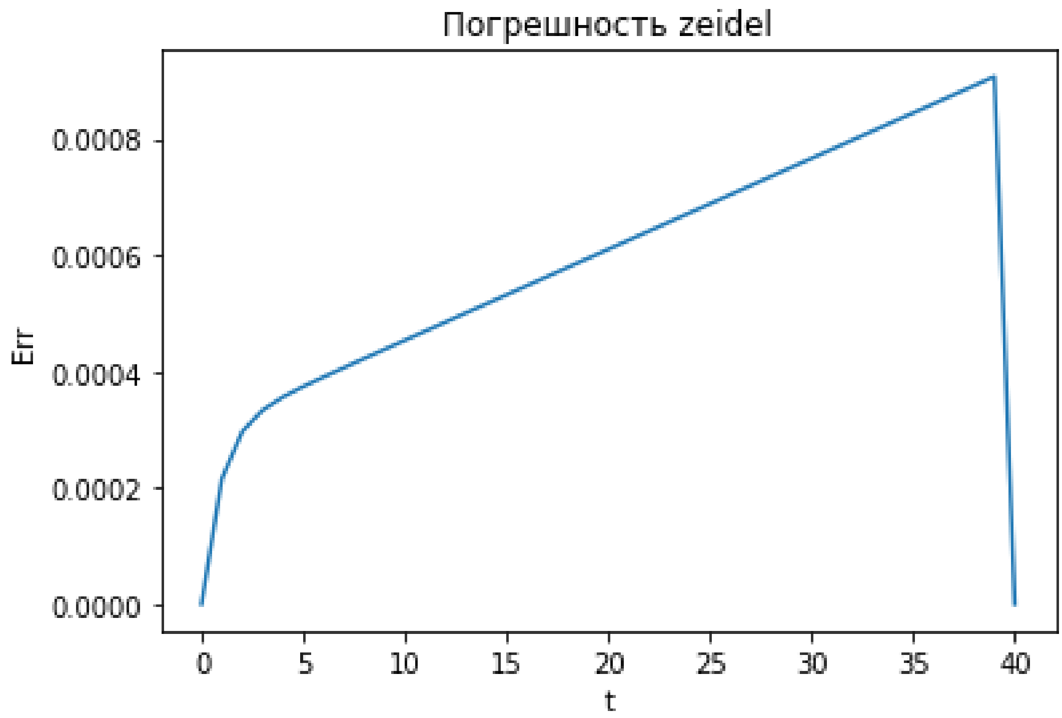
При решении эллиптических задач также используется конечно-разностная схема, однако теперь полученные СЛАУ имеют пятидиагональный вид. Для решения СЛАУ такого типа используют итерационные методы: Зейделя, простых итераций, простых итераций с верхней релаксацией.
Метод простых итераций - способ численного решения математических задач. Его суть – нахождение алгоритма поиска по известному приближению (приближенному значению) искомой величины следующего, более точного приближения. Применяется в случае, когда последовательность приближений по указанному алгоритму сходится.
Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода итераций. Основная его идея заключается в том, что при вычислении (k + 1)-го приближения неизвестной xi учитываются уже вычисленные ранее (k + 1)-е приближения неизвестных x1, x2, …, xi - 1.
В методе верхней релаксации добавляется параметр w > 1, так что

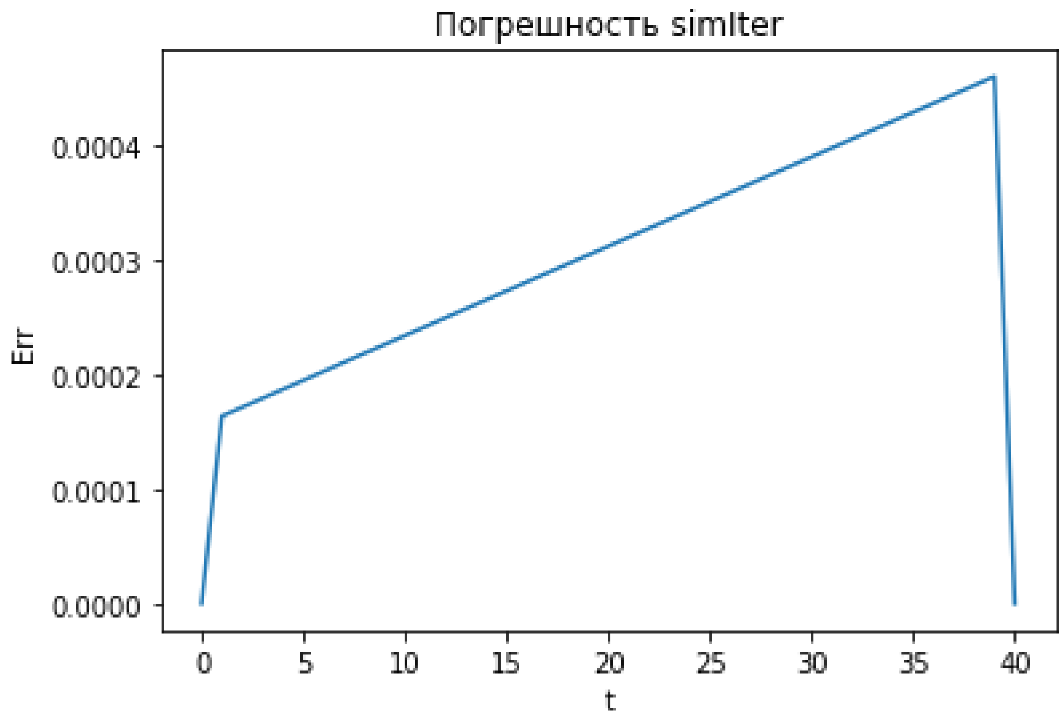
$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\left(\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j^{(k)} + c_i\right), (i = 1,\ldots,n)$$

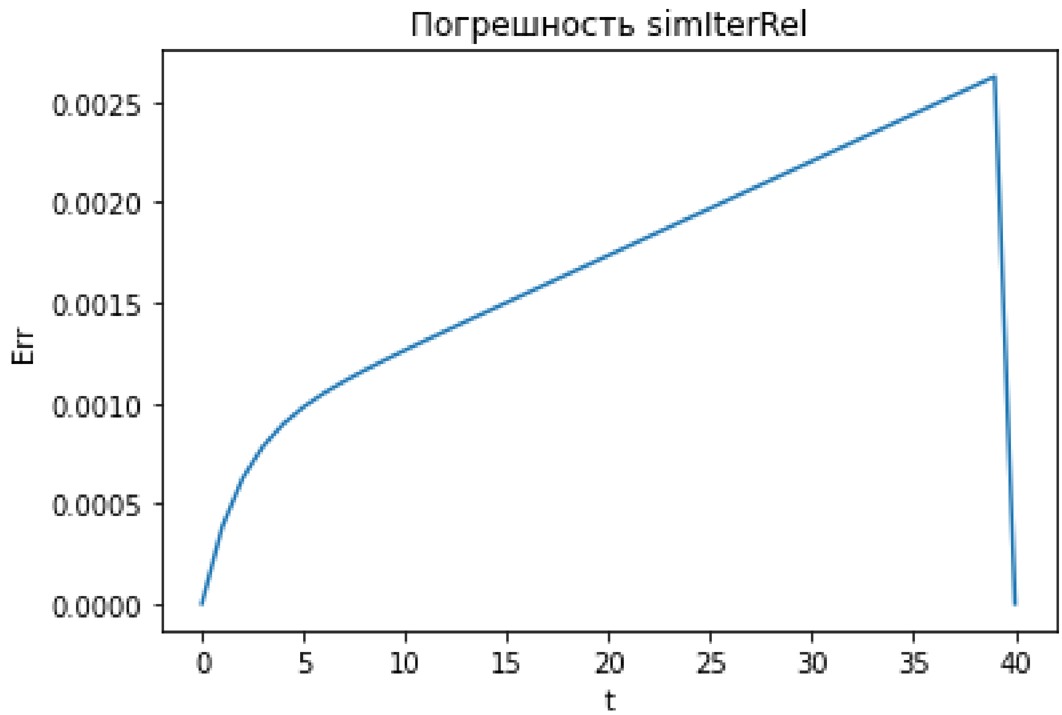
3. Результаты

В качестве результата я получаю графики линий уровня U. Они наиболее наглядно показывают точность методов, и в каких промежутках какой метод будет эффективен, а какой нет. Также я вывожу графики модуля ошибки каждого метода. Исследование зависимости погрешности от параметров находится в одном файле с исходным кодом.


Линии уровня
zeidel
simIter
simIterRel
analytic
U
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0
5
10
15
20
25
30
35
40
number


Погрешность zeidel
Err
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0.0000
0
5
10
15
20
25
30
35
40
t





4. Выводы

Погрешность итерационных методов задаётся не только мелкостью шагов, но и желаемой точностью пользователя (eps), до которой за максимальное n количество итераций должны прийти алгоритмы. Исследование зависимости погрешности от мелкости hx и hy также приводит к уменьшению погрешности при уменьшении мелкости шагов.