

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)» (МАИ)

Кафедра 805
«Математическая кибернетика»

Отчет

по лабораторной работе №3

на тему «Численные методы поиска безусловного экстремума
ФМП»

Выполнил
студент группы М8О-306Б-19

Стрыгин Д.Д.

Проверила доцент каф. 805

Лунева С.Ю.

2022

Цель: изучение методов безусловной минимизации на примере квадратичной ф-ии, не имеющей явно выраженной обратной структуры

Постановка задачи

Дано: $f(X) = x^2 + xy + 2y^2 - x + 11y$ - квадратичная ф-ия 2-х переменных

$$NL = 11$$

$$NG = 6$$

Требуется найти: $f(x) \rightarrow \min_{x \in R^n}$

Аналитическое решение задачи с использованием аппарата необходимых и достаточных условий экстремума

1 Запишем градиент целевой ф-ии: $\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T = (2x + y - 1, x + 4y + 11)^T$

2 Запишем необходимые условия экстремума:
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

3. Решим полученную систему, решение системы - координаты стационарной точки $X^* = (x^*, y^*)^T$

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 4y + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + y - 1 - (x + 4y + 11) \cdot 2 = -7y - 23 = 0 \Rightarrow y = -\frac{23}{7}$$

$$2x - \frac{23}{7} - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{7}$$

$$X^* = \left(\frac{15}{7}, -\frac{23}{7} \right)^T$$

4. Составим матрицу вторых производных (матрицу Гессе) и вычислим её в точке $X^* = (x^*, y^*)^T$:

$$H(X^*) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Определим знакоопределённость матрицы по критерию Сильвестра.

Для этого найдём главные миноры матрицы: $\Delta_1 = h_{11} = 2$
 $\Delta_2 = \det(H(X^*)) = 7$

Т.к. $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 > 0$, то матрица положительно определена и, следовательно, $x^* = (x^*, y^*)^T$ - безусловный локальный минимум

Ответ: получена точка $x^* = (\frac{15}{7}, -\frac{23}{7})$ - безусловный локальный минимум ф-ии, $f(x^*) = \frac{-134}{7} = -19\frac{1}{7}$

Численное решение задачи с точностью $\epsilon = 0.01$ из начальной точки $X_0 = (-1.11, 2.6)$

Методы 1-го порядка:

метод градиентного спуска (предельное число итераций $N = 5$)

Расчет окончен

Сохранить протокол

Выбрать другой метод

Выход

Протокол расчета

Выполнил: Садаков Стрыгин, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 1x_1 + 11x_2 + 0$

Метод градиентного спуска

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 5$, Количество итераций: 5

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2)\ $
0	0.3	-1.11	2.6	41.5761	-0.62	20.29	20.29947
1	0.225	-0.924	-3.487	-9.0389	-6.335	-3.872	7.42459
2	0.6	0.50138	-2.6158	-16.65048	-2.61305	1.03817	2.81173
3	0.6	2.06921	-3.2387	-19.13648	-0.10029	0.11439	0.15213
4	0.24	2.12938	-3.30734	-19.14145	-0.04857	-0.09996	0.11114
5	0	2.14104	-3.28335	-19.14285	-0.00127	0.00766	0.00776

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00299$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 1.0E-5$$

метод покоординатного спуска (предельное число итераций $N = 5$)

Расчет окончен

Сохранить протокол

Выбрать другой метод

Выход

Протокол расчета

Выполнил: Садаков Стрыгин, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 1x_1 + 11x_2 + 0$

Метод покоординатного спуска

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 5$, Количество итераций: 4

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2)\ $
0	0.3	-1.11	2.6	41.5761	-0.62	20.29	20.29947
1	0.475	-1.11	-3.487	-7.82599	-6.707	-4.058	7.83908
2	0.23	2.07583	-3.487	-19.04384	-0.33535	-0.87217	0.93442
3	0.475	2.07583	-3.2864	-19.13832	-0.13475	-0.06977	0.15174
4	0	2.13983	-3.2864	-19.14284	-0.00674	-0.00577	0.00887

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.0031$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 1.0E-5$$

метод наискорейшего градиентного спуска (предельное число итераций $N = 10$)

Расчет окончен

Сохранить протокол

Выбрать другой метод

Выход

Протокол расчета

Выполнил: Садаков Стрыгин, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 1x_1 + 11x_2 + 0$

Метод градиентного наискорейшего спуска

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 10$, Количество итераций: 8

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2)\ $
0	0.25396	-1.11	2.6	41.5761	-0.62	20.29	20.29947
1	0.48501	-0.95255	-2.55275	-10.75567	-5.45784	-0.16354	5.46029
2	0.25396	1.69456	-2.47343	-17.98642	-0.08431	2.80084	2.80211
3	0.48481	1.71597	-3.18472	-18.98334	-0.75278	-0.0229	0.75312
4	0.25396	2.08093	-3.17362	-19.12083	-0.01176	0.38647	0.38664
5	0.48501	2.08391	-3.27176	-19.13982	-0.10393	-0.00313	0.10398
6	0.25396	2.13432	-3.27024	-19.14244	-0.0016	0.05335	0.05337
7	0.48472	2.13473	-3.28379	-19.1428	-0.01433	-0.00044	0.01434
8	0	2.14168	-3.28358	-19.14285	-0.00023	0.00736	0.00736

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00244$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 1.0E-5$$

метод Гаусса-Зейделя (предельное число итераций $N = 10$)

Расчет окончен

Сохранить протокол

Выбрать другой метод

Выход

Протокол расчета

Выполнил: Садаков Стрыгин, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 1x_1 + 11x_2 + 0$

Метод Гаусса-Зейделя

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 10$, Количество итераций: 8

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2)\ $
0	0.24997	-1.11	2.6	41.5761	-0.62	20.29	20.29947
1	0.50001	-1.11	-2.47191	-9.88441	-5.69191	0.00238	5.69191
2	0.24997	1.73601	-2.47191	-17.98386	0.00011	2.84839	2.84839
3	0.50001	1.73601	-3.18392	-18.99802	-0.7119	0.00033	0.7119
4	0.24997	2.09197	-3.18392	-19.12472	1.0E-5	0.35629	0.35629
5	0.50001	2.09197	-3.27298	-19.14059	-0.08905	4.0E-5	0.08905
6	0.24997	2.13649	-3.27298	-19.14257	0	0.04457	0.04457
7	0.50001	2.13649	-3.28412	-19.14282	-0.01114	1.0E-5	0.01114
8	0	2.14206	-3.28412	-19.14285	0	0.00557	0.00557

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00178$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 0$$

метод сопряженных градиентов (предельное число итераций $N = 2$)

Расчет окончен

Сохранить протокол

Выбрать другой метод

Выход

Протокол расчета

Выполнил: Садаков Стрыгин, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 1x_1 + 11x_2 + 0$

Метод сопряженных градиентов

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 2$, Количество итераций: 2

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2)\ $
0	0.25402	-1.11	2.6	41.5761	-0.62	20.29	20.29947
1	0.56239	-0.95251	-2.55414	-10.75567	-5.45915	-0.16905	5.46176
2	0	2.14292	-3.28514	-19.14286	0.0007	0.00237	0.00248

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00058$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 0$$

Методы 2-го порядка:

метод Ньютона (предельное число итераций $N = 1$)

Расчет окончен

Сохранить протокол

Выбрать другой метод

Выход

Протокол расчета

Выполнил: Садаков Стрыгин, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 1x_1 + 11x_2 + 0$

Метод Ньютона

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 1$, Количество итераций: 1

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2)\ $
0	0	-1.11	2.6	41.5761	-0.62	20.29	20.29947
1	0	2.14286	-3.28571	-19.14286	-0	0	0

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 0$$

метод Ньютона с переменным шагом (метод Ньютона-Рафсона) при $t_0 \neq 1$ (предельное число итераций $N = 5$)

Расчет окончен

Сохранить протокол

Выбрать другой метод

Выход

Протокол расчета

Выполнил: Садаков Стрыгин, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 1x_1 + 11x_2 + 0$

Метод Ньютона-Рафсона

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 5$, Количество итераций: 4

$N_{\text{ит}}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\ \nabla f(x_1, x_2)\ $
0	0.9	-1.11	2.6	41.5761	-0.62	20.29	20.29947
1	0.9	1.81757	-2.69714	-18.53567	-0.062	2.029	2.02995
2	0.9	2.11033	-3.22686	-19.13679	-0.0062	0.2029	0.20299
3	0.9	2.1396	-3.27983	-19.1428	-0.00062	0.02029	0.0203
4	0	2.14253	-3.28513	-19.14286	-6.0E-5	0.00203	0.00203

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00067$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 0$$

Методы, не требующие вычисления производных (0-го порядка):

метод случайного поиска (предельное число итераций $N = 8$)

Расчет окончен

Сохранить протокол

Выбрать другой метод

Выход

Протокол расчета

Выполнил: Садаков Стрыгин, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 1x_1 + 11x_2 + 0$

Метод случайного поиска

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 8$, Количество итераций: 6

$N_{\text{ит}}$	радиус r	коэф-т. k	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	6.5	1	-1.11	2.6	41.5761
1	0.17	1	1.9692	-3.12438	-19.08866
2	0.07	1	2.04692	-3.27558	-19.13442
3	0.02	1	2.10821	-3.30939	-19.13972
4	0.015	1	2.119	-3.29255	-19.14203
5	0.015	1	2.13359	-3.29604	-19.14246
6			2.14308	-3.28442	-19.14285

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00132$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 0$$

метод конфигураций (метод Хука-Дживса) (предельное число итераций $N = 8$)

Расчет окончен

Сохранить протокол

Выбрать другой метод

Выход

Протокол расчета

Выполнил: Садаков Стрыгин, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 1x_1 + 11x_2 + 0$

Метод конфигураций

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 8$, Количество итераций: 7

$N_{\text{ит}}$	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	dx_1	dx_2	коэф-т k
0	-1.11	2.6	41.5761	3	6	
1	-1.11	-3.4	-8.1639	3	3.5	0
2	1.89	-3.4	-19.0239	0.2	0.2	0
3	2.09	-3.2	-19.1299	0.05	0.05	0
4	2.09	-3.25	-19.1394	0.05	0.05	0
5	2.14	-3.3	-19.1424	0.03	0.03	0
6	2.14	-3.27	-19.1424	0.02	0.02	0
7	2.14	-3.29	-19.1428	0.01	0.01	0

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.00515$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 6.0E-5$$

метод деформируемого многогранника (метод Нелдера-Мида) (предельное число итераций N = 8)

Расчет окончен

Сохранить протокол

Выбрать другой метод

Выход

Протокол расчета

Выполнил: Садаков Стрыгин, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 1x_1 + 11x_2 + 0$

Метод Нелдера-Мида

Точность метода: 0.01, $N_{\max} = 8$, Количество итераций: 8

$N_{\text{ит}}$	α	операция	коэффициент	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	1	растяжение	2.8	-3 -1.11 -4	-2 2.6 2	4 41.5761 42
1	1	редукция		3.391 -3 -1.11	-4.46 -2 2.6	-16.29278 4 41.5761
2	1	редукция		3.391 0.1955 1.1405	-4.46 -3.23 -0.93	-16.29278 -15.45294 -9.40062
3	1	редукция		2.26575 1.79325 3.391	-2.695 -3.845 -4.46	-18.35727 -18.1995 -16.29278
4	1	редукция		2.0295 2.82837 2.26575	-3.27 -3.5775 -2.695	-19.13129 -18.70267 -18.35727
5	1	редукция		2.0295 2.42894 2.14762	-3.27 -3.42375 -2.9825	-19.13129 -19.0624 -18.95751
6	1	редукция		2.22922 2.0295 2.08856	-3.34688 -3.27 -3.12625	-19.1332 -19.13129 -19.09771
7	1	редукция		2.12936 2.15889 2.22922	-3.30844 -3.23656 -3.34688	-19.14134 -19.13698 -19.1332
8				2.14412 2.12936 2.17929	-3.2725 -3.30844 -3.32766	-19.14249 -19.14134 -19.13954

Критерий окончания выполнен

$$\|x - x^*\| = 0.01327$$

$$|f(x) - f(x^*)| = 0.00037$$

Циркуль	Линейка 220	— Компасная линия
Резиновый шпатель	30 : 500	○ Скругленная поверхность
Самодельная шпатель	11	△ Неправильная поверхность

