Московский авиационный институт

(Национальный исследовательский университет)

Институт: «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»
Дисциплина: «Численные методы»

Отчёт по лабораторной работе №2

ВЫПОЛНИЛ:
Студент: Стрыгин Д.Д.
Группа: 406
Вариант: 6

Москва, 2022

1. Постановка задачи

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h.

Вариант 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 2u,$$

$$u(0,t) = \cos(2t),$$

$$u(\frac{\pi}{2}, t) = 0,$$

$$u(x,0) = \exp(-x)\cos x,$$

$$u_t(x,0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-x)\cos x\cos(2t)$

2. Методология

Явная и неявная схемы крест представляют собой системы уравнений, краевые решения которых заполняются из начальных данных, а значения в середине заполняются по средству вычисления уравнений с одной или несколькими неизвестными.

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau^2 + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1,2,\ldots$$

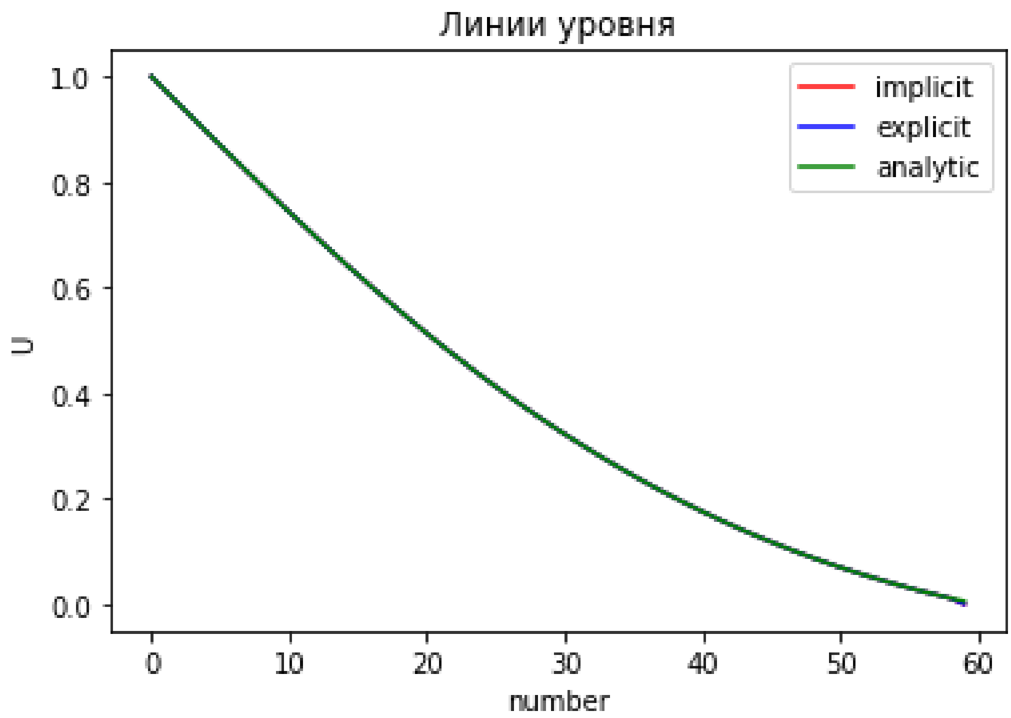
Явная схема

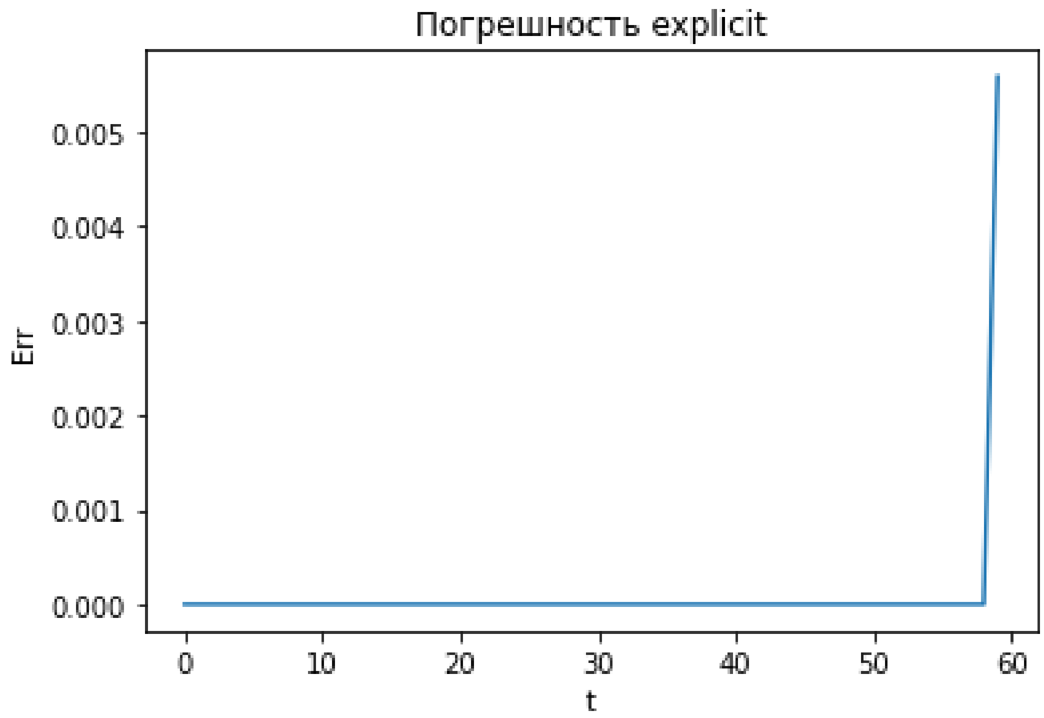
$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1,2,\ldots$$

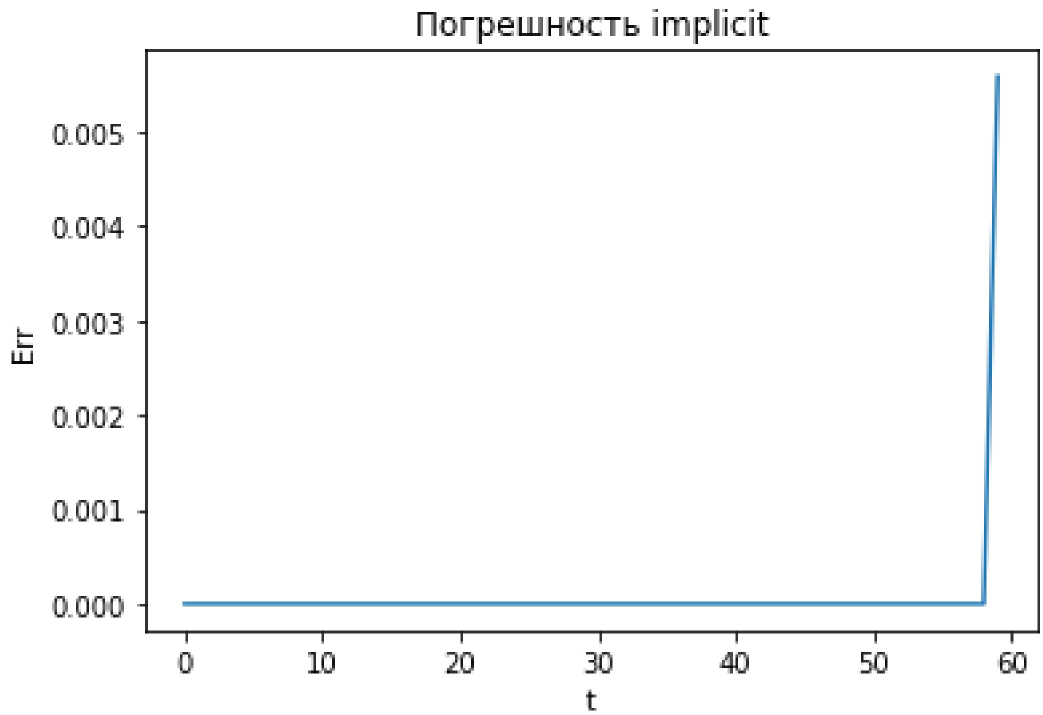
Неявная схема

3. Результаты

В качестве результата я получаю графики линий уровня U. Они наиболее наглядно показывают точность методов, и в каких промежутках какой метод будет эффективен, а какой нет. Также я вывожу графики модуля ошибки каждого метода. Исследование зависимости погрешности от параметров находится в одном файле с исходным кодом.


Линии уровня
implicit
explicit
analytic
U
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
10
20
30
40
50
60
number


Погрешность explicit
Err
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0.000
0
10
20
30
40
50
60
t



4. Выводы

Схемы крест для решения уравнений гиперболического типа имеют высокую точность и, при достаточной мелкости tau, способны достигать настолько маленькую погрешность, что ей можно будет пренебречь при решении реальных задач математической физики.