

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Дисциплина: Архитектура ЭВМ

Отчет

по домашней работе №1

«Построение логических схем и минимизация логических функций»

Выполнил(а): Белозоров Денис Сергеевич

Номер ИСУ: 334876

студ. гр. М3139

Санкт-Петербург

2021

Цель работы: моделирование простейших логических схем и минимизация логических функций методом карт Карно

Инструментарий и требования к работе: работа выполняется в logisim.

Теоретическая часть

Карта карно - способ представления булевой функции, по которому можно получить упрощенную запись этой функции. Он прост для построения вручную и является "визуальным" методом минимализации.

Карта Карно позволяет получить минимальные ДНФ\КНФ функции за счет следующих логических преобразований:

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) = a \wedge b$$

$$(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) = a \vee b$$

Карта Карно представима некоторым геометрическим объектом. В ней некоторый конъюнкт можно представить вершиной объекта, и ребрами он связан со всеми конъюнктами, отличающимися только отрицанием одной переменной, т. е. соседними в коде Грея.

Так, карта Карно от 4 аргументов может быть представлена в виде куба (См. рисунок 1).

X_1	X_2	X_3	$f(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

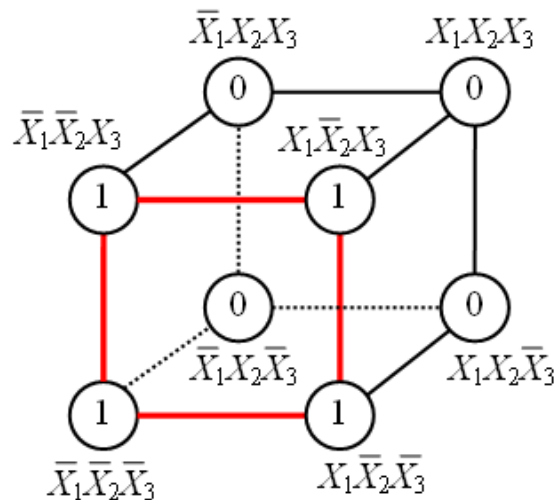


Рисунок 1 - представление карты Карно в виде куба

Карту же, например, от 6 аргументов представить в виде геометрической фигуры довольно сложно. Можно отобразить её в виде трехмерного массива, где каждый элемент имеет 6 соседних (первые и последние слои переходят друг в друга). (См. рисунок 2).

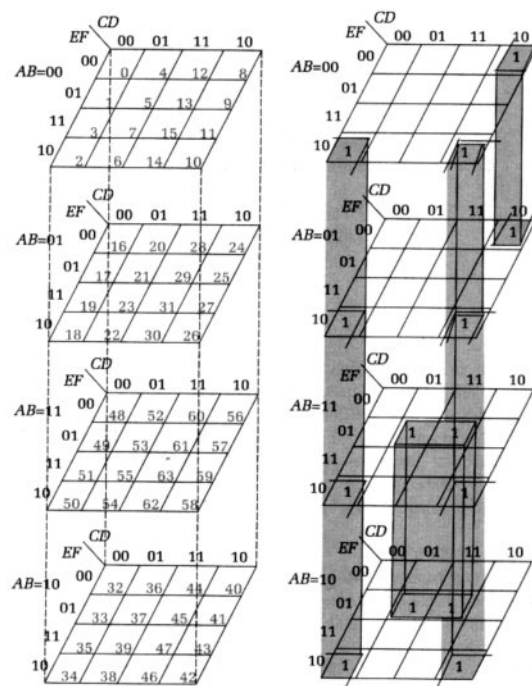


Рисунок 2 - представление карты Карно от шести аргументов

Построение карты Карно достаточно тривиально из таблицы истинности или вектора функции:

Аргументы делятся на две последовательные части, записывается отношение каждой вариации первой части аргументов к другой, т. е:

$$\text{map}[x_1, x_2, \dots, x_k][x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+m}] = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}).$$

Для того, чтобы вышеописанные правила "уничтожения" переменной выполнялись, соседние в таблице значения должны отличаться не более, чем на одно значение. Такой записи соответствует код Грея. (см. Рисунок 3).

		w	w	$\neg w$	$\neg w$
		z	$\neg z$	$\neg z$	z
y	x				
y	$\neg x$		1	1	
$\neg y$	$\neg x$		1	1	
$\neg y$	x			1	1

Рисунок 3 - карта Карно от 4 аргументов

Далее следует покрыть единицы\нули (единицы для получения ДНФ и нули для получения КНФ) прямоугольниками наибольшей площадью с

длинами сторон равными степени двойки. Пересечение прямоугольников не влияет на результат. (См. рисунок 4).

Далее для каждого прямоугольника определим переменные, значения которых не менялись для всех элементов в этом прямоугольнике, запишем в ответ.

		w	w	$\neg w$	$\neg w$
		z	$\neg z$	$\neg z$	z
y	x				
y	$\neg x$		1	1	
$\neg y$	$\neg x$		1	1	1
$\neg y$	x			1	1

Рисунок 4 - выделение прямоугольников на карте Карно

ДНФ в этом случае равен $(\neg Z \wedge \neg X) \vee (\neg W \wedge \neg Y)$

Такой метод однозначно работает для функций от ≤ 4 аргументов. При большем числе аргументов карта Карно имеет многомерный вид, и тогда в плоской вариации происходят “фокусы”.

Например, в карте Карно от 6 аргументов: (См. рисунок 5).

$X_1X_2X_3 \setminus X_4X_5X_6$	000	001	011	010	110	111	101	100
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
110	0	0	0	0	0	0	0	0
111	0	0	0	1	1	1	1	0
101	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0

Рисунок 5 - пример карты Карно от шести аргументов

Прямоугольник размерами 1x4 соответствует условиям группирования, однако так как эта группа будет расположена сразу на нескольких слоях, такой выбор недопустим.

При этом возможна такая ситуация: (См. рисунок 6).

$X_1X_2X_3 \setminus X_4X_5X_6$	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1	1	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
110	0	0	0	0	0	0	0	0
111	0	0	1	0	0	1	0	0
101	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0

$K_2: X_1X_2X_3X_5X_6$

Рисунок 6 - иллюстрация возможного выделения на карте Карно

Такую группу можно получить, проведя “прямую” в третьей плоскости.

Практическая часть

Вариант	ФИО	Вектор функция $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$	Схема С*НФ	Схема М*НФ
4	Белозоров Денис Сергеевич	010100101101001 1	СДНФ	МКНФ

2. Таблица истинности для заданной вектор-функции

x_3	x_2	x_1	x_0	
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0

1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Таблица 1 - таблица истинности заданной вектор-функции

3. ЛФ в СКНФ и СДНФ

Построим СКНФ и СДНФ по таблице истинности. (См. таблица 1).

СКНФ:

$$(x_3 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge$$

$$(x_3 \vee x_2 \vee \neg x_1 \vee x_0) \wedge$$

$$(x_3 \vee \neg x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge$$

$$(x_3 \vee \neg x_2 \vee x_1 \vee \neg x_0) \wedge$$

$$(x_3 \vee \neg x_2 \vee \neg x_1 \vee \neg x_0) \wedge$$

$$(\neg x_3 \vee x_2 \vee \neg x_1 \vee x_0) \wedge$$

$$(\neg x_3 \vee \neg x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge$$

$$(\neg x_3 \vee \neg x_2 \vee x_1 \vee \neg x_0)$$

СДНФ:

$$(\neg x_3 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_1 \wedge x_0) \vee$$

$$(\neg x_3 \wedge \neg x_2 \wedge x_1 \wedge x_0) \vee$$

$$(\neg x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge \neg x_0) \vee$$

$$(x_3 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_0) \vee$$

$$(x_3 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_1 \wedge x_0) \vee$$

$$(x_3 \wedge \neg x_2 \wedge x_1 \wedge x_0) \vee$$

$$(x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge \neg x_0) \vee$$

$$(x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_0)$$

4. Логическая схема СДНФ

Логическая схема: (См. рисунок 7).

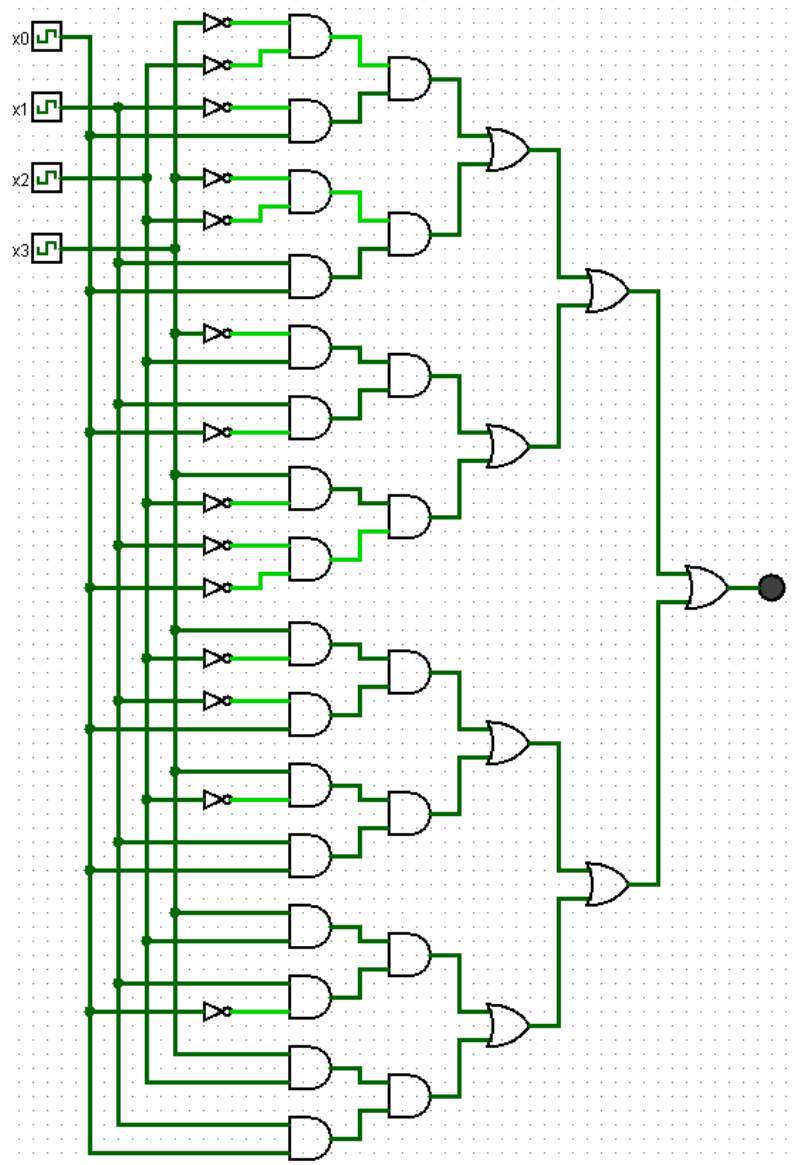


Рисунок 7 - логическая схема СДНФ

5. Карты Карно, описание построения и ЛФ в МКНФ и МДНФ

По таблице истинности построим карту Карно: (См. таблица 2).

$\begin{matrix} / & x_1x_0 \\ x_3x_2 \end{matrix}$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	1
11	0	0	1	1
10	1	1	1	0

Таблица 2 - карта Карно

Получим МДНФ: (См. рисунок 8).

$\begin{matrix} / & x_1x_0 \\ x_3x_2 \end{matrix}$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	1
11	0	0	1	1
10	1	1	1	0

Рисунок 8 - иллюстрация построения МДНФ

МДНФ:

$(x_3 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_1) \vee$ - фиолетовый прямоугольник

$(\neg x_2 \wedge x_0) \vee$ - красный прямоугольник

$(x_3 \wedge x_2 \wedge x_1) \vee$ - зеленый прямоугольник

$(x_2 \wedge x_1 \wedge \neg x_0)$ - синий прямоугольник

Получим МКНФ: (См. рисунок 9).

x_3x_2 / x_1x_0	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	1
11	0	0	1	1
10	1	1	1	0

Рисунок 9 - иллюстрация построения МКНФ

МКНФ:

$(x_3 \vee x_2 \vee x_0) \wedge$ - синий прямоугольник

$(-x_2 \vee x_1) \wedge$ - красный прямоугольник

$(x_3 \vee -x_2 \vee -x_0) \wedge$ - фиолетовый прямоугольник

$(x_2 \vee -x_1 \vee x_0)$ - оранжевый прямоугольник

6. Логическая схема МКНФ

Логическая схема: (См. рисунок 10).

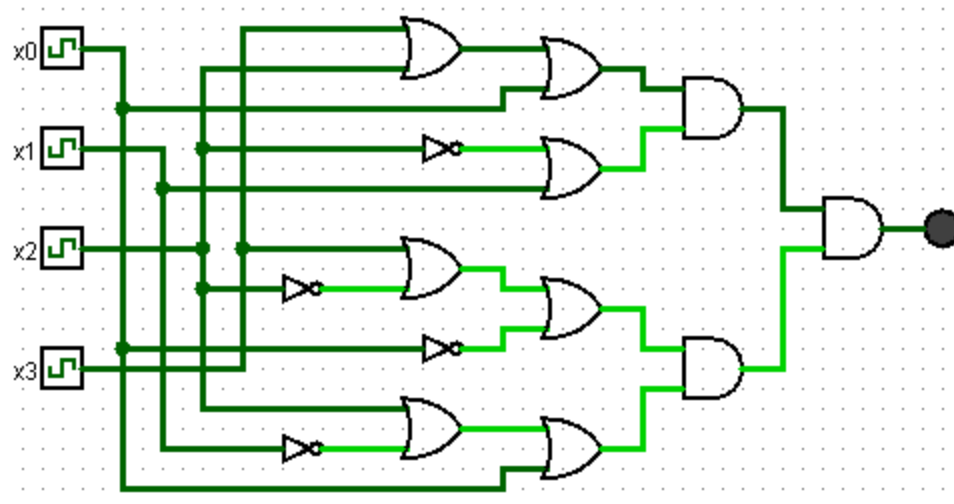


Рисунок 10 - логическая схема МКНФ