

РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЦЕЛИ НА КОМБИНАТОРНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ПЕРЕСТАНОВОК ПРИ УСЛОВИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТИ

Аннотация. Рассмотрена экстремальная задача оптимизации с дробно-линейными функциями цели на комбинаторной конфигурации перестановок при условии многокритериальности. Проанализированы методы решения дробно-линейных задач для выбора подхода к решению поставленной задачи. Предложен подход к решению таких задач на основе теории графов. Описан алгоритм подпрограммы модифицированного координатного метода с оптимизацией поиска точек конфигурации, которая предназначена для формирования множества точек, удовлетворяющих дополнительным ограничениям задачи. Предложен общий алгоритм решения задачи, позволяющий избежать линеаризации функции, и его блок-схема. Приведены примеры работы алгоритма.

Ключевые слова: экстремальные задачи, комбинаторные конфигурации, дробно-линейные функции, условие многокритериальности, модифицированный координатный метод, оптимизация поиска.

ВВЕДЕНИЕ

Многозадачность большинства современных научных проблем, отражающих практическую деятельность производств и организаций, связана с векторной оптимизацией, исследованной в [1, 5–10]. Разработаны подходы к решению векторных задач, например, с использованием генетических алгоритмов [1], свойств множеств, на которых решается задача [5–9], диалоговых процедур, различных критериев определения оптимальности полученного решения [10] и т.д. Вид целевых функций задачи и множество допустимых решений имеют большое значение при выборе метода ее решения.

При построении моделей экономических и технических процессов, связанных с планированием деятельности компании, управлением статьями банковского баланса, оценкой транспортных перевозок, управлением деятельностью университетов и т.д., возникает необходимость в оптимизации некоторого относительного показателя, который можно представить дробно-линейной функцией цели. Если область допустимых значений таких прикладных задач имеет свойства комбинаторной конфигурации, то рассматривается экстремальная комбинаторная задача, исследованная в [2–9]. Данная задача в сочетании с векторной оптимизацией приводит к условию многокритериальности для задачи с дробно-линейными целевыми функциями.

ПОСТАНОВКА ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЦЕЛИ ПРИ УСЛОВИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТИ

Сформулируем задачу следующим образом: найти такое $x^* \in D \subseteq X$, что

$$x^* = \arg \operatorname{extr}_{x \in D \subseteq X} F(x), \quad (1)$$

где $F(f_1, f_2, \dots, f_n)$ — векторный критерий, который состоит из дробно-линейных функций цели

$$f_i = \operatorname{extr}_{x \in D \subseteq X} \frac{\sum_{j=1}^m c_{ij} x_j + c_0}{\sum_{j=1}^m d_{ij} x_j + d_0}, \quad i \in N_n, \quad j \in N_m, \quad (2)$$

при условии $\sum_{j=1}^m d_{ij} x_j + d_0 \neq 0, \quad i \in N_n, \quad j \in N_m; \quad D \subseteq X$ — подмножество допустимых решений задачи, которое формируется из системы дополнительных линейных ограничений вида

$$a_{it} x_j \leq b_t, \quad i \in N_m, \quad t \in N_k, \quad (3)$$

X — некая комбинаторная конфигурация;

$$\operatorname{extr} \in \{\min, \max\} \quad (4)$$

является направлением оптимизации; n — количество функций; m — количество переменных; k — количество ограничений задачи.

Задача (1)–(4) векторная, с дробно-линейными функциями цели на комбинаторном множестве. Для выбора метода решения поставленной задачи рассмотрим уже существующие подходы.

ВЫБОР ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ ЦЕЛИ ПРИ УСЛОВИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТИ

При решении задач с дробно-линейными функциями чаще используют метод преобразования переменных, которые сводят первоначальную задачу к линейной (линеаризация). При этом количество переменных увеличивается, что приводит к преобразованию дополнительных ограничений задачи. В случае комбинаторной оптимизации требуется отображение заданной конфигурации. При возникновении условия многокритериальности задача преобразования переменных значительно усложняется, поскольку знаменатели целевых функций разные и общепринятые формулы для линеаризации нельзя использовать для всех критериев одновременно.

Применяют также метод обновления целевой функции, который предусматривает периодический пересчет локального градиента дробно-линейной функции и сводит задачу дробно-линейного программирования к последовательности линейных задач [10]. Данный метод разработан для однокритериальной оптимизации, при увеличении количества переменных и возникновении условия многокритериальности возрастает его вычислительная сложность и появляется необходимость модификации.

В работе [4] представлен метод решения задач оптимизации с дробно-линейной функцией на множестве перестановок, основанный на методе комбинаторного отсечения. Преимуществом данного метода является его практическая эффективность для указанного класса задач, а также использование дробно-линейной функции при сведении векторных задач к скалярным. Данный метод применяется для однокритериальной оптимизации, а также использует метод линеаризации, поэтому при возникновении условия многокритериальности приводит к тем же проблемам, что и в методе преобразования переменных.

Таким образом, очевидно, что поиск универсального алгоритма решения комбинаторных векторных дробно-линейных задач является перспективной областью для исследования. Сочетание многокритериальности и комбинаторных свойств усложняет задачу, и для решения моделей таких задач необходимы специфические подходы.

В данной работе предлагается использовать модифицированный координатный метод, применяемый ранее к линейным задачам [3, 6]. Этот подход не требует выполнения преобразований дробно-линейных критериев в линейные, поскольку работает непосредственно с системой ограничений. Он позволяет определять только те точки комбинаторной конфигурации, которые удовлетворяют дополнительным условиям задачи. Множество решений задачи формируется сравнением значений критерия оптимальности в найденных точках заданной конфигурации, которые удовлетворяют линейным ограничениям задачи.

Условие многокритериальности в задачах сопряжено с рядом сложностей, поскольку критерии оптимальности зачастую противоречивы. При разработке методов векторной оптимизации важен ответ на вопрос о том, какие именно решения находятся в результате его применения. Как правило, решения принадлежат одному из следующих множеств:

- оптимальных по Парето эффективных решений $P(F, X) = \{x \in X : \pi(x, X) = \emptyset\}$, $\pi(x, X) = \{y \in X : F(y) \geq F(x), F(y) \neq F(x)\}$ (паретовское множество). Это множество состоит из решений, которые не могут улучшить хотя бы один из критериев, не ухудшив при этом другой;

- слабо эффективных решений (множество Слейтера) $Sl(F, X) = \{x \in X : \sigma(x, X) = \emptyset\}$, $\sigma(x, X) = \{y \in X : F(y) > F(x)\}$;

- строго эффективных решений (множество Смейла) $Sm(F, X) = \{x \in X : \eta(x, X) = \emptyset\}$, $\eta(x, X) = \{y \in X \setminus \{x\} : F(y) \geq F(x)\}$.

Для описанных множеств очевидно, что $Sm(F, X) \subset P(F, X) \subset Sl(F, X)$ [8].

Предложенный алгоритм включает этап подбора весовых коэффициентов на основе экспертных оценок σ_{ij} , $i, j \in N_n$, описывающих соотношения важности целевых функций. Поскольку эксперты определяют превосходство или равенство входящих в векторный критерий функций, на основании этих данных формируется множество решений, которые нельзя улучшить, так как улучшение по одной из функций неизменно влечет ухудшение по другой функции векторного критерия оптимальности. Таким образом, формируется множество оптимальных по Парето решений $x^* = \arg \operatorname{extr}_{x \in D \subseteq X} F(x) \in P(F, X)$, т.е. найденное решение или множество

решений и будут эффективными для рассматриваемой в данной работе задачи.

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для работы алгоритма решения задачи (1)–(4) используется подпрограмма, основанная на модифицированном координатном методе [6] с оптимизацией поиска, алгоритм которой приведен далее. Для представления алгоритма подпрограммы необходимы следующие пояснения.

Свойства точек, определяющих элементы комбинаторных конфигураций, позволяют разложить граф заданной конфигурации на подграфы, которые можно представить в виде схем. Для этого последовательно выбирается один из шести типов вершин, для определения последних используется граф конфигурации перестановок размерности 3. Когда элементы упорядочены, значение функции на определенном подграфе находится между значениями в крайних вершинах схемы. Граф — это сеть, где истоком (главной вершиной) является верхняя левая, а стоком — нижняя правая вершина. Таким образом, значение функции в главной вершине для заданного типа вершины и зафиксированной координаты будет максимальным, а в точке стока — минимальным для построенной сети. Правила построения схем подграфов детально рассмотрены в [3, 6].

Алгоритм подпрограммы модифицированного координатного метода с оптимизацией поиска.

Шаг 1. Задать начальные значения переменным: $t=1, k=4, i=6$.

Шаг 2. Зафиксировать тип вершины $v_t = (i_1, i_2, i_3)$, где $i_1 \cup i_2 \cup i_3 = \{1, 2, 3\}$, i — номер подграфа.

Шаг 3. Определить значения: $x_s = i, x_{s-1} = \max \{N_s \setminus x_s\}, x_{s-2} = \max \{N_s \setminus (x_s, x_{s-1})\}, \dots, x_4 = \max \{N_s \setminus (x_s, x_{s-1}, \dots, x_5)\}$. Числа $\{N_s \setminus (x_s, x_{s-1}, \dots, x_4)\}$ упорядочить по возрастанию $j_1 < j_2 < j_3$. Тогда $x_1 = j_{i_1}, x_2 = j_{i_2}, x_3 = j_{i_3}$ — код главной вершины, которую обозначим p_1 . Вычислить $f(p_1)$.

Шаг 4. Определить значения: $x_s = i, x_{s-1} = \min \{N_s \setminus x_s\}, x_{s-2} = \min \{N_s \setminus (x_s, x_{s-1})\}, \dots, x_4 = \min \{N_s \setminus (x_s, x_{s-1}, \dots, x_5)\}$. Числа $\{N_s \setminus (x_s, x_{s-1}, \dots, x_4)\}$ упорядочить по возрастанию $j_1 < j_2 < j_3$. Тогда $x_1 = j_{i_1}, x_2 = j_{i_2}, x_3 = j_{i_3}$ — код правой нижней вершины (стока), которую обозначим p_{st1} . Вычислить $f(p_{st1})$.

Шаг 5. Оптимизация поиска: определить направления поиска в построенной сети, которое позволит уменьшить количество операций, сравнив значения $f(p_1)$ и $f(p_{st1})$ с заданным y^* по правилу, если $f(p_1) - y^* \leq y^* - f(p_{st1})$, то провести поиск от главной вершины к стоку (перейти к шагу 6), иначе — от стока к главной вершине (перейти к шагу 7).

Шаг 6. Рассмотреть и упорядочить по убыванию значения $x_k, k \in N_k$: $j_k > j_{k-1} > \dots > j_1$. Развернуть граф в направлении координаты x_k , выполнив последовательность транспозиций: $j_k \Leftrightarrow j_{k-1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow j_1$, которые приводят к образованию еще $k-1$ кодов вершин p_2, p_3, \dots, p_k . Эти коды вершин являются кодами узлов верхней линии схемы. Перейти к шагу 8.

Шаг 7. Рассмотреть и упорядочить по возрастанию значения $x_k, k \in N_k$. Развернуть граф в направлении координаты x_k , выполнив последовательность транспозиций: $j_1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow j_{k-1} \Leftrightarrow j_k$, которые приводят к образованию еще $k-1$ кодов вершин $p_{st2}, p_{st3}, \dots, p_{stk}$. Эти коды вершин являются кодами узлов нижней линии схемы.

Шаг 8. Найти значение функции на этих перестановках, используя их координаты $f(p_n) = f(p_{n-1}) - \Delta_{n-1}$, $\Delta_{n-1} = (j_n - j_{n-1})(c_n - c_{\mu(n-1)})$, где $\mu(\lambda)$ — номер места числа j_λ в коде перестановки p_{n-1} .

Шаг 9. Проверить выполнение следующих условий:

а) если $f(p_m) \geq y^*$ (искомые значения существуют в построенном подграфе), то включаем m -ю перестановку в последующий поиск. Перейти к шагу 10 для дальнейшего рассмотрения;

б) если для всех найденных кодов $f(p_m) < y^*$ и $i-1 \leq 1$ (искомых значений не существует в построенном подграфе, но не все возможные фиксированные координаты для выбранного типа вершин рассматривались), то перейти к подграфам со следующей фиксированной координатой $x_s = i$, после чего перейти к шагу 2;

в) если для всех найденных кодов $f(p_m) < y^*$ и $i-1 = 0$ (искомых значений не существует в построенном подграфе, и все возможные фиксированные координаты для выбранного типа вершин рассматривались), то присвоить $i=6$ и перейти к подграфам с типом вершин v_{t+1} , после чего перейти к шагу 9г;

г) если $t+1 \leq 6$ (не все типы вершин рассматривались) перейти к шагу 2, иначе (для всех шести типов вершин уже построены подграфы) завершить работу алгоритма для данного ограничения.

Шаг 10. Увеличить k на единицу. Если $k < s$, то перейти к шагу 11, иначе перейти к рассмотрению подграфов со следующей фиксированной координатой $x_s = i$, т.е. к шагу 2. Если $i-1=0$, то присвоить $i=6$ и перейти к рассмотрению подграфов с типом вершин v_{t+1} при условии, что $t+1 \leq 6$ (перейти к шагу 2), иначе завершить работу алгоритма для данного ограничения.

Шаг 11. Рассмотреть и упорядочить по убыванию значения $x_k, k \in N_k$: $j_k > j_{k-1} > \dots > j_1$. Развернуть граф вдоль координаты x_k , выполнив последовательность транспозиций: $j_k \Leftrightarrow j_{k-1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow j_1$, которые приводят к образованию еще $k-1$ кодов вершин q_2, q_3, \dots, q_k .

Шаг 12. Найти значение функции на этих перестановках, используя их координаты $f(q_n) = f(q_{n-1}) - \delta_{n-1}$, $\delta_{n-1} = (j_n - j_{n-1})(c_n - c_{\mu(n-1)})$, где $\mu(\lambda)$ — номер места числа j_λ в коде перестановки q_{n-1} .

Шаг 13. Если $f(q_n) \leq y^*$, то запомнить код вершины q_n . Перейти к шагу 10 — разворачиванию нового кода.

Данный алгоритм отличается от описанного в работах [3, 6] этапом оптимизации поиска, позволяющим уменьшить количество расчетов, что при значительной размерности задачи является весомым вкладом в экономию ресурсов. Опишем основной алгоритм решения поставленной задачи.

Алгоритм модифицированного координатного метода для решения векторных задач с дробно-линейной функцией.

Шаг 1. Ввести входные данные задачи (1)–(4): коэффициенты целевых функций, дополнительных ограничений, элементы комбинаторной конфигурации, экспертные оценки преимущества критериев оптимальности.

Шаг 2. Сформировать элементы комбинаторной конфигурации.

Шаг 3. Для каждого из k ограничений найти соответствующие ему точки конфигурации перестановок, используя подпрограмму модифицированного координатного метода с оптимизацией поиска, чтобы получить k подмножеств $D_i \subset X$, где $i \in N_k$ множества D^* допустимых решений.

Шаг 4. Найти пересечение $D^* = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_k$.

Шаг 5. Вычислить весовые коэффициенты нового критерия оптимальности

по формуле $\alpha_i = \frac{\sum_{s=1}^m \sigma_{is}}{\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \sigma_{rs}}$, $i \in N_n$, где σ_{is}, σ_{rs} — заданные в шаге 1 экспертные оценки.

Шаг 6. Перейти от векторного критерия к однокритериальной дробно-линейной функции в виде $f^* = \sum_{i=1}^k \alpha_i^k f_i \rightarrow \text{extr.}$

Шаг 7. Вычислить значение функции f^* в точках $x \in D^*$.

Шаг 8. Сравнить полученные на шаге 7 значения, выбрав соответствующее направление оптимизации. Определить экстремальное значение или допустимые значения функции цели.

Шаг 9. Найти значение дробно-линейных функций, составляющих векторный критерий. Завершить работу алгоритма.

Описанный алгоритм представим в виде блок-схемы (рис. 1).

Рассмотрим примеры решения задач с помощью описанного алгоритма. Все коэффициенты в приведенных далее задачах выбирались произвольно.

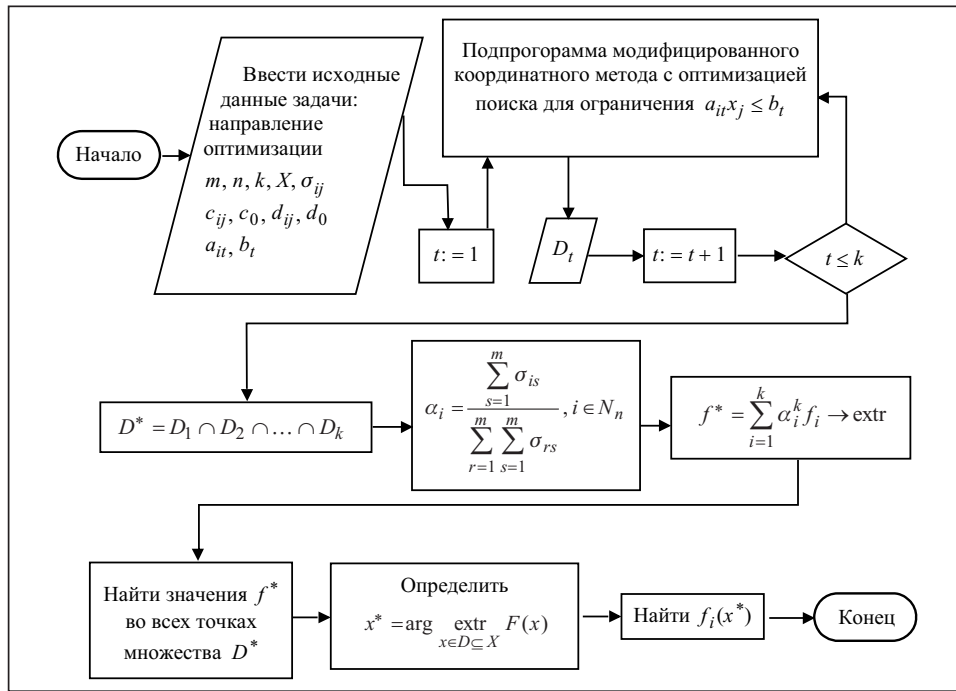


Рис. 1. Блок-схема алгоритма модифицированного координатного метода с оптимизацией поиска

Пример 1. Найти такие значения $x^* \in X$, где X — множество перестановок из элементов $A = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, которые являются оптимальными для равновесных функций

$$f_1(x) = \frac{2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + x_5 + 2x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \rightarrow \max,$$

$$f_2(x) = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 3x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \rightarrow \max,$$

$$f_3(x) = \frac{3x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \rightarrow \max,$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 18x_6 \leq 150, \\ 5x_1 + 7x_2 + 21x_3 + 12x_4 + 10x_5 + 2x_6 \leq 247. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое ограничение $3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 18x_6 \leq 150$. Найдем максимальные и минимальные значения функции $g_1 = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 18x_6$ в подграфах, последовательно закрыв координату x_6 , проанализируем результат (табл. 1).

Как видно из табл. 1, точки достижения максимума и минимума функции при закреплённой координате x_6 , образуются перестановкой двух элементов. Это позволяет использовать формулу координатного метода нахождения их значений $f(q_n) = f(q_{n-1}) - \delta_{n-1}$, $\delta_{n-1} = (j_n - j_{n-1})(c_n - c_{\mu(n-1)})$, где $\mu(\lambda)$ — номер места числа j_λ в коде перестановки q_{n-1} . Очевидно, что минимальные значения функции g_1 больше 150 для $x_6 = \{4, 5, 6\}$ (см. табл. 1). Таким образом, можно отбросить все точки конфигурации перестановок, которые имеют соответствующую координату x_6 .

Таблица 1. Максимальные и минимальные значения функции g_1 с фиксированной координатой x_6

x_6	Точка достижения максимума	Значение функции g_1	Точка достижения минимума	Значение функции g_1
6	123456	230	543216	190
5	123465	223	643215	175
4	123564	214	653214	162
3	124563	202	654213	150
2	134562	189	654312	141
1	234561	174	654321	134

Таблица 2. Максимальные и минимальные значения функции g_1 для соответствующего типа вершины при $x_6 = 3$

Тип вершины	Точка достижения максимума	Значение функции g_1	Точка достижения минимума	Значение функции g_1
123	124563	202	456213	156
213	214563	200	546213	152
132	142563	200	465213	155
312	412563	194	645213	151
231	241563	197	564213	152
321	421563	193	654213	150

Перейдем к детальному рассмотрению остальных точек. Закрепим $x_6 = 3$, определим тип вершины (123). Найдём значения функции g_1 в верхней левой и нижней правой точках схемы: $g_1(124563) = 202$, $g_1(456213) = 156 > 150$, которые являются максимальным и минимальным значениями функции g_1 соответственно для $x_6 = 3$ и типа вершины (123). Это означает, что данный подграф не содержит точек, которые бы удовлетворяли первому ограничению.

Для $x_6 = 3$ последовательно определим типы вершин и найдём для них максимальные и минимальные значения. Результаты представим в табл. 2.

Очевидно, что искомые значения для $x_6 = 3$ могут содержаться только в подграфе с типом вершины (321). Найдём значения в соседних точках с перестановкой (654213). Получим следующие значения $g_1(654213) = 156$, $g_1(654123) = 152$. Рассмотрим схему подграфа G_3 для типа вершины (321) (рис. 2). Учитывая направление изменения значений функции от максимального до минимального при построении схемы, делаем вывод, что ограничениям удовлетворяет единственная точка (654213).

Закрепим $x_6 = 2$. Найдём максимальные и минимальные значения функции g_1 для каждого типа вершин (табл. 3).

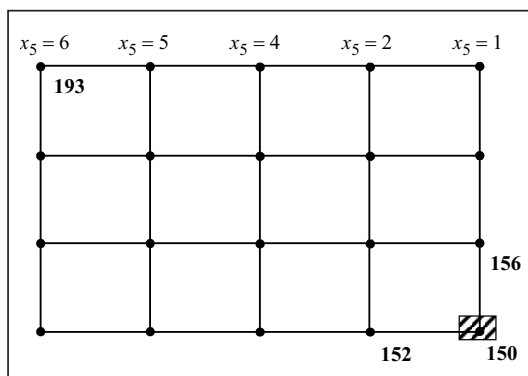


Рис. 2. Схема подграфа G_3 для типа вершины (321)

Таблица 3. Максимальные и минимальные значения функции g_1 для соответствующего типа вершины при $x_6 = 2$

Тип вершины	Точка достижения максимума	Значение функции g_1	Точка достижения минимума	Значение функции g_1
123	134562	189	456312	147
213	314562	185	546312	145
132	143562	188	465312	146
312	413562	182	645312	142
231	341562	182	564312	143
321	431562	180	654312	141

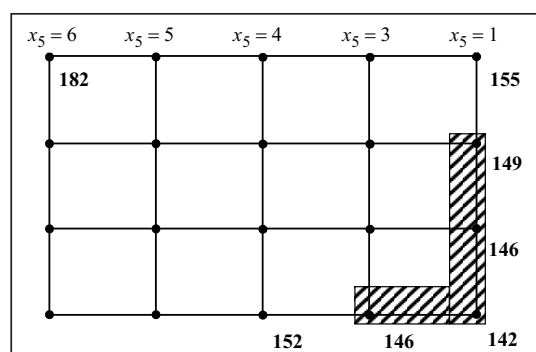


Рис. 3. Схема подграфа G_2 для типа вершины (312)

Как видно из табл. 3, точки, удовлетворяющие первому ограничению, находятся в подграфах со всеми типами вершин. Последовательно задав все типы вершин, рассмотрим подграфы G_2 . Для примера приведем схему подграфа (рис. 3) для типа вершины (312).

Из рис. 3 видно, что ограничению задачи удовлетворяют только четыре точки подграфа G_2 : (634512), (635412), (645312) и (645231). Остальные превыша-

ют 150 и не входят во множество D_1 .

Аналогично проводим расчеты для других пяти типов вершин. В результате получаем 65 точек, которые удовлетворяют ограничению g_1 . Остальные точки конфигурации перестановок отбрасываем.

Переходим к рассмотрению второго ограничения $5x_1 + 7x_2 + 21x_3 + 12x_4 + 10x_5 + 2x_6 \leq 247$, соответствующего функции $g_2 = 5x_1 + 7x_2 + 21x_3 + 12x_4 + 10x_5 + 2x_6$. Для работы с алгоритмом координатного метода преобразуем функцию g_2 так, чтобы ее коэффициенты упорядочивались по возрастанию. Получим функцию $g_2 = 2x'_1 + 5x'_2 + 7x'_3 + 10x'_4 + 12x'_5 + 21x'_6$. Найдем максимальные и минимальные значения функции g_2 , последовательно закрепив координату x'_6 , и проанализируем результат (табл. 4).

Из табл. 4 видно, что точки подграфов G_4, G_3, G_2, G_1 полностью удовлетворяют ограничению, поскольку максимальное значение функции не превышает

Таблица 4. Максимальные и минимальные значения функции g_2 с фиксированной координатой x'_6

x'_6	Точка достижения максимума	Значение функции g_1	Точка достижения минимума	Значение функции g_1
6	123456	259	543216	209
5	123465	250	643215	190
4	123564	239	653214	174
3	124563	225	654213	160
2	134562	209	654312	149
1	234561	190	654321	140

заданного. Поэтому детальнее рассмотрим только подграфы G_6 и G_5 . Для подграфа G_6 закрепим последнюю координату $x'_6 = 6$ и определим тип вершины (123). По координатному методу найдем значения функции ограничения и представим их на схеме (рис. 4).

Из рис. 4 видно, что второму ограничению не удовлетворяют лишь шесть точек. Аналогично исследуем подграф G_6 для других типов вершин и подграф G_5 . Получаем 24 точки, которые не удовлетворяют второму ограничению. В результате имеем множество D_2 .

Найдем $D^* = D_1 \cap D_2$, которое состоит лишь из 64 точек.

Поскольку функции являются равновесными, то их весовые коэффициенты будут равными $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$. При переходе к скалярной задаче получим функцию $f^*(x) = \frac{2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 3x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \rightarrow \max$. Итак, имеем одно-критериальную задачу с дробно-линейной целевой функцией. Найдем значение функции в каждой из полученных точек, определим максимальное $f_{\max}^* = 3\frac{2}{7}$.

В результате получаем точку (364521), которая является решением задачи.

Пример 2. Найти такие значения $x^* \in X$, где X — множество перестановок из элементов $A = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, которые являются оптимальными для равновесных функций

$$f_1(x) = \frac{2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 3x_6}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 2x_6} \rightarrow \max,$$

$$f_2(x) = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 2x_6}{2x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 8x_5 + 5x_6} \rightarrow \max,$$

$$f_3(x) = \frac{3x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 7x_6}{x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 + x_6} \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 18x_6 \leq 150, \\ 5x_1 + 7x_2 + 21x_3 + 12x_4 + 10x_5 + 2x_6 \leq 247, \\ 4x_1 + 15x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 5x_5 - x_6 \leq 120, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 9x_5 + 13x_6 \geq 104, \\ -2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 13x_4 + 2x_5 + 11x_6 \leq 51, \\ 11x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 18x_6 \leq 161, \\ 3x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 9x_4 - x_5 + 7x_6 \geq 93. \end{cases}$$

Решение. Два первых ограничения задачи совпадают с ограничениями примера 1, применение к ним алгоритма рассмотрено ранее. Дальнейшее исследование третьего ограничения $4x_1 + 15x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 5x_5 - x_6 \leq 120$ дает 54 точки, не входящие в область допустимых значений, девять из которых совпадают

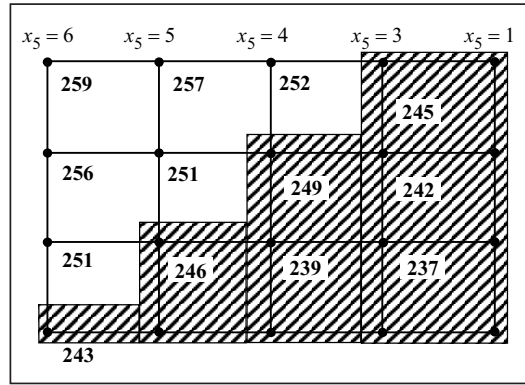


Рис. 4. Схема подграфа G_6 с типом вершины (123)

с множеством $D_1 \cap D_2$, состоящим из 64 точек (см. пример 1). Находим пересечение $D_1 \cap D_2 \cap D_3$, которое будет состоять из 55 точек.

Продолжаем исследование по алгоритму координатного метода для четвертого ограничения $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 9x_5 + 13x_6 \geq 104$. В результате работы алгоритма получаем 22 точки, не удовлетворяющие этому ограничению. Находим новое пересечение $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4$. Это множество состоит из 34 точек.

Для такого количества точек рационально проверить выполнение в каждой точке следующего ограничения: $-2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 13x_4 + 2x_5 + 11x_6 \leq 51$. Таким образом, множество $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \cap D_5$ будет состоять из 23 точек. Для них последовательно рассмотрим выполнение остальных ограничений, в результате получим искомое множество $D^* = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \cap D_5 \cap D_6 \cap D_7$, состоящее из четырех точек: (356421), (456231), (426431), (356421).

С учетом равного веса функций, составляющих векторный критерий оптимизации, весовые коэффициенты $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$. Искомый скалярный критерий запишем в виде

$$f^* = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 3x_6}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 2x_6} + \\ + \frac{1}{3} \cdot \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 2x_6}{2x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 8x_5 + 5x_6} + \\ + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 7x_6}{x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 + x_6}.$$

Определим значение функции f^* в найденных точках $x \in D^*$. Результат представим в табл. 5, из которой видно, что решением является точка (356421), поскольку значение векторного критерия в ней максимальное. Решение найдено.

Данный алгоритм применен для решения задач с дробно-линейными функциями на комбинаторных конфигурациях. Он построен таким образом, чтобы сократить количество необходимых расчетов за счет выбора направления развертывания подграфа в зависимости от значения функции в главной вершине, в точке стока и заданного в ограничении.

Отметим, что при увеличении числа ограничений задачи важен порядок их рассмотрения, который влияет на эффективность формирования множества допустимых значений задачи $D^* = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_k$. Также, если на определенном этапе работы алгоритма количество точек комбинаторной конфигурации значительно превышает количество допустимых решений по уже рассмотренным ограничениям, возникает вопрос целесообразности проведения полномасштабного поиска по остальным ограничениям. Более рациональным подходом

Таблица 5. Значение функций f^*, f_1, f_2, f_3 в найденных точках $x \in D^*$

$x \in D^*$	f^*	f_1	f_2	f_3
(356421)	0.9308	1.361702	0.854839	0.575758
(456231)	0.9733	1.387755	0.981132	0.55102
(426431)	0.9349	1.365385	0.80303	0.636364
(356421)	0.9783	1.411765	1.018519	0.504762

в данной ситуации является проверка выполнения остальных ограничений в найденных точках. Причем с каждой новой проверкой количество точек может уменьшаться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен модифицированный координатный метод с оптимизацией поиска, значительно упрощающий процесс решения экстремальных задач с дробно-линейными целевыми функциями на комбинаторных конфигурациях. Описанный алгоритм позволяет избежать процесса преобразования переменных для линеаризации функций, что повышает его эффективность. Также предложен подход к оптимизации поиска заданного значения в модифицированном алгоритме координатного метода. Дальнейшая работа в данном направлении предусматривает исследование такого рода задач на других комбинаторных конфигурациях и применение приведенного метода их решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Studniarski M. Stopping criteria for genetic algorithms with application to multiobjective optimization. In "Parallel Problem Solving from Nature — PPSN XI" (eds. R. Schaefer et al.). Part I. *Lect. Notes Comput. Sci.* 2010. Vol. 6238 P. 697–706.
2. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Об одной задаче оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках. *Проблемы управления и информатики*. 2010. № 2. С. 31–41.
3. Донец Г.П., Колечкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: ПУЕТ, 2011. 362 с.
4. Ємець О.О., Колечкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. Київ: Наук. думка, 2005. 113 с.
5. Колечкина Л.Н., Родионова Е.А. Многокритериальные комбинаторные задачи оптимизации на множестве полиразмещений. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 2. С. 152–160.
6. Колечкина Л.Н., Дверная Е.А., Нагорная А.Н. Модификация координатного метода решения экстремальных задач на комбинаторных конфигурациях при условии многокритериальности. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50. № 4. С. 154–161.
7. Колечкіна Л.М. Властивості задач багатокритеріальної оптимізації на комбінаторних множинах та методи їх розв'язання. Полтава: РВВ ПУСКУ, 2008. 162 с.
8. Семенова Н.В., Колечкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. Київ: Наук. думка, 2009. 262 с.
9. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Об одном подходе к решению векторных задач с дробно-линейными функциями критериев на комбинаторном множестве размещений. *Проблемы управления и информатики*. 2010. № 1. С. 131–144.
10. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения: Пер. с англ. Москва: Радио и связь, 1992 504 с.

Надійшла до редакції 27.01.2017

Л.М. Колечкіна, О.А. Двірня

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ З ДРОБОВО-ЛІНІЙНИМИ
ФУНКЦІЯМИ ЦІЛІ НА КОМБІНАТОРНІЙ КОНФІГУРАЦІЇ ПЕРЕСТАВЛЕНЬ
ЗА УМОВИ БАГАТОКРИТЕРІЙНОСТІ**

Анотація. Розглянуто екстремальну задачу оптимізації з дробово-лінійною функцією цілі на комбінаторній конфігурації переставлень за умови багатокритерійності. Проаналізовано методи розв'язування дробово-лінійних задач для вибору підходу до розв'язування поставленої задачі. Запропоновано

підхід до розв'язування таких задач на основі теорії графів. Описано алгоритм підпрограми модифікованого координатного методу з оптимізацією пошуку точок конфігурації, яка призначена для формування множини точок, що задовольняють обмеженням задачі. Запропоновано загальний алгоритм розв'язування задачі, який дозволяє уникнути лінеаризації функції, та його блок-схему. Наведено приклади роботи алгоритму.

Ключові слова: екстремальні задачі, комбінаторні конфігурації, дробово-лінійні функції, умова багатокритерійності, модифікований координатний метод, оптимізація пошуку.

L.M. Koliechkina, O.A. Dvirna

**SOLVING OF EXTREMUM PROBLEMS WITH FRACTIONAL-LINEAR
TARGET FUNCTIONS ON COMBINATORIAL CONFIGURATION
OF PERMUTATIONS WITH MULTICRITERIALITY CONDITION**

Abstract. Extremum optimization problem with fractional-linear target functions on combinatorial configuration of permutations with multicriteria condition is considered. The methods of fractional-linear problems solving is analyzed for changing of approach to consider problem's solving. The way of solving such kind of tasks with using graph's theory is proposed. The algorithm of the modified coordinate method's subprogram with optimization of search is described. This subprogram forms a set of the points which is satisfying the additional constraints of the task. The general algorithm for task solving without linearization of target function and its' block-diagram are proposed. Examples of the algorithm work are described.

Key words: extremum problems, combinatorial configurations, fractional-linear functions, multicriteriality condition, modified coordinate method, optimization of search.

Колечкина Людмила Николаевна,

доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры информационной деятельности в экономических системах, ВНЗ Укоопсоюза «Полтавский университет экономики и торговли», e-mail: ludapl@ukr.net.

Дверная Елена Анатольевна,

ассистент кафедры информационной деятельности в экономических системах, ВНЗ Укоопсоюза «Полтавский университет экономики и торговли», e-mail: lenadvirna@gmail.com.