UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Instituto de Física
Bacharelado em Engenharia Física
Tópicos especiais de engenharia física

Deomar Santos da Silva Junior / 00260682

Análise de um circuito RC com fonte de tensão DC com adição de ruído térmico

Introdução

Diversos experimentos de pesquisa científica e desenvolvimento envolvem medidas de tensões extremamente baixas da ordem de microvolts e nanovolts como, por exemplo, o desenvolvimento de sensores. Para caracterizar esses dispositivos ou fenômenos, é necessário que saibamos o comportamento dos componentes para projetar o circuito dos analisadores. Entretanto, para essa faixa de tensões, é necessário também analisar a introdução do ruído desses componentes como, por exemplo, o ruído térmico de resistores. Pode-se modelar o ruído térmico por um ruído branco e então resolver a equação diferencial resultante considerando-a como um processo de Ornstein-Uhlenbeck [1].

Processo de Ornstein-Uhlenbeck

O processo de Ornstein-Uhlenbeck é um processo que satisfaz a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dV_t = \gamma(V_d - V)dt + \beta dW$$

Em que V é o estado no tempo 't' da variável que se quer resolver, V_d é o comportamento de deriva da variável e γ e β são parâmetros do sistema. dW é um processo estocástico gaussiano que representa o ruído branco do processo [2].

Circuito RC com fonte de tensão DC

O circuito RC é composto por uma resistência (R) e um capacitor (C), além da fonte de tensão (ε) quando é presente (Figura 1).

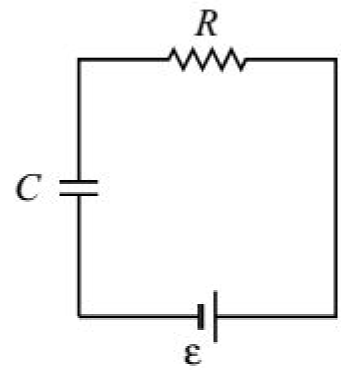

Figura 1. Circuito RC com fonte de tensão DC.

Aplicando a lei de Kirchhoff (soma das tensões na malha), tem-se:

$$\varepsilon = V_R + V_C$$

De forma que:

$$V_R = RCdV_C/dt$$

Onde V_R é a tensão no resistor e V_C a tensão no capacitor.

Substituindo na equação original, obtém-se:

$$dV_c/dt = \ -(-V_C - \varepsilon)dt/RC$$

Adicionando o ruído gaussiano, tem-se, finalmente:

$$dV_c/dt = \ -(-V_C - \varepsilon)/RC + \beta dW$$

Pode-se encontrar o parâmetro β através da isometria de Ito e do teorema da dissipação flutuação que afirma que:

$$\lim_{t\to\infty} VAR(V) \ = \ \beta^2/2\gamma$$

Considerando que VAR(V) é equivalente a V^2, o que equivale a $V^2 = P.R.t$ onde P é a potência dissipada no circuito RC e 't' é o tempo.

Substituindo as fórmulas, encontramos:

$$\beta^2 = 2k_bT/RC^2$$

Em que k_b é a constante de Boltzmann e T a temperatura em Kelvin.

Por último, para encontrar todas as variáveis da equação diferencial com ruído, substitui-se dW, o qual é chamado de propagador de Markov, pelo ruído gaussiano [$\delta(0,\ 1)$] de média 0 e variância 1 de forma que o incremento se dá por $\sqrt{t}\,\delta(0,\ 1)$.

Por fim, obtém-se, após isolar os diferenciais e discretizar a tensão:

$$V_{c(t+1)} = V_{c(t)} - (-V_C - \varepsilon)dt/RC + \beta\sqrt{t}\,\delta(0,\ 1)$$

Onde:

$$\beta = \sqrt{2k_b T/RC^2}$$

Solução numérica

Para resolver numericamente, utilizou-se:

$R = 1M\Omega$

$C = 1\mu F$

$T = 300$

$V(0) = 0$

$\varepsilon = 1$

Como resultado:

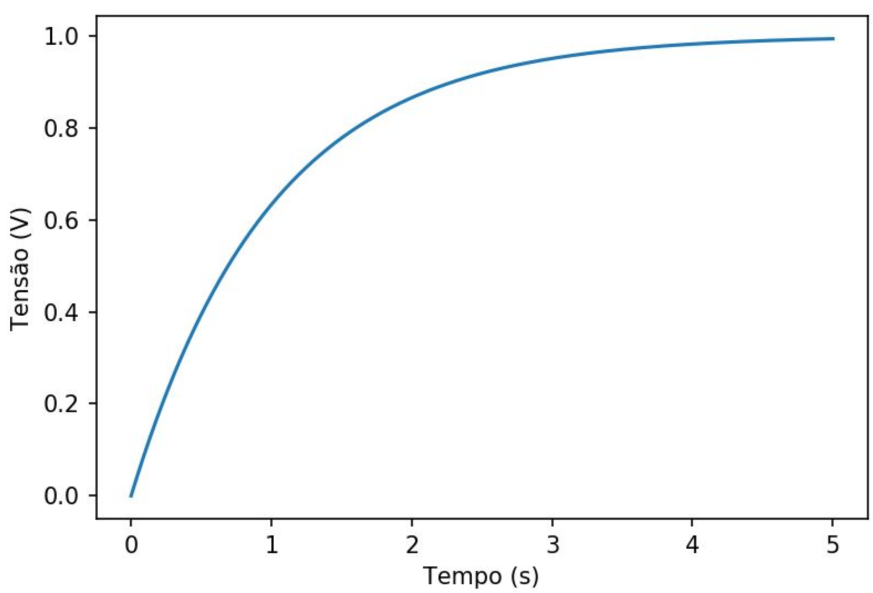

Figura 2. Resultado numérico para o circuito RC com tensão de 1V.

Nota-se que a carga no capacitor alcança 63% da carga após 1 segundo, como previsto pela constante de tempo $\tau = RC = 1s$ e que, após o equilíbrio, a tensão no capacitor tende à tensão da fonte.

Solução analítica

A solução analítica da equação diferencial sem ruído do circuito dada a condição inicial anterior é dada por:

$$V_C = \varepsilon[1 - exp(-t/RC)]$$

Plotando-se a solução:

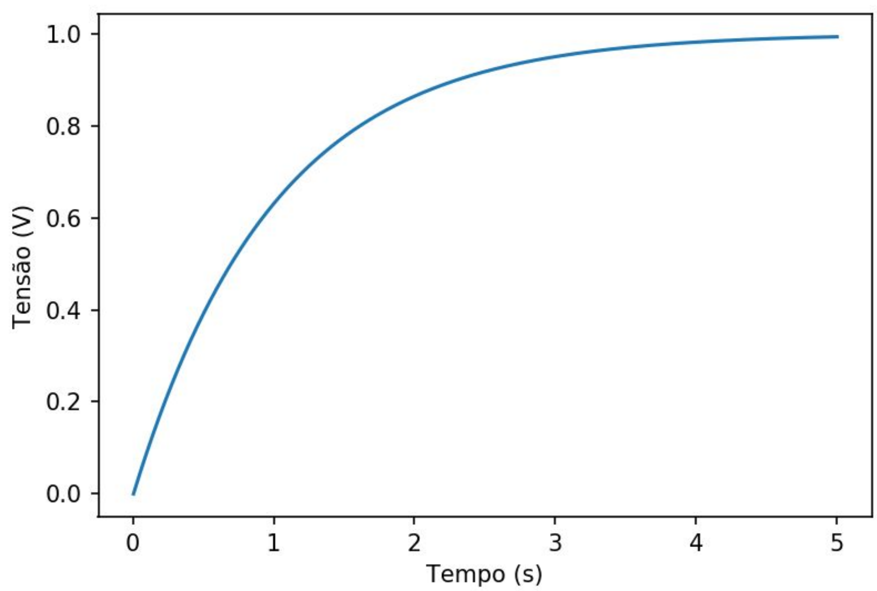

Figura 3. Solução analítica para o circuito RC com tensão de 1V.

Ruído térmico

Nota-se que o termo do ruído não é perceptível na solução numérica. Deve-se ao fato de que a tensão aplicada é muito maior que o ruído. Então diminuindo a tensão DC para $1\mu V$, tem-se:

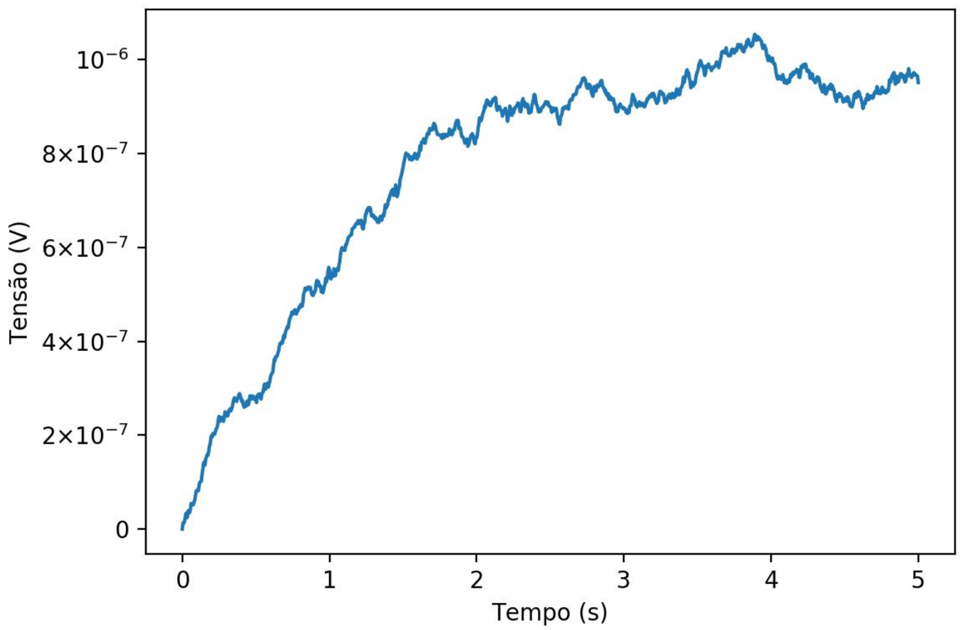

Figura 4. Solução numérica para o circuito RC com tensão de 1uV e capacitância de 10uF.

Percebe-se a distorção no sinal pela adição de ruído. Isto pode resultar em interpretações errôneas do fenômeno analisado ou caracterização. Desta forma, pode-se alterar a capacitância do circuito de forma a tentar filtrar o ruído adicionado. Neste caso o circuito se comportará como uma circuito passa baixa.

Resolvendo numericamente para $C = 10\mu F$, obtém-se:

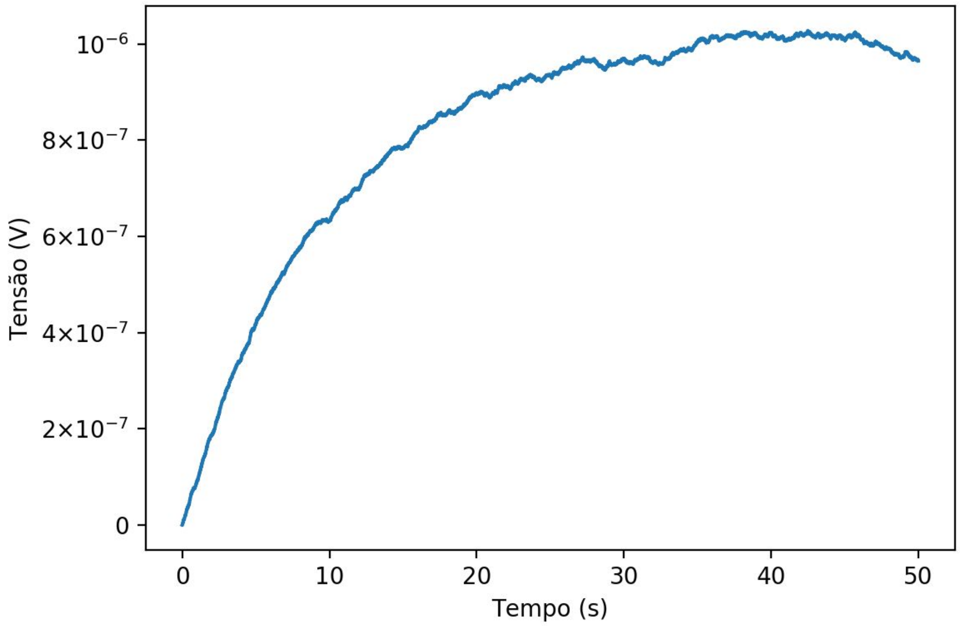

Figura 4. Solução numérica para o circuito RC com tensão de 1uV e capacitância de 10uF.

Como resultado, o ruído é atenuado. Nota-se, entretanto, que o tempo de estabilidade é muito maior para este caso, 10 vezes maior.

Conclusões

Com a modelagem de Ornstein Uhlenbeck, pode-se simular o comportamento de um circuito mais próximo possível à realidade sem a necessidade de testes experimentais como limitados no caso da modelagem convencional do circuito RC.

Referências:

[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Processo_Ornstein%E2%80%93Uhlenbeck <Disponível em 21/06/2020>

[2] https://pt.wikipedia.org/wiki/Processo_de_Wiener <Disponível em 21/06/2020>