Дискретная математика

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

February 26, 2022

№1

Числа Фибоначчи задаются правилами $F_0 = 1; F_1 = 1; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ для всех $n \geq 2$. Докажите, что для любого n числа F_n и F_{n+1} взаимно просты.

Доказательство:

Докажем, что F_n и F_{n+1} взаимно просты, используя принцип мат индукции.

1) База. Для $n = 0 : F_0 = 1,\ F_1 = 1 \Rightarrow$ НОД$(F_0; F_1) = 1 \Rightarrow F_0$ и F_1 взаимно просты.

2) Пусть F_k и F_{k+1} взаимно просты. Тогда НОД$(F_k;\ F_{k+1}) = 1$.

3) Пусть $n = k + 1$. Тогда НОД$(F_{k+1};\ F_{k+2}) =$ НОД$(F_{k+1};\ F_k + F_{k+1}) =$ НОД$(F_{k+1};\ F_k) = 1$ по предположению индукции $\Rightarrow F_n$ и F_{n+1} взаимно просты по принципу мат индукции. $\blacksquare$

№2

Решите систему сравнений

$x \equiv 3 \pmod{15}$ (1)

$x \equiv 4 \pmod{21}$ (2)

$x \equiv 5 \pmod{35}$ (3)

Решение:

Из (1) следует, что $x = 3 + 15k,\ k \in \mathbb{Z}$. Из (2) следует, что $x = 4 + 21d,\ d \in \mathbb{Z}$. Тогда $3 + 15k = 4 + 21d \Rightarrow 15k = 1 + 21d$. Заметим, что левая часть уравнения делится на 3, а правая при делении на 3 даёт остаток 1, а значит уравнение не умеет решений $\Rightarrow$ система сравнений не имеет решений.

Ответ: решений нет

№3

Известно, что $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12} + f^{12}$ делится на 13. Докажите, что $abcdef$ делится на 13^6 . Здесь a,b,c,d,e,f — целые числа.

Доказательство:

По малой теореме Ферма, тк 13 - простое число, $x^{12} \equiv 1 \pmod{13}\ \forall x$, не делящемся на p (и $x^{12} \equiv 0 \pmod{13}\ \forall x$, делящемся на p). Таким образом, остаток при делении $a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12}$ на 13 - это целое число от 0 до 6, и равен 0 только в том случае, когда остаток при делении каждого слагамого на 13 равен 0. Значит, тк $a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12}$ делится на 13 по условию, то статок при делении каждого слагамого на 13 равен 0, значит a, b, c, d, e, f делятся на 13, и тогда $abcdef$ делится на 13^6, тк каждый множитель делится на 13. ■

№4

Вычислите остаток от деления $1^5 + 2^5 + \cdots + 2022^5$ на 11.

Решение:

Каждое число x от 1 до 2022 можно представить в виде $x = 11k + r,\ k, r \in \mathbb{Z}$, где k - целая часть при делении x на 11, r - остаток. Тогда каждое слагаемое можно представить в виде $x^5 = (11k + r)^5$ и по биному Ньютона $x^5 = (11k + r)^5 = (11k)^5 + 5(11k^4)r + 10(11k)^3r^2 + 10(11k)^2r^3 + 5(11k)r^4 + r^5$, те остаток при делении x^5 на 11 равен остатку при делении r^5 на 11, и остаток не зависит от k (1). При этом, тк $1 \equiv -10, 2 \equiv -9, 3 \equiv -8, 4 \equiv -7, 5 \equiv -6 \pmod{11}$ и числа вида $(11d)^5$ делятся на 11, то сумма $1^5 + 2^5 + \cdots + 10^5 + 11^5$ делится на 11 (тк остаток будет 0), и с учётом (1) сумма $1^5 + 2^5 + \cdots + 2013^5$ делится на 11 (2013 делится на 11). Значит остаток от деления $1^5 + 2^5 + \cdots + 2022^5$ на 11 совпадает с остатком от деления $2014^5 + 2015^5 + \cdots + 2022^5$ на 11. Заметим, что остаток от деления $2014^5 + 2015^5 + \cdots + 2022^5 + 2023^5 + 2024^5$ на 11 равен 0 (тк 2024 делится на 11), а значит остаток от деления $2014^5 + 2015^5 + \cdots + 2022^5$ на 11 равен 0 - (остаток от деления $2023^5 + 2024^5$ на 11). 2024^5 делится на 11, а $2023^5 = (183 \cdot 11 + 10)^5 \Rightarrow 2023^5 \equiv 10^5 \equiv (-1)^5 = -1 \pmod{11} \Rightarrow$ остаток от деления $2014^5 + 2015^5 + \cdots + 2022^5$ на 11 равен 0 - (-1) = 1 $\Rightarrow$ искомый остаток равен 1.

Ответ: 1

№5

Решите уравнение $\varphi(x) = x/4$

Решение:

Пусть $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n},\ \alpha_i > 0, p_i$ - различные простые. Тогда $\varphi(x) = x \prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \frac{x}{4}$. Тогда $\prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \frac{1}{4} = \frac{(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_n-1)}{p_1 p_2 \ldots p_n}$. Заметим, что знаменатель этой дроби либо нечет, либо степень 2 в знаменателе этой дроби не больше 1 (тк 2 - единственное чётное простое число, может входить, может не входить, может входить и сократиться). Таким образом, $\frac{(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_n-1)}{p_1 p_2 \ldots p_n}$ не может равняться $\frac{1}{4}$ при любых p, а значит уравнение $\varphi(x) = x/4$ не имеет решений.

Ответ: решений нет

№6

Функция f из множества целых чисел в множество целых чисел сопоставляет числу x наименьшее простое число, которое больше x^2 . Докажите, что если множество целых чисел X конечное, то и полный прообраз этого множества $f^{-1}(X)$ конечен.

Доказательство:

Пусть функция сопоставляет числу x наименьшее простое число p, которое больше x^2. Рассмотрим прообраз p. Прообраз p состоит из таких x, для которых $f(x) = x^2 < p$. Значит прообраз p состоит из таких x, для которых выполняется $|x| < \sqrt{p}$. Тк p - простое число, то неравенству $|x| < \sqrt{p}$ удовлетворяет конечное число целых чисел, а значит прообраз p конечен. Таким образом, для любого простого p количество элементов в прообразове p конечно, а значит полный прообраз множества $f^{-1}(X)$ конечен. ■

№7

Докажите, что для всякого n существует такая арифметическая прогрессия $a_i = a_0 + id, 0 \leq i < n$, что числа $a_0, \ldots, a_{n-1}$ попарно взаимно просты.

Доказательство:

Будем считать, что $n > 2$, тк для $n = 1$ и $n = 2$ условие выполняется (в первом случае последовательность состоит из одного числа, т е, например, последовательность 1 удовлетворяет условию, во втором случае, например, подходит последовательность 1, 2). Пусть $a_0 = 1$, а d равняется произведению n различных простых чисел $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots$. Докажем, что в последовательности $1, 1 + d, \ldots, 1 + (n-1)d$ числа $a_0, \ldots, a_{n-1}$ попарно взаимно просты. Заметим, что все члены прогрессии при делении на простое число, которое является множителем d, дают остаток 1, те не делятся на него, значит нет пары членов последовательности, в которой оба члена делились бы на простое число из разложения d. При этом каждое $0 \leq i < n$ либо является простым, либо раскладывает на простые множители, и тк d равняется произведению n различных простых чисел, то в любом из двух случаях все простые множители i входят в разложение d (наибольший множитель-простое число в d не меньше $n-1$), а значит все члены последовательности являются простыми (кроме $a_0 = 1$), те все члены последовательности попарно взаимно просты. ■