Алгебра

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

June 2, 2022

№1

Определите все значения параметра $b \in \mathbb{R}$, при которых многочлен $f = x^3y + bxy^3z^2$ принадлежит идеалу $I = (x^2 + 2y^2, xz - y)$ кольца $\mathbb{R}[x, y, z]$.

Решение:

Чтобы определить, принадлежит ли идеалу многочлен, необходимо найти в идеале базис Грёбнера (используя алгоритм Бухбергера), и, если остаток многочлена относительно найденного базиса равен 0, то многочлен принадлежит идеалу. Найдём в I базис Грёбнера. Обозначим $f_1 = x^2 + 2y^2, f_2 = xz - y$, тогда $L(f_1) = x^2, L(f_2) = xz \Rightarrow$ НОК$(L(f_1), L(f_2)) = x^2z \Rightarrow S(f_1, f_2) = zx^2 + 2zy^2 - x^2z + yx = 2zy^2 + yx = f_3$. Заметим, что f_3 нередуцируем относительно f_1 и f_2, поэтому его нужно добавить в систему (по алгоритму Бухбергера). $L(f_3) = xy \Rightarrow$
НОК$(L(f_1), L(f_3)) = x^2y \Rightarrow S(f_1, f_3) = 2y^3 - 2xy^2z \overset{f_2 \cdot -2y^2}{\rightarrow} 0$. НОК$(L(f_2), L(f_3)) = xyz \Rightarrow S(f_2, f_3) = -y^2 - 2y^2z^2 = f_4$. Заметим, что f_4 нередуцируем относительно f_1, f_2, f_3, поэтому его нужно добавить в систему (по алгоритму Бухбергера). $L(f_4) = -2y^2z^2$. Известно, что если страшие члены многочленов x, y взаимно просты, то $S(x, y)$ редуцируется к 0 относительно x, y. Заметим, что $L(f_4)$ попарно прост с $L(f_1), L(f_2), L(f_3)$, а значит $S(f_1, f_4), S(f_2, f_4), S(f_3, f_4)$ редуцируются к 0 относительно $f_1, f_4; f_2, f_4; f_3, f_4$ соотв. Таким образом, $\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \{x^2+2y^2, xz-y, 2zy^2+yx, -y^2-2y^2z^2\}$– система Грёбнера идела I. Теперь найдём все значения параметра $b \in \mathbb{R}$, при которых многочлен $f = x^3y+bxy^3z^2$ принадлежит идеалу I. $f = x^3y+bxy^3z^2 \overset{f_1 \cdot xy}{\rightarrow} bxy^3z^2-2xy^3 \overset{f_4 \cdot 2xy}{\rightarrow} bxy^3z^2+4xy^3z^2$. Заметим, что при $b = -4$ f редуцируется к 0 относительно системы Грёбнера идела I, те тогда f принадлежит I. Пусть $b \neq -4$. $bxy^3z^2 + 4xy^3z^2 \overset{f_2 \cdot 4y^3z}{\rightarrow} bxy^3z^2 + 4y^4z \overset{f_2 \cdot by^3z}{\rightarrow} 4y^4z + by^4z$. Заметим, что $by^4z, 4y^4z$ не делятся на $L(f_1), L(f_2), L(f_3), L(f_4)$, а значит $by^4z + 4y^4z$ нередуцируем к 0 относительно $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ при $b \neq -4$. Таким образом, многочлен $f = x^3y + bxy^3z^2$ принадлежит идеалу $I = (x^2 + 2y^2, xz - y)$ кольца $\mathbb{R}[x, y, z]$ только при $b = -4$.

Ответ: при $b = -4$

№2

Найдите минимальный редуцированный базис Грёбнера в идеале $(xy+2yz, x-y^2, yz^2-y) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$ относительно лексикографического порядка, задаваемого условием $z > x > y$.

Решение:

Обозначим $f_1 = xy + 2yz, f_2 = x - y^2, f_3 = yz^2 - y$. Построим с помощью алгоритма Бухбергера произвольный базис Грёбнера в идеале, а потом преобразуем его в минимальный редуцированный базис Грёбнера в идеале.
$L(f_1) = 2yz, L(f_2) = x, L(f_3) = yz^2$. Заметим, что $L(f_1)$ и $L(f_2)$, $L(f_3)$ и $L(f_2)$ вхаимно просты, а значит

$S(f_1, f_2), S(f_2, f_3)$ редуцируемы к нулю относительно f_1, f_2 и f_2, f_3 соотв. НОК$(f_1, f_3) = 2yz^2 \Rightarrow$
$S(f_1, f_3) = xyz + 2yz^2 - 2yz^2 + 2y = xyz + 2y \overset{f_1 \cdot 0.5x}{\to} 2y - 0.5x^2y \overset{f_2 \cdot 0.5xy}{\to} 2y - 0.5xy^3 \overset{f_2 \cdot -0.5y^3}{\to} 2y - 0.5y^5$. Заметим, что $2y - 0.5y^5$ нередуцируем относительно f_1, f_2, f_3, тогда добавим $f_4 = -4y + y^5$ (можно домножить на -2, тк $2y - 0.5y^5$ - остаток) в систему. $L(f_4) = y^5 \Rightarrow L(f_4)$ взаимно прост с $L(f_2) \Rightarrow S(f_2, f_4)$ редуцируем к 0 относительно f_2, f_4.
НОК$(L(f_1), L(f_4)) = 2y^5z \Rightarrow S(f_1, f_4) = xy^5 + 8zy \overset{f_1 \cdot 4}{rel} \to xy^5 - 4xy \overset{f_4 \cdot x}{\to} -4xy + 4xy = 0$.
НОК$(L(f_3), L(f_4)) = y^5z^2 \Rightarrow S(f_3, f_4) = -y^5 + 4z^2y \overset{f_3 \cdot 4}{\to} -y^5 + 4y \overset{-f_4}{\to} 0$.
Таким образом, $\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \{xy + 2yz, x - y^2, yz^2 - y, -4y + y^5\}$ - базис Грёбнера в идеале.

По определению базис Грёбнера F идеала $I \subseteq R$ называет минимально редуцированным, если:
1) для любых двух различных многочленов $f_1, f_2 \in F$ никакой одночлен в f_1 не делится на $L(f_2)$
2) старшие коэффициенты всех многочленов из F равны 1.

Тк $L(f_3) = yz^2 \vdots 2yz = L(f_1)$, то f_3 нужно убрать из базиса. Так же для $f_1 = xy + 2yz$ xy делится на $x = L(f_2)$, а значит f_1 следует заменить на $f_1 \overset{f_2 \cdot y}{\to} 2yz + y^3$ (для остальных условие 1 соблюдается). Итого, получили новую систему $\{yz + 0.5y^3, x - y^2, -4y + y^5\}$. Теперь изменим базис так, чтобы выполнялось условие 2. Таким образом, $\{2yz + y^3, x - y^2, -4y + y^5\}$ - минимальный редуцированный базис Грёбнера в идеале $(xy + 2yz, x - y^2, yz^2 - y) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$ относительно лексикографического порядка, задаваемого условием $z > x > y$.

Ответ: $\{yz + 0.5y^3, x - y^2, -4y + y^5\}$

№3

Дан идеал $I = (x^2y + 2xz + z^2, yz - 1) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$. Найдите порождающую систему для идеала $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ кольца $\mathbb{R}[x, y]$.

Решение:

Известно (№7 листа 7), что если $I \subseteq R$ - ненулевой идеал и F - его базис Грёбнера, и так же $1 \leq k \leq n - 1$ и $R_k = K[x_{k+1}, \ldots, x_n]$, то множество $F \cap R_k$ является базисом Грёбнера идеала $I \cap R_k$ кольца R_k. Введём лексикографический порядок $z > x > y$. Тогда с учётом первого факта получаем, что чтобы найти базис $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ кольца $\mathbb{R}[x, y]$, нужно найти базис Грёбнера идеала I в $R[z, x, y]$ (обозначим как F) и пересечь его с $R[x, y]$. Чтобы найти базис Грёбнера применим алгоритм Бухбергера. Пусть $f_1 = x^2y + 2xz + z^2, f_2 = yz - 1$. $L(f_1) = z^2, L(f_2) = zy \Rightarrow$ НОК$(L(f_1), L(f_2)) = z^2y \Rightarrow S(f_1, f_2) = x^2y^2 + 2zxy + z \overset{f_2 \cdot 2x}{\to} x^2y^2 + z + 2x = f_3$. Заметим, что f_3 нередуцируем относительно $\{f_1, f_2\} \Rightarrow$ добавим f_3 в базис. $L(f_3) = z$. НОК$(L(f_1), L(f_3)) = z^2 \Rightarrow S(f_1, f_3) = x^2y - x^2y^2z \overset{f_2 \cdot -x^2y}{\to} 0$. НОК$(L(f_2), L(f_3)) = zy \Rightarrow S(f_2, f_3) = -1 - x^2y^3 - 2xy = f_4$. Заметим, что f_4 нередуцируем относительно $\{f_1, f_2, f_3\} \Rightarrow$ добавим f_4 в базис. $L(f_4) = -x^2y^3$ - взаимно прост с $L(f_1), L(f_3) \Rightarrow S(f_1, f_4), S(f_3, f_4)$ редуцируются к нулю относительно $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. НОК$(L(f_2), L(f_4)) = -x^2y^3z \Rightarrow S(f_2, f_4) = -x^2y^3z + x^2y^2 + z + x^2y^3z + 2xyz = x^2y^2 + z + 2xyz \overset{f_2 \cdot 2x}{\to} x^2y^2 + z + 2x \overset{f_3}{\to} 0 \Rightarrow$ базис Грёбнера для I в $R[z, x, y]$ - это $\{f_1, f_2, f_3, f_4\} =$
$\{x^2y + 2xz + z^2, yz - 1, x^2y^2 + z + 2x, -1 - x^2y^3 - 2xy\}$. Найдём пересечение с $R[x, y]$ - это многочлены, которые зависят только от x, y, значит нам подходит только многочлен $f_4 = -1 - x^2y^3 - 2xy \Rightarrow I \cap \mathbb{R}[x, y] = (-1 - x^2y^3 - 2xy)$.

Ответ: $(-1 - x^2y^3 - 2xy)$

№4

Найдите конечный базис Грёбнера (относительно стандартного лексикографического порядка, задаваемого условием $x > y > z$) для идеала I кольца $\mathbb{R}[x, y, z]$, где $I = \{f \in \mathbb{R}[x, y, z] \mid f(a, a + 1, a^2 - 2a) = 0 \; \forall a \in \mathbb{R}\}$.

Решение:

Заметим, что $f_1 = x - y + 1$ в точке $(a, a+1, a^2-2a)$ равен $a - a - 1 + 1 = 0 \ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow f_1 \in I$. Аналогично $f_2 = y^2 - z - 4y + 3$ в точке $(a, a+1, a^2-2a)$ равен $a^2 + 2a + 1 - a^2 + 2a - 4a - 4 + 3 = 0 \ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow f_2 \in I$. При этом $L(f_1) = x, L(f_2) = y^2 \Rightarrow L(f_1), L(f_2)$ взаимно просты $\Rightarrow S(f_1, f_2)$ редуцируется к нулю относительно $F = \{f_1, f_2\} \Rightarrow F$ - базис Грёбнера идела (f_1, f_2). Теперь покажем, что этот идеал равен иделу I из условия (обозначим $J = (f_1, f_2) \Rightarrow$ докажем, что $I = J$).

Заметим, что I задан так, что любая комбинация многочленов из I является многочленом из I (каждый такой многочлен в точке $(a, a+1, a^2-2a)$ равен 0, а значит комбинация этих многочленов равна 0 в точке $(a, a+1, a^2-2a)$), значит, тк $f_1, f_2 \in I$ и f_1, f_2 - порождающая система в J, то $J \subseteq I$.

Теперь покажем, что $I \subseteq J$. Для этого рассмотрим произвольный $f \in I$ (нужно доказать, что тогда $f \in J$). Пусть $f = m_1 f_1 + m_2 f_2 + r$, где r - некоторый остаток f относительно F. Тогда $r = f - m_1 f_1 - m_2 f_2$, и тк $f, f_1, f_2 \in I \Rightarrow f, m_1 f_1, m_2 f_2 \in I$, то $r \in I$. Значит $r(a, a+1, a^2-2a) = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$. Тк r - некоторый остаток f относительно F, то $L(r)$ не делится на $L(f_1) = x$ и $L(f_2) = y^2 \Rightarrow$ либо $L(r) = z^k$, либо $L(r) = yz^k$ для некоторого $k \geq 0 \in \mathbb{Z}$.

1) Пусть $L(r) = z^k$. Тогда, тк $x > y > z$, r зависит только от z, а значит, тк $r(a, a+1, a^2-2a) = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$, то r - многочлен от одной переменной, который имеет конечную степень, и в этой степени он равен 0 при любом $a \in \mathbb{R}$ (те имеет бесконечно много корней), а значит $r = 0 \Rightarrow f \in (f_1, f_2) \Rightarrow f \in J$.

2) Пусть $L(r) = yz^k$. Заметим, что f_2, r не зависят от x, а значит для любого x выполняется $f_2(x, a+1, a^2-2a) = 0, \ r(x, a+1, a^2-2a) = 0$, тк $f_2, r \in I$. Значит $f(x, a+1, a^2-2a) = m_1 f_1(x, a+1, a^2-2a) \forall x, a \Rightarrow f \in J$ (тк f делится на f_1).

Таким образом, $I \subseteq J \Rightarrow I = J \Rightarrow (f_1, f_2)-$ конечный базис Грёбнера для I.

Ответ: $(x - y + 1, y^2 - z - 4y + 3)$