Сидоров Дмитрий

17 сентября 2021 г.

№ 1

Доказать, что $(A \to B) \vee (B \to C)$ - тавтология.

Д-во:

$(A \to B) \vee (B \to C) \equiv (\bar{A} \vee B) \vee (\bar{B} \vee C) \equiv \bar{A} \vee C \vee B \vee \bar{B}$

Заметим, что $B \vee \bar{B} \equiv 1$ при любом B. Значит, $\bar{A} \vee C \vee B \vee \bar{B} \equiv 1$ при любых значениях A, B, C, т. е. истинно при любых значениях входящих в него элементарных высказываний, т. е. является тавтологией.

чтд

№2

$(A \to (B \to C)) \equiv ((A \to B) \to C)$ - ?

$A \to (B \to C) \equiv \bar{A} \vee (\bar{B} \vee C) \equiv \bar{A} \vee \bar{B} \vee C$ (1)

$(A \to B) \to C \equiv (\overline{\bar{A} \vee B}) \vee C \equiv (A \wedge \overline{B}) \vee C$ (2)

Пусть $A = 0, B = 0, C = 0$, тогда (1) $= 1$, а (2) $= 0 \Rightarrow A \to (B \to C) \not\equiv (A \to B) \to C$.

Ответ: нет.

№3

$(A \wedge (B \to C)) \equiv ((A \wedge B) \to (A \wedge C))$ - ?

$A \wedge (B \to C) \equiv A \wedge (\overline{B} \vee C)$ (1)

$(A \wedge B) \to (A \wedge C) \equiv (\overline{A} \vee \overline{B}) \vee (A \wedge C) \equiv \overline{A} \vee \overline{B} \vee (A \wedge C)$ (2)

При $A = 0 :$ (1) $\equiv 0$, (2) $\equiv 1$, значит, (1) $\not\equiv$ (2) $\Rightarrow (A \wedge (B \to C)) \not\equiv ((A \wedge B) \to (A \wedge C))$

Ответ: нет.

№4

$(A \to (B \to C)) \equiv ((A \to B) \to (A \to C))$ - ?

$A \to (B \to C) \equiv \overline{A} \vee (\overline{B} \vee C) \equiv \overline{A} \vee \overline{B} \vee C$ (1)

$(A \to B) \to (A \to C) \equiv \overline{(\overline{A} \vee B)} \vee (\overline{A} \vee C) \equiv (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \vee C) \equiv (A \wedge \overline{B}) \vee \overline{A} \vee C$ (2)

Пусть $A = 1$: (1) $\equiv 0 \vee \overline{B} \vee C \equiv \overline{B} \vee C$, (2) $\equiv (1 \wedge \overline{B}) \vee \overline{1} \vee C \equiv \overline{B} \vee C \Rightarrow$ (1) $\equiv$ (2).

Пусть $A = 0$: (1) $\equiv \overline{0} \vee \overline{B} \vee C \equiv 1$, (2) $\equiv (0 \wedge \overline{B}) \vee \overline{0} \vee C \equiv 1 \Rightarrow$ (1) $\equiv$ (2).

Значит, $(A \to (B \to C)) \equiv ((A \to B) \to (A \to C))$.

Ответ: да.

№5

Если истинны более половины высказываний A, B, C, то истинны или 2, или 3 высказывания, таким образом, это высказывание можно записать как:

$((A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge C \wedge \overline{B}) \vee (C \wedge B \wedge \overline{A}) \vee (A \wedge B \wedge C)) \equiv 1$

№6

Д-ть: $a \times b = n \to (a \leq \sqrt{n}) \vee (b \leq \sqrt{n})$

Д-во:

По методу контрапозиции если $(a > \sqrt{n}) \wedge (b > \sqrt{n}) \to a \times b \neq n$, то $a \times b = n \to (a \leq \sqrt{n}) \vee (b \leq \sqrt{n})$.

Если $(a > \sqrt{n}) \wedge (b > \sqrt{n})$, то $a \times b > n \Rightarrow a \times b \neq n$, значит, $a \times b = n \to (a \leq \sqrt{n}) \vee (b \leq \sqrt{n})$.

чтд

№7

Д-ть: $(n^{25} + n^{64}) \vdots 2 \ \forall \ n > 0, n \in Z$

Д-во:

Если $n > 0, n \in Z$, то $n = 2p$ или $n = 2p + 1$, где $p > 0, p \in Z$.

1)$n = 2p : (2p)^{25} + (2p)^{64} = 2^{25}p^{25} + 2^{64}p^{64} = 2(2^{24}p^{25} + 2^{63}p^{64}) \vdots 2$

2)$n = 2p + 1 : (2p + 1)^{25} + (2p + 1)^{64}$. Нечетное число при умножении на нечетное число даёт нечетное число (тк количество множителей, кратных 2, равно 0) $\Rightarrow (2p + 1)^{25}$ - нечет, $(2p + 1)^{64}$ - нечет $\Rightarrow (2p + 1)^{25} + (2p + 1)^{64}$ - чет (тк нечет + нечет = чет) $\vdots 2$

Значит, $(n^{25} + n^{64}) \vdots 2 \ \forall \ n > 0, n \in Z$

чтд

№8

A - w чётное, B - все числа x, y, z чётные. $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$

Д-ть: $A \equiv B$

Д-во:

Если $A \to B \wedge B \to A$, то $A \equiv B$ (и наоборот) (1)

1) Если все числа x, y, z чётные (выполняется B), то $x^2+y^2+z^2$ - чётное число (тк x^2, y^2, z^2 - чёт) $\Rightarrow w^2 \vdots 2 \Rightarrow w \vdots 2$ (тк $x, y, z, w \in Z$ по усл и, если w - нечет, то $w = 2p+1$ $(p \in Z), w^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 2p + 1$ - нечет число) $\Rightarrow$ выполняется $A \Rightarrow B \to A$

2) Если w чётное (выполняется A), то $w = 2p$ $(p \in Z), w^2 = 4p^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \vdots 4$

Целое число в квадрате при делении на 4 может давать остаток 0 (если оно чётное) или остаток 1 (если оно нечётное). Таким образом, если сумма 3 квадратов целых чисел делится на 4 (т.е. даёт остаток 0), то каждое из 3 квадратов целых чисел даёт остаток 0 $\Rightarrow$ делится на 4 $\Rightarrow$ это целое число делится на 2 $\Rightarrow$ является чётным $\Rightarrow$ числа x, y, z чётные $\Rightarrow A \to B$

Из 1), 2) и (1) следует, что $A \equiv B$.

чтд