Дискретная математика

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

October 6, 2021

№1

Найдите наибольшее количество вершин в связном графе, сумма степеней вершин в котором равна 20.

Решение:

Тк необходимо найти наибольшое число вершин в связном графе, то все вершины графа являются мостами, значит такой граф является деревом. Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его рёбер. Значит в искомом графе $\frac{20}{2} = 10$ рёбер. В дереве число вершин на 1 больше числа рёбер, значит, в дереве, в котором сумма степеней вершин равна 20 11 вершин. Примером такого графа является дерево, в котором 2 вершины имеют степень 1, а 9 имеют степень 2 (1 вершина соединена только с 2, 2 с 1 и 3, 3 с 2 и 4, ..., 10 соединена с 11 и 9, 11 соединена только с 10).

Ответ: 11

№2

В связном графе на n вершинах нет мостов. Какое наименьшее количество рёбер может быть в таком графе?

Решение:

Если в связном графе нет мостов, то после удаления любого ребра в графе количество компонент связности не меняется. Заметим, что в графе не может быть меньше $n-1$ ребра (тк иначе граф не связен). Если в графе ровно $n-1$ ребро, то граф является деревом, а в дереве все рёбра - это мосты, что противоречит условию. Таким образом, в таком графе не может быть меньше n рёбер. Пример такого графа с n рёбрами - это граф, в котором вершина 1 соединена с вершиной 2 и n, вершина 2 соединена с вершинами 1 и 3, ..., вершина $n-1$ соединена с вершинами $n-2$ и n, вершина n соединена с вершинами 1 и $n-1$ (все вершины графа образуют простой цикл). В таком графе нет мостов, тк удаление любой вершины не меняет количество компонент связности: она остаётся единственной.

Ответ: n

№3

В дереве на 13 вершинах есть ровно две вершины степени 6. Следует ли из этого, что в этом дереве есть вершина степени 2? Приведите пример дерева на 14 вершинах, в котором есть ровно две вершины степени 6 и нет ни одной вершины степени 2.

a)

Решение:

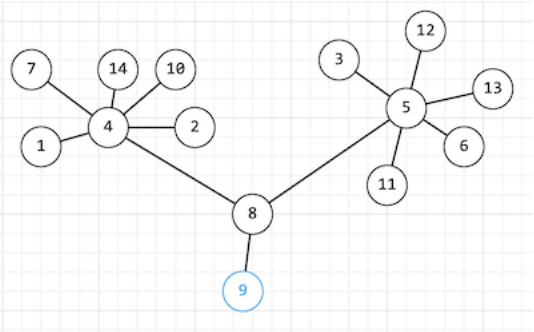
В дереве число вершин на 1 больше числа рёбер, значит, в дереве, в котором 13 вершин 12 рёбер. Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его рёбер, значит, в этом дереве сумма степеней всех вершин равна 24. В этом дереве есть ровно 2 вершины степени 6 (усл), значит, сумма степеней оставшихся 11 вершин равна 24 - 12 = 12. В дереве все вершины связаны, т. е. степень каждой вершины больше 0, значит, по принципу Дирихле найдётся вершина степени 2.

Ответ: да

b)

Решение:

Если в дереве 14 вершин, то в нем 13 рёбер, а сумма степеней всех вершин равна 26. Таким образом, в этом дереве 14 вершин, 2 вершины имеют степень 6, тогда сумма степеней 12 оставшихся вершин равна 14, т. к. в графе нет ни одной вершины степени 2, то все оставшиеся вершины дерева, кроме одной (которая имеет степень 3), имеют степень 1. Пример такого графа:



№4

В связном графе степени всех вершин чётные. Докажите, что граф останется связным и после удаления любого из рёбер.

Доказательство:

Пусть после удаления ребра, соединяющего вершины x, y граф стал несвязным. Тогда в графе нет путя, содержащего x, y, а степени x, y стали нечет (тк до удаления ребра они были чёт, но уменьшились на 1). Рассмотрим компаненту связности x. В ней все вершины, кроме x, имеют чётные степени (а x имеет нечёт степень). Тогда сумма всех степеней в этой компаненте связности нечет, а это противоречит тому, что сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его рёбер, т. е. является чётной. Таким образом, предположение неверно и после удаления любого из рёбер графа граф останется связным. ■

№5

Докажите, что если в графе больше 5 вершин, либо сам граф, либо его дополнение содержат цикл длины 3. Приведите пример такого графа на 5 вершинах, что ни граф, ни его дополнение не содержат цикла длины 3.

Доказательство:

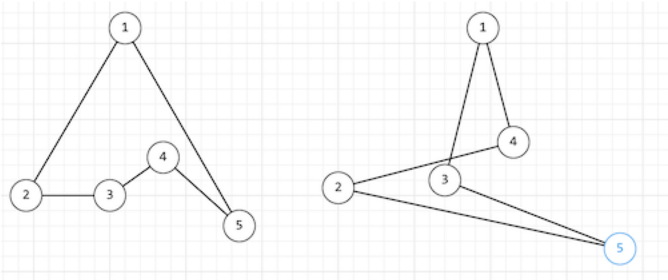
Заметим, что граф и его дополнение образуют полный граф (для каждой вершины сумма рёбер, выходящих из вершины в начальном графе, и рёбер, выходящих из вершины в дополнении графа, равна $n-1$, где n - кол-во вершин в графе). Выберем произвольную вершину A. В графе больше 5 вершин, т. е. 6 и более, значит, по принципу Дирихле, либо в начальном графе, либо в дополнении графа степень A больше или равна 3.

1) Пусть степень вершины A в начальном графе меньше 3, значит, по доказанному, степень A в дополнении графа больше или равна 3. Обозначим 3 вершины, с которыми соединена A в дополнении графа, как X, Y, Z. Заметим, что если в дополнении графа есть хотя бы одно ребро XY, YZ, ZX, то существует цикл длины 3 (либо AXY, либо AYZ, либо AZX), а если таких рёбер нет, то в начальном графе X, Y, Z соединены рёбрами, т. е. существует цикл XYZ. Значит либо в начальном графе, либо в его дополнении есть цикл длины 3.

2) Пусть степень вершины A в начальном графе больше 3. Тогда аналогично 1) в начальном графе существуют 3 вершины X, Y, Z, с которыми соединена A, и либо в начальном графе существует цикл длины 3 (либо AXY, либо AYZ, либо AZX), либо в дополнении графа существует цикл XYZ.

Таким образом, либо в начальном графе, либо в его дополнении есть цикл длины 3, если в графе больше 5 вершин. ■

Пример графа на 5 вершинах, такого что ни граф, ни его дополнение не содержат цикла длины 3. (Каждый из графов содержит только цикл длины 5)



№6

В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т.е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

Доказательство:

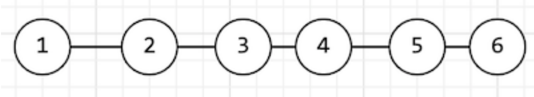
В дереве число вершин на 1 больше числа рёбер. Пусть в дереве n вершин, тогда рёбер в дереве $n-1$. Значит сумма степеней вершин в дереве равна $2n-2$ (удвоенное число рёбер). Необходимо доказать, что в дереве больше половины вершин (т. е. больше $\frac{n}{2}$) имеют степень 1. Пусть это не так, тогда в дереве степень 1 имеют $x \leq \frac{n}{2}$ вершины. Значит сумма степеней оставшихся $n-x$ вершин равна $2n-2-x$. Заметим, что оставшиеся вершины могут иметь только степень, не меньшую 3 (0 не могут, тк дано дерево, 1, 2 по усл). Значит сумма степеней вершин не меньше чем $3(n-x) = 3n-3x$. Сравним $3n-3x$ и $2n-2-x$: $3n-3x \vee 2n-2-x$; $n+2 \vee 2x$; $x \leq \frac{n}{2} \Rightarrow 2x \leq n \Rightarrow n+2 > 2x \Rightarrow 3n-3x > 2n-2-x$ Таким образом, получили, что минимальная возможная сумма степеней вершин в дереве больше суммы степеней вершин в графе, т. е. получили противоречие. Значит предположение неверно, и в дереве больше половины вершин имеют степень 1. ■

№7

В дереве на 2021 вершине нет простого пути длины 6. Докажите, что в этом дереве есть вершина степени не меньше 33.

Доказательство:

Если дереве на 2021 вершине нет простого пути длины 6, то в дереве длина всех путей меньше или равна 5. Рассмотрим путь самой большой длины в этом дереве. Заметим, что если степени первой и последней вершины в этом пути не равны 1, то в дереве есть путь большей длины, чем выбранный (тк в дереве нет циклов, то если степени этих вершин больше 1, то эти вершины будут соединены ещё хотя бы с одной вершиной не из выбранного пути, и найдется путь длинее выбранного), таким образом, первая и последняя вершина в этом пути имеют степень 1. Пусть длина самого длинного пути в дереве равна 5. Пронумеруем вершины в этом пути как 1, 2, 3, 4, 5, 6.



По доказанному степени вершин 1 и 6 равны 1. Построим граф с максимальным количеством вершин, в котором степень каждой вершины меньше 33 и нет простого пути длины 6. Покажем, что в этом графе будет меньше 2021 вершины (таким образом, если в начальном графе не было бы пути длины 5, то в нём было бы меньше вершин, чем в построенном графе, т. е. тоже меньше 2021). Тк необходимо построить граф с максимальным количеством вершин, пусть степень вершин 2 и 5 равны 32, т. е. вершины 2 и 5 соединим еще с 30 вершинами (каждую) (причём ни одна из этих 60 не соединена ни с одной другой из остальных 59, тк иначе в графе не все рёбра будут мостами), в графе стало $6 + 30 * 2 = 66$ вершин. Заметим, что степень новых вершин должна быть 1, тк иначе существуют пути длины 6 (например, путь 65432XY, где X - новая вершина, соединеная с 2, а Y - вершина, соединеная с X, отличная от 2, аналогично 12345XY, где X - новая вершина, соединеная с 5, а Y - новая вершина, соединеная с X, отличная от 5). Аналогично соединим каждую из вершин 3, 4 еще с 30 новыми вершинами (1), а каждую из 60 полученных вершин еще с 31 новой вершиной (2). Заметим, что 60 новых вершин имеют степень 32 и соединены либо с 3, либо с 4, и еще с 31 висячей вершиной. Также заметим, что больше в граф нельзя добавить вершины, тк иначе будет существовать простой путь длины 6, например, ZXY4321 (где X - вершина, полученная на шаге (2), а Y - вершина, полученная на шаге (1), а Z - вершина, соединеная с X, отличная от Y) (или простой путь ZXY3456). Таким образом, в этом графе $6 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 30 \cdot 31 = 1926 < 2021$ вершин. Значит, необходимо добавить в граф еще несколько вершин, причем, тк в дереве нет простого пути длины 6, эти вершины можно добавить только к вершинам с степенью 32, значит в графе будет вершина с степенью не меньше 33. Таким образом, в графе с простым путем длины 5 (и в котором нет вершины степени не меньше 33) максимальное количество вершин равно $1926 < 2021$, значит в графах, в которых нет просто пути длины 5 (и в которых нет вершины степени не меньше 33) количество вершин меньше $1926 \Rightarrow$ меньше 2021, а значит если в дереве на 2021 вершине нет пути длины 6, то в этом дереве есть вершина степени не меньше 33.

■