Дискретная математика

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

November 18, 2021

№1

Верно ли, что множество прямых на плоскости имеет мощность континуум?

Решение:

Докажем, что верно, для этого докажем, что множество прямых на плоскости имеет мощность не меньше и не больше континуума.

1) Не меньше:

Любая прямая задаётся парой чисел (k, b) (тк $y = kx + b$), те парой действительных чисел. По определению множество бесконечных двоичных последовательностей имеет мощность континуум. Рассмотрим прямые, которые параллельны оси Ox, те имеют $k = 0$: такие прямые пересекают ось Oy в точке b, а значит таких прямых столько же, сколько действительных точек на прямой, а значит их не меньше континуума, тогда множество прямых на плоскости имеет мощность не меньше континуума.

2) Не больше:

Любая прямая задаётся парой чисел (k, b). Заметим, что R^2 равномощно R, те множество пар равномощно множеству R, а значит множество прямых на плоскости имеет мощность не больше континуума.

Таким образом, множество прямых на плоскости имеет мощность континуум.

Ответ: Верно

№2

Докажите, что множество неубывающих бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуум.

Доказательство:

Докажем, что это множество имеет мощность не меньше и не больше континуума.

1) Не больше:

Докажем, что таких последовательностей не больше континуума. Множество натуральных чисел счётно. Покажем, что существует однозначное соответствие между последовательностью неатуральных чисел (не обязательно неубывающих) и двоичной последовательностью. Каждое натуральное число будем представлять в виде n 1, где n - представляемое натуральное число. После числа пишем 0 (отделяем от соседей). Таким образом, последовательностей натуральных чисел не больше континуума, а значит множество неубывающих бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность не больше континуума.

2) Не меньше:

По определению множество бесконечных двоичных последовательностей имеет мощность континуум. Рассмотрим двоичную последовательность и построим соответствующую этой последовательности последовательность неубывающих натуральных чисел: пусть такая последовательность начинается на $n_1 = 1$, независимо от того, какую двоичную последовательность рассматриваем. Далее n_k строим так, что $n_k = n_{k-1}$, если текущий член двоичной последовательности равен 0, и $n_k = n_{k-1} + 1$, если текущий член двоичной последовательности равен 1. Таким образом, мы построили неубывающую бесконечную последовательность натуральных чисел , и каждой построенной последовательности соответствует ровно одна двоичная последовательность, а значит множество неубывающих бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность не меньше континуума.

Таким образом, множество неубывающих бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуум. ■

№3

Верно ли, что множество невозрастающих бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуум.

Решение:

Заметим, что если последовательность невозрастающих натуральных чисел бесконечна, то с какого-то места k все её члены будут попарно равны (т е $a_{k-1} > a_k = a_{k+1} = a_{k+2}, \dots$). Тогда можно отбросить члены последовательности, начиная с a_{k+1} и рассматривать конечные невозрастающие последовательности. Множество невозрастающих бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность не больше, чем континуум (из 2.1 последовательностей натуральных чисел не больше континуума), и так же множество натуральных чисел счётно. Покажем, что множество невозрастающих конечных последовательностей натуральных чисел счётно. Для этого покажем нумерацию таких последовательностей: сначала пересчитаем все последовательности с суммой членов 1, потом с суммой 2 итд. Для каждого натурального числа n существует лишь конечное число конечных последовательностей натуральных чисел с суммой членов равной n, а значит таким образом можно пересчитать все конечные последовательности натуральных чисел, а значит множество невозрастающих бесконечных последовательностей натуральных чисел счётно.

Ответ: Неверно

№4

Счётно ли множество бесконечных двоичных последовательностей $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$, в которых каждый отрезок нечётной длины $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+2k}$ содержит почти поровну нулей и единиц (модуль разности равен 1)?

Решение:

Докажем, что такое множество несчётно. Для этого покажем, что подмножество этого множества несчётно (а всякое подмножество счётного множества конечно или счётно). Рассмотрим последовательности, в которых каждый член равен либо 01, либо 10: такие последовательности удовлетворяют условию, тк сумма цифр каждого члена равна 1, членов нечётное количество, а значит модуль разности равен 1. Заметим, что если член 01 закодировать как 0, а 10 как 1, то каждая такая последовательность соответсвует своя последовательности из 0 и 1, а занчит таких последовательностей не меньше, чем континуум, а значит мощность множества таких последовательностей несчётна.

Таким образом, множество бесконечных двоичных последовательностей $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots,$ в которых каждый отрезок нечётной длины $b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+2k}$ содержит почти поровну нулей и единиц (модуль разности равен 1) имеет несчётное подмножество, а значит несчётно.

Ответ: Нет

№5

Углом на плоскости называется фигура, состоящая из точки и двух исходящих из неё лучей. Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся углов, таких чтобы никакие два из них не имели одинаковую градусную меру?

Решение:

Покажем, как можно построить континуум непересекающихся углов, таких чтобы никакие два из них не имели одинаковую градусную меру. Заметим, что рациональных точек на любом отрезке континуум. Выберем отрезок $[0; 1]$ на оси Oy, на нём будем отмечать вершины углов, их будет континуум. Из каждой вершины проведем луч паралелльно оси Oy влево (ни один из этих лучей не пересекается, тк они все паралелльны друг другу). Для вершины в точке $(0; 1)$ проведём второй луч вдоль оси Oy, те получим угол с градусной мерой $90°$, этот угол не пересекает остальные углы, тк его вершина находится выше вершины каждого другого угла. Из угла с вершиной в точке (0; 0) проведём второй луч так, чтобы этот угол составлял $1°$ с осью Ox (те угол равен $179°$). Далее для каждого угла с вершиной в точке $(0; y)$ будем проводить второй луч так, чтобы градусная мера угла была $(1+89y)°$ с осью Ox (или другими словами, градусная мера угла была $(180-1-89y)°$ =$(179-89y)°$). Заметим, что тогда все углы будут иметь разную градусную меру (чем выше будет вершина угла, тем меньше будет его градусная мера), и никакие два угла не пересекутся (лучи, параллельные оси Ox лежат в 2-ой координатной четверти, непараллельные в 1-ой).

Ответ: Можно

№6

Функция называется периодической, если для некоторого числа T и любого x выполняется $f(x+T) = f(x)$. Счётно ли множество множество периодических функций $f : Q \to Q$?

Решение:

Докажем, что множество таких функций $f : Q \to Q$ несчётно. По определению континуум - мощность множества бесконечных двоичных последрвательностей $\{0, 1\}^N$. Рассмотрим множество из всех тотальных функций из рациональных чисел на отрезке $[0, 1)$ в $\{0, 1\}$. Каждая такая функция отображает счётное множество (тк этот полуинтервал - подмножество счётного множества Q) в множество $\{0, 1\}$, те состоящее из 2 элементов, а значит множество таких функций имеет мощность 2^N, те континуум. По определению периодической функции выполняется $f(x+T) = f(x)$ для некоторого числа T. Рассмотрим $T \in Z$. Тогда каждое отображении можно представить как отображение рационального числа $x \in [0, 1)$ и T, как $x + T \in Q$. Заметим, что можно выбирать T так, что получится отображение всего множества Q в $\{0, 1\}$, а значит множество периодических функций $f : Q \to Q$ будет иметь мощность континуум, те несчётно.

Решение:

Несчётно

№7

Докажите, что если A ∪ B имеет мощность континуум, то A или B имеет мощность континуум. (Замечание. Никому неизвестно, существуют ли множества промежуточной мощности между счетными и континуальными.)

Доказательство:

Заметим, что если и A, и B конечны или счётны, то их объединение тоже конечно или счётно, те не континуум, а значит хотя бы одно из множеств A и B несчётно, те не меньше мощности континуум. Также заметим, что мощность объединения множеств A, B совпадает с наибольшей из мощностей A, B (те $|A \cup B| = max(|A|, |B|)$), а значит мощность A, B не больше мощности континуум. Тогда A или B имеет мощность континуум. ■