Дискретная математика

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

November 10, 2021

№1

Докажите, что множество конечных подмножеств рациональных чисел счётно.

Доказательство:

Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно, а число конечных подмножеств рациональных чисел счётно. Это можно доказать следующим образом: начинаем выбирать все подмножетсва, сумма которых равна 1, их конечное число, потом считаем те, сумма которых равна 2, их тоже конечное число, итд, таким образом, число конечных множеств подмножеств рациональных чисел счётно. Множество рациональных чисел счётно. Таким образом, множество конечных подмножеств рациональных чисел счётно. ■

№2

Функция называется периодической, если для некоторого числа T и любого x выполняется $f(x+T) = f(x)$. Докажите, что множество периодических функций $f : Z \to Z$ счётно.

Доказательство:

Обозначим как A_T множество периодических функций с периодом T. Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно, а значит, если в A_T счётное число элементов, то множество периодических функций $f : Z \to Z$ счётно (множество из множеств периодических функций счётно). Докажем это: по определению периодической функции $f(x+T) = f(x)$, те $f(1) = n_1, f(2) = n_2, \ldots, f(N) = n_N$, а значит в A_T счётное число элементов. ■

№3

Верно ли, что если A бесконечно, а B счётно, то A $\triangle$ B равномощно A ?

Решение:

Неверно, тк существует контрпример: пусть A, B - совпадают с множеством натуральных чисел, тогда $A \triangle B$ равно пустому множеству (тк A, B совпадают), и мощность $A \triangle B$ не равна мощности A.

Ответ: Неверно

№4

Установите взаимно однозначное соответствие между множеством бесконечных последовательностей из 0 и 1 и множеством бесконечных последовательностей из 0, 1, 2, 3

Решение:

Числу 0 ставим в соответствие 00, 1 ставим в соответствие 01, 2 - 10, 3 - 11 (например, последовательности 1230... ставится в соответствие последовательность 01101100...), таким образом, каждой последовательности из 0, 1, 2, 3 ставится единственная последовательность из 0 и 1 и каждой последовательности из 0, 1 ставится единственная последовательность из 1, 2, 3, 0.

№5

Докажите, что множество сходящихся к 0 бесконечных последовательностей рациональных чисел имеет мощность континуум.

Доказательство:

1) Докажем, что таких сходящихся последовательностей не меньше континуума. По определению множество бесконечных двоичных последовательностей имеет мощность континуум. Рассмотрим двоичную последовательность и построим соответствующую этой последовательности сходящуюся: все нули оставим, а все единицы пронумеруем и вместо текущей единицы будем брать число $\frac{1}{n}$, где n - номер текущей единицы. Таким образом, мы построили последовательность, которая сходится к 0, причём все построенные последовательности будут различными, все члены последовательности - рациональные числа, а значит множество сходящихся к 0 бесконечных последовательностей рациональных чисел имеет мощность не меньше континуума.

2) Докажем, что таких сходящихся последовательностей не больше континуума. Множество рациональных чисел счётно, каждое рациональное число представимо в виде дроби $\frac{p}{q}$, $p \in Z, q \in N$. Покажем, что существует однозначное соответствие между последовательностью рациональных чисел (не обязательно сходящейся к 0) и двоичной последовательностью. Каждое рациональное число будем представлять в виде последовательности из 0 и 1 следующим образом: если число отрицательное пишем в начале 0, далее пишем $|p|$ 1, потом пишем 0 (отделяем числитель от знаменателя) и пишем ещё q 1. После числа пишем 00 (отделяем от соседей). Таким образом, сходящихся к 0 последовательностей рациональных чисел не больше континуума.

Таким образом, сходящихся к 0 последовательностей рациональных чисел не меньше и не больше континуума, а значит множество сходящихся к 0 бесконечных последовательностей рациональных чисел имеет мощность континуум.
■

№6

Рассмотрим бесконечные последовательности из 0 , 1 и 2 , в которых никакая цифра не встречается два раза подряд. Верно ли, что мощность множества таких последовательностей имеет мощность континуум?

Решение:

Докажем, что верно. Для этого покажем, как можно построить последовательность из 0, 1, 2 так, что существует биекция между множеством бесконечных двоичных последовательностей и множеством бесконечных последовательностей из 0, 1, 2, те построим последовательность из 0, 1, 2 (для удобства далее обозначим её как A), которая соответствует двоичной последовательности (причём разной двоичной последовательности соответсвует разная последовательность из 0, 1, 2, и каждой двоичной последовательности соответствует ровно одна такая последовательность). Если двоичная последовательность начинается на 0, то пусть A начинается на 0, иначе двоичная последовательность начинатеся на 1, а второй член равен либо 0, либо 1. Тогда если двоичная последовательность начинается на 10, то первый элемент в A равен 1, а если двоичная начинается на 11, но первый элемент в A равен 2. По условию в A никакая цифра не встречается два раза подряд. Покажем, как соблюдая это условие продолжить строить A. Если в двоичной последовательности текущая цифра равна 1, то, если предыдущий элемент в A равен 1, добавим в A 0, если 2, добавим 1, если 0, добавим 2. Если в двоичной последовательности текущая цифра равна 0, то, если предыдущий элемент в A равен 1, добавим в A 2, если 2, добавим 0, если 0, добавим 1. Таким образом, одинаковые цифры не идут подряд, и при этом разной двоичной последовательности соответсвует разная последовательность из 0, 1, 2, и каждой двоичной последовательности соответствует ровно одна такая последовательность (Пример: двоичная последовательность равна 010111001..., тогда ей соответствует последовательность 020210121...). Таким образом, мощность множества последовательностей из 0, 1, 2, в которых никакая цифра не встречается два раза подряд, имеет мощность континуум.

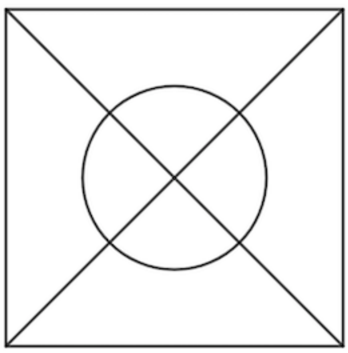
Ответ: Верно

№7

Крестом называется фигура, состоящая из двух диагоналей квадрата (см. рисунок). Докажите, что любое множество непересекающихся крестов на плоскости конечно или счётно.

Доказательство:

Пусть диагонали квадрата пересекаются в точке О. Пострим окружность в точке О с радиусом $\frac{1}{\varepsilon}$. Эта окружность разделится на 4 части диагоналями квадрата (крестом).



В каждом секторе найдется точка с рациональными координатами, выберем по одной такой точке в каждом секторе. Таким образом, каждому кресту будут соответствовать 4 точки, причём, тк кресты не пересекаются, каждому будут соответствовать свои 4 точки. Множество рациональных чисел счётно, а значит и любое множество непересекающихся крестов на плоскости конечно или счётно. ■