Дискретная математика

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

September 26, 2021

№1

а)

$(A \backslash B) \cap ((A \cup B) \backslash (A \cap B)) = A \backslash B$ - ?

Решение:

Для удобства обозначим выражения: $x \in A = a,\ x \in B = b$, тогда $(A\backslash B) \cap ((A \cup B)\backslash(A \cap B)) = (a \wedge \overline{b}) \wedge ((a \vee b) \wedge \overline{(a \wedge b)}) = (a \wedge \overline{b}) \wedge ((a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b})) = a \wedge \overline{b} \wedge ((a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}))$ (1)

$A \backslash B = a \wedge \overline{b}$ (2)

При $a = 0 : (1) = 0,\ (2) = 0$. При $a = 1 : (1) = \overline{b} \wedge (1 \wedge \overline{b}) = \overline{b}$, $(2) = \overline{b}$. Таким образом, $(1) = (2) \Rightarrow (A\backslash B) \cap ((A \cup B)\backslash(A \cap B)) = A\backslash B$.

Ответ: верно

б)

$(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$ - ?

Решение:

Для удобства обозначим выражения: $x \in A = a,\ x \in B = b,\ x \in C = c$, тогда $(A \cap B)\backslash C = a \wedge b \wedge \overline{c}$ (1)

$(A\backslash C) \cap (B\backslash C) = (a \wedge \overline{c}) \wedge (b \wedge \overline{c}) = a \wedge b \wedge \overline{c}$ (2)

Заметим, что $(1) = (2) \Rightarrow (A \cap B)\backslash C = (A\backslash C) \cap (B\backslash C)$

Ответ: верно

в)

$(A \cup B) \backslash (A \backslash B) \subseteq B$

Решение:

Заметим, что выражение $(A \cup B) \backslash (A \backslash B)$ определяет множество, которое состоит из элементов, принадлежащих объединению множест A и B, но не принадлежащих множеству$(A \backslash B)$, которое в свою очередь состоит из элементов, которые принадлежат множетсву A, но не принадлежат множетсву B. Таким образом, выражение $(A \cup B) \backslash (A \backslash B)$ состоит из элементов, которые принадлежат множествам A и B, и не состоит из элементов, которые принадлежат только множествеу A, т.е. состоит из элементов множетсва B. Значит множество, которое определяется выражением $(A \cup B) \backslash (A \backslash B)$, совпадает с $B \Rightarrow (A \cup B) \backslash (A \backslash B) \subseteq B$ - истина.

Ответ: верно

г)

$((A \backslash B) \cup (A \backslash C)) \cap (A \backslash (B \cap C)) = A \backslash (B \cup C)$ - ?

Решение:

Для удобства обозначим выражения: $x \in A = a,\ x \in B = b,\ x \in C = c$, тогда $((A \backslash B) \cup (A \backslash C)) \cap (A \backslash (B \cap C)) = ((a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{c})) \wedge (a \wedge \overline{b \wedge c}) = (a \wedge (\bar{b} \vee \bar{c})) \wedge (a \wedge (\bar{b} \vee \bar{c})) = a \wedge (\bar{b} \vee \bar{c}) \neq a \wedge (\bar{b} \wedge \bar{c}) = A \backslash (B \cup C)$

Значит, $((A \backslash B) \cup (A \backslash C)) \cap (A \backslash (B \cap C)) \neq A \backslash (B \cup C)$

Ответ: неверно

№2

$A_1 \backslash B_1 = A_9 \backslash B_9$

Д-ать: $A_2 \backslash B_8 = A_5 \backslash B_5$

Доказательство:

1) Тк A_n - подмножество A_{n-1}, ..., A_3 - подмножество A_2, A_2 - подмножество A_1, то каждое из множеств A можно записать как $A_n = A_{n+1} \cup a_n$, где $a_n = A_n \backslash A_{n+1}$

2) Тк B_{n-1} - подмножество B_n, ..., B_2 - подмножество B_3, B_1 - подмножество B_2, то каждое из множеств B можно записать как $B_{n+1} = B_n \cup b_n$, где $b_n = B_{n+1} \backslash B_n$

Из 1) и 2) следует, что $A_1 = A_2 \cup a_1 = A_3 \cup a_2 \cup a_1 = \cdots = A_9 \cup a_8 \cup a_7 \cup \cdots \cup a_2 \cup a_1$ и что $B_9 = B_8 \cup b_8 = B_7 \cup b_7 \cup b_8 = \cdots = B_1 \cup b_1 \cup b_2 \cup \cdots \cup b_7 \cup b_8$

Таким образом, $A_1 \backslash B_1 = (A_9 \cup a_8 \cup a_7 \cup \cdots \cup a_2 \cup a_1) \backslash B_1 = A_9 \backslash B_9 = A_9 \backslash (B_1 \cup b_1 \cup b_2 \cup \cdots \cup b_7 \cup b_8)$. Это равенство выполняется только в том случае, когда $a_8 \cup a_7 \cup \cdots \cup a_2 \cup a_1 = b_1 \cup b_2 \cup \cdots \cup b_7 \cup b_8 = 0$, т. е. каждое из множеств $a_1, a_2, \ldots, a_8, b_1, b_2, \ldots, b_8$ равно пустому множеству.

$A_2 \backslash B_8 = (A_3 \cup a_2) \backslash (B_7 \cup b_7) = (A_4 \cup a_3 \cup a_2) \backslash (B_6 \cup b_6 \cup b_7) = (A_5 \cup a_4 \cup a_3 \cup a_2) \backslash (B_5 \cup b_5 \cup b_6 \cup b_7)$. Зная, что каждое из множеств $a_1, a_2, \ldots, a_8, b_1, b_2, \ldots, b_8$ равно пустому множеству, получаем, что $A_2 \backslash B_8 = (A_5 \cup a_4 \cup a_3 \cup a_2) \backslash (B_5 \cup b_5 \cup b_6 \cup b_7) = A_5 \backslash B_5$ ■

№3

Д-ть: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

Доказательство:

1) При $n = 1:\ 1 = 1$ - истина

2) Пусть равенство выполняется для $n = k$, значит $1^3+2^3+\dots+k^3 = (1+2+\dots+k)^2$. При $n = k+1:\ 1^3+2^3+\dots+k^3+(k+1)^3 = (1+2+\dots+k)^2+(k+1)^3$ Необходимо доказать, что $(1+2+\dots+k)^2+(k+1)^3 = (1+2+\dots+k+k+1)^2$

$(1 + 2 + \dots + k + k + 1)^2 - (1 + 2 + \dots + k)^2 = (k + 1)(2 + 4 + \dots + 2k + k + 1)$ (по формуле разности квадратов)

$2 + 4 + \dots + 2k$ - арифметическая прогрессия с разностью 2, значит $2 + 4 + \dots + 2k = \frac{2+2k}{2}(k) = (k + 1)k$. Тогда $(k + 1)(2 + 4 + \dots + 2k + k + 1) = (k + 1)((k + 1)k + k + 1) = (k + 1)((k + 1)(k + 1)) = (k + 1)^3$. Таким образом, $(1+2+\dots+k+k+1)^2-(1+2+\dots+k)^2 = (k+1)^3 \Rightarrow (1+2+\dots+k)^2+(k+1)^3 = (1+2+\dots+k+k+1)^2$. Значит, по методу мат индукции $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$. ■

№4

Д-ть: $F_{2k} - F_{2k-1} + \dots + F_4 - F_3 + F_2 - F_1 = F_{2k-1}$

Доказательство:

1) При $k = 1$: $F_2 - F_1 = 1 - 1 = 0 = F_1$ - истина

2) Пусть при $k = n$ выполняется равенство, тогда $F_{2n} - F_{2n-1} + \dots + F_4 - F_3 + F_2 - F_1 = F_{2n-1}$

При $k = n + 1$: необходимо доказать, что $F_{2n+2} - F_{2n+1} + F_{2n} - F_{2n-1} + \dots + F_4 - F_3 + F_2 - F_1 = F_{2n+1}$

$F_{2n+2} - F_{2n+1} + F_{2n} - F_{2n-1} + \dots + F_4 - F_3 + F_2 - F_1 = F_{2n+2} - F_{2n+1} + F_{2n-1} = F_{2n} + F_{2n-1} = F_{2n+1} = F_{2n+1}$

Значит, по методу мат индукции $F_{2k} - F_{2k-1} + \dots + F_4 - F_3 + F_2 - F_1 = F_{2k-1}$. ■

№5

Доказательство:

(Пример системы, в которой любые 3 дуги имеют общую точку, а общей точки у всех дуг нет (при этом каждая дуга произвольного размера) см на последней странице (рис 1))

Если каждая дуга меньше 180°, то каждые пары дуг могут пересекаться только на одной половине окружности (пересечение - только одна дуга, меньшая 180°), т. е. образуют только одно множество точек пересечения. Т. к. любые три дуги имеют общую точку, то для любой пары дуг, третья проходит через точку пересечения этой пары.(1) Пусть есть 2 пересекающиеся дуги (рис 2), тогда часть третьей дуги принадлежит множеству точек пересечения этих 2 дуг (рис 3), следовательно, существует множество точек пересечения этих 3 дуг. Из утверждения (1) следует, что часть всех последующих дуг должна принадлежать множеству точек пересечения этих предыдущих дуг, таким образом, все дуги имеют множество точек пересечения, т. е. имеют общую точку. ■

№6

Доказательство:

Решим с помощью индукции относить количества чисел.

1) При $n = 1$: есть одно число, которое уже упорядоченно в порядке возрастания.

2) Пусть можно расставить $n = k$ чисел в порядке возрастания. Необходимо доказать, что тогда можно расставить $n = k + 1$ чисел в порядке возрастания. Пронумеруем все числа как $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$. Мы знаем, что можно расставить k подряд стоящих чисел, значит, можно расставить числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ в порядке возрастания, т.е. получится последовательность из k упорядоченных чисел и числа a_{k+1} (поэтому будем считать, что $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_k$). Необходимо упорядочить число a_{k+1}, т.е. поставить его между числами $a_i \leq a_{k+1} \leq a_{i+1}$. Для этого переставим числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ в обратном порядке, получили последовательность $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_{k+1}$. Переставим все числа в обратном порядке, получим $a_{k+1}, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$. Далее переставим $i + 1$ число, получим $a_i, a_{i-1}, \dots, a_2, a_1, a_{k+1}, a_{i+1} \dots, a_k$. Далее переставим i чисел и получим $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, a_{k+1}, a_{i+1}, \dots, a_k$. Таким образом, мы получили упорядоченную последовательность, значит, можно расставить $n = k + 1$ чисел в порядке возрастания. Тогда по методу мат индукции можно расставить любое количество n чисел. ■