Дискретная математика

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

November 11, 2021

№1

Про функцию f из множества X в множество Y и множество $B \subseteq Y$ известно, что $f^{-1}\ (B) = X$. Верно ли, что $B = Y$?

Решение:

Например, для множеств $X = \{1\},\ Y = \{2, 3\}$ и $B = \{2\}$ и $f(1) = 2$ верно, что $f^{-1}(B) = X$, но при этом $B \neq Y$.

Ответ: нет

№2

Функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y , при этом A ∪ B ⊆ X и $f(A) = f(B)$. Верно ли, что при этих условиях $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(B))$? Приведите доказательство или контрпример в каждом случае.

Решение:

Для любого $a \in A$ элемент $f(a)$ принадлежит $f(A)$, а значит a принадлежит прообразу множества $f(A)$. Таким образом, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ и аналогично $B \subseteq f^{-1}(f(B))$. По условию $f(A) = f(B)$, значит $\forall a \in A\ \exists b \in B : f(a) = f(b) = z$. Пусть все такие z образуют множество Z, тогда $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(b)) = f^{-1}(Z)$.

Ответ: Верно

№3

Функция f определена на множестве $A \cup B$ и принимает значения в множестве Y . Если заменить в утверждении $f(A \triangle B)\ ?\ \ f(A) \triangle f(B)$ знак ? на один из знаков включения $\subseteq$ или $\supseteq$, получится утверждение. Какие из получившихся двух утверждений верны для любой f ? Приведите доказательство или контрпример в каждом случае.

Решение:

Контрпример для $f(A \triangle B) \subseteq f(A) \triangle f(B)$: Пусть $A = \{1,2,3,4\}, B = \{4,5\}(\Rightarrow A \cup B = \{1,2,3,4,5\}), f(A) = \{1,2,3\}(f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 3), f(B) = \{3,5\}(f(4) = 3, f(5) = 5)$, таким образом, $(A \triangle B = \{1,2,3,5\} \Rightarrow f(A \triangle B) = \{1,2,3,5\}$, но $f(A) \triangle f(B) = \{1,2,3\} \triangle \{3,5\} = \{1,2,5\}$ и $f(A \triangle B) \subseteq f(A) \triangle f(B)$, те $\{1,2,3,5\} \subseteq \{1,2,3\}$ - ложь.

Докажем, что $f(A \triangle B) \supseteq f(A) \triangle f(B)$ верно для любой f. Для любого $a \in (f(A) \setminus f(B)) :\ f(a)^{-1} \in (A \setminus B)$, аналогично для любого $b \in (f(B) \setminus f(A)) :\ f(b)^{-1} \in (B \setminus A)$, а значит $f(A \triangle B) \supseteq f(A) \triangle f(B)$.

Ответ: $f(A \triangle B) \supseteq f(A) \triangle f(B)$

№4

О функциях f из множества A в множество B и g из множества B в множество C известно, что g ∘ f биекция. Верно ли, что g всюду определена? (Множества A , B , C не обязательно конечные.)

Решение:

Неверно, тк существует контрпример: пусть множества A, B, C совпадают с множеством натуральных чисел, а $f(x) = x + 1, g(x) = x - 1$. Тогда $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5, \ldots$, а $g(2) = 1, g(3) = 2, g(4) = 3, g(5) = 4, \ldots$, таким образом, $g \circ f = g(f(x))$ - биекция, тк $g(f(1)) = 1, g(f(2)) = 2, g(f(3)) = 3, \ldots$, но при этом $g(1)$ не определена.

Ответ: Неверно

№5

О всюду определённых функциях f , g из множества A в себя известно, что f ∘ g ∘ f = id A . Верно ли, что f — биекция? (Множество A не обязательно конечное.)

Решение:

$(f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f)$, тк композиция функций ассоциативна, $f(g(x)) \circ f = f \circ g(f(x)) = id_A$ Функция является биекцией тогда и только тогда, когда она является инъекицей и сюръекцией. Заметим, что f является левой и правой обратной, а значит является инъекцией и сюръекцией (доказано на семинаре), а значит f - биекция.

Ответ: Верно

№6

О функциях f , g из множества A в себя (не обязательно всюду определённых) известно, что g ∘ f всюду определённая. Множество A состоит из 2021 элемента. Найдите минимально возможное количество элементов в образе $f \circ g(A)$.

Решение:

Покажем, что минимально возможное количество элементов в образе $f \circ g(A)$ равно 1. Количество элементов в образе $f \circ g(A)$ не равно 0, тк $g(f(A))$ всюду определена, те функция g определена на каждом элементе множества $f(A)$, в том числе $f(g(A))$. Пример, в котором количество элементов в образе $f \circ g(A)$ равно 1: пусть множество $= \{1, 2, 3, \ldots, 2021\}$ (состоит из 2021 элемента), $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, и f и g определены только в точке 1, тогда $g \circ f$ всюду определена, и количество элементов в образе $f \circ g(A)$ равно 1.

Ответ: 1

№7

В графе на n вершинах для любой пары вершин u и v есть ровно две вершины, с которыми соединены и u , и v. Докажите, что степени всех вершин в этом графе одинаковы.

Доказательство:

По условию для любой пары вершин u и v есть ровно две вершины, с которыми соединены и u , и v. Заметим, что если выбрать произвольные вершины a, b, то в графе есть ровно 2 вершины x, y, с которыми соедиенны и a, и b, а значит вершины a, b, x, y образуют простой цикл длины 4.

Выберем в графе произвольную вершину x, обозначим её степень d_x (те из x выходит d_x рёбер). Заметим, что если выбрать произвольную пару ребёр, которые исходят из вершины x (пусть это рёбра xa, xb), то существует вершина y такая, что существуют рёбра ay, by (тк по условию для любой пары вершин u и v есть ровно две вершины, с которыми соединены и u , и v), те образуется цикл длины 4 с вершиной x. Заметим, что пару рёбер из x можно выбрать $\frac{d_x(d_x-1)}{2}$ способами, а значит x входит в $\frac{d_x(d_x-1)}{2}$ простых цикла длины 4.

Пусть в графе k штук простых циклов длины 4. Заметим, что каждая вершина графа входит в одно и то же число простых циклов длины 4 (по условию), а значит каждая вершина входит в $\frac{4k}{n}$ цикла длины 4. Вернёмся к ранее выбранной вершине x: заметим, что для x $\frac{4k}{n} = \frac{d_x(d_x-1)}{2}$. Заметим, что из этого уравнения можно найти d_x, причём $d_x^2 - d_x - \frac{8k}{n} = 0$, а значит d_x зависит только от k и n и не зависит от выбранной вершины x, те какую бы вершину x мы не выбрали, её степень будет одна и та же. Таким образом, степени всех вершин в этом графе одинаковы.

$\blacksquare$