Дискретная математика

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

October 24, 2021

№1

Граф G можно по крайней мере тремя различными способами правильно раскрасить в 2 цвета. Докажите, что G несвязный.

Доказательство:

Докажем, что любой связный граф можно покрасить в 2 цвета не более 2 способами. Если граф 2-раскрашиваемый, то в неём длины всех циклов чётные. Выберем любую вершину x графа. Пусть цвет вершины x - 1, тк граф связный и 2-раскрашиваемый, то любая другая вершина y графа будет покрашена в цвет 1, если длина пути из x в y чётна, а иначе вершина y будет покрашена в цвет 2. Таким образом, цвет вершины x однозначно определяет цвет всех остальных вершин графа. Аналогично, если цвет вершины x - 2, то любая другая вершина y графа будет покрашена в цвет 2, если длина пути из x в y чётна, в 1 иначе, и цвет вершины x однозначно определяет цвет всех остальных вершин графа. Пусть существует 3-ий вариант раскраски связного графа. Тогда цвет x либо 1, либо 2, а это уже даёт однозначную раскраску, которая совпадает с одной из предыдущих, а значит любой связный граф можно покрасить в 2 цвета не более 2 способами.

Граф G можно по крайней мере тремя различными способами правильно раскрасить в 2 цвета, а значит он несвязный. ■

№2

Докажите, что в дереве на $2n$ вершинах можно выбрать независимое множество из n вершин.

Доказательство:

Любое дерево 2-раскрашиваемо, тк в 2 цвета можно раскрасить любой граф, не имеющий циклов нечётной длины (а в дереве нет циклов), значит дерево на $2n$ вершинах можно раскрасить в 2 цвета, причём для любой пары вершин x, y выполняется, что x и y покрашены в один цвет, если длина пути из x в y чётна, и в разный иначе. Таким образом, половину вершин дерева можно покрасить в цвет 1, а другую половину в цвет 2, а значит в дереве можно выбрать все вершины цвета 1 (или 2), и эти вершины образовывают независимое множество из n вершин.

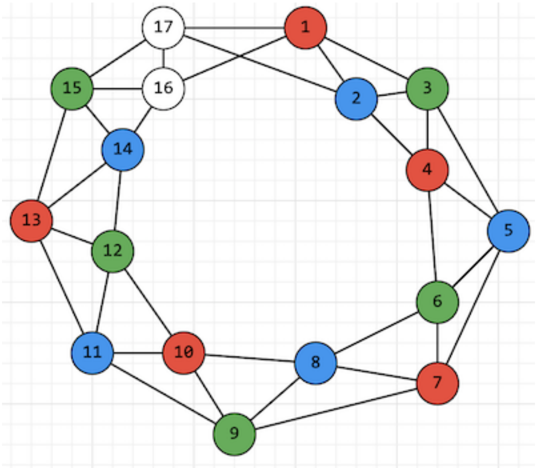
■

№3

В графе 17 вершин. Они расставлены по кругу так, что каждое из 34 рёбер графа соединяет пару соседних в расстановке вершин или пару вершин, между которыми есть ровно одна другая вершина. Можно ли вершины этого графа правильно раскрасить в 3 цвета?

Решение:

В графе 17 вершин и 34 ребра, значит каждая вершина будет соединена с 4 вершинами: 2 соседними и 2 через одну. Не ограничивая общности, пусть вершина 1 имеет цвет 1 (на рисунке цвет 1 - красный, 2 - синий, 3 - зелёный). Тода вершины 2 и 3 разного цвета (тк соединены ребром), и их цвет отличен от цвета 1 (не ограничивая общности, будет считать, что цвет вершины 2 - 2, а вершины 3 - 3). Значит, цвет вершины 4 - 1 (тк 4 соединена и с 3, и с 2), цвет вершины 5 - 2 (тк соединена с 4 и 3), цвет 6 - 3. Заметим, что таким образом, обходя граф по часовой стрелки, вершины будут разбиваться на тройки, где вершина с номером x, где $x = 1 \bmod(3)$, будет иметь цвет 1, а вершины с номерами $x+1, x+2$ будут иметь цвет 2 и 3. Заметим, что 17 не делится нацело на 3 и вершина 16 должна иметь цвет 1, но цвет 1 имеет вершина 1, которая соединена с 16, а значит вершина 1 не может иметь цвет 1, но аналогично какой бы цвет не имела бы вершина 1, такой цвет должна иметь вершина 16, а значит такой граф нельзя правильно раскрасить в 3 цвета.



Ответ: нет

№4

На столе лежит 200 фишек: 100 красных, на которых написаны числа от 1 до 100, и 100 синих, на которых также написаны числа от 1 до 100. Враг забрал 99 фишек со стола (по своему усмотрению). Докажите, что на столе осталась пара из красной и синей фишек, сумма чисел на которых не меньше 101

Доказательство:

Рассмотрим двудольный граф, левая доля которого состоит из 100 вершин - красных фишек, пронумеруем их как $r_1, r_2, \ldots, r_{100}$, где индекс вершины - число, написанное на фишке, аналогично правая доля двудольного графа состоит из 100 вершин $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ - синих фишек. Пусть в двудольном графе вершины соединены ребром, если они могут образовать пару из красной и синей фишки, значит каждая вершины из правой доли соединена с каждой вершиной левой доли (каждая вершина левой доли соединена с каждой вершиной правой доли), но при этом вершины каждой доли образуют независимое множество. Заметим, что если враг забирает 99 фишек максимального номинала (те для любой пары фишек с числами x и $x+1$ он предпочитает забрать фишку с числом $x+1$, а для графа убирание фишки - удаление соответсвующей вершины графа и всех рёбер, концом которых является эта вершина), но при этом на столе остаётся пара из красной и синей фишки, сумма чисел на которых не меньше 101, то на столе останется пара из красной и синей фишки, сумма чисел на которых не меньше 101, независимо от того, какие фишки забрал бы враг. Пусть враг забрал x красных фишек, значит он забрал $99 - x$ синих фишек. Если он забрал фишки максимального номинала, то в левой части графа останутся вершины r_1,$r_2, \ldots$,r_{100-x}, а в правой останутся вершины b_1,$b_2, \ldots$,b_{1+x} (тк $100 - (99 - x) = 1 + x$). Заметим, что вершины ,r_{100-x}, b_{1+x} остались в графе и соединены ребром, значит на столе остались красная и синяя фишки номиналом $100 - x$ и $1 + x$, сумма чисел на которых равна $100 - x + 1 + x = 101$. Значит, какие бы 99 фишек не забрал бы враг, на столе останется пара из красной и синей фишки, сумма чисел на которых не меньше 101. ■

№5

В графе на 30 вершинах (необязательно двудольном) между любыми тремя вершинами есть хотя бы два ребра. Докажите, что в графе есть совершенное паросочетание (из 15 рёбер).

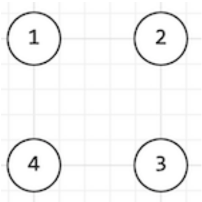
Доказательство:

Заметим, что если произвольные вершины x, y графа не соединены друг с другом ребром, то эти вершины соединены с каждой другой вершиной графа (тк по условию между любыми тремя вершинами есть хотя бы два ребра, а значит для любой тройки вершин x,y, z, где z - произвольная вершина графа, отличная от x, y, x будет соединена с z и y будет соединена с z). Таким образом, каждая вершина графа имеет как минимум $n - 2$ соседей, где n - количесвто вершин в графе.

Пусть x вершин графа имеют 28 соседей (степень 28), тогда $30 - x$ имеют степень 29, а значит сумма степень вершин графа равна $28x + 30 \cdot 29 - 29x = 30 \cdot 29 - x$. Заметим, что сумма степень вершин графа равна удвоенному числу вершин в гарфе, а значит может быть только чётной, те $(30 \cdot 29 - x)$ - чётное число. $30 \cdot 29 = 870$ - чёт $\Rightarrow x$ - чёт, а это значит, что в графе чётное число вершин имеют степень 29 и чётное число вершин имеют степень 28.

Покажем по индукции, что в графе на 30 вершинах есть совершенное паросочетание (из 15 рёбер).

1) Покажем, что в графе на 4 вершинах, в котором между любыми тремя вершинами есть хотя бы два ребра, есть совершенное паросочетание (из 2 рёбер).



Если вершины 2 и 3 не соединены между собой, то каждая из них соединена с вершинами 1 и 4 (доказано ранее), а значит в графе есть совершенное паросочетание 12, 43.

Если вершины 2 и 3 соединены между собой. Если 1 и 4 соединены между собой, то в графе есть совершенное паросочетание 14, 23, иначе каждая из вершин 1 и 4 соединена с вершинами 2 и 3, а значит в графе есть совершенное паросочетание12, 43.

Таким образом, выполняется для $n = 4$

2) Пусть выполняется для $n = k$, где k - чёт. Докажем, что выполняется для $n = k + 2$. В графе есть паросочетание из k вершин, пусть в него входят все вершины, кроме вершин a и b. Если a и b соединены между собой, то в графе $n = k + 2$ есть совершенное паросочетание. Пусть a и b не соединены между собой. Тогда a и b соединены со всеми остальными вершинами графа, а значит из паросочетания можно выбрать вершины x, y, которые соединены между собой, причём с ними соединены a и b. Тогда в графе есть рёбра ax, by, а значит в графе на $n = k + 2$ вершинах есть совершенное паросочетание.

Таким образом, по индукции в графе на 30 вершинах есть совершенное паросочетание (из 15 рёбер). ■

№6

Вася составил список из всех 12-элементных подмножеств 26-элементного множества, каждое записал по одному разу. Петя добавляет по одному элементу в каждое множество списка. Докажите, что Петя может так выполнить добавления, чтобы среди полученных 13-элементных множеств не было одинаковых.

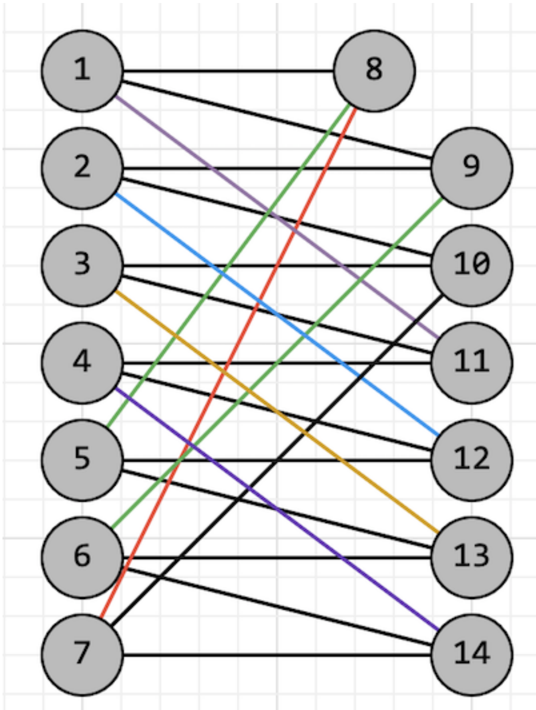
Доказательство:

Рассмотрим двудольный граф, левая доля которого состоит из вершин - 12-элементных подмножеств, а правая из вершин - 13-элементных подмножеств. Будем считать, что вершины из двух долей соединены ребром, если 2 подмножества отличаются ровно на 1 элемент (те вершина из левой доли соединена с вершиной из правой доли, если такое 13-элементое множество можно получить из 12-элементового добавлением ровно одного элемента). Тогда каждая вершина из левой доли соединена с $26 - 12 = 14$ вершинами из правой доли (тк всего 26 элементов, в 12-элементом множестве 12-элементов и 13-элементное множество можно получить добавлением в 12-элементное ровно 1 элемента из 14), при этом каждая вершина из правой доли соединена с 13 вершинами из левой доли (тк 12-элементное множество множно получить из 13-элементного удалением ровно одной вершины 13 способами). Таким образом, для каждого множества X вершин левой доли множество соседей $G(X)$ из правой доли содержит не меньше вершин, чем X, а тогда по теореме Холла в графе есть паросочетание размера числа элементов в левой доли, те для каждого 12-элементного подмножества можно выбрать 13-элементное подмножество так, что 13-элементные подмножества не повторяются, а значит Петя может так выполнить добавления, что среди полученных 13-элементных множеств не будет одинаковых. ■

№7

Постройте двудольный граф, в каждой доле которого 7 вершин, степени всех вершин равны 3 и при этом у любых двух вершин из одной доли есть ровно один общий сосед.

Решение:



Левая доля графа - вершины 1-7, правая - 8-14, каждая вершина имеет степень 3. Покажем, что у любых двух вершин из одной доли есть ровно один общий сосед.

1) Рассмотрим вершины левой доли: у вершин 1 и 2 ровно один общий сосед - 9, 1 и 3 - 11, 1 и 4 - 11, 1 и 5 - 8, 1 и 6 - 9, 1 и 7 - 8; 2 и 3 - 10, 2 и 4 - 12, 2 и 5 - 12, 2 и 6 - 9, 2 и 7 - 10, 3 и 4 - 11, 3 и 5 - 13, 3 и 6 - 13, 3 и 7 - 10, 4 и 5 - 12, 4 и 6 - 14, 4 и 7 - 14, 5 и 6 - 13, 5 и 7 - 8, 6 и 7 - 14.

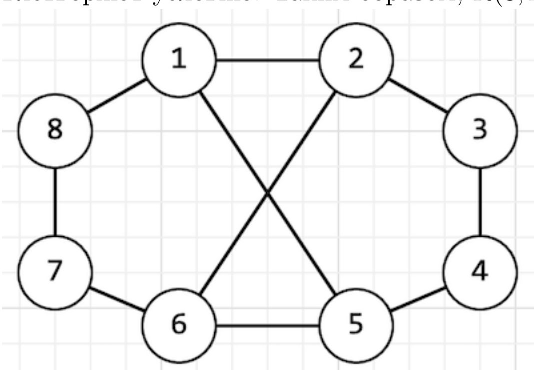
2) Рассмотрим вершины правой доли: у вершин 8 и 9 ровно один общий сосед - 1, 8 и 10 - 7, 8 и 11 - 1, 8 и 12 - 5, 8 и 13 - 5, 8 и 14 - 7, 9 и 10 - 2, 9 и 11 - 1, 9 и 12 - 2, 9 и 13 - 6, 9 и 14 - 6, 10 и 11 - 3, 10 и 12 - 2, 10 и 13 - 3, 10 и 14 - 7, 11 и 12 - 4, 11 и 13 - 3, 11 и 14 - 4, 12 и 13 - 5, 12 и 14 - 4, 13 и 14 - 6.

№8

Докажите, что R(3 , 4) = 9 . (R (3 , 4) — наименьшее из тех чисел n , что в любом графе на n вершинах есть либо клика размера 3, либо независимое множество размера 4.)

Доказательство:

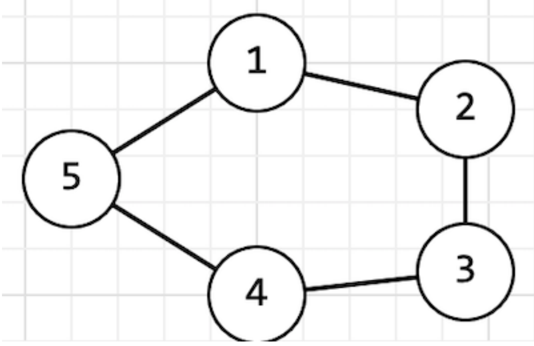
Докажем, что $R(3{,}4) > 8$. Существует граф на 8 вершинах такой, что в нём нет ни клики размера 3, ни независимого множества размера 4. Пример такого графа изображён ниже. А так как существует граф на 8 вершинах, который не удовлетворяет условию, то существуют графы на $x < 8$ вершинах, которые тоже не удовлетворяют условию. Таким образом, $R(3{,}4) > 8$.



На лекции доказано, что у произвольной вершины v графа на $N_0 = R(k-1,n) + R(k,n-1)$ вершине есть либо $R(k-1,n)$ соседей, либо $R(k{,}n-1)$ несоседей. В нашем случае у произвольной вершины v есть либо $R(2{,}4)$ соседей, либо $R(3{,}3)$ несоседей.

Докажем, что $R(2, x) = x$. Заметим, что в графе есть клика размера 2, если в графе есть ребро. Однако максимальный размер графа, в котором нет рёбер и нет независимого множества размера x $x - 1$ (такой граф состоит из $x - 1$ изолированной вершины), а значит в любом графе, в котором больше $x - 1$ вершины либо нет рёбер, но тогда в нём есть хотя бы x изолированных вершин, либо есть ребро. Таким образом, $R(2, x) = x$, те $R(2, 4) = 4$.

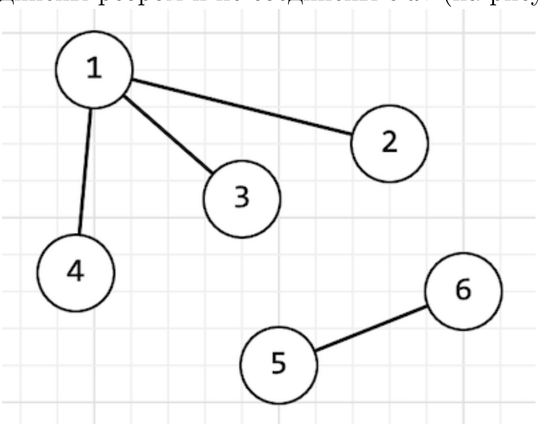
Докажем, что $R(3,3) = 6$. Существует граф на 5 вершинах такой, что в нём нет ни клики размера 3, ни независимого множества размера 3. Пример такого графа изображён ниже.



А так как существует граф на 5 вершинах, который не удовлетворяет условию, то существуют графы на $x < 5$ вершинах, которые тоже не удовлетворяют условию. Таким образом, $R(3,3) > 5$. По доказанному $R(2, x) = x$, значит $R(2,3) = 3$. Найдём $R(3, 2)$.Очевидно, что $R(3, 2)$ больше 2 (тк в графе меньше 3 вершин и нет клики размера 3). Заметим, что если в графе нет независимого множества размера 2, то все вершины графа соединены ребром, тогда граф с 3 вершинами - полный, значит в нём есть клика размера 3. Если в графе с 3 вершинами нет клики размера 3, он не полный, тогда в нём есть независимое множество размера 2. Таким образом, $R(3, 2) = 3$. Тк у произвольной вершины v графа на $N_0 = R(k - 1, n) + R(k, n - 1)$ вершине есть либо $R(k - 1, n)$ соседей, либо $R(k,n - 1)$, то у произвольной вершины графа на $N_0 = R(2, 3) + R(3, 2) = 3 + 3 = 6$ вершинах есть либо $R(2, 3) = 3$ соседа, либо $R(3,2) = 3$ несоседа. Рассмотрим граф на 6 вершинах и зафиксируем в нём вершину x. Возможны 2 случая: у x есть 3 соседа, либо 3 несоседа.

1) у x есть 3 соседа

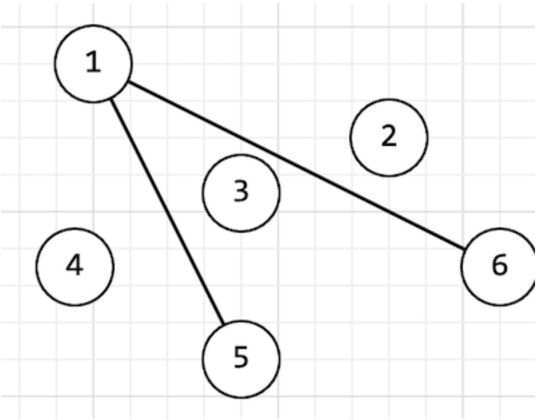
Тогда x соединён ребром с 3 вершинами и имеет 2 несоседа (тк всего в графе 6 вершин). Обозначим 2 несоседей как a и b. Если a и b не соединены ребром, то в графе есть независимое множество размера 3 - x, a, b, иначе a и b соединены ребром и не соединены с x. (на рисунке x - 1, a, b - 5, 6)



Тогда если среди вершин 2, 3, 4 хотя бы 2 соединены ребром, в графе есть клика размер 3, состоящая из этих двух вершин и вершины x, а иначе есть независимое множество размера 3, состоящее из вершин 2, 3, 4. Таким образом, если у x есть 3 соседа, то в графе на 6 вершинах есть либо клика размера 3, либо независимое множество размера 3.

2) у x есть 3 несоседа

Тогда x соединён ребром с 2 вершинами и имеет 3 несоседа.

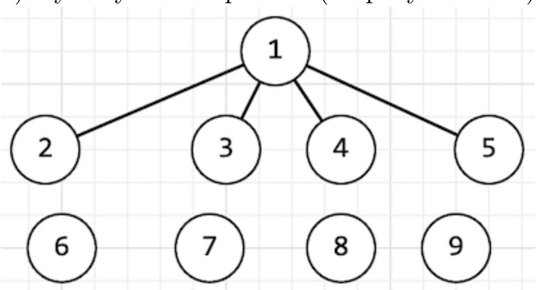


Если вершины 5 и 6 соединены ребром (не ограничивая общности, x соединёна ребром с вершинами 5 и 6), то в графе есть клика размера 3 - 156. Если вершины 5 и 6 не соединены ребром, то среди вершин 2, 3, 4 есть либо клика размера 3, либо независимое множество размера 2 (доказано ранее), (если есть клика, то к графе на 6 вершинах есть клика размера 3), пусть есть независимое множество размера 2. Тогда это множество в объединении с вершиной x (1) даёт независимое множество размера 3 в графе с 6 вершинами. Таким образом, если у x есть 3 несоседа, то в графе на 6 вершинах есть либо клика размера 3, либо независимое множество размера 3.

Из 1) и 2) следует, что в графе на 6 вершинах есть либо клика размера 3, либо независимое множество размера 3, а $R(3{,}3) > 5$, то $R(3{,}3) = 6$.

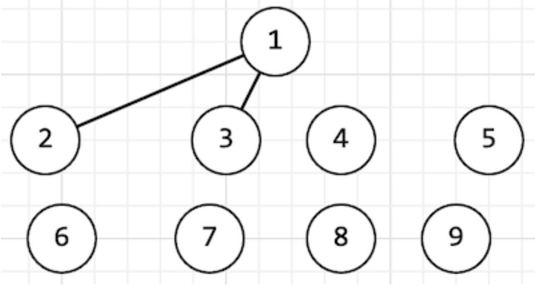
Теперь докажем, что $R(3{,}4) \leq 9 = R(2,4)+R(3,3)-1 = 4+6-1$. Заметим, что в графе на 9 вершинах сумма всех степеней верших графа чётна (тк равно удвоенному число рёбер), а значит найдётся вершина x с чётной степенью. Обозначим степень вершины x как d_x (d_x - чёт). Обозначим через A - множество соседй x, через B - множество несоседей. Тогда $|A| = d_x, |B| = 9 - d_x - 1 = 8 - d_x$. Заметим, что $|A|$ и $|B|$ - чёт. Тк в графе $9 = |A| + |B| + 1 =$ вершин, по принципу Дирихле либо $|A| \geq 3$, либо $|B| \geq 6$. При этом $|A|$,$|B|$ - чёт и тогда либо $|A| \geq 4$, либо $|B| \geq 6$. Значит в графе на 9 вершинах есть вершина x, которая имеет чётную степень и либо 4 соседа, либо 6 несоседей.

1) Пусть у этой вершины (на рисунке x - 1) есть 4 соседа. Тогда у этой вершины есть так же 4 несоседа.



Заметим, что если хотя бы 2 вершины из 2, 3, 4, 5 соединены ребром, то в графе на 9 вершинах есть клика размера 3. Если ни одна из этих 4 вершин не соединена между собой, то они образуют независимое множество размера 4. Таким образом, если у x есть 4 соседа, то в графе на 9 вершинах есть либо клика размера 3, либо независимое множество размера 4.

2) Пусть у этой вершины (на рисунке x - 1) есть 2 соседа. Тогда у этой вершины есть так же 6 несоседа.



Заметим, что подграф, состоящий из 6 вершин 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (и рёбер между этими вершинами), имеет либо клику размера 3, либо независимое множество размера 3 (доказано ранее), если есть клика, то исходный граф имеет клику размера 3, если клики нет, то искомый граф имеет независимое множество, состоящее из этих 3 вершин и вершины x. Таким образом, если у x есть 6 несоседей, то в графе на 9 вершинах есть либо клика размера 3, либо независимое множество размера 4.

Таким образом, в любом графе на 9 вершинах есть либо клика размера 3, либо независимое множество размера 4. $R(3,4) > 8 \Rightarrow R(3,4) = 9$.

$\blacksquare$