Дискретная математика

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

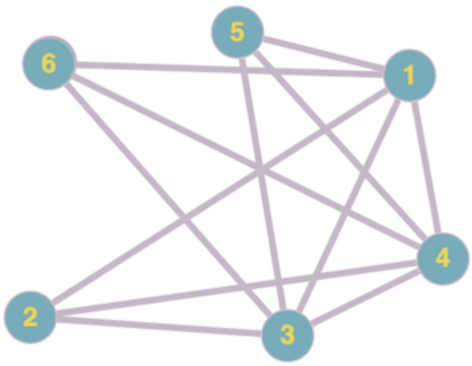
September 27, 2021

№1

Найдите наименьшее количество вершин в графе, сумма степеней вершин в котором равна 24.

Решение:

Сумма степеней вершин в графе равна удвоенному количеству рёбер в графе, значит, в этом графе $\frac{24}{2} = 12$ ребро. Граф с n вершинами имеет максимум $\frac{n(n-1)}{2}$ рёбер. Значит 12 рёбер не может иметь граф с менее чем 6 вершинами. Значит в графе, сумма степеней вершин которого равна 24, как минимум есть 6 вершин. Пример такого графа см ниже.



Ответ: 6

№2

Существует ли граф на 9 вершинах, степени которых равны 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 5, 6?

Решение:

Пронумеруем вершины, степени которых 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 5, 6 как 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 вершины соответственно. Рассмотрим 2 случая: 9 и 8 имеют общее ребро или не имеют.

1) 9 соединена с 8:

Тогда 9 должна быть соединена еще с 5 вершинами. Заметим, что если граф существует, то в нем есть только 4 вершины, у которых степень >1 (без 9 и 8 таких вершин 2), значит, если граф существует и 9 соединена с 8, то 9 соединена как минимум с 3 вершинами с степенью 1. Если 9 соединена более чем с 3 вершинами с степенью 1, то такой граф не существует, тк 8 должна быть соединена еще с 4 вершинами, а вершин, с которыми по условию можно быть соединеным осталось менее 4. Значит, 9 может быть соединена только с 3 вершинами с степенью 1. Таким образом, если рассматривать часть графа без ребер, которые инциденты вершине 9, и вершин, которые принадлежат этим ребрам, то вершины этой части графа будут иметь степени 1, 1, 1, 3, 4. Заметим, что эта часть графа не образует нужный граф, тк вершина с степенью 4 должна быть соединена с каждой вершиной, но тогда вершина с степенью 3 может быть соединена только с вершиной с степенью 4, и её степень будет не 3, а 1. Значит такой граф не существует.

2) 9 не соединена с 8:

Тогда 9 должна быть соединена с 6 вершинами, как минимум 4 из них имеют степень 1. Вершина 8 должна быть соединена с 5 вершинами, но вершин, с которыми она может быть соединена осталось не более 3 (одна с степенью 1 и вершины 6, 7). Значит такой граф не существует.

Таким образом, граф не существует, если 9 соединена с 8 и если 9 не соединена с 8, значит такой граф не существует.

Ответ: нет

№3

В стране Радуга есть 7 городов с официальными названиями Красный, Оранжевый, Жёлтый, Зелёный, Голубой, Синий, Фиолетовый. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если количество общих букв в названиях городов не меньше 3. (Количество вхождений букв несущественно, прописные и строчные не различаются, используются только официальные названия.) Можно ли добраться из города Красный в город Фиолетовый, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?

Решение:

Можно, например, из города Красный добраться в Оранжевый (совпадают буквы р, а, н...), а из города Оранжевый добраться в город Фиолетовый (совпадают буквы о, в, ы...).

Ответ: Да

№4

Решение:

Заметим, что в графе $2n$ вершин, и каждая вершина имеет степень n. Обозначим подграф отрезков $[(0,i);(n+1,i)]$ как Y, а подграф отрезков $[(i,0);(i,n+1)]$ как X. Заметим, что подграфы X и Y состоят только из вершин, причём ни одна пара которых не связана ребром (т. к. парал отрезки не пересекаются), но при этом каждая вершина X соединена с каждой вершиной Y, а каждая вершина Y соединена с каждой вершиной X. Таким образом, если вершина $x \in X$ входит в независимое множества в графе L_n, то в это множество не может входить ни одна вершина $y \in Y$ (аналогично если вершина $y \in Y$ входит в независимое множество в графе L_n, то в это множество не может входить ни одна вершина $x \in X$). Таким образом, размер независимого множества в графе L_n не более чем половина вершин в графе L_n, т. е. $\frac{2n}{2} = n$. Значит, можно выбрать все элементы $x \in X$ (или $y \in Y$) как элементы независимого множества в графе L_n, и это будет независимое множество в графе L_n максимального размера, и этот размер будет равен n.

Ответ: n

№5

Докажите, что при n $\geq$ 1 связен любой граф на 2n + 1 вершине, степень каждой из которых не меньше n.

Доказательство:

Пусть такой граф не связен. Тогда найдутся 2 вершины, которые не соединены путём. Каждая из этих двух вершин соединена не менее чем с n вершинами (по условию степень каждой вершины не меньше n, а эти вершины не имеют общий путь $\Rightarrow$ вершины, с которыми соединены эти верны, не совпадают), значит, в графе не менее $1 + 1 + 2n = 2 + 2n$ вершин, что противоречит условию, что в графе $2n + 1$ вершина, значит предположение не верно, и такой граф связен. ■

№6

В графе 2n + 1 вершина, степень каждой равна n. Докажите, что после удаления любого подмножества из менее чем n рёбер получается связный граф.

Доказательство:

Пусть после удаления любого подмножества из менее чем n рёбер получился не связный граф. Тогда получаются как минимум 2 компоненты связности. Обозначим эти компоненты как A и B. Обозначим за A компоненту связности, в которой наименьшее число элементов (т. о. в A не более n элементов, а в B не менее $n + 1$ элемент). Пусть в A a элементов ($a \leq n$). Степень вершины в A не больше чем $a - 1$. Тк в исходном графе степень вершины была равна n, то из A удалили минимум $n - a + 1$ ребро, тк эти ребра были удалены, то эти рёбра соединяли вершины из A с вершинами из B, значит всего удалили не менее $a(n-a+1)$ ребра (по условия удалили не более чем $n-1$ ребро, т. е. $a(n-a+1) < n$). Тогда $an - a^2 + a - n < 0$, $an - a^2 + a - n = a(n-a) - (n-a) = (n-a)(a-1) < 0$, что является ложью, тк $a \leq n$ и $a \geq 1$. Значит предположение не верно, и после удаления любого подмножества из менее чем n рёбер получается связный граф. ■

№7

Решение:

Докажем, что любое слово длины 2021 последовательными инвертированиями битов в 47-ми позициях можно превратить в нулевое. Если в слове число единич p кратно 47, то, инвертируя какие-нибудь 47 единиц, спустя $\frac{p}{47}$ таких операций получим нулевое слово. Иначе инвертируем 47 единиц, пока в слове не останется менее 47 единиц. Далее возможно 2 варианта: в слове осталось чётное или нечётное количество единиц.

1) Если в слове осталось нечётное число единиц. Покажем, что в любом слове за 2 оперции можно увеличить количество единиц на 2. Пусть в слове k единиц (причем $k \neq 47$, т. к. иначе они были бы инвертированы до этого шага). Тогда изменим любые 47 нулевые позициии (а такие точно найдутся, т. к. в слове осталось менее 47 единиц), получим слово, в котором $47 + k$ единиц. Далее инвертируем 46 единиц и 1 ноль. Получим слово, в котором $k + 1$ (оставшаяся единица) $+ 1$ (единица, которая на прошлом шаге была нулём) $= k + 2$ единиц. Таким образом, тк в слове было нечётное число единиц, а нечет $+ 2 =$ нечет, спустя несколько таких операций получим слово, в котором 47 единиц, т. е. из него можно получить нулевое слово.

2) Если в слове осталось чётное число единиц (причём не 0, т. к. иначе слово уже нулевое). Тогда покажем, что в любом слове за 2 оперции можно уменьшить количество единиц на 2. Инвертируем одну из единиц и 46 нулей. Следующим шагом инвертируем 46 единиц, которые на прошлом шаге были нулями, и еще одну единицу. Тогда в исходном слове количество единиц уменьшится на 2. Т. к. чет - 2 $=$ чет, то спустя несколько таких операций получится слово, в котором 0 единиц, т. е. оно нулевое.

Таким образом, из любого слова длины 2021 последовательными инвертированиями битов в 47-ми позициях можно превратить в нулевое, значит граф $Q_{2021,47}$ связен.

Ответ: да

№8

Докажите, что в любом графе на $2n$ вершинах с $n^2 + 1$ ребром, $n \geq 2$, найдётся треугольник: три попарно смежные вершины.

Доказательство:

Докажем по индукции.

1) При $n = 2$ в графе 4 вершины и 5 рёбер. В полном графе с 4 вершинами $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ рёбер, значит в графе, в котором 4 вершины и 5 рёбер, попарно соединены все верщины, кроме 2. Значит есть три попарно смежные вершины (например, 2 другие вершины и одна из 2 попарно не соединеных).

2) Пусть верно при $n = k$ (т. е. выполняется для $2k$ вершин и $k^2 + 1$ ребра). Докажем, что условие выполняется при $n = k + 1$. Тогда необходимо доказать, что в графе с $2k + 2$ вершинами и с $(k + 1)^2 + 1 = k^2 + 2k + 2$ ребром найдется треугольник. Рассмотрим 2 вершины A и B. Они образуют треугольник, если нашлась такая вершина C, что C соединена ребром и с A, и с B. Пусть такой вершины нет (если есть, то треугольник нашелся). Тогда степень A и степень B не более $2k$ (т. к. и A, и B не соединены сами с собой и с C). Рассмотрим граф без A и B. Тогда в графе останется $2k + 2 - 2 = 2k$ вершины и не менее чем $(k + 1)^2 + 1 - 2k = k^2 + 2$ ребро. Но по индукционному предположению в графе с $2k$ вершинами и $k^2 + 1$ ребром найдётся треугольник, значит треугольник найдется в графе с $2k$ вершинами и $k^2 + 2$ ребром. Значит по методу мат индукции в любом графе на $2n$ вершинах с $n^2 + 1$ ребром, $n \geq 2$, найдётся треугольник. ■