Дискретная математика

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

February 15, 2022

№1

Найдите две последние цифры числа 99^{1000}.

Решение:

Найти две последние цифры числа 99^{1000} значит найти остаток 99^{1000} при делении на 100. Заметим, что $99 \equiv -1 \pmod{100}$, значит $99^{1000} \equiv (-1)^{1000} \pmod{100}$. Тк $(-1)^{1000} = 1$, число 99^{1000} оканчивается на 01.

Ответ: 01

№2

Докажите, что числа a^2 и b^2 дают одинаковые остатки при делении на $a - b$, если a и b — положительные целые числа, и $a > b$.

Доказательство:

Заметим, что $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \vdots (a - b)$. Пусть b^2 даёт остаток r при делении на $(a - b)$, те $b^2 = (a - b) \cdot q_1 + r$. Тогда $a^2 = b^2 + (a - b)(a + b) = (a - b) \cdot q_1 + r + (a - b)(a + b) = (a - b)(q_1 + a + b) + r$, значит a^2 при делении на $(a - b)$ даёт остаток r, и значит числа a^2 и b^2 дают одинаковые остатки при делении на $a - b$. $\blacksquare$

№3

Пусть x, y — целые числа. Докажите, что число x + 10y делится на 13 тогда и только тогда, когда y + 4x делится на 13.

Доказательство:

$13 \mid x + 10y \Leftrightarrow 13 \mid 4(x + 10y) \Leftrightarrow 13 \mid 4x + 40y \Leftrightarrow 13 \mid 4x + y + 39y \Leftarrow 13 \mid 4x + y$ $\blacksquare$

№4

Решите сравнение $53x \equiv 1 \pmod{42}$ с помощью алгоритма Евклида.

Решение:

$53x + 42y = 1$

$a_i = a_{i-2} - q_{i-1} \cdot a_{i-1}$, $x_i = x_{i-2} - q_{i-1} \cdot x_{i-1}$, $y_i = y_{i-2} - q_{i-1} \cdot y_{i-1}$, где q_{i-1} - неполное частное при делении a_{i-2} на a_{i-1}

i	a_i	x_i	y_i	q_i
0	53	1	0	-
1	42	0	1	1
2	11	1	-1	3
3	9	-3	4	1
4	2	4	-5	4
5	1	-19	24	-

Таким образом, $-19 \cdot 53 + 24 \cdot 42 = 1$, и если $53x \equiv 1 \pmod{42}$, то $x = -19 + 42 = 23$

Ответ: 23

№5

Докажите, что дробь $\frac{n^2-n+1}{n^2+1}$ несократима при всех положительных целых n.

Доказательство:

Если НОД$(n^2-n+1, n^2+1) = 1$, то дробь несократима. Пусть НОД$(n^2-n+1, n^2+1) = x$, тогда $n^2-n+1 = x \cdot q$ и $n^2+1 = x \cdot p,\ p, q \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} n^2 - n + 1 = x \cdot q \\ n^2 + 1 = x \cdot p \end{cases}$$

$$\begin{cases} -n = x \cdot (q - p) \\ n^2 + 1 = x \cdot p \end{cases}$$

Тк $n > 0$ по условию, то:

$$\begin{cases} -n^2 = -n \cdot x \cdot (q - p) \\ n^2 + 1 = x \cdot p \end{cases}$$

$$\begin{cases} -n^2 = -n \cdot x \cdot (q - p) \\ 1 = x \cdot p - n \cdot x \cdot (q - p) \end{cases}$$

Значит $1 = x \cdot p - n \cdot x \cdot (q - p) \Rightarrow p - n \cdot (q - p) = \frac{1}{x}$. Тк $p, q, n \in \mathbb{Z}$, то $p - n \cdot (q - p) \in Z \Rightarrow \frac{1}{x} \in Z \Rightarrow x = 1$ и НОД$(n^2 - n + 1, n^2 + 1) = 1$.

■

№6

Может ли целое положительное число, в десятичной записи которого 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом? (Т.е. квадратный корень целый.)

Решение:

Целое положительное число, в десятичной записи которого 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, имеет сумму цифр $100 \cdot 0 + 100 \cdot 1 + 100 \cdot 2 = 300 \vdots 3$, и значит такое число делится на 3. Если такое целое положительное число делится на 3, то его квадрат делится на $3^2 = 9$. Пусть такое число может быть точным квадратом, тогда оно делится на 9, и значит сумма его цифр делится на 9, но $9 \not| 300 \Rightarrow$ противоречие, и целое положительное число, в десятичной записи которого 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, не может быть точным квадратом.

Ответ: нет

№7

Найдите наименьшее целое положительное число N такое, что и сумма цифр десятичной записи числа N, и сумма цифр десятичной записи числа N + 1 делятся на 7.

Решение:

Если последняя цифра целого положительного числа N числа не равна 9, то сумма сумма цифр десятичной записи числа $N+1$ на 1 больше суммы цифр числа N. Пусть число N оканчивается на n 9. Тогда число $N+1$ оканчивается на n нулей, и $n+1$ число справа увеличивается на 1, а значит сумма цифр уменьшается на $9n-1$ (при этом если N n-значное, то $N+1$ становится $n+1$ - значным и $n+1$ цифра справа равна 1). Если сумма цифр десятичной записи числа N, и сумма цифр десятичной записи числа $N+1$ делятся на 7, и сумма цифра может меняться на 1 или на $9n-1$. Тк $7 \not| 1$, то необходимо найти такое наименьшее n, что $7|(9n-1)$ и такое наименьшее N, что $7|N$. Тогда $n = 4$ (тк $9 \cdot 1 - 1 = 8$, $9 \cdot 2 - 1 = 17$ и $9 \cdot 3 - 1 = 26$ не делятся нацело на 7, а $9 \cdot 4 - 1 = 35$ делится). Значит N оканчивается на 4 девятки. Сумма цифр N делится на 7, $4 \cdot 9 = 36$, значит наименьшее целое положительное число N , что и сумма его цифр делится на 7 равно 6999, и при этом $N + 1 = 7000$ и сумма его цифр тоже делится на 7.

Ответ: 6999