Алгебра

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

May 20, 2022

№1

Какие значения может принимать длина убывающей (в лексикографическом порядке) цепочки одночленов от переменных x_1, x_2, x_3, начинающейся с одночлена $x_1x_2^3x_3^2$ и заканчивающейся одночленом $x_1x_2^2x_3^3$?

Решение:

Тк цепочка начинается с одночлена $x_1x_2^3x_3^2$ и заканчивающейся одночленом $x_1x_2^2x_3^3$, то она состоит хотя бы из двух одночленов, а значит её длина не меньше 2 (например, если длина равна 2, то цепочка имеет вид $x_1x_2^3x_3^2 > x_1x_2^2x_3^3$). Теперь покажем, что длина цепочки может быть равна любому $n > 2, n \in N$. Если цепочка начинается с одночлена $x_1x_2^3x_3^2$ и заканчивающейся одночленом $x_1x_2^2x_3^3$, то цепочка вида $x_1x_2^3x_3^2 > x_1x_2^2x_3^{n+1} > x_1x_2^2x_3^n > \dots > x_1x_2^2x_3^4 > x_1x_2^2x_3^3$ удовлетворяет условию про начало и конец, является убывающей, а так же её длина равна $1 + ((n+1) - 3 + 1) = n$. Таким образом, длина убывающей (в лексикографическом порядке) цепочки одночленов от переменных x_1, x_2, x_3, начинающейся с одночлена $x_1x_2^3x_3^2$ и заканчивающейся одночленом $x_1x_2^2x_3^3$ равна $n \geq 2, n \in N$.

Ответ: $n \geq 2, n \in N$

№2

Найдите остаток многочлена g относительно системы $\{f\}$, где $g = x_2^4x_3^5 + 2x_1x_2^4x_3 + x_1^2x_2^2$,
$f = x_2^4x_3 - 2x_1x_2x_3^2 + x_1x_2^2$.

Решение:

Известно, что множество $\{f\}$ является системой Грёбнера, тк единственный S-многочлен этой системы равен 0 (факт из лекции). Значит остаток многочлена g относительно системы $\{f\}$ определён однозначно (те не зависит от порядка элементарных редукций). Заметим, что $L(f) = x_1x_2^2$. Теперь найдём остаток многочлена g относительно системы $\{f\}$:
$g = x_2^4x_3^5 + 2x_1x_2^4x_3 + x_1^2x_2^2 \overset{f\cdot x_1}{\to} x_2^4x_3^5 + 2x_1x_2^4x_3 + x_1^2x_2^2 - (x_1x_2^4x_3 - 2x_1^2x_2x_3^2 + x_1^2x_2^2) = x_2^4x_3^5 + 2x_1x_2^4x_3 - x_1x_2^4x_3 + 2x_1^2x_2x_3^2 = x_2^4x_3^5 + x_1x_2^4x_3 + 2x_1^2x_2x_3^2 \overset{f\cdot x_2^2x_3}{\to} x_2^4x_3^5 + x_1x_2^4x_3 + 2x_1^2x_2x_3^2 - (x_2^6x_3^2 - 2x_1x_2^3x_3^3 + x_1x_2^4x_3) = x_2^4x_3^5 + 2x_1^2x_2x_3^3 - x_2^6x_3^2 + 2x_1x_2^3x_3^3 \overset{f\cdot 2x_2x_3^3}{\to} x_2^4x_3^5 + 2x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2 + 2x_1x_2^3x_3^3 - (2x_2^5x_3^4 - 4x_1x_2^2x_3^5 + 2x_1x_2^3x_3^3) = x_2^4x_3^5 + 2x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2 - 2x_2^5x_3^4 + 4x_1x_2^2x_3^5 \overset{f\cdot 4x_3^5}{\to} = x_2^4x_3^5 + 2x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2 - 2x_2^5x_3^4 + 4x_1x_2^2x_3^5 - (4x_2^4x_3^6 - 8x_1x_2x_3^7 + 4x_1x_2^2x_3^5) = x_2^4x_3^5 + 2x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2 - 2x_2^5x_3^4 - 4x_2^4x_3^6 + 8x_1x_2x_3^7$. Заметим, что в полученном многочлене каждый одночлен не делится на $L(f) = x_1x_2^2$, а значит этот многочлен нередуцируем относительно $\{f\}$, те является остатком многочлена g относительно системы $\{f\}$.

Ответ: $x_2^4x_3^5 + 2x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2 - 2x_2^5x_3^4 - 4x_2^4x_3^6 + 8x_1x_2x_3^7$

№3

Выясните, является ли множество $\{f_1, f_2, f_3\}$ системой Грёбнера, где $f_1 = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2$, $f_2 = 4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 - 4,\ f_3 = x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3$.

Решение:

По критерию Бухбергера $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ - система Грёбнера $\Leftrightarrow$ для любых $f_1', f_2' \in F$ многочлен $S(f_1', f_2')$ редуцируем к нулю относительно F, где $S(f_1', f_2') := m_1f_1' - m_2f_2',\ m = \text{НОК}(L(f_1'), L(f_2')) = L(f_1') \cdot m_1 = L(f_2') \cdot m_2$.

Так же заметим, что $L(f_1) = 2x_1x_2,\ L(f_2) = 4x_1x_3^2,\ L(f_3) = x_2^2x_3^3$.

Рассмотрим $S(f_1, f_2)$. $m = \text{НОК}(L(f_1), L(f_2)) = \text{НОК}(2x_1x_2, 4x_1x_3^2) = 4x_1x_2x_3^2 \Rightarrow m_1 = 2x_3^2,\ m_2 = x_2 \Rightarrow S(f_1, f_2) = 2x_3^2(2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2) - x_2(4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 - 4) = 4x_1x_2x_3^2 + 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - (4x_1x_2x_3^2 + x_2^2x_3^3 - 4x_2) = 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 + 4x_2 \xrightarrow{f_2 \cdot 2x_3} 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 + 4x_2 - (8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - 8x_3) = -x_2^2x_3^3 + 4x_2 + 8x_3 \xrightarrow{f_3 \cdot -1} -x_2^2x_3^3 + 4x_2 + 8x_3 + (x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3) = 0$. Таким образом, $S(f_1, f_2) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$.

Рассмотрим $S(f_1, f_3)$. $m = \text{НОК}(L(f_1), L(f_3)) = \text{НОК}(2x_1x_2, x_2^2x_3^3) = 2x_1x_2^2x_3^3 \Rightarrow m_1 = x_2x_3^3,\ m_3 = 2x_1 \Rightarrow S(f_1, f_3) = x_2x_3^3(2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2) - 2x_1(x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3) = 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3 \xrightarrow{f_2 \cdot x_2x_3^2} 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3 - (4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 - 4x_2x_3^2) = 8x_1x_2 + 16x_1x_3 + 4x_2x_3^2 \xrightarrow{f_1 \cdot 4} 8x_1x_2 + 16x_1x_3 + 4x_2x_3^2 - (8x_1x_2 + 16x_1x_3 + 4x_2x_3^2) = 0$. Таким образом, $S(f_1, f_3) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$.

Рассмотрим $S(f_2, f_3)$. $m = \text{НОК}(L(f_2), L(f_3)) = \text{НОК}(4x_1x_3^2, x_2^2x_3^3) = 4x_1x_2^2x_3^3 \Rightarrow m_2 = x_2^2x_3,\ m_3 = 4x_1 \Rightarrow S(f_2, f_3) = x_2^2x_3(4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 - 4) - 4x_1(x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3) = x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 + 16x_1x_2 + 32x_1x_3 \xrightarrow{f_1 \cdot 8} x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 + 16x_1x_2 + 32x_1x_3 - (16x_1x_2 + 32x_1x_3 + 8x_2x_3^2) = x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 - 8x_2x_3^2 \xrightarrow{f_3 \cdot x_2x_3} x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 - 8x_2x_3^2 - (x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 - 8x_2x_3^2) = 0$. Таким образом, $S(f_2, f_3) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$.

Таким образом, $S(f_1, f_2), S(f_1, f_3), S(f_2, f_3)$ редуцируются к нулю относительно F. Значит $S(f_2, f_1) = -S(f_1, f_2)$, $S(f_3, f_1) = -S(f_1, f_3)$, $S(f_3, f_2) = -S(f_2, f_3)$ тоже редуцируются к нулю относительно F. Кроме того, известно, что $S(f_1, f_1) = S(f_2, f_2) = S(f_3, f_3) = 0 \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$. Итого, для любых $f_1', f_2' \in F$ многочлен $S(f_1', f_2')$ редуцируем к нулю относительно F, а значит $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ является системой Грёбнера.

Ответ: является

№4

Докажите, что множество $F \subseteq K[x] \backslash \{0\}$ является системой Грёбнера тогда и только тогда, когда существует такой многочлен $f \in F$, который делит любой многочлен из F.

Доказательство:

Сначала докажем, что если множество $F \subseteq K[x] \backslash \{0\}$ является системой Грёбнера, то существует такой многочлен $f \in F$, который делит любой многочлен из F. Если множество $F \subseteq K[x] \backslash \{0\}$ является системой Грёбнера, то для всякого многочлена его остаток относительно F определён однозначно, и по критерию Бухбергера
$\forall f, g \in F\ S(f, g) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$. Рассмотрим многочлен $f \in F$ с минимальной степенью и произвольный многочлен $g \in F$, степень которого равна степени f (те $f = C \cdot g$, где C - некоторая константа). Покажем, что многочлен минимальной степени делит все многочлены из F такой же степени. Тк f, g имеют одинаковую степень (обозначим её за n), и $S(f, g) = C_1 \cdot f - C_2 \cdot g$, где C_1, C_2 - некоторые константы, то найдутся такие C_1, C_2, что старшие члены при f, g сократятся, а значит степень $S(f, g) < n \Rightarrow$ в $S(f, g)$ каждый одночлен не делится на старшие члены f, g, а тк они имеют минимальную степень в F, то $S(f, g)$ не делится на старший член любого многочлена из F. При этом известно, что $S(f, g) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$, а значит $C_1 \cdot f - C_2 \cdot g = 0 \Rightarrow C_1 \cdot f = C_2 \cdot g \Rightarrow f = C_3 \cdot g,\ C_3 = const \Rightarrow f$ делит g, те многочлен минимальной степени делит все многочлены из F такой же степени. Теперь покажем, что f делит все многочлены $g \in F$, степень которых больше степени f (обозначим их $n < m$ соотв). Тк $F \subseteq K[x] \backslash \{0\}$

(те рассматриваемые многочлены являются многочленами от одной переменной), то НОК$(L(f), L(g)) = L(g) \Rightarrow S(f,g) = x^{m-n} \cdot f - g$. Тк f имеет минимальную степень, то можно провести редукцию только с его помощью, те, тк $S(f,g) \overset{F}{\rightsquigarrow} 0$, получим, что $S(f,g) \,\vdots\, f$ (на каждом этапе из $S(f,g)$ вычитаем $m_i \cdot f$). Итого, получим, что $x^{m-n} \cdot f - g - m_1 \cdot f - m_2 \cdot f - \dots - m_k \cdot f = 0 \Rightarrow$ тк правая часть делится на f, то левая часть делится на f, а значит $g \,\vdots\, f$. Таким образом, любой многочлен из F (тк в F нет многочленов степени меньше степени f, тк его степень минимальна, а так же f делит многочлены, степени которых больше или равна его степени) делится на f.

Теперь докажем, что если существует такой многочлен $f \in F$, который делит любой многочлен из F, то множество $F \subseteq K[x] \backslash \{0\}$ является системой Грёбнера. По критерию Бухбергера F - система Грёбнера $\Leftrightarrow$ для любых $f_1, f_2 \in F$ многочлен $S(f_1, f_2)$ редуцируем к нулю относительно F. Тогда для прозвольных $f_1, f_2 \in F$ известно, что они делятся на некоторый $f \in F$, и тогда $S(f_1, f_2) = m_1 \cdot f_1 - m_2 \cdot f_2$ делится на f (тк $m_1 \cdot f_1$, $m_2 \cdot f_2$ делятся на f). Значит $S(f_1, f_2)$ редуцируется к нулю относительно F, тк $\exists g \in K[x] \backslash \{0\} : \ S(f_1, f_2) = g \cdot f$ (тк $S(f_1, f_2)$ делится на f). Таким образом, тк f_1, f_2 произвольные, то F является системой Грёбнера. $\blacksquare$