Алгебра

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

May 13, 2022

№1

Найдите наибольший общий делитель многочленов $f, g \in K[x]$, а также его линейное выражение через f и g в следующих случаях:

(а) $K = \mathbb{R}, f = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1, g = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2$;

(б) $K = \mathbb{Z}_5, f = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4, g = 3x^3 + 4x^2 + 4x + 1$.

Решение:

а)

Известно, что НОД двух многочленов находится с помощью прямого хода алгоритма Евклида, а линейное выражение НОД находится с помощью обратного хода алгоритма Евклида. Разделим f на g:

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1 & 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2 \\ \cline{2-2}
x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x & \frac{1}{3}x + \frac{5}{9} \\ \cline{1-1}
-\; \frac{5}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \\
\frac{5}{3}x^4 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{9}x^2 - \frac{10}{9}x - \frac{10}{9} & \\ \cline{1-1}
-\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} &
\end{array}
$$

Значит $f = (x^5+x^4-x^3-2x-1) = (3x^4-2x^3+x^2-2x-2)\cdot(\frac{1}{3}x+\frac{5}{9})-\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{9} = g(\frac{1}{3}x+\frac{5}{9})-\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{9} = = g(\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}) + r_1$, где $r_1 = -\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}$. Теперь разделим g на r_1:

$$
\begin{array}{r|l}
-\; 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2 & -\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} \\ \cline{2-2}
3x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x & -\frac{27}{2}x + \frac{9}{4} \\ \cline{1-1}
-\; -\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x - 2 & \\
-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \\ \cline{1-1}
-\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4} &
\end{array}
$$

Значит $g = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2 = (-\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9})(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}) + (-\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}) = r_1(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}) + r_2$, где $r_2 = -\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}$. Теперь разделим r_1 на r_2:

$$\begin{array}{cr|l} - & -\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{9} & -\frac{9}{4}x^2-\frac{9}{4} \\ \cline{3-3} & -\frac{2}{9}x^3-\frac{2}{9}x & \frac{8}{81}x-\frac{4}{81} \\ \cline{2-2} - & \frac{1}{9}x^2+\frac{1}{9}x & \\ & \frac{1}{9}x^2+\frac{1}{9}x & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

Получили, что r_1 делится на r_2, а значит НОД$(f,g) = r_2 = -\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}$. Тк $g = r_1(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}) + r_2$, то $r_2 = g - r_1(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4})$, и тк $f = g(\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}) + r_1$, то $r_1 = f - g(\frac{1}{3}x + \frac{5}{9})$, а значит $r_2 = g - (f - g(\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}))(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}) = g - f(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}) + g(\frac{1}{3}x + \frac{5}{9})(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}) = g + \frac{27}{2}xf - \frac{9}{4}f + g(-\frac{9}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}) = f(\frac{27}{2}x - \frac{9}{4}) + g(-\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{9}{4})$ - линейное выражение r_2 через f и g.

Ответ: НОД(f,g) = -$\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4} = f(\frac{27}{2}x - \frac{9}{4}) + g(-\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{9}{4})$.

б)

Аналогично с а) сначала разделим f на g:

$$\begin{array}{cr|l} - & x^5+2x^4+4x^3+2x^2+4 & 3x^3+4x^2+4x+1 \\ \cline{3-3} & x^5+3x^4+3x^3+2x^2 & 2x^2+3x+3 \\ \cline{2-2} - & 4x^4+x^3+4 & \\ & 4x^4+2x^3+2x^2+3x & \\ \cline{2-2} - & 4x^3+3x^2+2x+4 & \\ & 4x^3+2x^2+2x+3 & \\ \cline{2-2} & x^2+1 & \end{array}$$

Значит $f = g(2x^2+3x+3) + x^2 + 1 \Rightarrow r_1 = x^2 + 1$. Разделим g на r_1:

$$\begin{array}{cr|l} - & 3x^3+4x^2+4x+1 & x^2+1 \\ \cline{3-3} & 3x^3+3x & 3x+4 \\ \cline{2-2} - & 4x^2+x+1 & \\ & 4x^2+4 & \\ \cline{2-2} & x+2 & \end{array}$$

Значит $g = r_1(3x+4) + (x+2) \Rightarrow r_2 = x + 2$. Разделим r_1 на r_2:

$$\begin{array}{cr|l} - & x^2+1 & x+2 \\ \cline{3-3} & x^2+2x & x+3 \\ \cline{2-2} - & 3x+1 & \\ & 3x+1 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

Получили, что r_1 делится на r_2, а значит НОД$(f,g) = r_2 = x+2 = g - r_1(3x+4) = g - (f - g(2x^2+3x+3))(3x+4) = g - 3xf - 4f + g(x^3 + 4x^2 + 4x + 3x^2 + 2x + 2) = f(2x+1) + g(x^3 + 2x^2 + x + 3)$ - линейное выражение r_2 через f и g.

Ответ: НОД$(f,g) = x + 2 = f(2x+1) + g(x^3 + 2x^2 + x + 3)$.

№2

Разложите многочлен f в произведение неприводимых в кольце $K[x]$ в следующих случаях:

(а) $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, f = x^5 + 2x^3 - 6x^2 - 12$;

(б) $K = \mathbb{Z}_5, f = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3$.

а)

Решение:

Случай 1 - $\mathbb{R}$. $x^5 + 2x^3 - 6x^2 - 12 = x^3(x^2+2) - 6(x^2+2) = (x^3-6)(x^2+2)$. Заметим, что для $x^2 + 2$, $D = -8 < 0 \Rightarrow x^2+2$ не имеет корней в R и неприводим (тк многочлен второй степени неприводим над $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ многочлен не имеет корней в $\mathbb{R}$). Рассмотрим многочлен $x^3 - 6$: $x^3 - 6 = (x - \sqrt[3]{6})(x^2 + \sqrt[3]{6}x + \sqrt[3]{36})$. Известно, что всякий многочлен первой степени автоматически неприводим, а значит $x - \sqrt[3]{6}$ неприводим. Заметим, что для $x^2 + \sqrt[3]{6}x + \sqrt[3]{36}$, $D = \sqrt[3]{36} - 4\sqrt[3]{36} = -3\sqrt[3]{36} < 0 \Rightarrow x^2 + \sqrt[3]{6}x + \sqrt[3]{36}$ не имеет корней в $\mathbb{R}$, а значит он неприводим. Таким образом, $f = (x - \sqrt[3]{6})(x^2 + \sqrt[3]{6}x + \sqrt[3]{36})(x^2+2)$ - искомое разложение.

Случай 2 - $\mathbb{C}$. $f = (x - \sqrt[3]{6})(x^2 + \sqrt[3]{6}x + \sqrt[3]{36})(x^2+2)$, степень $x - \sqrt[3]{6}$ равна 1, значит от неприводим. Заметим, что для $x^2 + \sqrt[3]{6}x + \sqrt[3]{36}$, $D = -3\sqrt[3]{36} \Rightarrow x^2 + \sqrt[3]{6}x + \sqrt[3]{36} = (x - \frac{-\sqrt[3]{6}+i\cdot 3\sqrt[3]{36}}{2})(x - \frac{-\sqrt[3]{6}-i\cdot 3\sqrt[3]{36}}{2})$ (тк $\frac{-\sqrt[3]{6}+i\cdot 3\sqrt[3]{36}}{2}$, $\frac{-\sqrt[3]{6}-i\cdot 3\sqrt[3]{36}}{2}$ - корни $x^2 + \sqrt[3]{6}x + \sqrt[3]{36}$ в $\mathbb{C}$), и $x - \frac{-\sqrt[3]{6}+i\cdot 3\sqrt[3]{36}}{2}$, $x - \frac{-\sqrt[3]{6}-i\cdot 3\sqrt[3]{36}}{2}$ являются многочленами степени 1, а значит они неприводимы. Так же заметим, что для $x^2 + 2$, $D = -8 \Rightarrow x^2 + 2 = (x - i\sqrt{2})(x + i\sqrt{2})$ (тк $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$ - корни x^2+2 в $\mathbb{C}$), и $x - i\sqrt{2}$, $x + i\sqrt{2}$ являются многочленами степени 1, а значит они неприводимы. Таким образом, $f = (x - \sqrt[3]{6})(x - \frac{-\sqrt[3]{6}+i\cdot 3\sqrt[3]{36}}{2})(x - \frac{-\sqrt[3]{6}-i\cdot 3\sqrt[3]{36}}{2})(x - i\sqrt{2})(x + i\sqrt{2})$ - искомое разложение.

Ответ: $(x - \sqrt[3]{6})(x^2 + \sqrt[3]{6}x + \sqrt[3]{36})(x^2+2)$, $(x - \sqrt[3]{6})(x - \frac{-\sqrt[3]{6}+i\cdot 3\sqrt[3]{36}}{2})(x - \frac{-\sqrt[3]{6}-i\cdot 3\sqrt[3]{36}}{2})(x - i\sqrt{2})(x + i\sqrt{2})$

б)

Решение:

Заметим, что $f(4) = 4^5 + 3 \cdot 4^4 + 4^3 + 4^2 + 3 = 1024 + 3 \cdot 256 + 83 = 1107 + 768 = 1875$ делится на 5, а значит 4 - корень f. Тогда разделим f на $x - 4$:

$$
\begin{array}{r|l}
- \; x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3 & x - 4 \\
x^5 - 4x^4 & x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3 \\
\hline
- \; 2x^4 + x^3 + x^2 + 3 & \\
2x^4 + 2x^3 & \\
\hline
- \; 4x^3 + x^2 + 3 & \\
4x^3 + 4x^2 & \\
\hline
- \; 2x^2 + 3 & \\
2x^2 + 2x & \\
\hline
- \; 3x + 3 & \\
3x + 3 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Получили, что $f = (x-4)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3) = (x+1)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3)$. Заметим, что $3^4 + 2 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 3 = 81 + 54 + 36 + 6 + 3 = 180$ делится на 5, а значит 3 - корень f и корень $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3$. Разделим $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ на $x - 3$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^4+2x^3+4x^2+2x+3 \\ x^4-3x^3 \end{array} & \begin{array}{l} x-3 \\ \hline x^3+4x+4 \end{array} \\ \hline
-\begin{array}{r} 4x^2+2x+3 \\ 4x^2+3x \end{array} & \\ \hline
-\begin{array}{r} 4x+3 \\ 4x+3 \end{array} & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

Значит $f = (x+1)(x-3)(x^3+4x+4) = (x+1)(x+2)(x^3+4x+4)$. Заметим, что $2^3+4\cdot 2+4 = 8+8+4 = 20$ делится на 5, а значит 2 - корень f и корень x^3+4x+4. Разделим x^3+4x+4 на $x-2$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3+4x+4 \\ x^3+3x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x-2 \\ \hline x^2+2x+3 \end{array} \\ \hline
-\begin{array}{r} 2x^2+4x+4 \\ 2x^2+x \end{array} & \\ \hline
-\begin{array}{r} 3x+4 \\ 3x+4 \end{array} & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

Значит $f = (x+1)(x+2)(x-2)(x^2+2x+3) = (x+1)(x+2)(x+3)(x^2+2x+3)$. Заметим, что степень $g = x^2+2x+3$ равна 2, и при этом $g(0) = 3, g(1) = 6, g(2) = 11, g(3) = 18, g(4) = 27$, ни одно из этих значений не делится нацело на 5, а значит x^2+2x+3 неприводим над $\mathbb{Z}_5$. Таким рбразом, $f = (x+1)(x+2)(x+3)(x^2+2x+3)$ - искомое разложение.

Ответ: $(x+1)(x+2)(x+3)(x^2+2x+3)$

№3

Рассмотрим факторкольцо $F = \mathbb{Q}[z]/(z^3-z^2-1)$ и обозначим через α класс элемента z в нём. Докажите, что F является полем, и представьте элемент $\frac{3\alpha^2-12\alpha+7}{\alpha^2-3\alpha+1} \in F$ в виде $f(\alpha)$, где $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$ и $\deg f \leq 2$.

Доказательство:

Докажем, что $F = \mathbb{Q}[z]/(z^3-z^2-1)$ является полем. Известно, что $F = \mathbb{Q}[z]/(z^3-z^2-1)$ - поле $\Leftrightarrow z^3-z^2-1$ неприводим в $\mathbb{Q}[z]$ (тк $K[x]/(h)$ является полем $\Leftrightarrow$ многочлен h неприводим в $K[x]$). Пусть $\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, НОД$(p,q) = 1$ является рациональным корнем z^3-z^2-1. Тогда $\left(\frac{p}{q}\right)^3 - \left(\frac{p}{q}\right)^2 - 1 = \frac{p^3-qp^2-q^3}{q^3} = 0 \Rightarrow p^3 \vdots q$ (тк $p^3-qp^2-q^3$ должен делиться на q, тк равен 0) и $q^3 \vdots p$ (тк $p^3-qp^2-q^3$ должен делиться на p, тк равен 0). Значит, либо $\frac{p}{q} = \pm 1$, либо НОД$(p,q) \neq 1$. Таким образом, $\frac{p}{q} = \pm 1$. Покажем, что 1 и -1 не являются корнями z^3-z^2-1. $z = 1:\ 1-1-1 = -1 \neq 0;\ z = -1:\ -1-1-1 = -3 \neq 0$. Значит, тк z^3-z^2-1 имеет степень 3 и не имеет корней, то он неприводим, а значит $F = \mathbb{Q}[z]/(z^3-z^2-1)$ является полем. ■

Решение:

Пусть $f \in \mathbb{Q}[z]$. Тогда $\overline{f} = r + (z^3 - z^2 - 1)$, где r - остаток от деления f на $(z^3 - z^2 - 1)$. Тк все остатки по модулю $(z^3 - z^2 - 1)$ имеют вид $Az^2 + Bz + C,\ A, B, C \in \mathbb{Q}$, то F можно отождествить с многочленами вида $A\alpha^2 + B\alpha + C,\ A, B, C \in \mathbb{Q}$. При этом, тк $\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0$, то $\alpha^3 = \alpha^2 + 1$. Тк $\frac{3\alpha^2-12\alpha+7}{\alpha^2-3\alpha+1} \in F$, то $\alpha^2 - 3\alpha + 1 \neq \overline{0}$ и $\frac{3\alpha^2-12\alpha+7}{\alpha^2-3\alpha+1} = A\alpha^2 + B\alpha + C,\ A, B, C \in \mathbb{Q}$. Тогда $3\alpha^2 - 12\alpha + 7 = (\alpha^2 - 3\alpha + 1)(A\alpha^2 + B\alpha + C) = A\alpha^4 + (B - 3A)\alpha^3 + (C - 3B + A)\alpha^2 + (-3C + B)\alpha + C = A\alpha(\alpha^2 + 1) + (B - 3A)(\alpha^2 + 1) + (C - 3B + A)\alpha^2 + (-3C + B)\alpha + C = A\alpha^3 + A\alpha + (B - 3A)(\alpha^2 + 1) + (C - 3B + A)\alpha^2 + (-3C + B)\alpha + C = A(\alpha^2 + 1) + A\alpha + (B - 3A)(\alpha^2 + 1) + (C - 3B + A)\alpha^2 + (-3C + B)\alpha + C = (-A - 2B + C)\alpha^2 + (A - 3C + B)\alpha - 2A + B + C$. Значит $\begin{cases} -A - 2B + C = 3 \\ A - 3C + B = -12 \\ -2A + B + C = 7 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} A = -2B + C - 3 \\ -B - 2C = -9 \\ 5B - C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2B + C - 3 \\ B = -2C + 9 \\ -11C = -44 \end{cases} \Rightarrow (A, B, C) = (-1, 1, 4)$. Таким образом, $\frac{3\alpha^2-12\alpha+7}{\alpha^2-3\alpha+1} = -\alpha^2 + \alpha + 4$ - искомое представление.

Ответ: $-\alpha^2 + \alpha + 4$

№4

Пусть K - поле и $h \in K[x]$ - многочлен положительной степени. Докажите, что всякий ненулевой необратимый элемент факторкольца $K[x]/(h)$ является делителем нуля.

Доказательство:

По определению $f + (h) \in K[x]/(h)$ является делителем нуля, если он не равен 0, и найдётся такой элемент $g + (h) \in K[x]/(h)$, что $(f + (h))(g + (h)) = 0 + (h)$.

Рассмотрим ненулевой необратимый элемент факторкольца $K[x]/(h)$ вида $f + (h)$. Тк этот элемент ненулевой, то он не принадлежит (h), а значит не делится на h. Покажем, что НОД$(f, h) \neq 1$. Пусть НОД$(f, h) = 1$, тогда $\exists u, x \in K[x] : uf + vh = 1 \Rightarrow uf + vh + (h) = 1 + (h) = (uf + (h)) + (vh + (h)) = (uf + (h)) + (0 + (h)) = uf + (h) = (u + (h))(f + (h)) \Rightarrow f + (h)$ обратим $\Rightarrow$ противоречие. Значит НОД$(f, h) \neq 1$.

Пусть НОД$(f, h) = d \neq 1$. Тогда $\exists a, b \in K[x] : f = a \cdot d,\ h = b \cdot d$, при этом $a \neq 0, b \neq 0$, тк иначе $f = 0, h = 0 \Rightarrow \deg\ f < 0, \deg\ g < 0$, что невозможно. Рассмотрим $b + (h) \in K[x]/(h)$. Если b делится на h, то из $h = b \cdot d$ следует, что $d = 1 \Rightarrow$ противоречие, а значит b не делится на $h \Rightarrow b + (h) \neq 0$. Тогда $(f + (h))(b + (h)) = fb + (h) = a \cdot d \cdot b + (h) = ah + (h) = 0 + (h) \Rightarrow f + (h)$ - это делитель нуля. ■