Дискретная математика

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

February 20, 2022

№1

Положительное целое число a чётно, но не делится на 4 . Покажите, что количество (положительных) чётных делителей a равно количеству (положительных) нечётных делителей a

Доказательство:

Если a - положительное целое чётное число, то $a = 2x$, и тк a не делится на 4, то x нечет. Тогда у x нет чётных делителей (тк x нечет), и при этом все делители x являются делителями a. Тогда, тк $a = 2x$, все нечётные делители a - это делители x. Тогда для каждого нечётного делителя a d существует число $2d$, которое является чётным делителем a, а значит количество (положительных) чётных делителей a равно количеству (положительных) нечётных делителей a. ■

№2

Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24.

Доказательство:

$24 = 8 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$, $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Тк p — простое число, большее 3, то p не делится на 2, те нечет, а значит $p-1$ и $p+1$ - чёт. Пусть ни $p-1$, ни $p+1$ не делится на 4. Тогда, тк p - нечет, на 4 делится либо $p-2$, либо $p+2$, но, тк p - нечет, то и $p-2$, и $p+2$ - нечет, противоречие, и значит либо $p-1$, либо $p+1$ делится на 4. Таким образом, $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ делится на 8 (либо $p-1$, либо $p+1$ делится на 4, и оба числа чётные). Тк $p-1, p, p+1$ - 3 последовательных числа, то одно из них делится на 3. Тк p — простое число, большее 3, то оно не делится на 3, и значит либо $p-1$, либо $p+1$ делится на 3. Таким образом, $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ делится на 3.

Таким образом, $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ делится на 3 и на 8, те делится на 24. ■

№3

Докажите, что десятичная запись 3^{4000} заканчивается на $\ldots 0001$.

Доказательство:

Если $3^{4000} - 1$ заканчивается на 4 нуля, те делится на 10000, то 3^{4000} заканчивается на $\ldots 0001$. Заметим, что $10000 = 10^4 = 2^4 \cdot 5^4$. Среди чисел от 0 до 9999 делятся на 2 $\frac{10000}{2} = 5000$ чисел, делятся на 5 $\frac{10000}{5} = 2000$ чисел, делятся на 2 и на 5 $\frac{10000}{10} = 1000$ чисел. Значит чисел от 0 до 9999, которые не делятся ни на 2, ни на 5, те взаимно простых с 10000, $10000 - 5000 - 2000 + 1000 = 4000$. Тогда по теореме Эйлера, тк 3 взаимно просто с 10000, $3^{4000} - 1$ делится на 10000, а значит 3^{4000} заканчивается на $\ldots 0001$. ■

№4

Докажите, что при любом нечетном положительном n число $2^{n!}$ - 1 делится на n.

Доказательство:

Тк $\varphi(n) \leq n$ и $\varphi(n) \in \mathbb{Z}$, то $\frac{n!}{\varphi(n)} = k \in Z$, значит $2^{n!} = 2^{k \cdot \varphi(n)} = (2^k)^{\varphi(n)}$. Тогда по теореме Эйлера, тк n положительно и нечетно по условию и тогда n и 2^k взаимно просты, то $(2^k)^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, а значит число $(2^k)^{\varphi(n)} - 1 = 2^{n!}$ - 1 делится на n. ■

№5

Если от некоторого трёхзначного числа отнять 6, то оно разделится на 7, если отнять 7, то оно разделится на 8, а если отнять 8, то оно разделится на 9. Найдите это число.

Решение:

Из условия следует, что остаток от деления этого трёхзначного числа x на 7 равен 6, на 8 равен 7, на 9 равен 8. Значит $x+1$ делится на 7, 8, 9. Тогда $x+1 = 7 \cdot 8 \cdot 9k = 504k, k \in Z$. Тк x - трёхзначное число, то $x+1 = 504, x = 503$

Ответ: 503

№6

Найдите остаток при делении а) 19^{10} на 66; б) 2^{2022} на 105.

а)

Решение:

$66 = 11 \cdot 6$. $19^{10} \equiv 1^{10} = 1 \pmod{6}$ (тк $1 = 19 - 6 \cdot 3$). При этом $19^{10} = 19^{11-1} \equiv 1 \pmod{11}$ по малой теореме Ферма, тк 11 - простое число и 19 не кратно 11. Таким образом, необходимо найти число на отрезке $[0; 65]$, которое даёт остаток 1 при делении на 6, и даёт остаток 1 при делении на 11, значит это число - 1. Значит остаток при делении 19^{10} на 66 равен 1.

Ответ: 1

b)

Решение:

$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. $2^{2022} \equiv (-1)^{2022} = 1 \pmod 3$, $2^{2022} \equiv (4)^{1011} \equiv (-1)^{1011} = -1 \equiv 4 \pmod 5$, $2^{2022} \equiv (8)^{674} \equiv (1)^{674} = 1 \pmod 7$. Таким образом, необходимо найти число на отрезке $[0; 105]$, которое даёт остаток 1 при делении на 3 и 7, и даёт остаток 4 при делении на 5. Переберём целые положительные числа большие 0, дающие остаток 4 при делении на 5. 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54, 59, 64 - уд. Значит число 64 даёт остаток 1 при делении на 3 и 7, и даёт остаток 4 при делении на 5, и тогда остаток при делении 2^{2022} на 105 равен 64.

Ответ: 64

№7

При каких целых n число $a_n = n^2 + 3n + 1$ делится на 55?

Решение:

a делится на 55, если делится на 5 и на 11

1) $a = n^2 + 3n + 1 \,\vdots\, 5 \Leftrightarrow n^2 + 3n + 1 - 5n \,\vdots\, 5 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \,\vdots\, 5$

2) $a = n^2 + 3n + 1 \,\vdots\, 11 \Leftrightarrow n^2 + 3n + 1 - 11n \,\vdots\, 11 \Leftrightarrow n^2 - 8n + 1 + 11 \,\vdots\, 11 \Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 \,\vdots\, 11 \Leftrightarrow (n-6)(n-2) \,\vdots\, 11$

Таким образом, если a делится на 55, то n при делении на 5 должно давать остаток 1, а при делении на 11 2 или 6. Тогда среди чисел вида $11m+2$ и $11m+6$ $m \in Z$ необходимо найти те, которые дают остаток 1 при делении на 5. По китайской теореме об остатках, тк 5 и 11 взаимно простые, то в промежутке от 0 до 54 существует единственное число x, для которого $x \equiv 2 \pmod{11}$ и $x \equiv 1 \pmod 5$ ($x \equiv 6 \pmod{11}$ и $x \equiv 1 \pmod 5$). Тогда в первом случае x - одно из чисел 2, 13, 24, 35, 46, значит $x = 46$. Во втором случае x - одно из чисел 6, 17, 28, 39, 50, значит $x = 6$. Тогда a делится на 55 при $n = 55k + 6$, $n = 55k + 46, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $n = 55k + 6$, $n = 55k + 46, k \in \mathbb{Z}$

№8

Докажите, что числитель несократимой дроби, равной $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$, делится на p для любого простого $p > 2$.

Доказательство:

Тк $p > 2$ и является простым, то p нечет, а значит в сумме чётное количество дробей ($p-1$ - чёт), тогда $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{p-2} + \dots = \frac{p}{p-1} + \frac{p}{2(p-2)} + \dots = p\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2(p-2)} + \dots\right)$. Тк $p > 2$ и является простым и все числа в знаменателе меньше p, то после приведения $p\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2(p-2)} + \dots\right)$ к общему знаменателю p в числителе не сократится, и числитель несократимой дроби, полученной при приведении $p\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2(p-2)} + \dots\right)$ к общему знаменателю, делится на p, а значит числитель несократимой дроби, равной $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$, делится на p для любого простого $p > 2$. ■