Дискретная математика

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

December 5, 2021

№1

Про порядки A и B известно, что A + B ≅ B + A . Верно ли, что тогда A ≅ B ? (≅ обозначает изоморфизм порядков.)

Решение:

По определению суммой частичных порядков X, Y $X + Y$ называется порядок на $X' \cup Y'$ ($X' \cong X, Y' \cong Y$, X', Y' не пересекаются), в котором все элементы X' меньше всех элементов Y', а пары элементов из X' или Q' сравниваются в порядках P' и Q' соотв. Пусть A равно упорядоченному множеству натуральных чисел N, а $B = N + N$. Тогда $A + B \cong B + A$, тк $N + N + N \cong N + N + N$, но при этом $A \cong B$ - ложь, тк в $N + N$ есть два наименьших элемента ($0 \in N$ и $0' \in N$ (для перехода к непересекающимся множествам обозначил элементы второго множества через $'$)), и при этом в N есть только один наименьший элемент, а значит порядки неизоморфны.

Ответ: Неверно

№2

Рассмотрим два порядка: делители числа 42 (положительные целые числа, на которые 42 делится нацело) с отношением делимости (x | y по определению означает, что y делится на x нацело) и подмножества множества $\{1, 2, 3\}$ с порядком по включению x ⊆ y . Изоморфны ли эти порядки?

Решение:

Обозначим элементы множества $\{1, 2, 3\}$ как $\{a, b, c\}$ (чтобы не путать числа с делителями 42). Заметим, что $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Делителями числа 42 являются числа $1, 2, 3, 7, 2 \cdot 3 = 6, 2 \cdot 7 = 14, 3 \cdot 7 = 21, 6 \cdot 7 = 42$. Тогда порядки будут изоморфны, а изоморфизм будет выглядеть как $\varnothing \to 1; \{a\} \to 2; \{b\} \to 3; \{c\} \to 7; \{a, b\} \to 2 \cdot 3 = 6; \{a, c\} \to 2 \cdot 7 = 14; \{b, c\} \to 3 \cdot 7 = 21; \{a, b, c\} \to 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

Ответ: да

№3

Докажите, что линейные порядки N × Z и Z × Z неизоморфны. (Упорядочение пар лексикографическое.)

Доказательство:

Пусть порядки изоморфны $\Rightarrow$ существует изоморфизм. Будем считать, что 1 - наименьшее натурально число (0 - не натуральное). Тогда для пары $(1,0)$ из N×Z есть пара (x,y) из Z×Z, в которую она переходит. Рассмотрим пару $(x-1,y)$ из Z×Z. При обратном отображении эта пара переходит в пару $(1,z)$ из N×Z, где $z<0$. Заметим, что между $(1,0)$ и $(1,z)$ в N×Z конечное число элементов, а между парами $(x-1,y)$ и (x,y) - бесконечное, значит порядки неизоморфны. ■

№4

Произведение цепей [0 , . . . , n - 1] × [0 , . . . , n - 1] упорядочено покоординатно. Найдите размер максимальной антицепи в этом порядке.

Решение:

Покажем, что размер антицепи не больше n. Пусть существует антицепь размера $>n$. Тогда, тк кажый элемент произведения имеет вид (x,y), где $0\le x\le n-1$ и $0\le y\le n-1$, в антицепь будут входить хотя бы 2 элемента вида (x,a) и (x,b) (или (a,x) и (b,x)). А это значит, что в антицепь входят сравнимые элементы, что невозможно. Таким образом, размер антицепи в порядке $\le n$.

Приведём пример антицепи размера n. Пронумеруем элементы в цепях от 1 до n и составим антицепь из пар (x,y), где x - i - ый элемент первой цепи, а y - $(n-i)$ - ый элемент второй цепи (те антицепь состоит из следующих элементов: $(0,n-1),(1,n-2),(2,n-3),\dots(n-2,1),(n-1,1)$). Элементы такого подмножества попарно несравнимы, тк для каждой пары $(a,b),(c,d)$ элементов в подмножестве либо $a<c,b>d$, либо $a>c,b<d$, а значит такое подмножество является антицепью.

Ответ: n

№5

Докажите, что в любом конечном порядке на mn + 1 элементах есть либо цепь размера n + 1 , либо антицепь размера m + 1.

Доказательство:

В порядке будем искать максимальные элементы. Такие элементы образуют антицепь. Если её размер равен $m+1$ - доказано, иначе её размер $\le m$. Рассмотрим порядок без этих элементов. В новом порядке снова выберем максимальные элементы. Если таких элементов будет $m+1$, то доказано, иначе их $\le m$. Рассмотрим порядок и без этих элементов. Повторяем рассматривать максимальные элементы. Заметим, что если в порядке $mn+1$ элемент, то мы так рассмотрим $n+1$ антицепь. Тогда, тк мы рассматривали максимальные элементы, из каждой из $n+1$ антицепи можно выбрать по одному элементу, и эти элементы образуют цепь, длина которой равна $n+1$. ■

№6

Рассмотрим множество невозрастающих бесконечных последовательностей натуральных чисел с лексикографическим порядком. Является ли это множество фундированным?

Решение:

По определению порядок называется фундированным, если каждое непустое подмножество имеет минимальный элемент (множество с фундированным порядком называется фундированным). Докажем, что множество невозрастающих бесконечных последовательностей натуральных чисел с лексикографическим порядком является фундированным, те каждое непустое подмножество этого множества имеет минимальный элемент.

Рассмотрим непустое подмножество A из таких последовательностей. Рассмотрим первые члены последовательностей в подмножестве A. Среди таких элементов выберем минимальный a_1. Теперь рассмотрим множество последовательностей из A с первым членом a_1 и выберем среди вторых членов этих последовательностей минимальный. Обозначим его a_2. И так далее выбираем члены $a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$. По условию последовательности невозрастающие, а значит $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$. Так как множество состоит из невозрастающих бесконечных последовательностей натуральных чисел с лексикографическим порядком, то в какой-то момент будет только одна (либо совпадающие) последовательность, у которой на n месте стоит a_n, а значит эта последовательность и будет минимальным элементом. Таким образом, по определению изначальное множество является фундированным.

Ответ: Да

№7

Имеется конечная последовательность нулей и единиц. За один шаг разрешается любую группу 01 заменить на $10\dots0$ (произвольное количество нулей). Докажите, что такие шаги нельзя выполнить бесконечное количество раз.

Доказательство:

Заметим, что за каждый шаг не изменится количество единиц в последовательности. Каждой последовательности поставим в соответствие набор из цифр, где каждая цифра - номер единицы слева в последовательности. Рассмотрим множество из всех таких наборов: наборы можно сравнивать в лексикографическом порядке, и в множестве можно найти минимальный элемент, те оно фундированно. Заметим, что за каждый шаг, при замене любой группы 01 на $10\dots0$ получится набор, который меньше набора на предыдущем шаге, тк единица сдвинется влево. Тк множество фундированно, то любая убывающая цепь конечна, а значит шаги нельзя выполнить бесконечное количество раз. ■