Алгебра

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

April 16, 2022

№1

Пусть G - группа всех невырожденных нижнетреугольных (2×2)-матриц с коэффициентами из $\mathbb{R}$. Докажите, что все содержащиеся в G матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ образуют нормальную подгруппу в G.

Доказательство:

Обозначим все содержащиеся в G матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ как подгруппу H (образуют подгруппу, тк $e \in H$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, те если $a, b \in H$, то $ab \in H$ и $\forall a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \in H \quad a^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b}{b} & 0 \\ -\frac{a}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \in H$). По определению подгруппа $H \subseteq G$ называется нормальной, если $ghg^{-1} \in H \quad \forall g \in G, \forall h \in H$. Тк G - группа всех невырожденных нижнетреугольных (2×2)-матриц с коэффициентами из $\mathbb{R}$, то $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$, $\det g = a \cdot c \neq 0$, и тогда $g^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$. При этом $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}, x, y \in R$. Тогда $ghg^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b + cx & yc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} ac & 0 \\ (b + cx)c - byc & yca \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \in H \Rightarrow H \triangleleft G$ ∎

№2

Найдите все гомоморфизмы из группы $\mathbb{Z}_{15}$ в группу $\mathbb{Z}_{20}$.

Решение:

По определению $\varphi : G \to F$ - гомоморфизм, если $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \ \forall a, b, \in G$. Пусть $f : \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{20}$ - гомоморфизм. Известно, что $\mathbb{Z}_{15}$ порождается 1, те $\mathbb{Z}_{15} = \langle \overline{1} \rangle$, тогда, если $f(\overline{1}) = \overline{a}$, то $f(\bar{l}) = f(\overline{1} + \overline{1} + \cdots + \overline{1})$ (l раз) $= \overline{a} + \overline{a} + \cdots + \overline{a}$ (l раз, по свойству гомоморфизма) $= l \cdot \overline{a}$, поэтому, чтобы задать гомоморфизм, нужно показать, куда может переходить 1. Тк $\mathrm{ord}\overline{1} = 15$, то $\mathrm{ord} f(\overline{1}) = \overline{a}$ является делителем 15. Найдём все элементы из $\mathbb{Z}_{20}$, порядок которых делит 15 . Это элементы $\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}$. Проверим, что образуется гомоморфизм.

1) $f(\overline{1}) = \overline{0} \Rightarrow f(\bar{l}) = \overline{0} \ \ \forall \bar{l} \in \mathbb{Z}_{15}$ - гомоморфизм

2) $f(\overline{1}) = \overline{4} \Rightarrow f(\bar{l}) = \overline{4} \cdot \bar{l} \ \ \forall \bar{l} \in \mathbb{Z}_{15}$ - гомоморфизм (тк $f(\overline{l_1} + \overline{l_2}) = \overline{4}\ \overline{l_1} + \overline{4}\ \overline{l_2})) = f(\overline{l_1}) + f(\overline{l_2})$)

Аналогично удовлетворяют $f(\bar{l}) = \overline{8} \cdot \bar{l}, f(\bar{l}) = \overline{12} \cdot \bar{l}, f(\bar{l}) = \overline{16} \cdot \bar{l} \ \ \forall \bar{l} \in \mathbb{Z}_{15}$.

Ответ: $f(\bar{l}) = \overline{0}, f(\bar{l}) = \overline{4}, f(\bar{l}) = \overline{8} \cdot \bar{l}, f(\bar{l}) = \overline{12} \cdot \bar{l}, f(\bar{l}) = \overline{16} \cdot \bar{l} \ \ \forall \bar{l} \in \mathbb{Z}_{15}$.

№3

Пусть H - подгруппа всех элементов конечного порядка в группе $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \times)$. Докажите, что $H \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, где группы $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$ рассматриваются с операцией сложения.

Доказательство:

По теореме о гомоморфизме для групп $G/\mathrm{Ker}\varphi \simeq \mathrm{Im}\varphi$. Кроме того, по определению изоморфизм - гомоморфизм $\varphi : G \to F$, если φ - биекция ($\varphi : G \to F$ - гомоморфизм, если $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)\ \forall a, b, \in G$). Пусть $\varphi : Q \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ (будем рациональному x сопоставлять $e^{2\pi i x}$, получим получим гомоморфизм из Q с операцие сложения в $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \times)$).

Покажем, что $\mathrm{Ker}\varphi$ совпадает с $\mathbb{Z}$. Если $x \in \mathrm{Ker}\varphi$, то $e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x) = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что $\mathrm{Im}\varphi$ совпадает с H. Пусть $q \in \mathbb{Q}$, тогда $q = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Тогда, если каждому рациональному числу x сопоставляется комплексное число $e^{2\pi i x}$, то q сопоставляется число $e^{2\pi i \frac{m}{n}}$, значит, тк $(e^{2\pi i \frac{m}{n}})^n = 1$, то любой элемент образа имеет конечный порядок. Если же $h \in H$, те h - элемент конечного порядка в группе $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \times)$, то для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $h^n = 1$, а значит $h = e^{2\pi i \frac{k}{n}},\ 0 \leq k < n$ (формула корня n-ой степени из 1). Таким образом, $\mathrm{Im}\varphi$ совпадает с H.

Итого, $\mathrm{Ker}\varphi$ совпадает с $\mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\varphi$ совпадает с H, а значит по теореме о гомоморфизме для групп $H \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. ■

№4

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Докажите что следующие условия эквивалентны:

1) m, n взаимно просты

2) для всякой группы G, всякой подгруппы $A \subseteq G$ порядка m и всякой подгруппы $B \subseteq G$ порядка n выполняется условие $A \cap B = \{e\}$.

Доказательство:

Докажем, что 2) следует из 1). Если порядок A равен m, а порядок B равен n, то для $x \in A \cap B$ выполняется $x^m = x^n = \{e\} \Rightarrow x = \{e\}$, если m, n взаимно просты.

Теперь докажем, что 1) следует из 2). Пусть m, n не взаимно просты и НОД$(m, n) \neq 1$. Пусть G - циклическая группа с порядком mn, x - образующий элемент. Тогда, если взять подгруппу $A = \langle x^n \rangle$ (порядок равен m) и подгруппу $B = \langle x^m \rangle$ (порядок равен n), то $A \cap B = \langle x^{\text{НОК}(m,n)} \rangle$ (порядок равен НОД$(m, n) \neq 1$, тк НОК$(m, n) \cdot$ НОД$(m, n) = mn$) $\Rightarrow$ не выполняется условие $A \cap B = \{e\}$. Значит 2) не выполняется для всякой группы G и всяких подгрупп $A \subseteq G$ и $B \subseteq G$ с порядками m, n соотв. Таким образом, если $\overline{1} \to \overline{2}$, то $2 \to 1$.

Таким образом, если 1) следует из 2) и 2) следует из 1), то 1) и 2) эквивалентны. ■