Дискретная математика

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

January 26, 2022

№1

Случайно и равновероятно выбирается целое число x в промежутке от 1 до 100. Найдите вероятность того, что десятичная запись x содержит 8 при условии, что она содержит 5. Ответ привести в виде числа (обыкновенная дробь, числитель и знаменатель записаны в десятичной системе).

Решение:

Вероятностное пространство - числа от 1 до 100, те 100 чисел. Пусть условие A означает, что десятичная запись x содержит 8, а условие B, что десятичная запись x содержит 5. Тогда необходимо найти $Pr[A|B]$. Известно, что $Pr[A|B] = \frac{Pr[A\cap B]}{Pr[B]}$. Найдём $Pr[A \cap B]$ и $Pr[B]$. Всего исходов 100 (тк 100 чисел), из них 5 содержится в числах вида $\overline{a5}$, $9 \geq a \geq 0$ (при $a = 0$ число равно 5) и в числах вида $\overline{5a}, 0 \leq a \leq 9$, при этом число 55 посчитается дважды, т е всего 19 чисел, в которых содержится 5. Значит $Pr[B] = \frac{19}{100}$. Для события $A \cap B$, те что в числе содержится и 5, и 8, благоприятных исходов два - это числа 58 и 85, значит $Pr[A \cap B] = \frac{2}{100}$. Таким образом, вероятность того, что десятичная запись x содержит 8 при условии, что она содержит 5 равна $Pr[A|B] = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{19}{100}} = \frac{2}{19}$.

Ответ: $\frac{2}{19}$

№2

Случайно выбирается всюду определённая функция $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Все исходы равновозможны. Независимы ли события «$f(1) > f(2)$» и «$f(2) > f(3)$»?

Решение:

Пусть $f(1) > f(2)$ - событие A, а $f(2) > f(3)$ - событие B. Два события A, B независимы, тогда и только тогда, когда $Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B]$. По условию случайно выбирается всюду определённая функция $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ и все исходы равновозможны, значит задачу можно переформулировать так: "Вероятностное пространство - множество всех перестановок чисел от 1 до n, независимы ли события "число на первой позиции в перестановке больше числа на второй позиции" и "число на второй позиции в перестановке больше числа на третьей позиции" ?". Таким образом, в новой формулировке события A - это событие "первое число больше второго", а B - это "второе число больше третьего". Найдём $Pr[A], Pr[B], Pr[A \cap B]$ и сравним $Pr[A \cap B]$ и $Pr[A] \cdot Pr[B]$.

1) $Pr[A], Pr[B]$:

Всего возможных перестановок $n!$. Перестановок, в которых число на первой позиции больше числа на второй позиции $C_n^2 \cdot (n-2)!$ (выбираем 2 числа, ставим из так, что первое больше второго, остальные ставим как угодно). Таким образом, $Pr[A] = \frac{C_n^2 \cdot (n-2)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{1}{2}$. Аналогично $Pr[B] = \frac{1}{2}$.

2) $Pr[A \cap B]$:

$Pr[A \cap B] = Pr[$ "первое число больше второго и второе больше третьего"$] = \frac{C_n^3 \cdot (n-3)!}{n!}$ (выбираем 3 числа, расставляем их так, что первое число больше второго и второе больше третьего, всего $n!$ перестановок). Таким образом, $Pr[A \cap B] = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Таким образом, $Pr[A \cap B] \neq Pr[A] \cdot Pr[B]$, а значит события не независимы.

Ответ: нет

№3

В розыгрыше лото случайно и равновероятно выбираются 5 чисел из множества $\{1, 2 \ldots, 36\}$. Найдите вероятность события «среди выбранных чисел нет 20» при условии события «среди выбранных чисел нет 21». Ответ привести в виде числа (обыкновенная дробь, числитель и знаменатель записаны в десятичной системе).

Решение:

Вероятностное пространство - количество 5-ти элементных подмножеств множества $\{1, 2 \ldots, 36\}$, те всего исходов $C_{36}^5 = \frac{36!}{31! \cdot 5!}$. Пусть событие «среди выбранных чисел нет 20» - это событие A, а событие «среди выбранных чисел нет 21» - это событие B. Необходимо найти $Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$. Событие $A \cap B$ означает, что среди выбранных 5 чисел нет ни 20, ни 21. Таких исходов $C_{34}^5 = \frac{34!}{5! \cdot 29!}$ (количество пятёрок чисел, среди которых нет 20 и 21). Таким образом, $Pr[A \cap B] = \frac{\frac{34!}{5! \cdot 29!}}{\frac{36!}{31! \cdot 5!}}$. Найдём $Pr[B]$. Количество благоприятных исходов равно $C_{35}^5 = \frac{35!}{30! \cdot 5!}$ (количество пятёрок из всех чисел, кроме 21). Таким образом, $Pr[B] = \frac{\frac{35!}{30! \cdot 5!}}{\frac{36!}{31! \cdot 5!}}$. Таким образом, $Pr[A \cap B] = \frac{\frac{34!}{5! \cdot 29!}}{\frac{35!}{30! \cdot 5!}} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$.

Ответ: $\frac{6}{7}$

№4

В одной коробке лежит 10 фишек, пронумерованных числами от 1 до 10. Во второй коробке лежит 11 фишек, пронумерованных числами от 1 до 11. Фишки в обоих коробках между собой различаются только номерами. Вы выбираете одну из коробок случайно и равновероятно, затем случайно и равновероятно вынимаете фишку из выбранной коробки. Какова вероятность, что выбрана коробка с 11 фишками при условии, что вынута фишка с номером 7?

Решение:

Пусть A - это событие "выбрана коробка с 11 фишками", а B - "вынута фишка с номером 7". Необходимо найти $Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$. Событие $A \cap B$ означает, что выбрана коробка с 11 фишками, и при этом вынута фишка с номером 7. Коробки выбираются равномерно, значит с вероятностью $\frac{1}{2}$ была выбрана коробка с 11 фишками. При этом, тк в этой коробке 11 фишек, вероятность вынуть фишку с номером 7 равна $\frac{1}{11}$. Тогда $Pr[A \cap B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{22}$. Найдём $Pr[B]$. Фишку с номером 7 можно вынятнуть как из первой, так и из второй коробки. Вероятность выбрать каждую из коробок равна $\frac{1}{2}$, при этом вероятность вытянуть фишук с номером 7 из первой коробки равна $\frac{1}{10}$ (тк в ней 10 фишек), а из второй $\frac{1}{11}$ (тк в ней 11 фишек). Таким образом, $Pr[B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{20} + \frac{1}{22}$. Значит вероятность, что выбрана коробка с 11 фишками при условии, что вынута фишка с номером 7 равна $Pr[A|B] = \frac{\frac{1}{22}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{22}} = \frac{1}{\frac{21 \cdot 22}{220}} = \frac{10}{21}$

Ответ: $\frac{10}{21}$

№5

О некотором курсе известно, что 10% задач в домашних заданиях содержат ошибки. Если спросить у учебного ассистента, есть ли ошибка в задаче, то правильный ответ будет дан с вероятностью $4/5$. Если спросить лектора, есть ли ошибка в задаче, правильный ответ будет дан с вероятностью $3/4$. Студент спросил про некоторую случайно выбранную задачу у учебного ассистента и тот сказал, что ошибки нет. Студент уточнил у лектора и тот сказал, что ошибка есть. Считая ответы учебного ассистента и лектора независимыми, найдите вероятность того, что при таких условиях в задаче есть ошибка.

Решение:

Обозначим события A, B, C следующим образом: $A =$ "в задаче есть ошибка", $B =$ "ассистент сказал, что в задаче нет ошибки", $C =$ "лектор сказал, что в задаче есть ошибка". Из условия известно, что $Pr[A] = 0.1$, необходимо найти $Pr[A|B \cap C]$. $Pr[A|B \cap C] = \frac{Pr[B \cap C|A]}{Pr[B \cap C]} \cdot Pr[A]$ по формуле Байеса.

Тк в задаче есть ошибка с вероятностью 0.1, ассистент отвечает правильно с вероятностью $\frac{4}{5}$, а лектор с вероятностью $\frac{1}{5}$, $Pr[B \cap C] = 0.1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}$ (ошибка есть, ассистент ошибается, лектор отвечает верно)$+\ 0.9 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}$ (ошибки нет, ассистен отвечает верно, лектор ошибается) $= \frac{3}{200} + \frac{36}{200} = \frac{39}{200}$.

При этом $Pr[B \cap C|A] = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$ (в задаче есть ошибка, при этом ассистен ошибся, лектор ответил верно). Таким образом, $Pr[A|B \cap C] = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{39}{200}} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{13}$ - вероятность того, что в задаче есть ошибка при таких ответах.

Ответ: $\frac{1}{13}$

№6

Про события A, B, C известно, что A и B независимы, B и C независимы, C и A независимы. Следует ли из этого, что события A и B $\cap$ C независимы?

Решение:

Тк A и B независимы, B и C независимы, C и A независимы, то $Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B], Pr[B \cap C] = Pr[B] \cdot Pr[C], Pr[A \cap C] = Pr[A] \cdot Pr[C]$. Если события A и B $\cap$ C независимы, то должно выполняться $Pr[A \cap B \cap C] = Pr[A] \cdot Pr[B \cap C]$.

Пусть есть множество $M = \{0, 1\}$, событие B - это событие "число $b \in M$ чётное", C - событие "число $c \in M$ чётное", а A - это событие "число $a = b + c$ чётное" (b, c выбираются независимо, с вероятностью $\frac{1}{2}$). Тогда возможно 4 случая: $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$. При этом $Pr[A] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $Pr[A \cap B] = Pr[A \cap C] = \frac{1}{4}$ (возможен только вариант $0 + 0 = 0$), $Pr[B] = Pr[C] = \frac{1}{2}$ (условие). Очевидно, что B и C независимы, покажем, что A и B и C и A тоже независимы. $Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, Pr[A \cap C] = Pr[A] \cdot Pr[C] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Таким образом, условие выполняется. При этом $Pr[A \cap B \cap C] = \frac{1}{4}$ (благоприятный исход только при $a = b = c = 0$), а $Pr[A] \cdot Pr[B \cap C] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Таким образом, $Pr[A \cap B \cap C] \neq Pr[A] \cdot Pr[B \cap C]$, а значит события A и B $\cap$ C зависимы.

Ответ: нет

№7

Докажите, что существуют такое вероятностное пространство, вероятностное распределение на нём и три события A, B, C, что $Pr[A \cap B \cap C] = Pr[A] \cdot Pr[B] \cdot Pr[C]$, но никакая пара событий не является независимой.

Доказательство:

Существуют такое вероятностное пространство, вероятностное распределение на нём и три события A, B, C, что $Pr[A \cap B \cap C] = Pr[A] \cdot Pr[B] \cdot Pr[C]$, но никакая пара событий не является независимой. Например: пусть игральный кубик подбрасывают дважды, те вероятностное пространство - пары чисел от 1 до 6, все исходы равновероятные. Пусть событие A - "первым броском выпало число 1, 2 или 3", B - "первым броском выпало число 3, 4 или 5", C - "сумма чисел за 2 броска равна 9". Тогда, тк всего возможных исходов 36, а благоприятных исходов для A и для B - $3 \cdot 6 = 18$, а для C - 4 ((3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)), $Pr[A]Pr[B] = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $Pr[C] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, и выполняется $Pr[A \cap B \cap C] = Pr[A] \cdot Pr[B] \cdot Pr[C] = \frac{1}{36}$ (благоприятный исход для $A \cap B \cap C$ только (3, 6)), но при этом $Pr[A \cap B] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (благоприятные исходы вида $(3, x)$, $1 \le x \le 6, x \in \mathbb{N}$) $\neq Pr[A] \cdot Pr[B] = \frac{1}{4}$, $Pr[A \cap C] = \frac{1}{36}$ (благоприятный исход (3, 6)) $\neq Pr[A] \cdot Pr[C] = \frac{1}{18}$, $Pr[B \cap C] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ (благоприятные исходы (3, 6), (4, 5), (5, 4)) $\neq Pr[B] \cdot Pr[C] = \frac{1}{18}$, а значит никакая пара событий не является независимой. ■