Алгебра

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

April 9, 2022

№1

Докажите, что формула $m \circ n = 2mn - 2m - 2n + 3$ задаёт бинарную операцию на множестве $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ и что $(\mathbb{R}\backslash\{1\}, \circ)$ является группой.

Доказательство:

Докажем, что $m \circ n = 2mn - 2m - 2n + 3$ задаёт бинарную операцию на множестве $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Заметим, что $2(m-1)(n-1)+1 = 2(mn-n-m+1)+1 = 2mn-2m-2n+3 = m \circ n$. Тогда $m \circ n = 1 \Leftrightarrow 2(m-1)(n-1)+1 = 1 \Leftrightarrow 2(m-1)(n-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ или $n = 1$. Тк необходимо доказать, что $m \circ n$ задаёт бинарную оперцаию на множестве $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, то $m \neq 1, n \neq 1 \Rightarrow m \circ n \neq 1$ $\forall m, n \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, а значит, тк по определению бинарная операция на M - это отображение $\circ : M \times M \to M, (a, b) \to a \circ b$, то $m \circ n$ - бинарная оперция, тк каждой паре элементов множества $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ ставится в соответвие элемент из $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Теперь докажем, что $(\mathbb{R}\backslash\{1\}, \circ)$ является группой. По определению $(M, \circ)$ называется группой, если выполнены следующие условия: ассоциативность, существует нейтральный элемент, существует обратный элемент.

1) Рассмотрим $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. $a \circ b = 2ab - 2a - 2b + 3 \Rightarrow (a \circ b) \circ c = 2(2ab-2a-2b+3)c - 2(2ab-2a-2b+3) - 2c + 3 = 4abc - 4ac - 4bc + 6c - 4ab + 4a + 4b - 6 - 2c + 3 = 2a(2bc - 2c - 2b + 3) - 2(2bc - 2b - 2c + 3) - 2a + 3 = a \circ (b \circ c) \Rightarrow$ ассоциативность выпоняется.

2) Заметим, что $\exists e = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}\backslash\{1\} : \frac{3}{2} \circ a = 3a - 3 - 2a + 3 = a = a \circ \frac{3}{2}$ $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \Rightarrow$ существует нейтральный элемент.

3) Покажем, что существует обратный элемент. Рассмотрим произвольный элемент $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Необходимо показать, что существует такой $b \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, что $a \circ b = b \circ a = e = \frac{3}{2}$. $\frac{3}{2} = a \circ b = 2ab - 2a - 2b + 3 = b \circ a \Rightarrow 2ab - 2a - 2b + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 4ab - 4a - 4b + 3 = 0 \Rightarrow b(4a-4) = 4a - 3 \Rightarrow b = \frac{4a-3}{4a-4}$, тк $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \Rightarrow a \neq 1$. Значит, в $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ существует обратный элемент.

Таким образом, условия выполняются $\Rightarrow (\mathbb{R}\backslash\{1\}, \circ)$ является группой. ■

№2

Найдите все элементы порядка 20 в группе $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \times)$.

Решение:

По определению порядок элемента g - это такое минимальное положительное число m, что $g^m = e$ (g - элемент группы). Для группы $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \times)$ $e = 1$. Значит необходимо найти все корни 20-ой степени из 1 такие, что ни в какой степени меньше 20 эти корни не равны 1. По формуле Эйлера корни 20-ой степени из комплексного числа имеют вид $e^{\frac{2\pi k\cdot i}{20}} = e^{\frac{\pi k\cdot i}{10}},\ k = 0, 1, \ldots, 19$. Покажем, что если НОД$(k, 20) \neq 1$, то $e^{\frac{\pi k\cdot i}{10}}$ не является элементом порядка 20 в группе $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \times)$. Пусть НОД$(k, 20) = d$, тогда $(e^{\frac{\pi k\cdot i}{10}})^{\frac{20}{d}} = e^{\frac{2\pi k\cdot i}{d}} = e^{2\pi n\cdot i}(n \in \mathbb{Z}) = \cos(2\pi n) + i\cdot\sin(2\pi n) = 1 \Rightarrow \frac{20}{d}$ - порядок элемента $e^{\frac{\pi k\cdot i}{10}}$ и тк $d \neq 1$, то $\frac{20}{d} < 20 \Rightarrow e^{\frac{\pi k\cdot i}{10}}$ не является элементом порядка 20 в группе $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \times)$. Таким образом, нам удовлетворяют только такие k, для которых НОД$(k, 20) = 1$, т.е. 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19.

Ответ: $e^{\frac{\pi k\cdot i}{10}},\ k = 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$

№3

Найдите все левые и все правые смежные классы группы A_4 по подгруппе $\langle\sigma\rangle$, где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:

Пусть H - подгруппа группы G, тогда по определению $gH = \{gh | h \in H\}$ - левый смежный класс, а $Hg = \{hg | h \in H\}$ - правый смежный класс. По условию $G = A_4, H = \langle\sigma\rangle$. Группа состоит из $\frac{4!}{2} = 12$ элементов: $id, (123), (124), (134), (132), (142), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)$. Тк подгруппа порождена циклом (124), то $H = \{id, (124), (142)\}$. Найдём левые смежные классы: $idH = \{id, (124), (142)\}$, $(143)H = \{(143), (231), (13)(24)\}$, $(134)H = \{(134), (12)(34), (234)\}$, $(132)H = \{(132), (243), (14)(23)\}$. Найдём правые смежные классы: $Hid = \{id, (124), (142)\}$, $H(123) = \{(123), (14)(23), (234)\}$, $H(134) = \{(134), (13)(24), (132)\}$, $H(143) = \{(143), (243), (12)(34)\}$.

Ответ: Левые смежные классы: $\{id, (124), (142)\}$, $\{(143), (231), (13)(24)\}$, $\{(134), (12)(34), (234)\}$, $\{(132), (243), (14)(23)\}$.

Правые смежные классы: $\{id, (124), (142)\}$, $\{(123), (14)(23), (234)\}$, $\{(134), (13)(24), (132)\}$, $\{(143), (243), (12)(34)\}$.

№4

Докажите, что всякая подгруппа циклической группы является циклической.

Доказательство:

Пусть G - циклическая группа, H - подгруппа G. Тк G - циклическая группа, то, если g - образующий элемент, все элементы в G представимы в виде $g^n,\ n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что если H состоит из одного элемента, то теорема выполняется, поэтому будем считать, что в H более одного элемента. Рассмотрим элемент $g^a \in H$, где a - наименьшая положительная степень (такой элемент точно есть, тк если H содержит элемент g^{-a}, то H содержит элемент g^a, тк по определению подгруппы, если $x \in H$, то $x^{-1} \in H$). Теперь рассмотрим произвольный элемент $g^b \in H$. Для a, b выполняется $b = q\cdot a + r,\ 0 \leq r < a,\ q \in Z$. $g^r = g^{b-q\cdot a} = g^b \cdot g^{-q\cdot a} = g^b \cdot (g^a)^{-q} \in H$, тк $g^b \in H,\ g^a \in H$. Тк a - наименьшая положительная степень элемента из H, то $r = 0 \Rightarrow b = q\cdot a \Rightarrow g^b = (g^a)^q \Rightarrow H$ состоит из степеней g^a, а значит H является циклической группой (g^a - её образующий элемент). $\blacksquare$