Дискретная математика

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

November 25, 2021

№1

Рассмотрим на множестве $\mathbb{R}$ бинарное отношение $R(x, y)$, означающее, что $\frac{x}{y} > 0$. Чему равно $R \circ R$?

Решение:

По определению композиции $x(R \circ R)\ y \Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in R, (z, y) \in R$. Значит $\frac{x}{z} > 0$ и $\frac{z}{y} > 0$. Заметим, что $\frac{x}{z} > 0$ тогда и только тогда, когда x и z одного знака. Аналогично для $\frac{z}{y} > 0$ y и z одного знака, а значит $R \circ R$ равно $\frac{x}{y} > 0$.

Ответ: $\frac{x}{y} > 0$

№2

Бинарное отношению R $\subset \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ состоит из пар $\{(a, 1), (b, 2), (c, 4), (d, 8), (e, 8), (f, 8), (g, 8), (h, 8)\}$. Найдите количество элементов в отношениях $R^T \circ R$ и $R \circ R^T$.

Решение:

Отношение R^T состоит из пар $\{(1, a), (2, b), (4, c), (8, d), (8, e), (8, f), (8, g), (8, h)\}$

Тогда композиция $R^T \circ R$ равна $\{(1, 1), (2, 2), (4, 4), (8, 8)\}$. а композиция $R \circ R^T$ равна $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, e), (d, f), (d, g), (d, h), (e, d), (e, f), (e, g), (e, h), (e, e), (f, d), (f, e), (f, f), (f, g), (f, h), (g, d), (g, e), (g, f), (g, g), (g, h), (h, d), (h, e), (h, f), (h, g), (h, h)\}$

В композиция $R^T \circ R$ 4 элемента, а в композиции композиция $R \circ R^T$ $3 + 5 \cdot 5 = 28$.

Ответ: 4 и 28

№3

Пусть R_1 , R_2 — такие отношения на множествах A и B , что $R_1 \cup R_2$ является функцией. Докажите, что тогда и R_1, и R_2 также являются функциями.

Доказательство:

Докажем от противного: пусть $R_1 \cup R_2$ является функцией, но хотя бы одно из отношений R_1 и R_2 не является функцией. Это значит, что в отношении, которое не является функцией, найдутся пары $(a, x), (a, y)$, где $x \neq y$ ($a \in A$, $x, y \in B$, либо $a \in B$, $x, y \in A$). Тогда в объединение $R_1 \cup R_2$ входят пары $(a, x), (a, y)$, а значит это объединение не является функцией $\Rightarrow$ противоречие, а значит и R_1, и R_2 являются функциями. ■

№4

Всегда ли композиция отношений эквивалентности является отношением эквивалентности?

Решение:

Нет. Приведем пример: пусть на множестве $X = \{1, 2, 3\}$ заданы отношения $A = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ и $B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$. Отношение A является отношением эквивалентности, тк оно рефлексивно ($xAx\ \forall x \in X$), симметрично (если xAy, то $yAx\ \forall x, y, \in X$) и транзитивно (если xAy и yAz, то $xAz\ \forall x, y, z \in X$). Аналогично B является отношением эквивалентности. При этом $A \circ B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 3), (3, 2)\}$. Заметим, что в композиции есть пара $(1, 3)$, но нет пары $(3, 1)$, а значит не соблюдается симметричность, те $A \circ B$ не является отношением эквивалентности.

Ответ: Нет

№5

а)

В связном графе степени восьми вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4. Докажите, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности.

Доказательство:

Пусть в графе было x вершин. Степени восьми равны 3, а степени $x - 8$ равны 4. Пусть в графе можно удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности. Тогда возможны 3 варианта: ребро, которое удалило соединяло вершины с степенью 3 и 3, 4 и 4, либо 3 и 4.

1) Пусть ребро соединяло вершины степени 3 и 3. Тогда в графе стало 6 вершин с нечет степенью и $x - 6$ с чётной, и в каждой компоненте 3 вершины с нечет степенью, остальные с чёт. Тогда сумма степеней вершин в каждой компоненте - нечет, что невозможно (тк сумма степеней вершин графа чёт, тк равна удовенному числу рёбер).

2) Пусть ребро соединяло вершины степени 4 и 4. Тогда в графе стало 10 вершин с нечет степенью и $x - 10$ с чётной, и в каждой компоненте 5 вершины с нечет степенью, остальные с чёт. Тогда сумма степеней вершин в каждой компоненте - нечет, что невозможно (тк сумма степеней вершин графа чёт, тк равна удовенному числу рёбер).

3) Пусть ребро соединяло вершины степени 3 и 4. Тогда в графе будет ровно одна вершина степен 2, значит ровно в одной компоненте будет вершина степени 2, а в другой её не будет, а значит компоненты связности неизоморфные.

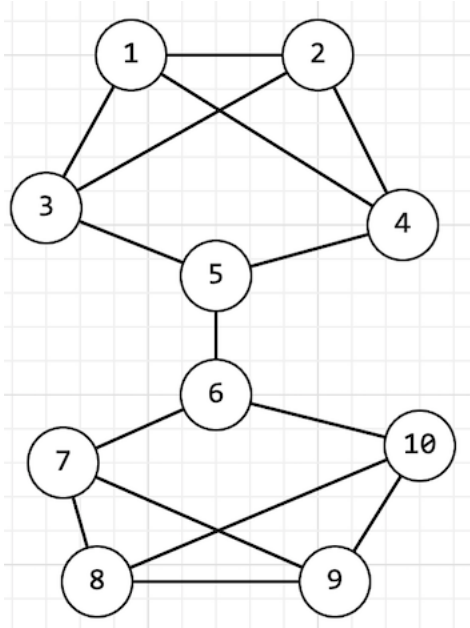
Таким образом, нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности. ■

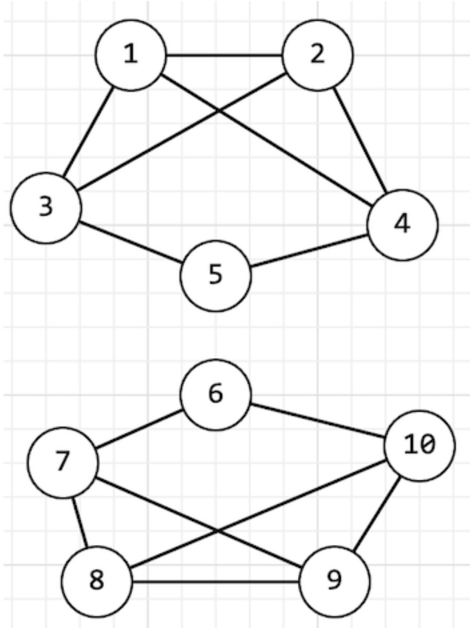
б)

Верно ли аналогичное утверждение для графов с 10 вершинами степени 3 (и произвольным количеством вершин степени 4)?

Решение:

Неверно. На рисунке ниже изображен граф с 10 вершинами степени 3 и 0 вершинами степени 4, в котором можно удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные конпоненты связности.





№6

Найдите нестрогий порядок на четырёх элементах, в котором есть ровно три пары несравнимых элементов.

Решение:

Пусть у нас есть множество, состоящее из 4 элементов-векторов: $\{(1,2),(3,4),(5,6),(0,7)\}$. Будем считать, что $(x_1,x_2) \leq (y_1,y_2) \Leftrightarrow x_i \leq y_i \forall i$. Тогда $(1,2),(3,4),(5,6)$ несравнимы с $(0,7)$ и сравнимы друг с другом, а значит в порядке есть ровно три пары несравнимых элементов.

№7

Приведите пример порядка на 6 элементах, в котором есть 9 соседних пар. (Определение см. на предыдущей странице.) (Определения. Элементы x , y порядка (X, <) соседние (синонимы: элемент x непосредственно предшествует y , элемент y непосредственно следует за x), если x < y и нет такого z , что x < z < y.)

Решение:

Пусть у нас есть множество, состоящее из 6 элементов-векторов: $\{(-5,-5),(1,1),(2,0),(3,-1),(5,5),(4,6)\}$. Будем считать, что $(x_1,x_2) < (y_1,y_2) \Leftrightarrow x_i < y_i \forall i$. Тогда $(-5,-5) < (1,1); (-5,-5) < (2,0); (-5,-5) < (3,-1); (1,1) < (5,5); (1,1) < (4,6); (2,0) < (5,5); (2,0) < (4,6); (3,-1) < (5,5); (3,-1) < (4,6)$, а $(1,1);,(2,0),(3,-1)$ несравнимы и $(5,5);(4,6)$ несравнимы. Таким образом в таком порядке на 6 элементах есть 9 соседних пар.