Алгебра

Сидоров Дмитрий

Группа БПМИ 219

May 12, 2022

№1

Найдите все обратимые элементы, все делители нуля (левые и правые) и все нильпотентные элементы в кольце $R = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ с обычными оперциями сложения и умножения.

Решение:

1) По определению $x \in R$ - обратный элемент, если существует такой $y \in R$, что $xy = yx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (единица в кольце R - это единичная матрица 2×2) $\Rightarrow$ обратные элементы в кольце R имеют вид $\frac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in R$, при $ac \neq 0$ (тк $\frac{1}{a} \in \mathbb{Q}, -\frac{b}{ac} \in \mathbb{Q}, \frac{1}{c} \in \mathbb{Q}, 0 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in R$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$ и $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

2) По определению $x \in R$ - левый (правый) делитель нуля, если $x \neq 0$ и найдётся элемент $y \in R$, $y \neq 0$, такой что $xy = 0$ ($yx = 0$). Рассмотрим матрицы $x_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ и $x_2 = \begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix}$, $m, n, k \in \mathbb{Q}$, и a, b, c одновременно не равны 0, и m, n, k одновременно не равны 0 ($x_1, x_2 \in R$). Тогда, если $x_1 x_2 = 0$, то $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am & 0 \\ bm + cn & ck \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} am = 0 \\ bm + cn = 0 \\ ck = 0 \end{cases}$. Пусть $c = 0$, тогда, тк $x_1 \neq 0$, то a, b не могут быть одновременно 0, тогда $m = 0$. Итого, $x_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & k \end{pmatrix}$. Пусть $c \neq 0$, тогда $k = 0$. Если $m = 0$, то из $bm + cn = 0$ следует, что $n = 0$, и тогда $m = n = k = 0$, что противоречит условию $\Rightarrow m \neq 0 \Rightarrow a = 0$. Итого $x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} m & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, левые и правые делители нуля имеют вид $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, где $(a, b) \neq (0, 0), (b, c) \neq 0$ $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

3) По определению $x \in R$ называется нильпотентным, если $x \neq 0$ и существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $x^n = 0$. Рассмотрим матрицу $x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ и a, b, c одновременно не равны 0 ($x \in R$). Тогда $xx = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab + bc & c^2 \end{pmatrix}$ (те у x^n на главной диагонале стоят $a^n, c^n \Rightarrow$ тк x^n должно равняться 0, а

$a, c \in \mathbb{Q}$, то $a = c = 0$). Заметим, что для $n = 2$ $\quad x^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ab + bc & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ является нильпотентом ($b \neq 0$).

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}, ac \neq 0;\quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, (a,b) \neq (0,0), (b,c) \neq 0;\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, b \neq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}$.

№2

Докажите что идеал $(x, y-2)$ в кольце $\mathbb{R}[x, y]$ не является главным.

Доказательство:

По определению подмножество I кольца R называется идеалом, если выполнены условия:

1) I - подгруппа по сложению

2) $\forall a \in I, r \in R: \ ra \in I, ar \in I$

Кроме того, идеал I называется главным, если существует такое $p \in R$, что $I = (p)$ $((p) := \{rp \mid r \in R\})$.

Обозначим кольцо $\mathbb{R}[x, y]$ как R. Пусть идеал $(x, y-2)$ в кольце R является главным. Тогда $(x, y-2) = \{ax + b(y-2) \mid a, b \in R\}$. Если $(x, y-2)$ главный, то $(x, y-2) = (p)$ для некоторого $p \in R$. Тогда, если взять $a = 1,\ b = 0$, получим, что $(x, y-2) = \{x\} \Rightarrow x \in (p)$. Аналогично для $a = 0,\ b = 1$ получим , что $(x, y-2) = y - 2 \Rightarrow y - 2 \in (p)$. Итого, получили, что x и $y-2$ делятся на p (тк $x = q_1 p \in (p), y - 2 = q_2 p \in (p),\ q_1, q_2 \in \mathbb{R}[x, y]$). Тк p делит многочлены первой степени, то его степень не больше 1. Пусть $p \neq const$. Тогда, если x делится на p, то $p = kx,\ k \in \mathbb{R}$, но это невозможно, тк p должен делить $y - 2$. Значит $p = const \neq 0$ (не равен 0, тк иначе $(0) = \{0\} \neq (x, y-2)$). Известно, что константы являются обратимыми и порождают всё кольцо, а значит идеал $(x, y-2)$ является всем кольцом $\Rightarrow$ противоречие, тк все многочлены в $(x, y-2)$ в точке (0, 2) равны только 0. $\blacksquare$

№3

При помощи теоремы о гомоморфизме для колец установите изоморфизм $\mathbb{C}[x]/(2x^2 - x) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, где $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ - кольцо с покомпонентными оперциями сложения и умножения.

Решение:

По теореме о гомоморфизме для колец $R/\mathrm{Ker}\varphi \simeq \mathrm{Im}\varphi$ (обозначил $\mathbb{C}[x]$ как R). Заметим, что $2x^2 - x = x(2x-1)$. Пусть $\varphi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C},\ \varphi(f) = (f(0), f(0.5))$ (0, 0.5 являются корнями уравнения $x(2x-1) = 0$). При этом отображение φ является гомоморфизмом, тк $\varphi(a+b) = ((a+b)(0), (a+b)(0.5)) = (a(0) + b(0), a(0.5) + b(0.5)) = (a(0), a(0.5)) + (b(0), b(0.5)) = \varphi(a) + \varphi(b)$ и $\varphi(ab) = ((ab)(0), (ab)(0.5)) = (a(0)b(0), a(0.5)b(0.5)) = (a(0), a(0.5))(b(0), b(0.5)) = \varphi(a)\varphi(b)\ \forall a, b \in R$. Тогда, тк по определению ядро гомоморфизма φ - это множество $\mathrm{Ker}\varphi := \{r \in R | \varphi(r) = 0\}$, а образ гомоморфизма φ - это множество $\mathrm{Im}\varphi := \varphi(R)$, найдём $\mathrm{Ker}\varphi$.

Тк $\varphi(x(2x-1)) = 0$, то $x(2x-1) \in \mathrm{Ker}\varphi$. Возьмём произвольный $f(x)(x(2x-1)) \in x(2x-1)$. Тк ядро является идеалом в R и $x(2x-1) \in R$, то любой многочлен, делящийся на $x(2x-1)$ принадлежит ядру. Итого, $x(2x-1) \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$.

Покажем, что в ядре нет ненулевых элементов степени меньше 2. Пусть $f = ax + b \in \mathrm{Ker}\varphi$, тогда $\varphi(f) = (b, 0.5a + b) = (0, 0) \Leftrightarrow a = 0, b = 0$. Пусть $f = x(2x-1)q(x) + r(x) \in \mathrm{Ker}\varphi$, где степень $r(x)$ не больше 1 или $r = 0$. Тогда $\varphi(f) = \varphi(x(2x-1)q + r) = \varphi(x(2x-1))\varphi(q) + \varphi(r)$. Тк $f \in \mathrm{Ker}\varphi,\ x(2x-1) \in \mathrm{Ker}\varphi$, то получаем, что $0 = 0 + \varphi(r) \Rightarrow \varphi(r) = 0 \Rightarrow r = 0$ (тк в ядре нет элементов степени не больше 1). Таким образом, $f \in x(2x-1) \Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi \subseteq x(2x-1)$.

Таким образом, получили, что $\text{Ker}\varphi$ и $x(2x-1) = 2x^2 - x$ совпадают. Тогда, тк $\text{Im}\varphi$ совпадает с $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ (тк для любых $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ можно рассмотреть в $\mathbb{C}[x]$ многочлен $f(x) = -z_1(2x-1) + 2xz_2$, для которого выполняется $f(0) = z_1, f(0.5) = z_2$, а значит $\varphi(f) = (z_1, z_2)$, и φ - сюръекция, а значит $\text{Im}\varphi$ совпадает с $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$), то по теореме о гомоморфизме для колец получили изоморфизм $\mathbb{C}[x]/(2x^2 - x) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, где $\varphi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C},\ \varphi(f) = (f(0), f(0.5))$.

Ответ: $\varphi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C},\ \varphi(f) = (f(0), f(0.5))$.

№4

Пусть R - коммутативное кольцо и $I \lhd R$. Докажите, что факторкольцо R/I является полем тогда и только тогда, когда $I \neq R$ и не существует собственного идеала $J \lhd R$ с условием $I \subsetneq J$.

Доказательство:

По определению поле - коммутативное кольцо, в котором $0 \neq 1$ и всякий ненулевой элемент обратим.

1) Докажем, что если факторкольцо R/I является полем, то $I \neq R$ и не существует собственного идеала $J \lhd R$ с условием $I \subsetneq J$. Если R - коммутативное кольцо и $I \lhd R$ и факторкольцо R/I является полем, то факторкольцо R/I является коммутативным кольцом, в котором $0 \neq 1$ и всякий ненулевой элемент обратим. Пусть $R = I$. Тогда $R/I = R/R = 0$, но тогда R/I не является полем. Итого, $I \neq R$. Пусть существует собственный идеал $J \lhd R$ с условием $I \subsetneq J$. Пусть $x \in J$, но $x \notin I$. Тогда $x + I \neq 0 + I$ и, тк R/I - поле, то $x + I$ обратим, а значит существует такой $y + I \in R/I$, что $(x+I)(y+I) = xy + I = 1 + I$. Тогда $xy - 1 \in I$. При этом $xy - (xy-1) = 1$ и $xy - 1 \in J$ (тк $I \subsetneq J$) и $xy \in J$ (тк $x \in J, y \in R$). Поэтому $1 \in J$. Таким образом, $J = R$ (факт из лекции) $\Rightarrow J$ - несобственный идеал, получили противоречие, а значит если факторкольцо R/I является полем, то $I \neq R$ и не существует собственного идеала $J \lhd R$ с условием $I \subsetneq J$.

2) Теперь докажем, что если $I \neq R$ и не существует собственного идеала $J \lhd R$ с условием $I \subsetneq J$, то факторкольцо R/I является полем. Пусть $x \notin I$ ($x + I \in R/I$ и $x + I \neq 0 + I$). Пусть J - собственный идеал, такой что $J = \{rx + i,\ i \in I, r \in R\}$ (является идеалом, тк:

1) для $a = r_1x + i_1, b = r_2x + i_2 \in J$ выполняется $a + b = (r_1 + r_2)x + (i_1 + i_2) \in J$, тк $r_1 + r_2 \in R, i_1 + i_2 \in I$

2) $0 = 0 \cdot x + 0 \in J;\ 0 + rx + i = rx + i + 0 = rx + i$

3) для $a = rx + i$ выполняется $-a = -rx - i \in J,\ a + (-a) = rx + i - rx - i = 0$

$1), 2), 3) \Rightarrow J$ - подгруппа в R по сложению

4) для $a = r_1x + i \in J, r_2 \in R$ выполняется $r_2a = r_2(r_1x + i) = (r_2r_1)x + r_2i \in J$ и $ar_2 = (r_1x + i)r_2 = (r_1r_2)x + ir_2 \in J$, J - подгруппа в R по сложению $+$ 4) $\Rightarrow J$ - идеал)

Заметим, что $\forall i \in I$ выполняется, что $i = 0x + i \in I \Rightarrow I \subseteq J$. Тк $I \neq R$ и не существует собственного идеала $J \lhd R$ с условием $I \subsetneq J$, то $J = R$ (в том числе $x = 1x + 0 \in J$, но $x \notin I$). Тогда, тк $1 \in R$ и $1 \in J$ (тк $1 \in R = Rx + I$), то для некоторых $r \in R, i \in I$ $1 = rx + i \Rightarrow 1 - rx = i \in I \Rightarrow 1 + I = rx + I = (r + I)(x + I) \Rightarrow x + I$ - обратим. Таким образом, произвольный ненулевой элемент $x + I \in R/I$ обратим, $0 \neq 1$, R/I - коммутативное кольцо, а значит R/I - поле. ■