

Harmonická analýza signálů

Ondřej Šika

Obsah

1	Zadání	1
2	Teoretický úvod	1
2.1	Základní princip harmonické analýzy	1
2.2	Podmínky harmonické analýzy signálů	1
3	Obecné matematické vyjádření	2
4	Konkrétní výpočet obdelníkového signálu	2
4.1	Obecně	2
4.1.1	Střední hodnota	2
4.1.2	Kosinová složka	2
4.1.3	Sinová složka	3
5	Postup měření	3
6	Naměřené a vypočtené hodnoty	4
6.1	Obdelník	4
6.2	Trojúhelník	4
7	Grafy	5
7.1	Odbelník	5
7.2	Trojúhelník	8
8	Příklady výpočtů	11
8.1	Sinová složka (bez fázového posuvu)	11
8.2	Kosinová složka (bez fázového posuvu)	11
8.3	Amplituda první harmonické	11
8.4	Fázový posuv první harmonické	11
8.5	Efektivní hodnota amplitudy první harmonické	11
9	Závěr	11

1 Zadání

1. V rámci přípravy na toto praktické cvičení proved'te teoreticky harmonickou analýzu průběhu zadaného v předmětu ELT matematickou metodou. Analýzu proved'te obecně a poté číselně vyjádřete alespoň deset nenulových vyšších harmonických, které daný signál zcela jistě obsahuje. (Doporučení pro vyučující : zadanou frekvenci volte z pásma 4 - 8 kHz, amplitudu signálu v rozsahu $U_{\max} = 1 - 3\text{V}$.)
2. Teoretický výpočet ověřte praktickým měřením pomocí selektivního nízkofrekvenčního voltmetru. Měření proved'te pro alespoň deset vyšších harmonických, které jsou v daném signálu zcela jistě obsaženy.
3. Naměřené a vypočítané hodnoty napěťových úrovní základní i vyšších harmonických zpracujte pomocí PC s využitím programu Open Office. Po zadání jednotlivých harmonických průběhů $U_n = f(t)$ proved'te jejich interferenci. Výsledný průběh porovnejte s teoretickým průběhem. Rozdíly mezi průběhy okomentujte v závěru práce.
4. Z vypočítaných a naměřených hodnot sestavte a zhodnoťte amplitudové a fázové kmitočtové spektrum měřených signálů.

2 Teoretický úvod

2.1 Základní princip harmonické analýzy

Harmonická analýza je rozklad neharmonický signálů na součet n signálů harmonických. Harmonickým signálem je myšlen signál čistě sinusový s fázovým posuvem. I ten však můžeme rozdělit na signál sinusový a kosinusový bez fázového posuvu.

2.2 Podmínky harmonické analýzy signálů

- Každý signál, který chceme rozložit na součet harmonických signálů musí být periodický.
- Pokud chceme provádět lineární výpočet z nekonečně mnoha hodnot, potřebujeme matematický předpis funkce průběhu. Pokud nejsme schopni tento předpis vyjádřit musíme zvolit diskrétní metodu.

3 Obecné matematické vyjádření

Fourierova řada

$$u = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n2\pi ft + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n2\pi ft) + b_n \sin(n2\pi ft)$$

Stejnosměrná složka

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Amplituda kosinove složky

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) * \cos(n2\pi ft) dt$$

Amplituda sinove složky

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) * \sin(n2\pi ft) dt$$

Amplituda sinové složky (s fázovým posuvem)

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Fázový posuv sinové složky (s fázovým posuvem)

$$\varphi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}$$

4 Konkrétní výpočet obdelníkového signálu

- $U_M = 2.8V$
- $f = 7.3kHz$
- střída 5:3

4.1 Obecně

4.1.1 Střední hodnota

$$a_0 = \frac{U_M}{T} \int_0^{5T/8} dt - \frac{U_M}{T} \int_{5T/8}^T dt = \frac{U_M}{T} * \frac{5T}{4} - \frac{U_M}{T} * (T - \frac{5T}{4}) = \frac{5U_M}{8} - U_M + \frac{5U_M}{8} = \frac{U_M}{4}$$

4.1.2 Kosinová složka

$$a_n = \frac{2U_M}{T} \int_0^{5T/8} \cos(n\omega t) dt - \frac{2U_M}{T} \int_{5T/8}^T \cos(n\omega t) dt$$

$$a_n = \frac{U_M}{\pi n} * (\sin(n\frac{5\pi}{4}) - \sin 0) - \frac{U_M}{\pi n} * (\sin 0 - \sin(n\frac{5\pi}{4}))$$

$$a_n = \frac{2U_M}{\pi n} * \sin(n\frac{5\pi}{4})$$

4.1.3 Sinová složka

$$b_n = \frac{2U_M}{T} \int_0^{5T/8} \sin(n\omega t) dt - \frac{2U_M}{T} \int_{5T/8}^T \sin(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{U_M}{\pi n} * (-\cos(n\frac{5\pi}{4}) + \cos 0) - \frac{U_M}{\pi n} * (-\cos 0 + \cos(n\frac{5\pi}{4}))$$

$$b_n = \frac{U_M}{\pi n} * (-\cos(n\frac{5\pi}{4}) + 1 + 1 - \cos(n\frac{5\pi}{4}))$$

$$b_n = \frac{2U_M}{\pi n} * (1 - \cos(n\frac{5\pi}{4}))$$

5 Postup měření

Postup měření: Příprava přístroje k měření : Po zapnutí síťového vypínače je přístroj za 5 minut připraven k provozu a ustálen je za 30 minut. Kontrola měřiče kmitočtu: stisknete tlačítko „fx – 0,1s“ a tlačítko „650 kHz“ a zkratujete konektor „VSTUP fx“. Číslcový indikátor kmitočtu musí ukazovat samé nuly. Po této kontrole zkratovací konektor odstraňte. Předběžné nastavení pro širokopásmové měření kmitočtu : Při použití přístroje k širokopásmovému měření stisknete tlačítko „650 kHz“, přepínač „VSTUP IMP.“ přepnete do polohy „NAST“ a přepínač „ROZSAH“ do polohy „NAST –50dB“. Na vstup nepřivádíme signál !!! Pomocí šroubováku dostavíte potenciometrem označeným „NAST 650 kHz“ ručku měřidla přesně na hodnotu 0dB. Po tomto nastavení přepnete přepínač „VSTUP IMP.“ na vhodně zvolenou impedanci a přepínač „ROZSAH“ do maxima (nebo do vhodné polohy podle amplitudy měřeného signálu). Předběžné nastavení pro selektivní měření kmitočtu : Při použití přístroje k selektivnímu měření - např. pro harmonickou analýzu signálů - přepnete přepínač „VSTUP IMP.“ do polohy „NAST“ a přepínač „ROZSAH“ do polohy „NAST – 50 dB“, dále stisknete tlačítko „0,1 kHz“ a tlačítko „OSC.INT.“. Na vstup nepřivádíme signál! Pomocí potenciometrů ladění „HRUBĚ“ a „JEMNĚ“ vyhledejte na kmitočtu 50 kHz maximální výchylku ručky měřidla (při nastavení přesného kmitočtu 50 kHz nastávají malé interference a doporučuje se proto nastavení provést v oblasti maximální výchylky, kdy chvění ručky není patrné). Pomocí šroubováku dostavíte potenciometrem označeným „NAST 0,1kHz“ ručku měřidla přesně na hodnotu 0dB. Po tomto nastavení přepnete přístroj na šířku pásma 3,1 kHz stisknutím jednoho z tlačítek označených „3,1 kHz“. Lze volit dvě polohy nosného kmitočtu, které jsou u tlačítek vyznačeny. Pomocí šroubováku dostavíte potenciometrem označeným „NAST 3,1 kHz“ ručku měřidla přesně na hodnotu 0dB. Po tomto nastavení přepnete přepínač „VSTUP IMP.“ na vhodně zvolenou (nebo doporučenou) impedanci, přepínač „ROZSAH“ do maxima (nebo podle amplitudy měřeného signálu) a jedním z tlačítek „0,1 kHz“ nebo „3,1 kHz“ zvolíte potřebnou šířku pásma. Na generátoru funkcí si nastavte pomocí osciloskopu žádaný průběh signálu s tvarem, amplitudou a frekvencí uvedenou v zadání. Voltmetr měří efektivní

hodnotu pouze sinusového průběhu, proto amplitudu nastavujte podle osciloskopu. Potom připojte generátor funkcí k nesymetrickému vstupu – konektor „VSTUP NE-SYM.“. Zvolte vstupní impedanci přepínačem „VST.IMP.“ a šířku měřeného pásma tlačítky „0,1 kHz“ nebo „3,1 kHz“. Pro spektrální analýzu signálů doporučujeme zvolit selektivní měření v pásmu 0,1 kHz.

6 Naměřené a vypočtené hodnoty

6.1 Obdelník

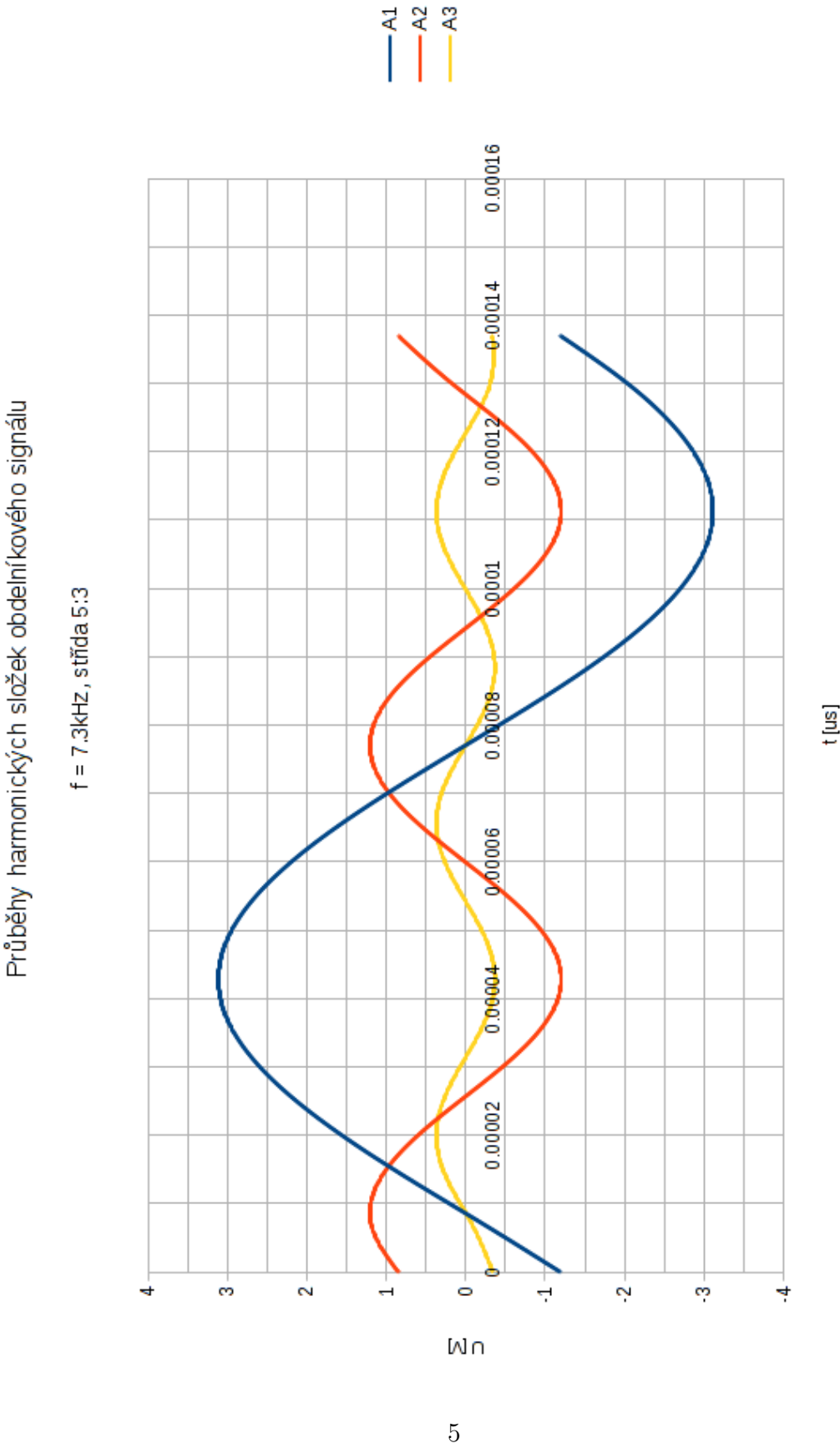
n	f [Hz]	U_{EFV} [V]	A_V [V]	U_{EFN} [V]	A_N [V]
1	7300	2.3290	3.2937	2.2000	3.1113
2	14600	0.8913	1.2604	0.8500	1.2021
3	21900	0.3216	0.4548	0.2600	0.3677
4	29200	0.0602	0.8913	0.5800	0.8202
5	36500	0.1929	0.2729	0.2200	0.3111
6	43800	0.2971	0.4201	0.2500	0.3536
7	51100	0.3327	0.4705	0.3400	0.4808
9	65700	0.2588	0.3660	0.2500	0.3536
10	73000	0.1783	0.2521	0.1900	0.2687
11	80300	0.0877	0.1240	0.0450	0.0636

6.2 Trojúhelník

n	f [Hz]	U_{EFV} [V]	A_V [V]	U_{EFN} [V]	A_N [V]
1	5350	0.6085271837	1.054	0.65	1.1258330249
3	16050	0.0827314934	0.117	0.075	0.1060660172
5	26750	0.0296984848	0.042	0.026	0.0367695526
7	37450	0.0155563492	0.022	0.014	0.0197989899
9	48150	0.0919238816	0.13	0.009	0.0127279221
11	58850	0.006363961	0.009	0.006	0.0084852814
13	69550	0.0042426407	0.006	0.005	0.0070710678
15	80250	0.0035355339	0.005	0.004	0.0056568542
17	90950	0.0028284271	0.004	0.0024	0.0033941125
19	101650	0.0021213203	0.003	0.001	0.0014142136
21	112350	0	0	0.0006	0.0008485281

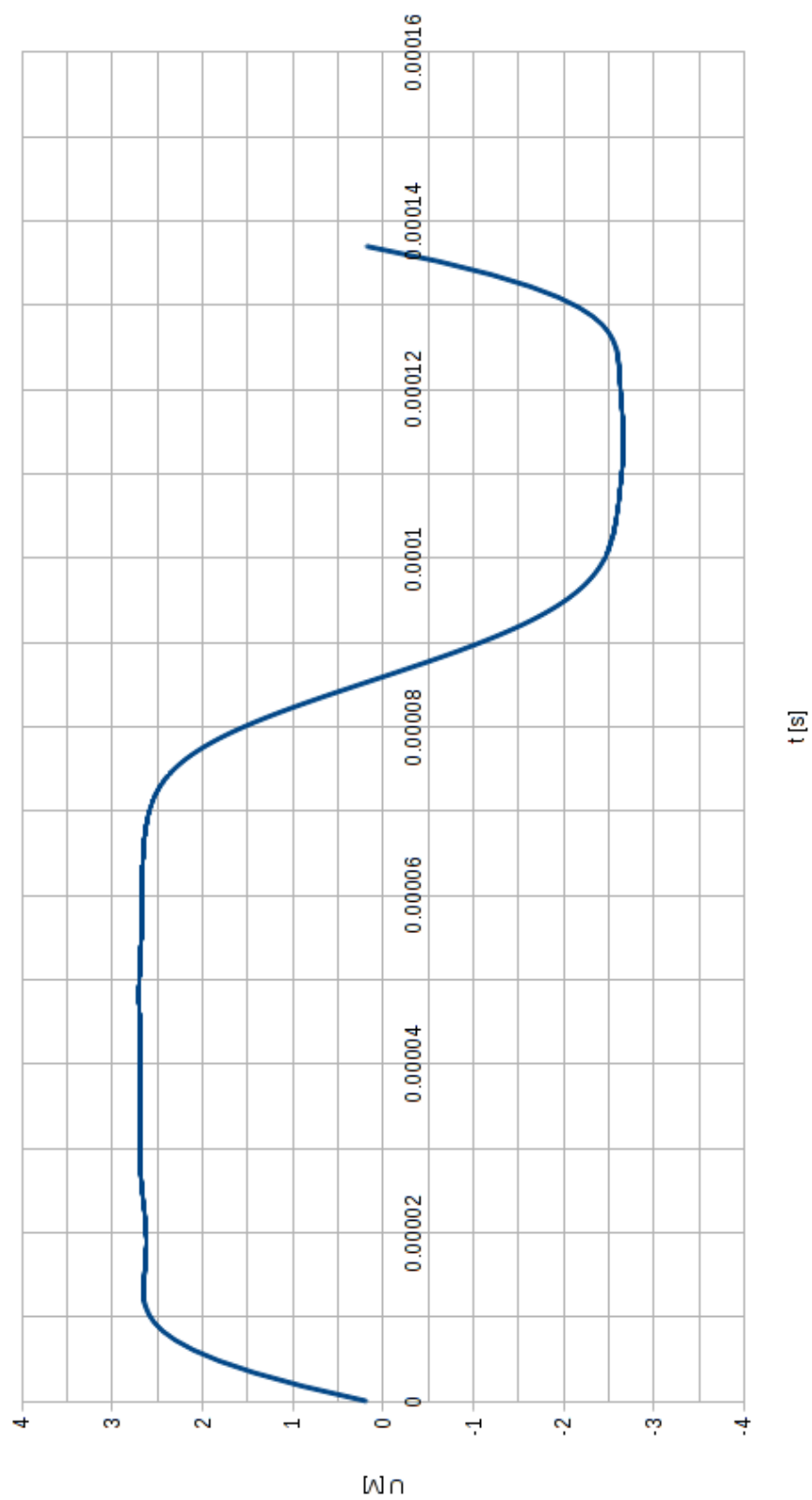
7 Grafy

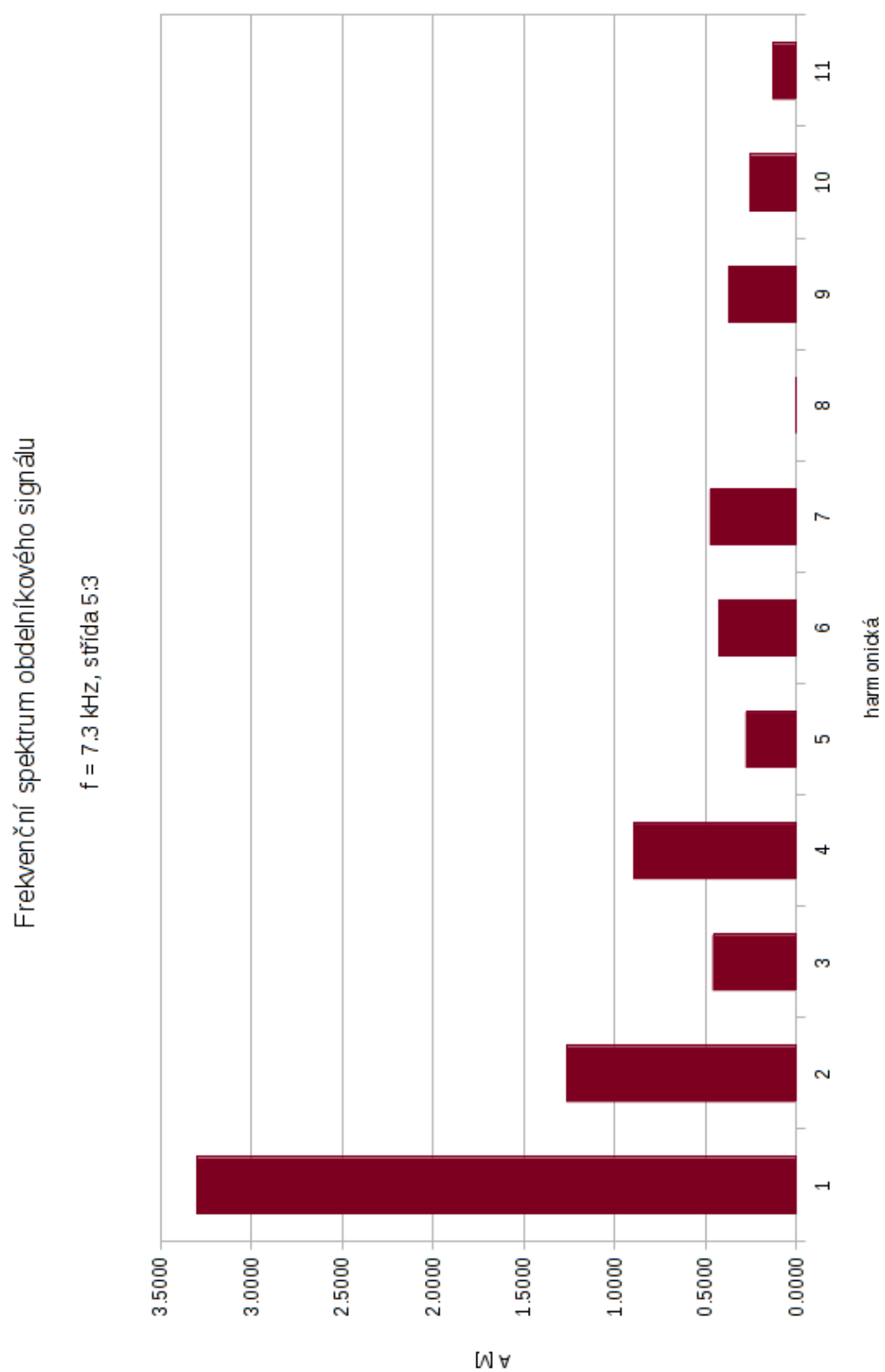
7.1 Odbelník



Součet prvních 20 naměřených harmonických

$f = 7.3\text{kHz}$, obdelník, střída 5:3

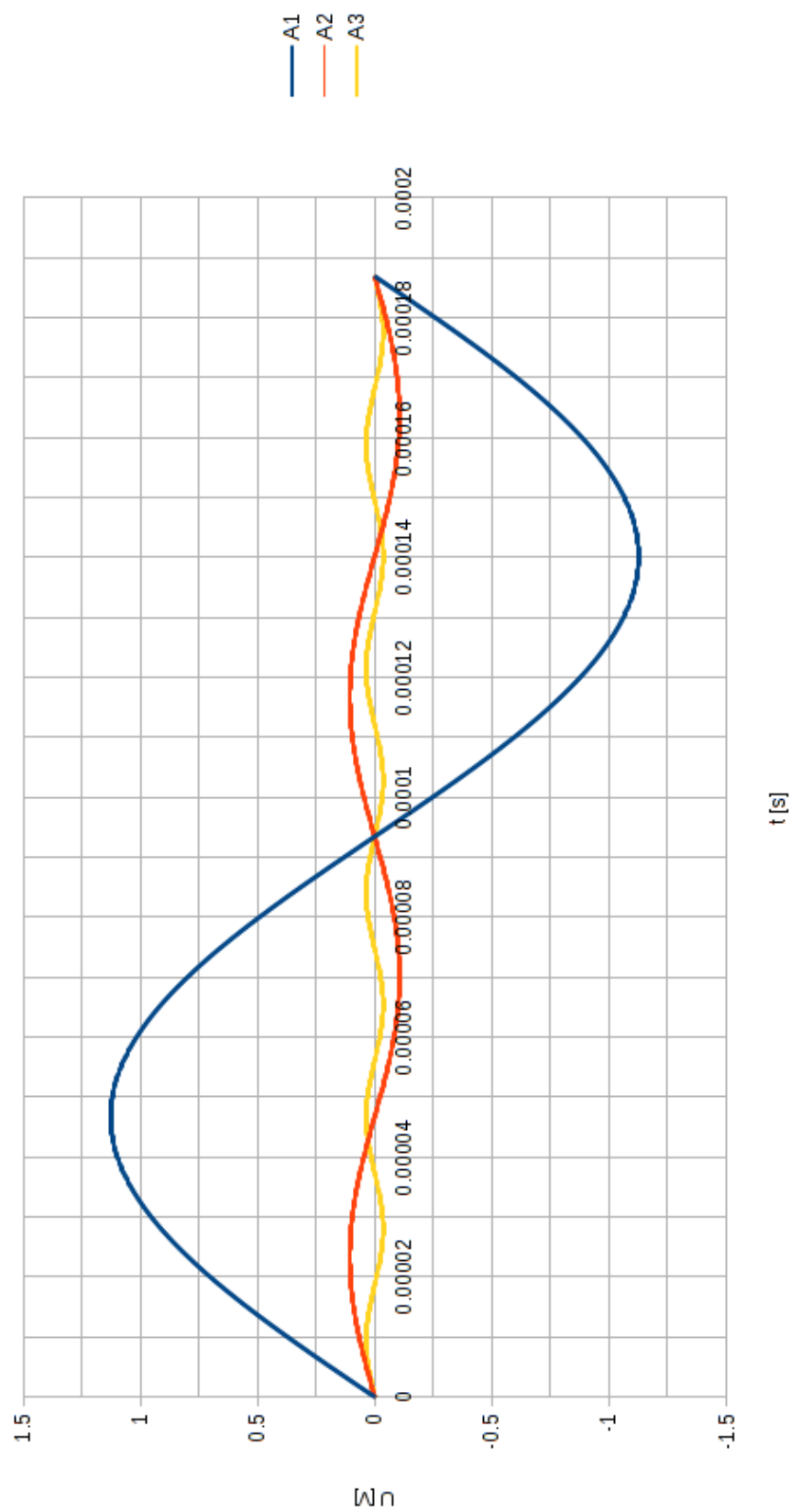




7.2 Trojúhelník

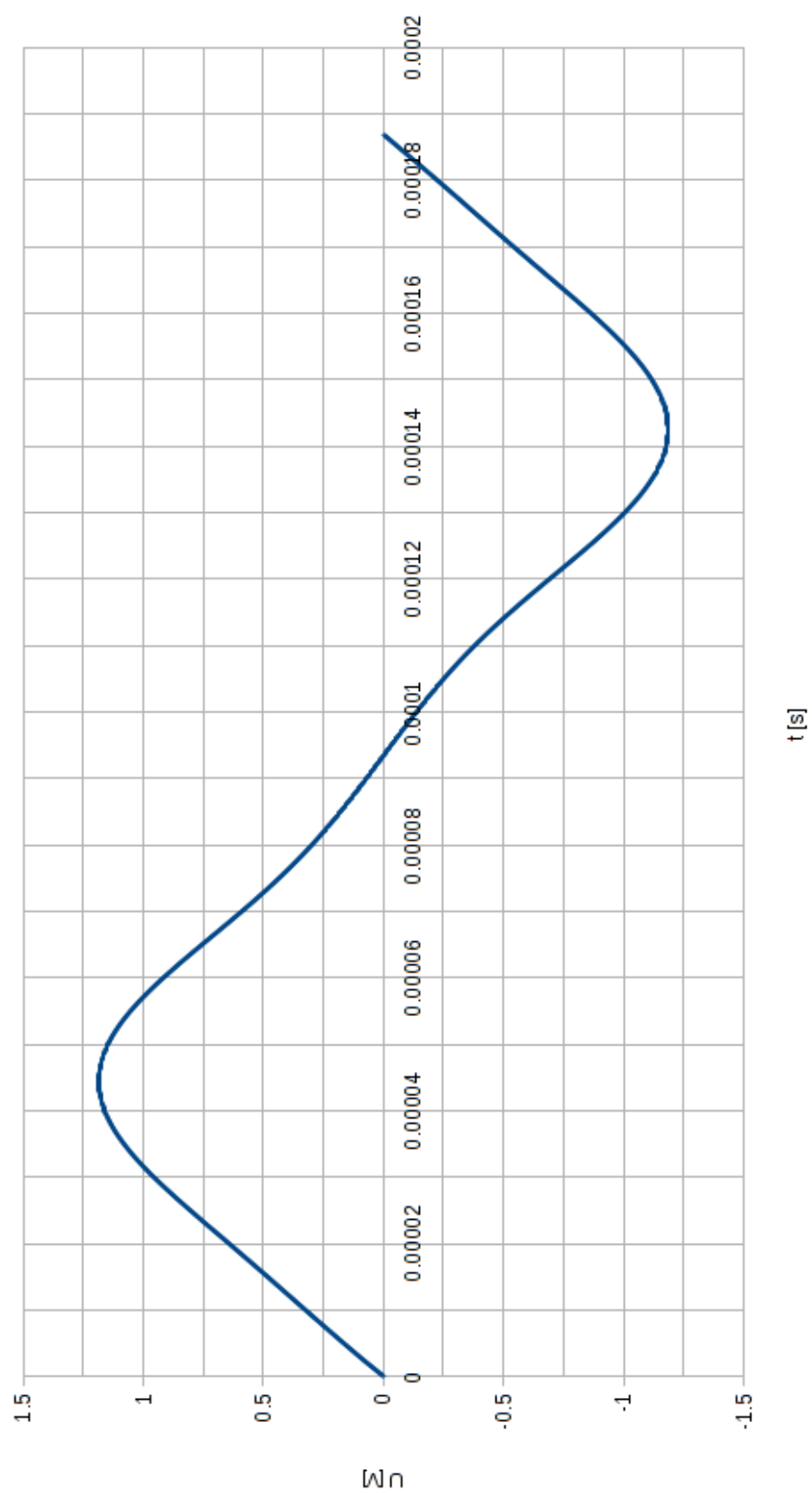
Průběhy harmonických složek trojúhelníkového signálu

$f = 5350\text{Hz}$, trojúhelník, střída 1:1

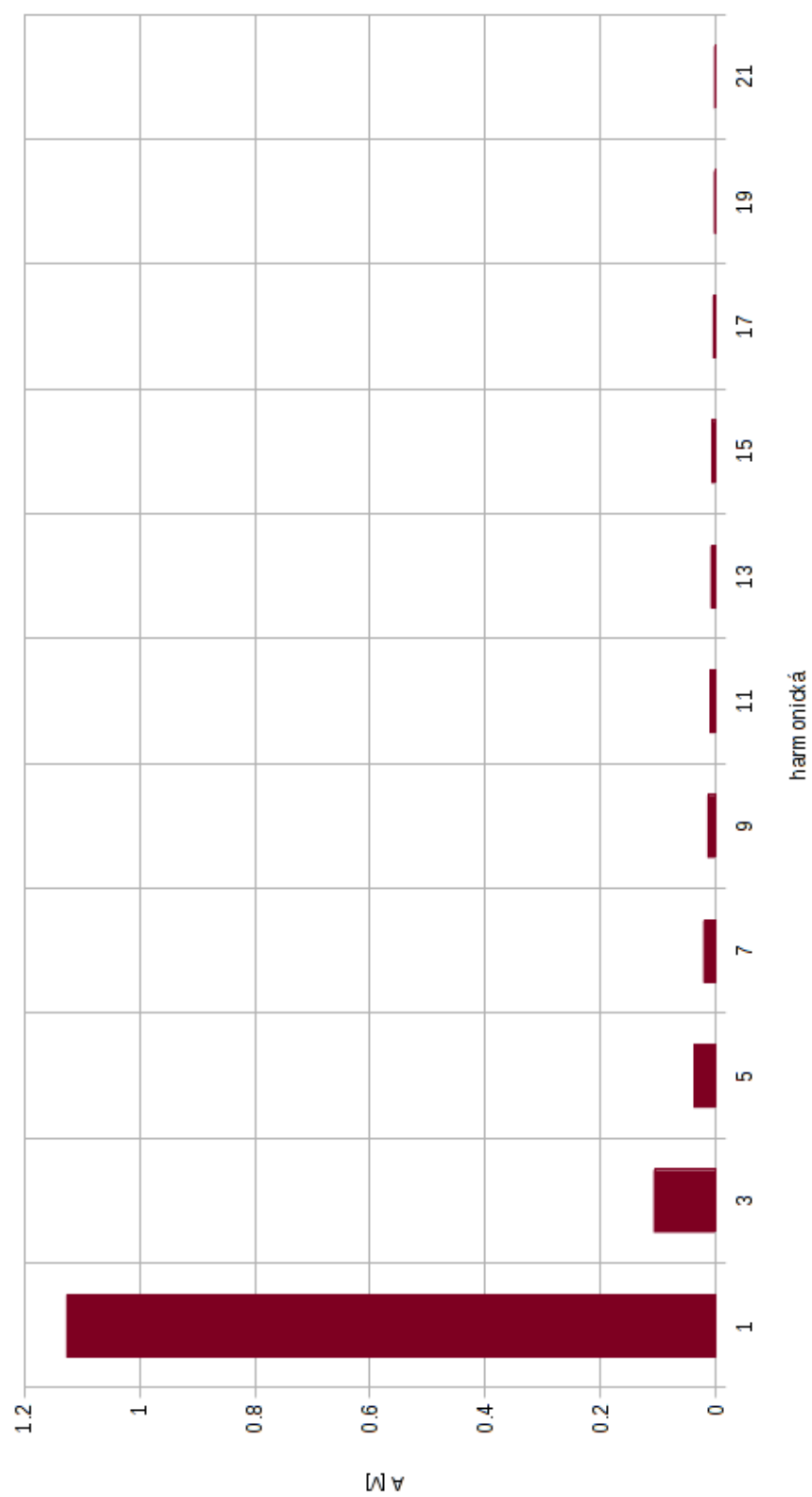


Součet prvních 20 naměřených harmonických

$f = 7.3\text{kHz}$, trojúhelník, střída 1:1



Frekvenční spektrum trojúhelníkového signálu

 $f = 5350\text{Hz}$, střída 1:1

8 Příklady výpočtů

8.1 Sinová složka (bez fázového posuvu)

$$b = \frac{2U_M}{\pi n} * \sin(n\frac{5\pi}{4}) = \frac{2 * 2.8}{\pi} * \sin(\frac{5\pi}{4}) = -1.2154V$$

8.2 Kosinová složka (bez fázového posuvu)

$$a = \frac{2U_M}{\pi n} * (1 - \cos(n\frac{5\pi}{4})) = \frac{2 * 2.8}{\pi} * (1 - \cos(\frac{5\pi}{4})) = 0.5034V$$

8.3 Amplituda první harmonické

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1.2154)^2 + 0.5034^2} = 3.2937V$$

8.4 Fázový posuv první harmonické

$$\varphi = \arctg \frac{a}{b} = \arctg \frac{-1.2154}{0.5034} = -0.3926rad$$

8.5 Efektivní hodnota amplitudy první harmonické

$$U_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{3.2937}{\sqrt{2}} = 2.329V$$

9 Závěr

Hodnoty vyšly poměrně přesně proti teoreticky vypočítaným. Grafy se shodují s teoretickými předpoklady. Chyby v měření mohly natat při zaokrouhlování.