

Laboratorium 6 - Kwadratury

Dawid Żak

Szymon Hołysz

2025-04-22

Table of contents

Zadanie 1 (a)	1
Zadanie 1 (b)	2
Zadanie 1 (c)	3
Zadanie 2.	5

Zadanie 1. Wiadomo, że

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi. \quad (1)$$

Powyższą równość można wykorzystać do obliczenia przybliżonej wartości π poprzez całkowanie numeryczne.

Zadanie 1 (a)

Oblicz wartość powyższej całki, korzystając ze złożonych kwadratur otwartej prostokątów (ang. mid-point rule), trapezów i Simpsona. Można wykorzystać funkcje `integrate.trapz` i `integrate.simps` z biblioteki `scipy`. Na przedziale całkowania rozmieść $2^m + 1$ równoodległych węzłów. W kolejnych próbach m wzrasta o 1, tzn. między każde dwa sąsiednie węzły dodawany jest nowy węzeł, a ich zagęszczenie zwiększa się dwukrotnie. Przyjmij zakres wartości m od 1 do 25.

Dla każdej metody narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej, $n + 1$ (gdzie $n = 1/h$, z krokiem h). Wyniki przedstaw na wspólnym wykresie, używając skali logarytmicznej na obu osiach.



Nieciągłość wykresu dla metody Simpsona wynika z osiągnięcia precyzji większej niż precyzja float64, umieszczenie wartości zerowych na wykresie logarytmicznym jest niemożliwe. Metoda Simpsona jest też najdokładniejsza spośród trzech rozważanych.

Zadanie 1 (b)

Czy istnieje pewna wartość, poniżej której zmniejszanie kroku h nie zmniejsza już błędu kwadratury? Porównaj wartość h_{\min} , odpowiadającą minimum wartości bezwzględnej błędu względnego, z wartością wyznaczoną w laboratorium 1.

	Method	h_{\min}
0	Rectangular	9.536743e-07
1	Trapezoidal	1.192093e-07
2	Simpson	3.906250e-03

Na wykresie powyżej można zauważyć moment, w którym zmniejszanie kroku przestaje zmniejszać błąd kwadratury, a nawet go zwiększa. Wartość h , w którym błąd osiąga minimum jest zbliżony dla metody prostokątów i trapezów oraz znacznie mniejszy dla metody Simpsona. Wynika to z tego, że błąd tej metody znacznie szybciej zbiega do zera. Obliczony krok dla minimalnego błędu jest porównywalny do tego obliczonego w laboratorium nr. 1 ($\cong 10^{-8}$)

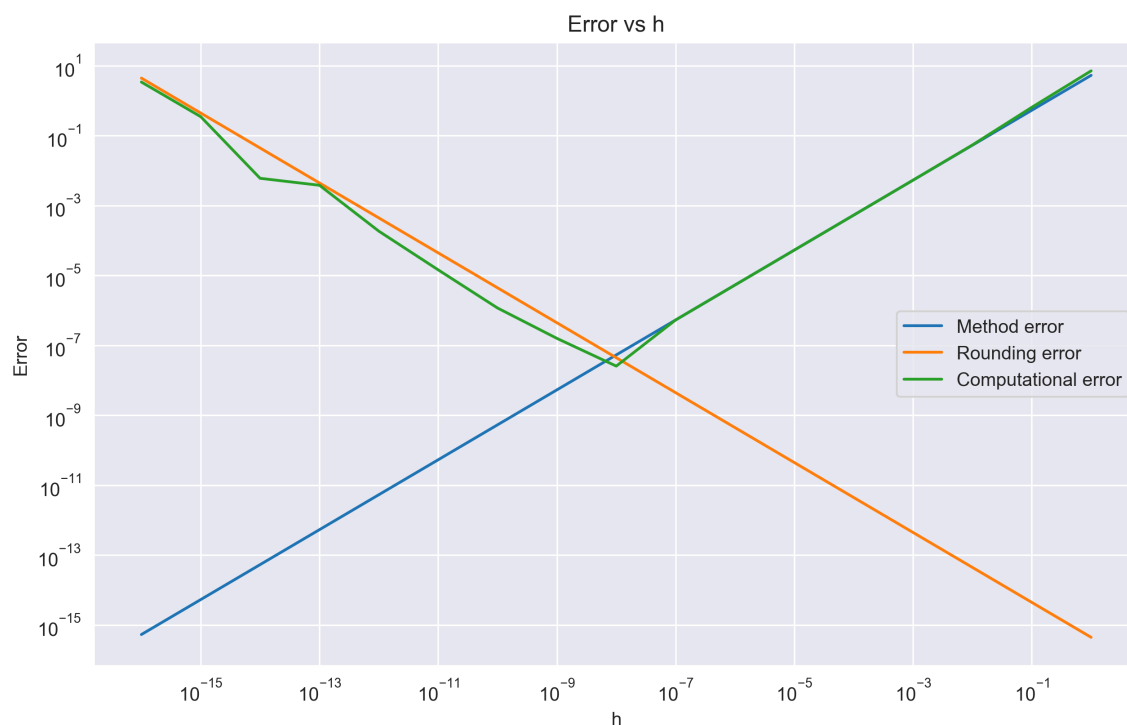


Figure 1: image.png

Wykres ilustrujący wyniki z pierwszego laboratorium.

Zadanie 1 (c)

Dla każdej z użytych metod porównaj empiryczny rząd zbieżności z rzęd zbieżności przewidywanym przez teorię. Aby wyniki miały sens, do obliczenia rzędu empirycznego użyj wartości h z zakresu, w którym błąd metody przeważa nad błędem numerycznym.

	Rectangular
0	2.707131
1	2.358356
2	2.179738
3	2.090014
4	2.045045
5	2.022532
6	2.011269
7	2.005635
8	2.002818
9	2.001409

Rectangular	
10	2.000705
11	2.000351
12	2.000222
13	2.000008
14	2.001489

Trapezoidal	
0	2.710441
1	2.358425
2	2.179742
3	2.090014
4	2.045045
5	2.022532
6	2.011269
7	2.005635
8	2.002818
9	2.001409
10	2.000705
11	2.000352
12	2.000177
13	2.000085
14	2.000069

Simpson	
0	11.432385
1	8.623452
2	6.536879
3	6.269862
4	6.135489
5	6.090216

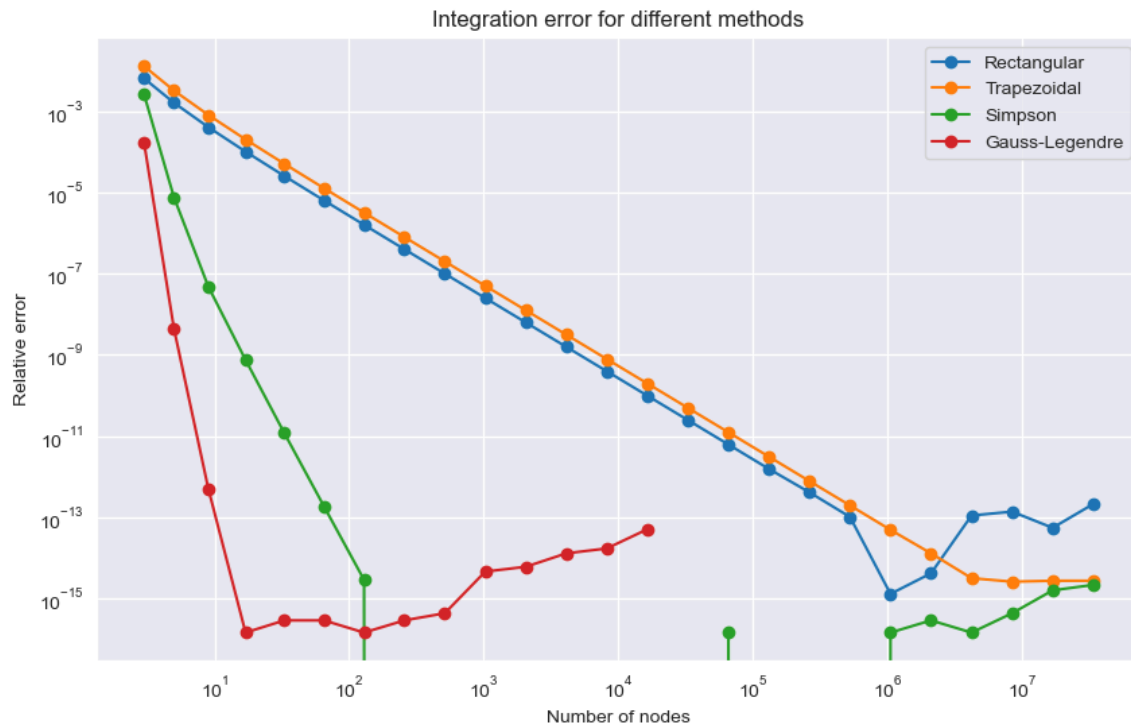
Obliczone rzędy zbieżności dla metody prostokątów i trapezów to 2 (zgodne z teoretycznym rzędem zbieżności), a dla metody Simpsona 6 - co nie zgadza się z wartością teoretyczną równą 4. Może to wynikać z faktu, że precyzja obliczeń nie pozwala obliczyć rzędu dla kolejnych wartości m .

Zadanie 2.

Oblicz wartość całki

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

metodą Gaussa-Legendre'a. Narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej, $n + 1$. Przyjmij na tyle duży zakres n , aby wykryć, kiedy błąd numeryczny zaczyna przeważać nad błędem metody. Postaraj się umiejscowić otrzymane wyniki na wykresie stworzonym w podpunkcie (a).



Na powyższym wykresie można zauważyć, że błąd metody Gaussa - Legendre'a maleje najszybciej, ale błąd numeryczny zaczyna przeważać nad błędem metody już dla kilkunastu węzłów. Dlatego korzystając z tej metody najbardziej należy uważać na ilość węzłów wykorzystanych w obliczeniach.