Laboratorium 10 - Równania różniczkowe zwyczajne – część II

Dawid Żak Szymon Hołysz

2025-06-14

Table of contents

Definicja układu równań Lotki-Volterry

Jawna Metoda Eulera

Niejawna Metoda Eulera

Wymaga rozwiązania nieliniowego układu równań w każdym kroku. Użyjemy `fsolve`.

Półjawna Metoda Eulera

Użyjemy wersji: $x_{n+1} = x_n + h_n f(x_n, y_{n+1})$ $y_{n+1} = y_n + h_n g(x_n, y_{n+1})$

Z drugiego równania możemy wyliczyć y_{n+1} (jeśli y_n i $g(x_n, y_{n+1})$ są odpowiednie), a potem x_{n+1}.

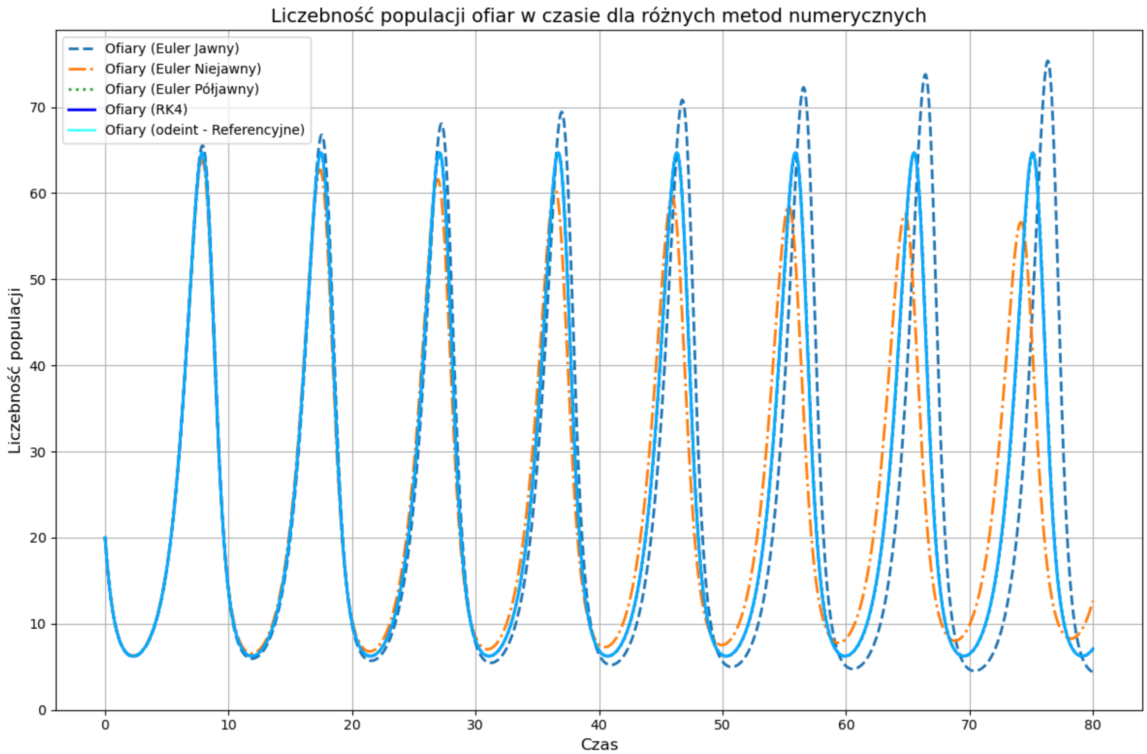
Model Lotki-Volterry: $x_{n+1} = x_n + h_n \cdot x_n(\alpha_1 - \beta_1 y_{n+1})$ $y_{n+1} = y_n + h_n \cdot y_{n+1}(-\alpha_2 + \beta_2 x_n)$

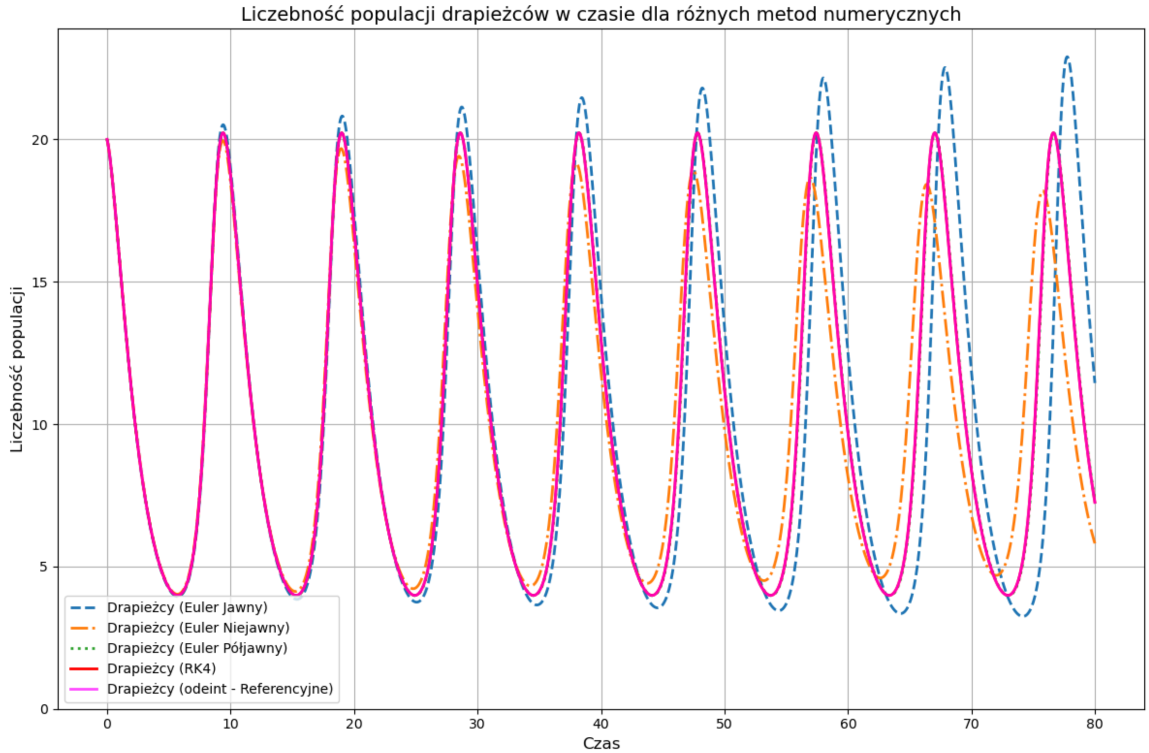
Z drugiego równania: $y_{n+1}(1 - h_n(-\alpha_2 + \beta_2 x_n)) = y_n$ $y_{n+1} = y_n / (1 + h_n \alpha_2 - h_n \beta_2 x_n)$

A potem x_{n+1}: $x_{n+1} = x_n + h_n \cdot x_n(\alpha_1 - \beta_1 y_{n+1})$

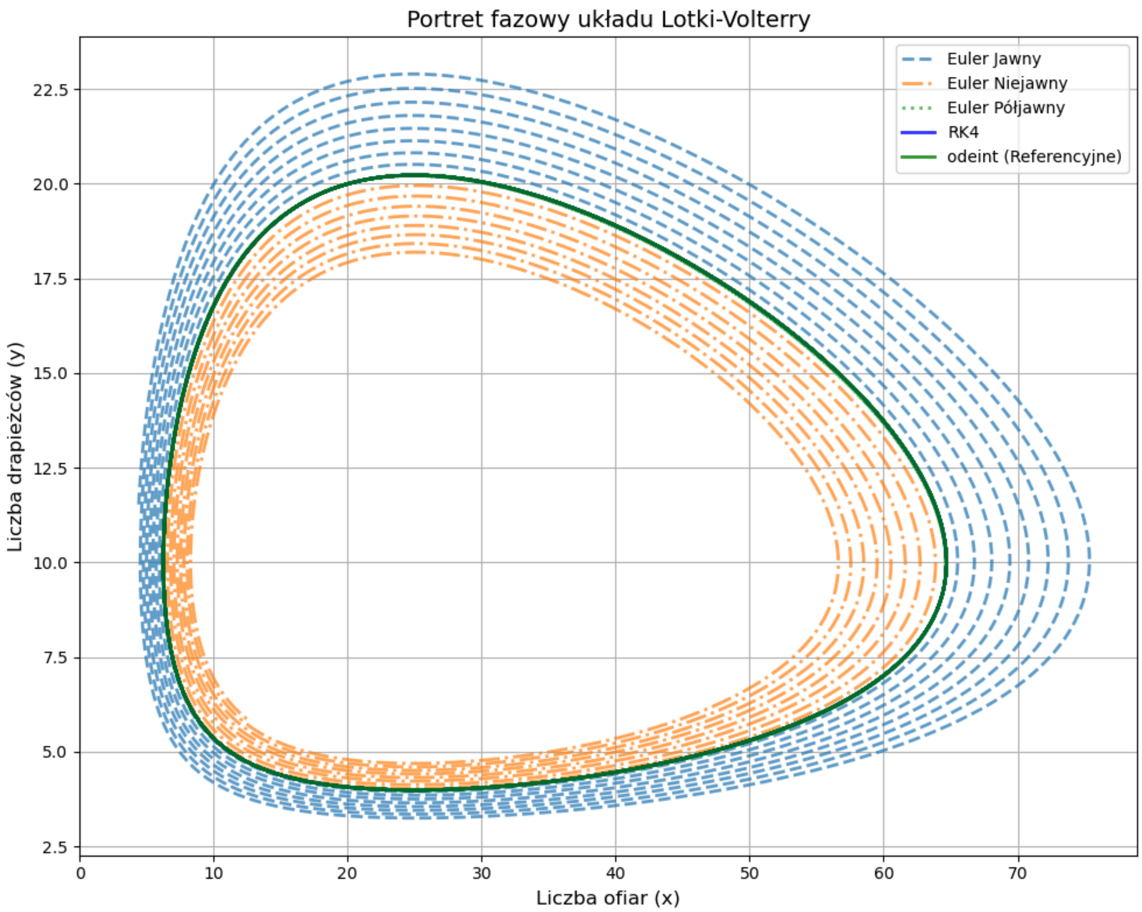
Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)

Wykresy liczebności populacji w zależności od czasu




Liczebność populacji drapieżców w czasie dla różnych metod numerycznych
Liczebność populacji
Czas
0
5
10
15
20
0
10
20
30
40
50
60
70
80
Drapieżcy (Euler Jawny)
Drapieżcy (Euler Niejawny)
Drapieżcy (Euler Półjawny)
Drapieżcy (RK4)
Drapieżcy (odeint - Referencyjne)

Portret fazowy



Portret fazowy składa się z krzywych, które reprezentują różne warunki początkowe. Są one zamknięte, ponieważ zmiany liczebności zwierząt zachodzą cyklicznie. Zmiany można podzielić na etapy:

- Kiedy liczba ofiar jest wysoka, drapieżcy mają dużo pożywienia, ich populacja rośnie, a populacja ofiar maleje z powodu zwiększonego drapieżnictwa.
- Kiedy liczba ofiar spada, drapieżcy mają mniej pożywienia, ich populacja maleje, co pozwala populacji ofiar się odbudować.
- Wzrost liczby ofiar ponownie prowadzi do wzrostu liczby drapieżców, zamykając cykl.

Punkt centralny jest punktem równowagi, w którym potencjalnie liczby osobników nie zmieniałyby się.

Rozwiązujemy układ równań:

$x(\alpha_1 - \beta_1 y) = 0$

$y(-\alpha_2 + \beta_2 x) = 0$

Powyższy układ ma dwa rozwiązania:

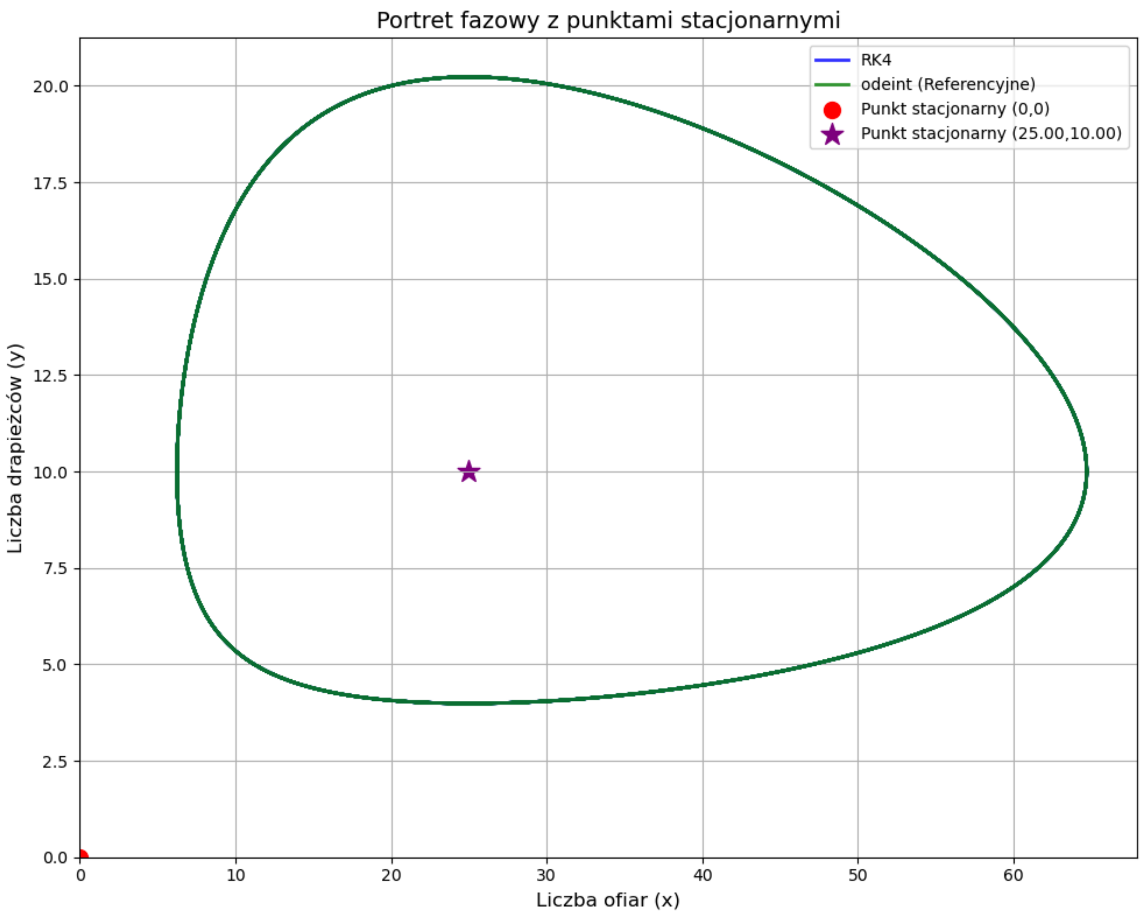
$(x, y) = (0, 0)$

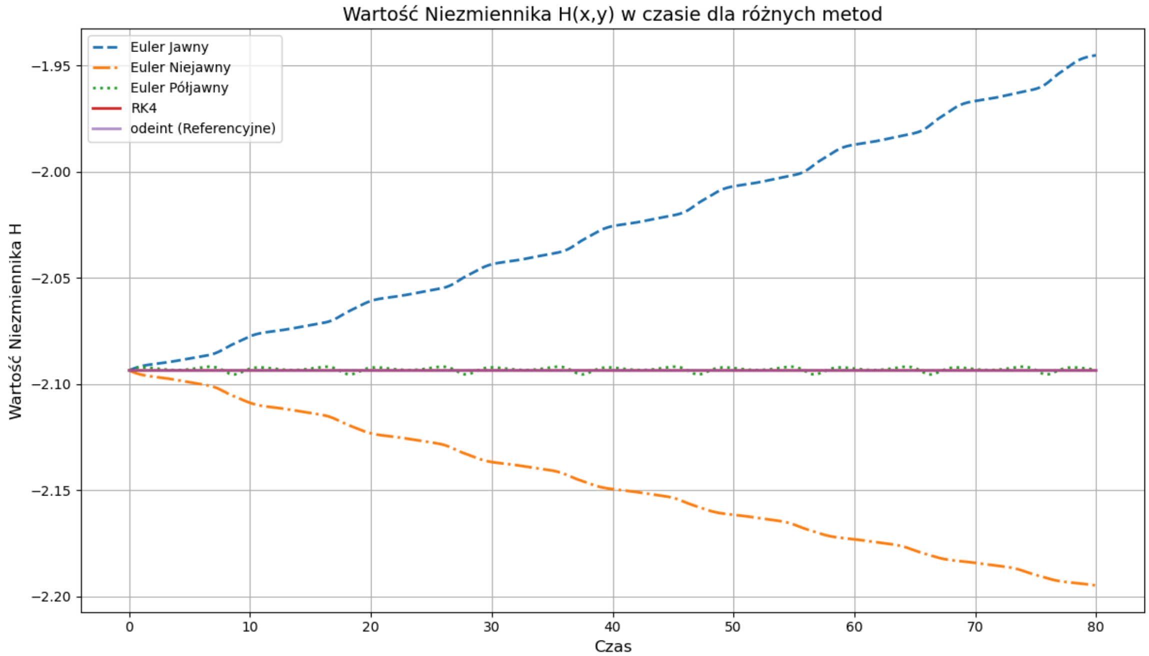
i

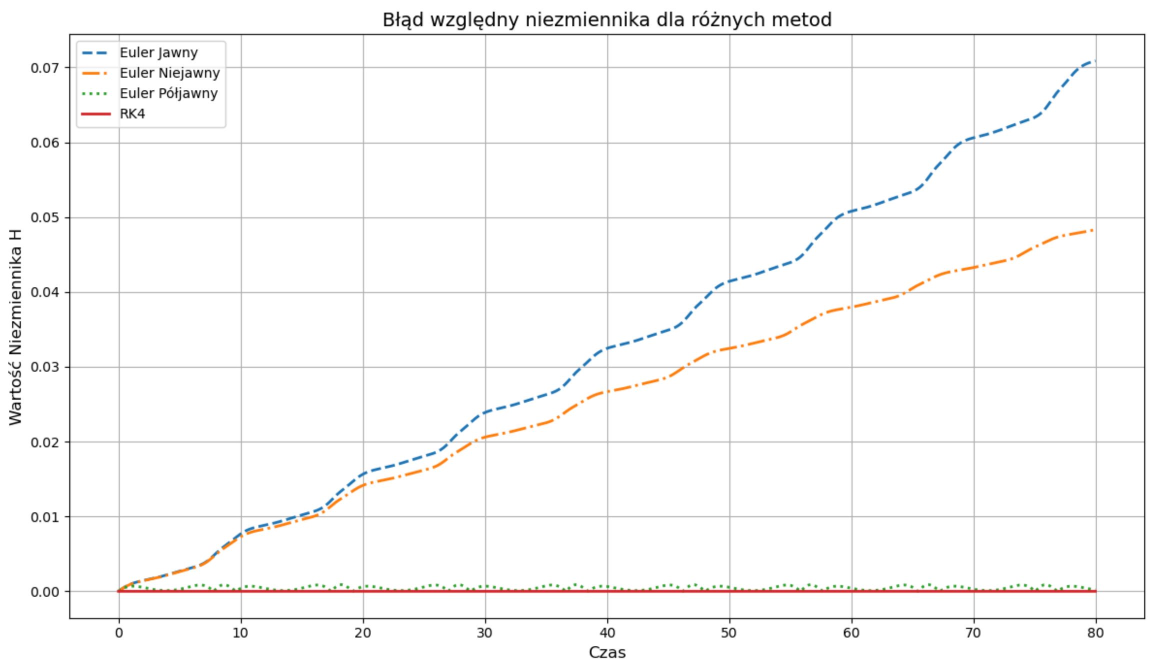
$(x, y) = \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_2}\right)$

Pierwsze rozwiązanie odpowiada sytuacji, w której wyginą wszystkie osobniki, naturalnie taki stan będzie trwać w nieskończoność. Drugie rozwiązanie dotyczy przypadku, w którym liczba drapieżników i ofiar znajduje się w równowadze. Wartość ta zależy od parametrów początkowych.

```
Rozwiązywanie punktów stacjonarnych:
Punkt stacjonarny 1: (0, 0)
Punkt stacjonarny 2: (25.00, 10.00)
Dla podanych parametrów: x_eq = 0.5/0.02 = 25.00, y_eq = 1/0.1 = 10.00
```







Analiza zachowania niezmiennika: W teorii, dla dokładnego rozwiązania analitycznego modelu Lotki-Volterry, wartość niezmiennika $H(x, y)$ powinna być stała w czasie. W praktyce, metody numeryczne wprowadzają błędy, które powodują dryf tej wartości.

- Metoda Eulera Jawna: Wykazuje największy dryf niezmiennika, co świadczy o jej niższej dokładności i braku zachowania objętości w przestrzeni fazowej. Niezmiennik zwykle rośnie lub maleje monotonicznie.
- Metoda Eulera Niejawna/Półjawna: Mogą wykazywać lepsze zachowanie niezmiennika w pewnych reżimach, ale nadal nie są doskonałe. Półjawna metoda Eulera często zachowuje się lepiej niż jawna.
- Metoda RK4: Zdecydowanie najlepiej zachowuje wartość niezmiennika, wykazując jedynie niewielkie oscylacje wokół średniej wartości. Jest to oczekiwane, ponieważ RK4 jest metodą wyższego rzędu, która ma mniejszy błąd lokalny.

Ogólnie, stopień, w jakim niezmiennik jest zachowany, jest dobrym wskaźnikiem dokładności i stabilności metody numerycznej.

Funkcja kosztu: Suma Kwadratów Reszt (RSS)

```
Minimalizacja funkcji kosztu: Suma Kwadratów Reszt (RSS)
Oszacowane parametry (RSS): α1=1.1166, α2=0.1036, β1=-0.0028, β2=-0.0001
Wynik optymalizacji (RSS): 181370.40384605533
```

Funkcja kosztu oparta na funkcji wiarygodności (Poisson-like)

```

Minimalizacja funkcji kosztu: Oparta na funkcji wiarygodności (Poisson-like)
Oszacowane parametry (alternatywna funkcja kosztu): α1=1.2317, α2=0.1048,
β1=-0.0371, β2=-0.0004
Wynik optymalizacji (alternatywna funkcja kosztu): -17213.4914964936
```

Podsumowanie Oszacowanych Parametrów

```
Parametry początkowe (domyślne):
  α1 = 1.0000, α2 = 0.5000, β1 = 0.1000, β2 = 0.0200

Oszacowane parametry (metoda RSS):
  α1 = 1.1166, α2 = 0.1036, β1 = -0.0028, β2 = -0.0001
  Wartość funkcji kosztu (RSS): 181370.4038

Oszacowane parametry (alternatywna funkcja kosztu):
  α1 = 1.2317, α2 = 0.1048, β1 = -0.0371, β2 = -0.0004
  Wartość funkcji kosztu (alternatywna funkcja kosztu): -17213.4915
```