Laboratorium 5 - Aproksymacja

Dawid Żak Szymon Hołysz

2025-04-09

Table of contents

Zadanie 1.

Wykonaliśmy aproksymację średniokwadratową punktową populacji Stanów Zjednoczonych w przedziale $[1900, 1980]$ wielomianami stopnia m dla $0 \leq m \leq 6$. W tabeli poniżej przedstawione są wartości będące przedmiotem aproksymacji. Na podstawie tych wartości wyznaczymy wielomian aproksymacyjny stopnia m dla $m = 1, \ldots, 6$. Następnie dla każdej wartości m dokonamy ekstrapolacji do roku 1990 i wyznaczymy minimalny błąd względny.

	Rok	Populacja
0	1900	76_212_168
1	1910	92_228_496
2	1920	106_021_537
3	1930	123_202_624
4	1940	132_164_569
5	1950	151_325_798
6	1960	179_323_175
7	1970	203_302_031
8	1980	226_542_199

Na początku wyliczamy macierz Vandermonde'a dla wszystkich stopni m i następnie przy jej użyciu wyznaczamy współczynniki przy wielomianach.

Zadanie 1 (a)

Z obliczeń prognoz wynika, że najmniejszy błąd względny osiągamy dla wielomianu 6. stopnia. Podobnym błędem obarczona jest też ekstrapolacja wielomianem 2. lub 4. stopnia.

```
Prognoza populacji w 1990 roku: 143369177, dla m=0
względny błąd prognozy: 42.35%
Prognoza populacji w 1990 roku: 235808109, dla m=1
względny błąd prognozy: 5.19%
Prognoza populacji w 1990 roku: 254712945, dla m=2
względny błąd prognozy: 2.41%
Prognoza populacji w 1990 roku: 261439719, dla m=3
względny błąd prognozy: 5.12%
Prognoza populacji w 1990 roku: 256411956, dla m=4
względny błąd prognozy: 3.10%
Prognoza populacji w 1990 roku: 226938061, dla m=5
względny błąd prognozy: 8.75%
Prognoza populacji w 1990 roku: 243501315, dla m=6
względny błąd prognozy: 2.09%
```

Zadanie 1 (b)

Aby wyznaczyć optymalny stopień wielomianu zastosujemy kryterium informacyjne Akaikego `AIC`

$$\mathrm{AIC} = 2k + n \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \hat{y}(x_i)\right]^2}{n}\right),$$

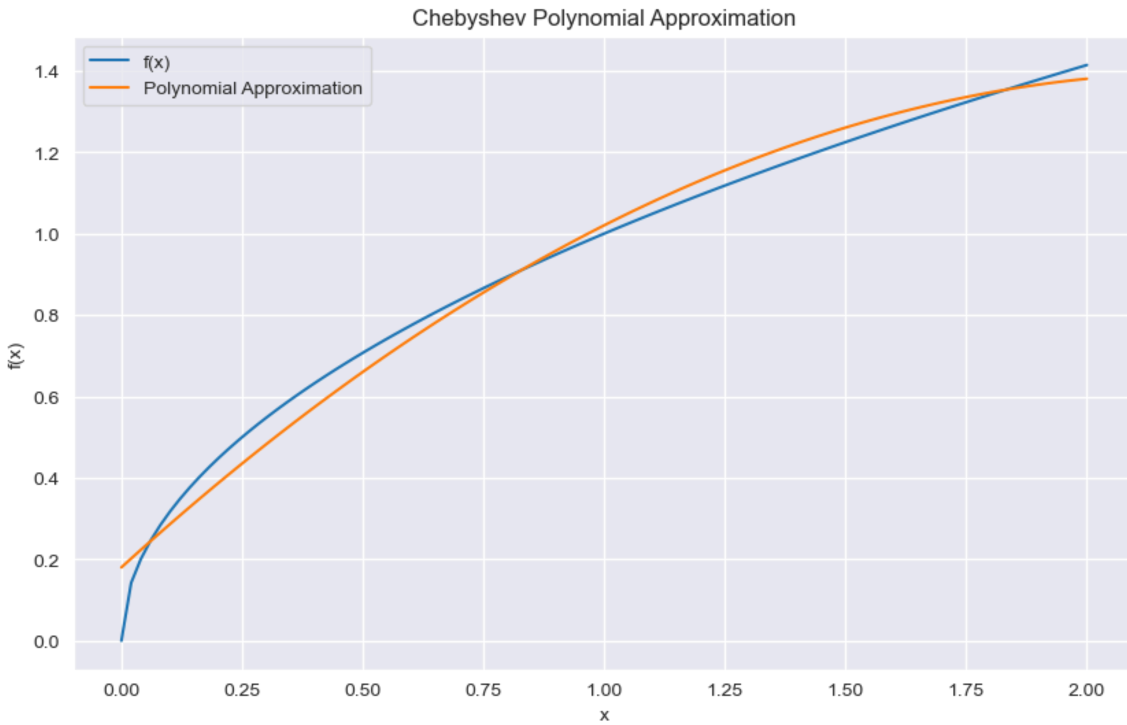
. Ponieważ rozmiar próbki jest niewielki, zastosujemy wzór ze składnikiem korygującym `AICc`

$$\mathrm{AIC}_c = \mathrm{AIC} + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}.$$

```
AIC dla m=0: 320.44, AICc: 321.01
AIC dla m=1: 287.06, AICc: 289.06
AIC dla m=2: 274.65, AICc: 279.45
AIC dla m=3: 274.88, AICc: 284.88
AIC dla m=4: 274.54, AICc: 294.54
AIC dla m=5: 277.71, AICc: 319.71
AIC dla m=6: 274.87, AICc: 386.87
```

Zadanie 2

Wykonujemy aproksymację średniokwadratową ciągłą funkcji \$f(x) = \$ w przedziale $[0, 2]$ wielomianem drugiego stopnia, używając wielomianów Czebyszewa. Aproksymacja ta jest tańszym obliczeniowo zamiennikiem aproksymacji jednostajnej.



Wykres pozwala ocenić, że wielomian aproksymacyjny dobrze przybliża funkcję f. Obliczymy też błąd względny aproksymacji następującą metodą: - Obliczymy całkę $\int_0^2 |p(x) - \sqrt{x}| dx$, gdzie $p(x)$ to nasz wielomian aproksymacyjny - Wynik podzielimy przez całkę z $g(x) = x$ na podanym przedziale - jest ona równa 2.

```
Błąd względny wynosi: 3.17%
```

Wnioski

- Najmniejszy błąd względny odnotowano dla wielomianu 6. stopnia, co jest niezgodne z wynikami kryterium informacyjnego Akaikego ze składnikiem korygującym. Wskazał on jako najdokładniejszy wielomian 2. stopnia, który też ma niewielki błąd względny, porównywalny z błędem wielomianu 6. stopnia. Nieścisłość w wyznaczeniu najdokładniejszego wielomianu wynika z niewielkiej ilości parametrów.
- Aproksymacja ciągła wielomianami Czebyszewa pozwala uzyskać wielomian o wartościach bardzo zbliżonych do funkcji wyjściowej, z sumarycznym błędem względnym w przybliżeniu równym 3%.