Laboratorium 7 - Kwadratury adaptacyjne

Dawid Żak Szymon Hołysz

2025-05-06

Table of contents

Zadanie 1.

Oblicz wartość całki z poprzedniego laboratorium

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx = \pi. \quad (1)$$

korzystając z: - (a) kwadratur adaptacyjnych trapezów, - (b) kwadratur adaptacyjnych Gaussa-Kronroda.*

Dla każdej metody narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej. Wyniki dodaj do wykresu uzyskanego w poprzednim laboratorium. Przydatna będzie funkcja `scipy.integrate.quad_vec`. Na liczbę ewaluacji funkcji podcałkowej można wpływać pośrednio, zmieniając wartość dopuszczalnego błędu (tolerancji). Przyjmij wartości tolerancji z zakresu od 10^0 do 10^{-14}. Liczba ewalulacji funkcji pod-całkowej zwracana jest w zmiennej `info.neval`.

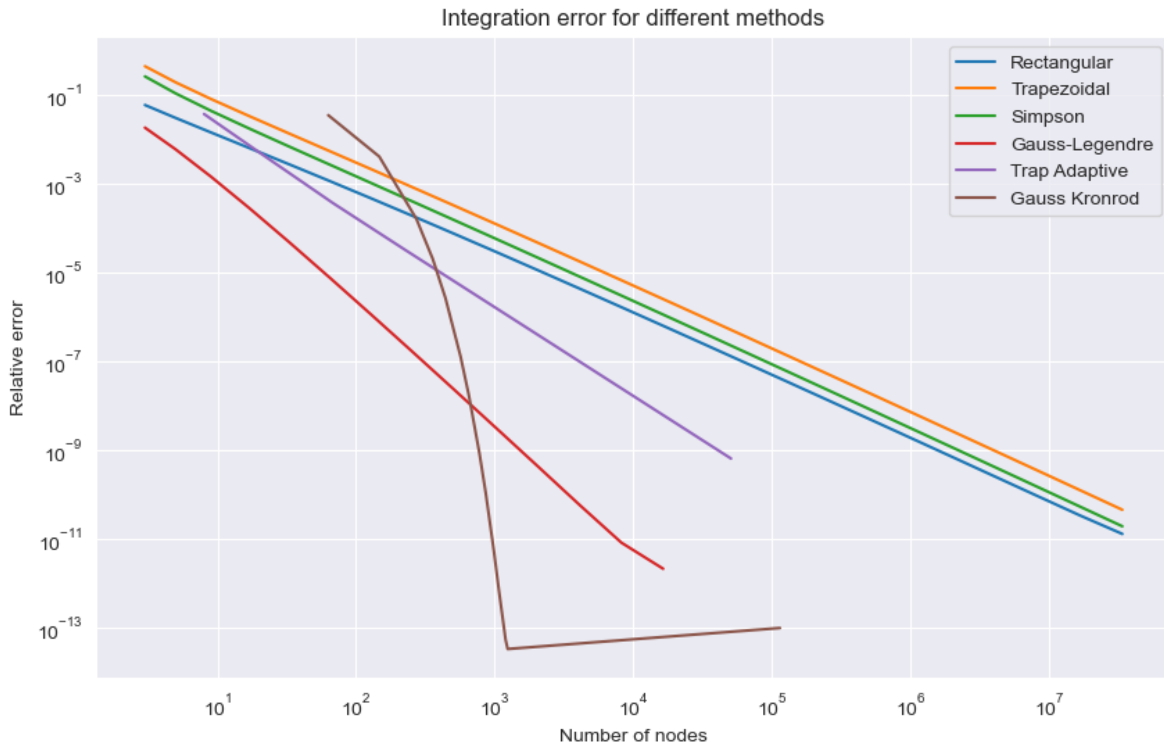
Zadanie 2.

Powtórz obliczenia z poprzedniego oraz dzisiejszego laboratorium dla całek:

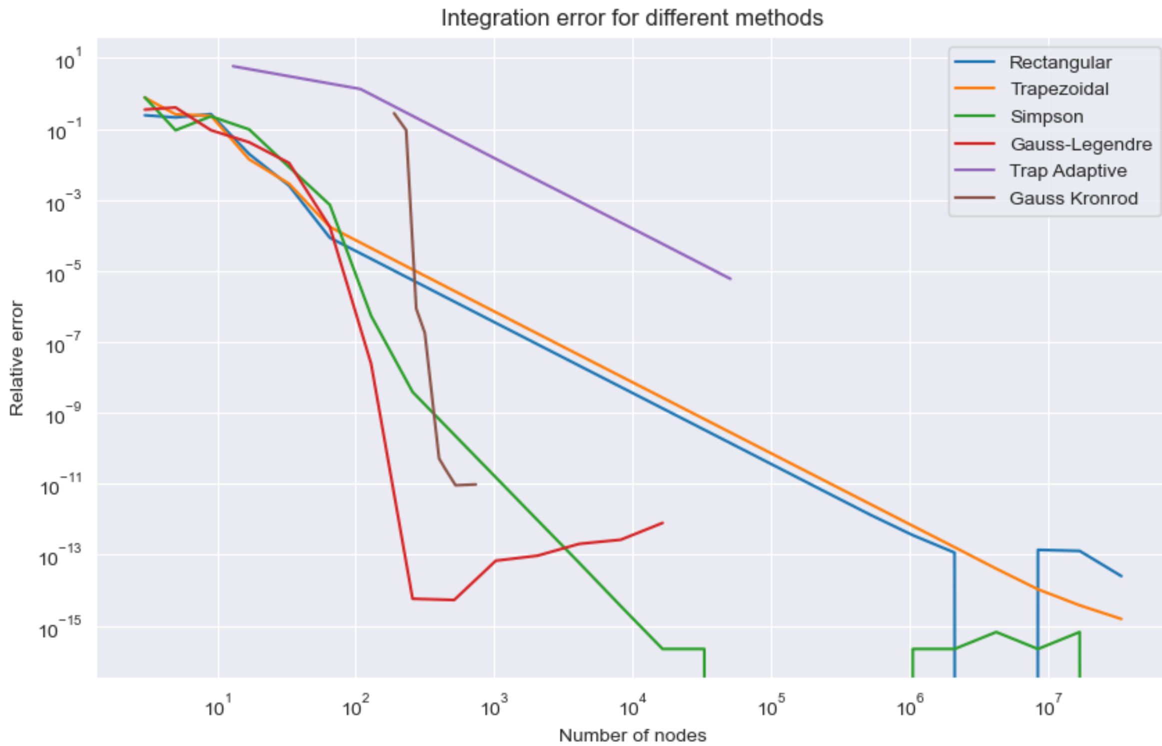
(a) $\int_0^1 \sqrt{x} \log x dx = -\frac{4}{9}$

(b) $\int_0^1 \left(\frac{1}{(x-0.3)^2+a} + \frac{1}{(x-0.9)^2+b} - 6 \right) dx$

Całka (a)

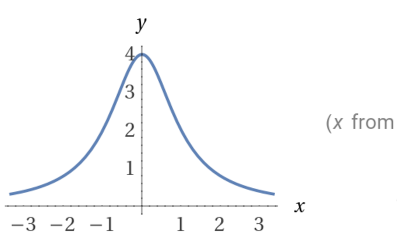

Integration error for different methods
Rectangular
Trapezoidal
Simpson
Gauss-Legendre
Trap Adaptive
Gauss Kronrod
Relative error
10^{-1}
10^{-3}
10^{-5}
10^{-7}
10^{-9}
10^{-11}
10^{-13}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}
10^{7}
Number of nodes

Całka (b)

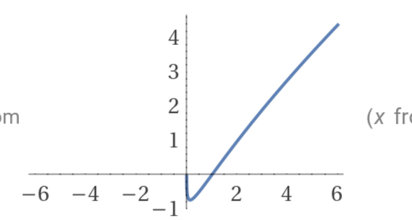


Wnioski

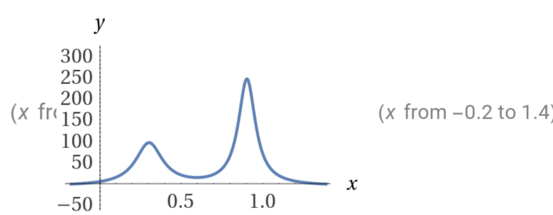
Ponownie, jak w poprzednim laboratorium, wykresy wyników są wyskalowane logarytmiczne, dlatego przedziały nieciągłości wykresów wskazują, że dla danej liczby węzłów błąd względny jest mniejszy niż precyzja użytych liczb w obliczeniach (w wynikach równa zeru).



(a) Funkcja podcałkowa 1



(a) Funkcja podcałkowa 2A



(a) Funkcja podcałkowa 2B

Dla całki z zadania 1. metoda kwadratur adaptacyjnych trapezów miała większy błąd względny od pozostałych metod, podobnie było w przypadku całki 2 (b), natomiast całkując tą metodą funkcję 2 (a) otrzymamy dokładniejsze wyniki niż przy użyciu metod nieadaptacyjnych.

Przy całkowaniu funkcji 1. metoda Gaussa-Kronroda osiągała minimalny błąd, pomijalny w porównaniu z precyzją obliczeń. W zadaniu 2 osiągała większą dokładność od większości metod nieadaptacyjnych, chociaż należy zauważyć, że w niektórych przypadkach metoda Simpsona, czy Gaussa-Legendre'a okazywała się dokładniejsza. Może to też wynikać z przewagi błędu numerycznego nad błędem metody.

Porównując wykresy funkcji oraz skuteczność algorytmów można zauważyć, że metody adaptacyjne mają tym większą przewagę, im bardziej "skomplikowany" jest wykres funkcji.

Podsumowując, metody adaptacyjne, a w szczególności metoda Gaussa-Kronroda dają dokładniejsze wyniki od metod nieadaptacyjnych, ale ich użycie w przypadku prostych funkcji może nie być opłacalne.