

Laboratorium 4 - Efekt Rungego

Dawid Żak

Szymon Hołysz

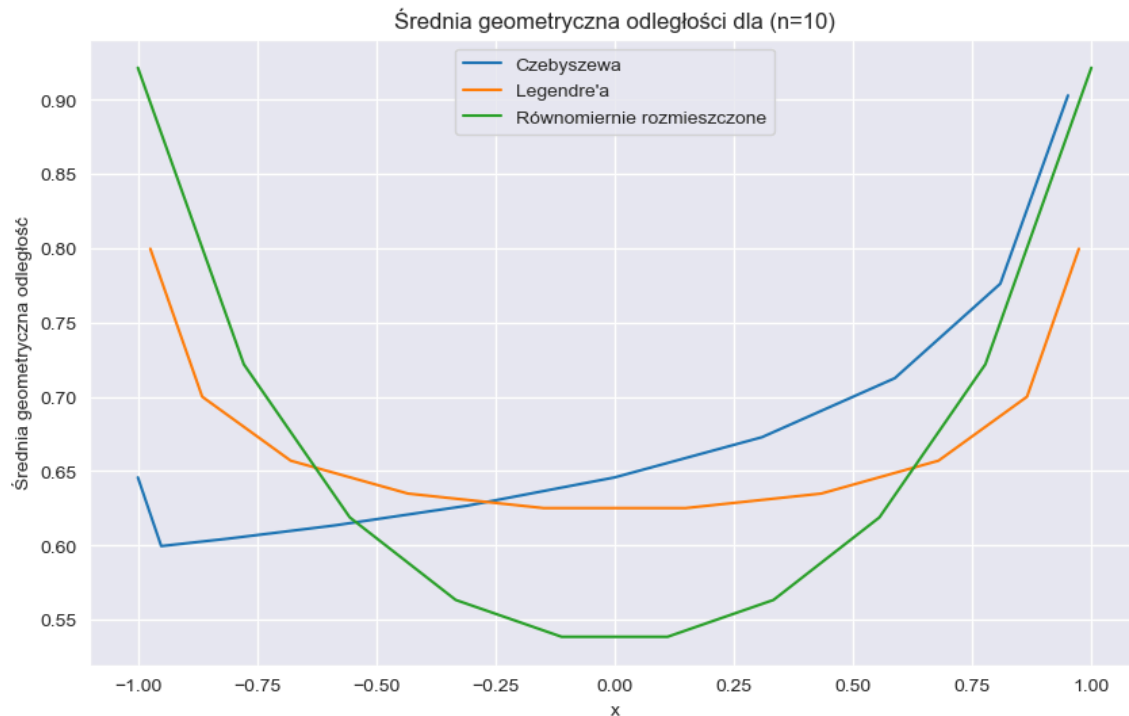
2025-04-08

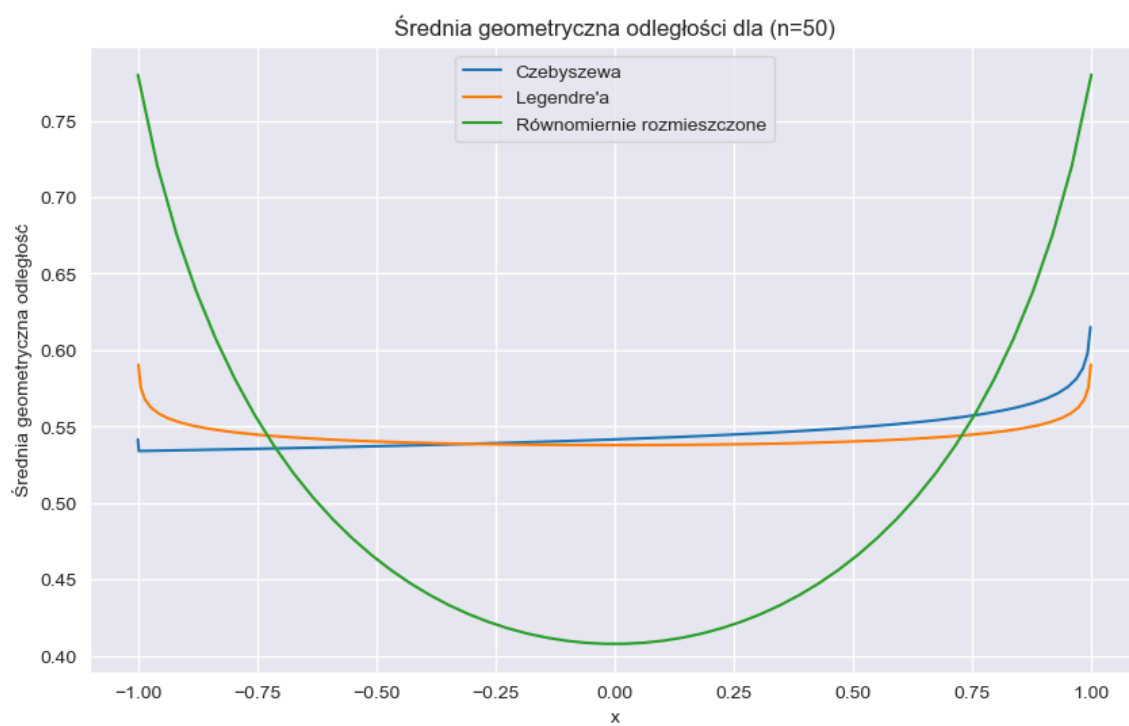
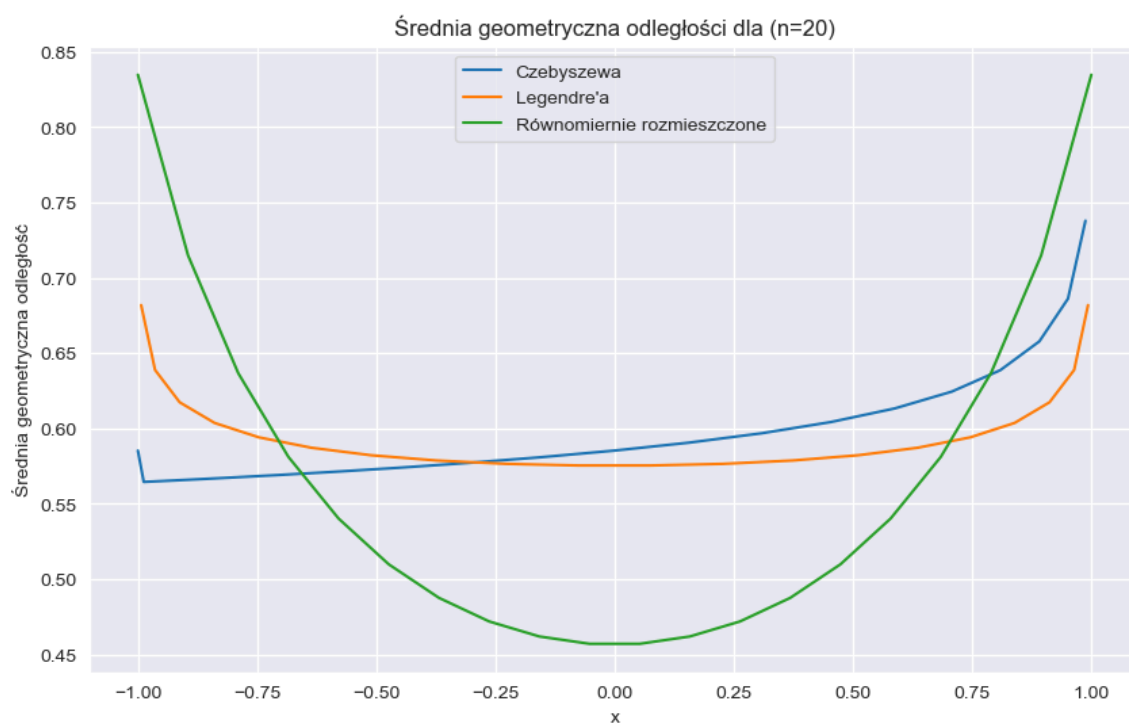
Table of contents

| | |
|-----------------|---|
| Zadanie 1 | 1 |
| Zadanie 2 | 2 |
| Wnioski | 5 |

Zadanie 1.

Napisz funkcję, która przyjmuje jako parametr wektor punktów x_0, \dots, x_n z przedziału $[-1, 1]$ i tworzy wykres z punktami x_j na osi odciętych i średnią geometryczną odległości do pozostałych punktów na osi rzędnych. Wyświetl wyniki dla: - punktów Czebyszewa dla $n = 10, 20, 50$ - punktów Legendre'a dla $n = 10, 20, 50$ - punktów równomiernie rozmieszczonych od $x_0 = -1$ do $x_n = 1$ dla $n = 10, 20, 50$.





Zadanie 2

Wyznacz wielomiany interpolujące funkcje

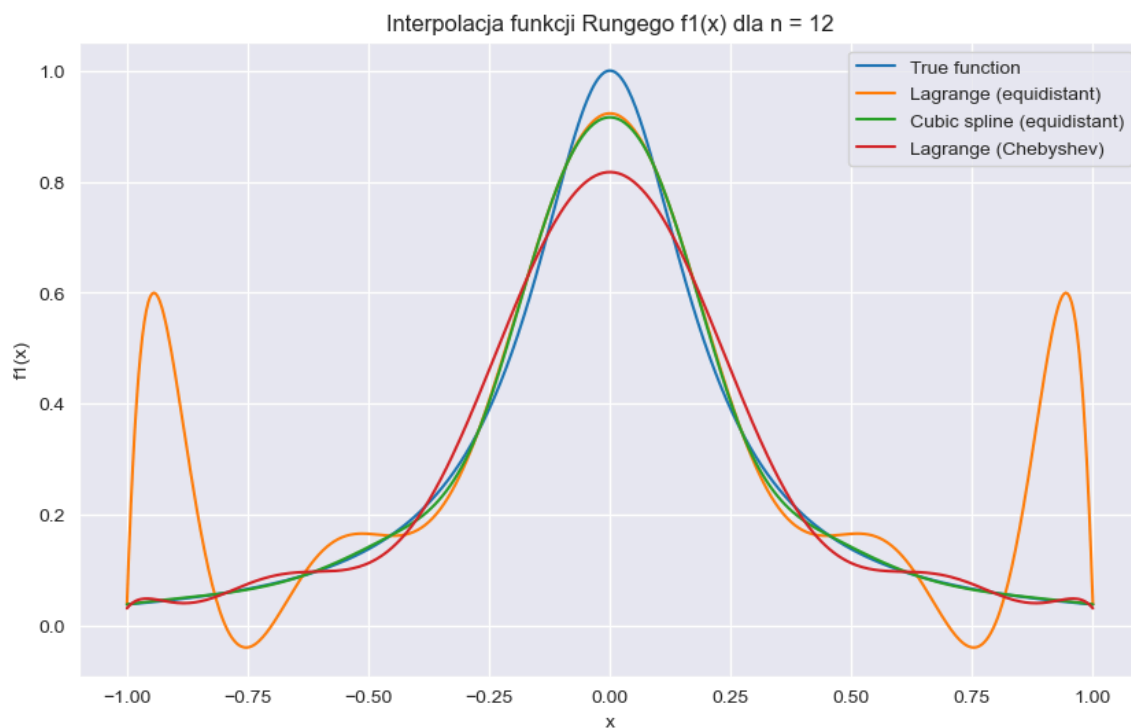
$$f_1(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \text{ na przedziale } [-1, 1],$$

$$f_2(x) = \exp(\cos(x)) \text{ na przedziale } [0, 2\pi],$$

używając: - wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami - kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami - wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

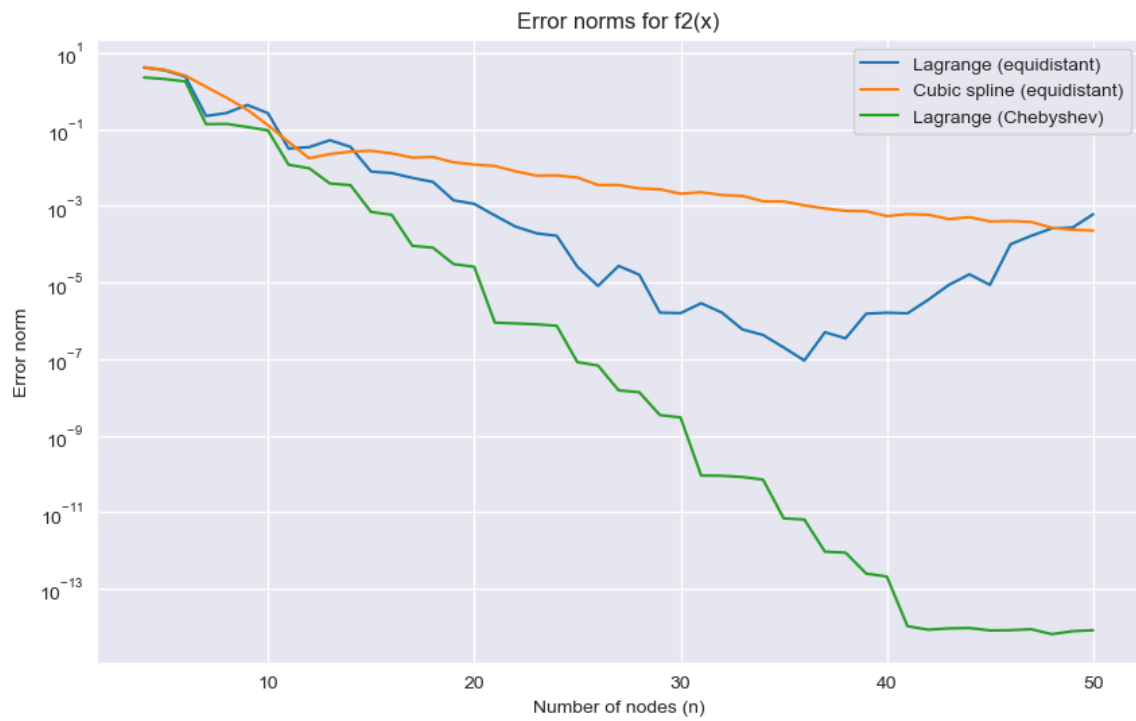
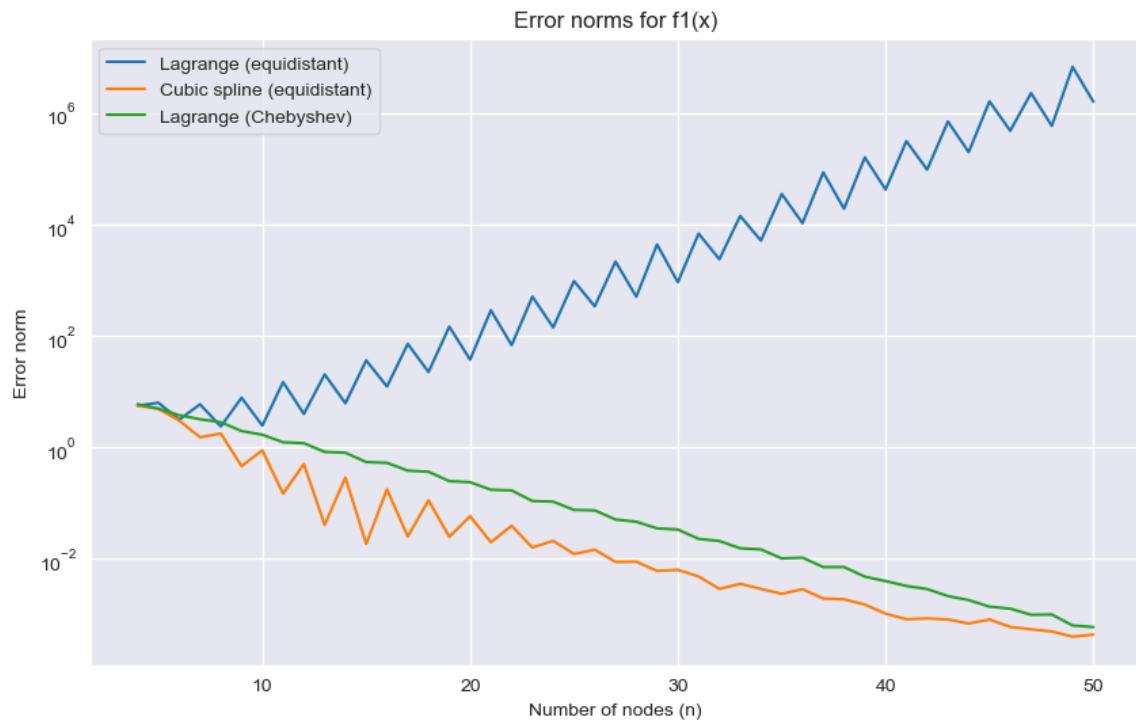
$$x_j = -\cos(\theta_j) \quad \theta_j = \frac{2j-1}{2n}\pi, 1 \leq j \leq n.$$

Dla funkcji Rungego, $f_1(x)$, z $n = 12$ węzłami interpolacji przedstaw na wspólnym wykresie funkcję $f_1(x)$ oraz wyznaczone wielomiany interpolacyjne i funkcję sklejaną. W celu stworzenia wykresu wykonaj próbkowanie funkcji $f_1(x)$ i wielomianów interpolacyjnych na 10 razy gęstszym zbiorze (próbkowanie jednostajne w x dla węzłów równoodległych, jednostajne w θ dla węzłów Czebyszewa). Pamiętaj o podpisaniu wykresu i osi oraz o legendzie.



Wykonaj interpolację funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ z $n = 4, 5, \dots, 50$ węzłami interpolacji, używając każdej z powyższych trzech metod interpolacji. Ewaluację funkcji, wielomianów interpolacyjnych oraz funkcji sklejanych przeprowadź na zbiorze 500 losowo wybranych punktów z dziedziny funkcji. Stwórz dwa rysunki, jeden dla $f_1(x)$, drugi dla $f_2(x)$. Na każdym rysunku przedstaw razem wykresy normy wektora błędów (czyli długości wektora) na tym zbiorze punktów w zależności od liczby węzłów interpolacji, n , dla każdej z trzech metod interpolacji.

Która metoda interpolacji jest najbardziej dokładna, a która najmniej?



Wnioski

Celem zadania było wykrycie efektu Rungego, polegającego na pogarszaniu się dokładności interpolacji przy zwiększaniu liczby węzłów w pewnych przypadkach, co jest kontrintuicyjne. Wykorzystane zostały do tego trzy różne metody interpolacji: wielomianów Lagrange'a z węzłami równoodległymi i Czebyszewa, i metody funkcji sklepanych.

Analiza wyraźnie wykazała, że metoda z użyciem wielomianów Lagrange'a ulega degeneracji i po zwiększeniu liczby węzłów rośnie również błąd interpolacji. Nie dzieje się tak dla metody funkcji sklepanych, która wykazała się znacznie większą dokładnością, która rośnie wraz z liczbą węzłów.

Można zauważyć, że użycie węzłów Czebyszewa sprawia, że błąd jest mniejszy i w przypadku funkcji testowanej f_1 widać, że błąd maleje wraz ze wzrostem liczby węzłów, jednak trend nie jest stały i nadal występuje efekt Rungego dla większej liczby węzłów.