Szymon Hołysz, Dawid Żak
10 marca 2025r.

Laboratorium 1. – Analiza błędów

Treść zadań

Zadanie 1. dotyczy obliczania przybliżonej wartości pochodnej za pomocą wzorów różnicowych. Należy porównać wyniki dla wzoru na różnicę w przód:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

i wzoru na różnicę centralną:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Zadanie 2. polega na porównaniu metod sumowania liczb zmiennoprzecinkowych pojedynczej precyzji, losowo rozłożonych w przedziale [0,1] wg rozkładu jednostajnego.

Metody sumowania:

a) Sumowanie w kolejności generowania z akumulatorem podwójnej precyzji
b) Sumowanie w kolejności generowania z akumulatorem pojedynczej precyzji
c) Sumowanie algorytmem Kahana z kompensacją
d) Sumowanie w porządku rosnącym
e) Sumowanie w porządku malejącym.

Zadanie 3. polegało na przepisaniu wyrażeń matematycznych tak, aby uniknąć zjawiska kancelacji.

Zadanie 4. Polegało na porównaniu propagowanych błędów wyliczonej sprawności urządzeń.

Wzór na efektywność urządzenia:

$$\eta = K \frac{QT_d}{I}$$

Niepewności pomiarów:

Kolektor	S1	S2
Q	1.5%	0.5%
Td	1.0%	1.0%
I	3.6%	2.0%

Rozwiązania zadań

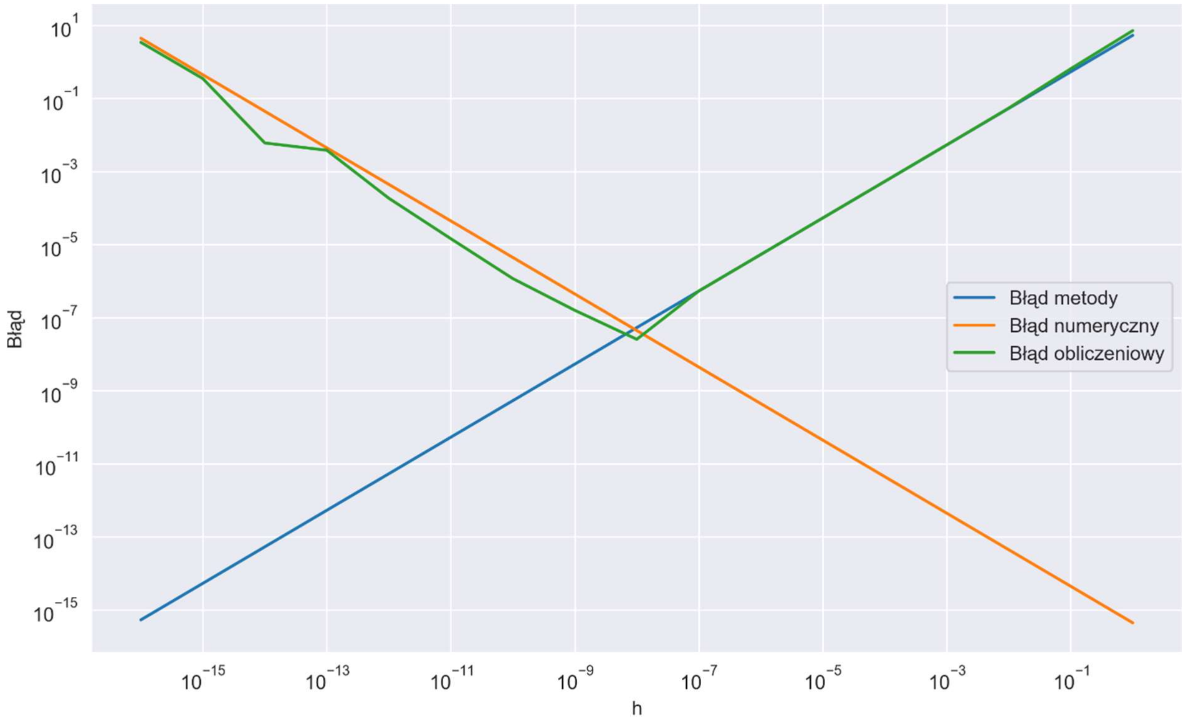
Zadanie 1.

Na początku wyliczamy pochodną korzystając z różnicy prawostronnej. W tym przypadku zachodzi zależność:

$$E(h) = \frac{Mh}{2} + \frac{2\epsilon}{h}$$

gdzie:

- M to przybliżona wartość drugiej pochodnej w punkcie $x = 1$, $M \approx 10.66985894$
- ϵ to precyzja przedstawienia liczby w przyjętej reprezentacji zmiennoprzecinkowej, $\epsilon = 2.220446049250313 * 10^{-16}$



Rysunek 1. Wykres wartości bezwzględnych błędów - różnica prawostronna

Zauważmy, że wykres odpowiada oczekiwaniom i błąd metody równa się w przybliżeniu sumie błędu numerycznego i błędu metody. Wykres błędu obliczeniowego przyjmuje minimum dla wartości $h = 10^{-8}$, co odpowiada szacunkom:

$$h_{min} = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{M}} \approx 9{,}123695 * 10^{-9}$$

Wartość minimalnego błędu obliczeniowego:

$$E_{min} = 2{,}55 * 10^{-8}$$

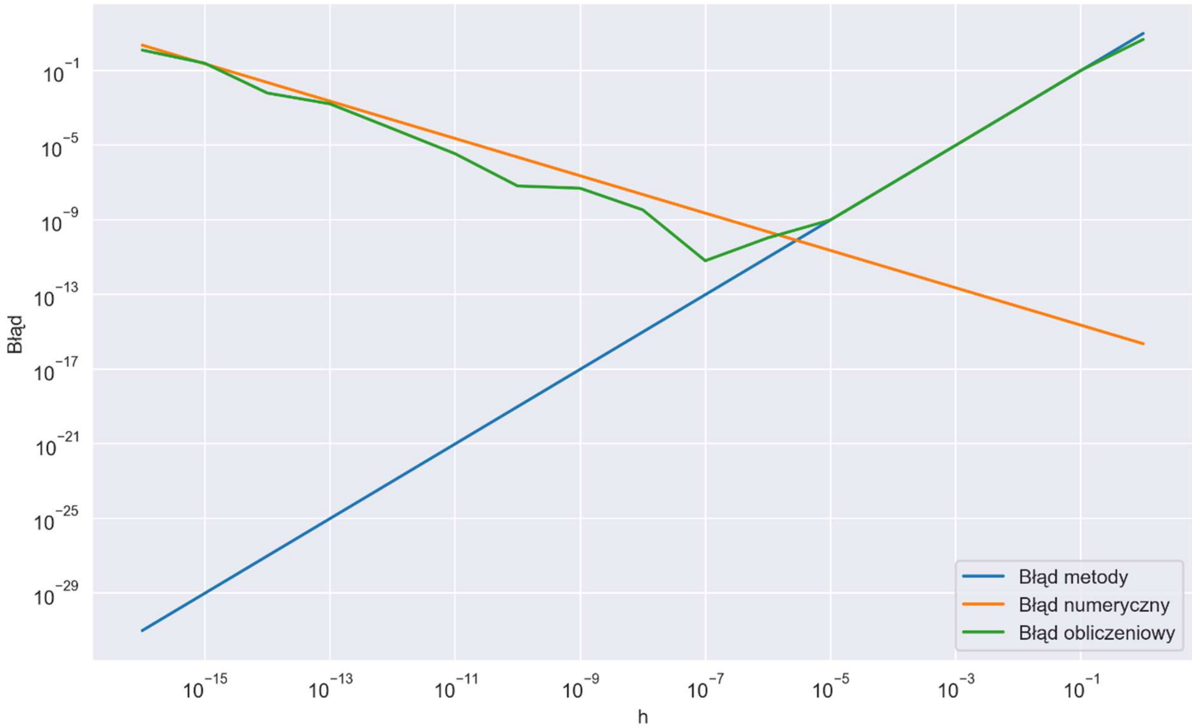
Następnie wyliczamy pochodną korzystając z różnicy centralnej. W tym przypadku zachodzi zależność:

$$E(h) = \frac{Mh^2}{6} + \frac{\epsilon}{h}$$

gdzie:

- $M \approx 56.70299999$

- ϵ ma taką samą wartość jak wyżej.



Rysunek 2. Wykres wartości bezwzględnych błędów - różnica centralna

Zauważmy, że wykres odpowiada oczekiwaniom i błąd metody równa się w przybliżeniu sumie błędu numerycznego i błędu metody. Wykres błędu obliczeniowego przyjmuje minimum dla wartości $h = 10^{-7}$, co odpowiada szacunkom:

$$h_{min} = \sqrt[3]{\frac{3\epsilon}{M}} \approx 2{,}73274 * 10^{-6}$$

Wartość minimalnego błędu obliczeniowego:

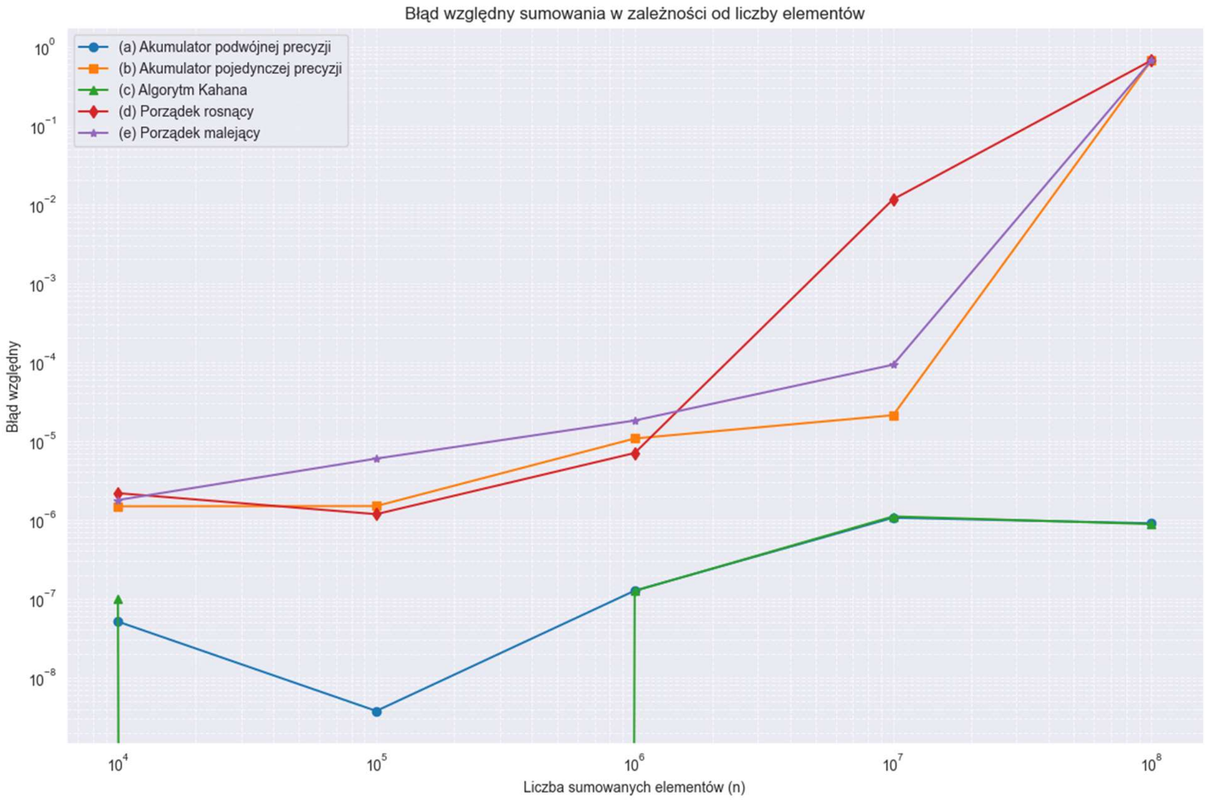
$$E_{min} = 6{,}22 * 10^{-1}$$

Z powyższych wyników można wywnioskować, że metoda różnic centralnych jest obarczona mniejszym błędem niż różnica jednostronna.

Zadanie 2.

Do porównania różnych sposobów sumowania liczb zmiennoprzecinkowych użyliśmy programu generującego listę liczb zmiennoprzecinkowych z przedziału [0, 1) o zadanym rozmiarze, a następnie porównującego wyliczoną sumę z wynikiem funkcji `math.fsum()`

Błąd względny wyników obliczeń przedstawiono na poniższym wykresie.



Z powyższego wynika, że najmniejszym błędem obarczone jest sumowanie z użyciem algorytmu Kahana oraz sumowanie z akumulatorem podwójnej precyzji.

Widać także, że sumowanie liczb w porządku rosnącym jest dokładniejsze od sumowania w porządku malejącym, chociaż nie we wszystkich przypadkach.

Błąd względny w ogólności rośnie wraz z liczbą sumowanych elementów, co jest zgodne z intuicją.

Zadanie 3.

(a) $\sqrt{x+1} - 1 = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}, x \approx 0$

(b) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y), x \approx y$

(c) $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}, x \approx 0$

(d) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x, x \approx \frac{\pi}{4}$

(e) $\ln x - 1 = \boldsymbol{ln\, x - ln\, e = ln\frac{x}{e}, x \approx e}$

(f) $e^x - e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)!} = 2 \cdot sinh(x), x \approx 0$

Zadanie 4.

(a) Błąd względny

$E(\eta)_1 = E(Q)_1 + E(Td)_1 + E(I)_1 = 1.5\% + 1.0\% + 3.6\% = 6.1\%$

$E(\eta)_2 = E(Q)_2 + E(Td)_2 + E(I) = 0.5\% + 1.0\% + 2.0\% = 3.5\%$

(b) Błąd bezwzględny

$E(\eta)_1 = 6.1\% * 0.76 = 0.04636$

$E(\eta)_2 = 3.5\% * 0.70 = 0.0245$

(c) Przedziały sprawności

S1: 0.76 ± 0.04636, czyli od 0.71364 do 0.80636

S2: 0.70 ± 0.0245, czyli od 0.6755 do 0.7245

(d) Wnioski

Ponieważ przedziały sprawności posiadają część wspólną, to nie można stwierdzić z pewnością, który kolektor jest bardziej efektywny