Laboratorium 9 - Równania różniczkowe zwyczajne – część I

Dawid Żak   Szymon Hołysz

2025-05-21

Table of contents

Zadanie 1.

Przedstaw każde z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu (ang. *first-order system of ODEs*):

(a) równanie Van der Pol'a:

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

(b) równanie Blasiusa:

$$y''' = -yy''$$

(c) II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y_1'' = -GM\frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} \quad (1)$$

$$y_2'' = -GM\frac{y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} \quad (2)$$

Rozwiązania:

a) Równanie Van der Pol'a: $y'' = y'(1 - y^2) - y$ Wprowadzamy nową zmienną: Niech $z = y'$. Wówczas $z' = y''$. Podstawiając do równania:

$$\begin{cases} z = y' \\ z' = z(1 - y^2) - y \end{cases}$$

lub zapisując bardziej standardowo jako układ:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = z(1 - y^2) - y \end{cases}$$

b) Równanie Blasiusa: $y''' = -yy''$ Wprowadzamy nowe zmienne: Niech $z = y'$ Niech $w = y''$ Wówczas $z' = y'' = w$ i $w' = y'''$. Podstawiając do równania:

$$\begin{cases} z = y' \\ w = y'' \\ w' = -yw \end{cases}$$

lub zapisując bardziej standardowo jako układ:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = w \\ w' = -yw \end{cases}$$

c) II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y_1'' = -GM \frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}$$

$$y_2'' = -GM \frac{y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}$$

Wprowadzamy nowe zmienne dla każdej współrzędnej: Dla y_1: niech $z_1 = y_1'$ Wówczas $z_1' = y_1''$ Dla y_2: niech $z_2 = y_2'$ Wówczas $z_2' = y_2''$ Podstawiając do układu równań:

$$\begin{cases} y_1' = z_1 \\ z_1' = -GM \frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}} \\ y_2' = z_2 \\ z_2' = -GM \frac{y_2}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Zadanie 2.

Przekształcić poniższy problem początkowy do autonomicznego problemu początkowego:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1/t + y_2 t \\ y_2' &= t(y_2^2 - 1)/y_1 \\ y_1(1) &= 1 \\ y_2(1) &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie:

Aby przekształcić nieautonomiczny układ równań różniczkowych (gdzie prawa strona zależy jawnie od zmiennej niezależnej t) do autonomicznego, wprowadzamy nową zmienną zależną, która będzie równa zmiennej niezależnej t.

Niech $s = t$. Wówczas pochodna s względem t wynosi $s' = \frac{ds}{dt} = 1$.

Podstawiając s za t do oryginalnego układu równań, otrzymujemy autonomiczny układ:

$$\begin{cases} s' = 1 \\ y_1' = \frac{y_1}{s} + y_2 s \\ y_2' = \frac{s(y_2^2-1)}{y_1} \end{cases}$$

Wartości początkowe dla autonomicznego problemu początkowego będą odpowiadać oryginalnym wartościom w punkcie $t = 1$:

$$\begin{cases} s(1) = 1 \\ y_1(1) = 1 \\ y_2(1) = 0 \end{cases}$$

Zadanie 3.

Dany jest problem początkowy:

$$y' = \sqrt{1 - y}$$
$$y(0) = 0$$

Pokaż, że funkcja $y(t) = t(4 - t)/4$ spełnia równanie i warunek początkowy oraz wyznacz dziedzinę, dla której $y(t)$ jest rozwiązaniem problemu początkowego.

$$y' = \sqrt{1-y}$$
$$y(0) = 0$$
$$Dla\ y(t) = \frac{t(4-t)}{4}$$
$$y(0) = 0$$

$$L = y'(t) = \frac{2-t}{2}$$
$$P = \sqrt{1-y(t)} = \frac{1}{2}\sqrt{4-4t+t^2} = \frac{|2-t|}{2}$$

1. Dla t 2:

$$|2-t| = t-2$$
$$\frac{2-t}{2} = \frac{t-2}{2}$$
$$2t = 4$$
$$t = 2$$

2. Dla t $<$ 2:

$$|2-t| = 2-t$$
$$\frac{2-t}{2} = \frac{2-t}{2}$$
$$L = P$$

Czyli $t \in (-\inf, 2 >$

Zadanie 4.

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne:

$$y' = -5y$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0.5$.

(a) Analityczna stabilność. Wyjaśnij, czy rozwiązania powyższego równania są stabilne?

1. Rozwiązanie analityczne (dokładne) równania różniczkowego

Dane równanie to:

$$\frac{dy}{dx} = -5y$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu, które jest jednocześnie liniowe i o zmiennych rozdzielonych. Możemy je rozwiązać przez rozdzielenie zmiennych:

$$\frac{dy}{y} = -5dx$$

Następnie całkujemy obie strony:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -5dx$$

Wynikiem całkowania jest:

$$\ln|y| = -5x + C_1$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania.

Aby wyznaczyć y, podnosimy obie strony do potęgi e:

$$e^{\ln|y|} = e^{-5x+C_1}$$

$$|y| = e^{C_1} \cdot e^{-5x}$$

Usuwamy wartość bezwzględną, wprowadzając nową stałą $C = \pm e^{C_1}$, gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą różną od zera (dla $y = 0$ równanie jest spełnione trywialnie, $C = 0$).

$$y(x) = C \cdot e^{-5x}$$

Jest to **rozwiązanie ogólne** danego równania różniczkowego.

2. Wyznaczenie stałej C z warunku początkowego

Mamy warunek początkowy $y(0) = 1$. Podstawiamy $x = 0$ i $y = 1$ do rozwiązania ogólnego:

$$1 = C \cdot e^{-5 \cdot 0}$$

$$1 = C \cdot e^0$$

$$1 = C \cdot 1$$

$$C = 1$$

Zatem, **rozwiązanie analityczne (dokładne)** dla danego zagadnienia początkowego to:

$$y(x) = e^{-5x}$$

3. Analiza stabilności rozwiązania

Aby zbadać stabilność rozwiązania, analizujemy jego zachowanie, gdy zmienna niezależna x dąży do nieskończoności ($x \to \infty$). Obliczamy granicę:

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} e^{-5x}$$

Gdy $x \to \infty$, wykładnik $-5x$ dąży do $-\infty$. Funkcja wykładnicza e^z dąży do 0, gdy $z \to -\infty$. Zatem:

$$\lim_{x \to \infty} e^{-5x} = 0$$

Wniosek

Rozwiązania powyższego równania różniczkowego są **stabilne asymptotycznie**. Oznacza to, że niezależnie od warunków początkowych (o ile C jest skończoną wartością), wszystkie rozwiązania dążą do wartości 0 w miarę upływu czasu ($x \to \infty$). Małe zaburzenia w warunkach początkowych nie powodują rozbieżności rozwiązań, lecz wszystkie rozwiązania zbiegają się do tej samej wartości (w tym przypadku 0) w miarę upływu czasu.

(b) Udowodnij, że metoda Eulera jest zbieżna

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty \\ nh = t}} y_n = y(t)$$

gdzie $y(t)$ oznacza wartość analitycznego rozwiązania w ustalonym punkcie $t = nh$, a y_n wartość rozwiązania numerycznego w punkcie t. Wykorzystaj fakt, że $\lim_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{h \to 0}(1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$.

Dowód zbieżności:

Dla danego równania różniczkowego zwyczajnego $y' = -5y$ z warunkiem początkowym $y(0) = 1$, wiemy z poprzedniej części zadania (lub przez rozwiązanie analityczne), że **dokładne (analityczne) rozwiązanie** jest dane wzorem:

$$y(t) = e^{-5t}$$

Teraz rozważmy **rozwiązanie numeryczne** otrzymane za pomocą metody Eulera. Ogólny wzór rekurencyjny dla jawnej metody Eulera to:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$$

W naszym przypadku, funkcja $f(t, y) = -5y$. Podstawiając to do wzoru, otrzymujemy:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (-5y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i(1 - 5h)$$

Rozpoczynając od warunku początkowego $y_0 = y(0) = 1$, możemy zapisać kolejne przybliżenia numeryczne: Dla $i = 0$:

$$y_1 = y_0(1 - 5h) = 1 \cdot (1 - 5h)$$

Dla $i = 1$:

$$y_2 = y_1(1 - 5h) = (1 - 5h)(1 - 5h) = (1 - 5h)^2$$

Kontynuując ten proces dla n kroków, otrzymujemy wzór na y_n:

$$y_n = (1 - 5h)^n$$

Chcemy teraz zbadać granicę wartości y_n w punkcie t, gdy rozmiar kroku h dąży do zera, a liczba kroków n dąży do nieskończoności, przy czym nh pozostaje stałe i równe t. Oznacza to, że $h = \frac{t}{n}$.

Podstawiamy $h = \frac{t}{n}$ do wyrażenia na y_n:

$$y_n = \left(1 - 5\frac{t}{n}\right)^n$$

Teraz obliczamy granicę, gdy $n \to \infty$ (co implikuje $h \to 0$ dla stałego t):

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty \\ nh = t}} y_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - 5\frac{t}{n}\right)^n$$

Aby obliczyć tę granicę, możemy przekształcić wyrażenie wewnątrz nawiasu tak, aby przypominało znaną definicję liczby Eulera e:

$$\lim_{k \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$$

W naszym przypadku, niech $k = -\frac{n}{5t}$. Wtedy $\frac{1}{k} = -\frac{5t}{n}$. Możemy przepisać wyrażenie jako:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{-5t}}\right)^{\frac{n}{-5t}} \right)^{-5t}$$

Gdy $n \to \infty$, to $\frac{n}{-5t}$ również dąży do nieskończoności (lub minus nieskończoności, w zależności od znaku t, ale to nie wpływa na granicę e). Zgodnie z definicji liczby Eulera:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{-5t}}\right)^{\frac{n}{-5t}} = e$$

Podstawiając to z powrotem do naszej granicy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{-5t}}\right)^{\frac{n}{-5t}}\right)^{-5t} = e^{-5t}$$

Zatem otrzymujemy:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty\\ nh=t}} y_n = e^{-5t}$$

Porównując ten wynik z analitycznym rozwiązaniem $y(t) = e^{-5t}$, widzimy, że:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty\\ nh=t}} y_n = y(t)$$

Wniosek:

Udowodniliśmy, że dla danego równania różniczkowego $y' = -5y$ z warunkiem początkowym $y(0) = 1$, metoda Eulera jest **zbieżna**. Oznacza to, że gdy rozmiar kroku h dąży do zera (a co za tym idzie, liczba kroków n dąży do nieskończoności dla ustalonego czasu t), numeryczne rozwiązanie y_n zbiega do dokładnego rozwiązania analitycznego $y(t)$.

(c) Numeryczna stabilność

Wyjaśnij, czy metoda Eulera jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

Analiza numerycznej stabilności metody Eulera

Dane równanie różniczkowe to:

$$y' = -5y$$

Z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Krok całkowania numerycznego: $h = 0.5$.

1. **Charakterystyka równania:** Równanie $y' = -5y$ jest liniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym postaci $y' = \lambda y$, gdzie $\lambda = -5$. Rozwiązanie analityczne to $y(t) = Ce^{\lambda t}$. W naszym przypadku $y(t) = e^{-5t}$, które dąży do zera, gdy $t \to \infty$. Jest to stabilne asymptotycznie.

2. **Wzór rekurencyjny metody Eulera:** Jawna metoda Eulera dla równania $y' = f(t, y)$ jest dana wzorem:

   $$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k)$$

   Dla naszego równania $f(t, y) = -5y$, więc:

   $$y_{k+1} = y_k + h(-5y_k)$$

   $$y_{k+1} = y_k(1 - 5h)$$

3. **Warunek stabilności numerycznej jawnej metody Eulera:** Dla równań postaci $y' = \lambda y$, jawna metoda Eulera jest **numerycznie stabilna**, jeśli czynnik wzrostu $|1+\lambda h|$ jest mniejszy lub równy 1. Czyli:
$$|1 + \lambda h| \leq 1$$
Obszar stabilności jawnej metody Eulera w płaszczyźnie zespolonej λh to okrąg o środku w $(-1, 0)$ i promieniu 1. Punkt λh musi znajdować się wewnątrz lub na brzegu tego okręgu.

4. **Sprawdzenie warunku dla danych wartości:** W naszym przypadku $\lambda = -5$ i $h = 0.5$. Obliczamy wartość λh:
$$\lambda h = (-5) \cdot 0.5 = -2.5$$
Teraz sprawdzamy warunek stabilności:
$$|1 + \lambda h| = |1 + (-2.5)| = | - 1.5| = 1.5$$

5. **Wniosek o stabilności numerycznej:** Ponieważ $1.5 > 1$, warunek stabilności numerycznej jawnej metody Eulera nie jest spełniony.
$$|1 + \lambda h| = 1.5 > 1$$
Zatem, **metoda Eulera nie jest stabilna numerycznie** dla tego równania z użytym krokiem $h = 0.5$.

Wyjaśnienie konsekwencji niestabilności:

Numeryczna niestabilność oznacza, że błędy (np. błędy zaokrągleń lub błędy lokalne) będą narastać w kolejnych krokach iteracji numerycznych, prowadząc do rozwiązań, które **odbiegają od analitycznego rozwiązania**, często wykazując oscylacje o wzrastającej amplitudzie lub po prostu bardzo szybką rozbieżność.

Dla przypomnienia, w części (a) i (b) pokazaliśmy, że analityczne rozwiązanie $y(t) = e^{-5t}$ dąży do zera. Sprawdźmy kilka pierwszych kroków numerycznych dla $y_0 = 1, h = 0.5$: $y_0 = 1$ $y_1 = y_0(1 - 5h) = 1 \cdot (1 - 5 \cdot 0.5) = 1 \cdot (1 - 2.5) = -1.5$ $y_2 = y_1(1 - 5h) = -1.5 \cdot (1 - 2.5) = -1.5 \cdot (-1.5) = 2.25$ $y_3 = y_2(1 - 5h) = 2.25 \cdot (-1.5) = -3.375$

Jak widać, wartości numeryczne $(1, -1.5, 2.25, -3.375, ...)$ szybko oscylują i rosną w wartości bezwzględnej, co jest sprzeczne z analitycznym rozwiązaniem zbiegającym do zera. Jest to wyraźny symptom numerycznej niestabilności. Aby metoda Eulera była stabilna dla tego równania, krok h musiałby być mniejszy lub równy 0.4 (ponieważ $|1 + (-5)h| \leq 1 \Rightarrow | - 5h| \leq 1 \Rightarrow 5h \leq 1 \Rightarrow h \leq 0.4$).

(d) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ metodą Eulera.

Dane z zadania: * Równanie różniczkowe: $y' = -5y$ * Warunek początkowy: $y(0) = 1$ * Krok całkowania: $h = 0.5$ * Punkt, dla którego obliczamy rozwiązanie: $t = 0.5$

Metoda Eulera jest dana wzorem rekurencyjnym:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k)$$

Dla naszego równania, $f(t, y) = -5y$, więc:

$$y_{k+1} = y_k + h(-5y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k(1 - 5h)$$

Musimy obliczyć wartość rozwiązania numerycznego w punkcie $t = 0.5$. Ponieważ krok $h = 0.5$, oznacza to, że potrzebujemy wykonać dokładnie jeden krok, aby dotrzeć do $t = 0.5$.

1. **Krok 0: Początek obliczeń** Mamy dane początkowe: $t_0 = 0$ $y_0 = 1$
2. **Krok 1: Obliczenie y_1 dla $t_1 = 0.5$** Obliczamy y_1 korzystając z wzoru metody Eulera dla $k = 0$:

   $$y_1 = y_0(1 - 5h)$$

   Podstawiamy znane wartości: $y_0 = 1$ i $h = 0.5$:

   $$y_1 = 1 \cdot (1 - 5 \cdot 0.5)$$

   $$y_1 = 1 \cdot (1 - 2.5)$$

   $$y_1 = 1 \cdot (-1.5)$$

   $$y_1 = -1.5$$

   Zatem, wartość przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ wynosi $y_1 = -1.5$.

Porównanie z rozwiązaniem analitycznym (dla kontekstu)

Dla porównania, wartość dokładnego rozwiązania analitycznego $y(t) = e^{-5t}$ w punkcie $t = 0.5$ wynosi:

$$y(0.5) = e^{-5 \cdot 0.5} = e^{-2.5}$$

Używając kalkulatora: $e^{-2.5} \approx 0.082085$

Jak widać, otrzymana wartość numeryczna $y_1 = -1.5$ jest znacznie różna od wartości dokładnej 0.082085. To duża rozbieżność jest bezpośrednim skutkiem **niestabilności numerycznej** metody Eulera z tak dużym krokiem $h = 0.5$ dla tego konkretnego równania, co zostało omówione w części (c) zadania. Numeryczne rozwiązanie nie tylko odbiega, ale nawet ma inny znak i znacząco większą wartość bezwzględną.

(e) Stabilność niejawnej metody Eulera

Wyjaśnij, czy niejawna metoda Eulera jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

Analiza numerycznej stabilności niejawnej metody Eulera

Dane z zadania: * Równanie różniczkowe: $y' = -5y$ * Krok całkowania: $h = 0.5$

1. **Wzór rekurencyjny niejawnej metody Eulera:** Niejawna metoda Eulera (znana również jako metoda wsteczna Eulera) dla równania $y' = f(t, y)$ jest dana wzorem:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

   Dla naszego równania $f(t, y) = -5y$, podstawiamy to do wzoru:

$$y_{k+1} = y_k + h(-5y_{k+1})$$

   Teraz musimy przekształcić ten wzór, aby wyznaczyć y_{k+1}:

$$y_{k+1} = y_k - 5hy_{k+1}$$
$$y_{k+1} + 5hy_{k+1} = y_k$$
$$y_{k+1}(1 + 5h) = y_k$$
$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + 5h}$$

2. **Warunek stabilności numerycznej niejawnej metody Eulera:** Dla równań postaci $y' = \lambda y$, niejawna metoda Eulera jest **absolutnie stabilna**, jeśli czynnik wzrostu $\left|\frac{1}{1-\lambda h}\right|$ jest mniejszy lub równy 1. Czyli:

$$\left|\frac{1}{1 - \lambda h}\right| \leq 1$$

   Obszar stabilności niejawnej metody Eulera w płaszczyźnie zespolonej λh to cała lewa półpłaszczyzna zespolona wraz z osią urojoną, tzn. $\mathrm{Re}(\lambda h) \leq 0$. W praktyce, oznacza to, że jest ona **A-stabilna**, co jest bardzo pożądaną cechą. Dla równań, dla których λ jest liczbą rzeczywistą ujemną (jak w naszym przypadku), niejawna metoda Eulera jest zawsze stabilna, niezależnie od wielkości kroku h.

3. **Sprawdzenie warunku dla danych wartości:** W naszym przypadku $\lambda = -5$ i $h = 0.5$. Obliczamy wartość λh:

$$\lambda h = (-5) \cdot 0.5 = -2.5$$

   Teraz sprawdzamy warunek stabilności dla niejawnej metody Eulera:

$$\left|\frac{1}{1 - \lambda h}\right| = \left|\frac{1}{1 - (-2.5)}\right| = \left|\frac{1}{1 + 2.5}\right| = \left|\frac{1}{3.5}\right|$$
$$\left|\frac{1}{3.5}\right| = \frac{1}{3.5} \approx 0.2857$$

4. **Wniosek o stabilności numerycznej:** Ponieważ $0.2857 \leq 1$, warunek stabilności numerycznej niejawnej metody Eulera jest spełniony.

$$\left|\frac{1}{1-\lambda h}\right| = 0.2857 \leq 1$$

   Zatem, **niejawna metoda Eulera jest stabilna numerycznie** dla tego równania z użytym krokiem $h = 0.5$.

Wyjaśnienie konsekwencji stabilności:

Numeryczna stabilność niejawnej metody Eulera dla tego równania oznacza, że nawet z dużym krokiem $h = 0.5$, błędy nie będą narastać w sposób niekontrolowany. Rozwiązanie numeryczne będzie śledzić ogólny trend rozwiązania analitycznego (zbieganie do zera), chociaż może nie być bardzo dokładne w każdym punkcie z powodu dużego rozmiaru kroku.

Sprawdźmy kilka pierwszych kroków numerycznych dla $y_0 = 1, h = 0.5$: $y_0 = 1$ $y_1 = \frac{y_0}{1+5h} = \frac{1}{1+5\cdot 0.5} = \frac{1}{1+2.5} = \frac{1}{3.5} \approx 0.2857$ $y_2 = \frac{y_1}{1+5h} = \frac{0.2857}{3.5} \approx 0.0816$

Porównując to z rozwiązaniem analitycznym: $y(0.5) = e^{-2.5} \approx 0.082085$ $y(1.0) = e^{-5} \approx 0.006738$

Wartości numeryczne $(1, 0.2857, 0.0816, ...)$ maleją i zbiegają do zera, co jest zgodne z zachowaniem analitycznego rozwiązania, mimo że dla $t = 0.5$ przybliżenie jest mniej dokładne niż $y(0.5) \approx 0.082085$. Jednak ważne jest, że metoda jest stabilna i nie "wybucha".

(f) Obliczenia numeryczne (niejawna metoda Eulera)

Obliczenia numeryczne rozwiązania niejawna metodą Eulera dla $t = 0.5$

Dane z zadania: * Równanie różniczkowe: $y' = -5y$ * Warunek początkowy: $y(0) = 1$ * Krok całkowania: $h = 0.5$ * Punkt, dla którego obliczamy rozwiązanie: $t = 0.5$

Niejawna metoda Eulera jest dana wzorem rekurencyjnym:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

Dla naszego równania $f(t, y) = -5y$, podstawiamy to do wzoru:

$$y_{k+1} = y_k + h(-5y_{k+1})$$

Przekształcamy wzór, aby wyznaczyć y_{k+1}:

$$y_{k+1} = y_k - 5hy_{k+1}$$

$$y_{k+1} + 5hy_{k+1} = y_k$$
$$y_{k+1}(1 + 5h) = y_k$$
$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + 5h}$$

Musimy obliczyć wartość rozwiązania numerycznego w punkcie $t = 0.5$. Ponieważ krok $h = 0.5$, oznacza to, że potrzebujemy wykonać dokładnie jeden krok, aby dotrzeć do $t = 0.5$.

1. **Krok 0: Początek obliczeń** Mamy dane początkowe: $t_0 = 0$ $y_0 = 1$
2. **Krok 1: Obliczenie y_1 dla $t_1 = 0.5$** Obliczamy y_1 korzystając z przekształconego wzoru niejawnej metody Eulera dla $k = 0$:

$$y_1 = \frac{y_0}{1 + 5h}$$

Podstawiamy znane wartości: $y_0 = 1$ i $h = 0.5$:

$$y_1 = \frac{1}{1 + 5 \cdot 0.5}$$
$$y_1 = \frac{1}{1 + 2.5}$$
$$y_1 = \frac{1}{3.5}$$

Aby uzyskać wartość dziesiętną:

$$y_1 \approx 0.285714$$

Zatem, wartość przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ obliczona niejawną metodą Eulera wynosi około 0.285714.

Porównanie z rozwiązaniem analitycznym (dla kontekstu)

Dla porównania, wartość dokładnego rozwiązania analitycznego $y(t) = e^{-5t}$ w punkcie $t = 0.5$ wynosi:

$$y(0.5) = e^{-5 \cdot 0.5} = e^{-2.5}$$

Używając kalkulatora: $e^{-2.5} \approx 0.082085$

Wartość uzyskana niejawną metodą Eulera ($y_1 \approx 0.2857$) jest znacznie bliższa analitycznemu rozwiązaniu (0.082085) niż wartość uzyskana jawną metodą Eulera ($y_1 = -1.5$). Mimo że nadal istnieje znacząca różnica wynikająca z dużego rozmiaru kroku $h = 0.5$, to niejawna metoda Eulera zachowuje poprawny kierunek i zbieżność rozwiązania, co jest zgodne z jej **stabilnością numeryczną**, omówioną w części (e) zadania.

(g) Wyznaczenie maksymalnego kroku h dla zadanej dokładności

Wyznacz maksymalną dopuszczalną wartość kroku h w metodzie Eulera, jeśli żądamy, aby błąd rozwiązania w punkcie $t_n = 0.5$ nie przekraczał 0.001, tzn. $|y_n - y(t_n)| < tol = 0.001$. Ile kroków należy w tym celu wykonać?

```
h=0.00194553
n=257
```

(h) Zbieżność iteracji bezpośredniej w niejawnej metodzie Eulera

Do wyznaczenia wartości y_{n+1} w niejawnej metodzie Euler'a użyto metody bezpośredniej iteracji:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n$$

$$y_{n+1}^{(k+1)} = \phi(y_{n+1}^{(k)})$$

Wyznacz maksymalną dopuszczalną wartość kroku h, przy której metoda pozostanie zbieżna. Czy uzasadnione byłoby użycie metody Newtona do wyznaczenia y_{n+1}?

1. Wyznaczenie funkcji iteracyjnej $\phi(y_{n+1}^{(k)})$

Dla równania różniczkowego $y' = -5y$, niejawna metoda Eulera jest dana wzorem:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Podstawiając $f(t_{n+1}, y_{n+1}) = -5y_{n+1}$:

$$y_{n+1} = y_n + h(-5y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n - 5hy_{n+1}$$

Aby sformułować to jako iterację bezpośrednią $y_{n+1}^{(k+1)} = \phi(y_{n+1}^{(k)})$, musimy przekształcić równanie tak, aby y_{n+1} (w kolejnym kroku iteracji) było wyrażone jako funkcja y_{n+1} (z poprzedniego kroku iteracji). Najprostszym sposobem na uzyskanie funkcji ϕ dla iteracji punktu stałego ($x = \phi(x)$) z równania $x = g(x)$ jest często $\phi(x) = g(x)$.

Zatem, funkcja iteracyjna ϕ jest postaci:

$$\phi(Y) = y_n - 5hY$$

gdzie Y reprezentuje $y_{n+1}^{(k)}$.

2. Warunek zbieżności metody bezpośredniej iteracji

Metoda iteracji bezpośredniej $y_{n+1}^{(k+1)} = \phi(y_{n+1}^{(k)})$ jest zbieżna, jeśli pochodna funkcji iteracyjnej $\phi(Y)$ w punkcie stałym (lub w jego otoczeniu) ma wartość bezwzględną mniejszą od 1. To znaczy:

$$|\phi'(Y)| < 1$$

Obliczamy pochodną $\phi(Y)$ po Y:

$$\phi'(Y) = \frac{d}{dY}(y_n - 5hY)$$

$$\phi'(Y) = -5h$$

Teraz stosujemy warunek zbieżności:

$$|-5h| < 1$$

$$5h < 1$$

$$h < \frac{1}{5}$$

$$h < 0.2$$

Maksymalna dopuszczalna wartość kroku h, przy której metoda iteracji bezpośredniej pozostanie zbieżna, to $h < 0.2$.

3. Czy uzasadnione byłoby użycie metody Newtona do wyznaczenia y_{n+1}?

Aby zastosować metodę Newtona do wyznaczenia y_{n+1}, musimy zdefiniować funkcję $F(Y)$ taką, że $F(Y) = 0$, gdzie $Y = y_{n+1}$. Przekształćmy równanie niejawnej metody Eulera:

$$Y - y_n - hf(t_{n+1}, Y) = 0$$

Podstawiając $f(t_{n+1}, Y) = -5Y$:

$$F(Y) = Y - y_n - h(-5Y)$$

$$F(Y) = Y - y_n + 5hY$$

$$F(Y) = Y(1 + 5h) - y_n$$

Metoda Newtona dla znalezienia pierwiastka $F(Y) = 0$ ma wzór iteracyjny:

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} - \frac{F(Y^{(k)})}{F'(Y^{(k)})}$$

Obliczamy pochodną $F(Y)$:

$$F'(Y) = \frac{d}{dY}(Y(1+5h) - y_n)$$
$$F'(Y) = 1 + 5h$$

Podstawiamy $F(Y)$ i $F'(Y)$ do wzoru Newtona:

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} - \frac{Y^{(k)}(1+5h) - y_n}{1+5h}$$

Uzasadnienie użycia metody Newtona: Tak, użycie metody Newtona byłoby uzasadnione, a nawet w tym konkretnym przypadku równania liniowego $y' = -5y$ (dla którego $F(Y)$ jest funkcją liniową), metoda Newtona ma szczególną właściwość: zbiega do dokładnego rozwiązania y_{n+1} w **jednym kroku** iteracji (o ile $1 + 5h \neq 0$).

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} - \left(Y^{(k)} - \frac{y_n}{1+5h}\right) = \frac{y_n}{1+5h}$$

Wynika to z faktu, że dla funkcji liniowej $F(Y) = aY + b$, metoda Newtona od razu wyznacza pierwiastek $Y = -b/a$.

W praktyce: * Dla **liniowych** równań różniczkowych (takich jak $y' = -5y$), niejawna metoda Eulera zawsze prowadzi do równania liniowego dla y_{n+1}, które można rozwiązać **bezpośrednio** (nie iteracyjnie): $y_{n+1} = \frac{y_n}{1+5h}$. W tym przypadku, ani iteracja bezpośrednia, ani metoda Newtona nie są faktycznie potrzebne, jeśli celem jest znalezienie y_{n+1} (ponieważ można ją wyznaczyć analitycznie). * Metoda Newtona jest **szczególnie uzasadniona i powszechnie stosowana**, gdy $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ jest funkcją **nieliniową** względem y_{n+1}. W takich przypadkach równanie dla y_{n+1} jest nieliniowe i wymaga numerycznych metod znajdowania pierwiastków, a metoda Newtona jest często efektywnym wyborem ze względu na jej szybką (kwadratową) zbieżność, jeśli początkowe przybliżenie jest wystarczająco blisko rozwiązania.

Zadanie 5.

Treść zadania: Dany jest układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$y_1' = -2y_1 + y_2$$
$$y_2' = -y_1 - 2y_2$$

Dla jakich wartości kroku h metoda Eulera jest stabilna dla tego układu równań?

Aby określić stabilność jawnej metody Eulera dla układu równań różniczkowych, analizujemy wartości własne macierzy układu. Jawna metoda Eulera jest stabilna, jeśli dla każdej wartości własnej λ_i macierzy układu, iloczyn $h\lambda_i$ leży w obszarze stabilności tej metody. Obszar stabilności jawnej metody Eulera to dysk na płaszczyźnie zespolonej o środku w punkcie $(-1, 0)$ i promieniu 1, co matematycznie wyraża się nierównością $|1 + z| \leq 1$, gdzie $z = h\lambda$.

1. Reprezentacja układu w postaci macierzowej

Dany układ równań można zapisać w postaci macierzowej $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, gdzie $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ oraz $\mathbf{A}$ jest macierzą współczynników:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Wyznaczenie wartości własnych macierzy A

Aby znaleźć wartości własne (λ) macierzy $\mathbf{A}$, rozwiązujemy równanie charakterystyczne $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową:

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Rozwijamy wyznacznik:

$$(-2-\lambda)(-2-\lambda) - (1)(-1) = 0$$

$$(2+\lambda)^2 + 1 = 0$$

$$4 + 4\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

Teraz obliczamy wartości własne λ za pomocą wzoru na pierwiastki równania kwadratowego $\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2}$$

Zatem wartości własne to:

$$\lambda_1 = -2 + i$$

$$\lambda_2 = -2 - i$$

3. Zastosowanie warunku stabilności dla jawnej metody Eulera

Jawna metoda Eulera jest stabilna, jeśli dla wszystkich wartości własnych λ_i, spełniony jest warunek:

$$|1 + h\lambda_i| \leq 1$$

Rozważmy $\lambda_1 = -2 + i$:

$$|1 + h(-2+i)| \leq 1$$

$$|1 - 2h + hi| \leq 1$$

Obliczamy moduł liczby zespolonej: $\sqrt{(\mathrm{Re})^2 + (\mathrm{Im})^2}$.

$$\sqrt{(1-2h)^2 + (h)^2} \leq 1$$

Podnosimy obie strony do kwadratu:

$$(1-2h)^2 + h^2 \leq 1$$

$$1 - 4h + 4h^2 + h^2 \leq 1$$

$$5h^2 - 4h \leq 0$$

Wyłączamy h przed nawias:

$$h(5h-4) \leq 0$$

Ponieważ krok h musi być dodatni ($h > 0$), to aby iloczyn był niedodatni, drugi czynnik musi być niedodatni:

$$5h - 4 \leq 0$$

$$5h \leq 4$$

$$h \leq \frac{4}{5}$$

$$h \leq 0.8$$

Dla $\lambda_2 = -2 - i$:

$$|1 + h(-2-i)| \leq 1$$

$$|1 - 2h - hi| \leq 1$$

Ponownie, obliczamy moduł:

$$\sqrt{(1-2h)^2 + (-h)^2} \leq 1$$

$$(1-2h)^2 + h^2 \leq 1$$

$$1 - 4h + 4h^2 + h^2 \leq 1$$

$$5h^2 - 4h \leq 0$$

$$h(5h-4) \leq 0$$

Co prowadzi do tego samego warunku: $0 < h \leq 0.8$.

Podsumowanie

Metoda Eulera jest stabilna dla tego układu równań różniczkowych dla wartości kroku h spełniających warunek:

$$0 < h \leq 0.8$$

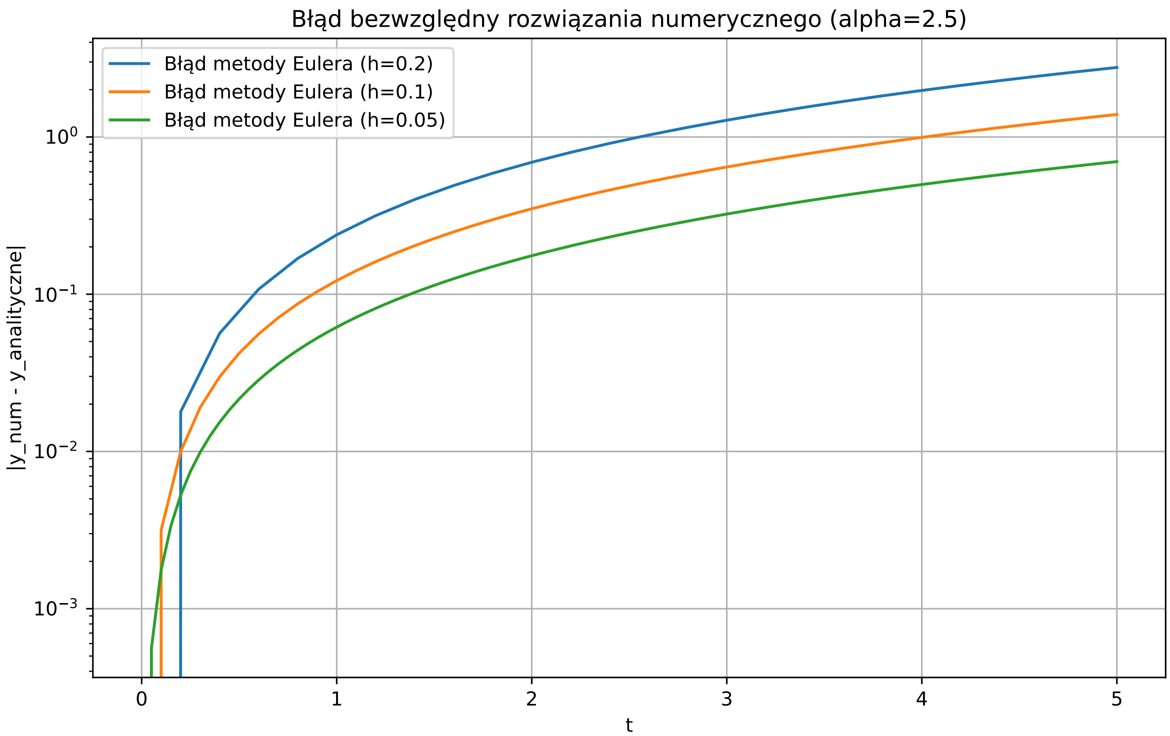
Zadanie 6.

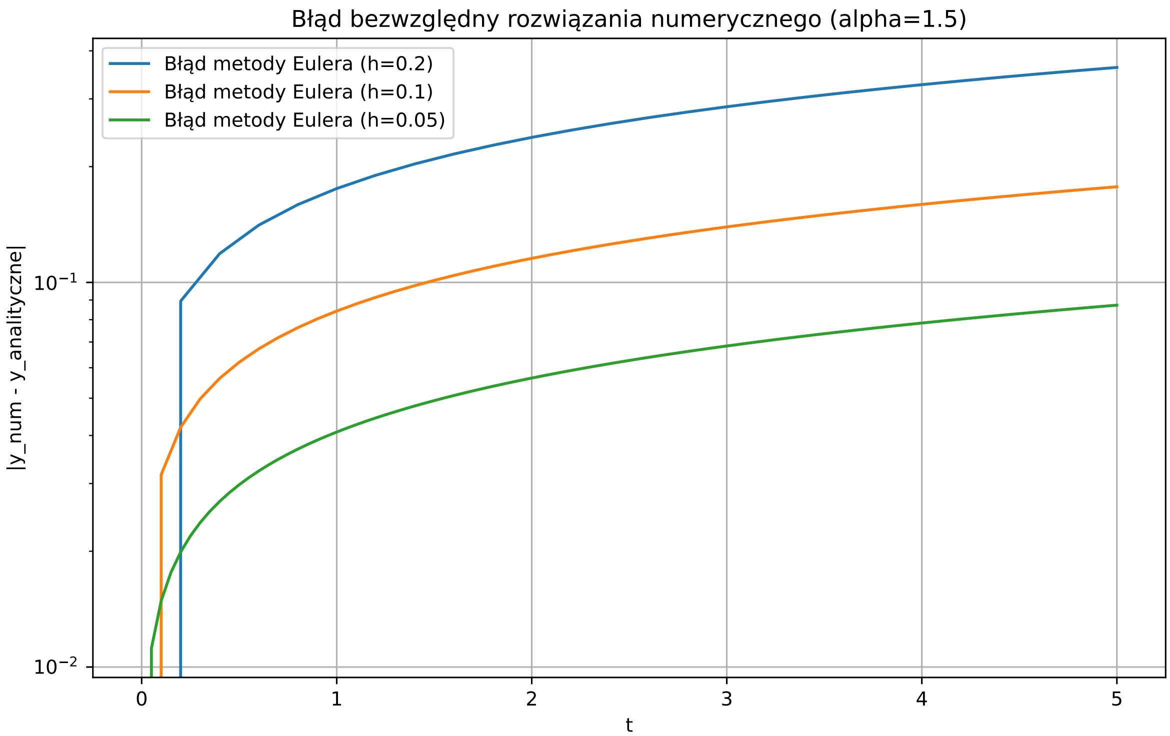
Dany jest problem początkowy:

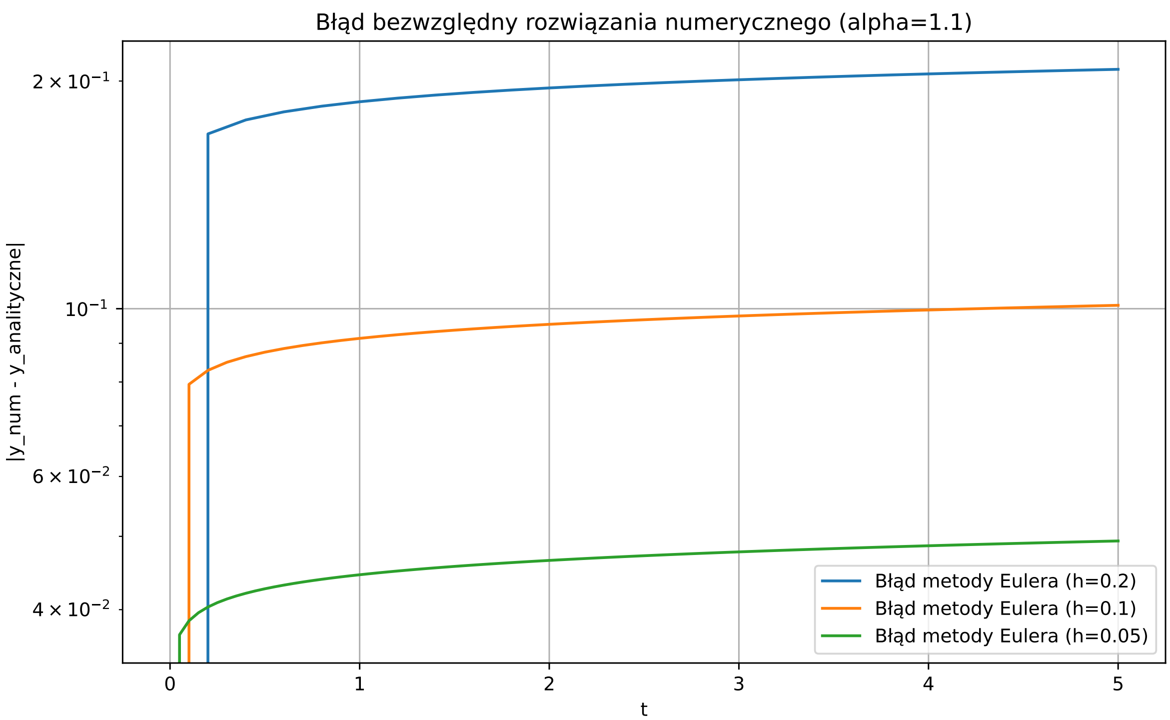
$$y' = \alpha t^{\alpha-1}$$
$$y(0) = 0$$

gdzie parametr $\alpha > 0$. Rozwiązaniem powyższego problemu początkowego jest funkcja $y(t) = t^{\alpha}$.

Rozwiąż powyższy problem metodą Eulera dla $\alpha = 2.5, 1.5, 1.1$. Dla każdego problemu zastosuj kroki $h = 0.2, 0.1, 0.05$, oblicz błąd numeryczny w węzłach rozwiązania, a następnie wyznacz empiryczny rząd zbieżności metody Eulera. Wyjaśnij otrzymane wyniki.




Błąd bezwzględny rozwiązania numerycznego (alpha=1.5)
Błąd metody Eulera (h=0.2)
Błąd metody Eulera (h=0.1)
Błąd metody Eulera (h=0.05)
|y_num - y_analityczne|
10^{-1}
10^{-2}
0
1
2
3
4
5
t


Błąd bezwzględny rozwiązania numerycznego (alpha=1.1)
2×10^{-1}
10^{-1}
6×10^{-2}
4×10^{-2}
|y_num - y_analityczne|
Błąd metody Eulera (h=0.2)
Błąd metody Eulera (h=0.1)
Błąd metody Eulera (h=0.05)
0
1
2
3
4
5
t

Analiza i Podsumowanie Wykresów Błędu Bezwzględnego

Przedstawione wykresy ilustrują błąd bezwzględny ($|y_{\text{num}} - y_{\text{analityczne}}|$) rozwiązania numerycznego uzyskanego metodą Eulera w stosunku do rozwiązania analitycznego $y(t) = t^\alpha$. Analizę przeprowadzono dla parametrów $\alpha \in \{2.5, 1.5, 1.1\}$ oraz kroków całkowania $h \in \{0.2, 0.1, 0.05\}$. Oś pionowa jest w skali logarytmicznej.

1. Zależność Błędu od Rozmiaru Kroku h: Na wszystkich trzech wykresach wyraźnie widać, że zmniejszenie rozmiaru kroku h skutkuje znaczącym zmniejszeniem błędu bezwzględnego. * Błąd jest największy dla $h = 0.2$ (niebieska linia). * Błąd jest pośredni dla $h = 0.1$ (pomarańczowa linia). * Błąd jest najmniejszy dla $h = 0.05$ (zielona linia). Jest to zgodne z teorią metody Eulera jako metody pierwszego rzędu, gdzie błąd globalny jest proporcjonalny do h. Liniowy spadek błędu na skali logarytmicznej w funkcji h potwierdza empiryczny rząd zbieżności bliski 1.

2. Charakterystyka Błędu w Funkcji Czasu t: Dla każdego α, błąd początkowy jest bliski zera (z uwagi na warunek początkowy $y(0) = 0$). Wraz ze wzrostem t, błąd ma tendencję do narastania. Jest to typowe zjawisko akumulacji błędów lokalnych w metodach numerycznych, prowadzące do wzrostu błędu globalnego w miarę wydłużania przedziału całkowania.

3. Wpływ Parametru α: * $\alpha = 2.5$**:** Błąd narasta stosunkowo dynamicznie w funkcji t. * $\alpha = 1.5$**:** Tempo narastania błędu jest umiarkowane. * $\alpha = 1.1$**:** Obserwuje się relatywnie wysoki błąd w początkowych obszarach (t bliskie 0) w porównaniu do innych α, co może być związane z charakterystyką pochodnej $t^{\alpha-1}$ (tj. $t^{0.1}$) w pobliżu $t = 0$, choć równanie różniczkowe jest dobrze zdefiniowane.

Podsumowanie: Wykresy skutecznie demonstrują fundamentalne właściwości metody Eulera: jej **zbieżność** oraz **zależność dokładności od rozmiaru kroku** h. Pokazują również, że błąd globalny narasta w czasie. Wizualizacja na skali logarytmicznej efektywnie uwidacznia liniową zależność błędu od h, co jest charakterystyczne dla metod numerycznych pierwszego rzędu.