Rozwiązywanie równań nieliniowych

Dawid Żak

Szymon Hołysz

2025-05-21

Table of contents

Zadanie 1.

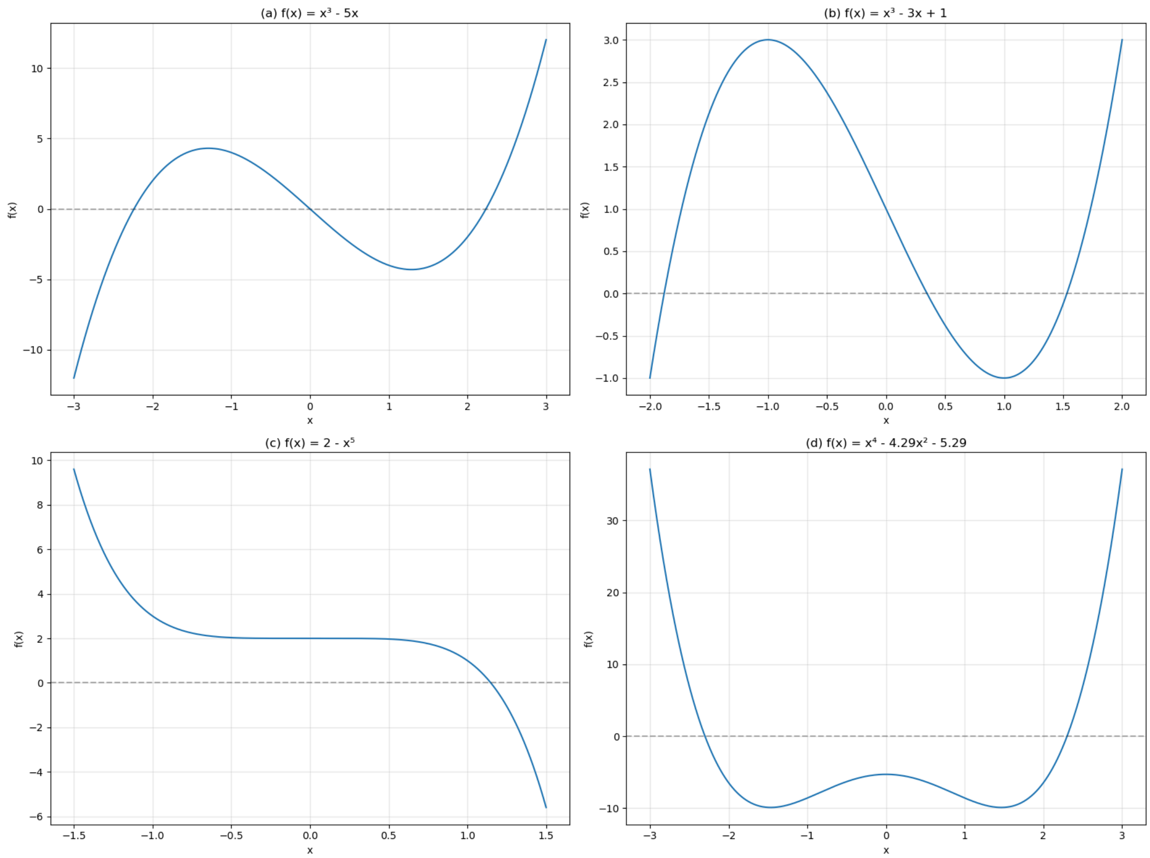
Dla poniższych funkcji i punktów początkowych metoda Newtona zawodzi. Wyjaśnij dlaczego. Następnie znajdź pierwiastki, modyfikując wywołanie funkcji `scipy.optimize.newton` lub używając innej metody.

a) $f(x) = x^3 - 5x$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = 2 - x^5$, $x_0 = 0.01$

d) $f(x) = x^4 - 4.29x^2 - 5.29$, $x_0 = 0.8$




```
Próba metody Newtona i bisection jako zapasowa:

(a)
Newton FAIL: Failed to converge after 50 iterations, value is 1.0.
Newton OK z nowym punktem: znaleziono pierwiastek x = 2.23606797749979

(b)
Newton FAIL: Derivative was zero. Failed to converge after 1 iterations, value
is 1.0.
Newton OK z nowym punktem: znaleziono pierwiastek x = 1.532088886237956

(c)
Newton FAIL: Failed to converge after 50 iterations, value is 713.6238464957056.
Newton OK z nowym punktem: znaleziono pierwiastek x = 1.148698354997035

(d)
Newton FAIL: Failed to converge after 50 iterations, value is 0.7876130494100906.
Newton OK z nowym punktem: znaleziono pierwiastek x = 2.3
```

Zadanie 2.

Dane jest równanie:

$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$

Każda z następujących funkcji definiuje równoważny schemat iteracyjny:

$\phi_1(x) = (x^2 + 2)/3$

$\phi_2(x) = \sqrt{3x - 2}$

$\phi_3(x) = 3 - 2/x$

$\phi_4(x) = (x^2 - 2)/(2x - 3)$

- Przeanalizuj zbieżność oraz rząd zbieżności schematów iteracyjnych odpowiadających funkcjom $\phi_i(x)$ dla pierwiastka $\alpha = 2$ badając wartość $|\phi_i{}'(2)|$.
- Potwierdź analizę teoretyczną implementując powyższe schematy iteracyjne i weryfikując ich zbieżność (lub brak). Każdy schemat iteracyjny wykonaj przez 10 iteracji. Wyznacz eksprymentalnie rząd zbieżności każdej metody iteracyjnej ze wzoru $ r = $ gdzie błąd bezwzględny ε_k definiujemy jako $\varepsilon_k = |x_k - x_*|$, x_k jest przybliżeniem pierwiastka w k-tej iteracji, a x_* dokładnym położeniem pierwiastka równania.
- Na wspólnym rysynku przedstaw wykresy błędu względnego każdej metody w zależności od numeru iteracji. Użyj skali logarytmicznej na osi y (pomocna będzie funkcja `semilogy`).
- Stwórz drugi rysunek, przedstawiający wykresy błędu względnego tylko dla metod zbieżnych.

```
Fixed point iteration results:
```

	φ_1(x)	φ_2(x)	φ_3(x)	φ_4(x)
Iteration 0	3.000000e+00	3.000000	3.000000	3.000000
Iteration 1	3.666667e+00	2.645751	2.333333	2.333333
Iteration 2	5.148148e+00	2.436648	2.142857	2.066667
Iteration 3	9.501143e+00	2.304332	2.066667	2.003922
Iteration 4	3.075724e+01	2.216528	2.032258	2.000015
Iteration 5	3.160026e+02	2.156289	2.015873	2.000000
Iteration 6	3.328655e+04	2.113970	2.007874	2.000000
Iteration 7	3.693315e+08	2.083725	2.003922	2.000000
Iteration 8	4.546858e+16	2.061838	2.001957	2.000000
Iteration 9	6.891304e+32	2.045853	2.000978	2.000000
Iteration 10	1.583003e+65	2.034099	2.000489	2.000000

```
Experimental convergence orders:
```

	φ_1(x)	φ_2(x)	φ_3(x)	φ_4(x)
Iteration 1	1.2450	0.8947	0.7712	1.4650
Iteration 2	1.3652	0.9226	0.8995	1.7604
Iteration 3	1.5478	0.9429	0.9525	1.9586
Iteration 4	1.7789	0.9577	0.9769	1.9986
Iteration 5	1.9508	0.9686	0.9886	NaN
Iteration 6	1.9973	0.9766	0.9943	NaN
Iteration 7	2.0000	0.9826	0.9972	NaN
Iteration 8	2.0000	0.9870	0.9986	NaN
Iteration 9	2.0000	0.9903	0.9993	NaN

Pochodne funkcji definiujących schematy iteracyjne:

$|{\phi_1}'(2)| = 4/3$

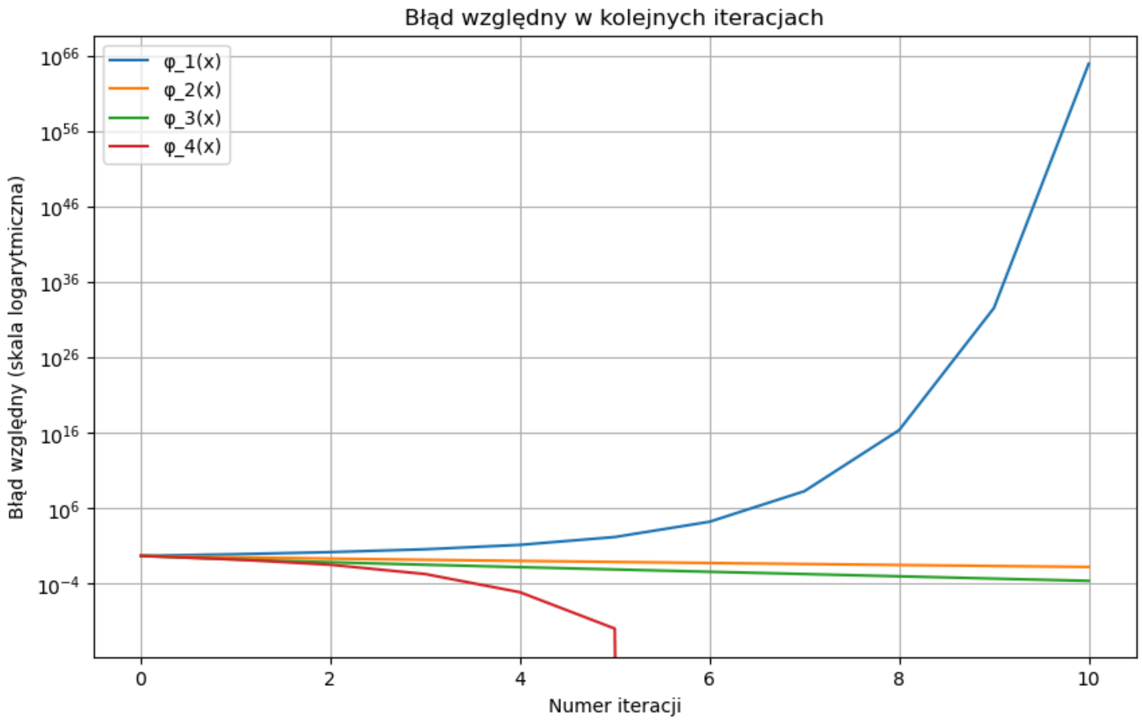
$|{\phi_2}'(2)| = 3/5$

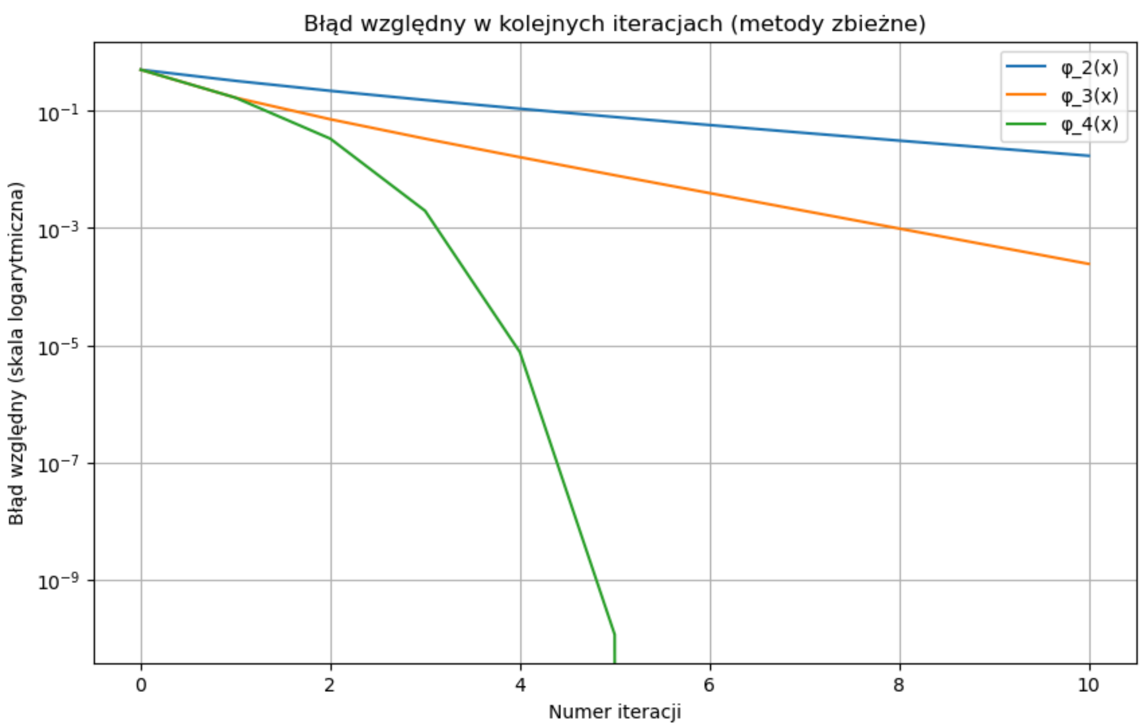
$|{\phi_3}'(2)| = 1/2$

$|{\phi_4}'(2)| = 0$

Powyższe pochodne są mniejsze od 1, oprócz pochodnej ϕ_1, dlatego pozostałe schematy powinny być zbieżne. I tak jest w istocie. Schemat iteracyjny ϕ_1 jest rozbieżny, natomiast pozostałe są zbieżne do wartości $x = 2$.

Jeśli chodzi o rząd zbieżności, metoda 4. ma rząd zbieżności równy 2, czyli jest kwadratowa. Metody 2. i 3. mają empiryczny rząd zbieżności równy 1. Metoda 1 jest rozbieżna.





Powyżej przedstawione są wykresy błędów względnych w kolejnych krokach iteracyjnych.

Wyraźnie widać, że metoda 4. ma rząd zbieżności większy od liniowego.

Zadanie 3.

Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla każdego z następujących równań nieliniowych:

a) $x^3 - 2x - 5 = 0$

b) $e^{-x} = x$

c) $x \sin(x) = 1.$

```
Rozwiązania 4bit:
```

	x0 4bit	Liczba iteracji
f1	2.094568	2
f2	0.567143	2
f3	1.114157	2

```
Rozwiązania 24bit:
```

	x0 24bit	Liczba iteracji
f1	2.094551	2
f2	0.567143	2
f3	1.114157	1

```
Rozwiązania 53bit:
```

	x0 53bit	Liczba iteracji
f1	2.094551	3
f2	0.567143	3
f3	1.114157	1000

Dla wszystkich schematów iteracyjnych poza f3 dla 53 bitów, bardzo szybko zostały osiągnięte docelowe dokładności, dla f3 53 bity nie została osiągnięta docelowa dokładność w 1000 iteracjach, czyli zapewne nie zostanie ona osiągnięta.

Zadanie 4.

Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla następującego układu równań nieliniowych:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$x_1^2 - x_2 = 0$$

Korzystając z faktu, że dokładne rozwiązanie powyższego układu równań to:

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

oblicz błąd względny rozwiązania znalezionego metodą Newtona

```
Wyniki dla rozwiązania z dodatnim x1:
Wartość teoretyczna: x1 = 0.78615138, x2 = 0.61803399
Wartość numeryczna (metoda Newtona): x1 = 0.78615138, x2 = 0.61803399
Błąd względny składowej x1: 0.00000000e+00
Błąd względny składowej x2: 1.79637859e-16

Wyniki dla rozwiązania z ujemnym x1:
Wartość teoretyczna: x1 = -0.78615138, x2 = 0.61803399
Wartość numeryczna (metoda Newtona): x1 = -0.78615138, x2 = 0.61803399
Błąd względny składowej x1: 0.00000000e+00
Błąd względny składowej x2: 1.79637859e-16
```

W obu przypadkach obliczone wartości są prawie identyczne - różnica występuje dopiero na szesnastym miejscu po przecinku. W przypadku pierwiastka x_1 algorytm znalazł pierwiastek dodatni, ponieważ obie podane wartości są prawidłowymi rozwiązaniami.