

Równanie transportu ciepła

Dawid Żak

January 2025

1 Obliczenia z równania transportu ciepła

1.1 Treść zadania

$$-k(x)u''(x) = 0 \quad (1)$$

$$u(2) = 3 \quad (2)$$

$$u'(0) + u(0) = 20 \quad (3)$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1, 2) \end{cases} \quad (4)$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0, 2] \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$$

1.2 Rozwiązanie

$$\int_0^2 -ku''(x)v(x) dx = 0$$

całka przez części

$$\int_0^2 ku'v' dx - k(2)u'(2)v(2) + k(0)u'(0)v(0) = 0$$

wstawienie wartości w $k(x)$ z (4)

$$\int_0^2 ku'v' dx - 2u'(2)v(2) + u'(0)v(0) = 0 \quad (5)$$

przekształcenie z (3)

$$u'(0) = 20 - u(0)$$

wstawiamy do (5)

$$\int_0^2 ku'v' dx - 2u'(2)v(2) + (20 - u(0))v(0) = 0$$

$$\int_0^2 ku'v' dx - 2u'(2)v(2) - u(0)v(0) = -20v(0) \quad (6)$$

teraz wyznaczenie funkcji pomocniczej

$$u = w + \bar{u}$$

$$\bar{u} = \frac{3}{2}x$$

$$u = w + \frac{3}{2}x \quad (7)$$

$$u' = w' + \frac{3}{2} \quad (8)$$

wstawiamy do równania (6)

$$\int_0^2 k(w' + \frac{3}{2})v' dx - 2(w'(2) + \frac{3}{2})v(2) - (w(0) + \frac{3}{2} * 0)v(0) = -20v(0)$$

$$\int_0^2 kw'v' dx + \frac{3}{2} \int_0^2 kv' dx - 2w'(2)v(2) - 3v(2) - w(0)v(0) = -20v(0)$$

$$\int_0^2 kw'v' dx + \frac{3}{2}v|_0^1 + 3v|_1^2 - 2w'(2)v(2) - 3v(2) - w(0)v(0) = -20v(0)$$

$$\int_0^2 kw'v' dx + \frac{3}{2}v(1) - \frac{3}{2}v(0) + 3v(2) - 3v(1) - 2w'(2)v(2) - 3v(2) - w(0)v(0) = -20v(0)$$

$$\int_0^2 kw'v' dx - 2w'(2)v(2) - w(0)v(0) = -\frac{37}{2}v(0) + \frac{3}{2}v(1)$$

$$B(w, v) = \int_0^2 kw'v' dx - 2w'(2)v(2) - w(0)v(0) \quad (9)$$

$$L(v) = -\frac{37}{2}v(0) + \frac{3}{2}v(1) \quad (10)$$