

일반상대론(General Theory of Relativity)

원은일

v20151210

일러두기

이 노트는 2009년부터 제가 우주배경복사 실험을 하면서 평소 궁금했던 것들을 정리한 자료입니다. 일반상대론을 대학원 이후 처음 접하면서 상대론 개념들부터 수식의 복잡함, 텐서와 휘어진 공간에서의 기하구조 기술 등 쉽지 않는 (적어도 저에게는) 내용들을 정리하였고 앞으로도 꾸준히 추가 수정해야 하는 자료입니다. 2015년 2학기 처음으로 이를 바탕으로 강의를 진행하였고 혹시 이 노트를 읽을 여러분의 많은 질문, 수정 사항, 요구 사항들을 기탄없이 제시해 주시면 좋겠습니다. 2015년도 2학기 수업을 통하여 이미 많은 feedback을 준 김유래, 김연준, 정유현, 정호용, 이보현, 이경민 (고려대), 김세진, 김준우, 송원익, 심명보 (경희대 학점교류) 학생들에게 감사합니다.

이 노트의 구성은 다음과 같습니다. 초반에는 비상대론적인 방정식을 이용한 우주론에 대하여 간단하게 논의합니다. 두번째 부분은 텐서 연산에 관한 내용입니다. 이 강의에서는 일반 상대론을 자세히 다루지는 않고 상대론적 우주론 논의를 위한 최소 내용만을 다루고 이에 따라 필요한 연산 법칙을 소개합니다. 전통적 일반상대론 강의에서는 텐서연산과 장방정식을 매우 자세하게 다루고 있지만 본 강의에서는 주 목적이 우주론 이해에 있기 때문에 텐서연산을 최소화하고 우주론 이야기를 되도록 많이 하고자 합니다. 그 후에는 상대론적 우주론 및 인플레이션 우주론에 대한 기초 수식들을 설명합니다 (2015년 12월에는 여기까지).

궁극적으로는 우주배경복사의 분극과 인플레이션, 그리고 *B-mode*에 대하여 설명할 예정입니다.

차례

제 1 장 소개	1
제 1 절 우리 우주	1
제 2 절 플랑크 길이 및 플랑크 단위 (Planck Length and Units)	2
제 2 장 뉴튼 중력 및 특수 상대론	5
제 1 절 중력 (Gravity)	5
제 2 절 등가원리 (Principle of Equivalence)	6
제 3 절 특수상대성이론 (Special Relativity)	9
제 3 장 Newtonian 우주론	17
제 1 절 우주의 팽창	17
1.1 Doppler 효과: 비상대론, 특수상대론, Cosmological red-shift	19
1.2 Metric	23
1.3 에너지 보존과 우주의 팽창 또는 수축	26
1.4 우주의 온도에 대한 이야기	41
1.5 암흑물질 (Dark Matter)	43
1.6 암흑에너지 (Dark Energy)	44
1.7 우주상수와 우주의 나이	46
1.8 Hubble Diagram - 복사도와 적색편이의 관계	48
1.9 에너지 밀도와 압력	50
제 2 절 우주의 기하학적 구조	54
2.1 N-Sphere	55
2.2 3-Sphere	58
제 3 절 표준 우주론의 문제점	60
3.1 Horizon 문제	60
3.2 편평도 문제(Flatness Problem)	61
제 4 장 일반좌표계 (Generalized Coordinates)	65
제 1 절 좌표계	65
1.1 일반적인 metric tensor	66
1.2 Metric tensor 변환	67
제 2 절 일반 좌표계에서 미분	71

2.1	벡터의 covariant derivatives	71
2.2	Connection Coefficients	74
2.3	Parallel transport	75
2.4	Geodesics	77
2.5	Geodesics 와 Lagrangian	79
제 5 장	곡률(Curvature) 과 Einstein 방정식	89
제 1 절	곡률(Curvature)	89
제 2 절	Einstein's Field Equations	92
2.1	Schwarzschild Metric 유도	94
2.2	Schwarzschild 블랙홀	97
제 6 장	상대론적 우주론	101
제 1 절	FRW metric과 Einstein 장 방정식	101
1.1	Friedmann 방정식	102
1.2	인플레이션 우주론(Inflation Cosmology)	104
부록 A	Mathematica 활용 Tenor 계산	109
제 1 절	Schwarzschild Metric	109

제 1 장 소개

제 1 절 우리 우주

지구는 우리 인간에 비해서 매우 커서 구형임을 알아내는 시간도 많이 걸렸습니다. 여러 측정에 의하면 반경은 약 $6,400 \text{ km} = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ 로 알려져 있습니다. 이는 양성자의 크기인 10^{-15} m 에 비해서 10^{21} 배나 큰 셈입니다. 질량 또한 약 $6 \times 10^{24} \text{ kg}$ 으로 알려졌습니다. 우리 지구가 돌고 있는 태양은 지구로부터 약 $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ 떨어져 있습니다 (이 거리는 천문학을 하는 사람들이 astronomical unit으로 1 AU으로 정의해 놓은 거리가 됩니다). 따라서 태양에서의 빛이 지구에까지 도달하는데 걸리는 시간은 $1.5 \times 10^{11} \text{ m} / (3 \times 10^8 \text{ m/s})$ 으로 약 500 초 또는 8분가량 걸리는 셈입니다. 태양의 질량은 $2 \times 10^{30} \text{ kg}$, 반경은 $7 \times 10^8 \text{ m}$ 로 알려져 있습니다. 이러한 태양을 중심으로 지구를 포함한 행성들이 타원 궤도를 돌고 있습니다. 전체 태양계의 크기는 약 $2 \times 10^{16} \text{ m}$ 로 알려져 있습니다. 이렇게 큰 태양계는 우리 은하에 속해 있습니다. 우리 은하는 태양과 같은 별들이 약 10^{11} 개 정도 모여있는 은하로서 중심에 덩어리가 있고 납작한 파전 모양을 가지고 있습니다. 전체 지름은 자그마치 10^{21} m 로 관측되고 있고 태양계는 우리 은하의 중심으로부터 약 $2.7 \times 10^{20} \text{ m}$ 떨어져 있습니다. 이러한 은하계는 서로 모여서 소위 local group 을 이루고 은하들간의 평균 거리는 대략 $3 \times 10^{22} \text{ m}$ 정도로 관측됩니다.

좀더 나아가 우주를 10^{24} m (또는 100 Mpc 정도의 크기)로 보면 ¹ 소위 말하는 large-scale 구조들이 나타나게 됩니다. 어떤 지점에서는 은하들이 덩어리를 이루고 있는 경우도 있지만 결국에는 우주는 이러한 크기에서 보면 균일하면서도 등방적인 것으로 관측됩니다. 우리가 소위 우주론이라고 할 때는 이렇게 큰 구조가 어떻게 만들어졌는가, 즉 어떠한 물리학적 내용들이 이를 만들었는가를 이야기 합니다. 이보다 더 작은 규모에서 일어나는 초신성 폭발 등은 모두 천문학 또는 천체물리학의 범위로 보면 되겠습니다. 즉 우주론은 우리 우주는 균일하고 등방적이고 따라서 어느 한점이 선별적으로 특수하지 않고 모두 동등하다는 원칙으로부터 출발합니다. 이를 cosmological principle 이라고도 부릅니다.

¹ 여기서 pc 은 밀변이 1 AU (Astronomical Unit: $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$)이고 꼭지점의 각도가 $1''$ 인 직각삼각형의 높이에 해당되는 길이로 3.26 light year 또는 $3 \times 10^{16} \text{ m}$ 의 길이에 해당됩니다. 즉, $1\text{pc} = \frac{1 \text{ AU}}{1'' \text{ in radian}} = \frac{1.5 \times 10^{11} \text{ m}}{\frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180}} \approx 3 \times 10^{16} \text{ m}$.

제 2 절 플랑크 길이 및 플랑크 단위 (Planck Length and Units)

물리학을 공부하며 수식을 전개하는 과정에서 가장 신경써야 할 내용 중 하나는 단위입니다. 일반 물리학에서 배운 것처럼 단위는 정확하게 나타내야 하고 특히 표준단위 (SI unit)을 쓰는 것이 원칙이라고 배웠을 것입니다. 하지만 전자기학, 양자역학을 넘어서 양자장론 또는 특수 상대성 이론을 배우게 되면 빛의 속력 c , 플랑크 상수를 2π 로 나눈 값 (reduced Planck constant) \hbar 등을 단위 없이 “1”로 놓고 수식을 전개하는 경우를 보았을지도 모르겠습니다. 이러한 방법은 수식 계산에는 매우 편하지만 나중에 결과의 물리적 내용을 파악할 경우에 익숙하지 않으면 많은 혼란을 일으키는 것 또한 사실입니다. 그래서 저는 배우는 학생 입장이라면 별로 권장하고 싶지 않지만 거의 모든 연구 논문과 교과서들이 이러한 방식을 택하고 있기 때문에 이야기를 안할 수가 없습니다. 이번 장에서는 우주론 또는 일반 상대론에서 사용하는 플랑크 단위에 대해서 이야기해 보겠습니다.

우선 플랑크 길이에 대하여 설명합니다. 이제 어떠한 양자역학적 대상이 있어서 불확정성 원리를 적용해야 한다고 가정합니다. 즉 에너지의 불확정도(ΔE)와 시간의 불확정도(Δt)의 곱은

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.1)$$

인 상황으로부터 출발해 봅니다. 우리가 다루는 대상이 공간적 길이가 L 인 곳에서 빛의 속도로 움직인다면 시간의 불확정도는 $\Delta t = L/c$ 로 쓸 수 있고 또한 에너지의 불확정도는 대상의 정지질량의 크기와 같다면 위의 수식은

$$m \sim \frac{\hbar}{cL} \quad (1.2)$$

로 근사할 수 있습니다 (2는 생략). 이제 이 대상의 반경이 R 이라고 가정하고 정지질량에 너지와 이 대상 스스로의 중력 퍼텐셜 에너지가 같다라는 수식을 써 보겠습니다. 반경이 R 이고 질량이 m 인 구 자체의 중력 퍼텐셜 에너지는 $(3/5)Gm^2/R$ 이므로 ²

$$mc^2 = \frac{Gm^2}{R} \quad (1.4)$$

으로 근사할 수 있습니다 (마찬가지로 3/5 생략). 이제 처음에 소개했던 길이 L 이 반경

²반경이 R , 질량이 $m = (4/3)\pi R^3\rho$ (ρ 는 질량밀도) 인 구의 자체 중력 퍼텐셜 에너지 U 는

$$U = G \int_0^R \frac{(\frac{4}{3}\pi\rho r^3)(4\pi r^2\rho dr)}{r} = \frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5 = \frac{3}{5}G \frac{m^2}{R} \quad (1.3)$$

이 됩니다.

R 과 같은 된다면 ($L = R \equiv l_P$) m 을 소거시킬 수 있어서

$$\frac{\hbar}{l_P c} = \frac{c^2 l_P}{G} \quad (1.5)$$

가 되어

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \quad (1.6)$$

으로 유도할 수 있습니다. 이 플랑크 길이 l_P 의 물리적 의미는 무엇일까요? 위의 몇 가지 가정에서 알 수 있듯이 양자역학적 에너지가 중력 에너지와 그 크기가 비슷해 지는 물리학적 상황에서의 길이에 대한 스케일이라고 이해하면 될 것입니다. 그러면 그 길이는 우리가 아는 미터 단위로 얼마나 되겠습니까? 매우 작은 단위가 나올 것으로 예상하고 다음과 같이 계산해 보겠습니다. 표준 단위를 사용해도 되지만 다음과 같이 입자물리학에서 많이 다루는 단위를 쓰면 ($\hbar c = 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$, $G = 6.7 \times 10^{-39} \hbar c (\text{GeV}/c^2)^{-2}$)

$$\begin{aligned} l_P &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \\ &\approx \sqrt{\frac{\hbar \cdot 6.7 \times 10^{-39} \hbar c (\text{GeV}/c^2)^{-2}}{c^3}} \\ &= \sqrt{67} \times 10^{-20} \times 0.2 \times 10^{-15} \text{ m} \\ &\approx 10^{-35} \text{ m} \end{aligned} \quad (1.7)$$

로 계산됩니다. 아마 여러분이 지금까지 접해본 길이 중에서 가장 작은 길이가 될 것입니다.

우리가 이야기하는 플랑크 단위는 $\hbar = G = 1/(4\pi\epsilon_0) = k_B = 1$ 로 나타내는 단위를 말합니다. 많은 연구 논문 및 교과서에서 이러한 단위를 사용하고 있고 우리도 앞으로 전개될 논의에서 플랑크 단위를 일부 사용하겠습니다. 다만 여러분들의 이해를 돋기 위해 사용은 최소화 하도록 노력하겠습니다.

제 2 장 뉴튼 중력 및 특수 상대론

제 1 절 중력 (Gravity)

우리는 전자기학의 Maxwell 방정식으로부터 아래의 두 수식은

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

이고, 그 수학적 구조가 동등하다고 알고 있습니다. 단 여기서 \mathbf{E} 는 전기장, q 는 전기전하, \mathbf{r} 은 전하의 위치 벡터, $\hat{\mathbf{r}}$ 는 단위벡터, ϵ_0 는 자유공간 유전율, ρ_q 는 전기전하밀도를 나타냅니다. Coulomb 힘과 만유인력은 수학적으로 동등하기 때문에 중력에서도 같은 이야기를 할 수 있어서, 즉, \mathbf{E}_g 를 중력장이라고 하면

$$\mathbf{E}_g = -G \frac{m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_g = -4\pi G \rho \quad (2.2)$$

이 성립합니다. 여기서 G 는 만유인력상수, ρ 는 질량밀도입니다. 또한 위 수식에서 음수는 중력의 경우에는 항상 끌어당기는 힘만 존재함을 나타냅니다. 또한 전기장과 전기퍼센셜의 관계로부터 중력퍼텐셜을 ϕ 라 할 때 $\mathbf{E}_g = -\nabla\phi$ 이므로

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (2.3)$$

으로 표현됩니다. 위의 수식은 Poisson 방정식, 알려져 있고 명백하게 시간 미분항이 없어서 Lorentz-invariant하지 않음을 알 수 있습니다. 또한 중력의 전파는 순간적이라는 것이 수식에 내포되어 있습니다. 전자기학이 특수 상대성이론과 문제 없다는 것을 알고 있기 때문에¹ 중력이 특수상대성이론을 포함하려면 **Newton의 중력 법칙은 수정 되어야 한다**는 것을 쉽게 알 수 있겠습니다.

질량이 m_I 인 물체에 힘 \mathbf{F} 를 주면 Newton의 제2법칙에 의해 물체는 가속도 \mathbf{a} 를 얻게 되고

¹물론 $\nabla^2\phi_q = -\rho/\epsilon_0$ 만 보면 같은 문제가 있으나, 전자기학의 경우 Maxwell 방정식 4개 전체를 보면 Lorentz 변환에 대하여 invariant 하다는 의미임.

$$\mathbf{F} = m_I \mathbf{a} \quad (2.4)$$

와 같은 수식이 성립합니다. 여기에서의 질량 m_I 는 관성질량이라 부르고 외부 힘에 대하여 물체가 가속 받는 정도를 조절하는 상수로 생각할 수 있습니다. 즉, 관성질량이 커지면 커질수록 동일한 힘을 주어도 가속이 작게 되고, 반대로 가벼우면 가속이 더 쉽게 됩니다. 또한 수식 (2.4)이 사실상 관성질량을 정의하는 수식이라고 생각해도 무방하겠습니까. 그런데 이 물체가 지구 중력장 안에 있어서 (중력상수:g) 중력을 받을 경우에는

$$\mathbf{F} = m_G \mathbf{g} \quad (2.5)$$

이 성립합니다. 이 경우 m_G 는 중력에 관계되는 중력질량으로 잘 생각해 보면 위의 관성질량과 꼭 같을 필요는 없고 따라서 $m_I = m_G$ 라는 관계는 Newton 이론 범위에서는 우연의 일치로 생각할 수 있습니다. 역사적으로 이에 대한 많은 실험이 있어 왔고 현재에는 $m_I/m_G = 1$ 이란 등가원리가 $< 10^{-12}$ 의 정확도로 알려져 있습니다 [1].

제 2 절 등가원리 (Principle of Equivalence)

지구 표면에서 일어나는 물리적 현상과 지구에서 1 g로 가속하는 로케트 내부에서의 물리 현상은 구별할 수 없고 이를 등가원리라고 합니다. 이 등가원리를 좀더 이해하기 위하여 예를 한가지 들어 보겠습니다. 그럼 (2.1)과 같이 지구 중력장에서 자유낙하를 하고 있는 실험실에서 빛이 직진하는 경우와 이를 지표면에서 보고 있는 관찰자가 있는 경우를 생각해 보겠습니다. 실험실 내부는 국소적으로 관성 기준틀(locally inertial frame)이고 등가원리에 의해 중력은 사라지게됩니다. 따라서 빛은 직선 운동을 하여 실험실 중심에서 출발했다면 실험실의 반대쪽 중심에 도착합니다. 이 사실은 지구에서 관측하는 사람에게 동일하게 관측되어야 하고 따라서 **지구에서 관측하는 사람에게는 빛이 아래쪽으로 휘어져 진행하는 것으로 관측됩니다.** 빛의 속력을 c 라고 할 경우 빛이 실험실의 양 끝을 이동하는데 걸리는 시간 t 는

$$t = \frac{\ell}{c} \quad (2.6)$$

이고 따라서 지구상에서 보았을 경우 휘어지게 되는 빛의 높이 h 는

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{g\ell^2}{2c^2} \quad (2.7)$$

이 되겠습니다. 즉 등가원리에 의해, 또는 중력에 의해 휘어지게 되는 빛의 높이를 간단하지만 정량적으로 계산한 것입니다.

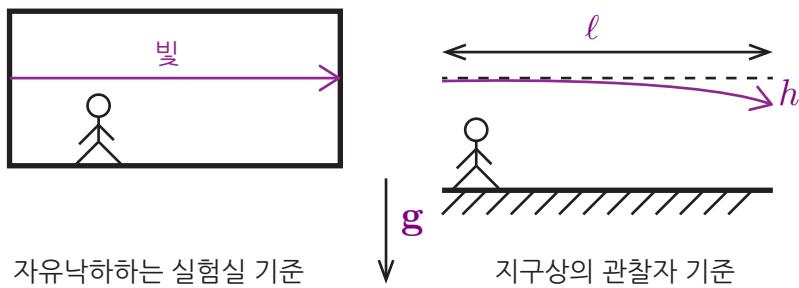


그림 2.1: 자유낙하하는 실험실에서 빛을 오른쪽으로 보내는 경우에 대한 설정임. 왼쪽은 실험실에서 관찰한 상황이고 오른쪽은 지구상에서 관찰한 상황에 해당됩니다.

2.1 Example. 빛이 1 km를 이동할 경우 휘어지는 높이 h 를 지구와 중성자별의 경우에 대하여 계산하여 보겠습니다.

지구의 경우 중력가속도 $g_E = 9.8 \text{ m/s}^2$ 를 이용하면 높이 h_E 는

$$h_E = \frac{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 10^6 \text{ m}^2}{2 \times 9 \times 10^{16} (\text{m/s})^2} = \frac{9.8}{2 \cdot 9} \times 10^{-10} \text{ m} \simeq 0.06 \text{ nm} \quad (2.8)$$

입니다.² 중성자별의 경우 높이 h_N 을 계산하기 위해서 지구의 질량(M_E)과 반경(R_E), 태양의 질량(M_S)과 반경(R_S), 중성자별의 질량(M_N)과 반경을 사용해 보겠습니다. 위의 변수들에 대한 값들은 잘 알려져 있어서

$$\begin{aligned} M_E &\simeq 6 \times 10^{24} \text{ kg} \\ M_S &\simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg} \\ M_N &\simeq (2 - 3)M_S \\ R_E &\simeq 6.4 \times 10^6 \text{ m} \\ R_S &\simeq 7 \times 10^8 \text{ m} \\ R_N &\simeq R_S/60,000 \end{aligned} \quad (2.9)$$

²여러분들은 이 효과를 실험실에서 측정할 수 있는 방법을 고안해 낼 수 있겠습니까?

입니다. 따라서

$$\begin{aligned}
 g_N &= \frac{GM_N}{R_N^2} = \frac{G \cdot (2-3)M_S \cdot (6 \times 10^4)^2}{R_S^2} \\
 &= \frac{G \cdot (2-3) \cdot 3 \times 10^5 M_E \cdot (6 \times 10^4)^2}{10^4 R_E^2} \\
 &= \frac{GM_E}{R_E^2} \cdot \frac{(2-3) \times 3 \times 36 \times 10^{13}}{10^4} \\
 &\simeq g_E \cdot 2 \times 10^{11}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

으로 근사할 수 있어서

$$h_N \simeq h_E \cdot 2 \times 10^{11} \simeq 10 \text{ m} \tag{2.11}$$

이 됩니다. 즉, 중성자별의 경우와 같이 중력장이 높은 공간을 통과하는 빛은 1 km 이 동시에 10 m 정도 휘어진다는 의미입니다. ■

이번에는 중력에 의하여 시간이 느려지는 효과에 대하여 생각해 보겠습니다. 그림 2.2과 같이 자유낙하하는 실험실을 생각하고 이번에는 실험실 천장에서 바닥 쪽으로 빛을 이동시킵니다. 시간 $t = 0$ 일 때 실험실이 자유낙하를 시작하고 동시에 빛이 천장에서 출발한다면 실험실에서 빛이 바닥까지 이동하는 시간은

$$t = \frac{h}{c} \tag{2.12}$$

이고 그 시간 동안 실험실은 자유낙하를 하여 속력 v

$$v = gt = \frac{gh}{c} \tag{2.13}$$

를 얻게 됩니다. 실험실에서는 중력을 느끼지 않으므로 (등가원리에 의해서) 진동수의 변화는 없지만 지구상에 있는 관찰자는 일반물리에서 나오는 도플러 효과를 느끼게 되어 새로운 진동수 ν_1 을 보게 됩니다. 이는 파동의 균원이 움직이는 경우이므로

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{c}{c-v} = \nu_0 \frac{1}{1-\frac{v}{c}} \simeq \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \tag{2.14}$$

이고, 따라서

$$\nu_1 \simeq \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) = \nu_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) \tag{2.15}$$

이 됩니다. 즉, **지표면에 있는 시계보다 높은 곳에 있는 시계가 $\Delta\phi/c^2$ 만큼 더 빨리 가는**

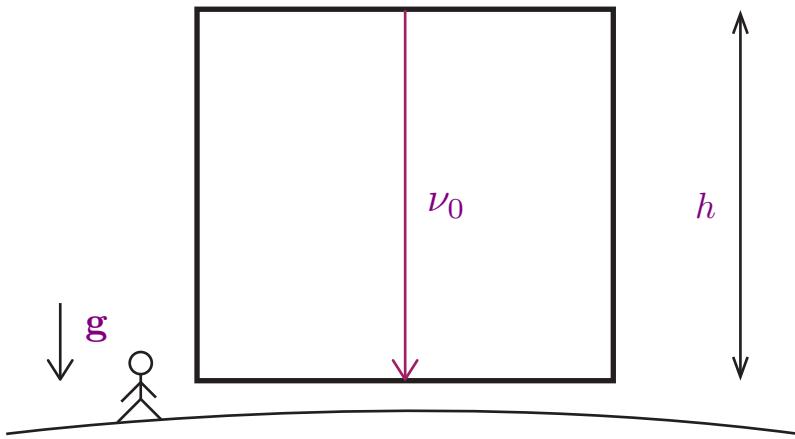


그림 2.2: 자유낙하하는 실험실에서 빛을 천장에서 바닥으로 보내는 경우를 나타냅니다. 실험실에서 보는 진동수는 ν_0 이지만 지구상에 있는 관찰자에게는 좀 더 높은 진동수 ν_1 을 보게 됩니다.

것으로 보이게 됩니다.³ 한가지 강조할 점은 위의 두 예제는 특수상대성이론과는 아무런 관계가 없고 단지 등가원리만으로 유추한 것이라는 점입니다 (문제 (1.1) 참고).

제 3 절 특수상대성이론 (Special Relativity)

특수상대성이론에 의하여 서로 다른 두 좌표계가 빛의 속도에 가까울 정도로 상대운동을 할 경우 좌표 변환은 ($x^{(\prime)}$ 으로만 상대운동을 한다고 가정)

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2.16}$$

이고 여기서 Lorentz 인자 γ 는

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.17}$$

³수식 (2.15)에 의하여 상대적으로 높은 곳, 즉 중력이 약한 곳일 수록 진동수가 상대적으로 작아지고 진동수가 작으려면 시간이 빨라져야 합니다. 따라서 높은 곳에서 (중력이 약한 곳에서) 시계가 더 빨리 갑니다. 물론 중력이 전혀 없는 곳에서 시간이 가장 빨리 갈 것입니다 ($1/\nu_0$).

으로 정의됩니다. 여러가지 다른 선택이 있을 수 있으나 우리는 $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ 라는 정의를 입니다. 따라서 Lorentz 좌표변환은

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 + \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

이고 이때 $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ 입니다. 식 (2.18)에 있는 위첨자 숫자는 지수가 아니라 4차원 시공간의 성분을 나타내고 ()은 변환된 새로운 좌표계를 의미합니다. 식 (2.18)를 좀더 간결하게 표현하면

$$x'^\alpha = \sum_{\beta=0}^{\beta=3} \Lambda^\alpha_\beta x^\beta \quad (2.19)$$

으로 나타낼 수 있고 이때 행렬 Λ^α_β 는

$$\Lambda^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

으로 정의됩니다. 여기서 인자 α 은 행렬 Λ^α_β 의 행, β 는 열을 나타냅니다. 만일 두번 나타나는 인자들은 항상 더한다는 규칙(Einstein's summation convention)을 적용하면 식 (2.18)은 좀더 간결하게

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta \quad (2.21)$$

표현됩니다. 한가지 주의할 점은 반복되는 인자는 하나는 위에, 나머지 하나는 아래에 나타나야 한다는 것입니다. 식 (2.18)의 역변환은 $\beta \rightarrow -\beta$ 로 바꾸어 주면 되므로

$$\begin{aligned} x^0 &= \gamma(x'^0 + \beta x'^1) \\ x^1 &= \gamma(x'^1 - \beta x'^0) \\ x^2 &= x'^2 \\ x^3 &= x'^3 \end{aligned} \quad (2.22)$$

입니다. 즉,

$$x^\alpha = \Lambda'^\alpha_\beta x'^\beta \quad (2.23)$$

이고 이때 Λ'^α_β 는

$$\Lambda'^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

입니다. Lorentz 변환을 한번하고 다시 되돌아오는 역변환을 하면 당연히 원래대로 와야 하기 때문에

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

이 성립해야 하고 증명도 할 수 있습니다. 위의 수식을 좀더 간결하게 표현하기 위하여 Kronecker delta를 정의하면 ($\alpha = \beta$ 일 경우 $\delta^\alpha_\beta = 1$, 그렇지 않은 경우는 $\delta^\alpha_\beta = 0$)

$$\Lambda'^\alpha_\gamma \Lambda^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta \quad (2.26)$$

으로 쓸 수 있습니다.

특수상대성이론에서 Lorentz 변환 행렬은 상수들만으로 이루어져 있음에 주목합니다. 또 한 임의의 Lorentz 변환에서 바뀌지 않는 양이 있고 이를 Lorentz scalar라고 부릅니다. 예를 들어 4차원 시공간에서의 거리 s 는

$$\begin{aligned} (s')^2 &= -(x'^0)^2 + (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\ &= -\gamma^2(x^0 + \beta x^1)^2 + \gamma^2(x^1 + \beta x^0)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\ &= -\gamma^2(1 - \beta^2)(x^0)^2 + \gamma^2(1 - \beta^2)(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\ &= -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\ &= s^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

으로 Lorentz 변환에 대하여 불변인 Lorentz scalar입니다. 위의 4차원 시공간에서의 거리에 대한 정의는 $-(시간\cdot c)^2 + (\text{공간})^2$ 의 형태이지만 물론 $(시간\cdot c)^2 - (\text{공간})^2$ 으로 정의해도 s^2 가 Lorentz 불변이라는 사실에는 변화가 없습니다. 따라서 어떻게 정의해도 상관이

없지만 여기서는 $-(시간 \cdot c)^2 + (\text{공간})^2$ 의 정의를 따릅니다. 그 이유는 우리가 핵심적으로 다룰 우주론에서 공간 부분에 scale factor가 들어오고 이를 다루는데 있어서 음수를 항상 달고 다니면 매우 귀찮기 때문입니다.

이제 4차원 시공간에서의 두 사건(event)간의 거리를 생각하면

$$\Delta s^2 = -(ct_2 - ct_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (2.28)$$

이고 두 사건이 미소거리(infinitesimal distance)만큼 떨어져 있다면

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.29)$$

이고 위의 미소거리도 역시 Lorentz scalar입니다. 좌표계를 잘 설정하면 $dx = dy = dz = 0$ 을 만족시킬수 있고 이 경우

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (2.30)$$

으로 시간 성분만 남게 됩니다. 이때 τ 를 고유시간(proper time)이라고 정의합니다. 수식 (2.30)은 고유시간을 정의하는 표현이라고 생각할 수도 있고 고유시간은 관찰하는 물체와 같이 운동하는 시계로 측정한 시간으로도 생각할 수 있습니다. 다시 x^0, x^1 등과 같은 표현을 이용하면

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &\equiv \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \end{aligned} \quad (2.31)$$

이고 여기서 $\eta_{\alpha\beta}$ 는

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

으로 표현됩니다. 여기에서도 마찬가지로 더해지는 인자들 α 와 β 이 한번은 위쪽, 한번은 아래쪽에 나타남을 기억합니다. 수식 (2.31)은 임의의 공간에서 두 점간의 거리에 대한 일반적인 형태의 꼴로 생각할수 있고 따라서 $\eta_{\alpha\beta}$ 는 4차원 시공간에 대한 metric (또는 metric tensor: tensor는 다음장에서 다룰 것임)이라고 부릅니다. 예를 들어 Euclidean 3차원 공간에서의 거리 $d\ell$ 은

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.33)$$

이므로 Euclidean 3차원 공간의 metric은

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

이다. ds 의 정의에 의해 3가지 다른 경우가 생기게 되어 다음과 같이 분류됩니다.

- $ds^2 < 0$: Timelike 구간으로 질량이 있는 입자가 만드는 두 사건에 대한 구간에 해당됩니다.
- $ds^2 = 0$: Null 구간으로 질량이 없는 광자가 만드는 두 사건에 대한 구간에 해당됩니다. 이 경우

$$\begin{aligned} ds^2 &= 0 = -(c dt)^2 + (d\mathbf{x})^2 \\ \therefore c dt &= \pm |d\mathbf{x}| \end{aligned} \quad (2.35)$$

으로 되어 그림 2.3에서와 같이 수직축이 (ct) , 수평축이 (x) 인 Minkowski 공간에서 기울기가 $\pm 45^\circ$ 인 두개의 직선으로 나타나게 됩니다.

- $ds^2 > 0$: Spacelike 구간으로 서로 인과관계가 없는⁴ (out of causal contact) 두 사건을 연결해 주게 됩니다.

Lorentz 변환에 따라 다음과 같이 변환하는

$$V'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta V^\beta \quad (2.36)$$

모든 벡터 \mathbf{V} 는 Lorentz four-vector로 정의합니다. 여러분들의 수리물리 수업에서 벡터를 정의할 경우에도 좌표변환 특성을 이용하여 정의했음에 유의하기 바랍니다. $\mathbf{X} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ 는 정의에 따라 Lorentz four-vector가 됩니다. 이제 다음과 같이 four-velocity를

$$\mathbf{U} = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(\tau + \delta\tau) - \mathbf{X}(\tau)}{\delta\tau} = \frac{d\mathbf{X}}{d\tau} \quad (2.37)$$

으로 정의합니다. \mathbf{X} 는 four-vector이고 τ 는 스칼라이기 때문에 \mathbf{U} 도 자동적으로 four-vector가 됩니다. 특수상대성이론의 시간지연효과에 의하여 $d\tau = dt/\gamma$ 이므로 four-velocity

⁴여기서 인과관계가 없다는 말은 두 사건이 서로 영향을 주지 못한다는 이야기입니다. 즉, 빛보다 빨리 움직이지 못하면 두 사건은 Minkowski 공간에서 절대로 만나지 못하게 되는 것입니다.

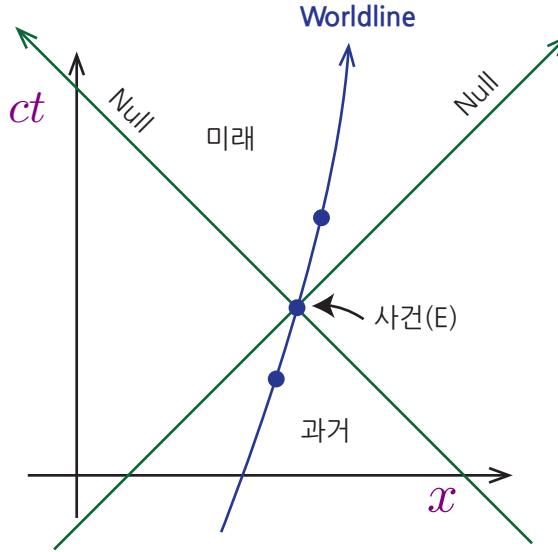


그림 2.3: 수직축이 (ct), 수평축이 (x)인 Minkowski 공간을 나타낸다. 질량이 유한한 입자가 Worldline을 따라 움직이고 매 순간마다 Null 직선 2개가 정의됩니다. 그 어느 순간에도 Null 직선 밖의 사건과는 인과관계가 있을 수 없습니다.

는

$$\mathbf{U} = \gamma \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}(ct, \mathbf{x}) = \gamma(c, \mathbf{v}) \quad (2.38)$$

와 같이 표현됩니다. 미소길이가 $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ 로 표현되었으므로 만일 \mathbf{V} 가 four-vector이면 그 크기는

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = |\mathbf{V}|^2 = \eta_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta \quad (2.39)$$

으로 나타낼 수 있습니다. 위의 수식은 four-vector의 크기를 정의한다고 생각할 수도 있습니다. Four-velocity의 크기는

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta &= -(U^0)^2 + (U^1)^2 + (U^2)^2 + (U^3)^2 \\ &= \gamma^2(c^2 - \mathbf{v}^2) \\ &= -c^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

으로 계산되어 \mathbf{U} 는 timelike 벡터라는 것을 알 수 있습니다. 좀 더 빠르게 계산하려면 Four-velocity의 크기는 Lorentz scalar로서 어느 좌표계에서나 같은 양이라는 사실을 이용하여 계산시 정지한 좌표계를 이용합니다. 즉, $\mathbf{v} = 0$, $\gamma = 1$ 으로부터 $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = -c^2$ 을

손쉽게 얻을 수 있습니다.

문제

1.1 지구표면에 있는 시계와 지구 표면으로부터 2000 km 만큼 높이에 있는 인공위성의 시계를 서로 맞출려고 합니다. 진동수가 1 THz인 빛을 사용한다면 중력에 의한 시간 차이는 어떻게 될까요? 어디에 있는 시계가 더 느리게 가겠습니까? 중성자별의 경우에는 시간 차이가 어떻게 될까요?

1.2 수식 (2.18)을 증명하기 바랍니다.

제 3 장 Newtonian 우주론

이번 장에서는 팽창하는 우주와 현대 우주론에 대한 이야기를 일반상대론 없이 논의하겠습니다. 특히 역사적으로 연구가 어떻게 진행되었는가 보다는 기본 아이디어를 소개하고 이를 위하여 Newtonian 역학만을 이용합니다.

제 1 절 우주의 팽창

일차원 공간을 생각해 보겠습니다. 그럼 (3.1)에서 보는 바와 같이 일차원 공간에 (또는 일차원 우주) 물체들이 같은 간격으로 떨어져 있다고 가정합니다. 이 물체들을 우주에 있는 은하로 생각해도 무방하겠습니다. 이 물체들을 나타내기 위하여 좌표 $x = 1, 2, 3, \dots$ 를 붙여 표시하고 $x = i$ 에서 $x = j$ 까지의 거리를 x 라고 하면

$$x = a(t)\Delta x \quad (3.1)$$

라 할 수 있습니다. 여기서 $a(t)$ 는 scale factor 라고 부르고 $\Delta x = |x_j - x_i|$ 로 이해합니다. 실제 meter와 같이 길이의 단위를 갖는 물리량은 x_j 이고 a 는 단위가 없다고 가정합니다.¹ 이러한 1차원 우주가 시간이 지남에 따라 팽창 또는 수축한다고 하면 이를 기술하기 위해서 $a = a(t)$ 으로 이 scale factor가 시간의 함수라고 나타내면 될 것입니다. 이러한 우주가 균일(homogeneous)하다는 의미는 물론 이러한 1차원 우주에 있는 은하, 별, 행성들이 골고루 분포하고 있다는 의미가 될 것입니다. 이제 이 1차원 우주에 있는 두 은하계를 생각하여 두 은하계의 거리를 $a(t)\Delta x = x$ 라고 표현하고 이를 시간에 대하여 한번 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \dot{a}\Delta x \quad (3.2)$$

이고 당연한 이야기지만 Δx 는 시간의 함수가 아닙니다. \dot{x} 는 두 은하계의 상대 속도가 되고 이를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{a} \Delta x = \frac{\dot{a}}{a}(a\Delta x) = \frac{\dot{a}}{a}x \quad (3.3)$$

¹ 대부분의 교과서 또는 논문에서 이러한 방법을 택하여 $a(t)$ 가 단위가 없게 되는데 일부에서는 반대로 Δx 가 단위가 없는 물리량으로 선택하기도 합니다.

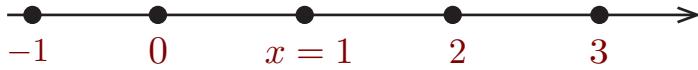


그림 3.1: 물체들이 같은 간격으로 떨어져 있는 1차원 우주 공간.

처럼 쓸 수 있어서 임의의 두 은하계의 상대 속도는 거리의 함수이고 비례상수 \dot{a}/a 는 우주에 있는 임의의 두 은하계 쌍에 대하여 같은 값을 갖는다는 결론을 내릴 수 있습니다. 이 비례상수는 역사적으로 Hubble constant라고 부릅니다. 물론 이는 시간의 함수일 가능성이 있기 때문에 잘못된 용어의 선택이고 올바른 선택은 Hubble parameter가 되어야 합니다.² 이를 $H(t)$ 로 표현하면

$$v = \frac{\dot{a}}{a}x \equiv H(t)x \quad (3.4)$$

으로 정리됩니다. 즉, 두 은하계의 상대 속도는 멀어지면 멀어질수록 더 커진다는 의미가 됩니다. 그러면 당장 특수상대성이론은 어떻게 되는 것입니까? 특수상대성이론에 의하면 빛보다 빨리 가는 물체는 없다고 했는데 어떻게 되겠습니까? 현대 우주론에 의하면 우주는 팽창하고 충분히 멀리 떨어져 있는 두 은하계의 상대 속도가 c 보다 커질 수 있음을 허용합니다. 다만 두 물체는 서로 절대로 볼 수 없습니다. 왜냐하면 한쪽에서 출발한 광자는 다른 은하계로 절대로 도달할 수 없기 때문에 아직도 특수상대성이론은 성립하게 되는 것입니다.

이제 이러한 생각을 3차원으로 확장해 보겠습니다. 우리가 살고 있는 우주는 관측에 의하면 특별한 방향성이 없는 것처럼 보입니다. 즉, 우리 우주는 등방적(isotropic)이면서 균일(homogeneous)하고 이에 대한 수학적 표현은 3차원 공간에 있는 두 은하계의 거리는 1차원의 경우와 마찬가지로

$$v = H(t) \cdot a(t) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = H(t) \cdot a(t) \Delta r = H(t)r \quad (3.5)$$

표현할 수 있다는 것입니다. 즉 scale factor $a(t)$ 는 공간의 함수가 아니라는 의미입니다. 우주가 어떻게 만들어졌고 시간에 따라 어떻게 진화했는지에 대한 학문이 우주론(cosmology)이고 우주론의 핵심 연구는 이 scale factor $a(t)$ 함수의 수학적 표현을 찾는 것이라고도 할 수 있겠습니다.

²현재의 Hubble parameter 값은 Planck 인공위성에 의해 측정된 값 $H_0 = 67.8 \pm 0.9 \text{ km Mpc}^{-1}\text{s}^{-1} \equiv 100 h_0 \text{ km Mpc}^{-1}\text{s}^{-1}$ 로 [2] 약 1%의 정확도로 측정되고 있습니다.

1.1 Example. Scale factor $a(t)$ 가 각각 $\frac{1}{4}t$, t^2 , $\ln t$ 인 경우 임의의 두 지점간 속도를 계산해 보겠습니다.

$$\begin{aligned} a &\propto \frac{1}{4}t : & v = \dot{a}\Delta x &\propto \frac{1}{4}\Delta x \\ a &\propto t^{3/2} : & v = (3/2)t\Delta x \\ a &\propto \ln t : & v &\propto \frac{1}{t}\Delta x \end{aligned} \tag{3.6}$$

처럼 계산되어 $a(t)$ 가 어떤 함수인가에 따라 우주의 크기는 커지더라도 그 팽창 속도는 달라지게 됩니다. 참고로 밀하면 현재 우리 우주는 팽창할 뿐만 아니라 그 팽창 속도가 커지는 가속팽창을 하는 것으로 알려져 있습니다. ■

다양한 관측 결과에 의하면 거의 모든 은하계들은 관찰자로부터 멀어지고 있습니다. 이를 정량화하는 방법으로 적색편이(z)를 다음과 같이 정의하여

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}} \tag{3.7}$$

방출되었을 때 빛과 관측되었을 때의 빛의 파장 차이의 정도를 나타냅니다. 근거리에 있는 은하가 속력 v 로 우리로부터 멀어지는 경우, 적색편이는 빛의 속력 c 대비 멀어지는 속력에 비례하여

$$z = \frac{v}{c} \tag{3.8}$$

로 나타나게 되고 이 경우 관찰된 적색편이와 관측되는 은하와의 거리의 관계를 그리면 선형적으로 증가하는 관계를 얻게 됩니다 (비상대론적인 경우에 한함). 즉 우주가 팽창하여 더 멀리 위치한 은하는 더 빨리 멀어지게 된다는 결론에 이르게 됩니다. 이 논의를 거꾸로 하면 우주 초기에는 은하들이 서로 매우 가깝게 위치하고 있어서 고운 고밀도의 상태임을 짐작할 수 있습니다. 우주 초기로 가면 그 밀도와 온도가 매우 높아서 우주의 진화는 일종의 “폭발”처럼 생각할 수 있고 이 논의가 빅뱅우주론(Big Bang cosmology)의 기본적인 아이디어입니다.

1.1 Doppler 효과: 비상대론, 특수상대론, Cosmological red-shift

이제 Doppler 효과에 대해서 간단하게 알아봅니다. 논의는 비상대론적인 경우를 먼저 논의하고 그 다음 상대론적 효과를 이야기해 보겠습니다. 비상대론적인 경우 그림 (3.2)를 생각합니다. 이 경우 파동은 음파로 생각할 수 있습니다. 우선 v 를 음원 또는 그림에서는

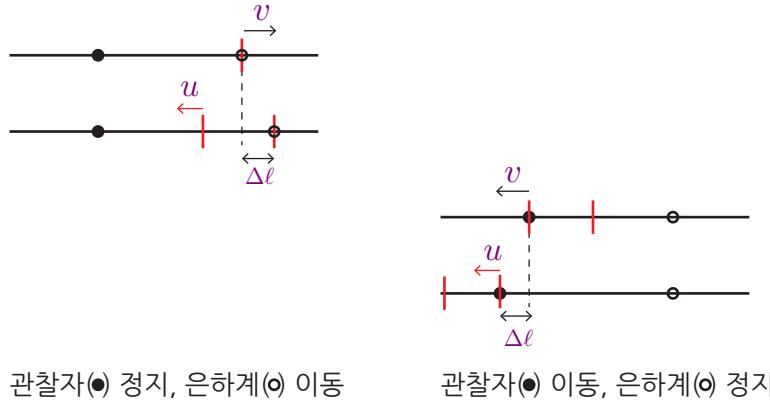


그림 3.2: 관찰자와 파동을 방출하는 선원 (그림에서는 은하계로 표시)이 서로 상대운동하는 경우 방출된 파동면을 나타낸 그림. 왼쪽은 관찰자가 정지한 경우 은하계에서 방출되는 두개의 연속적인 파동면과 은하계의 위치를 나타내었고 오른쪽 그림에서는 관찰자가 움직이는 경우 관찰자가 보게 되는 두개의 연속적인 파동면을 나타내고 있습니다. 여기서 파동은 비상대론적인 경우에는 음파, 특수상대론적인 경우에는 빛을 생각합니다.

은하계가 움직이는 속력, u 를 음파 자체의 속력, Δt_S 를 음원 또는 은하계에서의 음파의 주기, Δt_O 를 관찰자가 보는 음파의 주기로 표시합니다. 이러한 경우 우선 그림 (3.2)의 왼쪽 경우와 같이 음원 또는 은하계가 관찰자로부터 멀어지는 경우에 대하여 고려해 보겠습니다. 첫번째 파면이 나온 후 두번째 파면이 나올 때 까지 음원 또는 은하계는 움직이게 되고 그 거리는 $\Delta\ell = v\Delta t_S$ 로 나타낼 수 있습니다. 이제 관찰자가 보게 되는 주기는 $\Delta\ell/u$ 만큼 더 긴 주기를 보게 되어

$$\Delta t_O = \Delta t_S + \frac{\Delta\ell}{u} = \Delta t_S + \frac{v}{u}\Delta t_S \quad (3.9)$$

로 쓸 수 있습니다. 이를 정리하면

$$\frac{\Delta t_O}{\Delta t_S} = \left(1 + \frac{v}{u}\right) \quad (3.10)$$

으로 정리됩니다. 적색편이 z 는

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_O}{\lambda_S} = \frac{\Delta t_O}{\Delta t_S} = \left(1 + \frac{v}{u}\right) \quad (3.11)$$

이 되어

$$z = \frac{v}{u} \quad (\text{비상대론적, 음원 이동}) \quad (3.12)$$

으로 정리됩니다. 이제 반대로 음원은 정지하고 있고 관찰자가 멀어지는 경우인 그림 (3.2)의 오른쪽 경우를 생각해 봅니다. 이 경우에도 관찰자가 이동하기 때문에 두번째 파면과 만날때까지 이동한 추가적인 거리 $\Delta\ell = v\Delta t_0$ 가 있고 이 이동거리만큼 추가적인 시간이 소요되어

$$\Delta t_O = \Delta t_S + \frac{\Delta\ell}{u} = \Delta t_S + \frac{v}{u}\Delta t_O \quad (3.13)$$

으로 정리되어

$$\frac{\Delta t_O}{\Delta t_S} = \left(1 - \frac{v}{u}\right)^{-1} \quad (3.14)$$

으로 약간 다르게 전개됩니다. 적색편이도

$$z = \left(1 - \frac{v}{u}\right)^{-1} - 1 = \frac{v/u}{1-v/u} \quad (\text{비상대론적, 관찰자 이동}) \quad (3.15)$$

으로 정리됩니다. 위의 두 결과는 v/u 가 작은 경우 거의 유사한 결과를 보여주는데 그 차이를 보면

$$z_{\text{관찰자 이동}}^{\text{비상대론}} - z_{\text{음원 이동}}^{\text{비상대론}} = \frac{(v/u)^2}{1-v/u} \quad (3.16)$$

으로 일종의 이차항을 가지고 있는 셈입니다.

특수상대론적인 경우: 이제 특수상대론적인 경우를 고려하겠습니다. 이 경우 우선 특수상대성이론에서 제시하는 운동학적 효과 한가지를 먼저 이야기해야 합니다. 그것은 시간지연효과로서 움직이는 “시계”는 정지한 시계보다 더 느리고 그 느린 정도는 아래와 같이 정의되는

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma \geq 1 \quad (3.17)$$

γ 인자 만큼입니다. 이를 바탕으로 특수상대론적 Doppler 효과에 대하여 지금부터 이야기해 보겠습니다. 우선 은하계가 움직이는 경우 특수상대성이론에 의해 $\Delta t_S \rightarrow \gamma\Delta t_S$ 로 수정되어야 합니다. 따라서 $\Delta\ell = v\gamma\Delta t_S$ 이므로

$$\Delta t_O = \gamma\Delta t_S + \frac{\Delta\ell}{c} = \Delta t_S + \frac{v}{u}\gamma\Delta t_S \quad (3.18)$$

혹은

$$\frac{\Delta t_O}{\Delta t_S} = \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \right) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (3.19)$$

이 되어

$$z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1, \quad (\text{상대론적, 은하계 이동}) \quad (3.20)$$

으로 정리됩니다. 이제 은하계는 정지해 있고 관찰자가 움직이는 경우에는 어떻게 될까요? 특수상대론에 의하면 이 경우는 관찰자가 정지하고 은하계가 움직이는 경우와 동일한 결과가 나와야 한다고 이야기합니다. 과연 그럴까요? 이제 관찰자가 움직이고 은하계는 정지하여 있는 경우를 생각해 보겠습니다. 이 경우 관찰자가 첫번째와 두번째 파면을 보게 되는 시간 간격은 특수상대성이론에 따라 (우리가 보기에) $\Delta t' = \gamma \Delta t_O$ 이고 그 시간 동안 관찰자가 이동했으므로 $\Delta \ell = v \Delta t'$ 입니다. 따라서

$$\Delta t' = \Delta t_S + \frac{\Delta \ell}{c} = \Delta t_S + \frac{v}{c} \Delta t' \quad (3.21)$$

혹은

$$\Delta t' = \left(1 - \frac{v}{c} \right)^{-1} \Delta t_S \quad (3.22)$$

으로 정리됩니다. 즉

$$\Delta t_0 = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{v}{c} \right)^{-1} \Delta t_S = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \Delta t_S \quad (3.23)$$

가 되어 예측했던 바와 같이

$$z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1, \quad (\text{상대론적, 관찰자 이동}) \quad (3.24)$$

으로 정리됩니다. 따라서

$$z_{\text{관찰자 이동}}^{\text{상대론}} = z_{\text{은하계 이동}}^{\text{상대론}} = 0 \quad (3.25)$$

이 되는 셈입니다. 또한 비상대론적인 근사를 하면 $\beta \ll 1$ 인 경우

$$z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \approx \beta \quad (3.26)$$

가 되어 비상대론적 계산과 같게 됩니다.

Cosmological red-shift: 이제 우주가 팽창하는 경우에 대하여 일반적인 적색편이를 이야기 합니다. 우주가 팽창함에 따라 빛의 파장도 늘어나게 되고 늘어나는 정도는 scale factor $a(t)$ 에 비례합니다. 따라서 일반상대론효과까지 포함하는 적색편이는 오히려 간단하게 표시되어

$$1+z = \frac{a(t_O)}{a(t_S)} \quad (3.27)$$

으로 표현됩니다. 다만 일반상대론에 의한 구체적은 효과는 아직 논의를 하지 않은 함수 $a(t)$ 에 담겨 있는 셈입니다.

1.2 Metric

이제 우주를 이루는 시공간를 다루기 위한 최소한의 수학에 대하여 알아보겠습니다. 이는 시공간의 metric을 정의하는 것으로 시작됩니다. 일단 1차원에서의 논의로 다시 돌아가서 임의의 두 지점에 대한 거리의 표현식은

$$ds^2 = a^2(t) dx^2 \equiv g_{xx} dx^2 \quad (3.28)$$

으로 표현할 수 있는데 여기서 ds 를 거리의 제곱, 그리고 dx 를 두 미소단위좌표의 거리 제곱으로 표현하여 미적분학 기호를 일단 도입합니다. 여기서 $g_{xx} = a^2$ 을 공간의 metric이라 정의합니다. 물론 일반적으로 $a = a(t)$ 이므로 metric은 공간 뿐 아니라 시간의 함수가 될 수 있습니다. 물론 우리가 살고 있는 우주는 1차원 공간이 아니라 4차원 시-공간이므로 이보다는 좀 더 복잡해지겠습니다. 우주의 팽창 또는 수축을 포함하는 scale factor 가 포함되는 일반적인 metric의 수식은

$$-(cd\tau)^2 = (ds)^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.29)$$

가 되어 위에서 정의한 metric은

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

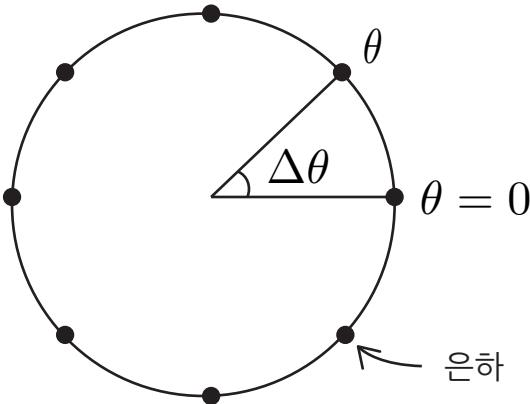


그림 3.3: 원호에 균일하게 분포하는 은하를 가지는 1차원 우주공간에 대한 그림.

으로 나타낼 수 있습니다. 이렇게 metric을 기술하는 것은, 즉 scale factor a 가 공간의 함수가 아닌 시간만의 함수로 기술한다는 것은 이미 설명한 바와 같이 우주가 균일하고 등방적이라는 가정을 하는 것입니다. 참고로 관측에 의하면 우리 우주가 큰 범위(large scale)에서는 균일하고 등방적인 것으로 알려져 있습니다.

이제 닫혀 있고(closed) 경계가 있는(bounded) 우주의 개념과 균일한 우주라는 개념에 대하여 이야기해 보겠습니다. 만일 우리의 우주가 정육면체와 같은 모양을 하고 있다고 하면 바로 우주가 균일하다는 가정에 위배되는 것입니다. 왜냐하면 균일성은 관찰자가 $x \rightarrow x + \Delta x$ 만큼 이동한 후 우주를 관찰해도 그 전과 구별할 수 없다는 개념인데 정육면체와 같은 우주는 그 조건을 만족시키지 못하기 때문입니다. 따라서 경계가 있는 우주와 균일한 우주는 서로 상충되는 개념일까요? 다음의 예제를 한번 살펴보겠습니다.

1.2 Example. 그림 (3.3)과 같이 원을 따라 살고 있는 가상의 생물체를 생각해 보겠습니다. 원 위의 각 점들은 가상의 은하들이고 이러한 경우 은하의 위치는 각 도 θ 로 기술 할 수 있습니다.

Scale factor $a(t)$ 를 이용하여 임의의 시간에서 우주의 크기를 원의 반경으로 설정하면 그 크기는 $a(t)$ 에 비례할 것입니다. 이러한 우주는 은하들이 원을 따라 일정하게 분포하고 있다면 등방적이고 균일하지만 경계가 있는 우주가 됩니다. 이러한 단순한 반경이 r 인 원형 우주의 metric은

$$ds^2 = a^2(t)r^2 d\theta^2 \quad (3.31)$$

으로 간단하게 표시할 수 있습니다. 물론 위의 표현은 공간의 metric이고 시-공간에 대한

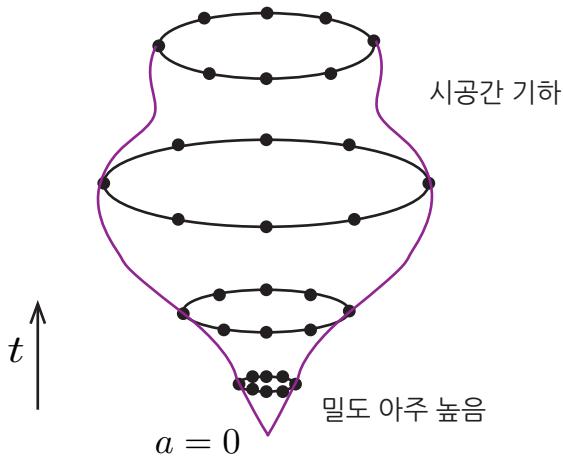


그림 3.4: 원호 우주가 시간에 따라 팽창 또는 수축을 하여 굽어진 시공간 기하를 만들어 내는 그림.

metric은

$$(cd\tau)^2 = -(ds)^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)r^2 d\theta^2 \quad (3.32)$$

으로 표시됩니다. 이러한 우주의 진화는 전적으로 $a(t)$ 의 함수 형태에 따라 전적으로 결정되고, 그림 (3.4)과 같이 우주가 진화하였다면 이 우주의 시-공간은 그러한 방식으로 휘어져 있는 것이고 이러한 경우 Hubble 법칙은

$$\begin{aligned} r &= a(t)r\Delta\theta \\ v &= \frac{\dot{a}}{a}a(t)r\Delta\theta = H(t)r \end{aligned} \quad (3.33)$$

로 여전히 성립하게 됩니다. 여기서 한가지 재미있는 질문을 해 보겠습니다. 이러한 우주에서 빅뱅은 어디서 시작되었을까요? 답은 모든 곳에서 시작되었다는 것입니다. 이번 예제를 들어 $a(t)$ 에 대한 boundary 조건을 생각해 보겠습니다. 우리는 현재 우리 우주에 살고 있으며 현재의 우주 특성을 잘 알고 있습니다. 그렇지만 우주가 어떻게 진화되어 왔는지는 잘 모르고 사실 그것을 연구하는 것이 우주론이 됩니다. 이러한 이유로 현재의 시간을 t_0 라고 표시하고, 현재 시간에서의 scale factor를 $a(t_0) = 1$ 으로 정합니다. 우리 우주는 팽창하는 것으로 알려져 있으므로 scale factor는 당연히 $\dot{a}(t) \leq 1$ 을 만족해야 할 뿐 아니라 초기 우주에는 $a(t)$ 는 매우 작은 값을 갖는다는 것도 추측할 수 있겠습니다.

■

마지막으로 한가지 설명을 해야 할 것은, 우주가 팽창한다는 것이 우리 몸을 이루는 분자들 간의 간격도 원칙적으로는 넓어진다는 것을 의미하는 것일까요? 우주가 팽창하려는

“힘”은 분자들 간의 전자기력에 비하여 매우 작기 때문에 그러한 일은 일어나지 않습니다. 우주의 팽창은 우주에 있는 은하와 같은 대단위 구조의 상대적인 위치가 서로 멀어 진다는 것을 의미하지만 분자들 간의 미세 거리가 바뀌는 것을 의미하지는 않습니다.

1.3 에너지 보존과 우주의 팽창 또는 수축

1.3.1 비상대론적인 물질로 이루어진 우주

우리 우주는 진화하면서 내부의 주된 에너지 형태는 바뀌어왔습니다. Big Bang 후 약 50,000 년까지는 빛 에너지가 주된 형태이었고 (radiation dominated), 그 후로부터 90 억년까지는 비상대론적 에너지 또는 물질이 주된 형태이었고 (matter dominated), 그로부터 현재까지는 소위 말하는 암흑에너지(dark energy)가 주된 에너지 성분으로 알려져 있습니다. 앞으로 물질로만 이루어진 우주의 팽창에 대하여 이야기를 시작하여 빛에너지만으로 이루어진 우주의 팽창을 이야기해 보겠습니다.

지구에서 로켓을 발사하여 우주까지 보내려면 로켓의 속도가 임의의 최소값보다는 커야 한다는 사실은 잘 알려져 있고 이 최소값은 탈출속도로 알려져 있습니다. 이제 이 논의로부터 시작하여 시간이 지남에 따라 우주가 영원히 팽창하는지 아니면 어느 순간 다시 수축을 하여 big crunch를 하는지를 Newtonian 우주론으로는 어떻게 생각할 수 있는지 알아보겠습니다. 무거운 질량 M 을 가진 물체가 관찰자가 있는 관성계에서 정지해 있고 다른 가벼운 질량 m 을 가진 입자가 초기속력 v_0 (임의의 시간에서의 속력은 v)를 가지고 질량 M 인 물체로부터 지름방향으로 (radially) 멀어진다고 하겠습니다. 이러한 역학계의 총 에너지는 운동에너지와 위치에너지의 합으로

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{constant} \end{aligned} \quad (3.34)$$

입니다. 물론 여기서 G 는 Newton의 만유인력상수, $r_0(r)$ 는 초기(임의) 시간에서 두 물체간의 거리가 됩니다. 질량 m 을 가진 물체가 다시 질량 M 을 가진 물체로 돌아오는진 아니면 영원히 멀어지는지는 초기속력 v_0 의 값에 따라 결정되어

$$\begin{aligned} E > 0 : & v \text{ is large enough} \\ E = 0 : & v \text{ is just escape velocity} \\ E < 0 : & v \text{ is small enough} \end{aligned} \quad (3.35)$$

와 같이 세가지의 가능성이 있고 $E < 0$ 인 경우에만 질량 m 인 물체는 다시 돌아옵니다. 이는 여러분들이 일반물리학에서 다 배운 내용입니다.

이제 이 사실을 바탕으로 그림 (3.5)와 같이 은하들이 공간적으로 균일하게 분포되어 있는 3차원 우주가 있고 이 우주가 초기에 팽창을 하는 경우를 생각해 보겠습니다. 관찰

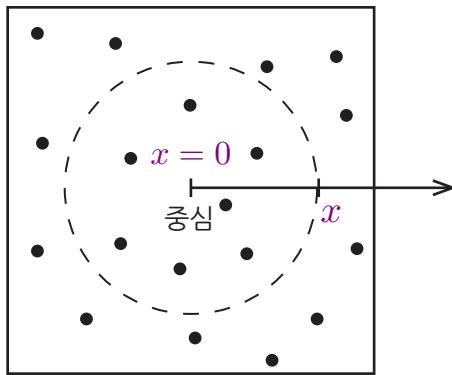


그림 3.5: 팽창하는 우주의 중심이 정지하여 있는 관성계에서 바라본 한 은하의 움직임.

자는 $x = 0$ 인 관성계에서 정지해 있고 우주에 있는 은하들은 서로 멀어진다고 하겠습니다. 이때 멀어지는 은하들 중 하나를 골라 그 은하의 위치를 x , 그 은하의 질량과 속력을 각각 m 과 v 라고 하면, 이러한 경우 Newton 중력 이론에 의하면 이 특별한 은하와 나머지 은하들간의 중력은 오로지 원점으로부터 이 특별한 은하까지의 반경으로 이루어진 구의 내부 은하에 대한 질량 M 만 관여하므로

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{constant} \quad (3.36)$$

이 다시 성립합니다. 이 은하의 질량은 상수이므로 이 수식은 다시

$$v^2 - \frac{2GM}{r} = \text{constant} \quad (3.37)$$

로 쓸 수 있습니다. 전에 이야기했던 Hubble 법칙과 지금 논의하는 우주의 밀도 ρ 를 생각하면

$$\begin{aligned} r &= a(t)\Delta r \\ v &= \dot{r} = \dot{a}(t)\Delta r \\ M &= \rho(t) \frac{4\pi}{3} a^3 (\Delta r)^3 \end{aligned} \quad (3.38)$$

으로 정리되어, 식 (3.37)은

$$(\Delta r)^2 \left[\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho(t) a^2 \right] = \text{constant} \quad (3.39)$$

로 정리됩니다. 그런데 위 수식의 우변에 있는 상수는 주어진 x 에 대하여 시간에 대한 상수라는 의미이므로 위 수식의 우변 상수는 x^2 에 비례하는 상수가 되어야 합니다. 즉

$$x^2 \left[\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho(t) a^2 \right] = \text{constant} \cdot x^2 \quad (3.40)$$

이 되어 결국

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho(t) a^2 = \text{constant} \quad (3.41)$$

라는 결론에 도달합니다. 수식 (3.41)은 Friedmann 수식이라 부르며 우변에 있는 상수는 t 와 x 에 대하여 모두 상수입니다. 역사적으로 위의 수식은 종종 상수를 $-kc^2$ 로 놓아

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{kc^2}{a^2} \quad (3.42)$$

와 같이 표현되기도 합니다.³ 지구 탈출 속도의 경우와 비교해 보면 $-k > 0$ 인 경우 우주가 영원히 팽창한다고 볼 수 있습니다. 물론 $-k < 0, -k = 0$ 인 경우도 모두 가능합니다 (E 와 k 는 서로 반대의 부호를 갖는다는 점에 유의). Friedmann 수식은 미분방정식으로 시간에 대한 함수가 $a(t)$ 와 $\rho(t)$ 가 포함되어 있기 때문에 그 자체만으로는 해를 일반적으로 구할 수 없습니다. Friedmann 수식은 에너지보존법칙을 Newtonian 중력이론에 적용하여 얻었다는 것을 꼭 기억하기 바랍니다.

이제 E (또는 k)의 부호에 따라 비상대론적 물질로 이루어진 우주의 팽창이 어떻게 전개될 것인가를 Friedmann 방정식을 통하여 알아보겠습니다. 이를 위하여 $\text{constant} = 2E$, 그리고 $\rho(t)/\rho_i = a(t)^{-3}$ 을 이용하면

$$\dot{a}^2 = 2E + \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_i}{a} \quad (3.43)$$

으로 표현할 수 있고 이로부터 논의를 시작합니다.

- $E > 0$ ($k < 0$): 이 경우 위 방정식의 우변은 항상 양수가 되어 $\dot{a} > 0$ 이 항상 만족됩니다. 따라서 $a(t)$ 는 영원히 증가하게 되어 우주는 무한히 계속 팽창하게 됩니다. 이를 열린우주(open universe)라고 부릅니다.
- $E < 0$ ($k > 0$): 이 경우 위 방정식의 우변의 첫번째 항은 음수입니다. 그런데 좌편이 \dot{a}^2 으로 항상 양수이기 때문에 a 는 초기에는 증가하더라도 어느 시점에서는 줄어들어서 우변 전체가 음수가 되지 못하도록 해야 합니다. 이에 따라 a 는 어느 시점

³여기서 단위를 잠깐 살펴보면 Friedmann 수식의 좌변은 s^{-2} 이고 우변의 첫번째 항은 $[G][\rho] = (m^3 kg^{-1} s^{-2})(kg m^{-3}) = s^2$ 입니다. 두번째 항은 $[kc^2] = [k] m^2 s^{-2}$ 이므로 $[k] = m^{-2}$ 이 됩니다. 물론 우리가 scale factor a 가 길이의 단위를 갖도록 선택하였다면 k 는 단위가 없는 양으로 해석되었을 것입니다.

에는 줄어들게되어 결국 우주는 소멸하게 됩니다. 이러한 우주를 닫힌우주(closed universe)라고 부릅니다.

- $E = 0$ ($k = 0$): 이 경우는 임계치에 해당하여 무한하게 팽창하지도 않고 줄어들어 소멸하지도 않는 특별한 경우를 나타냅니다.

$E = 0$ 인 특별한 경우에 임계밀도(critical density)를 계산할 수 있어서

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (3.44)$$

가 됩니다. 이에 대한 수치를 계산하면 (현재의 Hubble expansion rate와 G 값으로 계산 가능)

$$\rho_c = \frac{3 \times (100 h_0 \cdot 10^3 \cdot 1/(3.086 \times 10^{22}))^2 s^{-2}}{8\pi \times 6.674 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}} \simeq 1.88 h_0^2 \times 10^{-26} kg m^{-3} \quad (3.45)$$

혹은

$$\rho_c \approx 5.8 \text{ protons/m}^3 \quad (3.46)$$

정도로 매우 작은 값이 됩니다. 또한 이를 이용하여 $\Omega \equiv \rho/\rho_c$ 라는 단위없는 상대 밀도(density parameter)를 정의합니다. 이 정의에 따르면 $H^2 = (8\pi G/3)\rho - kc^2/a^2$ 은

$$H^2(1 - \Omega) = -\frac{kc^2}{a^2} \quad (3.47)$$

으로 표현할 수 있고 따라서 $\Omega = 1$ 이면 flat 우주, $\Omega > 1$ 이면 닫힌우주, $\Omega < 1$ 이면 열린우주에 해당되겠습니다. 참고로 현재의 관측에 의하면

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{matter(visible+dark matter)}} &\approx 0.30 \\ \Omega_{\text{dark energy}} &\approx 0.70 \\ \Omega_{\text{total}} &\approx 1.00 \pm 0.005 \end{aligned} \quad (3.48)$$

정도로 측정되어 현재의 우리우주는 flat 우주로 여겨지고 있습니다.

이제 다른 방법으로 Friedmann 수식을 유도해 보겠습니다. 이를 통하여 scale factor 와 co-moving coordinate의 개념이 좀더 명확하게 이해될 것입니다. 다시 그림 (3.5)의 상황으로 돌아가겠습니다. 초기 조건을 좀더 명확하게 하기 위하여 팽창하는 우주의 임의의 초기시간(t_i)에 중심으로부터 거리 (r_i) 만큼 떨어져 있는 은하를 다시 고려합니다. 시간이 지남에 따라 우주는 팽창하고 이에 따라 거리는 $r(r_i, t)$ 로 변하게 되지만 초기에 반경이 r_i 인 구 내부에 있는 은하들의 총 질량은 우주가 팽창해도 변하지 않아서 초기의

총 질량값인

$$M(r_i) = \frac{4\pi}{3} r_i^3 \rho_i \quad (3.49)$$

는 상수가 됩니다 (ρ_i 는 시간이 t_i 일 경우의 밀도로 이는 시간에 따라 변함). 임의의 시간에 우리가 고려하는 은하가 받게 되는 중력가속도의 크기 g 는

$$g = \ddot{r} = -\frac{GM(r_i)}{r^2(r_i, t)} \quad (3.50)$$

로 쓸 수 있게 됩니다. 위에서 질량 대신 밀도로 표현하면

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{r_i^3 \rho_i}{r^2} \quad (3.51)$$

이고 이는 물리적 거리 r 에 대한 2차 미분방정식이 되어 2개의 초기조건이 주어지면 해를 정확하게 계산할 수 있습니다. 이 2개의 초기조건은

$$\begin{aligned} r(r_i, t_i) &= r_i \\ \dot{r}(r_i, t_i) &= H_i r_i \end{aligned}$$

이 됩니다 (H_i 는 시간 t_i 일 경우 Hubble expansion rate). 이제 여기서 새로운 함수를 도입하여 r_i 가 사라지도록 하겠습니다. 임의의 함수 $u(r_i, t)$ 를

$$u(r_i, t) \equiv \frac{r(r_i, t)}{r_i} \quad (3.52)$$

으로 정의하면 초기조건 2개와 미분방정식은

$$\begin{aligned} u(r_i, t_i) &= 1 \\ \dot{u}(r_i, t_i) &= H_i \\ \ddot{u} &= -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_i}{u^2} \end{aligned} \quad (3.53)$$

으로 그 어느 곳에도 r_i 는 나타나지 않습니다. 즉, 위의 미분방정식 혹은 현재 우리가 고려하는 우주팽창에 대한 물리학적 기술은 초기 위치를 어디에 설정하는 것과 상관이 없다는 이야기입니다 (당연히). 이렇도록 정의한 새로운 함수 $u(r_i, t) = r(r_i, t)/r_i$ 는 과연 무었일까요? 우리가 고려하는 은하의 물리적 위치를 임의의 초기값 (r_i)으로 나눈 값입니다. 바로 $a(t)$ 로 생각할 수 있는 것입니다. 그러면 자동적으로 r_i 는 co-moving coordinate 혹은 comoving distance 가 되는 것입니다. 즉,

$$r(r_i, t) = a(t)r_i \quad (3.54)$$

가 되고 미분방정식은

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_i}{a^2} \quad (3.55)$$

으로 쓸 수 있습니다. 이제 마지막 단계로 ρ_i 대신 $\rho(t)$ 를 미분방정식에 넣어 보겠습니다. 일반적으로 밀도는 우주가 팽창함에 따라 변하여

$$\rho(t) = \frac{M(r_i)}{\frac{4\pi}{3} r_i^3} = \frac{\frac{4\pi}{3} r_i^3 \rho_i}{\frac{4\pi}{3} a^3 r_i^3} = \frac{\rho_i}{a^3} \quad (3.56)$$

의 형태를 갖습니다. 이를 미분방정식에 대입하면

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho(t) a \quad (3.57)$$

의 형태를 가지게 됩니다. 이는 위에서 유도한 Friedman 식 (3.41)과 연관이 있을까요? 이를 위해서 ρ_i 가 있던 미분방정식 양변에 \dot{a} 를 곱하면

$$\dot{a} \left\{ \ddot{a} + \frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_i}{a^2} \right\} = 0 \quad (3.58)$$

이 되고 이는 total derivative 가 됩니다. 즉 $E \equiv \frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G \rho_i}{3a}$ 로 정의하면

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (3.59)$$

이 만족되는 셈입니다. 이제 물리적 의미를 부여하기 위하여 E 에 mr_i^2 을 곱하면 (m 은 중심으로부터 거리 r_i 에 있던 은하의 질량)

$$\begin{aligned} E \rightarrow mr_i^2 E &= \frac{1}{2} m (\dot{a} r_i)^2 - G \frac{M(r_i)m}{(ar_i)} \\ &= \frac{1}{2} mr^2 - \frac{GMm}{r^2} \end{aligned} \quad (3.60)$$

이 되어 ⁴ 역학적 에너지의 합이었던 수식 (3.34)과 동일하게 됩니다. 이제 비상대론적 우주인 경우 정리를 하면 지금까지 중요한 수식들은

⁴주목: 여기서 $M(r_i) = (4\pi/3)(a(t_i)r_i)^3\rho_i = (4\pi/3)(r_i)^3\rho_i$

(nonrelativistic matter dominated universe)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \\ \ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)a \\ \rho(t) &\propto \frac{1}{a^3(t)}\end{aligned}$$

으로 정리됩니다. 이 식들은 서로 독립적인 것들은 아니고 위에서 설명한 것처럼 서로 관계가 있습니다. 이제 한가지 예를 통하여 $\rho(t)$ 에 대한 가정을 한 후 Friedmann 수식이 우주의 진화를 어떻게 예측하는지 살펴보겠습니다.

1.3 Example. 비상대론적 물질이 대부분인 우주(*nonrelativistic matter dominated universe*): 어느 순간에 단위 길이가 1인 정육면체 공간을 생각하고 이 안에 총 질량이 M 인 물질만이 있다고 가정하겠습니다.

일반적으로 우주공간에는 빛 (radiation)도 있지만 다른 형태의 에너지는 모두 무시하고 비상대론적으로 움직이는 질량을 가진 물질만 있다고 가정하겠습니다. 만일 이 정육면체가 팽창한다면 일정 시간후에 정육면체 내부의 총 질량은 당연히 M 으로 변하지 않습니다. 따라서

$$\rho(t) = \frac{M}{a^3} \quad (3.61)$$

이 되고 이에 따른 Friedmann 수식은

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{M}{a^3} - \frac{k}{a^2} \quad (3.62)$$

이 되겠습니다. 여기서 한가지 더 가정을 하여 수식을 간단하게 만들어 보겠습니다. 즉, $k = 0$ 으로 가정하여 상수항을 없애줍니다. 나중에 이야기하겠지만 현재 관측에 의하면 $k = 0$ 은 $\mathcal{O}(1)\%$ 수준에서 근사적으로 문제가 없는 가정입니다. 이를 고려하면

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{M}{a^3} \quad (3.63)$$

이 되고 이것이 바로 우리가 풀고자 하는 미분방정식이 됩니다. 제곱항이 있어서 비선형 미분방정식이고 따라서 정식으로 푸는 대신 적절한 해의 형태를 가지고 해를 만들어 보겠습니다. 이를 위하여 $a(t) = \alpha t^p$ 라는 형태를 가정합니다 (α 와 p 는 결정해야할 상수).

그러면 $\dot{a} = \alpha p t^{p-1}$, $\dot{a}/a = p t^{-1}$ 이므로

$$\frac{p^2}{t^2} = \frac{8\pi MG}{3\alpha^3 t^{3p}} \quad (3.64)$$

이 성립하고, 따라서 우선 $p = 2/3$ 이면 양변에서 t 항이 같아지게 되어 이를 대입하여

$$\begin{aligned} \frac{4}{9} &= \frac{8\pi MG}{3\alpha^3}, \quad \alpha = (6\pi MG)^{1/3} \\ \therefore a(t) &= (6\pi MG)^{1/3} t^{2/3} \end{aligned} \quad (3.65)$$

을 최종적으로 얻게 됩니다. Hubble parameter는 어떻게 되겠습니까? 이는 $a(t)$ 를 구했기 때문에 쉽게 구할 수 있어서

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t} \quad (3.66)$$

입니다. 따라서 현재의 Hubble parameter를 측정하고, 이에따라 $H(t_0) = 2/(3t_0)$ 라는 관계식으로부터 물질이 대부분인 우주의 현재 나이를 계산할 수 있습니다. ■

위의 예제 결과를 바탕으로 물질로 이루어진 편평한 우주의 나이에 대하여 계산을 해 보겠습니다. 이러한 우주에 대한 Hubble expansion rate와 시간의 관계에 따라서

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \quad (3.67)$$

라는 관계식을 갖습니다. $H_0 = 67.8 \pm 0.9 \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1}$ 으로부터

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{2}{3} \times 67.8 \pm 0.9 \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1} \\ &\approx 9.7 \times 10^9 \text{ years} \end{aligned} \quad (3.68)$$

를 얻게 됩니다.⁵ 이는 현재 우주의 나이로 알려진 값 [3] $(13.799 \pm 0.038) \times 10^9$ years 보다 많이 작은 값에 해당됩니다. 우리의 우주는 초기에는 복사로 이루어졌고 최근에는 암흑에너지가 대부분을 이루고 있기 때문에 최근값과 일치하지 않는 것입니다.

우주의 나이와 더불어 또 한가지 중요한 개념으로 horizon distance 가 있습니다. 이는 오늘날 우리가 볼 수 있는 가장 먼 대상까지의 거리로 정의되고 이는 단지 빛의 속력이 유한하기 때문에 제한되는 것으로 이해해야 합니다 (즉 원리적으로는 모든 빛을 다 검출할 수 있다고 가정함). 영어로는 horizon distance: present proper (physical) distance of the most distant object that can be seen, limited only by speed of light 으로 표현됩니다. 만일 우주가 팽창하지 않는다면 horizon distance 는 단지 빛의 속력과 우주의 나이의 곱으로 나타날 것입니다. 이제 물질로 이루어진 편평한 우주의 경우에 대

⁵ $\frac{1}{10^{10} \text{ years}} \approx 97.8 \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1}$ 임을 알고 있으면 편리함.

하여 horizon distance $\ell_{\text{p},\text{horizon}}(t)$ 를 계산해 보겠습니다. 팽창하는 공간에서 빛이 진행하는 속력을 co-moving coordinate x 로 표현하면 $dx/dt = c/a(t)$ 이고 horizon distance는 이를 적분한 다음 오늘날의 scale factor를 곱해주면 되어 ($a(t) \propto t^{2/3}$)

$$\begin{aligned}\ell_{\text{p},\text{horizon}}(t_0) &= a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt \\ &= t^{2/3} \int_0^{t_0} \frac{c}{t^{2/3}} dt = 3ct_0\end{aligned}\quad (3.69)$$

로 계산됩니다. 즉 팽창하지 않는 우주의 horizon distance는 ct_0 이지만 물질로 이루어진, 편향한 우주가 팽창하는 경우에는 그보다 3배 더 커진다는 뜻입니다.

이제 물질 우주의 두번째 논의로서 닫힌 우주의 경우($k > 0$)에 대한 Friedmann 수식을 살펴보겠습니다. 즉,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}\quad (3.70)$$

으로부터 출발합니다. 단 여기서 $\rho(t) = \rho_i a^3(t_i)/a^3(t)$ 로 나타낼 수 있고 이때 분자는 시간에 따라 변하지 않는 상수임을 기억하기 바랍니다. 이제 이 미분방정식을 간단하게 하기 위하여 $\tilde{a}(t) \equiv a(t)/\sqrt{k}$ 와 $\tilde{t} \equiv ct$ 를 정의하고 $a^2/(kc^2)$ 을 위의 식 양변에 곱해주면

$$\frac{a^2}{kc^2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho a^3}{k^{3/2} c^2} \frac{\sqrt{k}}{a} - 1\quad (3.71)$$

또는

$$\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}\right)^2 = \frac{2\alpha}{\tilde{a}} - 1, \quad \alpha \equiv \frac{4\pi G}{3} \frac{\rho \tilde{a}^3}{c^2}\quad (3.72)$$

으로 간단해지고 이를 다시 풀어 쓰면

$$d\tilde{t} = \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\frac{2\alpha}{\tilde{a}} - 1}} = \frac{\tilde{a} d\tilde{a}}{\sqrt{2\alpha\tilde{a} - \tilde{a}^2}}\quad (3.73)$$

가 됩니다. 위의 식을 적분하면 ($\tilde{a}_f \equiv a(\tilde{t}_f)$) 위의 수식은

$$\int_0^{\tilde{t}_f} d\tilde{t} = \tilde{t}_f = \int_0^{\tilde{a}_f} \frac{\tilde{a} d\tilde{a}}{\sqrt{2\alpha\tilde{a} - \tilde{a}^2}} = \int_0^{\tilde{a}_f} \frac{\tilde{a} d\tilde{a}}{\sqrt{\alpha^2 - (\tilde{a} - \alpha)^2}}\quad (3.74)$$

으로 바꾸고 다시한번 다른 변수를 정의하여 $x \equiv \tilde{a} - \alpha$ 적분 표현을 바꾸면

$$\tilde{t}_f = \int_{-\alpha}^{\tilde{a}_f - \alpha} \frac{x + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} dx \quad (3.75)$$

가 됩니다. 마지막 단계로 $x = -\alpha \cos \theta$ 로 바꾸면 $dx = \alpha \sin \theta d\theta$, $\alpha^2 - x^2 = \alpha^2 \sin^2 \theta$ 이므로

$$\tilde{t}_f = \int_0^{\theta_f} \alpha(1 - \cos \theta) d\theta = \alpha(\theta - \sin \theta) \quad (3.76)$$

가 됩니다 (마지막 단계에서 θ_f 대신 θ 로 간략하게 바꾸었음). 또한 $\tilde{a}_f = x_f + \alpha = \alpha(1 - \cos \theta_f)$ 에서도 f 를 없애면

$$\begin{aligned} ct &= \alpha(\theta - \sin \theta) \\ \frac{a}{\sqrt{k}} &= \alpha(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.77)$$

로 최종 정리됩니다. 위의 수식은 어떤 곡선을 의미하는지 알 수 있습니까? 위의 수식들은 수평축이 ct , 수직축이 a/\sqrt{k} 인 2차원 평면에 기술되는 cycloid 곡선입니다 (즉 원이 수평선을 굴러갈때 원의 한 지점이 만들어 내는 곡선). 즉 물질로 이루어진 닫힌 우주의 경우에는 scale factor가 $(1 - \cos \theta)$ 의 형태를 가지게 되어 처음과 마지막 시간에서 0이 되고 $\theta = \pi$ 일 경우 가장 큰 값을 갖게 됩니다. 이 경우 α 는 특별한 물리적 의미를 갖게 되는데 이러한 우주의 전체 나이는 $ct_{\text{total}} = 2\pi\alpha$ 이고 또한 $a_{\text{max}}/\sqrt{k} = 2\alpha$ 의 관계를 만족합니다. 이제 이러한 우주의 나이를 측정가능변수인 H , Ω 로 표현해 보겠습니다. 즉

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad \rho = \Omega\rho_c \rightarrow \rho = \frac{3H^2\Omega}{8\pi G}, \quad \frac{8\pi G}{3}\rho = H^2\Omega \quad (3.78)$$

이므로 Friedmann 방정식은

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \rightarrow H^2 = H^2\Omega - \frac{c^2}{\tilde{a}^2} \quad (3.79)$$

혹은

$$\tilde{a}^2 = \frac{c^2}{H^2(\Omega - 1)}, \quad \tilde{a} = \frac{c}{|H|\sqrt{\Omega - 1}} \quad (\Omega > 1) \quad (3.80)$$

이고 α 는

$$\alpha = \frac{4\pi G}{3} \frac{\rho \tilde{a}^3}{c^2} = \frac{c}{2|H|} \frac{\Omega}{(\Omega - 1)^{3/2}} \quad (3.81)$$

이 얻어지게 됩니다. 따라서 $\tilde{a} = \alpha(1 - \cos \theta)$ 는

$$\frac{c}{|H|\sqrt{\Omega-1}} = \frac{c}{2|H|(\Omega-1)^{3/2}}(1 - \cos \theta) \quad (3.82)$$

이는

$$\cos \theta = \frac{2-\Omega}{\Omega}, \quad \Omega = \frac{2}{1+\cos \theta}, \quad \sin \theta = \pm \sqrt{1-\cos^2 \theta} = \pm \frac{2\sqrt{\Omega-1}}{\Omega} \quad (3.83)$$

가 성립합니다. 즉,

$$\begin{aligned} ct &= \alpha(\theta - \sin \theta) \\ &= \frac{\Omega}{2|H|(\Omega-1)^{3/2}} \left\{ \arcsin \left(\pm \frac{2\sqrt{\Omega-1}}{\Omega} \right) \mp \frac{2\sqrt{\Omega-1}}{\Omega} \right\} \end{aligned} \quad (3.84)$$

의 형태로 정리됩니다. 상당히 복잡한 형태로 표현되었습니다.

이제 마지막으로 열려진우주 (open universe)의 경우에는 어떻게 되는지 살펴보겠습니다. 열린 우주는 $k < 0$ 이기 때문에 지금까지의 논의를 그대로 따를 수는 없지만 산수는 비슷합니다. 즉 κ 와 \tilde{a} 를

$$\tilde{a} \equiv \frac{a}{\kappa}, \quad \kappa \equiv -k > 0 \quad (3.85)$$

으로 정의한다면 수학적인 과정은 매우 유사하지만 hyper 삼각함수로 바뀌게 되어

$$\begin{aligned} ct &= \alpha(\sinh \theta - \theta) \\ \frac{a}{\kappa} &= \alpha(\cosh \theta - 1) \end{aligned} \quad (3.86)$$

로 바뀌게 됩니다. 이에 따라 물질로 이루어진 우주의 나이는 다음과 같이

$$|H|t = \begin{cases} \frac{\Omega}{2(1-\Omega)^{3/2}} \left[\frac{2\sqrt{1-\Omega}}{\Omega} - \sinh^{-1} \left(\frac{2\sqrt{1-\Omega}}{\Omega} \right) \right] & \text{if } \Omega < 1 \\ 2/3 & \text{if } \Omega = 1 \\ \frac{\Omega}{2(1-\Omega)^{3/2}} \left[\sin^{-1} \left(\pm \frac{2\sqrt{\Omega-1}}{\Omega} \right) \mp \frac{2\sqrt{\Omega-1}}{\Omega} \right] & \text{if } \Omega > 1 \end{cases} \quad (3.87)$$

정리됩니다.

1.3.2 복사(radiation)만으로 이루어진 우주

위의 예제에서는 물질이 대부분인 우주의 진화가 어떻게 진행되는지 살펴보았습니다. 이제 빛(또는 광자)이 대부분인 우주(보통 radiation dominated universe라 부름)는 어떻

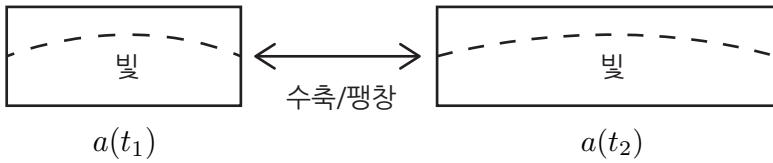


그림 3.6: 서로 다른 시간 t_1 과 t_2 사이에서 크기가 각각 $a(t_1)$ 과 $a(t_2)$ 인 우주에 있는 빛의 파장(점선)이 변화하는 정도를 나타내는 그림.

게 되는지 살펴보겠습니다. 광자는 질량은 없지만 유한한 에너지(E_γ)를 갖고 있어서

$$E_\gamma = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \quad (3.88)$$

로 나타낼 수 있습니다. 여기서 h 는 Planck 상수, ν 는 빛의 진동수, c 는 물론 빛의 속력, λ 는 빛의 파장이 됩니다. 우주가 팽창, 또는 수축함에 따라 빛의 파장은 길어지거나 줄어들게 되고 그에 대한 근본적인 이유는 그림 (3.6)로부터 이해할 수 있습니다. 즉, 우주가 팽창하면 파장도 $a(t)$ 에 비례하여 길어지고 따라서 에너지는 $1/a$ 로 줄어들게 됩니다. 이에따라 단위길이가 1인 빛이 대부분인 우주 내부 에너지밀도는

$$\rho_\gamma \propto \frac{E_\gamma}{a^3} = \frac{\alpha}{a^4} \quad (3.89)$$

으로 정리됩니다. α 는 비례상수로서 별 중요성은 없고 에너지밀도가 $1/a^4$ 에 비례한다는 것이 중요합니다. 물질이 대부분인 우주에서는 질량밀도(=에너지밀도)가 $1/a^3$ 에 비례하였음을 상기하기 바랍니다. 이제 Friedmann 수식을 사용하여 빛이 대부분인 우주의 진화 과정은 어떻게 될 것인지 알아보겠습니다. 즉, Friedmann 수식에 위의 에너지밀도항을 넣고 마찬가지로 $a(t) = \alpha t^p$ 를 가정하면

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{p}{t}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{\alpha^4 t^{4p}} \quad (3.90)$$

가 되고 (여기서 에너지밀도에 따라오는 비례상수는 α 에 흡수하였다고 생각함), 따라서 $p = 1/2$ 만족되어야 합니다. 즉,

$$a(t) \propto t^{1/2} \quad (3.91)$$

으로 빛이 대부분인 우주도 역시 팽창합니다. 이에 따른 Hubble expansion rate는

$$H(t) = \dot{a}/a(t) = \frac{1}{2t} \quad (3.92)$$

○]고 horizon distance는

$$\begin{aligned}\ell_{p,\text{horizon}}(t) &= a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} dt' \\ &= 2ct\end{aligned}\quad (3.93)$$

로 정리됩니다 (물질이 대부분인 우주의 horizon distance는 $3ct$ 이었음). 위에서 구한 Hubble expansion rate를 Friedmann 방정식에 다시 집어넣으면 ($k = 0$ 인 경우)

$$\frac{1}{4t^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad \text{or} \quad \rho = \frac{3}{32\pi G t^2} \quad (3.94)$$

으로 정리됩니다. 이는 $\rho \propto 1/a^4(t)$, $a(t) \propto \sqrt{t}$ 와도 일치합니다.

현대 우주론에 의하면 우주 초기에는 빛이 대부분인 우주이었을 것으로 이해하고 있으며 이 시기의 scale factor는 $a(t) \propto t^{1/2}$ 인 셈입니다. 또한가지 빛의 단위 체적당 갯수 밀도(n_γ)를 생각해 보면 우주 초기에는 별의 형성 훨씬 전이라 빛이 흡수되는 일이 없으므로 빛알의 갯수는 따라서 보존되어

$$n_\gamma \propto \frac{1}{a^3(t)} \quad (3.95)$$

임을 알 수 있습니다. 오늘날 빛의 에너지 밀도 u_γ 는 우주배경복사로 부터 알 수 있습니다. 우주배경복사의 온도는 매우 잘 알려져 있어서 [4] 2.72548 ± 0.000057 K입니다. 양자역학으로부터 배운 에너지밀도에 대한 Stefan-Boltzmann 법칙으로부터

$$u_\gamma = \frac{\pi^2}{15} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} \equiv \alpha T^4, \quad \alpha = 7.5662 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4} \quad (3.96)$$

○]고 이를 통하여 계산하면

$$u_\gamma = 7.56 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4} \times (2.725 \text{ K})^4 \simeq 4.17 \times 10^{-14} \text{ J m}^{-3} \quad (3.97)$$

이고 이에 따른 빛의 질량밀도는

$$\rho_\gamma = \frac{u_\gamma}{c^2} \simeq 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3} \quad (3.98)$$

입니다. 나중에 논의하겠지만 복사만으로 이루어진 우주는 중성미자까지 고려해서 위의 수식들은 ($r \equiv \gamma + \nu$)

$$\begin{aligned}u_r &= \simeq 7.01 \times 10^{-14} \text{ J m}^{-3} \\ \rho_r &= 7.80 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}\end{aligned}\quad (3.99)$$

으로 약 2배가 안되게 증가합니다. 따라서 critical mass density ρ_c 와의 비율은

$$\Omega_{r,0} \equiv \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{c,0}} = \frac{7.80 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}}{1.88 h_0^2 \times 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}} = 4.15 \times 10^{-5} h_0^{-2} \quad (3.100)$$

입니다. 여기서 $h_0 = 0.72$ 라면 $\Omega_{r,0} = 8.0 \times 10^{-5}$ 로서 매우 작은 값을 갖게 됩니다. 즉 오늘날의 우주에서 복사가 차지하는 질량밀도는 매우 미미하다고 할 수 있겠습니다. 그렇지만 일반적으로

$$\rho_r / \rho_m \propto 1/a(t) \quad (3.101)$$

이므로 우주 초기로 거슬러 올라가면 위의 값이 매우 커지게 된다는 의미이고 따라서 우주가 어느 시기에 있었는가에 따라 대부분의 에너지 밀도가 복사 또는 비상대론적인 물질에서 오는것인지 결정된다고 할 수 있겠습니다. 이에 대한 정량적인 기술을 위하여 복사와 물질의 질량밀도 비를 수식으로 표현하면

$$\frac{\rho_r(t)}{\rho_m(t)} = \left[a(t_0) \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_m(t_0)} \right] \frac{1}{a(t)} \quad (3.102)$$

와 같습니다. 현재 $\Omega_m \simeq 0.33$ 이라고 하면 현재 $\rho_r(t_0)/\rho_m(t_0) = \Omega_{r,0}/\Omega_{m,0} = 8.0 \times 10^{-5}/0.33 \simeq 2.4 \times 10^{-4}$ 입니다. 따라서 위의 수식은

$$\frac{\rho_r(t)}{\rho_m(t)} = \frac{a(t_0)}{a(t)} \times 2.4 \times 10^{-4} \quad (3.103)$$

라는 관계를 갖게 됩니다. 여기서도 마찬가지로 초기우주로 갈수록 복사에 의한 질량밀도가 상대적으로 무한히 커지는 것으로 기술됩니다. 만을 복사와 물질의 질량밀도가 같게 되는 시기를 $t = t_{eq}$ 라고 하면 비상대론적 물질로 이루어진 우주에서의 관계식 $a(t) \propto t^{2/3}$ 으로부터

$$\frac{\rho_r(t_{eq})}{\rho_m(t_{eq})} = 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_{eq})} \times 2.4 \times 10^{-4} = \left(\frac{t_0}{t_{eq}} \right)^{2/3} \times 2.4 \times 10^{-4} \quad (3.104)$$

즉

$$\left(\frac{t_{eq}}{t_0} \right)^{2/3} = 2.4 \times 10^{-4} \quad (3.105)$$

이고 $t_0 = 13.7$ Gyr라는 우주의 나이를 사용하면 $t_{eq} = 3.7 \times 10^{-6} t_0 \simeq 55,000$ 년 가량 됩니다. 주의할 점은 이 숫자는 복사만으로 이루어진 우주와 물질만으로 이루어진 우주로 단순화 시킨 후의 계산 결과라는 점과 위의 수치는 Hubble expansion rate에 어떤 값을

대입하는가에 따라 조금씩 바뀌게 되는 값이라는 점입니다.

이제 복사만으로 이루어진 우주에 대한 Friedmann 방정식이 어떻게 바뀌는지에 대하여 논의해 보겠습니다. 위에서 논의한 것처럼 $\rho_r \propto 1/a^4(t)$ 임을 알 수 있습니다. 또한 비상대론적인 경우와는 달리 복사의 경우에는 복사압이 존재하고 이 복사압이 상황을 비상대론적인 경우와 다르게 합니다. 일반적으로 복사압이 존재하는 기체가 (여기서는 빛으로 이루어진 우주) 팽창함에 따라 에너지 변화(dU)와 압력(P), 체적(V)과의 관계는

$$dU = -PdV \quad (3.106)$$

입니다. 이를 scale factor와 에너지 밀도(ρc^2)의 관계로 나타내면

$$\frac{d}{dt}(a^3 \rho c^2) = -P \frac{d}{dt}(a^3) \quad (3.107)$$

으로 표현되고 이를 풀어 정리하면

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \quad (3.108)$$

으로 정리됩니다. 이는 비상대론적 물질만으로 이루어진 우주에서의 밀도와 scale factor 와의 관계식 $\dot{\rho} = -3(\dot{a}/a)\rho$ 에 비하여 추가적인 항이 하나 더 들어온 셈입니다 (이는 $\rho \propto 1/a^3(t)$ 으로부터 유도 가능). 따라서 비상대론적 물질로 이루어진 우주를 설명하는 Friedmann 방정식은 반드시 수정되어야 함을 알 수 있습니다. 이를 알아보면 Friedman 방정식에서

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (3.109)$$

양변에 a^2 을 곱해주고 시간에 대하여 미분하면

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho}a^2 + \frac{8\pi G}{3}\rho \cdot 2a\dot{a} \quad (3.110)$$

이고 여기에 위에서 구한 밀도의 시간 미분 관계식 (3.108)을 대입하면

$$\dot{a}\ddot{a} = \frac{4\pi G}{3}(-3)\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)a^2 + \frac{8\pi G}{3}\rho \cdot a\dot{a} \quad (3.111)$$

이고 이를 정리하면

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)a \quad (3.112)$$

입니다. 즉 복사만으로 이루어진 우주를 기술하는 수식들은

(radiation dominated universe)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \\ \ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)a \\ \dot{\rho} &= -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\end{aligned}$$

으로 정리됩니다. 한편 아래에서 유도하겠지만 복사의 경우 압력과 질량밀도는

$$P = \frac{1}{3}\rho c^2 \quad (3.113)$$

의 관계를 갖습니다.

지금까지 두가지의 가상적인 우주론, 즉 빛이 대부분인 우주와 물질이 대부분인 우주가 시간이 지남에 따라 어떻게 진화하는 가를 살펴보았습니다. 나중에 다시 정확하게 다루겠지만 지금 미리 말하자면 우주 생성 초기는 빛이 충분한 에너지를 갖고 있어서 빛이 대부분인 우주에 해당되고 그 이후 우주가 팽창함에 따라 빛이 충분히 식어서 물질이 대부분인 우주로 바뀌게 됩니다. 초기 우주가 물론 빛만으로 되어있다는 것은 어디까지나 가정이지만 우주 진화의 정성적인 이해를 하기 위해서는 별로 나쁘지 않은 가정입니다.

1.4 우주의 온도에 대한 이야기

이제 우주의 현재 온도가 과거에는 어떠했을가에 대하여 정성적으로 알아봅니다. 우선 우리의 태양 표면의 온도는 약 3,000 K 정도로 알려져 있고 태양은 빛을 내고 있지만 불투명한 별입니다. 불투명한 이유는 태양 내부는 전하를 띠고 있는 플라즈마 상태이고 그 내부의 빛알은 전하 입자들과 항상 충돌합니다. 이는 마치 우주 초기의 빛알과 전자, 양성자 같은 입자들과 충돌하여 우주 전체가 빛에 대하여 불투명한 시기와 매우 유사합니다. 이를 바탕으로 그 시기에 대하여 알아봅니다. 현재 우주배경복사의 온도는 약 3 K로 알려져 있고 우리의 논의에 따르면 우주는 최근까지 $a(t) \propto t^{2/3}$ 으로 팽창했습니다. 빛의 에너지는 $1/a(t)$ 에 비례하고 온도 또한 $1/a(t)$ 에 비례하므로 현재 우주($t_0 \approx 10^{10}$ years)의 scale factor와 수소 원자 등이 완전히 이온화되어 우주가 빛에 대하여 완전히 불투명했던 시간(t_{ion})의 scale factor에 대한 비율은

$$\frac{a(t_{ion})}{a(t_0)} \approx \frac{3,000 \text{ K}}{3 \text{ K}} = \frac{t_0^{2/3}}{t_{ion}^{2/3}} \quad (3.114)$$

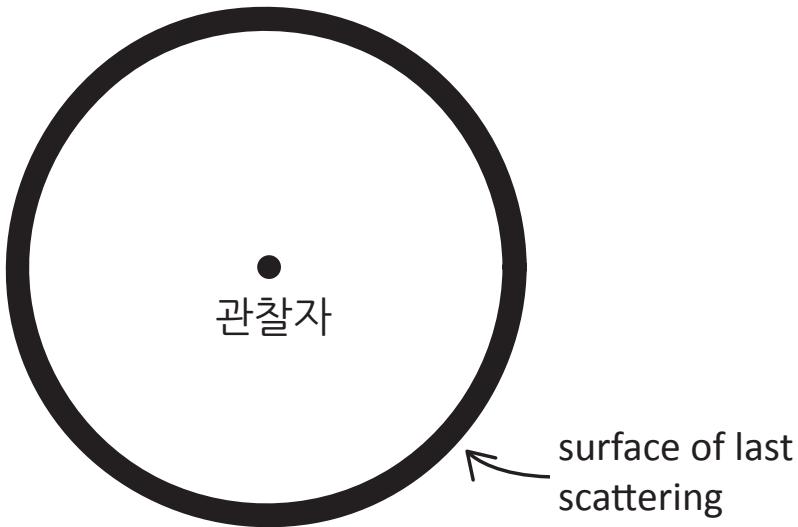


그림 3.7: 지구의 관찰자가 surface of last scattering을 보고 있는 그림.

이 되어

$$\frac{t_0}{t_{\text{ion}}} = (1,000)^{3/2} = (1,000)^{1+1/2} \approx 1,000 \cdot 30 = 30,000 \quad (3.115)$$

즉, $t_{\text{ion}} = 10^{10}/(3 \times 10^4)$ years = 3×10^5 years 가 됩니다. 즉, 우주가 만들어진 후 약 300,000 년 까지는 우주의 물질은 완전히 이온화 되어 빛에 대하여 불투명한 상태가 되는 것입니다. 이제 지구의 한 관찰자를 생각하고 이 관찰자는 우주에서 방출되는 빛을 관찰합니다. 관찰자는 우주의 바깥 부분을 보면 볼수록 보다 전 과거의 빛을 보게 되고 어느 시점이 되면 우주의 물질이 완전히 이온화 되어 빛에 대하여 불투명한 과거에 이르를 것입니다. 이때의 표면을 surface of last scattering 이라 부르며 그 보다 전의 과거는 플라즈마 상태의 우주가 되어 빛은 지구의 관찰자에게 오지 못하게 됩니다. 이를 개념적으로 그림 (3.7)에서 설명합니다. 따라서 이보다 더 과거의 우주에 대하여 관측하려면 전자기파를 이용하지 않는 방법밖에는 없습니다. 이론적으로는 중성미자를 활용하는 방법이 있습니다. 중성미자는 플라즈마와는 상호작용을 거의 하지 않기 때문에 surface of last scattering 이전의 우주에 대한 정보를 갖고 있습니다. 물론 약상호작용이 지배하는 더 높은 에너지 즉, 좀 더 과거로 거슬러 올라가면 중성미자도 불투명하게 되는 시점이 존재하여 중성미자의 surface of last scattering도 생각 할 수 있겠습니다. 다만 현재의 검출기 기술로는 중성미자 망원경을 만들어서 우주중성미자배경복사를 실험적으로 관측하기는 아직은 좀 어렵습니다.

한가지 짚고 넘어갈 사항은 그렇다면 3,000 K의 온도에 해당되는 빛이 우리에게 오는데 왜 밤하늘은 밝지 않고 검은 것일까요? 이는 surface of last scattering 표면이 우리로부터 거의 빛에 가까운 속력으로 벌어지고 있어서 적색편이가 생겨 3 K 온도의 우주배경복사를 보기 때문입니다.⁶ 그리고 인간의 눈은 3 K의 빛알인 마이크로파를 볼 수 없기 때문에 별, 은하계에서 나오는 가시광선들만 보게 되어 밤하늘은 어두운 것입니다.

1.5 암흑물질 (Dark Matter)

이제 오로지 중력에 의한 효과 때문에 있어야 한다고 여겨지는 “암흑물질”에 대하여 생각해 보겠습니다. 일단 태양계와 같은 시스템을 생각합니다. 중앙에 질량이 M 인 별이 있고 그 주위를 질량이 m 인 행성이 중앙을 중심으로 반경이 r 인 원운동을 한다고 가정합니다. 뉴튼의 법칙 $F = ma$ 를 적용하면

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (3.116)$$

이 되어

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (3.117)$$

으로 정리되어 행성의 속력은 거리의 제곱근에 반비례한다는 결론을 얻습니다. 이에 대한 논의를 은하계에 적용해 보겠습니다. 은하계는 별, 행성, 별의 찌커기, 가스 등이 중력으로 한데 모여 있는 덩어리로서 작게는 10^3 , 크게는 10^{14} 개의 별들이 모여 있습니다. 대부분의 은하들은 스스로 회전하는데 그 내부의 별의 적색변이를 관찰함으로서 은하 내부 별들의 회전 속력을 측정합니다. 만일 위의 “태양계” 모형을 회전하는 은하에 적용한다면 하나의 별이 보는 중심 질량은 공간적으로 분포하게 되어

$$v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (3.118)$$

으로 생각할 수 있습니다. 그런데 천문학자들이 별들의 회전 속력을 관찰한 결과 놀랍게도 별의 회전반경과는 관계 없이 일정하다는 사실을 밝혀내었습니다. 위의 식에서 원쪽 항이 일정하라면 $M(r) \propto r$ 또는 밀도가 $\rho(r) \propto 1/r^2$ 인 물질이 은하계를 감싸고 있어야 합니다. 육안으로는 보이지 않는 이 물질을 **암흑물질**이라고 부릅니다. 그리고 여러가지 측정에 의하면 우주 전체의 암흑물질은 보통 우리가 알고 있는 물질의 약 10배나 많이 있다고 합니다. 믿기 어려운 사실로 생각됩니다.

⁶이 논의는 modern version of Olber's paradox라고 생각할 수도 있습니다.

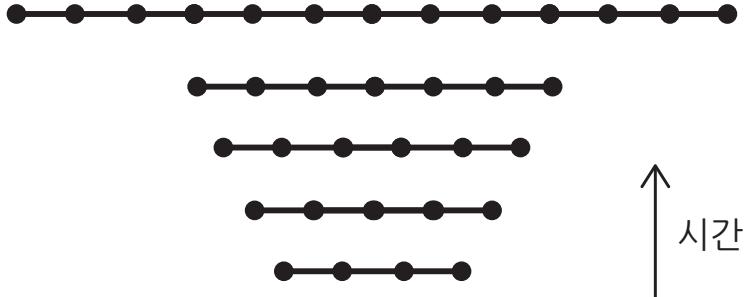


그림 3.8: 암흑에너지(검은색 원)로 채워진 일차원 우주가 시간이 지남에 따라 팽창하는 모습. 우주가 팽창함에 따라 암흑에너지는 계속 “생성”되어 그 에너지밀도는 일정하게 됨을 나타내는 개념도.

1.6 암흑에너지 (Dark Energy)

지금까지 이야기한 복사(radiation), 물질(matter)⁷ 이외에 또 다른 물질을 형태가 있는 것으로 관측되고 있습니다. 이를 암흑에너지 또는 진공에너지라고도 부르는데 이에 대한 이야기를 여기서 잠깐 하겠습니다. 복사에너지만으로 이루어진 우주에서는 에너지밀도와 scale factor와의 관계는 $\rho \propto a^{-4}$ 이고, 물질에너지만으로 이루어진 경우는 $\rho \propto a^{-3}$ 이 만족된다는 것을 이야기 했습니다. 그러면 암흑에너지 또는 진공에너지는 무었일까요? 왜 이런 에너지 형태를 도입하는지에 대하여 간단하게 설명하겠습니다. 최근 관측에 의하면 우주는 가속 팽창을 합니다. 이를 설명하기 위해서는 우리우주가 초기의 복사, 또는 물질이 에너지의 대부분이라는 것으로 설명을 할 수가 없습니다. 즉, 우주가 팽창함에도 불구하고 일정한 에너지 밀도의 “에너지 형태”가 존재해서 우주의 가속팽창을 유지시킨다는 이야기입니다. 이러한 논의를 바탕으로 암흑에너지의 에너지 밀도는 $\rho \propto$ 상수로서 a 와는 아무런 관계가 없다고 설정합니다. 이러한 가정은 어떤 의미일까요? 그럼 (3.8)를 보면서 설명하겠습니다. 일차원 우주가 있고 이 우주초기에는 일정한 에너지 밀도로 암흑에너지가 분포하고 있습니다. 그럼에서는 1차원 우주를 그렸고 검은 원이 암흑에너지를 나타냅니다. 1차원 우주가 팽창함에 따라 암흑에너지의 밀도는 일정하고 이는 어떠한 이유에 의하여 암흑에너지가 계속 생성되어 공간을 우주가 팽창함에 따라 채워야 한다는 의미입니다. 이런 이유로 진공에너지라고도 부릅니다. 어떠한 물리적인 이유 때문에 이

⁷ 이제부터 따로 구분하지 않는 한 물질이라고 표현할 때에는 보통의 물질과 암흑물질을 합한 물리량으로 생각합니다.

러한 현상이 나타나는지는 아직 알 수 없으며 이 암흑에너지의 성질에 대해서 차차 알아보기로 하겠습니다.

역사적으로 보면 Einstein은 정적인 우주를 고집하여 본인의 방정식에 소위 우주상수 Λ 를 추가합니다. 이 상수는 앞으로 우리가 논의할 진공에너지밀도 u_{vac} 또는 진공질량밀도 ρ_{vac} 와

$$u_{\text{vac}} = \rho_{\text{vac}}c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (3.119)$$

의 관계를 갖습니다. 여기서 기본적으로 가정하는 것은 진공에너지밀도와 진공질량밀도 모두 시간에 무관한 상수라는 것입니다. 따라서

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \quad (3.120)$$

에서 $\dot{\rho} = 0$ 이므로

$$P_{\text{vac}} = -\rho_{\text{vac}}c^2 = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (3.121)$$

이 되어 음수의 압력을 의미하게 됩니다. 이 음수의 압력이 결국 우주의 가속 팽창을 만들어 내게 됩니다. 이러한 성질을 가진 진공에너지밀도까지 포함한 Friedmann 방정식을 기술하기 위하여 편의상 우주상수와 관계 없는 모든 질량밀도와 압력을 ρ_n , P_n 으로 합니다. 그러면

$$\begin{aligned} \frac{d^2a}{dt^2} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_n + \frac{3P_n}{c^2} + \rho_{\text{vac}} + \frac{3P_{\text{vac}}}{c^2}\right)a \\ &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_n + \frac{3P_n}{c^2} - 2\rho_{\text{vac}}\right)a \end{aligned} \quad (3.122)$$

이 만족됩니다. 일단 여기서 우변의 진공질량밀도 항이 충분히 크면 우변 전체는 양수가 되어 가속팽창을 예측할 수 있습니다. 그리고 첫번째 Friedmann 방정식은 질량밀도 부분이 수정되어

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_n + \rho_{\text{vac}}) - \frac{kc^2}{a^2} \quad (3.123)$$

으로 수정됨을 알 수 있습니다. 그렇지만 위의 수식에 따르면 가속팽창이 꼭 $H(t)$ 가 시간에 따라 증가함을 의미하지는 않습니다. 이를 보기 위하여 $\rho_n = \rho_m + \rho_{\text{rad}}$ 로 나누면

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\underbrace{\rho_m}_{\propto \frac{1}{a^3(t)}} + \underbrace{\rho_{\text{rad}}}_{\propto \frac{1}{a^4(t)}} + \rho_{\text{vac}}\right) - \frac{kc^2}{a^2} \quad (3.124)$$

으로 쓸 수 있습니다. 여기서 편형하거나($k = 0$) 열린($k < 0$) 우주에서는 우변은 항상 양수가 되어 $H(t)$ 자체는 우주가 팽창함에 따라 줄어들게 됨을 뜻합니다. 이런 우주에서는 우주가 가속 팽창을 해도 점점 줄어들게 되어 $a \rightarrow \infty$ 인 극한에서는 진공에너지밀도항만 남게 되어

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \rightarrow \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{\text{vac}}}{3}} \quad (3.125)$$

으로 수렴하게 되겠습니다.

1.7 우주상수와 우주의 나이

우주상수를 도입함으로서 달라지는 것 중 하나는 우주의 나이가 좀 더 많아진다는 것입니다. 이제부터 이에 대하여 논의해 보겠습니다. 지금까지의 논의에 의하면 비상대론적 물질, 복사, 진공질량밀도와 scale factor와의 관계는

$$\begin{aligned} \rho_m(t) &= \left[\frac{a(t_0)}{a(t)} \right]^3 \rho_{m,0} \\ \rho_{\text{rad}}(t) &= \left[\frac{a(t_0)}{a(t)} \right]^4 \rho_{\text{rad},0} \\ \rho_{\text{vac}}(t) &= \rho_{\text{vac},0} \end{aligned} \quad (3.126)$$

로 정리할 수 있습니다 (여기서 0은 오늘날에서의 물리량이라는 점을 나타냅). 전에 정의하였던 임계밀도

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (3.127)$$

를 이용하면 각 성분에 대한 질량밀도관계식은

$$\begin{aligned} \rho_m(t) &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[\frac{a(t_0)}{a(t)} \right]^3 \Omega_{m,0} \\ \rho_{\text{rad}}(t) &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[\frac{a(t_0)}{a(t)} \right]^4 \Omega_{\text{rad},0} \\ \rho_{\text{vac}}(t) &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{\text{vac},0} \end{aligned} \quad (3.128)$$

으로 다시 쓸 수 있고

$$x \equiv \frac{a(t)}{a(t_0)} \quad (3.129)$$

로 정의하면 ($x \in [0, 1]$) 첫번째 Friedmann 방정식은

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{x^3} + \frac{\Omega_{\text{rad},0}}{x^4} + \Omega_{\text{vac},0} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \quad (3.130)$$

으로 바뀝니다. 이를 좀 더 간편하게 표현하기 위해서

$$\Omega_{k,0} \equiv -\frac{kc^2}{a^2(t_0)H_0^2} \quad (3.131)$$

을 도입하면

$$\begin{aligned} H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{\dot{x}}{x}\right)^2 &= H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{x^3} + \frac{\Omega_{\text{rad},0}}{x^4} + \Omega_{\text{vac},0} + \frac{\Omega_{k,0}}{x^2} \right) \\ &= \frac{H_0^2}{x^4} (\Omega_{m,0}x + \Omega_{\text{rad},0} + \Omega_{\text{vac},0}x^4 + \Omega_{k,0}x^2) \end{aligned} \quad (3.132)$$

으로 정리됩니다. 현재의 조건인 $t = t_0$ 을 사용하면 $x(t_0) = 1$ 이고 따라서 $1 = \Omega_{m,0} + \Omega_{\text{rad},0} + \Omega_{\text{vac},0} + \Omega_{k,0}$ 가 성립하게 되어

$$\Omega_{k,0} = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\text{rad},0} - \Omega_{\text{vac},0} \quad (3.133)$$

입니다. 물론 $\Omega_k > 0$ 이면 열린 우주, $\Omega_k < 0$ 이면 닫힌 우주, $\Omega_k = 0$ 이면 편평한 우주가 됩니다. 현재의 우주 나이를 구하기 위하여 위의 수식에 절대값을 택하면

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{H_0}{x^2} \sqrt{\Omega_{m,0}x + \Omega_{\text{rad},0} + \Omega_{\text{vac},0}x^4 + \Omega_{k,0}x^2} \quad (3.134)$$

이고 이는

$$dt = \frac{1}{H_0} \frac{x \, dx}{\sqrt{\Omega_{m,0}x + \Omega_{\text{rad},0} + \Omega_{\text{vac},0}x^4 + \Omega_{k,0}x^2}} \quad (3.135)$$

으로 바꾸고 현재의 우주나이는 이를 적분하는 것으로 이해할 수 있습니다. 즉

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{\Omega_{m,0}x + \Omega_{\text{rad},0} + \Omega_{\text{vac},0}x^4 + \Omega_{k,0}x^2}} \quad (3.136)$$

입니다. 이 표현이 적분하기는 아마 가장 편하겠지만 천문학 쪽에서는 적색편이를 좀 더 선호하므로 적색편이를 포함한 수식으로도 바꾸어 보겠습니다. 적색편이의 정의에서

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{1}{x} \quad (3.137)$$

라는 관계가 성립하므로 $x \in [0, 1] \rightarrow z \in [\infty, 0]$, $x dx = -\frac{dz}{(1+z)^3}$ 을 대입하면

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{rad,0}(1+z)^4 + \Omega_{vac,0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2}} \quad (3.138)$$

으로 정리됩니다. 만일 현재 우주의 나이가 아니라 현재로부터 ($z = 0$) 과거의 어느 시점까지의 시간을 계산하려면

$$t_{\text{look-back}}(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')\sqrt{\Omega_{m,0}(1+z')^3 + \Omega_{rad,0}(1+z')^4 + \Omega_{vac,0} + \Omega_{k,0}(1+z')^2}}$$

으로 표현될 것입니다.

1.8 Hubble Diagram - 복사도와 적색편이의 관계

우주가 최근에 가속팽창을 하고 있다는 관측적인 증거는 기본적으로 Hubble diagram에 서 옵니다. Hubble diagram은 초신성의 복사도 (radiaton flux)와 적색편이 z 와의 상관관계를 그린 그림으로 정의합니다. 이론적으로 이 그림이 어떻게 이해되는지 지금부터 이야기할 것이고 편의상 닫힌 우주의 경우에 대하여 계산할 것이지만 열린우주 또는 편평한 우주에서도 계산은 그리 다르지 않습니다. 우선 닫힌우주에 대한 Robertson-Walker metric은 (추후 자세하게 다룸)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\} \quad (3.139)$$

이고 이로부터 계산을 시작합니다. 우선 $\sin \psi \equiv \sqrt{k}r$ 을 정의하여

$$d\psi = \frac{\sqrt{k}dr}{\cos \psi} = \frac{\sqrt{k}dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (3.140)$$

임을 이용합니다. 그러면 metric은

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \tilde{a}^2(t) \left\{ d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\} \quad (3.141)$$

으로 간단해지는데 여기서 $\tilde{a} \equiv a/\sqrt{k}$ 로 정의했습니다. 이제 초신성과 같은 임의의 복사원이 총일율 P 로 빛알을 내보낸다고 가정하고 이 초신성을 좌표계의 원점 $\psi = 0$ 에 있습니다. 이를 측정하는 검출기 (지구)의 radial 좌표는 ψ_D 라고 하겠습니다. 방출되는

전체 빛알 대비 면적이 A 인 이 검출기에 검출되는 빛알의 비율은

$$\text{fraction} = \frac{\text{area of detector}}{\text{area of sphere}} = \frac{A}{4\pi\tilde{a}^2(t_0)\sin^2\psi_D} \quad (3.142)$$

입니다(ψ_D 는 검출기가 있는 좌표에서의 ψ 값). 여기서 3차원 Euclid 공간에서의 2-sphere에 대한 metric $ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ 이었고 이 구면의 반경의 제곱은 $(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ 앞에 있는 r^2 이었습니다. 따라서 4차원 Euclid 공간에서의 3-sphere에 대한 반경 제곱은 $(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ 앞에 있는 $\tilde{a}^2 \sin^2\psi$ 이 되어서 우리가 고려하는 구의 면적은 $4\pi\tilde{a}^2(t_0)\sin^2\psi_D$ 으로 표현됩니다. 이제 지구에 도달하는 빛알은 적색편이를 얻게 되는데 이때 두가지 효과가 생겨납니다. 첫번째 효과는 파장이 늘어나게 되어 적색편이가

$$1 + z_S = \frac{a(t_0)}{a(t_S)} \quad (3.143)$$

만큼 일어나고, 또한 빛알이 도착하는 비율도 같은 양 만큼 줄어들게 됩니다. 따라서 P 를 시간 t_S 에서 초신성이 방출하는 빛알에너지의 일율이라고 하면 현재 지구의 검출기에 측정되는 일율은

$$P_{\text{received}} = \frac{P}{(1+z_S)^2} \frac{A}{4\pi\tilde{a}^2(t_0)\psi_D} \quad (3.144)$$

으로 정리됩니다. 따라서 flux J 는

$$J = \frac{P_{\text{received}}}{A} = \frac{P}{4\pi(1+z_S)^2\tilde{a}^2(t_0)\psi_D} \quad (3.145)$$

으로 일단 표현할 수 있습니다. 여기서

$$\tilde{a}(t_0) = \frac{a(t_0)}{\sqrt{k}} = \frac{a(t_0)}{\sqrt{-\Omega_{k,0}a^2(t_0)H_0^2/c^2}} = \frac{cH_0^{-1}}{\sqrt{-\Omega_{k,0}}} \quad (3.146)$$

이고 $\psi_D = \psi(z_S)$ 로 표현하겠습니다. 이 $\psi(z_S)$ 는 빛알이 현재 적색편이 z_S 로 이동하게 된 궤도로서

$$ds^2 = 0 = -c^2dt^2 + \tilde{a}(t)d\psi^2 \rightarrow \frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{\tilde{a}(t)} \quad (3.147)$$

이고 $\tilde{a}(t)$ 에 대한 Friedman 방정식은 전과 같아서

$$H^2 = \left(\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}}\right)^2 = \frac{H_0^2}{x^4}(\Omega_{m,0}x + \Omega_{\text{rad},0} + \Omega_{\text{vac},0}x^4 + \Omega_{k,0}x^2) \quad (3.148)$$

$(x = a(t)/a(t_0) = \tilde{a}(t)/\tilde{a}(t_0))$ 입니다. 그리고 $\psi(z_S)$ 는 다음의 적분을 통하여

$$\psi(z_S) = \int_{t_S}^{t_0} \frac{c}{\tilde{a}(t)} dt \quad (3.149)$$

얻습니다(우리 논의에 의하면 $\psi_D = \psi(z_S)$). 그리고

$$1 + z = \frac{\tilde{a}(t_0)}{\tilde{a}(t)} \quad (3.150)$$

으로부터

$$dz = -\frac{\tilde{a}(t_0)}{\tilde{a}^2(t)} \dot{\tilde{a}} dt = -\tilde{a}(t_0) H(t) \frac{dt}{\tilde{a}(t)} \quad (3.151)$$

이므로 위의 적분은

$$\psi(z_S) = \frac{1}{\tilde{a}(t_0)} \int_0^{z_S} \frac{c}{H(z)} dz \quad (3.152)$$

로 바뀝니다. 여기서 $x = 1/(1+z)$ 임을 이용하면 최종적으로

$$\begin{aligned} \psi(z_S) &= \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \\ &\times \int_0^{z_S} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\text{rad},0}(1+z)^4 + \Omega_{\text{vac},0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2}} \end{aligned}$$

으로 정리됩니다. 그리고 flux는

$$J = \frac{PH_0^2 |\Omega k, 0|}{4\pi(1+z_S)^2 c^2 \sin^2 \psi(z_S)} \quad (3.153)$$

로 정리되어 관측 결과와 비교 가능하겠습니다.

1.9 에너지 밀도와 압력

우주를 구성하는 에너지 형태로는 복사(radiation), 물질(matter), 그리고 아직 무엇인지 잘 설명못하는 암흑에너지가 있습니다. 이제부터 각각의 에너지밀도와 압력과의 관계를 알아보겠습니다.

우선 복사(radiation)의 경우에 대하여 알아보겠습니다. 우선 길이 L 인 일차원 상자에 빛알 하나가 좌우로 왔다갔다 한다고 하겠습니다. 이 빛알이 벽과 충돌하면 복사 압력(radiation pressure)을 만들어 내는데 이제 이 압력을 계산해 보겠습니다. 이 경우 벽에 전달되는 힘을 F , 빛알의 운동량을 p , 빛의 속력을 c 라고 하면 뉴튼의 법칙에 의해

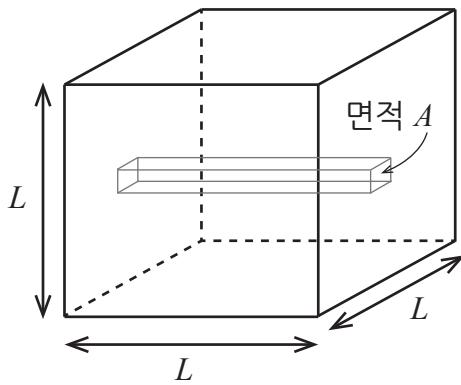


그림 3.9: 각 변의 길이가 L 인 삼차원 정육면체 안에 빛알들이 들어 있음.

$F = \Delta p / \Delta t$ 이 성립합니다. 이때 $\Delta p = 2p$ 이고 $\Delta t = 2L/c$ 가 성립하게 되어

$$F = \frac{2p}{2L/c} = \frac{pc}{L} = \frac{E}{L} \quad (3.154)$$

이 됩니다 (E 는 빛알의 에너지). 이제 빛알이 상자에 많이 있어서 통계적 평균을 취할 수 있다면 에너지 밀도 ρ 를 (일차원) 생각할 수 있어서 $F = \rho$ 라는 간단한 수식을 얻게 됩니다. 이제 이 논의를 삼차원으로 확장해 보겠습니다. 그림 (3.9)와 같이 삼차원 상자 내부에 수평 방향으로 작은 막대기 형태의 공간을 생각하고 양쪽 면의 면적은 A 라고 하겠습니다. 이제 빛알들의 삼차원 에너지밀도를 ρc^2 라고 하겠습니다 (에너지/체적). 일차원 경우에 $F = E/L$ 가 성립했으므로 $F/A = E/LA$ 가 되어 압력 P 는 $P = E/LA = \rho c^2$ 가 성립합니다. 그런데 빛알들은 일차원만으로 움직이는 것이 아니라 삼차원으로 움직이기 때문에 압력은 $1/3$ 으로 줄어들어서 사실은

$$P = \frac{\rho c^2}{3} \quad (3.155)$$

이 최종적으로 성립합니다.

이제 물질로만 이루어진 경우에 대해서 알아보겠습니다. 가상의 상자 안에 비상대론적인 입자(원소 또는 은하라고 생각해도 좋습니다)들이 있는 경우에 대하여 생각해 보면 이 입자들은 상자 안에서 “정지”해 있는 경우에 해당되어 당연히 압력은 $P = 0$ 이 되겠습니다. 물론 이 입자들이 상대론적이 된다면 물론 압력을 생각해 볼 수 있겠습니다.

이제 압력과 scale factor에 대한 좀더 일반적인 이야기를 해 보겠습니다. 일반적인

상태방정식(equation of state)은 압력과 에너지밀도의 관계식으로서

$$P = w\rho \quad (3.156)$$

으로 나타냅니다. 여기서 w 는 상수로서 다른 물리적 대상에 따라 달라지게 되어 cold matter일 경우에는 $w = 0$ 이고 그렇지 않고 복사(radiation)일 경우에는 $w = 1/3$ 이 될 것입니다.

가상의 상자에 임의의 입자들이 있어서 압력 P 를 상자에 인가한다고 가정합니다. 외부에서 한 쪽 면을 (면적은 A) dx 만큼 움직여 상자의 체적을 dV 만큼 증가시키는 경우 이때 면을 움직이는데 필요한 일은 $(PA)dx = PdV$ 가 되고 이 일은 상자 안의 내부 에너지의 감소($dE = -PdV$)로 나타납니다. 초기 상자 내부에너지 $E = \rho V$ 로 나타내면

$$dE = \rho dV + V d\rho = -P dV \quad (3.157)$$

가 되어

$$\frac{d\rho}{\rho} = -(w+1) \frac{dV}{V} \quad (3.158)$$

인 미분방정식으로 바뀌게 되고, 이 방정식에 대한 해는

$$\rho = \frac{C}{a^{3(w+1)}} \quad (3.159)$$

으로 나타냅니다 (마지막 과정에서 $V \propto a^3$ 을 이용하였음). 이를 Friedman 방정식에 대입하면

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{C}{a^{3(1+w)}} \quad (3.160)$$

으로 a 만의 미분방정식이 됩니다. 위에서도 풀었지만 가장 간단하게 이를 푸는 방법은 $a \propto t^p$ 를 가정하고 p 에 대하여 풀어보는 것입니다. 그런데 위의 해는 $w = -1$ 일 경우 특별한 의미를 가지게 됩니다. $w = -1$ 일 경우가 바로 vacuum energy 해가 되는 것으로 ρ 는 상수가 됩니다. 이 경우의 물리적 의미는 우주가 팽창하더라도 그 “에너지” 밀도는 희박해지지 않고 상수로 남는다는 뜻입니다. 이는 Einstein's cosmological constant 또는 암흑에너지(dark energy)로도 표현됩니다. $P = w\rho$ 에서 알 수 있듯이 이는 음수의 압력을 의미하고 이는 우리가 고무줄을 잡아당기면 줄어드는 압력이 만들어지는 것과 동일한 물리적 현상으로 이해할 수 있습니다. 다만 이러한 음수 압력을 만들어 내는 물리학적 원인에 대해서는 아직도 명확한 설명을 하지는 못하고 있습니다. 이제 $w = -1$ 인 경우

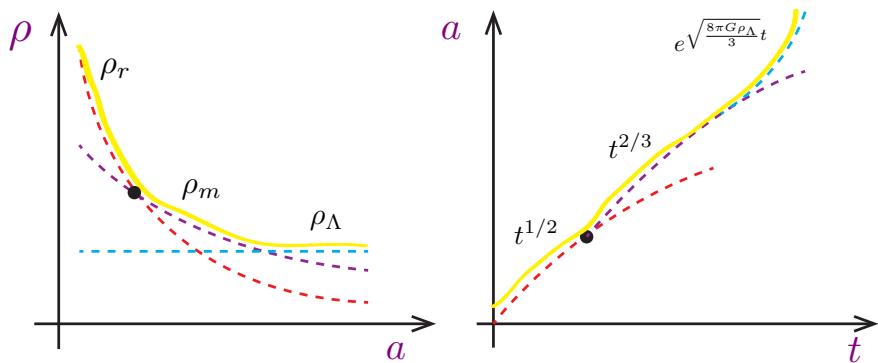


그림 3.10: 우주의 팽창에 따라 에너지 밀도와 scale factor가 어떠한 관계를 갖는가에 대한 그림이 원쪽, scale factor와 시간과의 관계 그림이 오른쪽에 나타나 있음. 두 그림에 있는 검은 점은 우주 탄생 후 약 50,000 년 후의 지점을 나타내고 있음.

에너지 밀도를 ρ_Λ 라 하면

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda \\ \frac{\dot{a}}{a} &= C e^{\sqrt{\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3}} t} \end{aligned} \quad (3.161)$$

로 풀 수 있습니다. 이에 따르면 우리 우주는 가속팽창을 하여 원칙적으로 그 크기가 무한대로 확장하게 됩니다. 이러한 확장은 무슨 의미일까요? 우리의 몸, 팔과 다리가 서로 떨어지는 것일까요? 그런 의미는 아닙니다. 우리의 몸을 이루고 있는 분자들간의 힘은 상대적으로 강해서 떨어지는 일은 없습니다. 그러나 아마도 super-cluster 들은 분해될것으로 이해되고 있습니다. 이제 지금까지의 논의는 표 (3.1)에 정리되어 있습니다.

표 3.1: 우주를 이루는 성분에 따른 에너지 밀도, scale factor, w , 압력의 관계.

성분	밀도(ρ)	a	w	압력(P)
물질(matter)	a^{-3}	$t^{2/3}$	0	0
복사(radiation)	a^{-4}	$t^{1/2}$	$1/3$	$\rho/3$
진공에너지(Λ)	ρ_Λ	$e^{\sqrt{\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3}} t}$	-1	$-\rho_\Lambda$

이제 우주의 에너지 밀도와 scale factor와의 관계를 그림으로 살펴보겠습니다. 복사(radiation)의 경우 에너지 밀도는 a^{-4} 에 비례하기 때문에 a 가 매우 작은 우주 초기에는 가장 큰 값을 가지게 되고 어느 시간이 지나고 나면 a^{-3} 항을 가진 물질(matter) 에너지 밀도가 가장 큰 공헌을 하게 됩니다. 이 시기는 우주 탄생 후 약 50,000 년 후로 알려져 있어서 우주배경복사가 우리에게 오기 전의 현상입니다. 따라서 이 시기의 물리현상을 직

접적으로 관측하기는 어렵습니다. 시간이 많이 흐르게 되면 복사 및 물질 에너지 밀도는 모두 희석되어 진공에너지 밀도가 가장 큰 공헌을 하게 되는 시기가 오게 됩니다. 현재 우리 우주는 바로 이러한 시기에 있는 것으로 알려져 있습니다. 이를 종합한 그림 두 가지가 그림 (3.10)에 정성적으로 나타나 있습니다. 오늘날에는 우리 우주를 이루는 에너지 성분의 분포는

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\text{total}}} \simeq 0.7, \quad \frac{\rho_m}{\rho_{\text{total}}} \simeq 0.3, \quad \frac{\rho_r}{\rho_{\text{total}}} \simeq 0 \quad (3.162)$$

가 되어 진공에너지 성분이 가장 많아서 70%, “물질” 성분은 30%, 그리고 복사에 의한 에너지 성분은 $10^{-3}\%$ 정도로 무시할 수 있을 정도로 작습니다. 또한 이 물질 성분은 암흑물질 성분(ρ_D)과 눈으로 볼 수 있는 물질 성분(ρ_L)으로 나눌 수 있어서 $\rho_D/\rho_{\text{total}} = 0.25$, $\rho_L/\rho_{\text{total}} = 0.05$ 입니다. 즉, 물질 성분에서는 암흑물질이 대부분을 차지합니다.

지금까지의 논의에 의하면 먼 훗날의 우리 우주는 팽창가속을 계속하여 암흑에너지가 거의 모든 우주의 에너지가 될 것임을 예측합니다. 이 경우

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \simeq \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda} \quad (3.163)$$

가 됩니다. Hubble 법칙 $v = Hr$ 를 이용하면 우리가 관찰하는 물체의 속력이 빛의 속력이 되는 거리인 horizon은

$$D = \frac{1}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda}} \quad (3.164)$$

으로 정리됩니다 (여기서 $c = 1$ 을 가정하였음).

먼 미래의 천문학자에게는 우주는 어떻게 보일까요? 태양계와 은하계는 중력에 의해 지금과 별 다름이 없을 것이지만 super-cluster들은 분해될 것입니다. 따라서 미래의 천문학자는 우리 은하 외에는 다른 은하는 거의 보이지 않을 것입니다 (다른 은하들은 horizon을 넘어섰기 때문에). 즉, 은하계는 아주 텅 빈 우주의 중심에 있는 섬으로 생 각될 것이고 우주가 팽창하다는 그 어떠한 실험적 증거를 찾기 어려울 것입니다. 별로 흥미로운 우주도 아니고 암흑에너지라는 개념을 생각하기 어려울 것입니다.

제 2 절 우주의 기하학적 구조

이제부터는 우주 공간의 구조 및 특성에 대하여 알아보겠습니다. 아주 간단한 구(sphere)의 논의를 시작으로 궁극적으로는 일반상대론과 어떻게 연결되는가에 대한 논의를 하려고 합니다.

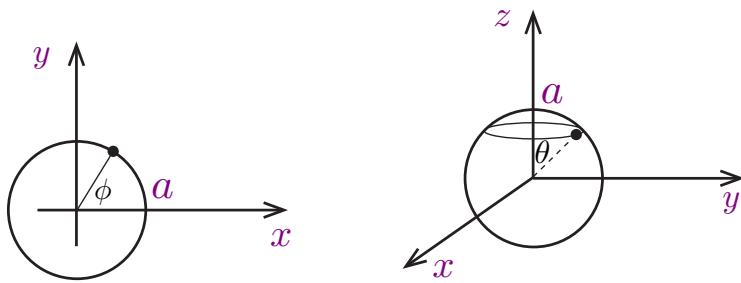


그림 3.11: 왼쪽 그림은 이차원 공간에 놓여있는 반경이 a 인 1-sphere, 오른쪽 그림은 삼차원 공간에 놓여있는 반경이 a 인 2-sphere를 나타내고 있습니다.

2.1 N-Sphere

이제 잠시 약간 수학적인 개념에 대하여 논의하겠습니다. 우선 “일차원 구”를 생각합니다. 이 공간은 양의 곡률을 가지고 있습니다 (음의 곡률을 가지는 공간은 다음에 논의). 수학에서는 이를 1-sphere라고 부르는데 이는 그림 (3.11)의 왼쪽에 나타나 있는 바와 같이 이차원 평면에 있는 반경이 a 인 원으로 생각할 수 있어서 이차원 좌표계를 쓰면 $x^2 + y^2 = a^2$ 으로 기술할 수 있습니다. 특히 반경이 1인 원은 unit 1-sphere (Ω_1)으로 표현합니다. 1-sphere에 사는 생명체는 그야말로 일차원 생명체로 우리와 달리 2차원을 감지하지 못합니다. 이러한 경우를 확장하여 그림 (3.11) 오른쪽의 경우인 삼차원 공간에 있는 구의 표면을 생각합니다. 이러한 경우 표면의 임의의 한 점은 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 을 만족시킬 것이고 이를 2-sphere라고 부릅니다. 마찬가지로 반경이 1인 경우 unit 2-sphere (Ω_2)라는 특별한 이름을 갖습니다. 마찬가지로 2-sphere에 살고 있는 생명체는 삼차원이라는 개념에 대하여 전혀 모르고 있습니다. 수학적으로는 이 개념을 확장하여 일반적인 N-sphere도 생각할 수 있으나 우리의 논의는 대개 3-sphere까지만 알아도 충분합니다. 수학을 좋아하는 사람들에게는 $\Omega_n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ 이 더 친숙할지도 모르겠습니다 (\mathbf{R}^n 은 n 차원 Euclid 공간). 이제 이를 바탕으로 metric에 대하여 살펴보겠습니다.

그림 (3.11)에서 알 수 있듯이 1-sphere에 있는 임의의 한 점을 나타내기 위한 변수는 각도 ϕ 으로 충분하고 unit 1-shpere 공간의 미소길이제곱 $ds^2 = d\phi^2 \equiv d\Omega_1^2$ 으로 표현됩니다. 또한 유사하게 2-sphere에 있는 임의의 점을 기술하기 위해서는 각도 ϕ 와 θ 두개가 필요합니다 (그림 (3.11) 참고). 이 2-sphere 공간의 경우 미소길이제곱은 어떻게 될까요? 이를 알기 위해서 구면좌표를 이용할 수도 있지만 다음과 같이 생각해 보겠습니다. 즉, 그림 (3.11)에서 오른쪽의 경우와 같은 경우 임의의 점은 반경이 $\sin \theta$ 인 1-sphere가 있는 점으로 생각되어 미소길이제곱은 $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + (\sin \theta d\phi)^2$ 혹은 $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_1^2$ 으로 나타낼 수 있습니다. 그러면 unit 3-sphere 공간의 미소길

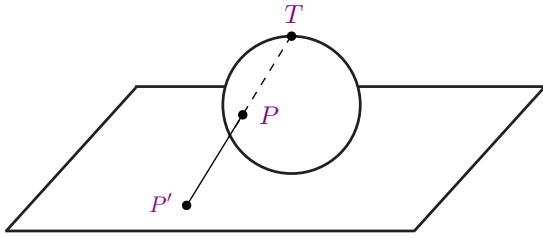


그림 3.12: Stereographic projection을 설명하는 그림. 2-sphere 공간의 한점 P 는 맨 윗점 T 와 연결되는 직선과 평면이 만나는 점 P' 으로 투영된다.

이제 곱 $d\Omega_3^2$ 은 어떻게 표현될까요? 사차원 공간을 상상할 수가 없기 때문에 이번 경우에는 딱히 상상하기가 어렵습니다. 좀전에 Ω_2 의 경우에 있어서 각도 θ 를 도입했고 반경이 서로 다른 Ω_1 들이 많이 모여 있는 것으로 생각할 수 있다고 했습니다. 그리고 미소길이 제곱을 구하기 위하여 그 새로운 각도에 대한 \sin 함수가 곱해졌습니다. 마찬가지로 Ω_3 는 반경이 서로 다른 Ω_2 가 많이 모여 있는 경우로 생각할 수 있어서 새로운 각도를 α 라 하면

$$\begin{aligned} d\Omega_3^2 &= d\alpha^2 + \sin^2 \alpha \, d\Omega_2^2 \\ &= d\alpha^2 + \sin^2 \alpha [d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\Omega_1^2] \end{aligned} \quad (3.165)$$

으로 나타납니다. 논의를 완벽하게 하기 위하여 잠시 0-sphere에 대하여 생각해 보겠습니다. 0-sphere는 $x^2 = 1$, 즉 $x = \pm 1$ 으로 두 점으로 이루어져 있습니다. 우리의 논의에 따르면 1-sphere는 반경이 다른 0-sphere의 집합으로 만들 수 있습니다.

위의 수식을 바탕으로 이제 우주론에 대하여 이야기 합니다. Big Bang을 생각하면 공간이 시간이 지남에 따라 확장하는것이고 이를 고유시간으로 나타내면

$$(cd\tau)^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \, d\Omega_3^2 \quad (3.166)$$

이고 위의 수식 (3.166)을 FRW metric이라고 부르고 이 metric은 양수의 곡률(curvature)을 가지고 있습니다. 앞으로 이 metric에 대하여 많은 이야기를 할 예정입니다.

이제 한가지 특수한 투영방법에 대하여 이야기해 보겠습니다. 이는 stereographic projection이라 부르며 그림 (??에 설명되어 있습니다. 삼차원 공간에 이차원 평면이 있고 그 위에 2-sphere가 놓여 있는 경우에 해당되고 2-sphere에 있는 임의의 점이 이차원 평면에 어떻게 대응되는가를 생각해 봅니다. 그림에서 나타나는 것처럼 2-sphere에 있는 임의의 점 P 와 2-sphere에 있는 맨 위의 점 T 를 삼차원 직선으로 연결하면 밑의 이차원 평면과 만나게 됩니다. 이 점 P' 이 이차원 평면에 투영된 새로운 점으로 생각하는 것입니다. 그렇다면 2-sphere에 있는 점 T 는 어디로 투영되는 것일까요? 바로 이차원 평면의



그림 3.13: \mathcal{H}_2 를 설명하는 그림. 1-sphere들이 모여 말안장 모양의 \mathcal{H}_2 공간을 형성하고 있음.

무한대 점으로 투영되는 것입니다. 한가지 쉽게 짐작할 수 있는 것으로는 바닥쪽에 있는 2-sphere 공간의 모양은 평면에 투영되어 모양과 크기가 별로 바뀌지 않을 것이지만 상대적으로 점 T 근처에 있는 모양은 평면에서 많이 확대될 것이라는 사실입니다.⁸

위에서 논의했던 N-sphere와 관련하여 음수의 곡률을 가지는 공간에 대하여 알아보겠습니다. N-sphere의 경우에는

$$d\Omega_n^2 = d\alpha^2 + \sin^2 \alpha \ d\Omega_{n-1}^2 \quad (3.167)$$

이었던 점을 가만하여 음수의 상수 곡률을 갖는 공간 \mathcal{H}_n 을

$$d\mathcal{H}_n^2 = d\alpha^2 + \sinh^2 \alpha \ d\Omega_{n-1}^2 \quad (3.168)$$

으로 정의합니다. N-sphere의 경우와 다른 점은 α 는 0에서 ∞ 까지 정의된다는 점입니다. 잠깐 이해를 돋기 위해 \mathcal{H}_2 를 생각해 보겠습니다. \mathcal{H}_2 는 Ω_2 와 달리 삼자원 공간에 넣을 수 없습니다. 다만 그 일부는 넣을 수 있어서 말 안장과 같은 모양이 됩니다. \mathcal{H}_2 는 Ω_1 의 집합으로 나타낼 수 있는데 다만 이 경우 원점으로부터 Ω_1 의 반경이 점점 무한대로 커지는 것으로 이해할 수 있습니다 (그림 (3.13) 참고). 음수 상수곡률을 가지는 시공간의 FRW metric은 따라서

$$(ds)^2 = -(cd\tau)^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 d\mathcal{H}_3^2 \quad (3.169)$$

으로 표현됩니다.

마지막으로 남아 있는 시공간은 당연히 휘어있지 않은 시공간입니다. 이 경우의 FRW metric은

$$(ds)^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (3.170)$$

으로 표현됩니다.

⁸수학에 좀더 관심있는 사람이라면 2-sphere 공간에 있는 원은 다시 원으로 투영되고 각도도 바뀌지 않는다는 (conformal mapping)는 사실을 증명할 수 있을 것입니다.

2.2 3-Sphere

이제 4차원 Euclid 공간에 놓여 있는 3차원 구면(3-sphere)을 기술하겠습니다. 물론 이를 시각적으로 표현할 수는 없기 때문에 3차원 Euclid 공간에 놓여 있는 2차원 구면으로부터 확장합니다. 일반적으로 구면 좌표계를 사용하면 2-sphere 의 좌표는 (ϕ, θ) 를 사용하게 되고 Euclid 3차원 좌표 (x, y, z) 와는

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \\ x &= R \sin \theta \cos \phi \\ y &= R \sin \theta \sin \phi \\ z &= R \cos \theta \end{aligned} \tag{3.171}$$

와 같은 관계식을 갖습니다. 여기서 R 은 구의 반경으로 생각하면 되겠습니다. 이제 4 차원 Euclid 공간으로 확장하여 4번째 좌표를 w 라 하면

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2 \tag{3.172}$$

이 만족됩니다. 이제 이 네번째 축 w 와 각도 ψ 를 갖는 3-sphere의 한 점 (θ, ϕ, ψ) 와 (x, y, z, w) 와의 관계는 어떻게 되겠습니까? 1-sphere의 경우와 2-sphere의 경우를 비교해 보면

1-sphere	2-sphere
$x = R \cos \phi$	$x = R \sin \theta \cos \phi$
$y = R \sin \phi$	$y = R \sin \theta \sin \phi$
$z = R \cos \theta$	

(3.173)

임을 생각하면 3-shpere의 경우에는

$$\begin{aligned} x &= R \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ y &= R \sin \psi \sin \theta \sin \phi \\ z &= R \sin \psi \cos \theta \\ w &= R \cos \psi \end{aligned} \tag{3.174}$$

와 같이 되어야 할 것입니다. 이는 1,2-sphere에 대한 관계식으로부터 유추한 것으로 의심이 된다면 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$ 의 관계식이 성립하는지 확인해 보면 될 것입니다. 한가지 주의할 점은 $\phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi], \psi \in [0, \pi]$ 라는 점입니다. 이 3차원 곡면 위의

metric은

$$\begin{aligned}
 & dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = \\
 & R^2(\cos \psi \sin \theta \cos \phi d\psi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi d\theta - \sin \psi \sin \theta \sin \phi d\phi)^2 \\
 & + R^2(\cos \psi \sin \theta \sin \phi d\psi + \sin \psi \cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \psi \sin \theta \cos \phi d\phi)^2 \\
 & + R^2(\cos \psi \cos \theta d\psi - \sin \psi \sin \theta d\theta)^2 \\
 & + R^2 \sin^2 \psi \, d\psi \\
 & = R^2[d\psi^2 + \sin^2 \psi(d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\phi^2)] \tag{3.175}
 \end{aligned}$$

임을 알 수 있습니다. 복잡한가요? 좀 더 쉽게 이를 구하는 방법으로 다음과 같이 생각할 수 있습니다. 2-sphere의 metric은 $ds_{2\text{-dim}}^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ 이었음을 기억합니다. 이제 3-sphere에서 ψ 가 상수일 경우 미소길이제곱은

$$ds_{3\text{-dim}, \psi=\text{상수}}^2 = ds_{2\text{-dim}, R \rightarrow R \sin \psi}^2 \tag{3.176}$$

임을 이해하고 ψ 만 변할때 미소길이가 $ds_\psi = R d\psi$ 임을 알면

$$ds_{3\text{-dim}}^2 = ds_{3\text{-dim}, \psi=\text{상수}}^2 + ds_\psi^2 = R^2[d\psi^2 + \sin^2 \psi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \tag{3.177}$$

이 성립함을 쉽게 알 수 있습니다. 이제 위의 식을 약간 변형해 보겠습니다. 이를 위하여 $u \equiv \sin \psi$ 로 놓으면

$$d\psi = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \tag{3.178}$$

이 성립하여

$$ds_{3\text{-dim}}^2 = R^2 \left[\frac{du^2}{1-u^2} + u^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \tag{3.179}$$

으로 표현됩니다. 이제 Friedman 방정식에서 나왔던 $a(t)/\sqrt{k}$ 와 연결을 하는 순서입니다. 우리의 우주는 팽창하고 이러한 팽창은 scale factor로 기술된다고 했습니다. 따라서 $R^2(t) = a^2(t)/k$ 로 놓는 것이 “자연스러운” 선택이 되어 ($[k] = \text{m}^{-2}$)

$$ds_{3\text{-dim}}^2 = \frac{a^2(t)}{k} \left[\frac{du^2}{1-u^2} + u^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \tag{3.180}$$

으로 바뀌고 최종적으로 $r \equiv u/\sqrt{k} = \sin \psi/\sqrt{k}$ 라면

(Friedmann-Robertson-Walker metric)

$$ds_{3\text{-dim}}^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (3.181)$$

으로 최종 정리됩니다. 위의 수식은 (Friedmann-)Robertson-Walker metric이라 불리우며 **팽창하는 우리 우주의 공간부분에 대한 metric**으로 여겨집니다. 즉 우리 우주는 3-sphere로 이해되고 있습니다.

제 3 절 표준 우주론의 문제점

Friedmann 방정식으로 기술되는 우리 우주의 팽창 모형은 표준 우주론으로 받아들여지고 있습니다. 즉, 그럼 (3.10)에서 나타나는 바와 같이 우리 우주는 빅뱅 이후 연속적으로 부드럽게 팽창해 왔다고 이해되고 있습니다. 이러한 표준 우주론에는 몇가지 문제점이 있는데 앞으로 이 문제점들에 대하여 이야기하려고 합니다. 이를 위하여 우선 우주배경복사에 대하여 알아보겠습니다. 우주배경복사는 빅뱅 초기 전자, 양성자와 산란을 하던 빛알들이 우주가 팽창하여 식어감에 따라 더이상 산란을 하지 않게 되어 (우주가 빛알에 대하여 투명하게 되어) 직선 운동을 하게 되어 오늘날 우리에게 보이는 빛알입니다. 이 시기는 빅뱅후 약 380,000 년 정도로 알려져 있으며 이 당시의 공간을 last scattering surface (LSS)라고 부릅니다. 또한 관측에 의하면 우주배경복사의 온도는 평균 2.7 K이고 이 값은 10^{-5} 수준에서 등방적입니다. 또한 우리 우주는 오늘날 매우 편평하여 $\Omega_0 - 1 < 0.005$ 정도로 알려져 있습니다. 이러한 관측적인 사실은 빅뱅우주론으로 설명하기 매우 어렵고 앞으로 이러한 문제점들에 대하여 설명합니다.

3.1 Horizon 문제

이제 빅뱅이론의 문제점 중 horizon 문제에 대하여 이야기해 보겠습니다. 이를 위하여 먼저 편평하고 비상대론적인 물질로 이루어진 우주의 경우 오늘날과 과거의 어느 시간 t 와의 물리적 좌표거리를 적색 편이 z 로 나타내 보겠습니다. 이 경우

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)} = \left(\frac{t_0}{t} \right)^{2/3}, \quad H_0 = 2/(3t_0) \quad (3.182)$$

이었습니다. 이 경우 오늘날 우리와 특정 시점에서의 물리적 좌표거리는

$$\begin{aligned} \ell_p(t) &= a(t_0) \int_t^{t_0} \frac{c dt'}{a(t')} = 3ct_0^{2/3}(t_0^{1/3} - t^{1/3}) \\ &= 3ct_0(1 - (t/t_0)^{1/3}) = 2cH_0^{-1} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right] \end{aligned} \quad (3.183)$$

로 표현됩니다. 이를 이용하여 현재 서로 반대쪽에서 우리로 이동하는 우주배경복사 빛의 물리적 거리를 계산하겠습니다. 이를 위하여 필요한 숫자들은 빛알이 전하입자와의 충돌로부터 벗어나기 시작한 시간 $t_d \simeq 370,000$ year, 그 당시의 온도 $T(t_d) \simeq 3,000$ K, 당시의 우주는 열적평형에 있어서 엔트로피가 상수로서 $aT \simeq \text{constant}$ 임을 이용합니다. 이러할 경우

$$1 + z_d = \frac{a(t_0)}{a(t_d)} = \frac{3000 \text{ K}}{2.7 \text{ K}} \simeq 1,100 \quad (3.184)$$

이고, 이를 이용하여 오늘날 우리와 LSS와의 물리적 거리를 계산하면

$$\begin{aligned} \ell_{\text{p,LSS-us},t_0} &= 2cH_0^{-1} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z_d}} \right] = \frac{2 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}}{67.3 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1101}} \right) \\ &\simeq 28.2 \times 10^9 \text{ light-year} \end{aligned} \quad (3.185)$$

입니다. 그리고 현재가 아닌 t_d 일 경우 우리와 LSS간의 거리는

$$\begin{aligned} \ell_{\text{p,LSS-us},t_d} &= \frac{a(t_d)}{a(t_0)} \ell_{\text{p,LSS-us},t_0} = \frac{2.7 \text{ K}}{3000 \text{ K}} \cdot 28.2 \times 10^9 \text{ light-year} \\ &\simeq 2.56 \times 10^7 \text{ light-year} \end{aligned} \quad (3.186)$$

로 계산됩니다. 한편 t_d 의 시간에 horizon distance는

$$\ell_{\text{p,horizon},t_d} = 3ct_d \simeq 1.1 \times 10^6 \text{ light-year} \quad (3.187)$$

가 되어

$$\frac{\ell_{\text{p,LSS-us},t_d}}{\ell_{\text{p,horizon},t_d}} \simeq 23 \quad (3.188)$$

입니다. 즉, 시간 t_d 에 두 빛알은 horizon distance의 46배 만큼이나 떨어져 있다는 결론입니다. 이는 유한한 빛의 속력을 가정하면 설명하기 매우 어려운 문제로 해석되고 이를 horizon 문제라고 부릅니다.

3.2 편평도 문제(Flatness Problem)

표준 빅뱅모형의 두번째 문제는 편평도 문제로 알려져 있습니다. 이는 현재의 Ω 값이 왜 1에 가까운 값인가 하는 것입니다. 이는 $\Omega = 1$ 인 상태는 불안정한 평형 상태라는 것으로부터 출발합니다. 즉, 우주가 초기에 $\Omega = 1$ 에서 조금이라도 벗어나면 현재 우리 우주는 편평하지 않게 보여야 한다는 의미이고 앞으로 현재의 Ω 값을 설명하려면 초기우주의 Ω 값이 얼마나 미세하게 조절되어야 하는지 살펴보겠습니다. 이를 위하여 Friedmann 방정

식을

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (3.189)$$

$\rho_c = 3H^2/8\pi G$ 를 이용하여 다시 쓰면

$$\rho_c = \rho - \frac{3kc^2}{8\pi Ga^2} \quad (3.190)$$

이 되어

$$\frac{\rho - \rho_c}{\rho} = \frac{3kc^2}{8\pi Ga^2\rho} \quad (3.191)$$

으로 정리됩니다. 원쪽항의 분모분자를 ρ_c 로 나누면 Ω 로 표현할 수 있어서

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} = \frac{3kc^2}{8\pi Ga^2 T^2} \frac{T^2}{\rho} \equiv A \frac{T^2}{\rho} \quad (3.192)$$

으로 다시 쓸 수 있습니다 ($A = 3kc^2/8\pi Ga^2 T^2$). 이렇게 표현한 이유는 horizon 문제 논의시 $aT \simeq \text{constant}$ 으로 생각할 수 있어서 변수 A 를 상수로 근사할 수 있기 때문입니다. 이제 이 식을 이용해서 우주가 빅뱅 후 1초 후와 오늘날의 $(\Omega - 1)/\Omega$ 값과의 관계를 계산합니다. 1초 후가 중요한 이유는 적어도 이 때에는 표준 빅뱅 모형에 별 문제가 없는 것으로 알려져 있기 때문입니다. 이 때에는 nuclear synthesis가 일어나게 되고 이때의 물리적 반응에 대한 계산과 관측은 매우 잘 일치한다는 것이 알려져 있습니다. 비상대론적 물질로 이루어진 편평한 우주에서는 $T \propto 1/a, \rho \propto 1/a^3, a \propto t^{2/3}$ 으로

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} \propto a \propto t^{2/3} \quad (3.193)$$

이고 복사가 대부분인 편평한 우주에서는 $T \propto 1/a, \rho \propto 1/a^4, a \propto t^{1/2}$ 으로

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} \propto a^2 \propto t \quad (3.194)$$

입니다. 계산을 간단하게 하기 위하여 우주의 역사는 복사가 대부분인 우주에서 비상대론적 우주로 전이하였고 (이때 시간을 대략 빅뱅 이후 50,000 년으로 생각함) 우주의 나이를 13.7×10^9 년이라고 가정합니다. 그러면

$$\left(\frac{\Omega - 1}{\Omega} \right)_{t=50,000 \text{ year}} \simeq \left(\frac{50,000}{13.7 \times 10^9} \right)^{2/3} \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \simeq 2.37 \times 10^{-4} \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \quad (3.195)$$

으로 계산됩니다. 한편

$$\frac{1 \text{ s}}{50,000 \text{ year}} \simeq \frac{1 \text{ s}}{50,000 \text{ year}} \times \frac{1 \text{ year}}{3.16 \times 10^7 \text{ s}} \simeq 6.33 \times 10^{-13} \quad (3.196)$$

입니다. 따라서

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Omega - 1}{\Omega} \right)_{t=1 \text{ s}} &\simeq 6.33 \times 10^{-13} \left(\frac{\Omega - 1}{\Omega} \right)_{t=50,000 \text{ year}} \\ &\simeq 1.50 \times 10^{-16} \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right) \end{aligned} \quad (3.197)$$

입니다. 최근 Planck 측정에 의하면 $\Omega_0 - 1 < 0.005^\circ$ 이고 \circ 는

$$|\Omega - 1|_{t=1 \text{ s}} < 10^{-18} \quad (3.198)$$

이라는 결과를 의미합니다. 따라서 빅뱅 1초후 Ω 의 값이 숫자 18자리까지 정확하게 1 이어야 합니다. 이러한 사실은 빅뱅 우주론으로는 설명을 하지 못합니다 (초기조건으로 받아들이는 것은 문제가 없으나 이를 설명하지는 못함).

제 4 장 일반좌표계 (Generalized Coordinates)

Einstein은 시공간에 곡률을 도입함으로서 뉴튼의 중력이론을 바꾸었습니다. 예를 들어 입자가 시공간을 똑바로 이동하더라도 아주 무거운 물체에 의하여 시공간이 자체가 휘어있으면 처음에는 서로 평행하게 이동하던 두 입자가 서로 만나게 됩니다. 그럼 4.1이 그 상황을 잘 설명하고 있습니다. 2차원 구면에서 평행한 두 입자가 2차원 구면을 따라 평행하게 이동해도 북극에서 만나게 되고 그 이유는 2차원 구면이 휘어 있기 때문입니다. 즉, 일반상대론에서는 중력은 없고 다만 휘어진 시공간이 있는 것입니다.

제 1 절 좌표계

이제 일반적인 N -차원 공간을 생각하여 각각의 좌표를 $x^1, x^2, x^3, \dots, x^N$ 이라 합니다. 이 공간에 곡선이 존재한다고 하면 그 곡선은 N 개의 서로 다른 매개변수 수식들로

$$x^\alpha = x^\alpha(\lambda) \quad (4.1)$$

와 같이 표현할 수 있습니다. 여기서 λ 는 임의의 매개변수로 곡선을 따라 위치를 표시하는데 사용됩니다. 예를 들어 2차원 공간에 반경이 1인 원이 있다면 $x^1 = \cos \lambda, x^2 = \sin \lambda$ 와 같이 표현할 수 있고 이때 λ 는 곡선의 한 지점을 나타내는 매개변수로 기하학적으로는 각도의 의미를 갖습니다.

좌표계는 임의의 변환에 의해 다음과 같이

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^N) \quad (4.2)$$

새로운 좌표들로 나타낼 수 있습니다. 예를 들어

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2)^{1/2} \\ \theta &= \cos^{-1}(x/r) \end{aligned} \quad (4.3)$$

는 2차원 Cartesian 좌표계를 2차원 극좌표계로 바꾸어 줍니다. 또한 특수상대성 이론에

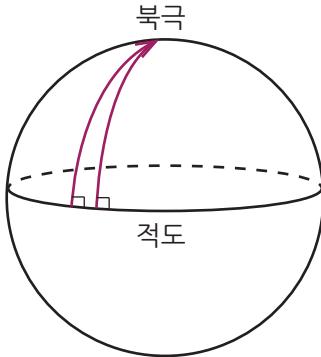


그림 4.1: 적도에서 북극으로 서로 평행하게 출발한 두 사람이 북극에서 만나게 되는 상황을 설명한 그림.

서

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} \quad (4.4)$$

임을 기억하고 식 (4.2)을 미분하면

$$dx'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} \quad (4.5)$$

○이고 $\partial x'^{\alpha} / \partial x^{\beta}$ 를 이용하여 미소거리에 대한 변환을 나타내는 $N \times N$ 행렬 L 을

$$L = \begin{pmatrix} \partial x'^1 / \partial x_1 & \partial x'^1 / \partial x_2 & \dots & \partial x'^1 / \partial x_N \\ \partial x'^2 / \partial x_1 & \partial x'^2 / \partial x_2 & \dots & \partial x'^2 / \partial x_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial x'^N / \partial x_1 & \partial x'^N / \partial x_2 & \dots & \partial x'^N / \partial x_N \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

으로 정의할 수 있습니다. 다만 특수상대성이론에서의 $\Lambda^{\alpha'}_{\beta}$ 는 상수이었으나 여기서 $L^{\alpha'}_{\beta}$ 은 일반적으로 상수가 아니고 미소거리에 대한 변환에 대한 변환행렬이라는 점입니다.

1.1 일반적인 metric tensor

일반 공간에서 metric tensor $g_{\alpha\beta}$ 는 그 공간에서 미소거리제곱을 ds^2 이라 했을 경우

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \quad (4.7)$$

의 수식으로 정의합니다. 예를 들어 3차원 Euclidean 기하학을 다루기 위하여 Cartesian 좌표계를 사용하면

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (4.8)$$

이기 때문에 metric tensor는 $g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = 1$ 이고 나머지 성분은 모두 0입니다. 그렇지만 만일 원통좌표계를 사용하면

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (4.9)$$

이 되어 $g_{rr} = 1, g_{\phi\phi} = r^2, g_{zz} = 1$ 이고 나머지 성분은 모두 0입니다. 즉, 편형한 3차원 Euclidean 기하구조라 할지라도 좌표계를 어떻게 설정하는가에 따라 metric tensor 가 복잡해 질 수 있습니다.

1.2 Metric tensor 변환

미소길이의 제곱은 좌표계의 선택에 무관해야 하므로

$$ds^2 = g_{\gamma\delta} dx^\gamma dx^\delta = g'_{\alpha\beta} (dx')^\alpha (dx')^\beta \quad (4.10)$$

가 만족됩니다. 한편 임의의 두 좌표계 사이 미소성분은

$$dx^\gamma = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} (dx')^\alpha, \quad dx^\delta = \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} (dx')^\beta \quad (4.11)$$

이므로

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\gamma\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} (dx')^\alpha \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} (dx')^\beta \\ &= g'_{\alpha\beta} (dx')^\alpha (dx')^\beta \\ \therefore 0 &= \left(g_{\gamma\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} - g'_{\alpha\beta} \right) (dx')^\alpha (dx')^\beta \end{aligned} \quad (4.12)$$

을 항상 만족시켜야 하므로

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\gamma\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} \quad (4.13)$$

이 항상 성립됩니다. 즉, 변환 규칙으로부터 알 수 있는 텐서의 정의에 의하여 $g_{\alpha\beta}$ 는 텐서입니다.

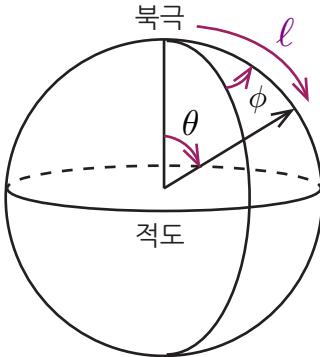


그림 4.2: 북극에서 거리 ℓ 만큼 내려와서 수평으로 각도 ϕ 만큼 이동하는 상황을 설명한 그림.

1.1 Example. Cartesian 좌표계와 원통좌표계의 관계 및 수식 (4.13)을 이용하여 원통좌표계에서의 metric 텐서를 구하세요.

두 좌표계 간의 관계식

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi, \\ z &= z \end{aligned} \tag{4.14}$$

으로부터 $\partial x / \partial r = \cos \phi, \partial y / \partial r = \sin \phi, \partial z / \partial r = 0^\circ$]므로

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \frac{\partial x^i}{\partial r} \frac{\partial x^j}{\partial r} g_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial r} \frac{\partial x^j}{\partial r} \delta_{ij} \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \\ &= \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1 \end{aligned} \tag{4.15}$$

○]고,

$$g_{\phi\phi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi} \right)^2 = (-r \sin \phi)^2 + (r \cos \phi)^2 = r^2 \tag{4.16}$$

이 됩니다. 그리고 $g_{zz} = 1$ 은 쉽게 구할 수 있고 나머지 항들은 모두 0입니다. ■

이제부터 실제로 휘어진 공간에서의 거리에 대하여 생각해 보겠습니다. 다루기 비교적 쉬운 것으로 반경이 R 인 3차원 구의 표면을 생각합니다. 맨 위 지점(북극)으로 부터 아래쪽으로 내려간 한 지점까지의 거리를 ℓ , 북극에서 그때까지 내려온 각도를 θ , 수평이

동시 움직인 각도를 ϕ 라고 하면 (그림 (4.2) 참고) 미소거리의 제곱은

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\ell^2 + R^2 \sin^2 \theta \, d\phi^2 \\ &= d\ell^2 + R^2 \sin^2 \left(\frac{\ell}{R} \right) d\phi^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

으로 정리되어 $g_{\ell\ell} = 1$, $g_{\phi\phi} = R^2 \sin^2(\ell/R)$ 이 됩니다. 이 휘어진 2차원 공간에서 원을 그리고 그 원의 길이 C 를 계산하면 ($d\ell = 0$ 으로 놓고 ϕ 에 대하여 ds 를 적분 하면 됨)

$$C = 2\pi R \sin \left(\frac{\ell}{R} \right) < 2\pi\ell \quad (4.18)$$

임을 알 수 있습니다. 예를 들어 지구 표면에서 반경이 $\ell = 10$ km인 원은 평면에서의 원보다 그 길이가 약 2.6 cm 짧습니다.

이제 구면에 대한 metric을 구해보겠습니다. 우선 Euclidean 3차원에서 반경이 R 인 구의 방정식

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (4.19)$$

을 생각합니다. 만일 $x - y$ 평면에서 극좌표계 (r, θ) 를 사용하면 위의 수식은

$$r^2 + z^2 = R^2 \quad (4.20)$$

o]고 Euclidean 3차원에서 미소길이 ds 제곱은

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (4.21)$$

이지만 구면에서의 길이만 알고 싶으면 수식 (4.20)을 미분하면서 R 은 상수라는 조건을 사용하면

$$2rdr + 2zdz = 0 \quad (4.22)$$

을 얻을 수 있어서 변수 z 를 없앨 수 있습니다. 즉,

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + \frac{r^2}{z^2} dr^2 = r^2 d\theta^2 + \left(1 + \frac{r^2}{z^2} \right) dr^2 \\ &= r^2 d\theta^2 + \left(1 + \frac{r^2}{R^2 - r^2} \right) dr^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\theta^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

○]고 curvature $k = 1/R^2$ 를 도입하면

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 \quad (4.24)$$

과 같이 표현됩니다. 위의 경우는 $k > 0$ 인 경우였지만 $k < 0$ 인 공간도 수학적으로는 아무런 문제가 없습니다. 위의 표현은 3차원에서의 곡면을 다루는 수식으로 자연스럽게 확장할 수 있음에 유의하기 바랍니다.

제 2 절 일반 좌표계에서 미분

이제까지의 지식을 바탕으로 일반 좌표계에서 미분을 할 경우 어떠한 표현식들이 나오는지 살펴보겠습니다.

2.1 벡터의 covariant derivatives

특수상대성 이론의 논의에서 $\partial V^\alpha / \partial x^\beta$ 는 텐서 성분이라는 것을 보였습니다. 하지만 일반상대론에서는 그렇지 않습니다. 예를 들어 벡터 $\mathbf{V} = V^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ 를 미분하면

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \mathbf{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (4.25)$$

가 된다. 두번째 항 $\partial \mathbf{e}_\alpha / \partial x^\beta$ 도 결국 벡터이므로 basis 벡터 \mathbf{e}_α 들의 선형 결합으로 나타나게 될 것이다. 따라서 다음과 같은 양

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \equiv \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\gamma \quad (4.26)$$

을 정의하겠습니다. 여기서 $\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}$ 는 인자를 세개 갖는데 그 이유로는 일단 basis 벡터에 대한 선형 결합으로 γ 가 필요하고 좌변에 이미 α 와 β 가 있기 때문에 총 3개가 필요한 것으로 이해하면 됩니다. 이 기호 $\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}$ 는 **connection coefficients** 혹은 **Christoffel symbols**라고 부릅니다.¹ 따라서

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^\beta} = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} V^\gamma \right) \mathbf{e}_\alpha \quad (4.27)$$

로 쓸 수 있습니다. 벡터의 미분은 텐서를 만들어야 하므로

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} V^\gamma \quad (4.28)$$

는 텐서의 성분이 되어야 하고 이를 **covariant derivative**라고 부르고 좌표계에 무관한 표현으로는 $\nabla \mathbf{V}$ 을 사용합니다. 성분으로 표시하면

$$\nabla_\beta V^\alpha = \partial_\beta V^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} V^\gamma \quad (4.29)$$

¹ 이러한 관점에서 보면 왜 Christoffel symbols을 정의하는지 또는 어떤 의미인지는 명확해 집니다. 공간이 휘어져 있으면 미분을 정의하기 위해서는 함수의 변화 뿐만 아니라 basis 벡터 변화까지 고려해야 한다는 의미이고 그러한 이유에서 Christoffel symbols이 정의된 셈입니다.

또는

$$V_{;\beta}^{\alpha} \equiv V_{,\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} V^{\gamma} \quad (4.30)$$

로도 쓸 수 있습니다. 한가지 주의할 것은 $\partial_{\beta} V^{\alpha}$ 와 $\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} V^{\gamma}$ 각각은 텐서처럼 변환하지 않지만 이 두개의 합은 텐서처럼 변환한다는 것입니다. 또한 $\partial_{\beta} V^{\alpha}$ 는 벡터의 성분이 위치에 따라 달라지기 때문에 필요하고 $\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} V^{\gamma}$ 는 basis 벡터가 위치에 따라 달라지기 때문에 필요하다라는 것을 잘 이해하기 바랍니다.

2.1 Example. 2차원 극좌표계에서의 *connection coefficients*를 구하세요.

극좌표의 두 basis 벡터를 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta}$ 라고 하겠습니다. 두 basis 벡터는 모든 지점에서 서로 직교합니다. 수식 (4.27)에서 $\mathbf{V} = \mathbf{e}_r$ 로 택하면 $\partial V^{\alpha} / \partial x^{\beta}$ 항은 항상 0이 되고 $V^{\theta} = 0, V^r = 1$ 입니다. 따라서

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r}}_{\beta=r} &= \underbrace{\Gamma_{rr}^r \cdot 1 \cdot \mathbf{e}_r}_{\alpha=r, \gamma=r} + \underbrace{\Gamma_{\theta r}^r \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_r}_{\alpha=r, \gamma=\theta} + \underbrace{\Gamma_{rr}^{\theta} \cdot 1 \cdot \mathbf{e}_{\theta}}_{\alpha=\theta, \gamma=r} + \underbrace{\Gamma_{\theta r}^{\theta} \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_{\theta}}_{\alpha=\theta, \gamma=\theta} \\ &= 0 \\ \therefore \Gamma_{rr}^r &= \Gamma_{\theta r}^{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

이 성립합니다. 같은 방법으로

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \Gamma_{r\theta}^r \cdot 1 \cdot \mathbf{e}_r + \Gamma_{\theta\theta}^r \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_r + \Gamma_{r\theta}^{\theta} \cdot 1 \cdot \mathbf{e}_{\theta} + \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_{\theta} \\ &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_{\theta} \\ \therefore \Gamma_{r\theta}^r &= 0, \quad \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (4.32)$$

을 구합니다. 여기서 $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = 1/r \mathbf{e}_{\theta}$ 임은 쉽게 보일 수 있습니다. 이제 수식 (4.27)에서 $\mathbf{V} = \mathbf{e}_{\theta}$ 로 택하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_{\theta}}{\partial r} &= \Gamma_{rr}^{\theta} \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_r + \Gamma_{\theta r}^r \cdot 1 \cdot \mathbf{e}_r + \Gamma_{rr}^{\theta} \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_{\theta} + \Gamma_{\theta r}^{\theta} \cdot 1 \cdot \mathbf{e}_{\theta} \\ &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_{\theta} \\ \therefore \Gamma_{rr}^{\theta} &= 0, \quad \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (4.33)$$

이 성립합니다. 마찬가지로 여기서 $\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 1/r \mathbf{e}_\theta$ 임은 쉽게 보일 수 있습니다. 마지막으로

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} &= \Gamma^r_{r\theta} \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_r + \Gamma^r_{\theta\theta} \cdot 1 \cdot \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{r\theta} \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_\theta + \Gamma^\theta_{\theta\theta} \cdot 1 \cdot \mathbf{e}_\theta \\ &= -r \mathbf{e}_r \\ \therefore \Gamma^r_{\theta\theta} &= -r, \quad \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0\end{aligned}\tag{4.34}$$

으로 모든 connection coefficients를 구합니다. 마찬가지로 여기서 $\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -r \mathbf{e}_r$ 임은 쉽게 보일 수 있습니다. ■

이제 인자 하나가 아래에 있는 텐서에 대한 (앞으로 이를 one-form이라고 부름) covariant derivative는 어떻게 표현되는지 살펴보겠습니다. 이를 위하여 스칼라 $\phi = p_\alpha V^\alpha$ 를 생각해 봅니다. 스칼라의 미분은 일반적으로 텐서이고 (gradient 연산자는 벡터를 만드는 것과 마찬가지임)

$$\begin{aligned}\phi_{,\beta} &= p_\alpha V^\alpha_{,\beta} + p_{\alpha,\beta} V^\alpha \\ &= p_\alpha (V^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} V^\gamma) + (p_{\alpha,\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} p_\gamma) V^\alpha \\ &= p_\alpha V^\alpha_{;\beta} + (p_{\alpha,\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} p_\gamma) V^\alpha\end{aligned}\tag{4.35}$$

로 정리됩니다. 모든 항들이 텐서이므로 괄호 안의 표현도 텐서가 되어야 하고 따라서

$$p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} p_\gamma\tag{4.36}$$

로 covariant derivative를 정합니다. 그러면 위의 스칼라 미분은

$$\phi_{,\beta} = p_\alpha V^\alpha_{;\beta} + p_{\alpha;\beta} V^\alpha\tag{4.37}$$

으로 단순 미분에서 보았던 형태와 비슷해집니다. 벡터와 one-form의 covariant derivative 표현을 잘 살펴보면 인자가 위에 있는가 아래에 있는가에 따라 부호만 다름을 알 수 있습니다. 따라서 인자가 2개인 2nd-rank 텐서의 covariant derivative는

$$T^{\alpha\beta}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\delta\gamma} T^{\delta\beta} + \Gamma^\beta_{\delta\gamma} T^{\alpha\delta}\tag{4.38}$$

와 같이 connection coefficients를 포함하는 항이 2개가 됩니다. 또한

$$T_{\alpha\beta;\gamma} = T_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^\delta_{\alpha\gamma} T_{\delta\beta} - \Gamma^\delta_{\beta\gamma} T_{\alpha\delta}\tag{4.39}$$

와 같고 최종적으로

$$T^\alpha_{\beta;\gamma} = T^\alpha_{\beta,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\delta\gamma} T^\delta_\beta - \Gamma^\delta_{\beta\gamma} T^\alpha_\delta\tag{4.40}$$

로 정리됩니다. $g_{\alpha\mu;\beta}$ 는 어떤 값일까? 이를 알아보기 위하여 $V_\alpha = g_{\alpha\mu}V^\mu$ 라는 수식의 covariant derivative를 취하면

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu}V^\mu_{;\beta} + g_{\alpha\mu;\beta}V^\mu \quad (4.41)$$

입니다. 그런데 $V_{\alpha;\beta}$ 와 $g_{\alpha\mu}V^\mu_{;\beta}$ 모두 같은 형태의 텐서로서 텐서의 변환규칙을 잘 따르려면 $g_{\alpha\mu;\beta}$ 항이 0 이어야 합니다. 따라서

$$g_{\alpha\mu;\beta} = 0 \quad (4.42)$$

입니다.

2.2 Connection Coefficients

$\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ 는 $g_{\alpha\beta}$ 를 미분한 양으로 표시할 수 있습니다. 즉

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(g_{\delta\beta,\alpha} + g_{\alpha\delta,\beta} - g_{\alpha\beta,\delta}) \quad (4.43)$$

으로 표시됩니다. 위의 수식을 **Levi-Civita connection**이라고 부릅니다. 따라서 이제 connection coefficients는 metric 텐서만으로 구할 수 있습니다. 우선 위의 수식이 어디로부터 왔는지 살펴보겠습니다. $g_{\alpha\beta}$ 도 텐서이고 따라서 수식 (4.39)을 만족시켜야 합니다. 즉, $g_{\alpha\mu;\beta} = 0$ 으로부터

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\mu} &= \Gamma^\nu_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} + \Gamma^\nu_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}, \\ g_{\alpha\mu,\beta} &= \Gamma^\nu_{\alpha\beta}g_{\nu\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}, \\ -g_{\beta\mu,\alpha} &= -\Gamma^\nu_{\beta\alpha}g_{\nu\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

이고 이를 더하여 세개의 항으로 분류하면 ($g_{\beta\nu} = g_{\nu\beta}$ 이용)

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} \\ = (\Gamma^\nu_{\alpha\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\alpha})g_{\nu\beta} + (\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - \Gamma^\nu_{\beta\alpha})g_{\nu\mu} + (\Gamma^\nu_{\beta\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\beta})g_{\alpha\nu} \end{aligned} \quad (4.45)$$

입니다. 오른쪽 항 2개는 Christoffel symbol의 대칭성에 의하여 (문제 4.3 참고) 없어지고

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2g_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{\beta\mu} \quad (4.46)$$

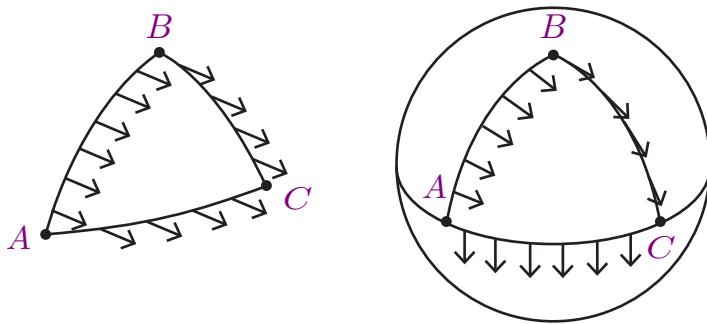


그림 4.3: 원쪽 폐곡선은 휘어지지 않은 2차원 평면에 놓여 있다고 가정합니다. 출발점 A 로부터 벡터를 평행 이동시켜 B, C 를 지나 다시 A 지점까지 오면 이동 전의 벡터와 같은 방향, 같은 크기의 벡터를 얻는다. 오른쪽의 경우, 구표면에 있는 폐곡선에서 벡터를 평행 이동시키는 경우를 생각해 보자. $A - B - C$ 의 경로를 지나면서 이동된 벡터의 방향은 A 에 다시 이르렀을 때 초기 벡터의 방향과 달라지게 됩니다.

가 만족됩니다. 최종적으로 $g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\nu} = \delta^\gamma_\nu$ 를 이용하면

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) = \Gamma^\gamma_{\beta\mu} \quad (4.47)$$

로 수식 (4.43)이 증명됩니다. 그러면 총 Christoffel symbol의 갯수는 몇개일까요? 우선 index가 3개 있으므로 $4^3 = 64$ 개의 symbol이 있는데 $\Gamma^\gamma_{\beta\mu} = \Gamma^\gamma_{\mu\beta}$ 이므로 고정된 γ 에 대하여 독립적인 symbol 갯수는 10개 ($\beta = \mu$ 인것이 4개, $\beta \neq \mu$ 인것이 6개)이므로 총 갯수는 $4 \times 10 = 40$ 개가 됩니다.

2.3 Parallel transport

공간이 휘어진 정도를 알아보기 위해서 벡터의 parallel transport라는 개념을 살펴보겠습니다. 이는 벡터를 그 크기와 방향을 유지하면서 주어진 곡선을 따라 이동시키는 것을 말합니다. 그림 4.3의 왼쪽 경우를 살펴보겠습니다. 왼쪽의 폐곡선은 휘어지지 않은 2차원 평면에 놓여 있다고 하겠습니다. 출발점 A 로부터 벡터를 평행 이동시켜 B 를 지나 다시 C 지점까지 오면 이동 전의 벡터와 같은 방향, 같은 크기의 벡터를 얻습니다. 하지만 오른쪽의 경우와 같이 구표면에 있는 폐곡선에서 벡터를 평행 이동시키는 경우를 생각해 보겠습니다. $A - B - C$ 의 경로를 지나면서 이동된 벡터의 방향은 이동 전 벡터의 방향과 달라지게 됩니다. 따라서 이러한 벡터의 평행 이동으로 공간이 휘어져 있는지 여부를 판단 할 수 있고 또한 휘어진 공간에서는 광역적으로(global) 평행한 벡터 field를 생각하기 어렵다는 사실도 쉽게 짐작할 수 있습니다.

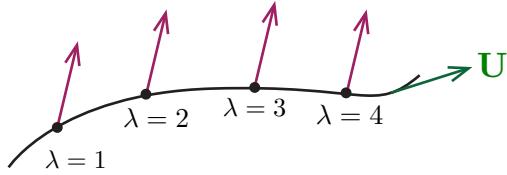


그림 4.4: 벡터 \mathbf{V} 를 한 지점에서 다른 지점까지 parallel transport하는 과정을 나타낸 그림.

특수상대성 이론에서 힘을 받지 않는 입자의 운동은

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = 0 \quad (4.48)$$

이었습니다. 이 개념을 일반상대론에서 다루는 휘어진 시공간으로 확장하기 위하여 한 벡터가 곡선을 따라 스스로 크기가 일정하고 평행하게 이동하는 parallel transport라는 개념을 논의합니다 (그림 4.4 참고). 이를 위하여 λ 라는 변수로 그 위치를 나타낼 수 있는 곡선을 따라 벡터 \mathbf{V} 의 변화를 생각해 보면

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} V^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \frac{dV^\alpha}{d\lambda} \mathbf{e}_\alpha + V^\alpha \frac{d\mathbf{e}_\alpha}{d\lambda} \quad (4.49)$$

이고 이때

$$\frac{d\mathbf{e}_\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\gamma \quad (4.50)$$

이므로

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} = \frac{dV^\alpha}{d\lambda} \mathbf{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \mathbf{e}_\gamma \quad (4.51)$$

로 정리됩니다. 여기서 두번째 항의 인자 α 와 γ 를 교환하면

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} = \left(\frac{dV^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} V^\gamma \right) \mathbf{e}_\alpha \quad (4.52)$$

로 다시 정리됩니다. 위의 식은 벡터로서 그 성분을 새로운 정의를 이용하여 다시 쓰면

$$\frac{DV^\alpha}{D\lambda} = \frac{dV^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} V^\gamma \quad (4.53)$$

이고 이를 intrinsic, absolute, 또는 total derivative라고 부릅니다. 때때로 위의 표현은

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} = \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{V} \quad (4.54)$$

으로 나타내고 이 표현은 좌표계에 무관한 것으로 이해할 수 있습니다. 단 여기서 $U^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ 로서 곡선에 tangent한 벡터가 됩니다. 즉, 만일 $\lambda = \tau$ 이면 four-vector가 될 것입니다. 수식 (4.53)은 covariant derivative와 매우 유사한데, 사실

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} U^\beta \quad (4.55)$$

를 이용하면

$$\begin{aligned} \frac{DV^\alpha}{D\lambda} &= \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} U^\beta + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} U^\beta V^\gamma = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} V^\gamma \right) U^\beta \\ &= V^\alpha{}_{;\beta} U^\beta \end{aligned} \quad (4.56)$$

와 같은 관계가 있음을 알 수 있습니다. 이를 바탕으로 일반적으로 휘어진 공간에서 만일 벡터 \mathbf{V} 가 곡선을 따라 parallel transport 된다는 것을

$$\nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} = 0 \quad (4.57)$$

또는 성분별로

$$\frac{DV^\alpha}{D\lambda} = \frac{dV^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} V^\gamma = 0 \quad (4.58)$$

을 만족하는 것으로 정의합니다. 일반 Euclidean 공간에 있는 곡선을 따라 평행이동 시킨다는 의미는 그 곡선을 기술하는 매개변수로 벡터를 미분했을 경우 0이 된다는 의미이고 위의 정의는 휘어진 공간에서의 parallel transport를 정의함에 있어 벡터의 covariant derivative가 0이 되도록 정의하는 것으로 이해하면 쉬울 것입니다.

2.4 Geodesics

저번 절에서 parallel transport의 개념을 배웠기 때문에 이제 휘어진 공간에서의 “직선”이라는 개념에 대하여 이야기할 수 있습니다.

정의: 임의의 선이 “직선”이라는 의미는 그 선의 tangent 벡터 자체를 parallel transport 시키는 선으로 정의합니다.

즉, 다른 말로는 휘어진 공간에서의 직선은 $\nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{U} = 0$ 또는 $V^\alpha = U^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ 로 놓았을 때

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \quad (4.59)$$

이라는 뜻이고 좀더 눈에 보이기 쉽게 쓴다면

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0 \quad (4.60)$$

입니다. 여기서 위의 점으로 미분한 표시는 변수 λ 로 미분한다는 의미입니다. 공간이 휘어있지 않으면 metric tensor는 상수가 되는 좌표계가 항상 있어서 metric tensor의 미분항으로 이루어진 $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ 는 모두 0이 됩니다. 즉 위의 수식은 $\ddot{x}^\alpha = 0$ 이 되어 힘을 받지 않는 물체의 운동을 뜻합니다. 여기서 몇가지 중요 사항을 정리해 보겠습니다.

- 위의 수식은 힘이 없을때의 운동방정식에 해당됩니다.
- 특수상대성이론에서의 위의 수식에 해당되는 공식은 $d\mathbf{U}/d\tau = 0$ 입니다.
- 일반상대론에서 중력은 힘이 아니라 시공간의 휘어짐입니다.
- 휘어진 공간에서의 metric $g_{\alpha\beta}$ 는 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ 를 만들고 따라서 입자의 운동도 기술할 수 있게 합니다.
- 직선은 종종 **geodesics**으로도 부른다. 반경이 R 인 구표면에 있는 반경이 R 인 원들은 geodesics입니다.

사실 “직선”을 $\nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{U} = k\mathbf{U}$ 를 만족하는 선으로 (k 는 비례 상수) 정의해도 되지만 그러한 경우 $\mu = \mu(\lambda)$ 와 같은 새로운 변환을 통하여 $\nabla_{\mathbf{U}'} \mathbf{U}' = 0$ 을 만족시키는 변수 μ 가 항상 존재합니다. 이때 변수 μ 를 **affine parameter**라고 부르고 이제부터는 항상 affine parameter를 사용한다고 가정합니다. 예를들어 τ 는 질량이 없는 입자의 affine parameter입니다 ($d\mathbf{U}/d\tau = 0$).

2.2 Example. 중심력에서의 운동: 다음과 같은 Newtonian 중력을

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (4.61)$$

생각해 봅니다. 운동방정식은 극좌표계에서 어떻게 될까요?

일반 좌표계에서 위 수식의 왼쪽 항이

$$\frac{dV^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} V^\beta V^\gamma \quad (4.62)$$

이라고 합니다. 극좌표에서는 $\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \frac{1}{r}$, $\Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{r}$, $\Gamma^r_{\theta\theta} = -r$ 이고 나머지 항들은 다 0이기 때문에

$$\frac{dV^r}{dt} + \Gamma^r_{\theta\theta} V^{\theta} V^{\theta} = -\frac{GM}{r^2} \quad (4.63)$$

과

$$\frac{dV^{\theta}}{dt} + \Gamma^{\theta}_{r\theta} V^r V^{\theta} + \Gamma^{\theta}_{\theta r} V^{\theta} V^r = 0 \quad (4.64)$$

이므로 위의 두 수식은

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{GM}{r^2} \quad (4.65)$$

과

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (4.66)$$

으로 각각 쓸 수 있습니다. 마지막 수식은 적분을 하여 $r^2\dot{\theta}$ = 상수라는 각운동량 법칙으로 해석할 수 있습니다. 위의 두 수식을 가지고 케플러의 법칙을 다 설명할 수 있고 원심력에 해당되는 항 $r\dot{\theta}^2$ 은 connection에 의해 나타났다는 점에 유의하기 바랍니다. ■

2.5 Geodesics 와 Lagrangian

이번 절에서는 geodesics을 variational 방법을 써서 접근해 보겠습니다. Variational 방법을 쓰기 때문에 미소거리를 이용하여 Lagrangian을 다루어 봅니다. 일반상대론에서 임의의 두 점간 길이 S 는

$$S = \int ds = \int \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}} \quad (4.67)$$

혹은 매개변수 λ 를 도입하여

$$S = \int \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda}} d\lambda \quad (4.68)$$

입니다. S 를 최소화 하는 경로를 찾는 일은 학부 역학에서 다루어 왔던 variational 문제이고 따라서 Lagrangian을

$$L = \frac{ds}{d\lambda} = \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda}} \quad (4.69)$$

로 정의하고 Euler-Lagrange 방정식

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0 \quad (4.70)$$

을 풀어내는 문제로 바뀝니다. 위의 수식에 있는 제곱근은 다루기가 좀 불편하기 때문에 $L' = L^2$ 으로 바꾸면 (수학적으로 같은 문제를 푸는 것임: 아래의 논의를 볼 것)

$$\frac{d}{d\lambda} \left(2L \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - 2L \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0 \quad (4.71)$$

이 됩니다. 만일 λ 가

$$\frac{ds}{d\lambda} = L = \text{constant} \quad (4.72)$$

를 만족시킨다면 수식 (4.71)은

$$2L \left[\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right] = 0 \quad (4.73)$$

으로 쓸 수 있어서 관계식

$$L' = L^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \quad (4.74)$$

은 $ds/d\lambda$ 가 상수라면 (항상 가능) 원래의 Euler-Lagrange 방정식이 됩니다. 이렇게 λ 에 대한 제한을 두는 것은 affine parameter를 정의하는 또 다른 방법이 됩니다. $|ds/d\tau| = c$ 가 성립하고 빛의 속도 c 는 상수이기 때문에 proper time은 affine parameter임을 다시 한번 알 수 있습니다. 또한 Euler-Lagrange 방정식은 전에 유도했던 수식

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0 \quad (4.75)$$

과 동등함도 보일 수 있습니다. 다음의 예제를 한번 살펴보겠습니다.

2.3 Example. 3차원 휘어진 공간에서 Geodesics

휘어진 3차원 공간 (시-공간이 아님)에서 입자의 운동은 어떻게 기술되고 이를 기술하기 위한 도구들이 어떠한 것인지 알아보도록 하겠습니다. 휘어진 3차원 공간의 미소변위제곱은

$$ds^2 = g_{ij}(x^k) dx^i dx^j \quad (4.76)$$

로 표현할 수 있습니다 (여기서 $i = 1, 2, 3$ 이고 $g_{ij}(x^k)$ 는 metric이) 공간의 함수임을 확실하게 나타내기 위하여 일부러 이렇게 표현하였습니다. 공간의 임의의 지점 A 에서 출발하여 지점 B 로 이동하는데 걸리는 가장 짧은 거리(geodesic)는 어떻게 될까요? 경로를 따라 단조 증가하는 임의의 매개변수를 λ 라 하면 임의의 경로 자체는 $x^i(\lambda)$ 로 표현할 수 있고 경로가 고정된 점 x_A^i 부터 x_B^i 까지 따라 움직다는 사실은

$$x^i(\lambda = 0) = x_A^i, \quad x^i(\lambda_f) = x_B^i \quad (4.77)$$

으로 나타낼 수 있습니다. 이제 매개변수가 λ 에서 $\lambda + d\lambda$ 만큼 바뀌었을 때 경로의 경로의 미소변화는

$$dx^i = \frac{dx^i}{d\lambda} d\lambda \quad (4.78)$$

로 쓸 수 있습니다. 따라서

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij}(x^k(\lambda)) \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} d\lambda^2, \\ ds &= \sqrt{g_{ij}(x^k(\lambda)) \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda \end{aligned} \quad (4.79)$$

가 되어 경로의 총 길이는

$$S[x^k(\lambda)] = \int_0^{\lambda_f} \sqrt{g_{ij}(x^k(\lambda)) \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda \quad (4.80)$$

의 적분 형태가 됩니다. 여기서 $S[x^i(\lambda)]$ 는 함수 $x^i(\lambda)$ 의 함수로서 수학적으로 functional이라고 부릅니다. 이제 경로 자체를 조금 바꾸면 경로의 길이 또한 바뀌게 되는데 이를 수학적으로 나타내기 위하여

$$\tilde{x}^i(\lambda) = x^i(\lambda) + \alpha w^i(\lambda) \quad (4.81)$$

라는 표현을 도입합니다. 여기서 α 는 작은 수이고 $w^i(0) = w^i(\lambda_f) = 0$ 인 조건을 만족합니다. 이러한 경우 geodesic의 조건은 모든 $w^i(\lambda)$ 에 대하여

$$\frac{dS[\tilde{x}^i(\lambda)]}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (4.82)$$

이 만족되어야 한다는 것입니다. 따라서 이제 geodesic을 구하는 문제는 위의 미분을 하는 것으로 해결될 수 있습니다. 이를 위하여 일단 다음의 정의를 하여

$$A(\alpha, \lambda) \equiv g_{ij}(\tilde{x}^k(\lambda)) \frac{d\tilde{x}^i}{d\lambda} \frac{d\tilde{x}^j}{d\lambda} \quad (4.83)$$

위에서 구한 functional을

$$S[\tilde{x}^k(\lambda)] = \int_0^{\lambda_f} \sqrt{A(\lambda)} d\lambda \quad (4.84)$$

으로 간단하게 정리합니다. 이제 S 에 대한 α 변수의 미분은 적분 안으로 들어가서

$$\frac{d}{d\alpha} g_{ij}(\tilde{x}^k(\lambda)) \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \tilde{x}^k} \Big|_{\tilde{x}^k=x^k(\lambda)} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(x^\ell(\lambda)) w^k \quad (4.85)$$

으로 표현할 수 있어서

$$\begin{aligned} \frac{dS[\tilde{x}^\ell(\lambda)]}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \frac{1}{2} \int_0^{\lambda_f} \frac{1}{\sqrt{A(\lambda, 0)}} \left\{ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} w^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} + \right. \\ &\quad \left. + g_{ij} \frac{dw^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} + g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dw^j}{d\lambda} \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (4.86)$$

이고 이때 metric g_{ij} 는 $x^k(\lambda)$ 에서 계산된것으로 생각해야 합니다. 그런데 위의 오른쪽 항에서 두번째 항과 세번째 항은 $g_{ij} = g_{ji}$ 이기 때문에 같은 항이 되어

$$\frac{dS[\tilde{x}^\ell(\lambda)]}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \int_0^{\lambda_f} \frac{1}{\sqrt{A(\lambda, 0)}} \left\{ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} w^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} + 2g_{ij} \frac{dw^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \right\} d\lambda$$

으로 간단하게 정리됩니다. 또한 위의 오른쪽 두번째 항은 부분적분을 하면

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_f} \left[\frac{1}{\sqrt{A}} g_{ij} \frac{dx^j}{d\lambda} \right] \frac{dw^i}{d\lambda} d\lambda &= \left[\frac{1}{\sqrt{A}} g_{ij} \frac{dx^j}{d\lambda} \right] w^i \Big|_0^{\lambda_f} \\ &\quad - \int_0^{\lambda_f} \frac{1}{d\lambda} \left[\frac{1}{\sqrt{A}} g_{ij} \frac{dx^j}{d\lambda} \right] w^i d\lambda \end{aligned} \quad (4.87)$$

임을 이용하면

$$\frac{dS}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \int_0^{\lambda_f} \left\{ \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} w^k - 2 \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{\sqrt{A}} g_{ij} \frac{dx^j}{d\lambda} \right] w^i \right\} d\lambda \quad (4.88)$$

으로 바뀝니다. 여기서 첫번째 항의 summation index를 $(i \rightarrow j, j \rightarrow k, k \rightarrow i)$ 로 변환하면

$$\frac{dS}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_0^{\lambda_f} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} - \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{\sqrt{A}} g_{ij} \frac{dx^j}{d\lambda} \right] \right\} w^i(\lambda) d\lambda \quad (4.89)$$

으로 더욱 간단해집니다. 위의 수식이 임의의 $w^i(\lambda)$ 에 대해서 만족되려면 피적분 함수가

0이 되는 방법이 유일해서

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{\sqrt{A}} g_{ij} \frac{dx^j}{d\lambda} \right] = \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} \quad (4.90)$$

이 항상 성립해야 하고 위의 수식이 바로 geodesic에 대한 방정식이 됩니다. 여기서 또 한가지 방법으로 위의 수식을 간단히 할 수 있습니다. λ 에 대한 선택은 지금까지는 임의적이었지만 이제 $ds = d\lambda$ 인 선택을 하면

$$ds = \sqrt{A} d\lambda, \quad \therefore A = 1 \quad (4.91)$$

이 되어 geodesic 방정식은

$$\frac{d}{ds} \left[g_{ij} \frac{dx^j}{ds} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \quad (4.92)$$

으로 최종 정리됩니다. 그런데 많은 상대론 교과서에는 d^2x^i/ds^2 항을 포함하는 표현이 등장하기 때문에 이 또한 여기서 구해 봅니다. 위 식의 왼쪽 항은

$$\frac{d}{ds} \left[g_{ij} \frac{dx^j}{ds} \right] = g_{ij} \frac{d^2x^j}{ds^2} + \partial_k g_{ij} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \quad (4.93)$$

이 됩니다. 여기서

$$\partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (4.94)$$

라는 정의를 사용하였고, 이에 따라 geodesic 방정식은 이제

$$g_{ij} \frac{d^2x^j}{ds^2} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} - 2\partial_k g_{ij}) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \quad (4.95)$$

의 형태로 바뀝니다. 왼쪽 항에 있는 g_{ij} 를 오른쪽으로 이동시키기 위하여

$$g^{i\ell} g_{ij} = \delta_j^\ell \quad (4.96)$$

라는 성질을 이용하면

$$\delta_j^\ell \frac{d^2x^j}{ds^2} = \frac{1}{2} (g^{i\ell} \partial_i g_{jk} - 2g^{i\ell} \partial_k g_{ij}) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \quad (4.97)$$

입니다. 여기서 $\ell \rightarrow i, i \rightarrow \ell$ 로 바꾸면

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^i}{ds^2} &= \frac{1}{2}(g^{i\ell}\partial_\ell g_{jk} - 2g^{i\ell}\partial_k g_{\ell j})\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} \\ &= -\frac{1}{2}g^{i\ell}(-\partial_\ell g_{jk} + 2\partial_k g_{\ell j})\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} \\ &= -\frac{1}{2}g^{i\ell}(-\partial_\ell g_{jk} + \partial_k g_{\ell j} + \partial_j g_{\ell k})\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\end{aligned}\quad (4.98)$$

까지 정리됩니다 (마지막 단계에서 $j \leftrightarrow k$ 를 사용). 여기서 통상

$$\Gamma_{jk}^i \equiv g^{i\ell}(\partial_j g_{\ell k} + \partial_k g_{\ell j} - \partial_\ell g_{jk}) \quad (4.99)$$

으로 정의하여 geodesic 방정식을

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (4.100)$$

표현하고 이때 Γ_{jk}^i 를 affine connection이라고도 부릅니다. ■

위의 예제 계산과정에서 나타났듯이 일반적인 geodesic 방정식은

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left[g_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0} \quad (4.101)$$

혹은

$$\boxed{\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0}$$

의 두가지 다른 형태로 정리할 수 있습니다. 한가지 질문은 왜 Lagrange 방법을 쓰는가입니다. 일반적으로 Euler-Lagrange 방정식이 Levi-Civita connection 계산보다 간단하기 때문입니다. 다음의 예제에서 이를 볼 수 있습니다.

2.4 Example. 다음의 형태로 주어지는

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2GM/c^2 r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.102)$$

미소거리는 Schwarzschild metric으로 알려져 있습니다. 이 metric에 대한 운동방정식을 계산하세요.

Euler-Lagrange 방정식을 이용하기 위하여 $dt \rightarrow \dot{t} = dt/d\lambda, d\theta \rightarrow \dot{\theta}, d\phi \rightarrow \dot{\phi}$ 로 변환시

키면 Lagrangian은

$$\begin{aligned} L &= \frac{ds}{d\lambda} \frac{ds}{d\lambda} \\ &= -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} + \frac{1}{1 - 2GM/c^2 r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} + \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} \right) \\ &= -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \dot{t}^2 + \frac{1}{1 - 2GM/c^2 r} \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \end{aligned} \quad (4.103)$$

이 됩니다. 예를 들어 변수 θ 에 대한 방정식

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (4.104)$$

을 적용하면

$$\frac{d}{d\lambda} (2r^2 \dot{\theta}) - 2r^2 (\sin \theta \cos \theta) \dot{\phi}^2 = 0 \quad (4.105)$$

이고 이는 Levi-Civita connection을 계산하는 것보다는 훨씬 쉽습니다. ■

한편 Lagrangian L° 특정 좌표 x^α 의 함수가 아니라면 ($\partial L / \partial x^\alpha = 0$)이고 Euler-Lagrange 방정식으로부터

$$\begin{aligned} L &= g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} dx^\beta d\lambda = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} &= 2g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta = 2\dot{x}_\alpha = \text{constant} \end{aligned} \quad (4.106)$$

임을 알 수 있습니다. 즉, 그러한 좌표에 대한 covariant 속도는 보존됩니다. 위의 예에서 metric은 ϕ 에 대한 함수가 아니었기 때문에

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (-2r^2 \sin^2 \theta) \dot{\phi} = \text{constant} \quad (4.107)$$

가 됩니다. 만일 입자의 운동이 $\theta = \pi/2$ 인 equatorial 평면에 고정되어 있다면 $r^2 \dot{\phi} =$ 상수로서 일반상대론에서의 각운동량 보존에 해당됩니다.²

이제 약한 중력장이 있을 경우 천천히 움직이는 입자에 대한 운동방정식을 생각해 보겠습니다. 수학적으로 이는 $i = 1, 2, 3$ 인 경우 $\dot{x}^i \rightarrow 0$ 이고 $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ 인 경우 metric 텐서는 $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ 로 표현된다는 의미입니다 (이 즉슨 $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}$ 를 만족해야 한다는

²물론 예제에서 다른 Schwarzschild metric $^\circ$ 일반상대론에서의 metric $^\circ$ 이라는 가정을 하고 난 다음의 이야 기입니다.

의미). 이러할 경우 운동방정식

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0 \quad (4.108)$$

은

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{00}\dot{x}^0\dot{x}^0 = 0 \quad \left(\because \frac{dx^i}{d\lambda} \ll \frac{dx^0}{d\lambda} \left(= \frac{d(ct)}{d\lambda} \right) \right) \quad (4.109)$$

으로 간단해집니다. $\lambda = \tau$ 으로 놓고 Levi-Civita connection을 구해 보면

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{00} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta 0,0} + g_{0\beta,0} - g_{00,\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(-\eta^{\alpha\beta})(h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}) \end{aligned} \quad (4.110)$$

로 정리됩니다. 만일 metric이 정지하여 있다면 모든 시간미분항(“0”이 있는 항들)은 0이 되어서

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{00}(h_{00,0} + h_{00,0} - h_{00,0}) = 0 \quad (4.111)$$

입니다. 따라서 $\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{00}\dot{x}^0\dot{x}^0 = 0$ 으로 $\ddot{x}^0 = 0$, \dot{x}^0 은 상수라는 결론을 얻게 됩니다. 공간성분은 ($\eta^{ii} = -1$)

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{ii}(h_{i0,0} + h_{0i,0} - h_{00,i}) = \frac{1}{2}(0 + 0 - h_{00,i}) = -\frac{1}{2}h_{00,i} \quad (4.112)$$

이 됩니다. 따라서

$$\ddot{x}^i = \frac{1}{2}h_{00,i}\dot{x}^0\dot{x}^0 \quad (4.113)$$

이고 $\dot{x}^0 = cdt/d\tau$ 는 상수이기 때문에

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^i}{dt^2} &= \frac{1}{2}c^2h_{00,i} \quad \text{or} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{2}c^2\nabla h_{00} \end{aligned} \quad (4.114)$$

로 정리됩니다. h_{00} 는 무엇일까요? 뉴튼의 중력법칙에서

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi \quad (4.115)$$

이었으므로 (Φ 는 중력퍼텐셜로 $\Phi = -GM/r$)

$$h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2} \quad (4.116)$$

이 됩니다. 또한

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi) \quad (4.117)$$

이 됩니다. 지구상에서 h_{00} 의 값은 얼마일까요?

$$\begin{aligned} \frac{2\Phi}{c^2} &= \frac{2GM/R_E^2 \cdot R_E}{c^2} \\ &\sim \frac{2 \times 10 \text{ m/s}^2 \cdot 6.4 \times 10^6 \text{ m}}{9 \times 10^{16} (\text{m/s})^2} \\ &\sim 10^{-9} \end{aligned} \quad (4.118)$$

으로 매우 작은값을 갖습니다. 이토록 작은 정도로 시공간이 휘어져 있음에도 불구하고 일반상대론이 GPS 항법장치 등에 반드시 필요한 계산이라는 것은 참으로 놀라운 일입니다.

문제

4.1 다음의 수식을

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} &= -r \mathbf{e}_r\end{aligned}$$

증명하기 바랍니다.

4.2 극좌표계를 사용하여 $g_{\alpha\mu;\beta} = 0$ 임을 보이기 바랍니다.

4.3 일반적으로

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}$$

임을 증명하기 바랍니다.

4.4 수식 (4.60)과 (4.70)는 동등함을 증명하세요.

제 5 장 곡률(Curvature) 과 Einstein 방정식

지난 장에서는 일반적으로 휘어진 공간의 폐곡면에서 주어진 벡터를 parallel transport 시켰을 경우 원래의 벡터로 돌아오지 못하는 현상을 이야기하였습니다. 이번 장에서는 이를 이용하여 곡률(curvature)을 정의해 보겠습니다.

제 1 절 곡률(Curvature)

임의의 휘어진 공간에 그림 (5.1)과 같이 놓여있는 미소길이 폐곡면을 생각하겠습니다. 2 차원에서 임의로 휘어져 있는 공간에서 매우 작은 고리를 생각하고 그 고리는 두 좌표계 $(x)^1$ 과 $(x)^2$ 가 각각 상수인 4개의 곡선으로 이루어져 있습니다. 이제 A 지점에서 차례로 B, C, D 를 지나 다시 A 지점까지 벡터 \mathbf{V} 를 parallel transport 시키는 작업을 생각해 보겠습니다. 우선 A 지점에서 B 지점은 좌표계 $(x)^2$ 가 상수인 구간이므로 parallel transport 법칙에 의해 $\nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{V} = 0$ 만족됩니다. 따라서 수식 (4.56)으로부터

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} = -\Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu \quad (5.1)$$

이 만족된다는 것을 알 수 있습니다. 따라서 B 지점에서 벡터는

$$\begin{aligned} V^\alpha(B) &= V^\alpha(A_{\text{initial}}) + \int_A^B \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} dx^1 \\ &= V^\alpha(A_{\text{initial}}) - \int_A^B \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu dx^1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

입니다. 같은 방법으로 B 에서 C, C 에서 D 까지 구간에 대한 parallel transport는

$$V^\alpha(C) = V^\alpha(B) - \int_B^C \Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu dx^2 \quad (5.3)$$

$$V^\alpha(D) = V^\alpha(C) + \int_C^D \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu dx^1 \quad (5.4)$$

이 됩니다. 여기서 C 에서 D 까지 구간에 대한 수식의 부호가 바뀌었는데 이는 x^1 이 감소하는 방향으로 이동하였기 때문입니다. 마지막으로

$$V^\alpha(A_{\text{final}}) = V^\alpha(D) + \int_D^A \Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu dx^2 \quad (5.5)$$

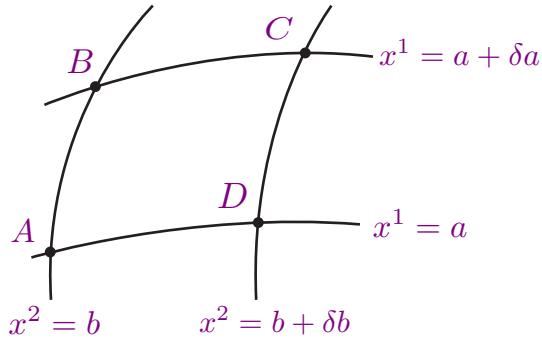


그림 5.1: 2차원에서 임의로 휘어져 있는 공간에서 매우 작은 고리를 생각하고 그 고리는 두 좌표계 x^1 과 x^2 가 각각 상수인 4개의 곡선으로 이루어져 있습니다.

이 됩니다. 이제 고리를 한 바퀴 도는 동안 벡터의 변화를 계산해 보면

$$\begin{aligned}\delta V^\alpha &= V^\alpha(A_{\text{final}}) - V^\alpha(A_{\text{initial}}) \\ &= \int_D^A \Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu dx^2 - \int_B^C \Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu dx^2 \\ &\quad + \int_C^D \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu dx^1 - \int_A^B \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu dx^1\end{aligned}\quad (5.6)$$

이 됩니다. 만일 현재 다루는 공간이 휘어있지 않았다면 $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ 와 V^μ 는 상수가 되어 적분은 서로 상쇄됩니다. 그렇지만 휘어진 공간에서는 그렇지 않고 일차항만 고려하여 전개하면

$$\begin{aligned}\delta V^\alpha &\simeq - \int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu) dx^2 + \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu) dx^1 \\ &\simeq \delta a \ \delta b \left[- \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu) \right]\end{aligned}\quad (5.7)$$

으로 정리됩니다. 위 수식은 Christoffel symbol과 벡터 V^α 에 대한 미분을 포함하고 있습니다. 수식 (5.1)을 이용하면

$$\delta V^\alpha = \delta a \ \delta b [\Gamma^\alpha_{\mu 1,2} - \Gamma^\alpha_{\mu 2,1} + \Gamma^\alpha_{\nu 2} \Gamma^\nu_{\mu 1} - \Gamma^\alpha_{\nu 1} \Gamma^\nu_{\mu 2}] V^\mu \quad (5.8)$$

으로 정리됩니다. 변수 μ 가 사용중에 있기 때문에 ν 를 새롭게 도입하였습니다. 이제 좌표 “1”과 “2” 대신 일반적인 x^σ 와 x^λ 를 사용하여 위의 수식을

$$\delta V^\alpha = \delta a \ \delta b [\Gamma^\alpha_{\mu\sigma,\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda,\sigma} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\nu_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\nu_{\mu\lambda}] V^\mu \quad (5.9)$$

으로 바꿀 수 있습니다. 즉 한 바퀴 parallel transport 시키는 동안 벡터의 변화는 고리의 면적 $\delta a \ \delta b$, 벡터 V^α , 그리고 다음과 같이 정의하는 텐서

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \equiv \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \quad (5.10)$$

에 의하여 결정됩니다. 이 중 공간이 휘어진 정도와 (적어도) 직접적으로 관계있는 양은 $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ 이고 이를 **Riemann curvature tensor**라고 부릅니다.

1.1 Example. 2-Sphere에 대하여 metric, affine connection, Riemann tensor를 구하기 바랍니다.

우선 2-shpere의 metric은

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \ d\phi^2, \quad r = R = \text{constant} \quad (5.11)$$

이고 이에 따른 metric은 정의에 따라

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

가 됩니다. Affine connection의 경우에는 $\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(g_{\delta\beta,\alpha} + g_{\alpha\delta,\beta} - g_{\alpha\beta,\delta})$ 으로부터

$$\begin{aligned} \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}[\partial_\phi g_{\phi\phi} + \partial_\theta g_{\phi\phi} - \partial_\phi g_{\phi\theta}] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} (2R^2 \sin \theta \cos \theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}[\partial_\phi g_{\theta\phi} + \partial_\phi g_{\theta\phi} - \partial_\theta g_{\phi\phi}] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} (-)(2R^2 \sin \theta \cos \theta) = -\sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

이고 나머지 connection들은 모두 0입니다. 다음으로 Riemann tensor의 경우에는

$$\begin{aligned} R^\theta_{\phi\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^\theta_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^\theta_{\phi\theta} + \Gamma^\theta{}_{i\theta} \Gamma^i_{\phi\phi} - \Gamma^\theta{}_{i\phi} \Gamma^i_{\phi\theta} \\ &= \partial_\theta(-\sin \theta \cos \theta) - (-\sin \theta \cos \theta) \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \sin^2 \theta \end{aligned}$$

으로 정리됩니다. 마지막으로 Ricci tensor와 scalar는

$$\begin{aligned} R_{ij} &= R^k_{ikj}, \quad R_{\phi\phi} = R^\theta_{\phi\theta\phi} = \sin^2 \theta, \\ R &= g^{ij} R_{ij} = g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \theta = \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

으로 최종 정리됩니다. ■

제 2 절 Einstein's Field Equations

이제 이를 바탕으로 Einstein의 장 방정식을 구해 보겠습니다. 먼저 curvature tensor의 인자를 한개 contract 하여¹

$$R_{\alpha\beta} = R^{\rho}_{\alpha\rho\beta} \quad (5.13)$$

로 정의하고 이를 Ricci tensor라고 부릅니다. 또한 나머지 인자까지 contract하여

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (5.14)$$

는 Ricci scalar라고 정의합니다. 이제 공간이 휘어진 정도가 energy-stress tensor와 관계 있다는 아이디어를 근거로 Einstein의 장 방정식을

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta} \quad (5.15)$$

과 같이 나타냅니다. 여기서 k 는 앞으로 결정해 주어야 할 상수이고 왼쪽 항에서 Ricci scalar 부분은 우변이

$$\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} \right)_{;\alpha} = 0 \quad (5.16)$$

임을 만족시켜주기 위해 추가되었다고도 볼 수 있습니다. 이제 k 의 값을 결정하기 위하여 Newtonian limit의 경우를 고려해 봅니다. 위의 수식은 약한 중력장 내부에서 천천히 움직이는 경우 $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ 으로 근사되어야 합니다. 이를 위하여 장 방정식을 $g_{\alpha\beta}$ 로 contract 하여

$$g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = kg_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \quad (5.17)$$

o]고 $T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}$ 로 정의하면

$$R - \frac{1}{2}R\delta_{\alpha}^{\alpha}R = -R = kT, \quad (\because \delta_{\alpha}^{\alpha} = 4) \quad (5.18)$$

¹ 일부 상대론 교과서에서는 Ricci tensor를 $R_{\alpha\beta} = R^{\rho}_{\alpha\beta\rho}$ 로 정의하기도 합니다. 이렇게 되면 원래의 정의에서 $R_{\alpha\beta} \rightarrow -R_{\alpha\beta}$, $R \rightarrow -R$ 로 부호가 바뀌에 됨에 주의하기 바랍니다.

입니다. 따라서 원래의 장 방정식은 다음과 같아

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} + kT^{\alpha\beta} = k\left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg^{\alpha\beta}\right) \quad (5.19)$$

쓸 수 있습니다. 인자들을 모두 아래로 내려 covariant 형태로 나타내면

$$R_{\alpha\beta} = k\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}\right) \quad (5.20)$$

로 바뀝니다. 한편 stress-energy tensor는

$$T_{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)U_\alpha U_\beta - pg_{\alpha\beta} \quad (5.21)$$

이었고 Newtonian limit에서 $p/c^2 \ll \rho$ 이었습니다. 즉,

$$T_{\alpha\beta} \approx \rho U_\alpha U_\beta \quad (5.22)$$

가 되어

$$T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = \rho g^{\alpha\beta}U_\alpha U_\beta = \rho c^2 \quad (5.23)$$

입니다. 약한 중력장에서 metric은 $g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta}$ 라는 의미이고 따라서 $g_{00} \approx -1$ 이고 천 천이 움직이는 경우 $U^i \ll U^0 \approx c$ 이고 $U_0 = g_{0\alpha}U^\alpha \approx g_{00}U^0 \approx -c$ 도 만족됩니다. 즉

$$T_{00} \approx \rho c^2 \quad (5.24)$$

만이 유일하게 살아남는 항이 될 것입니다. Ricci tensor $R_{\alpha\beta}$ 에서 00 항은

$$R_{00} = \Gamma^\rho_{00,\rho} - \Gamma^\rho_{0\rho,0} + \Gamma^\sigma_{00}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{0\rho}\Gamma^\rho_{\sigma 0} \quad (5.25)$$

입니다. 약한 중력장에서 $\nabla^2\Phi$ 가 가장 큰 항이라고 근사하면 수식 (4.112)와 (4.116)으로부터

$$R_{00} \approx \Gamma^i_{00,i} = -\left(\frac{\phi,i}{c^2}\right)_{,i} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi \quad (5.26)$$

이고 최종적으로 장 방정식은

$$\frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi = k\left(\rho c^2 - \frac{1}{2}\rho c^2\right) \quad (5.27)$$

혹은

$$\frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi = \frac{kc^4}{2} \rho \quad (5.28)$$

이 되어 $k = 8\pi G/c^4$ 라는 결론에 이르르게 됩니다. 즉 Newtonian 방정식을 얻음과 동시에 장 방정식은

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (5.29)$$

으로 완성됩니다.

이제 심심풀이로 위의 장방정식에 대한 단위를 확인해 보겠습니다. 좌변의 항은 Ricci tensor의 단위입니다. $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ 에서

$$[g_{\mu\nu}] = \text{dimension-less} \quad (5.30)$$

이고 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 는 $g_{\mu\nu}$ 를 미분한 양으로 $[\Gamma_{\mu\nu}^\lambda] = (\text{length})^{-1}$ 입니다. $R_{\lambda\alpha\beta}^\mu$ 는 $\partial_\alpha \Gamma_{\lambda\beta}^\mu$ 항을 포함하고 있어서 $[R_{\lambda\alpha\beta}^\mu] = (\text{length})^{-2}$ 이고 Ricci tensor는 Riemann tensor와 단위가 없는 metric과 contract이므로 $[R_{\alpha\beta}] = (\text{length})^{-2}$ 이 되어 좌변의 단위는 $(\text{length})^{-2}$ 로서 SI 단위로 나타내면 $[R_{\alpha\beta}] = \text{m}^{-2}$ 입니다. 우변의 경우 $T_{00} = \rho c^2$, $U = GMm/r$ 으로부터

$$[T_{00}] = [\rho c^2] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$[G] = [Ur/(Mm)] = \frac{\text{J} \cdot \text{m}}{\text{kg}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^3}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}^2}$$

가 되어

$$\left[\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right] = \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right) \cdot \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^3}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}^2} \right) \cdot \left(\frac{\text{s}^4}{\text{m}^4} \right) = \text{m}^{-2} \quad (5.31)$$

로서 장 방정식의 단위는 m^{-2} 이고 좌,우변의 단위는 (당연히) 같습니다.

2.1 Schwarzschild Metric 유도

공간에 구형으로 대칭인 (spherically symmetric) 질량분포가 있을 경우 이 질량분포 외부에서의 metric tensor는 어떻게 표현될까요? 이러한 상황에서 4차원 시공간 metric을 Schwarzschild metric이라 하고 위에서 구한 장방정식을 사용하여 유도해 보겠습니다. 시간을 포함한 구형 질량분포의 중심을 원점으로 하는 좌표계 $\{t, r, \theta, \phi\}$ 를 고려하고 다음 세가지를 가정합니다.

- 이 질량분포의 중심에서 무한히 멀리 떨어진 곳에서의 공간은 편평해야 합니다 (asym-

totically flat).

- 이 공간의 metric 은 시간의 함수가 아닌 정적인 metric이 됩니다.
- 이 공간의 metric 은 $(dt)(dx^i)$ 와 같은 항이 없어야 합니다 (만일 이러한 항이 있다면 $t \rightarrow -t$ 의 변환에서 metric이 대칭이 아니게 됨).

이러한 조건을 만족하는 metric은 다음과 같이 표현할 수 있어서

$$ds^2 = -e^{2\alpha}(cdt)^2 + e^{2\beta}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (5.32)$$

이로 여기서 $\alpha(r)$ 과 $\beta(r)$ 은 모두 r 만의 함수입니다. 위의 표현에 따르면

$$g_{00} = -e^{2\alpha}, \quad g_{11} = e^{2\beta}, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2\sin^2\theta \quad (5.33)$$

이로 0이 아닌 connection coefficients는

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = (\partial_r\alpha) \\ \Gamma_{00}^1 &= (\partial_r\alpha)e^{2(\alpha-\beta)} \\ \Gamma_{11}^1 &= (\partial_r\beta) \\ \Gamma_{22}^1 &= -re^{-2\beta} \\ \Gamma_{33}^1 &= -r\sin^2\theta e^{-2\beta} \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned}$$

으로 정리됩니다. 이를 활용하여 Riemann tensor를 구하면 6개의 항이 있어서

$$\begin{aligned} R_{101}^0 &= (\partial_r\alpha)(\partial_r\beta) - \partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2 \\ R_{202}^0 &= -r(\partial\alpha)e^{-2\beta} \\ R_{303}^0 &= -r(\partial\alpha)e^{-2\beta}\sin^2\theta \\ R_{212}^1 &= r(\partial_r\beta)e^{-2\beta} \\ R_{313}^1 &= r(\partial_r\beta)e^{-2\beta}\sin^2\theta \\ R_{323}^2 &= (1 - e^{-2\beta})\sin^2\theta \end{aligned}$$

으로 정리됩니다. Ricci scalar의 경우에는 Riemann tensor의 정의에서 유도하는 것이 좀 더 편해서

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\mu\nu} &\equiv \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} \\ R_{\beta\nu} &= R^\alpha_{\beta\alpha\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

으로부터

$$\begin{aligned} R_{00} &= \Gamma^\alpha_{00,\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\alpha,0} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^\alpha_{\sigma 0}\Gamma^\sigma_{0\alpha} \\ &= \Gamma^1_{00,1} - 0 + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{00} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{00} + \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{00} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} \\ &= \partial_r \left[e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha \right] + (\partial_r \beta) e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha + \frac{1}{r} e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha \times 2 - e^{2(\alpha-\beta)} (\partial_r \alpha)^2 \\ &= e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \\ R_{11} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \\ R_{22} &= e^{-2\beta} \left[r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1 \right] + 1 \\ R_{33} &= \sin^2 \theta (R_{22}) \end{aligned}$$

로 정리됩니다. 이를 바탕으로 Ricci scalar를 계산하면

$$\begin{aligned} R &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\ &= e^{-2\alpha} \cdot e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \\ &\quad + (-e^{-2\beta}) \cdot \left[-\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \right] \\ &\quad + (-1/r^2) \cdot e^{-2\beta} \left[r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1 \right] + (-1/r^2) \\ &\quad + (-1/r^2 \sin^2 \theta) \cdot \sin^2 \theta R_{22} \\ &= 2e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

으로 정리되고 이는 진공에서는 0이 되어야 ² 합니다. 이에 따라 R_{00} 과 R_{11} 도 각각 0이 되어야 하고 이를 이용하여

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-2(\alpha-\beta)} R_{00} + R_{11} = \frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_r \beta) \\ \therefore \alpha + \beta &= \text{constant} \end{aligned}$$

² 진공에서는 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$ 이고 이 수식에 $g^{\mu\nu}$ 를 곱하여 contract시켜주면 $R = 0$ 을 얻게 됩니다.

를 얻게 되고 위의 상수는 $t \rightarrow e^{-\text{constant}}t$ 의 변환으로 0으로 정해줄 수 있습니다. 즉 $\alpha = -\beta$ 의 관계를 얻게 되고 또한 $R_{22} = 0$ 이라는 조건으로부터

$$e^{2\alpha} \left[2r\partial_r\alpha + 1 \right] = 1 \quad (5.34)$$

이고 이는

$$\partial_r(re^{2\alpha}) = 1 \quad (5.35)$$

과 동일하게 되어 R_S 를 상수로 놓으면

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_S}{r} \quad (5.36)$$

로 구할 수 있습니다. 즉 Schwarzschild metric은

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (5.37)$$

으로 표현됩니다. 이제 상수 R_S 를 결정하기 위하여 약한 중력에 대한 수식 (4.116)을 살펴봅니다. $g_{00} = 1 + h_{00}$ 으로부터

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \quad (5.38)$$

이고 따라서

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (5.39)$$

임을 알 수 있고 이때 위의 상수 R_S 를 Schwarzschild radius라고 부릅니다.

2.2 Schwarzschild 블랙홀

Schwarzschild metric 으로 기술되는 metric을 가진 물체 중 물체의 실제 반경이 R_S 보다 작은 대상을 Schwarzschild 블랙홀 또는 회전하지 않는 블랙홀이라고 합니다. 참고로 우리의 태양과 지구의 경우 Schwarzschild radius의 값들은

$$R_S(\text{Sun}) = 3 \text{ km}$$

$$R_S(\text{Earth}) = 9 \text{ mm}$$

로 매우 작은 값들입니다. 이러한 블랙홀에 대하여 자유낙하하는 물체의 경우 관찰자에 따라 시간이 어떻게 다르게 계산되는지 앞으로 알아보겠습니다. 우선 관찰자 자신이 블랙홀로 자유낙하하는 경우, 자신이 보는 $ds^2 = c^2 d\tau^2$ 일 것입니다 (여기서 $d\tau$ 는 proper time의 미소변화). 두 번째 관찰자는 블랙홀로부터 멀리 떨어져 있는 고정된 위치에서 블

랙홀 중심으로 자유낙하하는 물체를 관찰합니다 ($d\Omega = 0$). 이 경우

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2, \\ c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 &= c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} c^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \end{aligned} \quad (5.40)$$

이 성립합니다. 이제 수식 (4.92)에서 구한 geodesic 방정식을 이용하여 ($s \rightarrow \tau$)

$$\frac{d}{d\tau} \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tau} \quad (5.41)$$

계산을 해 봅니다. 우선 $dx^\mu/d\tau$ 에서는 $dt/d\tau$ 와 $dr/d\tau$ 가 0이 아니므로 $\mu = r$ 인 경우

$$\frac{d}{d\tau} \left[g_{11} \frac{dr}{d\tau} \right] = \frac{1}{2} \partial_r g_{00} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 + \partial_r g_{11} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \quad (5.42)$$

이고 이를 계산하면

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} \frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{R_S/r^2}{(1-R_S/r)^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -\frac{1}{2} c^2 \frac{R_S}{r^2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{R_S/r^2}{(1-R_S/r)^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \quad (5.43)$$

이고 여기에 수식 (5.40)를 대입하여 ($dt/d\tau$)를 소거하면

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{GM}{r^2} \quad (5.44)$$

을 얻습니다. 언뜻 보기에도 이 수식은 뉴튼역학에서의 가속력 관계와 같아 보이나 엄밀히 말하면 여기에서는 proper time으로 미분한 양으로 표현된다는 점에서 좀 다르겠습니다 (시간이 자유낙하하는 물체의 계에서 측정된 시간). 또한 위의 수식은

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM}{r} \right] = 0 \quad (5.45)$$

으로도 쓸 수 있어서 proper time에 대하여 보존되는 양을 정의할 수 있습니다. 만일 자유낙하의 시작점이 r_0 이었다면 그 보존량은 $-GM/r_0$ 이고

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{r_0} \quad (5.46)$$

혹은

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)} = -\sqrt{\frac{2GM(r_0 - r)}{rr_0}} \quad (5.47)$$

으로 바뀌어서 τ 에 대한 적분을 할 수가 있습니다. 즉

$$\begin{aligned}\tau(r_f) &= -\sqrt{\frac{r_0}{2GM}} \int_{r_0}^{r_f} \sqrt{\frac{r}{(r_0-r)}} dr \\ &= \sqrt{\frac{r_0}{2GM}} \left[r_0 \tan^{-1} \sqrt{\frac{r_0-r_f}{r_f}} + \sqrt{r_f(r_0-r_f)} \right]\end{aligned}$$

으로 표현됩니다.³ 따라서 자유낙하하는 물체에 고정되어 있는 관측자 입장에서는 물체가 Schwarzschild horizon까지 도달하는데 유한한 시간이 걸리는 것으로 해석됩니다.

이제 그렇다면 블랙홀에서 멀리 떨어져 있는 고정된 지점에서는 어떻게 관찰될까 알아보겠습니다. 이를 위하여 $dr/dt = (dr/d\tau)/(dt/d\tau)$ 식과 수식 (5.40)를 대입하여 $dt/d\tau$ 를 소거하면

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(dr/d\tau)}{\sqrt{\frac{1}{(1-R_S/r)} + \frac{1}{c^2(1-R_S/r)^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}} \quad (5.48)$$

이고 $r \gg R_S$ 근처에 접근하면

$$\frac{1}{1-R_S/r} = \frac{r}{r-R_S} \simeq \frac{R_S}{r-R_S} \quad (5.49)$$

로서 매우 큰 값을 갖게 되어 dr/dt 는

$$\frac{dr}{dt} \simeq -c \left(\frac{r-R_S}{R_S} \right) \quad (5.50)$$

으로 근사됩니다. 이를 적분하면

$$t(r_f) \simeq -\frac{R_S}{c} \int_{r_0}^{r_f} \frac{dr'}{r'-R_S} = -\frac{R_S}{c} \left(\ln(r_f - R_S) - \ln(r_0 - R_S) \right) \quad (5.51)$$

입니다. 위의 수식에서 $t(r_f)$ 는 r_f 가 R_S 로 접근함에 따라 양의 무한대로 발산하게 되고 이는 외부에서는 물체가 R_S 에 도달하는 것을 보지 못한다는 의미입니다.

³ 다음의 적분은 $-\int \sqrt{\frac{r}{r_0-r}} dr = r_0 \tan^{-1} \sqrt{\frac{r_0-r}{r}} + \sqrt{r(r_0-r)}$ 으로 해석적 적분이 성립합니다.

제 6 장 상대론적 우주론

이제 지금까지의 논의를 바탕으로 상대론적 우주론에 대하여 알아보겠습니다. 이제부터는 빛의 속도 $c = 1$ 로 놓고 계산을 하겠습니다.

제 1 절 FRW metric과 Einstein 장 방정식

전에 언급한 FRW metric을 일단 다시 써보면

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\} \quad (6.1)$$

입니다. 이를 바탕으로 Christoffel symbol들을 구하면

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}[\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}] = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \\ \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 \\ \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1 - kr^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - kr^2) \\ \Gamma_{33}^1 &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta\end{aligned}$$

입니다. 이를 바탕으로 Ricci tensor를 구하면

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \partial_\beta \Gamma_{\rho\alpha}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda - \Gamma_{\beta\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\alpha}^\lambda$$

이므로

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \partial_\rho \Gamma_{00}^\rho - \partial_0 \Gamma_{\rho 0}^\rho + \Gamma_{\rho \lambda}^\rho \Gamma_{00}^\lambda - \Gamma_{0\lambda}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\lambda \\
 &= -\partial_0 \Gamma_{i0}^i - \Gamma_{0j}^i \Gamma_{i0}^j \\
 &= -3\partial_0 \frac{\dot{a}}{a} - \Gamma^i 0 i^3 \\
 &= -3\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -3\frac{\ddot{a}}{a} \\
 R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\
 R_{22} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\
 R_{33} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

이 됩니다. 위의 수식들에서 공간 부분은 다시

$$R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \frac{g_{ij}}{a^2}$$

으로 나타낼 수도 있습니다. 마지막으로 Ricci scalar는

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]$$

으로 최종 정리됩니다. 이제 Friedmann 방정식에 대하여 상대론적 논의을 할 준비가 거의 다 됩 셈입니다.

1.1 Friedmann 방정식

이제 FRW metric 내부의 물질과 에너지의 형태가 이상적인 유체(perfect fluid)라고 가정합니다. 이 유체는 comoving coordinates에서는 정지해 있는 것으로 관찰되어 four-velocity는

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (6.2)$$

이 될 것이고 에너지-운동량 텐서는

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + Pg_{\mu\nu} \quad (6.3)$$

가 되어

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22}P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33}P \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

입니다. 만일 index 하나를 위로 올리면

$$T_\mu^\nu = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = \text{diag}(-\rho, P, P, P) \quad (6.5)$$

로 좀 더 간결해지고

$$T = T_\mu^\mu = -\rho + 3P \quad (6.6)$$

가 됩니다. 이제 이를 Einstein 장 방정식에 넣겠습니다. 계산을 편하게 하기 위해서 Einstein 방정식을 약간 변형한 식

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (6.7)$$

을 사용합니다. $\mu\nu = 00$ 성분은

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G \left(\rho - \frac{1}{2}(-1)(-\rho + 3P) \right) = 4\pi G(\rho + 3P) \quad (6.8)$$

가 되고 $\mu\nu = ij$ 성분의 경우에는

$$\begin{aligned} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\frac{g_{ij}}{a^2} &= 8\pi G \left(g_{ij}P - \frac{1}{2}g_{ij}(-\rho + 3P) \right) \\ \frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} &= 4\pi G(\rho - P) \end{aligned}$$

으로 정리됩니다. 위의 두 식에서 \ddot{a} 가 있는 항을 없애면

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (6.9)$$

과 원래의 식을 정리한 꼴인

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (6.10)$$

식들을 얻고 이는 비상대론적으로 유도한 Friedmann 방정식들과 일치합니다.

1.2 인플레이션 우주론(Inflation Cosmology)

전에 언급한 horizon 문제와 편평도 문제를 해결하기 위하여 인플레이션 우주론이 1980년도에 도입되었습니다 [5]. 기본적인 아이디어는 우주초기의 에너지밀도는 scalar field $\phi(t, \mathbf{r})$ 가 거의 대부분이었고 이 scalar field의 potential은 $V(\phi)$ 로 주어진다는 것입니다. 이러한 경우 이 scalar field가 주는 에너지밀도와 압력을

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

로 주어집니다. 이 scalar field에 의해서 우주 초기에 급속 가속 팽창을 하게 되는데 우선 그 조건에 대하여 간단하게 알아보겠습니다. Hubble 매개변수와 scale factor로부터

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt}(\dot{a})^{-1} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} \equiv -\frac{1}{a}(1 - \epsilon)$$

으로 나타내고 이때 ϵ 은

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (6.11)$$

으로 정의합니다. 이렇게 되면 가속 팽창의 조건 $\ddot{a} > 0$ 은

$$\epsilon < 1 \quad \text{or} \quad -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1 \quad (6.12)$$

이 되는 셈입니다. 즉 ϵ 은 인플레이션의 정도를 나타내는 매개변수라고 생각할 수 있어서 극단적인 경우 ($\epsilon = 0$)

$$\epsilon = 0 \rightarrow H = \frac{\dot{a}}{a} = \text{constant} \quad (6.13)$$

이고 이럴 경우 H 가 상수이기 때문에 scale factor 방정식을 적분할 수 있어서

$$\frac{da}{a} = H dt \rightarrow a \propto e^{Ht} \quad (6.14)$$

이 되어 metric은

$$ds^2 \simeq -dt^2 + e^{2Ht}(dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (6.15)$$

으로 표현됩니다.

우주 초기에 에너지 밀도는 ϕ 에 의해 결정되므로 Friedmann 방정식은

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (6.16)$$

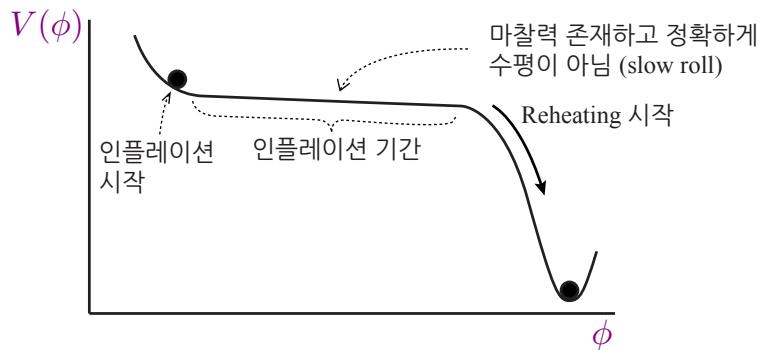


그림 6.1: 인플레이션 기간에는 potential의 기울기가 매우 작아서 운동에너지 항이 매우 작게 되는 potential 모양을 기술하는 그림. 이러한 모델을 slow-roll potential이라고 많이 부릅니다.

로 쓸 수 있고 위의 식을 시간에 대하여 미분하면

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi G}{3} [\phi\ddot{\phi} + V'(\phi)\dot{\phi}] \quad (6.17)$$

입니다 ($V' = dV/d\phi$). 이제

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \quad (6.18)$$

에다가 두번째 Friedmann 방정식과

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (6.19)$$

scalar field ϕ 에 대한 에너지 밀도 및 압력을 넣으면

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \\ &= -\frac{4\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V + \frac{3}{2}\phi^2 - 3V \right) - \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right) \\ &= -4\pi G\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

으로 정리됩니다. 즉 \ddot{H} 는 scalar field ϕ 의 운동에너지 항과 관계가 있게 됩니다. 이제 수식 (6.17)에 이 결과를 대입하면

$$\begin{aligned} 2H(-4\pi G\dot{\phi}^2) &= \frac{8\pi G}{3}[\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'\dot{\phi}] \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' &= 0 \end{aligned}$$

의 미분 방정식을 얻게 되고 이 방정식이 scalar field가 우주가 팽창함에 따라 어떻게 변하는지 기술하는 방정식입니다. 위의 방정식은 harmonic oscillator 방정식으로 scalar field ϕ 의 potential이 외부힘으로(V') 작용한다는 의미이고 또한 우주의 팽창은 일종의 마찰력 ($3H\dot{\phi}$)처럼 행동한다는 뜻이기도 합니다. 위에서 \dot{H} 와 ϵ 의 표현을 사용하면

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{4\pi G \dot{\phi}^2}{\frac{8\pi G}{3} \rho_\phi} \quad (6.20)$$

이므로 인플레이션의 조건인 $\epsilon < 1$ 은 인플레이션 시기에는 운동에너지 항 $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ 은 전체 에너지 항 ρ_ϕ 에서 작은 부분만 차지한다는 의미입니다. 따라서 인플레이션이 일어나려면 그 기간동안에는 potential이 거의 편평하여 운동에너지 항이 매우 작아야 한다는 뜻이고 이에 대한 상황이 그림 (6.1)에 설명되어 있습니다. 인플레이션이 시작될 당시의 에너지 밀도(ρ_f)는 얼마일까요? 정확한 값은 현재 알 수 없으나 만일 입자물리학에서 이야기하는 GUT 에너지 scale 이라면 ($E_{\text{GUT}} \sim 10^{16} \text{ GeV}$) 단위 분석을 통하여

$$\rho_f \sim \frac{E_{\text{GUT}}^4}{\hbar^3 c^5} = 2 \times 10^{81} \text{ g/cm}^3 \quad (6.21)$$

정도로 예측해 볼 수 있습니다. 그렇다면 인플레이션이 진행되는 동안 우주의 급속 팽창은 $k = 0$ 인 FRW metric으로 기술할 수 있어서 Friedman 방정식의 우변이

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_f \quad (6.22)$$

상수가 되어 적분이 가능하게 됩니다. 즉

$$a(t) = \text{constant} \cdot e^{\chi t}$$

$$\chi = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_f} \simeq 10^{37} \text{ s}^{-1}$$

이 됩니다. 이러한 scale factor의 지수적 확장은 대략 $c\chi^{-1}$ 의 거리로부터 ¹ ($c\chi^{-1} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \cdot 10^{-37} \text{ s} \sim 3 \times 10^{-29} \text{ m}$) 약 10 cm 정도까지로 추측되고 있고 이에 따르면 scale factor 자체는 인플레이션 기간 동안 10^{28} 배 증가되는 셈입니다. 그리고 이러한 지수적 확장이 일어나는 시간은

$$e^{\chi \Delta t} = 10^{28} \quad (6.23)$$

로 계산할 수 있어서 $\Delta t \sim 10^{-36} \text{ s}$ 정도로 예측되고 있습니다.

그렇다면 이러한 인플레이션 우주론은 horizon 문제와 편평도 문제를 어떻게 설명 할까요? 이제부터 논의해 보겠습니다. 인플레이션 우주론에 따르면 현재 관측되는 우주

¹이 거리 $c\chi^{-1}$ 은 인플레이션 초기에 scalar field가 균사적으로 일정한 값을 갖게 되는 거리를 뜻하게 되어 “coherence 영역”이라고 부릅니다.

전체가 훨씬 더 작은 coherence 영역으로부터 팽창이 진행되었음을 예측합니다. 따라서 horizon 문제는 자연스럽게 해결됩니다. 또한 편평도 문제는 다음과 같이 설명됩니다. Scalar field ϕ 가 potential 을 천천히 내려오게 되면 (slow-roll) metric의 변화는 에너지 밀도 ρ 에 따라 결정됩니다. 이때의 metric을 FRW metric 으로 근사하면 scale factor는 Friedmann 방정식을 따르게 되어

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (6.24)$$

을 만족합니다. 편평도 문제는 왜 k/a^2 항이 작은가 인데 인플레이션 우주론에 의하면 coherence 영역은 지수적으로 팽창하여 ρ 는 거의 상수이지만 k/a^2 은 우주가 팽창하여 대략 $(1/a^2) = (10^{-28})^2 = 10^{-56}$ 정도 작아지게 됩니다. 이러한 논리에 의해 왜 k/a^2 항이 작아지는가를 설명합니다.

부록 A Mathematica 활용 Tenor 계산

제 1 절 Schwarzschild Metric

Schwarzschild metric에 대한 각종 tensor를 구하겠습니다. 두 가지 다른 방법을 사용하는데 이 방법들은 김유래, 이보현 학생이 작성한 것을 정리한 것입니다. 우선 수식 (5.32)에서 나타난 바와 같이

$$ds^2 = -e^{2\alpha}(cdt)^2 + e^{2\beta}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (\text{A.1})$$

으로부터 출발합니다. 즉

```
x0=t;x1=r;x2=th;x3=ph;  
g00[t,r,th,ph]=-Exp[2 a1[r]]; g11[t,r,th,ph] =Exp[2 b1[r]];  
g22[t,r,th,ph]=r^2; g33[t,r,th,ph]= r^2 (Sin[th])^2;  
g01[t,r,th,ph]=g02[t,r,th,ph]=g03[t,r,th,ph]=g12[t,r,th,ph]=  
g13[t,r,th,ph]=g23[t,r,th,ph]=0;  
Coord={x0,x1,x2,x3};  
g={  
{g00[x0,x1,x2,x3],g01[x0,x1,x2,x3],g02[x0,x1,x2,x3],g03[x0,x1,x2,x3]},  
{g01[x0,x1,x2,x3],g11[x0,x1,x2,x3],g12[x0,x1,x2,x3],g13[x0,x1,x2,x3]},  
{g02[x0,x1,x2,x3],g12[x0,x1,x2,x3],g22[x0,x1,x2,x3],g23[x0,x1,x2,x3]},  
{g03[x0,x1,x2,x3],g13[x0,x1,x2,x3],g23[x0,x1,x2,x3],g33[x0,x1,x2,x3]}},  
h=Inverse[g];
```

까지 입력하여 좌표계 및 metric tensor 설정을 완료합니다. 이제 Christoffel symbol을 구하기 위하여

```
Gam=Table[Sum[(1/2) h[[a,d]](  
D[g[[d,b]],Coord[[c]]]+D[g[[d,c]],Coord[[b]]]-D[g[[b,c]],Coord[[d]]]  
) ,{d,1,4}],{a,1,4},{b,1,4},{c,1,4}];
```

와 같이 설정합니다. 이제 Gam은 테이블이 되어

$$\left\{ \{\Gamma_{00}^0, \Gamma_{01}^0, \Gamma_{02}^0, \Gamma_{03}^0\}, \{\Gamma_{10}^0, \Gamma_{11}^0, \Gamma_{12}^0, \Gamma_{13}^0\}, \dots, \{\Gamma_{30}^3, \Gamma_{31}^3, \Gamma_{32}^3, \Gamma_{33}^3\} \right\}$$

의 형태를 갖습니다. 이제 Riemann tensor, Ricci tensor, Ricci scalar는 정의에 따라 구하면 되어

```
Rm=Table[
D[Gam[[a,b,d]],Coord[[c]]]-D[Gam[[a,b,c]],Coord[[d]]]+
Sum[Gam[[a,c,e]] Gam[[e,b,d]]-Gam[[a,d,e]] Gam[[e,b,c]],
{e,1,4}],{a,1,4},{b,1,4},{c,1,4},{d,1,4}];
Rc=Simplify[Table[Sum[Rm[[e,a,e,b]],{e,1,4}],{a,1,4},{b,1,4}]];
Rs=Simplify[Sum[h[[a,b]] Rc[[a,b]],{a,1,4},{b,1,4}]];
```

으로 정리됩니다. 마지막 Ricci scalar는

$$R = -2e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) \right]$$

으로 수작업 계산값과 같습니다.

이제 두번째 방법으로 구한 방법을 소개합니다. 우선

```
dim=4;
coordX={t,r,th,ph};
dcoordX={dt,dr,dth,dph};
gd={{{-E^(2 al[r]),0,0,0},{0,E^(2 be[r]),0,0},{0,0,r^2,0},
{0,0,0,r^2 Sin[th]^2}};
gu=Inverse[gd];
```

으로 좌표계 및 metric tensor를 설정합니다. 그 후에는

```
cSYM[i_,j_,k_]:=1/2*gu[[i,i]]*(D[gd[[i,j]],coordX[[k]]]+D[gd[[i,k]],coordX[[j]]]-D[gd[[j,k]],coordX[[i]]])
RiemannT[i_,j_,k_,l_]:=Block[{ii,jj},D[cSYM[i,l,j],coordX[[k]]]-D[cSYM[i,k,j],coordX[[l]]]+
Sum[cSYM[i,k,jj]*cSYM[jj,l,j],{jj,1,dim}]-Sum[cSYM[i,l,jj]*cSYM[jj,k,j],{jj,1,dim}]]
RicciT[i_,j_]:=Block[{ii,jj},Sum[RiemannT[ii,i,ii,j],{ii,1,dim}]]
RicciS = Sum[gu[[ii,ii]] RicciT[ii,ii],{ii,1,dim}]//Simplify;
```

으로 Riemann tensor, Ricci tensor, Ricci scalar를 정의합니다. 그리고 다음의 문장으로

```
Do[Print["Ricci" <> ToString[{coordX[[i]],coordX[[j]]}], "=",
RicciT[i,j]//Simplify],{i,1,dim},{j,1,dim}]
```

Ricci tenor를 출력합니다. 두개의 서로 다른 방법을 잘 비교해 보기 바랍니다.

참고 문헌

- [1] Y. Su *et al.*, Phys. Rev. D **50**, 3614 (1994).
- [2] <http://arXiv.org/abs/astro-ph/1502.01589>.
- [3] <http://arXiv.org/abs/astro-ph/1502.01582>.
- [4] D. J. Fixen, Astrophysical J. **707**, 916 (2009).
- [5] A. H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981); A. D. Linde, Phys. Lett. **108B**, 389 (1982); A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982); A. H. Guth and E. J. Weinberg, Nucl. Phys. **B212**, 321 (1983).

찾아보기

Einstein's summation convention, 10

four-velocity, 13

Hubble constant, 18

Hubble parameter, 18

locally inertial frame, 6

Lorentz four-vector, 13

Lorentz scalar, 14

Lorentz 변환, 5, 11

Lorentz 인자, 9

matter dominated universe, 32

Maxwell, 5

metric, 23

Newton, 5

Poisson, 5

Principle of Equivalence, 6

radiation dominated universe, 36

Riemann curvature tensor, 91

scale factor, 17

Spacelike 구간, 13

Special Relativity, 9

Timelike 구간, 13

관성질량, 6

등가원리, 6

만유인력, 5

만유인력상수, 5

중력질량, 6

중성자별, 7, 16

특수상대성이론, v, 5, 9, 11, 13