



KLS

Controle de Processos

Introdução à modelagem matemática e representação dos sistemas de controle

Henrique Borges Garcia
Giancarlo Michelino Gaeta Lopes

© 2019 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

2019

Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza

CEP: 86041-100 — Londrina — PR

e-mail: editora.educacional@kroton.com.br

Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

Sumário

Unidade 1

Introdução à modelagem matemática e representação dos sistemas de controle.....	7
---	---

Seção 1.1

Introdução aos sistemas de controle	8
---	---

Seção 1.2

Modelos matemáticos de sistemas	21
---------------------------------------	----

Seção 1.3

Representação dos modelos matemáticos de sistemas	37
---	----

Palavra do autor

As indústrias de processamento podem ser caracterizadas pelo uso de recursos e matérias vindos da natureza em favor da humanidade. O termo processo é utilizado para descrever os métodos de mudança ou refinamento de matérias-primas para obter produtos finais. A necessidade de conhecer e controlar o que está ao nosso redor tem como finalidade alcançar produtos úteis e econômicos à sociedade. Como exemplo de controle de processo temos a proporção de ingredientes em uma mistura, a temperatura dos materiais, como os ingredientes são misturados, entre outros fatores que têm um impacto significativo na qualidade do produto final.

A partir do século XX, os servomecanismos, controladores programáveis e, sobretudo, os computadores passaram a fazer parte da tecnologia de automação, de forma que, atualmente, os computadores podem ser considerados a principal base da automação industrial contemporânea, e podemos ainda considerar o desenvolvimento da tecnologia da automação industrial diretamente ligado à evolução dos computadores.

Para atuar com controle de processos, o profissional dessa área precisa compreender e modelar um sistema para que este possa funcionar segundo seu propósito. Entretanto, no controle de processos, muitas vezes existem novos sistemas que ainda não são conhecidos, são complexos e interligados, como um processo químico, um sistema robótico ou um controle de tráfego, que se apresentará como um desafio para compreensão e execução de uma modelagem adequada.

O foco deste livro é dar o conhecimento necessário para que você, de posse do modelo matemático de um sistema dinâmico, possa atuar nele para que este se comporte da maneira mais adequada ao projeto. Entenda que sistema dinâmico pode ser dos mais variados tipos: mecânico, elétrico, térmico, químico, entre outros, e pode ainda ser uma mistura desses sistemas como, por exemplo, um sistema mecatrônico.

Note que é de grande importância que você aplique os conhecimentos adquiridos ao longo das unidades nos mais variados sistemas dinâmicos em seu dia a dia. Você pode criar um sistema, modelá-lo matematicamente com

todas as hipóteses simplificadoras necessárias e projetar um controle para obter uma resposta desejada. Esta é, sem dúvida, a maneira mais eficiente de você levar dúvidas para a sala de aula a fim de serem sanadas junto ao professor e, consequentemente, sedimentar o conhecimento.

Na primeira unidade faremos uma introdução aos sistemas de controle, trazendo conceitos básicos como malha aberta, malha fechada e retroalimentação, apresentaremos alguns modelos matemáticos de sistemas e, para isso, retomaremos nesse contexto os conceitos de equações diferenciais, transformada de Laplace e função de transferência. Por fim, representaremos esses modelos em diagrama de blocos.

A segunda unidade tratará da análise da resposta transitória e em regime permanente nos sistemas de primeira e segunda ordem, do erro em regime permanente, além de trazer aplicações práticas de sistemas de controle no MATLAB.

Enquanto na terceira unidade traremos o conceito de estabilidade dos sistemas de controle, na qual apresentaremos métodos como lugar das raízes e resposta em frequência.

Na quarta unidade apresentaremos técnicas de controle de processos e tipos de controladores como controle P, controle PI e controle PID e, ao final, suas aplicações em MATLAB.

Por fim, talvez a tarefa de controlar adequadamente um processo pode vir a ser não muito trivial, mas conhecer bem a teoria de controle por trás da prática é fundamental para se alcançar o resultado desejado. Vamos trilhar o caminho de maneira que você entenda cada conceito da melhor maneira possível e aplique-os ao longo das unidades.

Mãos à obra!

Unidade 1

Introdução à modelagem matemática e representação dos sistemas de controle

Convite ao estudo

A evolução da ciência e da tecnologia deixou-nos rodeados por sistemas autônomos, dentre os quais podemos citar o sistema de injeção eletrônica, que define automaticamente a mistura da combustão, o freio ABS, que evita o bloqueio da roda (e consequentemente a derrapagem do automóvel), mesmo que o condutor pressione totalmente o pedal freio, ou o piloto automático utilizado em aviões (também em embarcações e automóveis).

Em todos esses sistemas são utilizados conhecimentos provenientes da teoria de controle. Todos eles envolvem análise e modelagem de um sistema dinâmico, com a identificação de suas respectivas variáveis de entradas e das variáveis de saída, para então obter as equações que descrevem o comportamento dinâmico do sistema, e depois, o projeto do controlador que fará com que o sistema se comporte da maneira desejada (em relação aos exemplos temos, respectivamente: melhoria na qualidade da queima do combustível, prevenção de acidentes e mais segurança durante o voo, pouso e decolagem). Na modelagem e no projeto do controlador, faremos o uso da técnica de resolução de equações diferenciais ordinárias por meio da transformada de Laplace, que simplifica o trabalho e tem uso direto no software MATLAB.

Para iniciarmos os estudos em controle de sistemas dinâmicos ao longo desta unidade, apresentaremos uma série de situações práticas comuns no dia a dia de um profissional que trabalha com controle de processos e relacionadas ao conteúdo teórico apresentado nesta unidade. Nesse sentido, vamos pensar em alguns pontos: é possível modelar o mundo ao nosso redor? Que tipo de linguagem empregamos para modelar um sistema? Se conseguirmos modelar um sistema conseguimos influenciar a sua resposta?

Mãos à obra e um ótimo estudo!

Introdução aos sistemas de controle

Diálogo aberto

Os sistemas de controle possuem uma grande quantidade de aplicações e existem diversas formas de projetar um controlador. Mas antes de partir para o projeto propriamente dito, é essencial o conhecimento de algumas tecnologias básicas utilizadas no meio, além de saber diferenciar a arquitetura do sistema dinâmico como em malha aberta ou malha fechada.

Para contextualizar o nosso estudo, vamos pensar na seguinte situação prática: uma empresa de sistemas embarcados que oferece soluções em automação de sistemas foi contratada para o desenvolvimento de um projeto de controle automático de temperatura de uma estufa para ovos, também conhecida como chocadeira automática para ovos. Segundo o contratante, o usuário deverá entrar com a temperatura ideal para o tipo de ovos e o sistema deverá manter o valor desta temperatura. E então, qual a melhor forma de realizar o controle da temperatura deste sistema? Quais seriam as variáveis envolvidas neste processo?

Figura 1.1 | Estufa para os ovos ou chocadeira automática



Fonte: adaptada de <<https://go.olx.com.br/grande-goiania-e-anapolis/agro-e-industria/outros-itens-para-agro-e-industria/chocadeira-automatica-digital-para-120-ovos-de-galinha-690-00-527473433>>. Acesso em: 9 ago. 2018.

Para auxiliá-lo com esse desafio, introduziremos nesta seção os conceitos de sistemas de controle, arquitetura de sistemas dinâmicos e projetos de malhas de controle.

Bons estudos!

Não pode faltar

Não é muito difícil ouvir a palavra controle e pensar no controle da televisão, ou do videogame. No futebol, há a brincadeira chamada de “controlinho”, no qual o objetivo é ficar continuamente fazendo embaixadas com a bola sem deixá-la cair no chão.

Perceba que há uma mesma ideia por trás do uso da palavra controle:

Na televisão usamos o controle para encontrar um canal de que gostamos para assistir algo interessante.

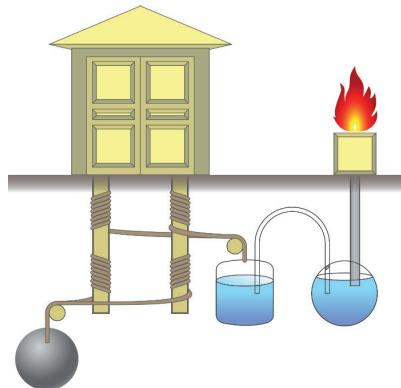
No videogame usamos o controle para fazer com que atuemos no jogo virtual e consigamos completar algum objetivo.

No “controlinho” atuamos na bola a fim de não deixá-la cair no chão.

Embora sejam circunstâncias totalmente distintas, controlar não deixa de ser a mesma coisa: atuar em algo para que um objetivo seja estabelecido. Pois então, a teoria de controle de sistemas dinâmicos busca exatamente a mesma coisa e, para tal, contamos com conhecimento físico e matemático.

Esta teoria não é tão recente. Um dos primeiros sistemas de controle automáticos de que se tem notícia foi desenvolvido por Heron de Alexandria (10 d.C. – 70 d.C.), no século I. Tratava-se de um sistema de abertura de portões, ilustrado na Figura 1.2.

Figura 1.2 | Ilustração do sistema de controle de abertura e fechamento dos portões



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma pira era acesa e o calor desta aquecia a água e o ar do primeiro reservatório subterrâneo, fazendo com que eles se expandissem. Com isso a

água era transferida para outro reservatório que, ficando mais pesado, descia puxando uma corda ligada a um rolete que, finalmente, rotacionava a porta. Para esse controle, a **entrada** do sistema era a temperatura da pira e a **saída** era o ângulo do portão.

No século XVII, surgiu pela primeira vez uma formalização matemática de um sistema de controle que era muito utilizado para corrigir a velocidade angular de máquinas à vapor. Esse sistema é denominado governador (ou regulador) centrífugo, ilustrado na Figura 1.3.

Figura 1.3 | Ilustração do governador (ou regulador) centrífugo

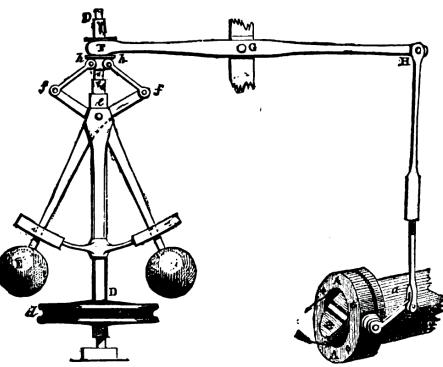


FIG. 4.—Governor and Throttle-Valve.

Fonte: Routledge (1900) apud <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=231047>>. Acesso em: 25 maio 2017.

Os governadores centrífugos eram utilizados para controlar a velocidade das máquinas à vapor, por meio da atuação na válvula que limita o fluxo de ar da admissão das máquinas. O eixo D rotaciona devido à potência gerada pelo motor por meio de algum acoplamento (por exemplo, correias) e, junto com o eixo D, as esferas também rotacionam. O aumento da velocidade angular faz com que as esferas se elevem e o mecanismo no topo suba e reduza a abertura da borboleta de admissão. A restrição da admissão reduz o trabalho gerado pelo motor e, consequentemente a velocidade angular desenvolvida pelo eixo. Neste caso, a **entrada** do sistema era a velocidade angular do eixo do motor e a **saída** era o ângulo da borboleta da admissão.



Refletá

Será que você conhece outro sistema de controle? Qual sistema seria esse? Qual tipo de variável esse sistema pode controlar: posição, fluxo ou potência? Em qual sistema dinâmico ele atua? Quais são as variáveis de entrada e saída desse sistema de controle?

Avançando na história, em 1922 Nicolas Minorsky foi responsável pela primeira proposta de aplicação de controle PID (proporcional – integrativo – derivativo, tipo clássico de controlador que será visto na Unidade 4) aplicado ao sistema automático de direção dos navios da marinha estadunidense.

Na década de 1950 até a década de 1960, com o avanço da ciência, a eletrônica analógica foi muito utilizada para tarefas de controle automático, nas quais os valores das resistências, capacitores e indutores afetavam a performance do controlador. Já na década de 1970, surgiu a teoria do controle digital devido ao desenvolvimento dos sistemas digitais (circuitos integrados e microcontroladores).



Refletia

Você sabe a diferença entre um sistema analógico e um sistema digital?

Qual a vantagem de um em relação ao outro? E desvantagens?

Sabemos que a eletrônica digital é vastamente utilizada nos dias atuais. Mas e a eletrônica analógica? Ela continua sendo útil? Você conhece algum exemplo?

Você conhece algum exemplo de sistema digital que não seja elétrico nem eletrônico?

O maior avanço na teoria de controle clássico ocorreu até a metade do século XIX, com ferramentas matemáticas muito importantes no projeto e análise de controladores, sendo que as mais importantes serão apresentadas ao longo das unidades deste material.

Na segunda metade do século XIX, houve o surgimento de técnicas avançadas de controle, tais como:

- Controle ótimo – cálculo da atuação no sistema por meio da minimização de uma função custo definida pelo projetista.
- Controle robusto – controle com performance e estabilidade robusta às incertezas da modelagem do sistema.
- Inteligência Artificial.



Pesquise mais

As técnicas mais avançadas de controle são utilizadas em situações complexas, nas quais as técnicas clássicas não conseguem realizar a tarefa necessária de maneira a alcançar um índice de performance

requerido como, por exemplo, quando o sistema real está sujeito a falhas, sendo tarefa do controlador lidar com elas.

Para saber mais, leia este artigo sobre o desenvolvimento de técnicas de controle robusto e controle tolerante a falhas.

SIQUEIRA A.; TERRA M.; FRANCISCO T. Controle robusto de robôs móveis em formação sujeitos a falhas. *Revista Controle & Automação*, v. 21, n. 1, p. 29-42, 2010. <<http://www.scielo.br/pdf/ca/v21n1/v21n1a03>>. Acesso em: 8 jun. 2017.

Neste contexto, é notório que a teoria de controle seja uma área extensa com aplicação nos mais diversos sistemas dinâmicos. Para começarmos nossos estudos nessa vasta área de conhecimento, é fundamental a introdução de alguns conceitos básicos, como o aprendizado da arquitetura do controlador. Algumas das definições mais usuais no estudo dos sistemas de controle estão apresentadas a seguir:

- **Variável controlada e variável manipulada:** em sistemas de controle, a variável controlada é o estado ou a grandeza que é mensurada e controlada. Essa variável usualmente corresponde à saída do sistema. Já a variável manipulada representa o estado ou a grandeza alterada pelo controlador, de forma que modifique a variável controlada.
- **Planta ou sistema a ser controlado:** consiste no equipamento ou conjunto de componentes que pode ser implementado de maneira integrada, com o objetivo de executar operações específicas. Ao longo desta disciplina, será chamado de planta qualquer sistema a ser controlado.
- **Sistemas:** conjunto de componentes que operam para alcançar um objetivo estabelecido. O conceito de sistema é utilizado tanto para fenômenos físicos quanto para abstratos e dinâmicos, encontrados na Economia e na Biologia, entre outros.
- **Distúrbio:** é chamado de distúrbio todo e qualquer sinal que propende a afetar de maneira inadequada o valor da variável de saída de um sistema. Um distúrbio é classificado como distúrbio interno e distúrbio externo. O primeiro é criado dentro do próprio sistema, enquanto o segundo é gerado fora e comporta-se como um sinal de entrada no sistema.

Imagine-se regulando a temperatura do chuveiro antes de começar o banho. Sendo um chuveiro simples, a temperatura da água é definida pela vazão do chuveiro: quanto menor o fluxo, maior a temperatura da água e quanto maior o fluxo, menor a temperatura.

Imagine ainda duas situações:

Você liga o chuveiro, define uma vazão que, por conhecimento prévio do comportamento de seu próprio chuveiro, você julga ser adequada para a temperatura desejada e entra para tomar banho sem interferir na vazão novamente.

(a) Você liga o chuveiro e vai se molhando de pouco em pouco, sentindo a temperatura da água e ajustando o fluxo para que a temperatura vá ao encontro daquela que você deseja.

(b) Qual das situações é mais provável de “dar errado” naquele dia mais rigoroso do inverno?

Se você, assim como eu, prefere não correr o risco de entrar no chuveiro frio durante o inverno, então concordamos que a situação (a) envolve mais riscos que a situação (b). Na situação (a) o chuveiro, que pode ser denominado sistema ou planta, e você, que está no papel de controle ou controlador, estão no que é chamado de **malha aberta** (*open-loop*); já na situação (b), vocês estão em **malha fechada** (*closed-loop*). Ou seja, na malha aberta, os cálculos do controlador são baseados em informações que ele recebe do sistema por meio da retroalimentação, diferentemente da arquitetura em malha aberta, na qual o controlador impõe a atuação por meio de valores predefinidos, que não se alteram durante o processo.



Assimile

Malha aberta: o controlador não recebe informação sobre o estado do sistema.

Malha fechada: o controlador recebe informação sobre o estado do sistema.

Desde as mais simples até as mais complexas tarefas podemos aplicar e explorar o conceito de malha aberta e malha fechada. Muitas vezes, em uma mesma tarefa, temos ambos os tipos de arquitetura funcionando de maneira concomitante.



Exemplificando

Um outro exemplo que diferencia o controle de malha fechada e malha aberta é a utilização ou não de automação na iluminação residencial.

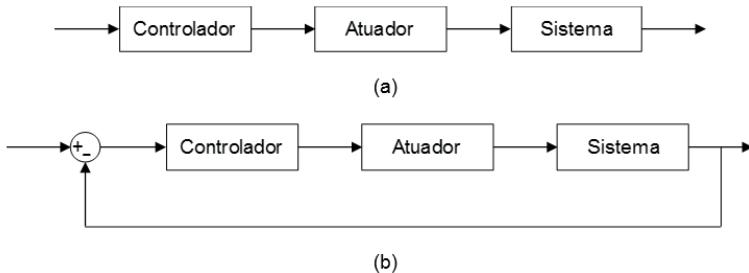
No caso de haver o sistema de automação, as luzes externas podem adequar-se à iluminação solar por meio de um sensor fotossensível: se houver luz do sol, as luzes são desligadas; caso contrário, elas são ligadas e, com isso, você não precisa se preocupar em apagá-las antes de dormir. Esse é um caso em que o controle de iluminação está em malha fechada. Quando não há o sistema de automação, se as luzes ficarem ligadas à noite, quando você acordar, elas estarão no mesmo estado, pois não há retroalimentação, ou seja, o controle das luzes está em malha aberta.

Podemos, então, concluir algumas características da malha aberta e da malha fechada. Na malha aberta, o controle é predefinido: ele independe do estado do sistema. Com isso, o resultado da atuação deste tipo de arquitetura de controle é altamente suscetível a corresponder ao que se deseja obter o sistema. Por não haver sensoriamento, malha aberta tende a ser mais simples e barata.

Na malha fechada, o controle beneficia-se de informações do sistema para definir o sinal de atuação (ou sinal de controle). Essa informação do sistema que retorna ao controle é chamada de **retroalimentação** (feedback), ou pode-se dizer também realimentação.

Como pode ser visto na Figura 1.4, um sistema de controle básico apresenta algumas estruturas fundamentais: o controlador, o atuador e o sistema. A diferença entre o sistema em malha aberta, Figura 1.4 (a), e o sistema em malha fechada, Figura 1.4 (b), é justamente a retroalimentação.

Figura 1.4 | Arquitetura básicas um sistema de controle: (a) malha aberta e (b) malha fechada



Fonte: elaborada pelo autor.

Cada elemento pode ser caracterizado da seguinte maneira:

- Sistema ou sistema dinâmico: é o alvo do controlador. Presente em ambas as arquiteturas. O sistema dinâmico é exatamente o sistema

do qual se espera um certo comportamento que pretende ser obtido por meio da atuação do controlador.

- Atuador: é o dispositivo que efetivamente atua no sistema de acordo com comandos vindos do controlador, seja por algum meio, como força, torque, diferença de potencial elétrico, pressão, entre outros. Este elemento também é presente em ambas as arquiteturas.
- Controlador: decide com que intensidade o atuador deve atuar no sistema. Faz parte de ambas as arquiteturas.
- Realimentação: pode existir no sistema, como visto na Figura 1.4 (b) em malha fechada, ou não, como visto na Figura 1.4 (a), em malha aberta. Este elemento, quando em malha fechada, entrega ao controlador informações sobre estado atual da planta. E, de acordo com estas informações, permite que o controlador ajuste a atuação no sistema a fim de que este alcance o comportamento desejado.

Embora a malha fechada seja mais atrrente no quesito de robustez e mitigação de erros, deve-se ter em mente que é também mais complexo de ser aplicado na prática e, com isso, geralmente apresenta maior custo financeiro.

Portanto, antes de se colocar em prática a resolução de um problema, você deve analisar se há realmente a necessidade de desenvolver um sistema de controle em malha fechada para obter a resposta desejada do sistema dinâmico.

Sem medo de errar

Relembrando nossa situação prática proposta no início desta seção, uma empresa de sistemas embarcados que oferece soluções em automação de sistemas foi contratada para o desenvolvimento de um projeto de controle automático de temperatura de uma estufa para ovos, também conhecida como chocadeira automática para ovos, como a vista na Figura 1.1. Segundo o contratante, o usuário deverá entrar com a temperatura ideal para o tipo de ovos e o sistema deverá manter o valor desta temperatura. E então, qual a melhor forma de realizar o controle da temperatura deste sistema? Quais seriam as variáveis envolvidas neste processo?

Figura 1.1 | Estufa para os ovos ou chocadeira automática



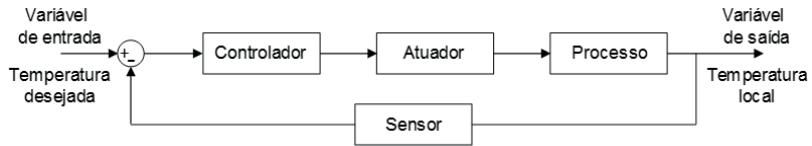
Fonte: adaptada de <<https://go.olx.com.br/grande-goiania-e-anapolis/agro-e-industria/outros-itens-para-agro-e-industria/chocadeira-automatica-digital-para-120-ovos-de-galinha-690-00-527473433>>. Acesso em: 9 ago. 2018.

Para iniciarmos o desenvolvimento de um projeto de controle, é fundamental compreendermos o que queremos controlar e como será realizado este controle. Em outras palavras, para o bom funcionamento do sistema de controle é fundamental definirmos qual será a variável de entrada, de saída e a arquitetura que vai compor este sistema automático.

Neste contexto, como é requisito do projeto que o usuário entre com a temperatura desejada e que o sistema mantenha este valor, o ideal é que a arquitetura deste **sistema** seja em **malha fechada**. Isto é, por mais que ocorra um distúrbio no processo o sistema deve, de forma automática, manter a temperatura desejada pelo usuário. Além disso, o sistema necessita das informações da saída para comparar com o sinal de referência, ou *set point*, para então manter o valor desejado da temperatura.

Considerando que seja usado um sistema resistivo para aquecimento da estufa de ovos, ou seja para planta, a variável de saída é a corrente elétrica, visto que o valor de tensão é constante e o valor da resistência é alterado mecanicamente por meio de um potenciômetro. O valor de corrente elétrica é então aferido e convertido por meio de um conjunto sensor/transdutor que permite então comparar com o valor da variável de entrada, como mostra a Figura 1.5.

Figura 1.1 | Estufa para os ovos ou chocadeira automática



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, compreendido o sistema de controle torna-se mais fácil desenvolver o projeto de controle de temperatura para ser entregue ao cliente.

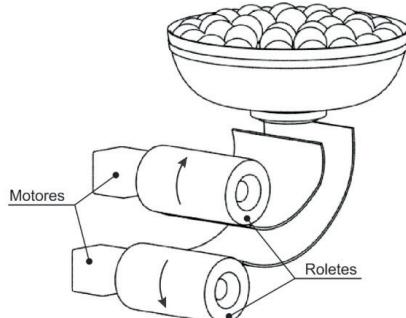
Avançando na prática

Sistema para arremesso de bolinhas de tênis de mesa

Descrição da situação-problema

Você é o profissional responsável por automatizar o centro de treinamento de tênis de mesa de sua cidade e foi encarregado de desenvolver uma máquina de arremessar bolas de tênis de mesa para o treino dos fundamentos do esporte. A Figura 1.6 é um esboço de como seria o sistema: dois roletes, cada um montado no eixo de um motor elétrico, que rotacionam em sentidos contrários para imprimir velocidade na bola que desce de um reservatório de bolas de mesa.

Figura 1.6 | Representação da máquina de arremesso de bolas de tênis de mesa



Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com o técnico dos atletas, essa máquina será utilizada para sessões de treinamento de um mesmo tipo de rebatida (saque, *forehand* ou *backhand*) e, por esse motivo, não há exigência de que a máquina altere a maneira de arremessar a bola.

Em relação à arquitetura do controle da máquina de treinamento, qual o tipo de controle que melhor se encaixa nas necessidades do projeto?

Resolução da situação-problema

A necessidade de funcionamento do equipamento descrita pelo técnico mostra que o sistema não precisa ser complexo, já que basta que as bolas

sejam arremessadas de uma mesma maneira durante toda uma sessão de treinamento. Mesmo tendo um custo financeiro maior, a arquitetura de malha fechada seria imprescindível, por exemplo, caso a bola arremessada devesse atingir algum local que mudaria de um arremesso para outro, mas este não é o caso. Uma arquitetura de malha aberta para o controle se mostra suficiente quando o objetivo do sistema é imutável, assim como o projeto em questão, contando com a vantagem de ser um sistema mais econômico e mais simples de ser fabricado.

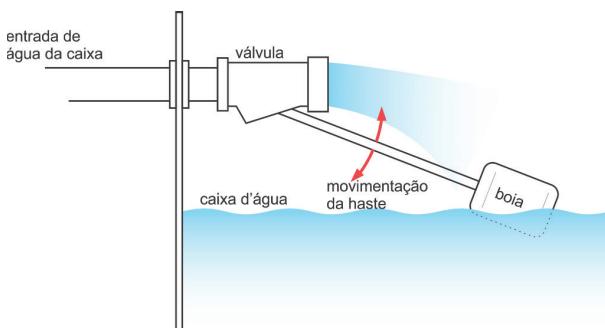
Portanto, a máquina de arremesso de bolas deve ter seu funcionamento em malha aberta.

Faça valer a pena

1. Saber identificar a variável a ser realimentada é de extrema importância para um sistema de controle, pois a seleção de tal variável afeta tanto a modelagem do sistema dinâmico quanto o projeto do controlador para este. Por vezes sua má seleção acarreta em um modelo que, além de estar errado, é impossível de ser submetido à ação de um controlador.

As caixas d'água das residências contam com um simples sistema de controle puramente mecânico para que a água não falte nem transborde da caixa. O sistema é composto por uma boia conectada a uma haste cuja rotação afeta a vazão da válvula, como pode ser visto na Figura 1.7.

Figura 1.7 | Ilustração do sistema de controle de nível da acaixa d'água



Fonte: elaborada pelo autor.

Qual é propriedade (ou variável) que é realimentada para o sistema de controle?

- a) Altura da boia.
- b) O fluxo de água que sai da caixa.
- c) Posição da válvula.
- d) O nível da água dentro da caixa.
- e) O volume de água presente na caixa d'água.

2. Os sistemas de controle podem ser classificados em controle em malha aberta (os que não têm retroalimentação) e controle em malha fechada (os que têm retroalimentação). Embora as diferentes arquiteturas tenham suas peculiaridades tanto na teoria quanto na prática, devemos entender que o uso de uma arquitetura em um sistema de controle não exclui a possibilidade de aplicação da outra arquitetura. Por isso, nos mais variados sistemas de controle que possamos imaginar, existe a presença de ambas arquiteturas. Então, é imprescindível que o projetista usufrua das vantagens de cada tipo de arquitetura sempre que necessário.

Sobre uma máquina de lavar comum, podemos afirmar:

- I. Ao acionar a máquina, é possível escolher o tipo de lavagem que se deseja realizar. Após completar o ciclo de lavagem, a máquina inicia o enxague e, por fim, a centrifugação. Todos os ciclos do processo citados anteriormente ocorrem por um intervalo de tempo, o qual é predeterminado de acordo com cada tarefa. Ao final do processo de lavagem, a máquina não garante que todas as roupas estejam devidamente lavadas.
- II. A vibração do cesto da máquina de lavar é intensa devido à inevitável distribuição não homogênea das peças de roupa durante a centrifugação, então, para não avariar o mecanismo da máquina, absorvedores de vibração são conectados à parte rotativa, que contém as roupas, a fim de diminuir a vibração.
- III. É possível escolher o nível de água da máquina de acordo com a quantidade de roupas que se deseja lavar.
- IV. Aplicando o conceito de arquiteturas de um controlador, podemos afirmar que I, II e III se tratam de:
 - a) Malha aberta, malha aberta e malha aberta.
 - b) Malha aberta, malha aberta e malha fechada.
 - c) Malha aberta, malha fechada e malha aberta.
 - d) Malha aberta, malha fechada e malha fechada.
 - e) Malha fechada, malha fechada e malha fechada.

2. Pessoas com deficiência visual são aquelas que, por motivo de acidente, de saúde ou congênito, sofreram a perda ou total parcial do sentido da visão. Com isso, a habilidade de andar de maneira independente pelas ruas fica prejudicada, uma vez que esses indivíduos não têm informação de como o ambiente ao redor deles se encontra nem como ele está se modificando. Para andarem pelas ruas de maneira mais independente, as pessoas com deficiência visual contam com o auxílio de bengala, cão-guia, piso tátil, semáforos sonorizados, etc., pois eles dispõem de pouca ou nenhuma informação sobre o ambiente em que se encontram.

Utilizando-se do contexto de sistema de controle, qual a utilidade desses tipos de auxílio?

- a) Esses auxílios servem para ajudar a pessoa a chegar ao destino com mais rapidez.
- b) Esses auxílios servem de retroalimentação das situações ambiente, permitindo a ele tomar decisão a respeito de sua locomoção com mais segurança e conforto.
- c) São de pouca utilidade pois não são confiáveis para que o deficiente visual possa se locomover, trazendo riscos à sua saúde.
- d) Esses tipos de auxílio caracterizam uma malha aberta para o deficiente visual, pois ele não pode ver o lugar onde se encontra.
- e) Conceitos de sistema de controle não se aplicam, pois se trata de seres biológicos.

Modelos matemáticos de sistemas

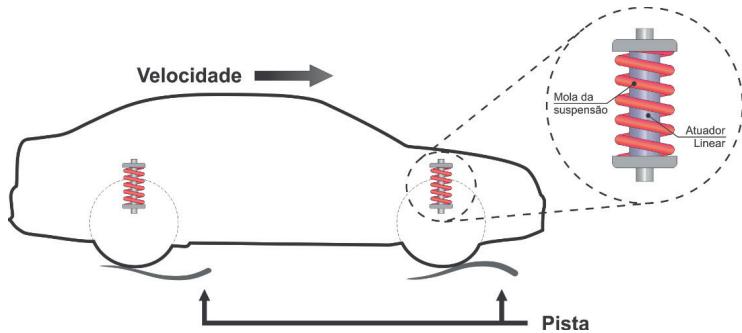
Diálogo aberto

Agora que você conheceu um pouco da história do controle e aprendeu conceitos básicos como malha fechada (com retroalimentação), malha aberta e identificação das variáveis de entrada e saída, podemos dar continuidade à nossa introdução à modelagem matemática e representação dos sistemas de controle. Para reforçar o seu aprendizado, vamos pensar em uma situação prática comum no dia a dia do profissional de controle de processos.

Ao projetar um sistema de controle, uma etapa importante do projeto é a simulação do sistema real para reconhecer seu comportamento quando excitado por entradas variadas. Como exemplo, vamos pensar no projeto de um sistema de suspensão automatizada para aumentar o conforto dos passageiros e do motorista do carro.

Um automóvel é composto de inúmeros sistemas dinâmicos e você é responsável pelo desenvolvimento e análise de sistemas de suspensão, conforme mostra a Figura 1.8. Sendo a suspensão um elemento fundamental na dirigibilidade do automóvel e também na de segurança, quanto melhor este for desenvolvido, mais conforto teremos e mais segurança geraremos para os passageiros.

Figura 1.8 | Ilustração de um carro, com detalhe na suspensão da roda



Fonte: elaborada pelo autor.

A suspensão tem papel de mitigar essas vibrações para garantir maior conforto aos ocupantes do veículo. Então podemos dizer que a entrada do sistema é o perfil da pista que passa sob a roda do carro.

O sistema de suspensão ativa conta com um atuador, que exercerá esforço no chassi do carro e no pneu para mitigar a vibração que a pista causa. Portanto, a saída do sistema de controle será a força do atuador.

Devemos realizar a etapa de simulação do sistema real para conhecer o comportamento do sistema quando excitado por entradas variadas. Essa simulação deve ser feita sem que seja levado em consideração o atuador linear da suspensão, pois seu objetivo é visualizar o comportamento do sistema não atuado. Como seria possível descrever o comportamento do sistema de modo a obter esse tipo de resposta?

Para te auxiliar a responder esse questionamento, nesta seção você será apresentado a uma forma eficiente de obter a resposta de um sistema dinâmico linear invariante no tempo, de acordo com a entrada que ele recebe. Você aprenderá a resolver equações diferenciais ordinárias dos modelos matemáticos utilizando as transformadas inversa e direta de Laplace, a fim de simplificar e agilizar o processo de resolução.

Bons estudos!

Não pode faltar

O modelo matemático serve para descrever matematicamente o comportamento (aproximado) de um sistema dinâmico, então ele é utilizado na análise e projeto de controles, antecipação de comportamentos, realização de ensaios e diversas outras tarefas.

Esses modelos são classificados matematicamente como equações diferenciais, das quais existem dois tipos:

- As Equações Diferenciais Ordinárias (conhecidas pela sigla EDO), que são equações que envolvem derivadas (1^a derivada, 2^a derivada,...) de uma função desconhecida que, quase sempre, dependerá apenas do tempo. Vamos chamar essa função desconhecida de variável, pois ela vai representar quantidades como corrente elétrica, posição, fluxo de um líquido, temperatura, etc., que são variáveis de um sistema dinâmico. Por exemplo, a Equação 1.1 descreve matematicamente o comportamento um circuito elétrico que tem uma fonte de tensão como entrada ($v_{in}(t)$), um resistor R e um indutor L , todos em série e $i(t)$ é a corrente elétrica:

$$v_{in}(t) = R \cdot i(t) + L \frac{d}{dt} i(t) \quad (1.1)$$

- E as Equações Diferenciais Parciais (EDP), que envolvem derivadas parciais de uma função de duas ou mais variáveis. Por exemplo,

o problema de condução de calor em um sólido tridimensional, homogêneo e isotrópico (coeficiente de difusão térmica constante em todo seu volume), sem fontes de calor, é dada pela EDP da Equação 1.2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) > (1.2)$$

Neste caso, $u >$ é a temperatura do sólido, que é função do espaço e do tempo, ou seja, $u = u(x, y, z, t)$. O termo $\eta >$ é o coeficiente de difusão térmica. O termo à esquerda da igualdade é a derivada parcial da temperatura em relação ao tempo e os termos dentro dos parênteses são as derivadas segundo parciais da temperatura em relação aos eixos coordenados x, y, z .

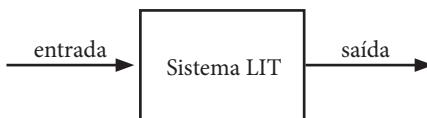
Nós aqui em controle de processos vamos utilizar as EDOs, que são mais simples. Você vai perceber, ao longo deste material, que este tipo de equação é aplicável a inúmeros problemas práticos de controle e modelagem de sistemas dinâmicos.

Uma EDO pode ser classificada em linear ou não-linear. Para uma EDO ser linear, ela deve poder ser escrita da forma apresentada na Equação 1.3, em que os termos $a_i(t)$ e $b(t)$ são funções dependentes da mesma variável que $f(t)$ depende. Os sobrescritos de $f(t)$ denotam a ordem de sua derivada e a EDO é dita linear de ordem **n**. Uma EDO é dita não-linear quando ela não puder ser escrita como na Equação 1.3.

$$a_0(t) \cdot f(t) + a_1(t) \cdot f^{(0)}(t) + a_2(t) \cdot f^{(1)}(t) + \dots + a_n(t) \cdot f^{(n)}(t) = b(t) \quad (1.3)$$

Uma última classificação é necessária para caracterizar os tipos de sistemas dinâmicos com os quais vamos trabalhar, que são de sistemas invariantes no tempo. O termo $a_i(t)$ geralmente descreve alguma propriedade do sistema real. No nosso caso, estas propriedades serão dadas por valores constantes, ou seja, não dependentes de t , como a massa de um corpo, a resistência elétrica, capacidade térmica, etc. Tais sistemas são denominados Sistemas Lineares Invariantes no tempo (sistemas LTI ou simplesmente SLIT). Nesses sistemas, a saída depende apenas da variável de entrada, como mostra a Figura 1.9.

Figura 1.9 | Bloco de um sistema LITa



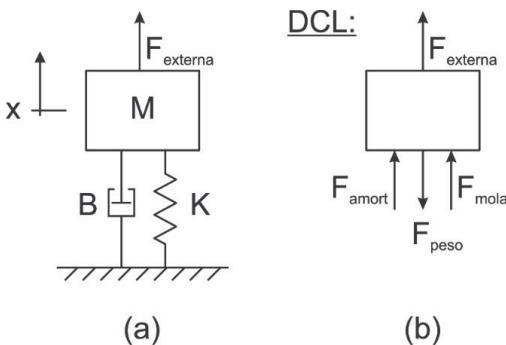
Fonte: elaborada pelo autor.

Embora alguns elementos, na realidade, não tenham suas propriedades completamente lineares, aplicamos a hipótese de que os elementos serão

utilizados de forma que seus comportamentos sejam muito próximos do comportamento linear. Por exemplo: se uma mola for deformada acima de um certo limite de comprimento, a Lei de Hooke ($f(t) = k \cdot x(t)$) não é mais aplicável, pois a mola deixa de se comportar de maneira elástica. Entretanto, se o alongamento da mola não for grande o bastante, a hipótese de comportamento linear é adequada. Durante nossos estudos, todos os elementos terão características constantes.

Agora modelemos um sistema simples como o massa-mola-amortecedor (Figura 1.10) com força externa para aplicar esse conceito.

Figura 1.10 | Ilustração de um sistema massa-mola-amortecedor com Diagrama de Corpo Livre (a) ilustração do sistema (b) Diagrama de corpo livre



Fonte: elaborada pelo autor.

Façamos com que a posição $x = 0$ seja definida exatamente na posição em que o sistema se encontra em equilíbrio estático, ou seja, velocidade nula e na posição em que a força da mola é igual à força peso do corpo.

Ao aplicarmos uma força externa, a equação que rege o deslocamento da massa, Equação 1.4, é obtida por meio da 2^a lei de Newton a partir do diagrama de corpo livre da Figura 1.10 (b).

$$\begin{cases} \sum f = -f_{mola} - f_{amort} + f_{ext} \\ \sum f = M\ddot{x} \end{cases} \Rightarrow -Kx - B\dot{x} + f_{ext} = M\ddot{x} \Rightarrow M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f_{ext} \quad (1.4)$$

A Equação 1.4 é a dita equação diferencial ordinária (EDO) linear a parâmetros constantes cuja solução é uma função no tempo. Neste caso, a solução será a posição do corpo ao longo do tempo.

Existem vários métodos matemáticos para obter essa solução. Aqui estudaremos o método que envolve a transformada de Laplace pois uma

das vantagens deste método é que ele transforma a EDO em uma equação algébrica, tornando mais simples a resolução do problema.



Pesquise mais

A utilização da transformada de Laplace traz outras vantagens importantes que são atrativas para que o profissional use-a como ferramenta. Confira no livro *Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta*, no capítulo 4, mais vantagens da transformada de Laplace na resolução de EDO's.

Felicio, L. C. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta.** 2. ed. São Carlos: Rima, 2010. Disponível em <<http://www2.eesc.usp.br/labdin/luiiz/Modelagem%20da%20Dinamica%20de%20Sistemas%20e%20Estudo%20da%20Resposta.pdf>>. Acesso em: 7 jun. 2017.

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é dada conceitualmente pela Equação (1.5).

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) \quad (1.5)$$

Esta transformação leva uma função do domínio do tempo (t) para o domínio da frequência (s).



Assimile

A transformada de Laplace transforma uma função de uma variável real t (domínio do tempo) em uma função de uma variável complexa s (domínio da frequência).

Como pode ser visto na Equação 1.5, a definição da transformada de Laplace se trata de uma integral imprópria. Na prática, para aplicar a transformada, fazemos uso das propriedades da transformada de Laplace juntamente com resultados já conhecidos por serem bastante recorrentes.



Exemplificando

Mais à frente vamos conhecer a maneira mais prática de aplicar a transformada de Laplace. Mas, antes disso, vamos ver um exemplo de como fazer um cálculo de transformada de Laplace utilizando a definição para entendermos melhor como surge um resultado. Utilizaremos a equação da

pressão hidrostática $p(t) = \rho \cdot g \cdot h(t)$ no fundo de um tanque com fluido de densidade $\rho = 500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, cujo nível segue a função $h(t) = 5t$ e a gravidade é $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$\mathcal{L}[p(t)] = \mathcal{L}[500 \cdot 9,81 \cdot 5t] = \int_{0^+}^{\infty} 24.525 \cdot t \cdot e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{0^+}^A 24.525 \cdot t \cdot e^{-st} dt$$

Fazendo substituição por partes $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$ onde

$$u = t \Rightarrow du = dt \quad e \quad dv = e^{-st} dt \Rightarrow v = \frac{e^{-st}}{-s}, \text{ então}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[p(t)] &= 24.525 \cdot \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{0^+}^A t \cdot e^{-st} dt \\ &= 24.525 \cdot \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\left[\frac{t \cdot e^{-st}}{-s} \right]_{0^+}^A - \int_{0^+}^A \frac{e^{-st}}{-s} dt \right] \\ &= 24.525 \cdot \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{A \cdot e^{-sA}}{-s} - \left[\frac{e^{-st}}{-s^2} \right]_{0^+}^A \right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[p(t)] = 24.525 \cdot \left\{ \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{A \cdot e^{-sA}}{-s} - \frac{e^{-sA}}{-s^2} \right] + \frac{1}{s^2} \right\} \quad (1.6)$$

O primeiro termo dentro do limite da Equação 1.6 é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, então podemos aplicar a regra de L'Hôpital, que assegura que, no caso de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, podemos obter o resultado do limite por meio da divisão da derivada do numerador pela derivada do denominador. O segundo termo podemos resolver por aplicação direta do limite. Portanto, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[p(t)] &= 24.525 \cdot \left\{ \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{-s \cdot e^{sA}} - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{-sA}}{-s^2} + \frac{1}{s^2} \right\} \\ &= 24.525 \cdot \left\{ \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{-sAe^{sA}} + \frac{1}{s^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[p(t)] = P(s) = \frac{24.525}{s^2}$$

Avançando, você verá que poderemos resolver esta transformada em apenas um passo, pois funções afim (conhecidas como rampa) têm transformada conhecida.

Vamos aplicar a transformada de Laplace na Equação 1.4 do sistema da Figura 1.10 para entendermos, na prática, como se realiza o processo. Iniciamos aplicando a transformada, como mostra a Equação 1.7.

$$\mathcal{L}[M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx] = \mathcal{L}[f_{ext}] \quad (1.7)$$

O lado esquerdo da equação é uma soma de parcelas, cada uma multiplicada por um valor constante. Em um caso como esse, podemos aplicar a **propriedade da linearidade** da transformada de Laplace:

A transformada da soma das parcelas é igual à soma das transformadas das parcelas ($\mathcal{L}[\ddot{x} + \dot{x} + x] = \mathcal{L}[\ddot{x}] + \mathcal{L}[\dot{x}] + \mathcal{L}[x]$).

A transformada de uma função multiplicada por uma constante é igual à multiplicação da constante pela transformada da função ($\mathcal{L}[Kx] = K \cdot \mathcal{L}[x]$).

Então, com estas propriedades, podemos reescrever o lado esquerdo da Equação 1.7

$$\mathcal{L}[M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx] = M \cdot \mathcal{L}[\ddot{x}] + B \cdot \mathcal{L}[\dot{x}] + K \cdot \mathcal{L}[x] \quad (1.8)$$

Agora temos as transformadas da derivada primeira e da derivada segunda. Estas também são conhecidas (Equações 1.9 e 1.10)

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = \mathcal{L}[x] \cdot s - x(0) \quad (1.9)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}] = \mathcal{L}[x] \cdot s^2 - s \cdot x(0) - \dot{x}(0) \quad (1.10)$$

Como temos condições iniciais nulas, tanto a velocidade ($\dot{x}(0)$) quanto a posição ($x(0)$) iniciais são zero.

Então, substituindo as Equações 1.8, 1.9 e 1.10 em 1.7, temos a Equação 1.11.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx] &= \mathcal{L}[f_{ext}] \Rightarrow \\ M \cdot (\mathcal{L}[x] \cdot s^2 - s \cdot x(0) - \dot{x}(0)) + B \cdot (\mathcal{L}[x] \cdot s - x(0)) + K \cdot \mathcal{L}[x] &= \mathcal{L}[f_{ext}] \Rightarrow \\ \mathcal{L}[x] \cdot (Ms^2 + Bs + K) &= \mathcal{L}[f_{ext}] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Para escrever a transformada de Laplace de uma função, é comum usar a função em letra maiúscula, por exemplo: a transformada de uma função $f(t)$ (ou simplesmente f) é denotada pela função $F(s)$ (ou apenas F). Então a Equação 1.12 torna-se:

$$X \cdot (Ms^2 + Bs + K) = F_{ext} \Rightarrow \frac{X}{F_{ext}} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad (1.12)$$

A forma como se encontra a Equação 1.12 é chamada de função transferência. Este formato é de extrema importância no estudo de modelos dinâmicos e sistemas de controle.

A partir da função transferência e de uma entrada definida, ou seja, uma função temporal para a força externa, podemos obter a resposta do sistema por meio da transformada inversa de Laplace. Algumas entradas amplamente utilizadas têm suas transformadas já conhecidas, como pode ser visto na Tabela 1.1.

Tabela 1.1 | Principais transformadas

Função	Transformada de Laplace
$\mu(t - t_0)$ (função degrau ou Heaviside)	$\mathcal{L}[\mu(t - t_0)] = \frac{1}{s}e^{-t_0 s}$ Se $t_0 = 0$, então $\mathcal{L}[\mu(t)] = \frac{1}{s}$
$t \cdot \mu(t)$ (função rampa)	$\mathcal{L}[t \cdot \mu(t)] = \frac{1}{s^2}$
$\delta(t - t_0)$ (função impulso ou delta de Dirac)	$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = e^{-t_0 s}$ Se $t_0 = 0$, então $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$
$\text{sen}(\omega t)$	$\mathcal{L}[\text{sen}(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Fonte: elaborada pelo autor.



Pesquise mais

Existem vários outros resultados já conhecidos que você pode utilizar para aplicar tanto a transformada de Laplace direta quanto a inversa.

Veja, por exemplo, a tabela presente no apêndice D do livro *Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta*, do Prof. Dr. Luiz Carlos Felício.

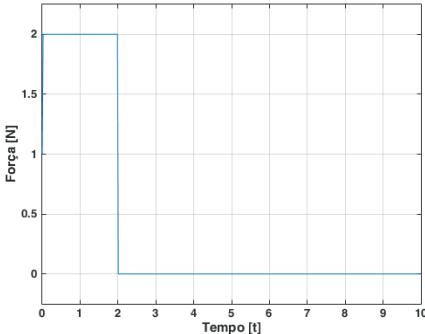
Felicio, L. C. Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta, 2 ed. São Carlos – SP, Rima, 2010. Disponível em: <<http://www2.eesc.usp.br/labdin/luz/Modelagem%20da%20Dinamica%20de%20Sistemas%20e%20Estudo%20da%20Resposta.pdf>> Acessado em 07/06/2017>.

Vamos submeter o sistema massa-mola-amortecedor a uma entrada da forma de um pulso quadrado (Equação 1.13, Figura 1.11) de força de 2 segundos de duração com amplitude de $2N$, equivalente a puxar para cima

a massa do sistema com uma força de 2 N durante 2 segundos, começando em $t = 0$.

$$f(t) = 2 \cdot (\mu(t) - \mu(t-2)) \quad (1.13)$$

Figura 1.11 | Gráfico da entrada de força do sistema



Fonte: elaborada pelo autor.

Para aplicar a entrada na função transferência do sistema precisamos primeiro obter sua transformada de Laplace. Observando a propriedade de linearidade e a tabela acima, obtemos a transformada, como pode ser visto na Equação 1.14.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[2 \cdot (\mu(t) - \mu(t-2))] = 2 \cdot (\mathcal{L}[\mu(t)] - \mathcal{L}[\mu(t-2)]) \Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{s} (1 - e^{-2s}) \quad (1.14)$$

Substituindo a Equação 1.14 na função transferência do sistema (Equação 1.12) obtemos a Equação 1.15.

$$\text{Entrada 1: } \frac{X}{\frac{2}{s}(1 - e^{-2s})} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad X = \frac{2 - 2e^{-2s}}{Ms^3 + Bs^2 + Ks} \quad (1.15)$$

A Equação 1.15 descreve a resposta do sistema no domínio da frequência devido à entrada imposta. Para podermos analisar o comportamento do sistema no tempo, precisamos transformar essas equações do domínio da frequência para o domínio do tempo e isso é feito aplicando-se a transformada inversa de Laplace.

Na prática, isto é realizado rescrevendo-se a equação que está no domínio da frequência com o objetivo de se fazer surgir os resultados da tabela de transformadas de Laplace.

Então apliquemos a transformada inversa de Laplace na Equação 1.15 para entender na prática como se deve proceder.

É comum obtermos funções transferência que são divisões de polinômios e, para fazermos surgir resultados conhecidos, usamos o procedimento de expansão em frações parciais, também utilizado no cálculo de integração de divisão de polinômios.

Para aplicarmos a transformada inversa de Laplace no sistema massa-mola-amortecedor em questão, vamos supor as seguintes propriedades para o sistema: $M = 2kg$, $K = 20\frac{N}{m}$ e $B = 14\frac{N \cdot s}{m}$.

Juntamente com a substituição das propriedades, apliquemos a transformada inversa de Laplace na Equação 1.15.

$$X = \frac{2 - 2e^{-2s}}{2s^3 + 14s^2 + 20s} \quad (1.16)$$

$$\Rightarrow X = \frac{1 - e^{-2s}}{s(s+2)(s+5)} = \frac{1}{s(s+2)(s+5)} - \frac{e^{-2s}}{s(s+2)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+5} \quad (1.17)$$

Da Equação 1.17, usando a identidade de polinômios, montamos os sistemas de Equações 1.18

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 7A + 5B + 2C = 0 \\ 10A = 1 - e^{-2s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1 - e^{-2s}}{10} \\ B = \frac{e^{-2s} - 1}{6} \\ C = \frac{1 - e^{-2s}}{15} \end{cases} \quad (1.18)$$

Substituindo A , B e C na Equação 1.17, temos a Equação 1.19

$$\begin{aligned} X &= \frac{1 - e^{-2s}}{10s} + \frac{e^{-2s} - 1}{6(s+2)} + \frac{1 - e^{-2s}}{15(s+5)} \Rightarrow \\ X &= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{e^{-2s}}{s+2} - \frac{1}{s+2} \right) + \frac{1}{15} \cdot \left(\frac{1}{s+5} - \frac{e^{-2s}}{s+5} \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Agora, utilizando a tabela de resultados conhecidos das transformadas de Laplace juntamente com a propriedade da linearidade, temos a Equação 1.20.

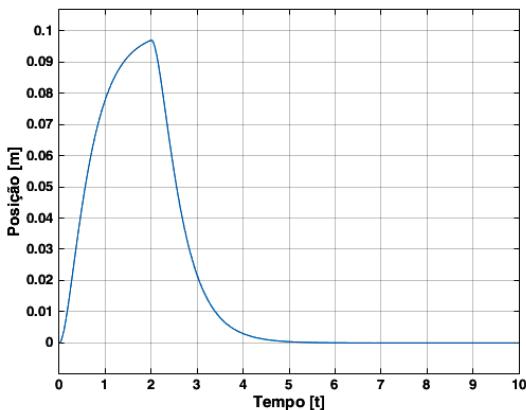
$$\mathcal{L}^{-1}[X] = \frac{1}{10} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s}\right] \right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s+2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \right) + \frac{1}{15} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s+5}\right] \right)$$

$$x(t) = \frac{1}{10} \cdot (\mu(t) - \mu(t-2)) + \frac{1}{6} \cdot (\mu(t-2) \cdot e^{4-2t} - e^{-2t}) + \frac{1}{15} \cdot (e^{-2t} - \mu(t-2) \cdot e^{10-5t}) \quad (1.20)$$

Finalmente, temos a equação que descreve a saída do sistema massa-mola-amortecedor, de acordo com uma entrada pulso quadrado de força. A

Figura 1.12 mostra a posição da massa ao longo do tempo. Podemos observar que, para os parâmetros escolhidos, o sistema dinâmico apresenta resposta sobreamortecida.

Figura 1.12 | Resposta do sistema massa-mola-amortecedor à entrada pulso quadrado



Fonte: elaborada pelo autor.



Refletá

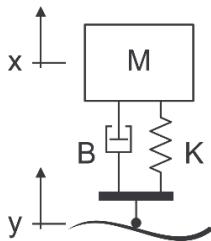
A resposta, no tempo, encontrada para um sistema massa-mola-amortecedor sobreamortecido, com um pulso quadrado como entrada, faz sentido?

Sem medo de errar

Com a finalidade de projetar o sistema de controle para um sistema dinâmico, é importante conhecer o comportamento deste quando em funcionamento passivo, ou seja, sem atuação. Por isso é importante que você obtenha a resposta no tempo da suspensão veicular passiva a fim de entender seu comportamento “natural”.

A Figura 1.13 representa o modelo de uma suspensão veicular passiva, que é matematicamente descrito pela Equação 1.20, sendo que a posição vertical, x , da carroceria e a posição vertical da roda (a roda é tratada como uma massa pontual, ou seja, sua massa é desprezível), y , são definidas nulas de maneira que a somatória de forças no corpo é nula.

Figura 1.13 | Ilustração do modelo da suspensão passiva veicular



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\sum F = M\ddot{x} - B(\dot{x} - \dot{y}) - K(x - y) = M\ddot{x} \quad (1.20)$$

Aplicando a transformada de Laplace na Equação 1.20:

$$-BXs + BYs - KX + KY = MXs^2$$

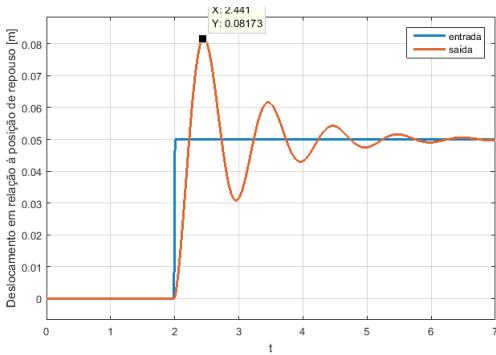
$$\frac{X}{Y} = \frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K}$$

É sabido que o automóvel tem massa 10^3 kg e a suspensão tem rigidez $4 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ e amortecimento $2 \cdot 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$. Temos a função transferência e os parâmetros do sistema, mas falta a entrada. Suponha, então, que a entrada seja o automóvel passando por um degrau de 5cm de altura no asfalto aos 2 segundos de simulação (descrita pela Equação 1.21).

$$y(t) = 0,05 \cdot \mu(t - 2) \quad (1.21)$$

Com todos os dados em mãos, é possível obter o comportamento da posição vertical da carroceria, ou seja, a resposta do sistema à entrada da Equação 1.21. A Figura 1.14 mostra o gráfico da resposta no tempo.

Figura 1.14 | Resposta da suspensão passiva à entrada degrau



Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que a oscilação da carroceria é muito grande: um degrau de 5 cm causa uma vibração de amplitude inicial aproximadamente igual a 8 cm. Em termos de um automóvel, tal vibração causa desconforto aos passageiros e pode, inclusive, depreciar a dirigibilidade do automóvel, ou seja, o veículo se torna perigoso tanto para o condutor quanto para os transeuntes e para os outros carros.

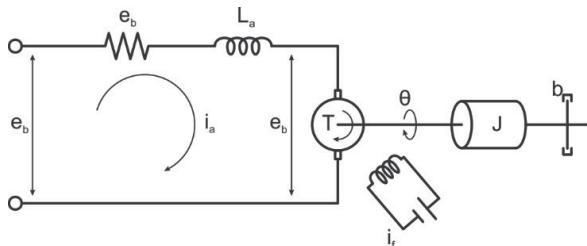
Avançando na prática

Resposta de um motor CC

Descrição da situação-problema

Em um sistema embarcado é comum utilizar um motor CC como atuador. Imagine que você é responsável pela área de testes de uma empresa que fabrica motores de corrente contínua (motor CC). As equações do modelo (Equações de 1.22 a 1.24), baseadas na Figura 1.15, já são conhecidas.

Figura 1.15 | Motor CC



Fonte: adaptada de Ogata (2003, p. 114).

$$e_b = K_b \dot{\theta}(t) \quad (1.22)$$

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + e_b(t) = e_a(t) \quad (1.23)$$

$$J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) = Ki_a(t) \quad (1.24)$$

em que, $e_b(t)$ é a força contraeletromotriz [V], K_b é a constante de força contraeletromotriz $\left[\frac{V \cdot s}{rad}\right]$, e $\theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)$ são o ângulo (a saída do sistema), a velocidade angular e a aceleração angular do eixo do motor, respectivamente. L_a é a indutância da armadura [H], $i_a(t)$ é a corrente de armadura [A], R_a é a resistência elétrica da armadura [Ω], J é o momento de inércia equivalente do motor e do carregamento no eixo [$kg \cdot m^2$], b é coeficiente de atrito

equivalente do motor e carregamento no eixo $\left[\frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \right]$ e K é a constante do motor $\left[\frac{N \cdot m}{A} \right]$.

Imagine um novo motor CC, recém-desenvolvido, chega da produção para que alguns testes sejam realizados. Ele foi projetado com o propósito de mover um redutor que é muito sensível a vibrações.

No novo equipamento constam as seguintes características (a resistência de armadura e a inércia do eixo são desprezíveis):

$$L_a = 2,38mH \quad b = 5,6 \cdot 10^{-3} \frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$$

$$R_a = 0\Omega \quad J = 0kg \cdot m^2$$

$$K_b = 0,81 \frac{V \cdot s}{m} \quad K = 1,2 \frac{N \cdot m}{A}$$

Antes de partir para o experimento real, é necessário rever o equacionamento do modelo com a entrada igual à que foi considerada em seu desenvolvimento: ligá-lo em tensão de alimentação de 10V .

Para que o projeto seja dado como bem-sucedido, é necessário que a posição angular do eixo seja incrementada linearmente com o tempo, para que o redutor não sofra com as vibrações.

Afinal, o projeto foi bem-sucedido?

Resolução da situação-problema

Aplicando a transformada de Laplace nas Equações 1.22, 1.23 e 1.24 do modelo, com condições iniciais nulas (lembrando que $R_a = 0$ e $J = 0$), temos:

$$E_b = K_b \Theta s \quad (1.25)$$

$$L_a I_a s + E_b = E_a \quad (1.26)$$

$$b \Theta s = K I_a \quad (1.27)$$

Substituindo a Equação 1.25 na Equação 1.26, obtemos I_a :

$$I_a = \frac{E_a - K_b \Theta s}{L_a s}$$

Substituindo I_a na Equação 1.27, obtemos a função transferência para o sistema (Equação 1.28)

$$\frac{\Theta}{E_b} = \frac{K}{L_a b s^2 + K K_b s} \quad (1.28)$$

Substituindo E_b pela transformada de Laplace da função degrau de entrada (Equação 1.29) juntamente com os valores numéricos para o sistema, temos a Equação 1.30

$$E_b = \mathcal{L}[10\mu(t)] = \frac{10}{s} \quad (1.29)$$

$$\Theta = \frac{12}{1.3328 \cdot 10^{-4} s^3 + 0,972s^2} \quad (1.30)$$

Aplicando frações parciais e, finalmente, a transformada inversa de Laplace, obtemos a Equação 1.31:

$$\theta(t) = 12,3457t + 1,692 \cdot 10^{-4} e^{-7292,92t} - 1,692 \cdot 10^{-4} \quad (1.31)$$

O termo exponencial da Equação 1.31 é desprezível para tempos maiores que poucos microssegundos, ou seja, o regime transitório tem curta duração e, em regime permanente, o ângulo do eixo é linear com o tempo, portanto o projeto foi um sucesso.

Faça valer a pena

1. Na modelagem de sistemas dinâmicos é muito comum a utilização da transformada de Laplace, a qual é de grande utilidade para a resolução de equações diferenciais ordinárias, que são obtidas a partir da modelagem de sistemas dinâmicos.

Sobre a transformada de Laplace, podemos afirmar que:

- a) Realiza uma transformação do domínio do tempo para o domínio da frequência.
- b) Associa a saída à entrada do sistema.
- c) Facilita a obtenção da entrada de um sistema dinâmico de parâmetros constantes.
- d) É uma transformação linear pois $\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$.
- e) Realiza uma transformação do domínio do tempo para o domínio do período da função.

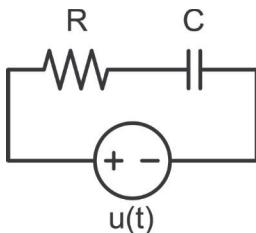
2. Ao expressar a entrada de um sistema no domínio da frequência não é muito intuitivo saber como a função de entrada se comporta no domínio do tempo. Para fazer a conversão, é necessário que se obtenha a transformada de Laplace inversa. Considere

a entrada de um sistema de controle como sendo $F(s) = \frac{s + \omega}{s^2 + \omega^2}$.

Assinale a alternativa que indica qual é a função de entrada no domínio do tempo.

- a) $\operatorname{sen}^2(\omega t)$
- b) $\cos^2(\omega t)$
- c) $\operatorname{sen}(\omega t) + \cos(\omega t)$
- d) $t \cos^2(\omega t)$
- e) $\cosh^2(\omega t)$

3. O sistema elétrico da figura a seguir tem a tensão $u(t)$ como entrada e a corrente $i(t)$ como saída, de acordo com a equação abaixo.



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\frac{I}{U} = \frac{s}{Rs + \frac{1}{C}}$$

O sistema possui capacidade $3,4\mu C$ e resistência 220Ω para uma entrada senoidal de frequência $60Hz$ e amplitude unitária ($u(t) = \sin(120\pi t)$), supondo condições iniciais nulas.

Qual a resposta do sistema nestas condições?

- a) Não existe, pois transformada de Laplace não é aplicável a sistemas elétricos.
- b) O sistema elétrico é descrito por fasores, que são grandezas complexas, logo não é necessário obter função transferência.
- c) $i(t) = \sin(120\pi t) + 3,4\mu \cos(120\pi t)$
- d) $i(t) = 1,187 \cdot 10^{-3} \cos(120\pi t) + 3,348 \cdot 10^{-4} \sin(120\pi t) + 1,187 \cdot 10^{-3} e^{-1,337 \cdot 10^3 t}$
- e) $i(t) = 1,187 \cdot 10^{-3} \cos(120\pi t) + 3,348 \cdot 10^{-4} \sin(120\pi t)$

Representação dos modelos matemáticos de sistemas

Diálogo aberto

Tudo o que vemos na ciência pode ser, de maneira simplista, resumido em uma tarefa: entender, interpretar e predizer o funcionamento da natureza. Cada ramo da ciência especializa-se em estudar uma parte da natureza. Antigamente era mais comum vermos cientistas que contribuíam para várias áreas da ciência. Hoje em dia vemos uma maior especialização de cada um em uma certa área.

Estamos estudando sistemas de controle. Nossa objetivo é fazer com que algum sistema dinâmico real se comporte da maneira que precisamos. Para projetarmos o controle de algo, precisamos saber sobre o seu funcionamento para que alcancemos nosso objetivo dentro da performance necessária.

Esse “saber sobre o seu comportamento” passa por conceito e técnicas de modelagem de sistemas dinâmicos que se baseiam na aplicação de leis físicas que a ciência gerou. Essas leis são amplamente aceitas e profundamente conhecidas, ou seja, sua exatidão e limitações já foram exaustivamente estudadas. Para fazermos uso dessas leis precisamos conhecer bem como aplicá-las e quais são as hipóteses sobre o comportamento do sistema dinâmico que precisamos impor para que não criemos um modelo físico irrealista e, com isso, inutilizável.

Imagine que você é o responsável pelo departamento de engenharia de uma empresa de acessórios de computador. Para o desenvolvimento do novo produto – uma impressora (Figura 1.16), sua tarefa é projetar o controle do cabeçote de impressão.

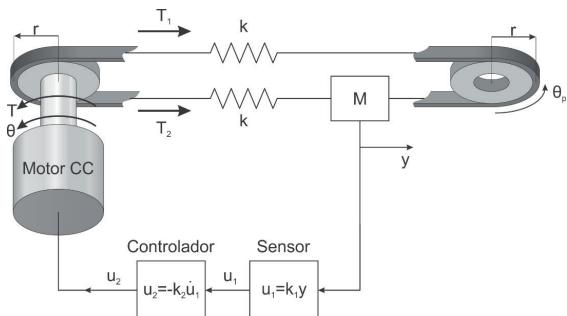
Figura 1.16 | Ilustração da impressora a ser desenvolvida



Fonte: elaborada pelo autor.

Claramente, antes de partir para o projeto do controle em si, é necessário modelar o sistema eletromecânico em questão. A Figura 1.17 mostra como esse sistema pode ser modelado.

Figura 1.17 | Ilustração do modelo de controle de posição do cabeçote da impressora



Fonte: adaptada de Dorf e Bishop (2011, p. 132).

Dessa forma, como você deve proceder? Quais são as maneiras de compartilhar o modelo que você desenvolveu com o restante da equipe? Para ajudá-lo nessa tarefa, nesta seção faremos uma breve revisão dos conceitos de modelagem, e em seguida você conhecerá novas formas de representar os modelos dinâmicos: variáveis de estados, equações diferenciais de estado e diagrama de blocos. As duas primeiras são abordagens matemáticas complementares, e a última é uma forma gráfica, mas todas têm propriedades valiosas e de grande importância para o desenvolvimento de sistemas de controle.

Bons estudos!

Não pode faltar

Como você já sabe, ao falarmos em modelo de um sistema, estamos falando em uma ou mais equações que descrevem seu comportamento, seja no domínio do tempo ou no domínio da frequência (após a aplicação da transformada de Laplace). Para equacionarmos um modelo, precisamos ter conhecimento dessas equações, e é neste ponto que lançamos mão da aplicação das leis físicas. É importante também sabermos as equações constitutivas de elementos que surgem com frequência nos sistemas dinâmicos de cada área.

A Tabela 1.2 traz uma comparação entre as variáveis e os elementos de modelos mecânicos e elétricos. Tenha em mente que, na realidade, não existe um componente que funciona puramente como uma mola, ou amortecedor,

ou uma resistência ou indutância elétrica. Quando modelamos um sistema, concentramos, na medida do possível, as propriedades dinâmicas em componentes ideais, ou seja, não levamos em conta as incertezas em seus parâmetros ou não linearidades ou mistura de propriedades.

Tabela 1.2 | Comparação entre os elementos e variáveis mecânicos e elétricos

Mecânica	Elétrica
Variáveis de deslocamento	
Posição $[m]$ $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$	Carga elétrica $[C]$ $q(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Q(s)$
Variáveis de fluxo	
Velocidade linear $\left[\frac{m}{s}\right]$ $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ $v(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V(s)$	Corrente $[A]$ $i(t) = \frac{d}{dt}q(t)$ $i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} I(s)$
Variáveis de esforço	
Força $[N]$ $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$	Tensão $[V]$ $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$
Elementos inerciais	
Massa $\sum f(t) = M \cdot \frac{dv(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum F(s) = M \cdot sV(s)$ (2ª lei de Newton) Sendo M a massa em $[kg]$	Indutor $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = L \cdot sI(s)$ Sendo L a indutância elétrica $[H]$
Elementos dissipadores de energia	
Amortecedor $f_{amort} = -B \cdot v(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_{amort} = -B \cdot V(s)$ Sendo B a constante de amortecimento $\left[N \cdot s/m\right]$	Resistência $u(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = R \cdot I(s)$ Sendo R a resistência elétrica $[\Omega]$
Elementos armazenadores de energia	
Mola $f_{mola} = -K \int v(t) dt \xrightarrow{\mathcal{L}} F_{mola} = -\frac{K}{s} V(s)$ (Lei de Hooke) Sendo K a constante de amortecimento $\left[N/m\right]$	Capacitor $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$ Sendo C a capacidade elétrica $[F]$

Fonte: elaborada pelo autor.

Observando a Tabela 1.2, podemos ver que é possível obter os modelos mecânicos e elétricos que têm o comportamento semelhante.



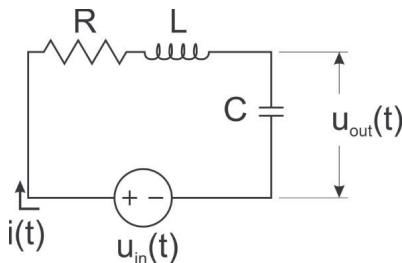
Pesquise mais

As comparações feitas entre elementos ideais de sistemas mecânicos e elétricos também podem ser feitas com outras áreas, como hidráulica, térmica e pneumática. Para saber um pouco mais, veja a página 51 do livro:

FELÍCIO, Luiz Carlos. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta.** 2. ed. São Carlos, SP: Rima, 2010. Disponível em: <<http://www2.eesc.usp.br/labdin/luz/Modelagem%20da%20Dinamica%20de%20Sistemas%20e%20Estudo%20da%20Resposta.pdf>>. Acesso em: 8 nov. 2018.

Por exemplo, um circuito RLC (Figura 1.18) e um sistema massa-mola-amortecedor (Figura 1.19), ambos com condições iniciais nulas, geram os equacionamentos (1.32) e (1.33) análogos.

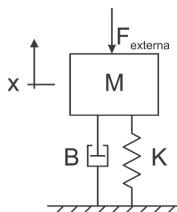
Figura 1.18 | Circuito RLC



Fonte: elaborada pelo autor.

$$u(t) = LC \cdot \ddot{u}_{out}(t) + RC \cdot \dot{u}_{out}(t) + u_{out}(t) \quad (1.32)$$

Figura 1.19 | Sistema massa-mola-amortecedor



Fonte: elaborada pelo autor.

$$F_{\text{externa}}(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) \quad (1.33)$$

Das Equações 1.32 e 1.33, você já aprendeu a extrair suas funções transferência, resultando nas Equações 1.34 e 1.35, respectivamente, aplicando a transformada de Laplace, que é uma maneira de representar um sistema dinâmico por meio da razão entre saída e entrada no domínio da frequência.

$$\frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}}(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (1.34)$$

$$\frac{X}{F_{\text{ext}}}(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad (1.35)$$

Além da função transferência, há outras maneiras de representar um sistema dinâmico, por exemplo o espaço de estados e o diagrama de blocos, os quais veremos a seguir.

A representação por meio de equação diferencial de estado se baseia nas variáveis de estado de um sistema. Segundo Dorf e Bishop (2011), “As variáveis de estado descrevem a configuração presente de um sistema e podem ser usadas para determinar a resposta futura, dadas as excitações de entrada e as equações descrevendo a dinâmica.” A representação em variáveis de estado, ou representação em espaço de estados, é um par de equações matriciais que tem forma geral mostrada pela Equação 1.36 de estado e pela Equação 1.37 de saída.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \text{ em que } \mathbf{x} = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \quad (1.36)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (1.37)$$

A Equação 1.36 representa as relações dinâmicas do sistema. A variável \mathbf{x} é um vetor coluna de tamanho $n \times 1$ em que cada elemento é um estado do sistema. O vetor coluna \mathbf{u} representa as entradas do sistema e tem tamanho $m \times 1$. A matriz \mathbf{A} , matriz de estados, é quadrada $n \times n$ e pode ser interpretada como o próprio sistema dinâmico, pois ela depende apenas deste. A matriz \mathbf{B} , matriz de entrada, tem tamanho $n \times m$.

Já a Equação 1.37 representa as saídas do sistema, e, usando este método de representação, um sistema pode ter de uma a quantas saídas forem necessárias: basta definir a matriz \mathbf{C} , matriz de saída, da seguinte maneira: se o vetor coluna de saídas \mathbf{y} tem tamanho $p \times 1$, a matriz \mathbf{C} vai ser $p \times n$, em que p é a quantidade de saídas. A matriz \mathbf{D} , matriz de transmissão direta, será $p \times m$ e estabelece qual entrada influencia diretamente uma saída, porém essa matriz geralmente é nula.

A representação em espaço de estados sempre consiste em uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem, então, para o caso de ambos

os sistemas em questão, por serem de ordem superior, precisamos utilizar mais de uma variável de estado.



Assimile

A equação diferencial de estados é um sistema de EDOs de primeira ordem.

No caso do sistema mecânico da Figura 1.19, os estados serão a posição e a velocidade, a saída será apenas a posição e a entrada será a força externa, como podemos ver a seguir:

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = \dot{x}(t) \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{dx_1}{dt}$$
$$u(t) = F_{ext}(t)$$
$$y(t) = x(t)$$
 (1.38)

Substituindo a Equação 1.38 pela 1.33, teremos o seguinte sistema de EDOs de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{B}{M}x_2(t) + \frac{F_{externa}(t)}{M} \end{aligned}$$
 (1.39)

Reescrevendo matricialmente e simplificando a notação, chegamos à representação do sistema no espaço de estados.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \text{ onde } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \text{ e } u = F_{ext} \\ \mathbf{y} &= [1 \ 0] \mathbf{x} + [0] u \end{aligned}$$
 (1.40)

Sendo o circuito RLC um sistema análogo ao massa-mola-amortecedor, a representação em espaço de estados é análoga.



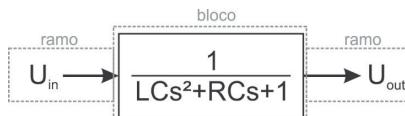
Refletá

Sabendo que a equação diferencial de estados é um sistema de EDOs de primeira ordem, quais seriam as variáveis de estados para o circuito RLC e como ficaria a equação diferencial?

Outra maneira de representar um sistema dinâmico é utilizar o diagrama de blocos. Este método é utilizado após aplicar a transformada de Laplace, ou seja, no domínio da frequência. Com o diagrama de blocos, podemos acoplar vários subsistemas independentes e então obter uma função transferência única para o sistema resultante como um todo.

No diagrama de blocos, cada bloco representa uma função de transferência, e o ramo que entra nele é a sua entrada e o ramo que sai, sua saída. Ou seja, a partir de um diagrama de blocos, podemos extrair a equação da saída multiplicando o bloco pela sua entrada, seguindo a mesma lógica que aprendemos com função de transferência. Vamos aplicar este conceito para a função de transferência do circuito RLC da Figura 1.18, resultando na representação em um bloco único, como mostra a Figura 1.20, em que a saída U_{out} é igual à entrada U_{in} multiplicada pelo conteúdo do bloco.

Figura 1.20 | Circuito RLC bloco único

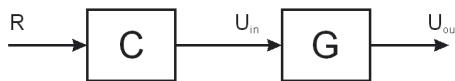


Fonte: elaborada pelo autor.

Como dito, no diagrama de blocos temos relações multiplicativas. Para cada bloco presente no diagrama, a sua saída é igual à sua entrada multiplicada pelo conteúdo do bloco. Vamos supor que temos um controlador $C(s)$ que tem tensão como saída e um valor numérico adimensional como entrada.

Fazendo $G(s) = \frac{U_{out}}{U_{in}}(s)$, podemos esboçar um sistema em malha aberta (Figura 1.21).

Figura 1.21 | Exemplo de diagrama de blocos de sistema em malha aberta



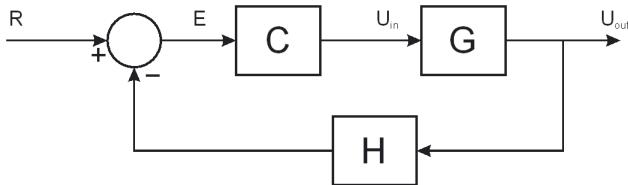
Fonte: elaborada pelo autor.

A partir do sistema em malha aberta, podemos observar que U_{out} é o resultado da multiplicação de U_{in} por G (função transferência do sistema/planta), e, da mesma maneira, U_{in} é a multiplicação de R (referência) por C (função transferência do controlador). Em uma única equação, temos:

$$U_{out}(s) = G(s) \cdot C(s) \cdot R(s) \Rightarrow \frac{U_{out}}{R}(s) = G(s) \cdot C(s) \quad (1.41)$$

Suponhamos que se deseja realizar o controle em malha fechada. Neste caso será necessário um sensor $H(s)$ na retroalimentação que converte tensão em um número adimensional, conforme Figura 1.22.

Figura 1.22 | Exemplo de diagrama de blocos de sistema em malha fechada



Fonte: elaborada pelo autor.

Para realizarmos uma soma/subtração, utilizamos um bloco somador, representado por um círculo na Figura 1.22. Podemos ver que o bloco somador tem saída E , que é igual a R menos $H \cdot U_{out}$, como mostram os sinais que acompanham os ramos que entram no bloco somador.

Em um sistema em malha fechada, precisamos ficar atentos ao extrair a função transferência para não cairmos em um ciclo sem fim. É sempre interessante começarmos pelo fim e seguirmos o ramo principal, que é onde a planta se encontra. Seguindo de U_{out} (saída) até E (erro), temos:

$$U_{out}(s) = G(s) \cdot C(s) \cdot E(s) \quad (1.42)$$

E é o erro, pois é a diferença entre a referência R e o valor medido da saída $H(s) \cdot U_{out}(s)$. Então E , de acordo com o bloco somador, é dado por:

$$E(s) = R(s) - \underbrace{H(s) \cdot \underbrace{U_{out}(s)}_{\text{saída do bloco } H}}_{\text{entrada do bloco } H} \quad (1.43)$$

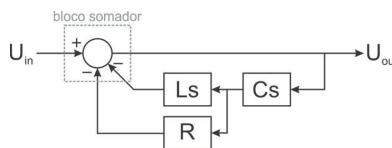
Substituindo a Equação 1.43 pela 1.42 e isolando U_{out} obtemos a função transferência do sistema em malha fechada:

$$U_{out} = G \cdot C \cdot (R - H \cdot U_{out}) \Rightarrow \frac{U_{out}(s)}{R} = \frac{G(s) \cdot C(s)}{1 + G(s) \cdot C(s) \cdot H(s)} \quad (1.44)$$

Perceba que na Figura 1.22 o ramo da retroalimentação é negativo no ponto de soma. Isso define o sistema como um sistema com retroalimentação negativa (ou feedback negativo). Se fosse positivo, seria retroalimentação positiva (ou feedback positivo).

Com essas informações, podemos representar o circuito RLC da Figura 1.18 em diagrama de blocos. Podemos ainda expandir a representação em mais blocos, como mostra a Figura 1.23.

Figura 1.23 | Circuito RLC diagrama expandido



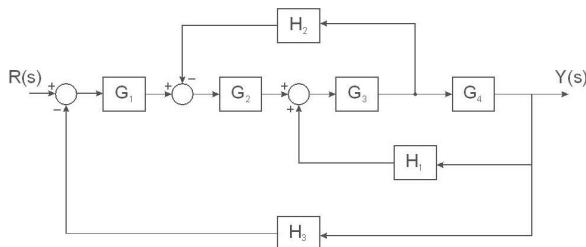
Fonte: elaborada pelo autor.



Exemplificando

Vamos obter a função transferência $\frac{Y(s)}{R}$ para o diagrama de blocos da Figura 1.24.

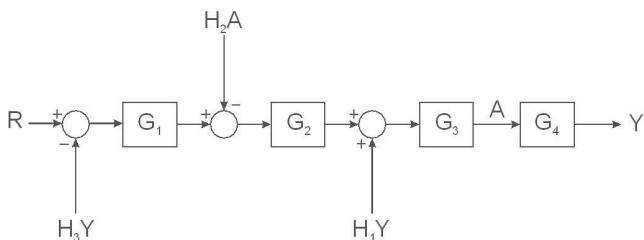
Figura 1.24 | Diagrama de blocos (exemplo)



Fonte: adaptada de Dorf e Bishop (2011).

Para facilitar a obtenção da função transferência, podemos dar um nome aos ramos que forem necessários. Para o diagrama em questão, vamos denominar A a saída de G_3 , de forma que podemos redesenhá-lo conforme a Figura 1.25.

Figura 1.25 | Redesenho simplificado do diagrama de blocos



Fonte: elaborada pelo autor.

Do diagrama da Figura 1.25, obtemos diretamente as equações que descrevem o sistema:

$$Y = G_4 \cdot G_3 \cdot (+H_1 \cdot Y + G_2 \cdot (-H_2 A + G_1 \cdot (R - H_3 Y))) \quad (1.45)$$

$$A = \frac{Y}{G_4} \quad (1.46)$$

Substituindo a Equação 1.46 pela 1.45 e fazendo as manipulações necessárias, obtemos a função transferência $\frac{Y}{R}(s)$:

$$Y = G_4 \cdot G_3 \cdot (+H_1 \cdot Y + G_2 \cdot (-H_2 \frac{Y}{G_4} + G_1 \cdot (R - H_3 Y)))$$

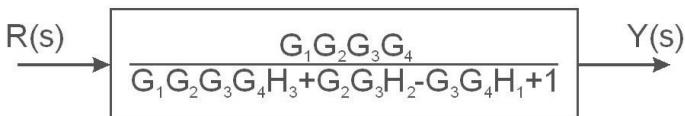
$$Y = G_4 G_3 H_1 Y - G_4 G_3 G_2 H_2 \frac{Y}{G_4} + G_4 G_3 G_2 G_1 R - G_4 G_3 G_2 G_1 H_3 Y$$

$$Y(1 - G_4 G_3 H_1 + G_3 G_2 H_2 + G_4 G_3 G_2 G_1 H_3) = G_4 G_3 G_2 G_1 R$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{G_1 G_2 G_3 G_4 H_3 + G_2 G_3 H_2 - G_3 G_4 H_1 + 1} \quad (1.47)$$

Daí podemos escrever o sistema em apenas um bloco, como mostra a Figura 1.26.

Figura 1.26 | Sistema em bloco único



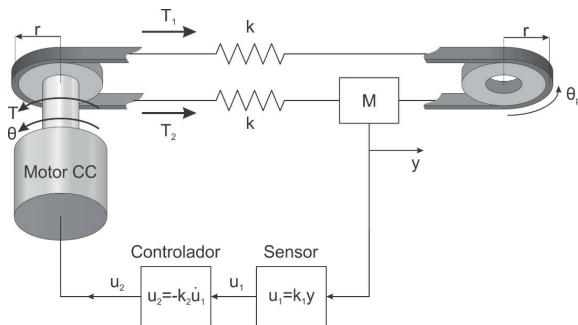
Fonte: elaborada pelo autor.

Sem medo de errar

Sua tarefa, como membro da equipe de engenharia de uma empresa que fabrica acessórios de computador, é obter o modelo do sistema de controle de posição do cabeçote da impressora. Vamos fazer o modelo aplicando os métodos utilizados nesta seção.

Primeiramente, precisamos equacionar o sistema. A Figura 1.27 mostra como o sistema pode ser modelado, já contando com o modelo de um possível controlador e sensor, e a Tabela 1.3 apresenta os parâmetros do sistema.

Figura 1.27 | Ilustração do modelo de controle de posição do cabeçote da impressora



Fonte: adaptada de Dorf e Bishop (2011, p.132).

Tabela 1.3 | Parâmetros do sistema de controle de cabeçote de impressão

Massa do cabeçote	$m[\text{kg}]$	Ganho do controlador	$k_2 \left[\frac{\text{V}}{\text{V}} \right]$
Ganho do sensor de luz	$k_1 \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$	Rigidez da correia	$K \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$
Raio das polias	$r[\text{m}]$	Tensão superior na correia	$T_1[\text{N}]$
Atrito interno à rotação do motor	$b \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}} \right]$	Tensão inferior na correia	$T_2[\text{N}]$
Resistência elétrica do motor	$R[\Omega]$	Ângulo do eixo do motor	$\theta[\text{rad}]$
Constante de torque do motor	$K_m \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A}} \right]$	Ângulo da polia passiva	$\theta_p[\text{rad}]$
Inércia total à rotação	$J[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	Posição do cabeçote de impressão	$y[\text{m}]$

Fonte: elaborada pelo autor.

As trações T_1 e T_2 são as forças que as correias do cabeçote de impressão (modeladas como molas e uma massa) fazem no eixo do motor CC. Elas são dadas pelas equações:

$$T_1 = k(r\theta - y) \quad (1.48)$$

$$T_2 = k(y - r\theta) \quad (1.49)$$

Aplicando a 2^a lei de Newton na massa, temos:

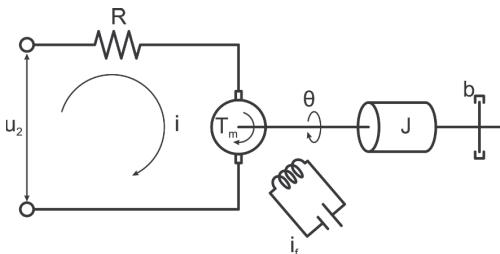
$$T_1 - T_2 = m \cdot \ddot{y} \quad (1.50)$$

Substituindo as Equações 1.48 e 1.49 pela 1.50, chegamos a:

$$2k(r\theta - y) = m \cdot \ddot{y} \quad (1.51)$$

Para o motor CC (Figura 1.28), vamos supor que sua indutância seja desprezível.

Figura 1.28 | Modelo do motor CC



Fonte: adaptada de Ogata (1990, p.119).

A corrente de campo é $i = \frac{u_2}{R}$ e o torque do motor é $T_m = K_m i$. Esta última equação relaciona a parte elétrica do sistema (por meio da corrente) com a parte mecânica (por meio do torque). A partir dessas duas equações, conseguimos escrever o torque desejado do motor T_m em função da tensão u_2 que entra no motor.

$$T_m = \frac{K_m}{R} u_2 \quad (1.52)$$

O torque T_m do motor é igual ao torque que aciona as correias (T), somado ao torque de perturbação ou de carga indesejado (T_d):

$$T_m = T + T_d \quad (1.53)$$

Usando a 2^a lei de Newton para movimentos angulares, chegamos à equação para o torque T que aciona o eixo da polia:

$$T = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + r(T_1 - T_2) = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + r \cdot m\ddot{y} \quad (1.54)$$

Sabendo que, da Figura 1.28, $u_2 = -k_2 k_1 \dot{y}$, substituindo pela Equação 1.52 temos que $T_m = -\frac{K_m}{R} k_2 k_1 \dot{y}$. Com isso, da Equação 1.53, supondo que não haja distúrbios ($T_d = 0$), temos que $-\frac{K_m}{R} k_2 k_1 \dot{y} = T$, e, substituindo pela Equação 1.54, teremos:

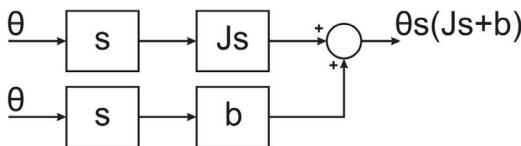
$$-\frac{K_m}{R} k_2 k_1 \dot{y} = J \ddot{\theta} + b \dot{\theta} + r \cdot m \ddot{y} \quad (1.55)$$

Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas, temos a função de transferência do sistema:

$$-\frac{K_m}{R} k_2 k_1 s Y = \Theta s (Js + b) + r \cdot m Y s^2 \quad (1.56)$$

Com isso, podemos montar o diagrama de blocos do sistema. Vamos fazê-lo passo a passo. Vamos começar pelo termo $\Theta s (Js + b) = \Theta s \cdot Js + \Theta s \cdot b$. Trata-se de uma soma, logo usamos um bloco de soma, como mostra a Figura 1.29.

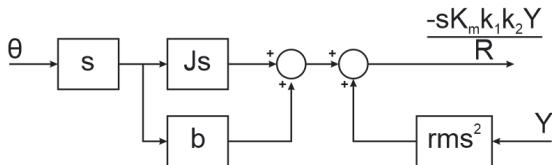
Figura 1.29 | Primeiro passo do diagrama de blocos



Fonte: elaborada pelo autor.

Temos o termo $\Theta s (Js + b)$, mas perceba que o início do ramo superior é idêntico ao início do ramo inferior, então podemos simplificar o diagrama de blocos e exibir o ramo repetido apenas uma vez, bifurcando para baixo e para cima. O próximo termo que conectaremos no diagrama é o $r \cdot m Y s^2$, que deve entrar somando com o que já fizemos, como mostra a Figura 1.30.

Figura 1.30 | Segundo passo do diagrama de blocos

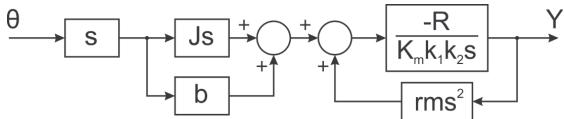


Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que estamos perto de concluir o diagrama: todos os termos da função de transferência (Equação 1.56) estão presentes nele. Queremos o $Y(s)$ como saída e, no ramo superior à direita, ele aparece multiplicado por uma constante $\frac{-K_m k_1 k_2}{R}$, ou seja, basta multiplicarmos o ramo pelo inverso dessa constante para que obtenhamos o $Y(s)$ desejado. Podemos

até mesmo aproveitar o $Y(s)$ superior para bifurcá-lo para o ramo inferior. Com isso, fica concluído o diagrama de blocos na Figura 1.31.

Figura 1.31 | Diagrama de blocos da impressora



Fonte: elaborada pelo autor.

Avançando na prática

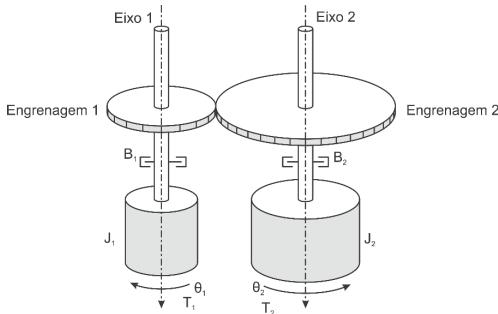
Modelagem de um trem de engrenagens

Descrição da situação-problema

Um manipulador robótico industrial pode ser dividido em três partes distintas: mecanismo, acionamento e sistema de controle. Para o bom funcionamento de um robô, essas três partes devem estar bem projetadas e trabalhando em harmonia durante os movimentos desejados nas tarefas de trabalho de um manipulador. Atualmente há duas formas de acionamento das juntas de robôs industriais. Uma é o acionamento direto, em que o motor é montado diretamente no eixo da junta ou utilizando transmissão por engrenagens entre os motores e as juntas, sendo esta última mais vantajosa, pois possibilita que o motor opere com menos carga e em rotações mais altas, além de facilitar o seu posicionamento em braços robóticos.

Imagine, portanto, que você trabalha como responsável técnico no departamento de desenvolvimento de robôs, e uma de suas tarefas é fazer o modelo

Figura 1.32 | Ilustração do trem de engrenagens



Fonte: adaptada de Felício (2010).

dinâmico tanto em variáveis de estado quanto em diagrama de blocos dos sistemas de redução. O próximo sistema que você deve modelar está ilustrado na Figura 1.32, no qual a entrada é o torque equivalente (levando em consideração a relação de transmissão) e a saída é a velocidade angular do eixo 2.

Do sistema, temos que $n_{12} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$ é a relação de transmissão.

O torque equivalente: $T_e = T_2 + n_{12}T_1$ [$N \cdot m$].

Atritos no sistema: B_1 e B_2 $\left[\frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \right]$.

Inéncias à rotação: J_1 e J_2 [$kg \cdot m^2$].

Ângulos dos eixos: θ_1 e θ_2 [rad].

Como fica cada uma das representações requeridas deste sistema?

Resolução da situação-problema

Começando pela relação de transmissão, temos que:

$$\theta_1 = \theta_2 n_{12} \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 n_{12} \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 n_{12} \quad (1.57)$$

Aplicando a 2ª lei de Newton para movimentos rotativos no primeiro eixo, chegamos a:

$$T_1 - B_1 \dot{\theta}_1 + T_t = J_1 \ddot{\theta}_1 \quad (1.58)$$

Onde T_t é o torque que a engrenagem 2 exerce sobre a engrenagem 1. Substituindo as relações da Equação 1.57 pela 1.58, temos:

$$T_1 - B_1 n_{12} \dot{\theta}_2 + T_t = J_1 n_{12} \ddot{\theta}_2 \quad (1.59)$$

Analogamente, para o eixo 2:

$$T_2 - B_2 \dot{\theta}_2 - T_t n_{12} = J_2 \ddot{\theta}_2 \quad (1.60)$$

Multiplicando (1.59) por n_{12} e somando (1.60), temos:

$$T_1 n_{12} + T_2 - \dot{\theta}_2 (B_1 n_{12}^2 + B_2) = \ddot{\theta}_2 (J_1 n_{12}^2 + J_2)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{T_1 n_{12} + T_2}{J_1 n_{12}^2 + J_2} - \dot{\theta}_2 \frac{B_1 n_{12}^2 + B_2}{J_1 n_{12}^2 + J_2} \quad (1.61)$$

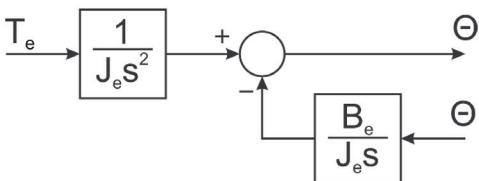
Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas, isolamos $\Theta(s)$, e usando os atalhos $B_e = B_1 n_{12}^2 + B_2$ e $J_e = J_1 n_{12}^2 + J_2$, obtemos:

$$s^2\Theta = \frac{T_e}{J_e} - s\Theta \frac{B_e}{J_e}$$

$$\Theta = \frac{T_e}{J_e s^2} - \Theta \frac{B_e}{J_e s} \quad (1.62)$$

Note que não estamos obtendo a saída $s\cdot\Theta(s)$ requerida para o sistema, mas isso não é problema, pois podemos fazê-la aparecer facilmente no diagrama de blocos. Para montar o diagrama, vamos fazer passo a passo. Primeiramente, precisamos de um bloco de soma para montar o lado direito da equação (Figura 1.33).

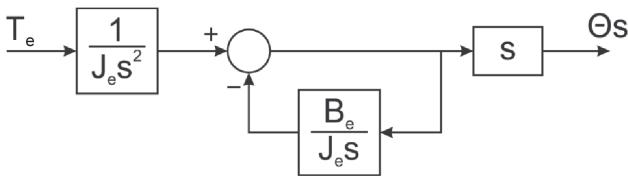
Figura 1.33 | Primeiro passo do diagrama de blocos



Fonte: elaborada pelo autor.

Vemos que há Θ nos dois ramos da direita, então podemos conectá-los para fechar a malha. Como dito anteriormente, a saída esperada é a velocidade angular do segundo eixo do trem de engrenagens, ou seja, $s\cdot\Theta(s)$. Para tal, basta conectar ao final um simples bloco com função transferência s , como mostra a Figura 1.34.

Figura 1.34 | Segundo passo do diagrama de blocos



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

- 1.** A modelagem de sistemas dinâmicos é a técnica de representar sistemas reais por meio de equações matemáticas para os mais diversos propósitos, como o projeto de controladores, predição de respostas, análise de sistemas, entre outros.
Sobre um modelo de sistema dinâmico, considere as afirmativas a seguir:

- I. Um modelo matemático representa de modo perfeito o sistema dinâmico real.
- II. As hipóteses simplificadoras que são feitas durante qualquer modelagem fazem dela uma equação inútil. Por isso modelagem é pouco utilizada na engenharia.
- III. Um modelo de um sistema dinâmico é uma EDO (ou um conjunto delas) que descreve, de modo aproximado, o comportamento de um sistema real.
- IV. É possível traçar analogias entre os elementos e variáveis de sistemas dinâmicos de várias áreas, como elétrica, mecânica, fluídica, etc.

É correto o que se afirma em:

- a) Apenas I e II.
- b) Apenas II e III.
- c) Apenas I, II e IV.
- d) Apenas II, III e IV.
- e) Apenas III e IV.

2. Uma maneira de representar um sistema dinâmico é por meio do uso de variáveis de estado e equação diferencial de estado. Trata-se de uma maneira matricial de apresentar o equacionamento do modelo dinâmico. A equação a seguir representa o modelo de um circuito integrador:

$$u_{in}(t) = RC\dot{u}_{out}(t) + LC\ddot{u}_{out}(t) + u_{out}(t)$$

Assinale a alternativa que mostra a escolha correta das variáveis de estado.

a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_{out} \\ \dot{u}_{out} \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} R \\ L \\ C \end{bmatrix}$

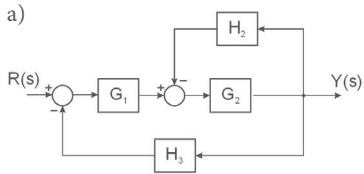
d) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{u}_{out} \\ \ddot{u}_{out} \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_{in} \\ u_{out} \end{bmatrix}$

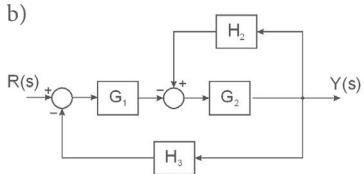
3. A representação de diagrama de blocos de sistemas dinâmicos é uma maneira bastante flexível de se representar um sistema dinâmico, pois há mais de uma maneira de desenhar um diagrama. Mas, mesmo que haja inúmeras maneiras de desenhá-lo, cada diagrama deve sempre ser reduzido à mesma função transferência.

Assinale a alternativa que mostra um par de diagrama de blocos cuja função transferência difere dos demais.

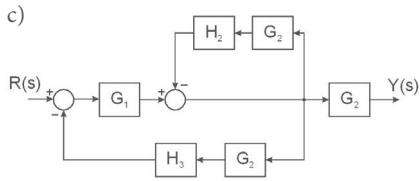
a)



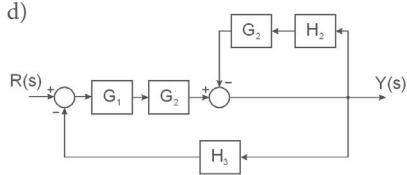
b)



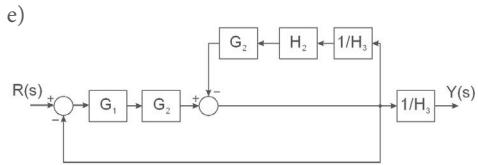
c)



d)



e)



Referências

- FELÍCIO, L. C. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta.** 2. ed. São Carlos: RiMa, 2010.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos.** 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.
- ROUTLEDGE, R. **Discoveries & Inventions of the Nineteenth Century.** 13. ed. [S.l.: s.n.], 1900.
- SIQUEIRA, A.; TERRA, M.; FRANCISCO, T. Controle robusto de robôs móveis em formação sujeitos a falhas. **Revista Controle & Automação**, v. 21, n. 1, p. 29-42, 2010. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ca/v21n1/v21n1a03>>. Acesso em: 8 jun. 2017.