Nicht-lokale Dynamik der Führungswelle Ψ im Doppelspaltexperiment

1 Einleitung

Die De-Broglie-Bohm-Theorie (DBT) bietet eine deterministische Interpretation der Quantenmechanik, in der Teilchen durch eine Führungswelle Ψ gesteuert werden. Dieses Dokument zeigt mathematisch, warum das Interferenzmuster im Doppelspaltexperiment bereits in Ψ vordefiniert ist und wie die instantane Wechselwirkung zwischen Quelle, Spalten und Ψ zu verstehen ist.

2 Grundgleichungen der DBT

2.1 Schrödinger-Gleichung für die Führungswelle

Die Dynamik von Ψ wird durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right]\Psi \tag{1}$$

Hier ist $V(x)$ das Potenzial der Spalte:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{in den Spaltöffnungen} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

2.2 Bohmsche Trajektoriengleichung

Die Teilchenbewegung folgt aus:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\nabla\Psi}{\Psi}\right) \tag{3}$$

mit dem Quantenpotential:

$$Q(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2|\Psi|}{|\Psi|} \tag{4}$$

3 Nicht-lokale Dynamik der Führungswelle

3.1 Instantane Anpassung an Spaltbedingungen

Die Lösung $\Psi(x,t)$ reagiert sofort auf $V(x)$:

$$\Psi(x,t) = \int G(x,x',t)\Psi_0(x')\,\mathrm{d}x' \tag{5}$$

wobei $G(x,x',t)$ der nicht-lokale Propagator ist, der alle Pfade durch beide Spalte gleichzeitig berücksichtigt.

3.2 Interferenzmuster für Doppelspalt

Für Spalte bei $x = \pm d/2$:

$$\Psi(x,t) \sim e^{i(kx-\omega t)}\left[\exp\left(-\frac{(x-d/2)^2}{4\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+d/2)^2}{4\sigma^2}\right)\right] \tag{6}$$

Dies ergibt die Interferenz:

$$|\Psi|^2 \propto \cos^2\left(\frac{kdx}{2\sigma^2}\right) \tag{7}$$

4 Energieerhaltung und instantaner Ausgleich

4.1 Kontinuitätsgleichung

Die Wahrscheinlichkeitserhaltung folgt aus:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad \text{mit} \quad \rho = |\Psi|^2 \tag{8}$$

4.2 Quantenpotential als Ausgleichsmechanismus

Die Gesamtenergie bleibt konstant:

$$E_{\text{ges}} = \underbrace{\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2}_{\text{kin. Energie}} + \underbrace{Q(x,t)}_{\text{Quantenpotential}} + \underbrace{V(x)}_{\text{äußeres Potenzial}} \tag{9}$$

5 Beispiel: Elektron am Doppelspalt

5.1 Zeitentwicklung der Lösung

Für ein Elektron mit Anfangsbedingung $\Psi_0(x) = e^{-x^2/4\sigma^2}$:

$$\Psi(x,t) \propto \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right)\left[\exp\left(-\frac{(x-d/2)^2}{4\sigma^2(1+i\hbar t/2m\sigma^2)}\right) + (d \to -d)\right] \tag{10}$$

5.2 Interpretation

- Die Interferenz $\propto \cos(mdx/\hbar t)$ existiert ab $t > 0$
- Das Quantenpotential $Q(x,t)$ lenkt Teilchen von Knotenlinien ($|\Psi| = 0$) weg
- Die Energie bleibt durch instantane Anpassung von Q erhalten

6 Schlussfolgerungen

- Die Führungswelle Ψ enthält das Interferenzmuster *ab Initiation* des Experiments
- Die nicht-lokale Natur von Ψ erklärt die instantane "Kenntnis" der Spaltgeometrie
- Die Energieerhaltung folgt direkt aus der Struktur des Quantenpotentials Q

7 Interpretation der Führungswelle

Die nicht-lokale Dynamik der Führungswelle lässt sich als **instantane Energieoptimierung** verstehen. Wir definieren das *effektive Energiefunktional* des Gesamtsystems (Teilchen + Spalt):

$$\mathcal{E}[\Psi] = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla\Psi|^2 \, d^3x}_{Q\text{-Term}} + \underbrace{\int V(x)|\Psi|^2 \, d^3x}_{\text{Randbedingungen}} + \underbrace{\lambda \left(\int |\Psi|^2 \, d^3x - 1 \right)}_{\text{Normierung}} \tag{11}$$

7.1 Minimierungsprinzip

Die stationäre Führungswelle $\Psi_0(x)$ realisiert das Minimum von $\mathcal{E}[\Psi]$:

$$\left.\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\Psi}\right|_{\Psi_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x) + \lambda \right] \Psi_0 = 0 \tag{12}$$

Dies ist äquivalent zur zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung (Gl. 1 im Haupttext).

7.2 Energieflüsse im Doppelspalt

Für die Dynamik (Gl. 3) gilt:

- Der **Energiestrom** ist gegeben durch:

$$\mathbf{S} = -\frac{\hbar^2}{2m} \mathrm{Re} \left(\Psi^* \nabla \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right) \tag{13}$$

- Die **instantane Anpassung** (Gl. 5) entspricht einer globalen Energie-Neutralisation:

$$\Delta E(t) := \mathcal{E}[\Psi(t)] - \mathcal{E}[\Psi_0] \to 0 \quad \text{für} \quad t \to 0^+ \tag{14}$$

7.3 Konsequenzen

1. Die Interferenzmuster sind **energetische Attraktoren** des Systems.
2. Die "spukhafte Fernwirkung" entspricht einem **sofortigen Energieausgleich** durch $Q(x,t)$.

3. Experimentelle Vorhersage: Modifikation von $V(x)$ während des Experiments führt zu *instantanen* Änderungen von $\rho(x,t)$, nicht propagiert mit $v \leq c$.