Mein Dokument

Dein Name

29. Juni 2025

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Grundgleichungen der Weber-Kraft

$$F = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.2 Klassische Lösung (0. Ordnung)

Für $c \to \infty$ ergibt sich die Kepler-Bahn:

$$r_0(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$$

$$a_0(\varphi) = -\frac{GM}{r_0^2(\varphi)}$$

1.3 Relativistische Korrektur (1. Ordnung)

Störungsansatz für die Beschleunigung:

$$a(\varphi) = a_0(\varphi) + \frac{GM}{c^2} a_1(\varphi) + \mathcal{O}(1/c^4)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert den Korrekturterm:

$$a_1(\varphi) = \frac{GM}{r_0^2(\varphi)} \left(\frac{3h^2}{r_0^2(\varphi)} - \frac{h^2}{2GMr_0(\varphi)} \left(\frac{dr_0}{d\varphi} \right)^2 \right)$$

1.4 Beschleunigung bis zur 1. Ordnung

$$a(\varphi) = -\frac{GM}{r_0^2(\varphi)}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{3h^2}{r_0^2(\varphi)} - \frac{h^2}{2GMr_0(\varphi)}\left(\frac{dr_0}{d\varphi}\right)^2\right)\right]$$

Hinweis: $r_0(\varphi)$ ist die klassische Kepler-Lösung, h der spezifische Drehimpuls.

1.5 Explizite Form mit Bahnelementen

Einsetzen von $r_0(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$:

$$\begin{aligned} a(\varphi) = & -\frac{GM(1+e\cos\varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2}\left[1 - \frac{3h^2(1+e\cos\varphi)^2}{c^2a^2(1-e^2)^2}\right. \\ & \left. + \frac{h^2e^2\sin^2\varphi}{2c^2GMa^3(1-e^2)^3}(1+e\cos\varphi)^3\right] \end{aligned}$$

1.6 Theoretische Grundlage

$$r(\phi) = r_{\mathrm{ART}}(\phi) + \delta r(\phi)$$

Hier ist $r_{\mathrm{ART}}(\phi)$ die analytische Näherung (ART-genau) und $\delta r(\phi)$ die numerisch berechnete Korrektur.

1.7 Schrittweitensteuerung

Die Schrittweite $\Delta\phi$ wird dynamisch aus den analytischen Ableitungen bestimmt:

$$\Delta\phi = \min\left(\Delta\phi_{\max}, \frac{\epsilon}{|w(\phi)| + |v(\phi)|}\right)$$

mit $v(\phi) = \frac{dr}{d\phi}$ und $w(\phi) = \frac{d^2r}{d\phi^2}$ aus der ART-Näherung.

1.8 Numerische Korrektur

In jedem Schritt wird nur die Abweichung von der ART-Näherung numerisch integriert:

$$\delta r(\phi + \Delta\phi) = \delta r(\phi) + \text{Numerische Integration von } (\text{DGL} - \text{ART-Ableitung})$$

1.9 Gesamtlösung

Die finale Lösung kombiniert beide Anteile:

$$r(\phi + \Delta\phi) = r_{\mathrm{ART}}(\phi + \Delta\phi) + \delta r(\phi + \Delta\phi)$$

1.10 Kartesische Koordinaten

$$\vec{r}(\phi) = \begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix}$$

$$r(\phi) = \sqrt{x(\phi)^2 + y(\phi)^2}$$

$$\omega(\phi) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{h}{r(\phi)^2}$$

1.11 Weber-Kraft in kartesischer Form

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}\left(1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2} + \frac{\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}}}{2c^2}\right)$$

1.12 Zeitliche Ableitungen

$$\dot{\vec{r}} = \omega \frac{d\vec{r}}{d\phi} = \omega \vec{r}'$$

$$\ddot{\vec{r}} = \omega^2 \vec{r}'' + \omega \frac{d\omega}{d\phi} \vec{r}'$$

1.13 Skalarprodukte

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \omega^2(x'^2 + y'^2)$$

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = \omega^2(xx'' + yy'') + \omega\frac{d\omega}{d\phi}(xx' + yy')$$

1.14 Differentialgleichung für $x(\phi)$

$$x'' = \frac{1}{1 + \frac{GM}{2c^2 r}} \left[\frac{2(x'^2 + y'^2)}{r^2} x - \frac{GM}{\omega^2 r^3} x \left(1 - \frac{\omega^2 (x'^2 + y'^2)}{c^2} \right) \right]$$

1.15 Differentialgleichung für $y(\phi)$

$$y'' = \frac{1}{1 + \frac{GM}{2c^2 r}} \left[\frac{2(x'^2 + y'^2)}{r^2} y - \frac{GM}{\omega^2 r^3} y \left(1 - \frac{\omega^2 (x'^2 + y'^2)}{c^2} \right) \right]$$

1.16 Differentialgleichung für $\omega(\phi)$

$$\frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{2h}{r^3}(xx' + yy')$$

1.17 Zusammenfassung des DGL-Systems

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{Y}}{d\phi} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \\ \omega' \end{pmatrix}$$

1.18 Koordinatensystem und Basisvektoren

$$\hat{e}_r = \cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\phi\,\hat{\jmath}$$
$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{r} = r\hat{e}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi$$

1.19 Post-Newtonische Kraft in vektorieller Form

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2} + \frac{(\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}})}{2c^2}\right)\hat{e}_r$$

1.20 Geschwindigkeitsquadrat

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

1.21 Beschleunigungsskalarprodukt

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = r\ddot{r} - r^2\dot{\phi}^2$$

1.22 Bewegungsgleichung in vektorieller Form

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r} - r^2\dot{\phi}^2}{2c^2}\right)\hat{e}_r$$

1.23 Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\phi^2} = f_x\left(x, y, \frac{dx}{d\phi}, \frac{dy}{d\phi}\right) \\ \frac{d^2y}{d\phi^2} = f_y\left(x, y, \frac{dx}{d\phi}, \frac{dy}{d\phi}\right) \end{cases}$$

1.24 Explizite DGL für x-Komponente

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} = \frac{\frac{GMm^2}{L^2}\frac{x}{r^3} - \frac{x}{r^2} - \frac{GM}{c^2}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{dx}{d\phi}\frac{dy}{d\phi}(y\frac{dx}{d\phi} - x\frac{dy}{d\phi}) + \frac{x}{2r^4}\left((\frac{dx}{d\phi})^2 + (\frac{dy}{d\phi})^2\right)\right)\right]}{1 - \frac{GM}{2c^2 r}}$$

1.25 Explizite DGL für y-Komponente

$$\frac{d^2y}{d\phi^2} = \frac{\frac{GMm^2}{L^2}\frac{y}{r^3} - \frac{y}{r^2} - \frac{GM}{c^2}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{dx}{d\phi}\frac{dy}{d\phi}(x\frac{dy}{d\phi} - y\frac{dx}{d\phi}) + \frac{y}{2r^4}\left((\frac{dx}{d\phi})^2 + (\frac{dy}{d\phi})^2\right)\right)\right]}{1 - \frac{GM}{2c^2r}}$$

1.26 Transformiertes System 1. Ordnung

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\phi} = v_x \\ \frac{dy}{d\phi} = v_y \\ \frac{dv_x}{d\phi} = f_x(x, y, v_x, v_y) \\ \frac{dv_y}{d\phi} = f_y(x, y, v_x, v_y) \end{cases}$$

1.27 Klassische Weber-Kraft (Elektrodynamik)

$$F^{EM}_{Weber} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{2r\ddot{r}}{c^2}\right)\hat{r}$$

1.28 Quantisierte Weber-Kraft (Gittermodell)

$$F_{Weber}^{QED} = \frac{V_1(t)V_2(t)}{4\pi\epsilon_0(nL_p)^2}\left(1 - \frac{(\Delta L_p/\Delta t_p)^2}{c^2} + \frac{2L_p\Delta^2 L_p}{c^2\Delta t_p^2}\right)\hat{r}$$

1.29 Elektrisches Feld als Deformationsgradient

$$\vec{E} = \frac{\Delta(\text{Zellvolumen})}{L_p^3} \cdot \hat{r}$$

1.30 Universelle Weber-Kraft

$$F_{universal} = \frac{K \cdot V_1(t)V_2(t)}{(nL_p)^2} \left(1 - \frac{v_{eff}^2}{c^2} + \frac{\beta L_p a_{eff}}{c^2}\right) \hat{r}$$

1.31 Energie-Impuls-Beziehung für Photonen

$$E = \hbar\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

1.32 Webers Gravitationskraft

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \left[1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{r \cdot a}{c^2}\right]$$

1.33 Theorievergleich: ART vs. Weber

Aspekt	**ART**	**Weber**
Raummodell	Raumzeitkrümmung	Direkte Teilchenwechselwirkung
Gravitationswellen	Vorhanden	Nicht existent
Schwarze Löcher	Singularitäten	Keine Singularitäten
Galaxienrotation	Dunkle Materie benötigt	Natürliche Erklärung
Quantenkompatibilität	Problemhaft	Einfacher quantisierbar

1.34 Vorteile der Weber-Theorie

- Erklärt Galaxienrotation ohne Dunkle Materie
- Vermeidet Singularitäten
- Leichter mit Quantenphysik vereinbar
- Direkte Kräfte zwischen Teilchen (keine Raumkrümmung)

1.35 Historische Dominanz der ART

- Frühe experimentelle Bestätigung (1919)
- Einsteins Bekanntheit
- Forschungsinfrastruktur auf ART ausgerichtet
- Weber-Theorie als ältmodischäbgetan

1.36 Quantengravitation mit Weber

- Keine Hawking-Strahlung vorhergesagt
- Neue Gravitationssignal-Typen möglich
- Direkte Quantisierung der Kraftgleichung
- Kompatibel mit Quantenfeldtheorien

1.37 Modifizierte Weber-Kraft (gravitativ)

$$F_{Weber}^{Grav} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)\hat{r}$$

1.38 Periheldrehung des Merkur

$$\Delta\theta = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}$$

1.39 Allgemeine β-Formel

$$\beta = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\delta} \cdot \left(1 - \frac{mc^2}{E}\right)$$

1.40 Universelle Weber-Kraft für Massen

$$F = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.41 Gravitationswellengleichung

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\beta \cdot \partial_t^2 Q_{\mu\nu}\right)$$

1.42 Quantisierte Weber-Kraft (QED)

$$F_{Weber}^{QED} = \frac{V_1(t)V_2(t)}{4\pi\epsilon_0(nL_p)^2}\left(1 - \frac{(\Delta L_p/\Delta t_p)^2}{c^2} + \frac{2L_p\Delta^2 L_p}{c^2\Delta t_p^2}\right)\hat{r}$$

1.43 Frequenzabhängige Lichtablenkung

$$\Delta\phi \sim \frac{4GM}{c^2 b}\left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)$$

1.44 Hamiltonian des Dodekaeder-Gitters

$$\mathcal{H} = \sum_{\text{Kanten}} \epsilon (V_i(t) - V_j(t))^2$$

1.45 Modifizierte Weber-Kraft (gravitativ)

$$F_{Weber}^{Grav} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)\hat{r}$$

1.46 Periheldrehung des Merkur

$$\Delta\theta = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}$$

1.47 Gravitative Rotverschiebung

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 r} + \frac{v_r^2}{2c^2}$$

1.48 Shapiro-Laufzeitverzögerung

$$\Delta t \approx \frac{4GM}{c^3} \ln\left(\frac{4r_1 r_2}{b^2}\right)$$

1.49 Gravitationswellen-Quadrupolformel

$$F_{\mathrm{GW}} = -\frac{G}{c^4} \cdot \frac{\partial^3 Q_{ij}}{\partial t^3} \cdot \frac{x^i x^j}{r^3}$$

1.50 Quantisierte Raumzeit-Parameter

$$L_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.616 \times 10^{-35}\mathrm{m}$$

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.391 \times 10^{-44}\mathrm{s}$$

1.51 Weber-Kraft im Dreikörpersystem

$$\mathbf{F}_1 = -Gm_1 \left[\frac{m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} + \frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{2c^2} \right) + \frac{m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \left(1 - \frac{\dot{r}_{13}^2}{c^2} + \frac{r_{13}\ddot{r}_{13}}{2c^2} \right) \right]$$

1.52 Modifizierte Weber-Kraft

$$F_{Weber} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.53 Predictor-Corrector-Verfahren

- Berechne aktuelle Beschleunigung $a = F_{weber}(r, v)/m$
- Vorhersage neue Geschwindigkeit $v_{neu} = v + a \cdot dt$
- Vorhersage neue Position $r_{neu} = r + v \cdot dt + 0.5 \cdot a \cdot dt^2$
- Neuberechnung $a_{neu} = F_{weber}(r_{neu}, v_{neu})/m$
- Korrektur $v = v + 0.5 \cdot (a + a_{neu}) \cdot dt$
- Update $r = r + v \cdot dt + 0.5 \cdot a_{neu} \cdot dt^2$

1.54 Symplektische Integration

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + p_n \cdot dt \\ p_{n+1} = p_n - \nabla V(q_{n+1}) \cdot dt \end{cases}$$

1.55 Gitter-QCD-Ansatz

$$S = \sum_{x,\mu<\nu} \mathrm{Re}\ \mathrm{Tr}(1 - U_{\mu\nu}(x)) + \sum_{x} \bar{\psi}(x) D \psi(x)$$

1.56 N-Körper-Weber-Kraft

$$\mathbf{F}_i = -G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2} + \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{2c^2} \right)$$

1.57 Weber-Gravitationskraft

$$F = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.58 Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.59 Drehimpulserhaltung

$$h = r^2\dot{\phi} = \text{konstant}$$

$$\dot{\phi} = \frac{h}{r^2}$$

1.60 Modifizierte Radialgleichung

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 - \frac{GM}{2c^2h^2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$$

1.61 Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\phi}(\varphi) = \frac{h}{r(\varphi)^2}$$

1.62 Näherungslösung für Merkurbahn

$$r(\varphi) \approx \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}\left[1+\frac{3GM}{c^2a(1-e^2)}\varphi e\sin\varphi\right]$$

$$\dot{\phi}(\varphi) \approx \frac{h(1+e\cos\varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2}\left[1-\frac{6GM}{c^2a(1-e^2)}\varphi e\sin\varphi\right]$$

1.63 Die Kerninnovation

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{\text{Newton}} \left(1 - \frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2} \right)$$

1.64 Vollständige Impulsdynamik

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)}\left[e \sin\phi(1 + e\cos\phi)\hat{r} + (1 + e\cos\phi)\hat{\phi}\right]$$

1.65 Impulsverteilungsmechanismus

$$\Delta \mathbf{p}_i = -\frac{m_i}{\sum_{j\neq k} m_j} \mathbf{K}_{ik} \Delta \mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2}$$

1.66 Iterationsschema der Impulsverteilung

$$\Delta \mathbf{p}_i^{(n+1)} = \sum_{j \neq i} \mathcal{K}_{ij} \Delta \mathbf{p}_j^{(n)}$$

$$\mathcal{K}_{ij} = -\frac{m_i}{\sum_{k \neq j} m_k} \mathbf{K}_{ij}$$

1.67 Gesamtkopplungsmatrix

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_{12} & \cdots & \mathcal{K}_{1N} \\ \mathcal{K}_{21} & 0 & \cdots & \mathcal{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}_{N1} & \mathcal{K}_{N2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\vec{P} = (I - \mathcal{K})^{-1} \Delta\vec{P}^{(0)}$$

1.68 Konvergenzkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{K}^n\| \cdot \|\Delta \vec{P}^{(0)}\| < \epsilon$$

1.69 Erhaltungssicherung

$$\Delta \mathbf{p}_k \leftarrow \Delta \mathbf{p}_k - \sum_{i \neq k} \Delta \mathbf{p}_i \quad \text{(Gesamtimpuls)}$$

$$\Delta \mathbf{p}_i \leftarrow \Delta \mathbf{p}_i - \frac{\Delta E}{\sum m_i v_i^2} m_i v_i \quad \text{(Energie)}$$

$$\Delta \mathbf{p}_i \leftarrow \Delta \mathbf{p}_i - \frac{\mathbf{\Delta L} \times \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^2} \quad \text{(Drehimpuls)}$$

1.70 Modifizierte Kraftgleichung

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{\text{Newton}} \left(1 - \frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2}\right)$$

- **Term 1:** $-\mathbf{F}_{\text{Newton}}$ (Klassische Gravitationskraft)
- **Term 2:** $-\frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2}$ (Relativistische Geschwindigkeitskorrektur)
- **Term 3:** $+\frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2}$ (Beschleunigungskopplung)

1.71 Impulsgleichung für modifizierte Keplerbahn

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left[e \sin\phi (1 + e\cos\phi)\hat{r} + (1 + e\cos\phi)\hat{\phi} \right]$$

1.72 Vollständige Impulsverteilung

1.72.1 Grundprinzip

$$\Delta \mathbf{p}_i = -\frac{m_i}{\sum_{j \neq k} m_j} \mathbf{K}_{ik} \Delta \mathbf{p}_k$$

- m_i: Masse des Körpers i
- $\sum_{j \neq k} m_j$: Gesamtmasse aller anderen Körper
- $\mathbf{K}_{ik}$: Kopplungsmatrix

1.72.2 Kopplungsmatrix

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2}, \quad \|\mathbf{K}_{ik}\| = 1$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$$

1.72.3 Erhaltungssätze

1. **Impulserhaltung:**
$$\sum_i \Delta \mathbf{p}_i + \Delta \mathbf{p}_k = 0$$
2. **Schwerpunkterhaltung:**
$$\sum_i m_i \Delta \mathbf{r}_i = 0$$
3. **Drehimpulserhaltung:**
$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_k \times \Delta \mathbf{p}_k = 0$$

1.72.4 Spezialfall: Zwei Körper

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{K}_{12} \Delta \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \otimes (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}$$

1.73 Ausgangsgleichungen

1.73.1 Keplerbahn

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi}$$

1.73.2 Drehimpulserhaltung

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr(\phi)^2}$$

1.74 Geschwindigkeitskomponenten

1.74.1 Radialgeschwindigkeit

$$\dot{r} = \frac{Le\sin\phi}{ma(1-e^2)}(1+e\cos\phi)$$

1.74.2 Azimutalgeschwindigkeit

$$r\dot{\phi} = \frac{L(1+e\cos\phi)}{ma(1-e^2)}$$

1.75 Impulsberechnung

1.75.1 Impuls in Polarkoordinaten

$$\mathbf{p} = m\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\right)$$

1.75.2 Endergebnis

$$\boxed{\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)}\left[e\sin\phi(1+e\cos\phi)\hat{r} + (1+e\cos\phi)\hat{\phi}\right]}$$

1.75.3 Betrag des Impulses

$$|\mathbf{p}(\phi)| = \frac{L(1+e\cos\phi)}{a(1-e^2)}\sqrt{1+e^2\sin^2\phi}$$

1.76 Spezialfälle

1.76.1 Kreisbahn (e = 0)

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a}\hat{\phi}, \quad |\mathbf{p}| = \frac{L}{a}$$

1.76.2 Perihel ($\phi = 0$)

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a(1-e)}\hat{\phi}$$

1.76.3 Aphel ($\phi = \pi$)

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a(1+e)}\hat{\phi}$$

1.77 Physikalische Interpretation

- Azimutaler Impuls p_ϕ ist maximal im Perihel und minimal im Aphel
- Radialer Impuls p_r verschwindet in Perihel und Aphel
- Drehimpuls L bleibt erhalten (Zentralkraft)
- Winkelabhängigkeit zeigt Modulation durch Exzentrizität