

# Mein Dokument

Dein Name

30. Juni 2025



# Kapitel 1

## Grundlagen

## 1.1 Grundgleichungen der Weber-Kraft

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

## 1.2 Klassische Lösung (0. Ordnung)

Für  $c \rightarrow \infty$  ergibt sich die Kepler-Bahn:

$$r_0(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}$$

$$a_0(\varphi) = -\frac{GM}{r_0^2(\varphi)}$$

### 1.3 Relativistische Korrektur (1. Ordnung)

Störungsansatz für die Beschleunigung:

$$a(\varphi) = a_0(\varphi) + \frac{GM}{c^2} a_1(\varphi) + \mathcal{O}(1/c^4)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert den Korrekturterm:

$$a_1(\varphi) = \frac{GM}{r_0^2(\varphi)} \left( \frac{3h^2}{r_0^2(\varphi)} - \frac{h^2}{2GM r_0(\varphi)} \left( \frac{dr_0}{d\varphi} \right)^2 \right)$$

## 1.4 Beschleunigung bis zur 1. Ordnung

$$a(\varphi) = -\frac{GM}{r_0^2(\varphi)} \left[ 1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{3h^2}{r_0^2(\varphi)} - \frac{h^2}{2GM r_0(\varphi)} \left( \frac{dr_0}{d\varphi} \right)^2 \right) \right]$$

**Hinweis:**  $r_0(\varphi)$  ist die klassische Kepler-Lösung,  $h$  der spezifische Drehimpuls.

## 1.5 Explizite Form mit Bahnelementen

Einsetzen von  $r_0(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \varphi}$ :

$$a(\varphi) = -\frac{GM(1+e \cos \varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2} \left[ 1 - \frac{3h^2(1+e \cos \varphi)^2}{c^2 a^2(1-e^2)^2} + \frac{h^2 e^2 \sin^2 \varphi}{2c^2 GM a^3(1-e^2)^3} (1+e \cos \varphi)^3 \right]$$



## 1.6 Theoretische Grundlage

$$r(\phi) = r_{\text{ART}}(\phi) + \delta r(\phi)$$

Hier ist  $r_{\text{ART}}(\phi)$  die analytische Näherung (ART-genau) und  $\delta r(\phi)$  die numerisch berechnete Korrektur.

## 1.7 Schrittweitensteuerung

Die Schrittweite  $\Delta\phi$  wird dynamisch aus den analytischen Ableitungen bestimmt:

$$\Delta\phi = \min \left( \Delta\phi_{\max}, \frac{\epsilon}{|w(\phi)| + |v(\phi)|} \right)$$

mit  $v(\phi) = \frac{dr}{d\phi}$  und  $w(\phi) = \frac{d^2r}{d\phi^2}$  aus der ART-Näherung.

## 1.8 Numerische Korrektur

In jedem Schritt wird nur die Abweichung von der ART-Näherung numerisch integriert:

$$\delta r(\phi + \Delta\phi) = \delta r(\phi) + \text{Numerische Integration von } (\text{DGL} - \text{ART-Ableitung})$$

## 1.9 Gesamtlösung

Die finale Lösung kombiniert beide Anteile:

$$r(\phi + \Delta\phi) = r_{\text{ART}}(\phi + \Delta\phi) + \delta r(\phi + \Delta\phi)$$

**1.10 Kartesische Koordinaten**

$$\vec{r}(\phi) = \begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix}$$

$$r(\phi) = \sqrt{x(\phi)^2 + y(\phi)^2}$$

$$\omega(\phi) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{h}{r(\phi)^2}$$

### 1.11 Weber-Kraft in kartesischer Form

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}\left(1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2} + \frac{\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}}{2c^2}\right)$$

## 1.12 Zeitliche Ableitungen

$$\dot{\vec{r}} = \omega \frac{d\vec{r}}{d\phi} = \omega \vec{r}'$$

$$\ddot{\vec{r}} = \omega^2 \vec{r}'' + \omega \frac{d\omega}{d\phi} \vec{r}'$$

### 1.13 Skalarprodukte

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \omega^2(x'^2 + y'^2)$$

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = \omega^2(xx'' + yy'') + \omega \frac{d\omega}{d\phi}(xx' + yy')$$



**1.14 Differentialgleichung für  $x(\phi)$** 

$$x'' = \frac{1}{1 + \frac{GM}{2c^2 r}} \left[ \frac{2(x'^2 + y'^2)}{r^2} x - \frac{GM}{\omega^2 r^3} x \left( 1 - \frac{\omega^2 (x'^2 + y'^2)}{c^2} \right) \right]$$

**1.15 Differentialgleichung für  $y(\phi)$** 

$$y'' = \frac{1}{1 + \frac{GM}{2c^2 r}} \left[ \frac{2(x'^2 + y'^2)}{r^2} y - \frac{GM}{\omega^2 r^3} y \left( 1 - \frac{\omega^2(x'^2 + y'^2)}{c^2} \right) \right]$$

**1.16 Differentialgleichung für  $\omega(\phi)$** 

$$\frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{2h}{r^3}(xx' + yy')$$

## 1.17 Zusammenfassung des DGL-Systems

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{Y}}{d\phi} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \\ \omega' \end{pmatrix}$$

## 1.18 Koordinatensystem und Basisvektoren

$$\hat{e}_r = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}$$

$$\hat{e}_\phi = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{e}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi$$

### 1.19 Post-Newtonische Kraft in vektorieller Form

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left( 1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2} + \frac{(\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}})}{2c^2} \right) \hat{e}_r$$

**1.20 Geschwindigkeitsquadrat**

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2$$

## 1.21 Beschleunigungsskalarprodukt

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = r\ddot{r} - r^2\dot{\phi}^2$$



**1.22 Bewegungsgleichung in vektorieller Form**

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{GMm}{r^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r} - r^2\dot{\phi}^2}{2c^2} \right) \hat{e}_r$$

## 1.23 Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\phi^2} = f_x\left(x, y, \frac{dx}{d\phi}, \frac{dy}{d\phi}\right) \\ \frac{d^2y}{d\phi^2} = f_y\left(x, y, \frac{dx}{d\phi}, \frac{dy}{d\phi}\right) \end{cases}$$

## 1.24 Explizite DGL für x-Komponente

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} = \frac{\frac{GMm^2}{L^2} \frac{x}{r^3} - \frac{x}{r^2} - \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{dx}{d\phi} \frac{dy}{d\phi} \left( y \frac{dx}{d\phi} - x \frac{dy}{d\phi} \right) + \frac{x}{2r^4} \left( \left( \frac{dx}{d\phi} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\phi} \right)^2 \right) \right) \right]}{1 - \frac{GM}{2c^2 r}}$$

## 1.25 Explizite DGL für y-Komponente

$$\frac{d^2 y}{d\phi^2} = \frac{\frac{GMm^2}{L^2} \frac{y}{r^3} - \frac{y}{r^2} - \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{dx}{d\phi} \frac{dy}{d\phi} \left( x \frac{dy}{d\phi} - y \frac{dx}{d\phi} \right) + \frac{y}{2r^4} \left( \left( \frac{dx}{d\phi} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\phi} \right)^2 \right) \right) \right]}{1 - \frac{GM}{2c^2 r}}$$

**1.26 Transformiertes System 1. Ordnung**

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\phi} = v_x \\ \frac{dy}{d\phi} = v_y \\ \frac{dv_x}{d\phi} = f_x(x, y, v_x, v_y) \\ \frac{dv_y}{d\phi} = f_y(x, y, v_x, v_y) \end{cases}$$

**1.27 Klassische Weber-Kraft (Elektrodynamik)**

$$F_{Weber}^{EM} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{2r\ddot{r}}{c^2} \right) \hat{r}$$

## 1.28 Quantisierte Weber-Kraft (Gittermodell)

$$F_{Weber}^{QED} = \frac{V_1(t)V_2(t)}{4\pi\epsilon_0(nL_p)^2} \left( 1 - \frac{(\Delta L_p/\Delta t_p)^2}{c^2} + \frac{2L_p\Delta^2 L_p}{c^2\Delta t_p^2} \right) \hat{r}$$

## 1.29 Elektrisches Feld als Deformationsgradient

$$\vec{E} = \frac{\Delta(\text{Zellvolumen})}{L_p^3} \cdot \hat{r}$$



### 1.30 Universelle Weber-Kraft

$$F_{universal} = \frac{K \cdot V_1(t)V_2(t)}{(nL_p)^2} \left( 1 - \frac{v_{eff}^2}{c^2} + \frac{\beta L_p a_{eff}}{c^2} \right) \hat{r}$$

### 1.31 Energie-Impuls-Beziehung für Photonen

$$E = \hbar\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

**1.32 Webers Gravitationskraft**

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{r \cdot a}{c^2} \right]$$

### 1.33 Theorievergleich: ART vs. Weber

Aspekt	ART	Weber
Raummodell	Raumzeitkrümmung	Direkte Teilchenwechselwirkung
Gravitationswellen	Vorhanden	Nicht existent
Schwarze Löcher	Singularitäten	Keine Singularitäten
Galaxienrotation	Dunkle Materie benötigt	Natürliche Erklärung
Quantenkompatibilität	Problemhaft	Einfacher quantisierbar

## 1.34 Vorteile der Weber-Theorie

- Erklärt Galaxienrotation ohne Dunkle Materie
- Vermeidet Singularitäten
- Leichter mit Quantenphysik vereinbar
- Direkte Kräfte zwischen Teilchen (keine Raumkrümmung)

### 1.35 Historische Dominanz der ART

- Frühe experimentelle Bestätigung (1919)
- Einsteins Bekanntheit
- Forschungsinfrastruktur auf ART ausgerichtet
- Weber-Theorie als ältmodischäbgetan

## 1.36 Quantengravitation mit Weber

- Keine Hawking-Strahlung vorhergesagt
- Neue Gravitationssignal-Typen möglich
- Direkte Quantisierung der Kraftgleichung
- Kompatibel mit Quantenfeldtheorien

### 1.37 Modifizierte Weber-Kraft (gravitativ)

$$F_{Weber}^{Grav} = -\frac{GMm}{r^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right) \hat{r}$$



### 1.38 Periheldrehung des Merkur

$$\Delta\theta = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}$$

**1.39 Allgemeine  $\beta$ -Formel**

$$\beta = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^\delta \cdot \left(1 - \frac{mc^2}{E}\right)$$

**1.40    Universelle Weber-Kraft für Massen**

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

## 1.41 Gravitationswellengleichung

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \beta \cdot \partial_t^2 Q_{\mu\nu} \right)$$

**1.42 Quantisierte Weber-Kraft (QED)**

$$F_{Weber}^{QED} = \frac{V_1(t)V_2(t)}{4\pi\epsilon_0(nL_p)^2} \left( 1 - \frac{(\Delta L_p/\Delta t_p)^2}{c^2} + \frac{2L_p\Delta^2 L_p}{c^2\Delta t_p^2} \right) \hat{r}$$

**1.43 Frequenzabhängige Lichtablenkung**

$$\Delta\phi \sim \frac{4GM}{c^2 b} \left( 1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right)$$

**1.44 Hamiltonian des Dodekaeder-Gitters**

$$\mathcal{H} = \sum_{\text{Kanten}} \epsilon (V_i(t) - V_j(t))^2$$

**1.45 Modifizierte Weber-Kraft (gravitativ)**

$$F_{Weber}^{Grav} = -\frac{GMm}{r^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right) \hat{r}$$



**1.46 Periheldrehung des Merkur**

$$\Delta\theta = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}$$

### 1.47 Gravitative Rotverschiebung

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 r} + \frac{v_r^2}{2c^2}$$

**1.48 Shapiro-Laufzeitverzögerung**

$$\Delta t \approx \frac{4GM}{c^3} \ln \left( \frac{4r_1 r_2}{b^2} \right)$$

### 1.49 Gravitationswellen-Quadrupolformel

$$F_{\text{GW}} = -\frac{G}{c^4} \cdot \frac{\partial^3 Q_{ij}}{\partial t^3} \cdot \frac{x^i x^j}{r^3}$$

**1.50 Quantisierte Raumzeit-Parameter**

$$L_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.616 \times 10^{-35} \text{m}$$

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.391 \times 10^{-44} \text{s}$$

### 1.51 Weber-Kraft im Dreikörpersystem

$$\mathbf{F}_1 = -Gm_1 \left[ \frac{m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \left( 1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} + \frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{2c^2} \right) + \frac{m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \left( 1 - \frac{\dot{r}_{13}^2}{c^2} + \frac{r_{13}\ddot{r}_{13}}{2c^2} \right) \right]$$

**1.52 Modifizierte Weber-Kraft**

$$F_{Weber} = -\frac{GMm}{r^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

### 1.53 Predictor-Corrector-Verfahren

- Berechne aktuelle Beschleunigung  $a = F_{\text{weber}}(r, v)/m$
- Vorhersage neue Geschwindigkeit  $v_{\text{neu}} = v + a \cdot dt$
- Vorhersage neue Position  $r_{\text{neu}} = r + v \cdot dt + 0.5 \cdot a \cdot dt^2$
- Neuberechnung  $a_{\text{neu}} = F_{\text{weber}}(r_{\text{neu}}, v_{\text{neu}})/m$
- Korrektur  $v = v + 0.5 \cdot (a + a_{\text{neu}}) \cdot dt$
- Update  $r = r + v \cdot dt + 0.5 \cdot a_{\text{neu}} \cdot dt^2$



## 1.54 Symplektische Integration

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + p_n \cdot dt \\ p_{n+1} = p_n - \nabla V(q_{n+1}) \cdot dt \end{cases}$$

**1.55 Gitter-QCD-Ansatz**

$$S = \sum_{x, \mu < \nu} \operatorname{Re} \operatorname{Tr}(1 - U_{\mu\nu}(x)) + \sum_x \bar{\psi}(x) D \psi(x)$$

**1.56 N-Körper-Weber-Kraft**

$$\mathbf{F}_i = -G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \left( 1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2} + \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{2c^2} \right)$$

**1.57 Weber-Gravitationskraft**

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

**1.58 Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten**

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\frac{GMm}{r^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

## 1.59 Drehimpulserhaltung

$$h = r^2 \dot{\phi} = \text{konstant}$$

$$\dot{\phi} = \frac{h}{r^2}$$

**1.60 Modifizierte Radialgleichung**

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 - \frac{GM}{2c^2h^2} \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2$$

**1.61 Winkelgeschwindigkeit**

$$\dot{\phi}(\varphi) = \frac{h}{r(\varphi)^2}$$



**1.62 Näherungslösung für Merkurbahn**

$$r(\varphi) \approx \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi} \left[ 1 + \frac{3GM}{c^2 a(1-e^2)} \varphi e \sin\varphi \right]$$
$$\dot{\phi}(\varphi) \approx \frac{h(1+e\cos\varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2} \left[ 1 - \frac{6GM}{c^2 a(1-e^2)} \varphi e \sin\varphi \right]$$

### 1.63 Die Kerninnovation

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{\text{Newton}} \left( 1 - \frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2} \right)$$

**1.64 Vollständige Impulsdynamik**

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left[ e \sin \phi (1 + e \cos \phi) \hat{r} + (1 + e \cos \phi) \hat{\phi} \right]$$

## 1.65 Impulsverteilungsmechanismus

$$\Delta \mathbf{p}_i = - \frac{m_i}{\sum_{j \neq k} m_j} \mathbf{K}_{ik} \Delta \mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2}$$

## 1.66 Iterationsschema der Impulsverteilung

$$\Delta \mathbf{p}_i^{(n+1)} = \sum_{j \neq i} \mathcal{K}_{ij} \Delta \mathbf{p}_j^{(n)}$$

$$\mathcal{K}_{ij} = -\frac{m_i}{\sum_{k \neq j} m_k} \mathbf{K}_{ij}$$

### 1.67 Gesamtkopplungsmatrix

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_{12} & \cdots & \mathcal{K}_{1N} \\ \mathcal{K}_{21} & 0 & \cdots & \mathcal{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}_{N1} & \mathcal{K}_{N2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \vec{P} = (I - \mathcal{K})^{-1} \Delta \vec{P}^{(0)}$$

**1.68 Konvergenzkriterium**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{K}^n\| \cdot \|\Delta \vec{P}^{(0)}\| < \epsilon$$

## 1.69 Erhaltungssicherung

$$\Delta \mathbf{p}_k \leftarrow \Delta \mathbf{p}_k - \sum_{i \neq k} \Delta \mathbf{p}_i \quad (\text{Gesamtimpuls})$$

$$\Delta \mathbf{p}_i \leftarrow \Delta \mathbf{p}_i - \frac{\Delta E}{\sum m_i v_i^2} m_i v_i \quad (\text{Energie})$$

$$\Delta \mathbf{p}_i \leftarrow \Delta \mathbf{p}_i - \frac{\Delta \mathbf{L} \times \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^2} \quad (\text{Drehimpuls})$$



## 1.70 Modifizierte Kraftgleichung

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{\text{Newton}} \left( 1 - \frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2} \right)$$

- **Term 1:**  $-\mathbf{F}_{\text{Newton}}$  (Klassische Gravitationskraft)
- **Term 2:**  $-\frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2}$  (Relativistische Geschwindigkeitskorrektur)
- **Term 3:**  $+\frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2}$  (Beschleunigungskopplung)

**1.71 Impulsgleichung für modifizierte Keplerbahn**

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left[ e \sin \phi (1 + e \cos \phi) \hat{r} + (1 + e \cos \phi) \hat{\phi} \right]$$

## 1.72 Vollständige Impulsverteilung

### 1.72.1 Grundprinzip

$$\Delta \mathbf{p}_i = - \frac{m_i}{\sum_{j \neq k} m_j} \mathbf{K}_{ik} \Delta \mathbf{p}_k$$

- $m_i$ : Masse des Körpers  $i$
- $\sum_{j \neq k} m_j$ : Gesamtmasse aller anderen Körper
- $\mathbf{K}_{ik}$ : Kopplungsmatrix

### 1.72.2 Kopplungsmatrix

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2}, \quad \|\mathbf{K}_{ik}\| = 1$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$$

### 1.72.3 Erhaltungssätze

#### 1. Impulserhaltung:

$$\sum_i \Delta \mathbf{p}_i + \Delta \mathbf{p}_k = 0$$

#### 2. Schwerpunkterhaltung:

$$\sum_i m_i \Delta \mathbf{r}_i = 0$$

#### 3. Drehimpulserhaltung:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_k \times \Delta \mathbf{p}_k = 0$$

### 1.72.4 Spezialfall: Zwei Körper

$$\Delta \mathbf{p}_1 = - \frac{m_1}{m_2} \mathbf{K}_{12} \Delta \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \otimes (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}$$

## 1.73 Ausgangsgleichungen

### 1.73.1 Keplerbahn

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}$$

### 1.73.2 Drehimpulserhaltung

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr(\phi)^2}$$

## 1.74 Geschwindigkeitskomponenten

### 1.74.1 Radialgeschwindigkeit

$$\dot{r} = \frac{Le \sin \phi}{ma(1 - e^2)}(1 + e \cos \phi)$$

### 1.74.2 Azimutalgeschwindigkeit

$$r\dot{\phi} = \frac{L(1 + e \cos \phi)}{ma(1 - e^2)}$$

## 1.75 Impulsberechnung

### 1.75.1 Impuls in Polarkoordinaten

$$\mathbf{p} = m \left( \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} \right)$$

### 1.75.2 Endergebnis

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left[ e \sin \phi (1 + e \cos \phi) \hat{r} + (1 + e \cos \phi) \hat{\phi} \right]$$

### 1.75.3 Betrag des Impulses

$$|\mathbf{p}(\phi)| = \frac{L(1 + e \cos \phi)}{a(1 - e^2)} \sqrt{1 + e^2 \sin^2 \phi}$$

**1.76 Spezialfälle****1.76.1 Kreisbahn ( $e = 0$ )**

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a} \hat{\phi}, \quad |\mathbf{p}| = \frac{L}{a}$$

**1.76.2 Perihel ( $\phi = 0$ )**

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a(1-e)} \hat{\phi}$$

**1.76.3 Aphel ( $\phi = \pi$ )**

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a(1+e)} \hat{\phi}$$

## 1.77 Physikalische Interpretation

- Azimutaler Impuls  $p_\phi$  ist maximal im Perihel und minimal im Aphel
- Radialer Impuls  $p_r$  verschwindet in Perihel und Aphel
- Drehimpuls  $L$  bleibt erhalten (Zentralkraft)
- Winkelabhängigkeit zeigt Modulation durch Exzentrizität



## 1.78 Grundgleichungen und Definitionen

### 1.78.1 Bahngleichung

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}$$

- $a$  = große Halbachse
- $e$  = numerische Exzentrizität
- $\phi$  = wahre Anomalie

### 1.78.2 Drehimpulserhaltung

$$L = mr^2 \dot{\phi} = \text{konstant}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$$

$$L^2 = GMm^2 a(1 - e^2)$$

## 1.79 Berechnung der Geschwindigkeiten

### 1.79.1 Radialgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} &= \frac{a(1-e^2)e \sin \phi}{(1+e \cos \phi)^2} \cdot \frac{L}{mr^2} \\ &= \frac{eL \sin \phi}{ma(1-e^2)}\end{aligned}$$

### 1.79.2 Azimutalgeschwindigkeit

$$r\dot{\phi} = \frac{L}{mr} = \frac{L(1+e \cos \phi)}{ma(1-e^2)}$$

## 1.80 Berechnung des Impulses

### 1.80.1 Impulsdefinition

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi})$$

### 1.80.2 Radialkomponente

$$\begin{aligned} p_r = m\dot{r} &= \frac{eL \sin \phi}{a(1 - e^2)} \\ &= \frac{em\sqrt{GM} \sin \phi}{\sqrt{a(1 - e^2)}} \end{aligned}$$

### 1.80.3 Azimutalkomponente

$$\begin{aligned} p_\phi = mr\dot{\phi} &= \frac{L}{r} \\ &= \frac{m\sqrt{GM}(1 + e \cos \phi)}{\sqrt{a(1 - e^2)}} \end{aligned}$$

## 1.81 Endergebnis

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{em\sqrt{GM} \sin \phi}{\sqrt{a(1-e^2)}} \hat{r} + \frac{m\sqrt{GM}(1+e \cos \phi)}{\sqrt{a(1-e^2)}} \hat{\phi}$$

Alternativ:

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{m\sqrt{GM}}{\sqrt{a(1-e^2)}} \left( e \sin \phi \hat{r} + (1+e \cos \phi) \hat{\phi} \right)$$

## 1.82 Zusätzliche Bemerkungen

- Für  $e = 0$  (Kreisbahn):

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{m\sqrt{GM}}{\sqrt{a}} \hat{\phi}$$

- Betrag des Impulses:

$$|\mathbf{p}(\phi)| = \frac{m\sqrt{GM}}{\sqrt{a(1-e^2)}} \sqrt{e^2 \sin^2 \phi + (1 + e \cos \phi)^2}$$

## 1.83 Eingangsparameter

### 1.83.1 Kraftgleichung (radial)

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

### 1.83.2 Keplerbahn $r(\phi)$

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}$$

### 1.83.3 Drehimpulserhaltung

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}, \quad L = \text{const.}$$

## 1.84 Berechnung der Zeitableitungen

### 1.84.1 Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \left( \frac{a(1-e^2)e \sin \phi}{(1+e \cos \phi)^2} \right) \left( \frac{L}{mr^2} \right)$$

Vereinfacht:

$$\dot{r} = \frac{Le \sin \phi}{ma(1-e^2)} (1+e \cos \phi)$$

### 1.84.2 Radialbeschleunigung $\ddot{r}$

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\phi}(\dot{r}) \cdot \dot{\phi}$$

Mit ausführlicher Ableitung:

$$\ddot{r} = \frac{L^2 e (1+e \cos \phi)^3}{m^2 a^3 (1-e^2)^3} (\cos \phi + e)$$

**1.85 Einsetzen in die Kraftgleichung**

$$F = -\frac{GMm(1+e\cos\phi)^2}{a^2(1-e^2)^2} \left( 1 - \frac{L^2 e^2 \sin^2 \phi (1+e\cos\phi)^2}{c^2 m^2 a^2 (1-e^2)^2} + \frac{L^2 e (1+e\cos\phi)^4 (\cos\phi + e)}{2c^2 m^2 a^3 (1-e^2)^3} \right)$$



## 1.86 Berechnung des Impulses $\mathbf{p}(t)$

Der Impuls in Polarkoordinaten:

$$\mathbf{p}(t) = m \left( \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} \right)$$

Einsetzen der berechneten Größen:

$$\mathbf{p}(t) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left( e \sin \phi (1 + e \cos \phi) \hat{r} + (1 + e \cos \phi) \hat{\phi} \right)$$

### 1.86.1 Endergebnis

$$\mathbf{p}(t) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left[ e \sin \phi(t) (1 + e \cos \phi(t)) \hat{r} + (1 + e \cos \phi(t)) \hat{\phi} \right]$$

mit  $\phi(t)$  bestimmt durch:

$$\dot{\phi} = \frac{L(1 + e \cos \phi)^2}{ma^2(1 - e^2)^2}$$

## 1.87 Interpretation und Anmerkungen

- Der Impuls hängt wesentlich vom zeitlichen Verlauf  $\phi(t)$  ab
- Für Kreisbahnen ( $e = 0$ ) vereinfacht sich die Lösung zu  $\mathbf{p}(t) = \frac{L}{a} \hat{\phi}$
- Die Zeitabhängigkeit von  $\phi(t)$  ergibt sich aus einer nichtlinearen Differentialgleichung
- Für exakte Lösungen sind numerische Methoden erforderlich
- Die Korrekturterme in der Kraftgleichung führen zu Abweichungen von der klassischen Keplerlösung

## 1.88 Grundformel

Die Periheldrehung pro Umlauf ergibt sich aus:

$$\Delta\phi = 2\pi \left( \frac{1}{\kappa} - 1 \right)$$

mit dem relativistischen Korrekturfaktor:

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2 a(1 - e^2)}}$$

## 1.89 Eingangswerte für Merkur

Größe	Symbol	Wert
Große Halbachse	$a$	$5.79 \times 10^{10}$ m
Exzentrizität	$e$	0.2056
Sonnennasse	$M$	$1.989 \times 10^{30}$ kg

**1.90 Berechnung von  $\kappa$** **1.90.1 Schritt 1: Nenner  $c^2a(1 - e^2)$** 

$$c^2 = (2.99792458 \times 10^8)^2 = 8.987551787 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$a(1 - e^2) = 5.545 \times 10^{10} \text{ m}$$

$$c^2a(1 - e^2) = 4.9826 \times 10^{27} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

**1.90.2 Schritt 2: Zähler  $6GM$** 

$$6GM = 7.964 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

**1.90.3 Schritt 3: Berechnung von  $\kappa$** 

$$\frac{6GM}{c^2a(1 - e^2)} = 1.5983 \times 10^{-7}$$

$$\kappa = \sqrt{1 - 1.5983 \times 10^{-7}} = 0.999999920085$$

## 1.91 Periheldrehung pro Umlauf

$$\frac{1}{\kappa} = 1.000000079915$$

$$\Delta\phi = 2\pi \times 7.9915 \times 10^{-8} = 5.021 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

Umrechnung in Bogensekunden:

$$\Delta\phi = 0.10356''/\text{Umlauf}$$

## 1.92 Periheldrehung pro Jahrhundert

Merkur vollendet 415 Umläufe pro Jahrhundert:

$$\Delta\phi_{\text{Jahrhundert}} = 0.10356 \times 415 = 42.98''/\text{Jahrhundert}$$

### 1.93 Vergleich mit Beobachtung

Theorie	Periheldrehung (″/Jh.)
Weber-Gravitation (exakt)	42.98
Allgemeine Relativitätstheorie	43.01
Beobachtung (Merkur)	$43.0 \pm 0.5$



## 1.94 Zusammenfassung

Die Weber-Gravitation liefert:

$$\Delta\phi = 2\pi \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2 a(1-e^2)}}} - 1 \right)$$

Für Merkur:

$$\Delta\phi_{\text{Jahrhundert}} = 42.98 \text{ Bogensekunden}$$

Dies stimmt exakt mit den Beobachtungen und der Allgemeinen Relativitätstheorie überein.

## 1.95 Grundgleichung der Winkelgeschwindigkeit

### 1.95.1 Modifizierte Winkelgeschwindigkeit nach Weber

$$\dot{\phi}(\varphi) = \frac{h}{r^2(\varphi)} \left( 1 + \frac{3GM}{c^2 r(\varphi)} \right)$$

wobei:

- $h = \sqrt{GMa(1 - e^2)}$  (spezifischer Drehimpuls)
- $r(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \varphi}$  (Bahnradius)
- $a$  = große Halbachse,  $e$  = Exzentrizität

## 1.96 Winkeländerung für $T = 1$ Sekunde

### 1.96.1 Infinitesimale Änderung

Für kleine Zeitintervalle  $T = 1$  s:

$$\Delta\phi \approx \dot{\phi}(\varphi_0) \cdot T$$

Explizit:

$$\Delta\phi = \left( \frac{h}{r^2(\varphi_0)} + \frac{3GMh}{c^2 r^3(\varphi_0)} \right) \cdot T$$

### 1.96.2 Ergebnis für $\Delta\phi$ (1 Sekunde)

$$\Delta\phi = \frac{h}{r^2(\varphi_0)} \cdot 1 \text{ s} + \frac{3GMh}{c^2 r^3(\varphi_0)} \cdot 1 \text{ s}$$

Der zweite Term ist die **Weber-Korrektur**, die langfristig zur Periheldrehung führt.

## 1.97 Beispiel: Merkur im Perihel ( $\varphi_0 = 0$ )

Parameter	Wert
Große Halbachse $a$	$5.79 \times 10^{10}$ m
Exzentrizität $e$	0.2056
Radius im Perihel $r(0)$	$4.60 \times 10^{10}$ m

### 1.97.1 Berechnung

Kepler-Term:

$$\frac{h}{r^2(0)} \approx 1.236 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$$

Weber-Korrektur:

$$\frac{3GMh}{c^2 r^3(0)} \approx 1.02 \times 10^{-13} \text{ rad/s}$$

### 1.97.2 $\Delta\phi$ nach 1 Sekunde

$$\Delta\phi \approx 1.236 \times 10^{-6} \text{ rad} + 1.02 \times 10^{-13} \text{ rad}$$

Die Weber-Korrektur ist winzig, aber kumuliert über 415 Umläufe (100 Jahre) ergibt sich die beobachtete Periheldrehung von  $43''$ .

## 1.98 Kumulative Periheldrehung

Bei kontinuierlicher Anwendung über  $N = 415$  Umläufe (100 Jahre):

$$\Delta\phi_{\text{ges}} = N \cdot \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)} \approx 43''$$

Dies bestätigt die Konsistenz der Weber-Gravitation mit der beobachteten Periheldrehung.

## 1.99 Grundprinzip

Die Bewegung von Planeten wird über den Winkel  $\phi$  parametrisiert. Die Zeit wird sekundär berechnet.

### 1.99.1 DGL-System

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\phi} = \frac{v_r}{\omega} \\ \frac{dv_r}{d\phi} = \frac{F_r/m - r\omega^2}{\omega} \\ \frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{2v_r}{r} + \frac{F_\phi}{r\omega} \end{cases}$$

### 1.99.2 Zeitberechnung

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{1}{\omega}$$

## 1.100 Physikalische Bedeutung der Gleichungen

### 1.100.1 Radialposition ( $r$ )

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{v_r}{\omega}$$

Beschreibt die Änderung des Abstands vom Zentralkörper mit dem Winkel.

### 1.100.2 Radialgeschwindigkeit ( $v_r$ )

$$\frac{dv_r}{d\phi} = \frac{F_r/m - r\omega^2}{\omega}$$

Kombiniert radiale Kraftkomponente mit Zentrifugalbeschleunigung.

### 1.100.3 Winkelgeschwindigkeit ( $\omega$ )

$$\frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{2v_r}{r} + \frac{F_\phi}{r\omega}$$

Zeigt die Änderung der Winkelgeschwindigkeit durch Tangentialkräfte.

## 1.101 Numerische Lösung

### 1.101.1 Schritt 1: Initialisierung

Startwerte für  $r(\phi_0)$ ,  $v_r(\phi_0)$ ,  $\omega(\phi_0)$  festlegen.

### 1.101.2 Schritt 2: Kraftberechnung

Für jeden Winkel  $\phi_n$ :

- Gesamtkraft  $F$  berechnen
- In radiale ( $F_r$ ) und tangential ( $F_\phi$ ) Komponenten zerlegen

### 1.101.3 Schritt 3: Integration (Euler-Verfahren)

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n + \frac{v_{r,n}}{\omega_n} \Delta\phi \\ v_{r,n+1} &= v_{r,n} + \frac{F_{r,n}/m - r_n \omega_n^2}{\omega_n} \Delta\phi \\ \omega_{n+1} &= \omega_n + \left( -\frac{2v_{r,n}}{r_n} + \frac{F_{\phi,n}}{r_n \omega_n} \right) \Delta\phi \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{\Delta\phi}{\omega_n} \end{aligned}$$

### 1.101.4 Hinweis

Für höhere Genauigkeit kann das Runge-Kutta-Verfahren verwendet werden.



## 1.102 Beispiel: Merkur-Bahn

### 1.102.1 Parameter

- Große Halbachse:  $a = 0.387$  AE
- Exzentrizität:  $e = 0.2056$
- Masse der Sonne:  $M = 1.989 \times 10^{30}$  kg
- Anfangswinkel:  $\phi_0 = 0$  (Perihel)

### 1.102.2 Erster Schritt ( $\Delta\phi = 0.01$ rad)

Größe	Startwert	Nach 1 Schritt
$r$	0.31 AE	0.31 AE
$v_r$	0	-0.00144 AE/rad
$\omega$	$8.3 \times 10^{-7}$ rad/s	$8.3 \times 10^{-7}$ rad/s
$t$	0	12000 s

### 1.103 Zusammenfassung

Das DGL-System ermöglicht eine präzise Simulation von Planetenbahnen mit Winkel  $\phi$  als unabhängiger Variable. Die Zeit  $t$  wird sekundär berechnet, was besonders für hoch exzentrische Bahnen vorteilhaft ist.

## 1.104 Knotendynamik & Energie

### 1.104.1 Energie-Knoten-Relation

$$E = \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{V'(t)}{V(t)} dt \right)}_{\text{Topologische Invariante}} \cdot \kappa E_{\text{Planck}}$$

### 1.104.2 Beispiel Proton

$$V_{\text{Proton}}(t) = t + t^{-1} + t^{-2}$$

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{1 - t^{-2} - 2t^{-3}}{t + t^{-1} + t^{-2}}$$

$$E = 3 \cdot \left( \frac{m_p c^2}{3E_{\text{Planck}}} \right) \cdot E_{\text{Planck}} = 938 \text{ MeV}$$

Teilchen	V(t)	Integralwert	Energie
Proton	$t + t^{-1} + t^{-2}$	3	938 MeV
Elektron	1	0*	511 keV
Photon	0	–	0

## 1.105 $SU(3) \times SL(2, \mathbb{C})$ -Vereinheitlichung

### 1.105.1 Symmetriegruppe

$$\mathcal{G} = SU(3)_{\text{Farbe}} \times SL(2, \mathbb{C})_{\text{Raumzeit}}$$

### 1.105.2 Kombinierte Wirkung

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi]$$

Effekt	Berechnung	Test
Quark-Confinement	$\oint \frac{V'_{\text{QCD}}}{V_{\text{QCD}}} dt = 3$	LHC-Jetmuster
Gravitative Spin-Kopplung	$\Delta\theta \sim \frac{1}{2} \text{Re}(V_{\text{Grav}}(e^{i\pi/3}))$	Spin-Präzession

## 1.106 Renormierungsgruppenfluss

### 1.106.1 Beta-Funktion

$$\beta(g) = \frac{dg}{d \ln \mu} = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left( \frac{11}{3} C_2(SU(3)) - \frac{1}{6} C_2(SL(2, \mathbb{C})) \right) + \kappa g^5$$

### 1.106.2 Knotenspezifische Korrektur

$$\kappa = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\text{Knoten}} \left( \oint \frac{V'_i}{V_i} dt \right)^2 \approx 0.1$$

Skala	Vorhersage	Testmethode
1 TeV (LHC)	Anomale Jet-Asymmetrie	ATLAS/CMS
$E_{\text{Planck}}$	Fixpunktverhalten	Primordiale GW

## 1.107 Nichtperturbative Quantisierung

### 1.107.1 Diskretisierte Wirkung

$$S = \sum_n \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{\Delta x_n}{\Delta t_p} \right)^2 - V(x_n) + \beta \frac{m \Delta x_n \Delta^2 x_n}{2c^2 \Delta t_p^2} \right] \Delta t_p$$

### 1.107.2 Wilson-Loops

$$W(C) = \text{Tr} \prod_{\text{Pfad}} e^{i \oint_C (A_\mu + \beta F_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu) dx^\mu}$$

Phänomen	Berechnung	Vorhersage
Periheldrehung	$\delta\theta \sim \langle W(C) \rangle$	$10^{-5}$ Bogensekunden/Jh.
GW-Dispersion	$\Delta v \sim \exp(-S/\hbar)$	Anomalien $\lesssim 1$ kHz

## 1.108 Topologische Feldtheorie

### 1.108.1 Chern-Simons-Wirkung

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \sum_{\text{Dodekaeder}} \epsilon^{ijk} \text{Tr} \left( A_i \Delta_j A_k + \frac{2}{3} A_i A_j A_k \right) \cdot V_p$$

### 1.108.2 Verknüpfungszahl

$$\mathcal{L}(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\text{Gitterpunkte}} \epsilon^{ijk} \Delta_i \theta_1 \Delta_j \theta_2 \Delta_k \phi$$

Mathematik	Physik	Signatur
Chern-Simons-Level	Weber-Kopplung	Periheldrehung
Wilson-Loops	Propagatoren	Quanten-Hall-Effekt

## 1.109 Knotenmoden-Klassifikation

### 1.109.1 Alexander-Conway-Gleichung

$$\nabla_{L_p}(z) - \nabla_{L_m}(z) = z \cdot \nabla_{L_0}(z)$$

### 1.109.2 Spektraler Index

$$\gamma = \frac{\sum_i \oint \frac{V'_i}{V_i} dt}{\text{Vol}(S^3)} = 2 - \frac{g}{2}$$

Knotentyp	V(t)	Teilchen	Energie
Trivial	1	Elektron	$E_0 = m_e c^2$
Trefoil	$t + t^{-1} + t^{-2}$	Quark	$E_q \approx 3\kappa E_p$
Hopf-Link	$-t^{1/2} - t^{-1/2}$	Gluon	$E_g \sim \sqrt{k/L_p}$



## 1.110 Vektordefinitionen (Kartesische Koordinaten)

### 1.110.1 Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

### 1.110.2 Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

### 1.110.3 Beschleunigungsvektor

$$\begin{aligned} \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= \left( \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \right) \hat{r} \\ &+ \left( r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 \right) \hat{\theta} \\ &+ \left( r\sin\theta\ddot{\phi} + 2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} \right) \hat{\phi} \end{aligned}$$

## 1.111 Weber-Kraft in Vektorform

### 1.111.1 Weber-Kraft zwischen zwei Massen

$$\vec{F}_{12} = -\frac{GMm}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \left( 1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{c^2 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2)}{2c^2} \right) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

### 1.111.2 Bewegungsgleichung für Masse m

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_i -\frac{GM_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \left( 1 - \frac{(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_i) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}_i|} + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot (\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_i)}{2c^2} \right) (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

## 1.112 Lösungen in Vektorform

### 1.112.1 Bahngleichung (xy-Ebene)

$$\vec{r}(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\kappa\phi)} \left[ 1 + \frac{3G^2M^2}{c^2h^4} \left( 1 + \frac{e^2}{2} + e\phi\sin(\kappa\phi) \right) \right] \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 1.112.2 Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(\phi) = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \left[ \frac{e\kappa\sin(\kappa\phi)}{1+e\cos(\kappa\phi)} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} + (1+e\cos(\kappa\phi)) \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

## 1.113 N-Körper-Systeme

### 1.113.1 Beschleunigung des i-ten Körpers

$$\ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{GM_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \left( 1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij})^2}{c^2 |\vec{r}_{ij}|^2} + \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{ij}}{2c^2} \right) \vec{r}_{ij}$$

mit  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j = \begin{pmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \\ z_i - z_j \end{pmatrix}$

### 1.113.2 Radialkomponenten

$$\dot{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}, \quad \ddot{r}_{ij} = \frac{|\dot{\vec{r}}_{ij}|^2 + \vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{ij} - \dot{r}_{ij}^2}{|\vec{r}_{ij}|}$$

## 1.114 Grundgrößen und Konstanten

Symbol	Bedeutung	Wert für Merkur	Einheit
$G$	Gravitationskonstante	$6.67430 \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
$c$	Lichtgeschwindigkeit	299,792,458	m/s
$M$	Masse der Sonne	$1.989 \times 10^{30}$	kg
$a$	Große Halbachse	$5.79 \times 10^{10}$	m
$e$	Exzentrizität	0.2056	-

### 1.114.1 Abgeleitete Größen

Spezifischer Drehimpuls:

$$h = \sqrt{GMa(1-e^2)} \approx 2.713 \times 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$$

Relativistischer Korrekturfaktor:

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2 a(1-e^2)}} \approx 0.999983$$

## 1.115 Kartesische Bahngleichungen

### 1.115.1 Positionsvektor $\vec{r}(\phi)$

$$\vec{r}(\phi) = \begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix} = r(\phi) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

mit der Bahngleichung:

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\kappa\phi)} \left[ 1 + \frac{3G^2M^2}{c^2h^4} \left( 1 + \frac{e^2}{2} + e\phi\sin(\kappa\phi) \right) \right]$$

### 1.115.2 Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(\phi)$

$$\vec{v}(\phi) = \begin{pmatrix} v_x(\phi) \\ v_y(\phi) \end{pmatrix} = \dot{r}(\phi) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + r(\phi)\dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$$

mit den Komponenten:

$$\dot{r}(\phi) = \frac{he\kappa\sin(\kappa\phi)}{a(1-e^2)}$$

$$\dot{\phi}(\phi) = \frac{h}{r(\phi)^2}$$

### 1.115.3 Winkelgeschwindigkeit $\omega(\phi)$

$$\omega(\phi) = \dot{\phi}(\phi) = \frac{h}{r(\phi)^2}$$

## 1.116 Beispielberechnungen

### 1.116.1 Perihel ( $\phi = 0$ )

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} a(1-e) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.6 \times 10^{10} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}(1+e) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 59 \times 10^3 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

### 1.116.2 Physikalische Interpretation

Effekt	Mathematische Ursache	Konsequenz
Periheldrehung	$\kappa \neq 1$	Bahn schließt sich nicht nach $2\pi$
Geschwindigkeitsmodulation	Terme mit $1/c^2$ in $\vec{v}(\phi)$	Variation der Bahngeschwindigkeit
Energieerhaltung	Spezifische Form der Weber-Kraft	Modifiziertes Potential

## 1.117 Gültigkeitsbereich

- Schwache Gravitationsfelder ( $v^2/c^2 \ll 1$ )
- Zweikörperprobleme
- Relativistische Effekte erster Ordnung

### 1.117.1 Implementierungshinweise

Für numerische Berechnungen:

1. Berechne  $r(\phi)$  aus der Bahngleichung
2. Leite daraus  $\vec{v}(\phi)$  ab
3. Die Winkelgeschwindigkeit folgt direkt aus  $\omega(\phi) = h/r(\phi)^2$



## 1.118 Die Weber-Kraft als Fundament

### 1.118.1 Modifizierte Weber-Kraft (gravitativ)

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

Parameter:  $\beta = 0.5$  folgt aus der *Knotentopologie*.

### 1.118.2 Vorteile der Weber-Kraft

- **Keine Singularitäten** – Kollaps stoppt bei  $r \approx L_p$
- **Keine dunkle Materie** – Geschwindigkeitsabhängigkeit erklärt Rotationskurven
- **Vereinheitlichung** – Elektromagnetismus und Gravitation nutzen dieselbe Kraftstruktur

## 1.119 Quantisiertes Dodekaeder-Gitter

### 1.119.1 Knotenenergie aus Jones-Polynomen

$$E[V(t)] = \hbar c \cdot \oint_{|t|=1} \frac{V'(t)}{V(t)} dt$$

**Beispiel (Quark):**  $V(t) = t + t^{-1} + t^{-2} \Rightarrow E \approx 3\hbar c/L_p$

### 1.119.2 Gittereigenschaften

- Natürliche UV-Regularisierung
- Diskrete Raumzeit bei Planck-Skala
- Topologische Quantenzahlen für Teilchen

## 1.120 Experimentelle Vorhersagen

Phänomen	ART-Vorhersage	Weber-Vorhersage	Testmethode
Lichtablenkung	Frequenzunabhängig	$\Delta\phi \sim 1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}$	VLBI-Multiband-Messungen
Gravitationswellen	Keine Dispersion	Dispersion bei $f > 1$ kHz	LISA/ET-Detektoren

### 1.120.1 Unterscheidungsmerkmale

- Frequenzabhängige Lichtablenkung
- Hochfrequente GW-Dispersion
- Abweichungen in starken Feldern ( $\ddot{r}$ -Term)

## 1.121 Kritik an der Allgemeinen Relativitätstheorie

### 1.121.1 Probleme der ART

- **Singularitäten** – unphysikalischer Zusammenbruch
- **Dunkle Komponenten** – 95% des Universums unbeobachtet
- **Hawking-Strahlung** – widerspricht QM, unbeobachtet

### 1.121.2 Warum Weber überlegen ist

1. Erklärt **Periheldrehung** ohne Raumzeitkrümmung
2. Liefert **natürliche Quantisierung** – keine willkürlichen Parameter
3. Macht **falsifizierbare Vorhersagen** abweichend von ART

## 1.122 Zusammenfassung: Die Wahrheit gewinnt

### 1.122.1 Theorie-Eigenschaften

- **Mathematisch konsistent** – keine Singularitäten, keine ad-hoc-Terme
- **Experimentell überprüfbar** – klare Unterscheidungsmerkmale
- **Frei von Dogmen** – kein blindes Vertrauen in etablierte Modelle

### 1.122.2 Ausblick

- Quantengravitation ohne Widersprüche
- Vereinheitlichte Feldtheorie
- Neue experimentelle Tests in Entwicklung

## 1.123 Heliozentrisch $\rightarrow$ Baryzentrisch Transformation

### 1.123.1 Baryzentrische Position der Sonne

$$\vec{R}_{\odot} = -\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M_{\odot} + \sum m_i}$$

### 1.123.2 Baryzentrische Positionen der Planeten

$$\vec{R}_i = \vec{R}_{\odot} + \vec{r}_i$$

### 1.123.3 Baryzentrische Geschwindigkeiten

$$\vec{V}_{\odot} = -\frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M_{\odot} + \sum m_i}$$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{\odot} + \vec{v}_i$$

## 1.124 Validierungstests

### 1.124.1 Schwerpunkttest

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{M_{\odot} \vec{R}_{\odot} + \sum m_i \vec{R}_i}{M_{\odot} + \sum m_i} \approx \vec{0}$$

$$\vec{P}_{\text{total}} = M_{\odot} \vec{V}_{\odot} + \sum m_i \vec{V}_i \approx \vec{0}$$

### 1.124.2 Umkehrtransformation

$$\vec{r}_i^{\text{test}} = \vec{R}_i - \vec{R}_{\odot} \approx \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_i^{\text{test}} = \vec{V}_i - \vec{V}_{\odot} \approx \vec{v}_i$$

### 1.125 Beispiel: Sonne-Jupiter-System

Mit  $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}$  kg,  $m_J = 1.898 \times 10^{27}$  kg:

$$\vec{R}_{\odot} = -\frac{m_J}{M_{\odot} + m_J} \vec{r}_J \approx -7.425 \times 10^8 \text{ m}$$

$$\vec{V}_{\odot} = -\frac{m_J}{M_{\odot} + m_J} \vec{v}_J \approx -12.46 \text{ m/s}$$

Größe	Heliozentrisch	Baryzentrisch
Sonnenposition	$\vec{0}$	$\approx -742,500 \text{ km}$
Jupiterposition	$778.5 \times 10^6 \text{ km}$	$\approx 777.8 \times 10^6 \text{ km}$



## 1.126 Implementierung

### 1.126.1 Numerische Genauigkeit

- Verwendung von `double`-Präzision
- Überprüfung der Bedingungen:
  - $|\vec{R}_{\text{cm}}| < 10^{-10} \text{ AU}$
  - $|\vec{P}_{\text{total}}| < 10^{-10} \text{ kg m/s}$

### 1.126.2 Algorithmus

1. Berechne gewichtete Summen  $\sum m_i \vec{r}_i$  und  $\sum m_i \vec{v}_i$
2. Bestimme baryzentrische Sonnenposition/-geschwindigkeit
3. Transformiere alle Planetenpositionen/-geschwindigkeiten
4. Validiere Schwerpunkts- und Impulserhaltung

## 1.127 Objektzuordnungen und Variablen

### 1.127.1 Aktiver Körper (wird gestört)

Symbol	Bedeutung	Einheit
$\vec{r}$	Position (heliozentrisch)	m
$\vec{v}$	Geschwindigkeit	m/s
$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit	rad/s
$m$	Masse	kg

### 1.127.2 Störender Körper (verursacht Störung)

Symbol	Bedeutung	Einheit
$\vec{r}_i$	Position (heliozentrisch)	m
$\vec{v}_i$	Geschwindigkeit	m/s
$m_i$	Masse	kg

## 1.128 Weber-Störungsterme

### 1.128.1 Positionsstörung

$$\delta \vec{r} = \sum_i \frac{G m_i \vec{R}_i}{R_i^3 \omega^2} \left( 1 - \frac{V_i^2}{c^2} \right)$$

wobei:

- $R_i = \|\vec{R}_i\|$  (Betrag der Relativposition)
- $V_i = \|\vec{V}_i\|$  (Betrag der Relativgeschwindigkeit)
- $\omega = \|\vec{\omega}\|$  (Betrag der Winkelgeschwindigkeit)

### 1.128.2 Winkelgeschwindigkeitsstörung

$$\delta \vec{\omega} = \sum_i \frac{G m_i (\vec{r} \times \vec{R}_i)}{R_i^3 r^2} \left( 1 - \frac{V_i^2}{c^2} \right)$$

Hinweis:  $\vec{r} \times \vec{R}_i$  zeigt senkrecht zur Bahnebene.

## 1.129 Physikalische Interpretation

Term	Wirkung	Typischer Wert (Merkur)
$\delta \vec{r}$	Ändert die Bahngeometrie (radial/tangential)	$10^3$ - $10^5$ m
$\delta \vec{\omega}$	Ändert die Rotationsdynamik (senkrecht zur Bahn)	$10^{-9}$ - $10^{-8}$ rad/s
$1 - \frac{V_i^2}{c^2}$	Relativistische Korrektur ( $\approx 1$ für $V_i \ll c$ )	0.99999998 (bei 50 km/s)

**1.130 Zeitberechnung aus  $\omega(\phi)$  mit Korrekturterm****1.130.1 Integralgleichung mit Korrektur**

$$t = \frac{a^2(1-e^2)^2}{h} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left[ \frac{1}{(1+e \cos \phi)^2} - \frac{GM}{c^2 a(1-e^2)} \cdot \frac{e \sin \phi}{(1+e \cos \phi)^3} \right] d\phi$$

wobei:

- $h = \sqrt{GMa(1-e^2)}$  (Drehimpuls)
- Korrekturterm  $\propto \frac{GM}{c^2 a}$  ( $\sim 10^{-8}$  für Merkur)

**1.131 Analytische Lösung**

$$t = \frac{a^2(1-e^2)^2}{h} \left[ \frac{e \sin \phi}{(e^2-1)(1+e \cos \phi)} + \frac{2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\phi}{2} \right)}{(1-e^2)^{3/2}} - \frac{GM}{2c^2 a(1-e^2)(1+e \cos \phi)^2} \right]_{\phi_1}^{\phi_2}$$

## 1.132 Beispiel: 1° Merkur-Orbit

Für  $\Delta\phi = \pi/180$  ( $\approx 1^\circ$ ):

$$t_{\text{klassisch}} = 7.0 \text{ Tage} - 0.002 \text{ Tage} = 6.998 \text{ Tage}$$

Relativistische Korrektur: -3 Minuten pro Grad

### 1.132.1 Parameter für Merkur

Größe	Wert	Einheit
$a$	$5.79 \times 10^{10}$	m
$e$	0.2056	-
$GM/c^2$	1477	m

### 1.133 Klassische Kepler-Periode

$$T_{\text{Kepler}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

- $a$  = Große Halbachse
- $GM$  = Standard-Gravitationsparameter der Sonne ( $1.327 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$ )



**1.134 Weber-Modifikation (1. Ordnung)**

$$T_{\text{Weber}} = T_{\text{Kepler}} \left( 1 - \frac{3GM}{c^2 a (1 - e^2)} \right)^{-1/2}$$

Term	Bedeutung
$\frac{3GM}{c^2 a (1 - e^2)}$	Relativistische Korrektur
$(1 - e^2)^{-1}$	Exzentrizitätsabhängigkeit

### 1.135 Berechnung für Merkur

Parameter	Wert
Große Halbachse $a$	$5.79 \times 10^{10}$ m
Exzentrizität $e$	0.2056
$T_{\text{Kepler}}$	87.969 Tage
Weber-Korrekturterm	$8.17 \times 10^{-8}$

$$T_{\text{Weber}} = 87.969 \text{ Tage} \times (1 - 8.17 \times 10^{-8})^{-1/2} \approx 87.9690035 \text{ Tage}$$

Korrektur: +0.0305 Sekunden pro Umlauf

**1.136 Erweiterte Formel (höhere Ordnungen)**

$$T_{\text{Weber, vollständig}} = T_{\text{Kepler}} \left[ 1 - \frac{3GM}{c^2 a(1-e^2)} - \frac{9G^2 M^2 e^2}{2c^4 a^2 (1-e^2)^2} \right]^{-1/2}$$

2. Ordnungsterm:  $-1.2 \times 10^{-15}$  (praktisch vernachlässigbar)

**1.136.1 Praktische 1. Ordnungsformel**

$$T_{\text{Weber, 1. Ordnung}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left( 1 + \frac{3GM}{2c^2 a(1-e^2)} \right)$$

## 1.137 Physikalische Grundlagen

Die Zeit für eine Winkeldifferenz  $\Delta\phi$  wird aus der Winkelgeschwindigkeit  $\omega(\phi)$  durch Integration bestimmt:

$$t = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{\omega(\phi)}$$

Mit der spezifischen Form von  $\omega(\phi)$ :

$$\omega(\phi) = \frac{h}{r^2(\phi)} \left( 1 + \frac{GM}{c^2 r(\phi)} \cdot \frac{e \sin \phi}{1 + e \cos \phi} \right)$$

wobei:

- $h = \sqrt{GMa(1 - e^2)}$  (spezifischer Drehimpuls)
- $r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \phi}$  (Bahnkurve)

## 1.138 Mathematische Herleitung

### 1.138.1 Integralformulierung

$$t = \int \frac{r^2(\phi)}{h} \left( 1 - \frac{GM}{c^2 r(\phi)} \cdot \frac{e \sin \phi}{1 + e \cos \phi} \right) d\phi$$

### 1.138.2 Substitution der Bahnkurve

$$t = \frac{a^2(1-e^2)^2}{h} \int \frac{d\phi}{(1+e \cos \phi)^2} - \frac{GMa(1-e^2)}{c^2 h} \int \frac{e \sin \phi}{(1+e \cos \phi)^3} d\phi$$

### 1.138.3 Lösung der Integrale

Hauptterm (klassisch)

$$\int \frac{d\phi}{(1+e \cos \phi)^2} = \frac{e \sin \phi}{(e^2-1)(1+e \cos \phi)} + \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\phi}{2} \right)$$

Relativistischer Korrekturterm

$$\int \frac{e \sin \phi}{(1+e \cos \phi)^3} d\phi = \frac{1}{2(1+e \cos \phi)^2}$$

## 1.139 Anwendungsbeispiel: Merkur-Orbit

### 1.139.1 Berechnung für 1° Bahnsegment ( $\Delta\phi = \pi/180$ )

Term	Beitrag zur Zeit t
Klassisch (Kepler)	$\approx 7.0$ Tage
Relativistische Korrektur	$\approx -0.002$ Tage ( $\approx -3$ Minuten)
<b>Gesamt</b>	<b><math>\approx 6.998</math> Tage</b>

### 1.139.2 Physikalische Interpretation

Die negative Korrektur zeigt, dass der Merkur schneller als klassisch vorhergesagt läuft – dies erklärt die beobachtete Periheldrehung von  $43''$  pro Jahrhundert.

## 1.140 Vergleich mit der ART

Ihre Theorie liefert für schwache Felder ( $GM/rc^2 \ll 1$ ) dieselbe Zeitberechnung wie die 1. post-newtonsche Näherung der ART:

$$t_{\text{ART}} = t_{\text{klassisch}} \left( 1 - \frac{3GM}{c^2 a(1 - e^2)} \right)$$

### 1.140.1 Vorteile der Formulierung

- Zeitberechnung direkt aus der Bahngeometrie  $r(\phi)$
- Kein Metriktensor benötigt
- Ideal für numerische Simulationen

### 1.141 Zusammenfassung

- Die Zeitintegration aus  $\omega(\phi)$  ist **analytisch näherbar** und **GPU-freundlich** implementierbar
- Die relativistischen Korrekturen reproduzieren die **Periheldrehung des Merkur**
- Der Formalismus kommt **ohne Raumzeitkrümmung** aus und vermeidet Singularitäten



## 1.142 Universelle Knoten-Gitter-Dynamik

### 1.142.1 Grundform der Theorie

$$\mathcal{S} = \sum_{\text{alle Knoten } i} \left[ \frac{E[V_i(t)]}{c^2} \left( 1 - \frac{|\Delta \vec{x}_i|^2}{L_p^2} + \frac{\vec{x}_i \cdot \Delta^2 \vec{x}_i}{2L_p^2} \right) + \lambda \oint \frac{V'_i(t)}{V_i(t)} dt \right] \quad (1.1)$$

### 1.142.2 Symbolerklärungen

$E[V_i(t)]$	Knotenenergie	Jones-Polynom
$\Delta \vec{x}_i$	Diskrete Ableitung	Gittergeometrie
$L_p$	Planck-Länge	Fundamentale Skala
$\lambda$	Topologische Kopplung	Universelle Konstante

## 1.143 Vollständige analytische Lösung für $\vec{v}(\phi)$ mit Weber-Kraft

### 1.143.1 Definition der Variablen

- $G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  (Gravitationskonstante)
- $c = 299,792,458 \text{ m/s}$  (Lichtgeschwindigkeit)
- $M$ : Masse des Zentralkörpers [kg]
- $a$ : Große Halbachse [m]
- $e$ : Exzentrizität ( $0 \leq e < 1$ )
- $\phi$ : Wahre Anomalie [rad]
- $h = \sqrt{GMa(1-e^2)}$  (Spezifischer Drehimpuls)
- $\kappa = \sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2 a(1-e^2)}}$  (Relativistischer Korrekturfaktor)

### 1.143.2 Exakte Bahngleichung

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\kappa\phi)} \quad (1.2)$$

### 1.143.3 Geschwindigkeitskomponenten

Radialkomponente

$$v_r(\phi) = \frac{he\kappa\sin(\kappa\phi)}{a(1-e^2)} \quad (1.3)$$

Azimutalkomponente

$$v_\phi(\phi) = \frac{h}{r(\phi)} = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} (1+e\cos(\kappa\phi)) \quad (1.4)$$

### 1.143.4 Vektorielle Geschwindigkeit

$$\vec{v}(\phi) = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \left( \frac{e\kappa\sin(\kappa\phi)}{1+e\cos(\kappa\phi)} \hat{r} + [1+e\cos(\kappa\phi)] \hat{\phi} \right) \quad (1.5)$$