Mein Dokument

Dein Name

29. Juni 2025

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Grundgleichungen der Weber-Kraft

$$F = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.2 Klassische Lösung (0. Ordnung)

Für $c \to \infty$ ergibt sich die Kepler-Bahn:

$$r_0(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$$

$$a_0(\varphi) = -\frac{GM}{r_0^2(\varphi)}$$

1.3 Relativistische Korrektur (1. Ordnung)

Störungsansatz für die Beschleunigung:

$$a(\varphi) = a_0(\varphi) + \frac{GM}{c^2} a_1(\varphi) + \mathcal{O}(1/c^4)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert den Korrekturterm:

$$a_1(\varphi) = \frac{GM}{r_0^2(\varphi)} \left(\frac{3h^2}{r_0^2(\varphi)} - \frac{h^2}{2GMr_0(\varphi)} \left(\frac{dr_0}{d\varphi} \right)^2 \right)$$

1.4 Beschleunigung bis zur 1. Ordnung

$$a(\varphi) = -\frac{GM}{r_0^2(\varphi)}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{3h^2}{r_0^2(\varphi)} - \frac{h^2}{2GMr_0(\varphi)}\left(\frac{dr_0}{d\varphi}\right)^2\right)\right]$$

Hinweis: $r_0(\varphi)$ ist die klassische Kepler-Lösung, h der spezifische Drehimpuls.

1.5 Explizite Form mit Bahnelementen

Einsetzen von $r_0(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$:

$$
\begin{aligned}
a(\varphi) = &-\frac{GM(1+e\cos\varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2}\left[1-\frac{3h^2(1+e\cos\varphi)^2}{c^2a^2(1-e^2)^2}\right.\\
&\left.+\frac{h^2e^2\sin^2\varphi}{2c^2GMa^3(1-e^2)^3}(1+e\cos\varphi)^3\right]
\end{aligned}
$$

1.6 Theoretische Grundlage

$$r(\phi) = r_{\mathrm{ART}}(\phi) + \delta r(\phi)$$

Hier ist $r_{\mathrm{ART}}(\phi)$ die analytische Näherung (ART-genau) und $\delta r(\phi)$ die numerisch berechnete Korrektur.

1.7 Schrittweitensteuerung

Die Schrittweite $\Delta\phi$ wird dynamisch aus den analytischen Ableitungen bestimmt:

$$\Delta\phi = \min\left(\Delta\phi_{\max}, \frac{\epsilon}{|w(\phi)| + |v(\phi)|}\right)$$

mit $v(\phi) = \frac{dr}{d\phi}$ und $w(\phi) = \frac{d^2r}{d\phi^2}$ aus der ART-Näherung.

1.8 Numerische Korrektur

In jedem Schritt wird nur die Abweichung von der ART-Näherung numerisch integriert:

$$\delta r(\phi + \Delta\phi) = \delta r(\phi) + \text{Numerische Integration von } (\text{DGL} - \text{ART-Ableitung})$$

1.9 Gesamtlösung

Die finale Lösung kombiniert beide Anteile:

$$r(\phi + \Delta\phi) = r_{\mathrm{ART}}(\phi + \Delta\phi) + \delta r(\phi + \Delta\phi)$$

1.10 Kartesische Koordinaten

$$\vec{r}(\phi) = \begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix}$$

$$r(\phi) = \sqrt{x(\phi)^2 + y(\phi)^2}$$

$$\omega(\phi) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{h}{r(\phi)^2}$$

1.11 Weber-Kraft in kartesischer Form

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}\left(1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2} + \frac{\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}}}{2c^2}\right)$$

1.12 Zeitliche Ableitungen

$$\dot{\vec{r}} = \omega \frac{d\vec{r}}{d\phi} = \omega \vec{r}'$$

$$\ddot{\vec{r}} = \omega^2 \vec{r}'' + \omega \frac{d\omega}{d\phi} \vec{r}'$$

1.13 Skalarprodukte

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \omega^2(x'^2 + y'^2)$$

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = \omega^2(xx'' + yy'') + \omega \frac{d\omega}{d\phi}(xx' + yy')$$

1.14 Differentialgleichung für $x(\phi)$

$$x'' = \frac{1}{1 + \frac{GM}{2c^2 r}} \left[\frac{2(x'^2 + y'^2)}{r^2} x - \frac{GM}{\omega^2 r^3} x \left(1 - \frac{\omega^2 (x'^2 + y'^2)}{c^2} \right) \right]$$

1.15 Differentialgleichung für $y(\phi)$

$$y'' = \frac{1}{1+\frac{GM}{2c^2 r}}\left[\frac{2(x'^2+y'^2)}{r^2}y - \frac{GM}{\omega^2 r^3}y\left(1-\frac{\omega^2(x'^2+y'^2)}{c^2}\right)\right]$$

1.16 Differentialgleichung für $\omega(\phi)$

$$\frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{2h}{r^3}(xx' + yy')$$

1.17 Zusammenfassung des DGL-Systems

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{Y}}{d\phi} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \\ \omega' \end{pmatrix}$$

1.18 Koordinatensystem und Basisvektoren

$$\hat{e}_r = \cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{j}$$
$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}$$
$$\vec{r} = r\hat{e}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi$$

1.19 Post-Newtonische Kraft in vektorieller Form

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2} + \frac{(\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}})}{2c^2}\right)\hat{e}_r$$

1.20 Geschwindigkeitsquadrat

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

1.21 Beschleunigungsskalarprodukt

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = r\ddot{r} - r^2\dot{\phi}^2$$

1.22 Bewegungsgleichung in vektorieller Form

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r} - r^2\dot{\phi}^2}{2c^2}\right)\hat{e}_r$$

1.23 Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\phi^2} = f_x\left(x, y, \frac{dx}{d\phi}, \frac{dy}{d\phi}\right) \\ \frac{d^2y}{d\phi^2} = f_y\left(x, y, \frac{dx}{d\phi}, \frac{dy}{d\phi}\right) \end{cases}$$

1.24 Explizite DGL für x-Komponente

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} = \frac{\frac{GMm^2}{L^2}\frac{x}{r^3} - \frac{x}{r^2} - \frac{GM}{c^2}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{dx}{d\phi}\frac{dy}{d\phi}(y\frac{dx}{d\phi} - x\frac{dy}{d\phi}) + \frac{x}{2r^4}\left((\frac{dx}{d\phi})^2 + (\frac{dy}{d\phi})^2\right)\right)\right]}{1 - \frac{GM}{2c^2r}}$$

1.25 Explizite DGL für y-Komponente

$$\frac{d^2y}{d\phi^2} = \frac{\frac{GMm^2}{L^2}\frac{y}{r^3} - \frac{y}{r^2} - \frac{GM}{c^2}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{dx}{d\phi}\frac{dy}{d\phi}(x\frac{dy}{d\phi} - y\frac{dx}{d\phi}) + \frac{y}{2r^4}\left((\frac{dx}{d\phi})^2 + (\frac{dy}{d\phi})^2\right)\right)\right]}{1 - \frac{GM}{2c^2r}}$$

1.26 Transformiertes System 1. Ordnung

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\phi} = v_x \\ \frac{dy}{d\phi} = v_y \\ \frac{dv_x}{d\phi} = f_x(x, y, v_x, v_y) \\ \frac{dv_y}{d\phi} = f_y(x, y, v_x, v_y) \end{cases}$$

1.27 Klassische Weber-Kraft (Elektrodynamik)

$$F_{Weber}^{EM} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{2r\ddot{r}}{c^2}\right)\hat{r}$$

1.28 Quantisierte Weber-Kraft (Gittermodell)

$$F_{Weber}^{QED} = \frac{V_1(t)V_2(t)}{4\pi\epsilon_0(nL_p)^2}\left(1 - \frac{(\Delta L_p/\Delta t_p)^2}{c^2} + \frac{2L_p\Delta^2 L_p}{c^2\Delta t_p^2}\right)\hat{r}$$

1.29 Elektrisches Feld als Deformationsgradient

$$\vec{E} = \frac{\Delta(\text{Zellvolumen})}{L_p^3} \cdot \hat{r}$$

1.30 Universelle Weber-Kraft

$$F_{universal} = \frac{K \cdot V_1(t)V_2(t)}{(nL_p)^2} \left(1 - \frac{v_{eff}^2}{c^2} + \frac{\beta L_p a_{eff}}{c^2}\right) \hat{r}$$

1.31 Energie-Impuls-Beziehung für Photonen

$$E = \hbar\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

1.32 Webers Gravitationskraft

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \left[1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{r \cdot a}{c^2}\right]$$

1.33 Theorievergleich: ART vs. Weber

Aspekt	**ART**	**Weber**
Raummodell	Raumzeitkrümmung	Direkte Teilchenwechselwirkung
Gravitationswellen	Vorhanden	Nicht existent
Schwarze Löcher	Singularitäten	Keine Singularitäten
Galaxienrotation	Dunkle Materie benötigt	Natürliche Erklärung
Quantenkompatibilität	Problemhaft	Einfacher quantisierbar

1.34 Vorteile der Weber-Theorie

- Erklärt Galaxienrotation ohne Dunkle Materie
- Vermeidet Singularitäten
- Leichter mit Quantenphysik vereinbar
- Direkte Kräfte zwischen Teilchen (keine Raumkrümmung)

1.35 Historische Dominanz der ART

- Frühe experimentelle Bestätigung (1919)
- Einsteins Bekanntheit
- Forschungsinfrastruktur auf ART ausgerichtet
- Weber-Theorie als ältmodischäbgetan

1.36 Quantengravitation mit Weber

- Keine Hawking-Strahlung vorhergesagt
- Neue Gravitationssignal-Typen möglich
- Direkte Quantisierung der Kraftgleichung
- Kompatibel mit Quantenfeldtheorien

1.37 Modifizierte Weber-Kraft (gravitativ)

$$F_{Weber}^{Grav} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)\hat{r}$$

1.38 Periheldrehung des Merkur

$$\Delta\theta = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}$$

1.39 Allgemeine β-Formel

$$\beta = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\delta} \cdot \left(1 - \frac{mc^2}{E}\right)$$

1.40 Universelle Weber-Kraft für Massen

$$F = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.41 Gravitationswellengleichung

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\beta \cdot \partial_t^2 Q_{\mu\nu}\right)$$

1.42 Quantisierte Weber-Kraft (QED)

$$F_{Weber}^{QED} = \frac{V_1(t)V_2(t)}{4\pi\epsilon_0(nL_p)^2}\left(1 - \frac{(\Delta L_p/\Delta t_p)^2}{c^2} + \frac{2L_p\Delta^2 L_p}{c^2\Delta t_p^2}\right)\hat{r}$$

1.43 Frequenzabhängige Lichtablenkung

$$\Delta\phi \sim \frac{4GM}{c^2 b}\left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)$$

1.44 Hamiltonian des Dodekaeder-Gitters

$$\mathcal{H} = \sum_{\text{Kanten}} \epsilon(V_i(t) - V_j(t))^2$$

1.45 Modifizierte Weber-Kraft (gravitativ)

$$F_{Weber}^{Grav} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)\hat{r}$$

1.46 Periheldrehung des Merkur

$$\Delta\theta = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}$$

1.47 Gravitative Rotverschiebung

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 r} + \frac{v_r^2}{2c^2}$$

1.48 Shapiro-Laufzeitverzögerung

$$\Delta t \approx \frac{4GM}{c^3} \ln\left(\frac{4r_1 r_2}{b^2}\right)$$

1.49 Gravitationswellen-Quadrupolformel

$$F_{\mathrm{GW}} = -\frac{G}{c^4} \cdot \frac{\partial^3 Q_{ij}}{\partial t^3} \cdot \frac{x^i x^j}{r^3}$$

1.50 Quantisierte Raumzeit-Parameter

$$L_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.616 \times 10^{-35}\mathrm{m}$$

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.391 \times 10^{-44}\mathrm{s}$$

1.51 Weber-Kraft im Dreikörpersystem

$$\mathbf{F}_1 = -Gm_1 \left[\frac{m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} + \frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{2c^2} \right) + \frac{m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \left(1 - \frac{\dot{r}_{13}^2}{c^2} + \frac{r_{13}\ddot{r}_{13}}{2c^2} \right) \right]$$

1.52 Modifizierte Weber-Kraft

$$F_{Weber} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.53 Predictor-Corrector-Verfahren

- Berechne aktuelle Beschleunigung $a = F_{weber}(r, v)/m$
- Vorhersage neue Geschwindigkeit $v_{neu} = v + a \cdot dt$
- Vorhersage neue Position $r_{neu} = r + v \cdot dt + 0.5 \cdot a \cdot dt^2$
- Neuberechnung $a_{neu} = F_{weber}(r_{neu}, v_{neu})/m$
- Korrektur $v = v + 0.5 \cdot (a + a_{neu}) \cdot dt$
- Update $r = r + v \cdot dt + 0.5 \cdot a_{neu} \cdot dt^2$

1.54 Symplektische Integration

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + p_n \cdot dt \\ p_{n+1} = p_n - \nabla V(q_{n+1}) \cdot dt \end{cases}$$

1.55 Gitter-QCD-Ansatz

$$S = \sum_{x,\mu<\nu} \mathrm{Re}\ \mathrm{Tr}(1 - U_{\mu\nu}(x)) + \sum_{x} \bar{\psi}(x) D \psi(x)$$

1.56 N-Körper-Weber-Kraft

$$\mathbf{F}_i = -G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2} + \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{2c^2} \right)$$

1.57 Weber-Gravitationskraft

$$F = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.58 Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.59 Drehimpulserhaltung

$$h = r^2\dot{\phi} = \text{konstant}$$

$$\dot{\phi} = \frac{h}{r^2}$$

1.60 Modifizierte Radialgleichung

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 - \frac{GM}{2c^2h^2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$$

1.61 Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\phi}(\varphi) = \frac{h}{r(\varphi)^2}$$

1.62 Näherungslösung für Merkurbahn

$$r(\varphi) \approx \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}\left[1+\frac{3GM}{c^2a(1-e^2)}\varphi e\sin\varphi\right]$$

$$\dot{\phi}(\varphi) \approx \frac{h(1+e\cos\varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2}\left[1-\frac{6GM}{c^2a(1-e^2)}\varphi e\sin\varphi\right]$$

1.63 Die Kerninnovation

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{\text{Newton}}\left(1 - \frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{r}}}{2c^2}\right)$$

1.64 Vollständige Impulsdynamik

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)}\left[e\sin\phi(1+e\cos\phi)\hat{r} + (1+e\cos\phi)\hat{\phi}\right]$$

1.65 Impulsverteilungsmechanismus

$$\Delta \mathbf{p}_i = -\frac{m_i}{\sum_{j \neq k} m_j} \mathbf{K}_{ik} \Delta \mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2}$$

1.66 Iterationsschema der Impulsverteilung

$$\Delta\mathbf{p}_i^{(n+1)} = \sum_{j\neq i} \mathcal{K}_{ij}\Delta\mathbf{p}_j^{(n)}$$

$$\mathcal{K}_{ij} = -\frac{m_i}{\sum_{k\neq j} m_k}\mathbf{K}_{ij}$$

1.67 Gesamtkopplungsmatrix

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_{12} & \cdots & \mathcal{K}_{1N} \\ \mathcal{K}_{21} & 0 & \cdots & \mathcal{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}_{N1} & \mathcal{K}_{N2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\vec{P} = (I - \mathcal{K})^{-1}\Delta\vec{P}^{(0)}$$

1.68 Konvergenzkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{K}^n\| \cdot \|\Delta\vec{P}^{(0)}\| < \epsilon$$

1.69 Erhaltungssicherung

$$\Delta\mathbf{p}_k \leftarrow \Delta\mathbf{p}_k - \sum_{i\neq k} \Delta\mathbf{p}_i \quad \text{(Gesamtimpuls)}$$

$$\Delta\mathbf{p}_i \leftarrow \Delta\mathbf{p}_i - \frac{\Delta E}{\sum m_i v_i^2} m_i v_i \quad \text{(Energie)}$$

$$\Delta\mathbf{p}_i \leftarrow \Delta\mathbf{p}_i - \frac{\Delta\mathbf{L} \times \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^2} \quad \text{(Drehimpuls)}$$

1.70 Modifizierte Kraftgleichung

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{\text{Newton}} \left(1 - \frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2} \right)$$

- **Term 1:** $-\mathbf{F}_{\text{Newton}}$ (Klassische Gravitationskraft)
- **Term 2:** $-\frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2}$ (Relativistische Geschwindigkeitskorrektur)
- **Term 3:** $+\frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2}$ (Beschleunigungskopplung)

1.71 Impulsgleichung für modifizierte Keplerbahn

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left[e \sin\phi (1 + e\cos\phi)\hat{r} + (1 + e\cos\phi)\hat{\phi} \right]$$

1.72 Vollständige Impulsverteilung

1.72.1 Grundprinzip

$$\Delta \mathbf{p}_i = -\frac{m_i}{\sum_{j \neq k} m_j} \mathbf{K}_{ik} \Delta \mathbf{p}_k$$

- m_i: Masse des Körpers i
- $\sum_{j \neq k} m_j$: Gesamtmasse aller anderen Körper
- $\mathbf{K}_{ik}$: Kopplungsmatrix

1.72.2 Kopplungsmatrix

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2}, \quad \|\mathbf{K}_{ik}\| = 1$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$$

1.72.3 Erhaltungssätze

1. **Impulserhaltung:**

$$\sum_i \Delta \mathbf{p}_i + \Delta \mathbf{p}_k = 0$$

2. **Schwerpunkterhaltung:**

$$\sum_i m_i \Delta \mathbf{r}_i = 0$$

3. **Drehimpulserhaltung:**

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_k \times \Delta \mathbf{p}_k = 0$$

1.72.4 Spezialfall: Zwei Körper

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{K}_{12} \Delta \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \otimes (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}$$

1.73 Ausgangsgleichungen

1.73.1 Keplerbahn

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi}$$

1.73.2 Drehimpulserhaltung

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr(\phi)^2}$$

1.74 Geschwindigkeitskomponenten

1.74.1 Radialgeschwindigkeit

$$\dot{r} = \frac{Le\sin\phi}{ma(1-e^2)}(1+e\cos\phi)$$

1.74.2 Azimutalgeschwindigkeit

$$r\dot{\phi} = \frac{L(1+e\cos\phi)}{ma(1-e^2)}$$

1.75 Impulsberechnung

1.75.1 Impuls in Polarkoordinaten

$$\mathbf{p} = m\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\right)$$

1.75.2 Endergebnis

$$\boxed{\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)}\left[e\sin\phi(1+e\cos\phi)\hat{r} + (1+e\cos\phi)\hat{\phi}\right]}$$

1.75.3 Betrag des Impulses

$$|\mathbf{p}(\phi)| = \frac{L(1+e\cos\phi)}{a(1-e^2)}\sqrt{1+e^2\sin^2\phi}$$

1.76 Spezialfälle

1.76.1 Kreisbahn (e = 0)

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a}\hat{\phi}, \quad |\mathbf{p}| = \frac{L}{a}$$

1.76.2 Perihel ($\phi = 0$)

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a(1-e)}\hat{\phi}$$

1.76.3 Aphel ($\phi = \pi$)

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a(1+e)}\hat{\phi}$$

1.77 Physikalische Interpretation

- Azimutaler Impuls p_ϕ ist maximal im Perihel und minimal im Aphel
- Radialer Impuls p_r verschwindet in Perihel und Aphel
- Drehimpuls L bleibt erhalten (Zentralkraft)
- Winkelabhängigkeit zeigt Modulation durch Exzentrizität

1.78 Grundgleichungen und Definitionen

1.78.1 Bahngleichung

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi}$$

- a = große Halbachse
- e = numerische Exzentrizität
- ϕ = wahre Anomalie

1.78.2 Drehimpulserhaltung

$$L = mr^2\dot{\phi} = \text{konstant}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$$

$$L^2 = GMm^2a(1-e^2)$$

1.79 Berechnung der Geschwindigkeiten

1.79.1 Radialgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}\dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} &= \frac{a(1-e^2)e\sin\phi}{(1+e\cos\phi)^2} \cdot \frac{L}{mr^2} \\ &= \frac{eL\sin\phi}{ma(1-e^2)}\end{aligned}$$

1.79.2 Azimutalgeschwindigkeit

$$r\dot{\phi} = \frac{L}{mr} = \frac{L(1+e\cos\phi)}{ma(1-e^2)}$$

1.80 Berechnung des Impulses

1.80.1 Impulsdefinition

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi})$$

1.80.2 Radialkomponente

$$p_r = m\dot{r} = \frac{eL\sin\phi}{a(1-e^2)}$$
$$= \frac{em\sqrt{GM}\sin\phi}{\sqrt{a(1-e^2)}}$$

1.80.3 Azimutalkomponente

$$p_\phi = mr\dot{\phi} = \frac{L}{r}$$
$$= \frac{m\sqrt{GM}(1+e\cos\phi)}{\sqrt{a(1-e^2)}}$$

1.81 Endergebnis

$$\boxed{\mathbf{p}(\phi) = \frac{em\sqrt{GM}\sin\phi}{\sqrt{a(1-e^2)}}\hat{r} + \frac{m\sqrt{GM}(1+e\cos\phi)}{\sqrt{a(1-e^2)}}\hat{\phi}}$$

Alternativ:

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{m\sqrt{GM}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\left(e\sin\phi\hat{r} + (1+e\cos\phi)\hat{\phi}\right)$$

1.82 Zusätzliche Bemerkungen

- Für $e = 0$ (Kreisbahn):
$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{m\sqrt{GM}}{\sqrt{a}}\hat{\phi}$$

- Betrag des Impulses:
$$|\mathbf{p}(\phi)| = \frac{m\sqrt{GM}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\sqrt{e^2\sin^2\phi + (1 + e\cos\phi)^2}$$

1.83 Eingangsparameter

1.83.1 Kraftgleichung (radial)

$$F = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.83.2 Keplerbahn $r(\phi)$

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi}$$

1.83.3 Drehimpulserhaltung

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}, \quad L = \text{const.}$$

1.84 Berechnung der Zeitableitungen

1.84.1 Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} = \left(\frac{a(1-e^2)e\sin\phi}{(1+e\cos\phi)^2}\right)\left(\frac{L}{mr^2}\right)$$

Vereinfacht:

$$\dot{r} = \frac{Le\sin\phi}{ma(1-e^2)}(1+e\cos\phi)$$

1.84.2 Radialbeschleunigung $\ddot{r}$

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\phi}(\dot{r}) \cdot \dot{\phi}$$

Mit ausführlicher Ableitung:

$$\ddot{r} = \frac{L^2 e(1+e\cos\phi)^3}{m^2 a^3 (1-e^2)^3}\,(\cos\phi + e)$$

1.85 Einsetzen in die Kraftgleichung

$$F = -\frac{GMm(1+e\cos\phi)^2}{a^2(1-e^2)^2}\left(1 - \frac{L^2e^2\sin^2\phi(1+e\cos\phi)^2}{c^2m^2a^2(1-e^2)^2} + \frac{L^2e(1+e\cos\phi)^4(\cos\phi+e)}{2c^2m^2a^3(1-e^2)^3}\right)$$

1.86 Berechnung des Impulses $\mathbf{p}(t)$

Der Impuls in Polarkoordinaten:

$$\mathbf{p}(t) = m\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\right)$$

Einsetzen der berechneten Größen:

$$\mathbf{p}(t) = \frac{L}{a(1-e^2)}\left(e\sin\phi(1+e\cos\phi)\hat{r} + (1+e\cos\phi)\hat{\phi}\right)$$

1.86.1 Endergebnis

$$\boxed{\mathbf{p}(t) = \frac{L}{a(1-e^2)}\left[e\sin\phi(t)(1+e\cos\phi(t))\hat{r} + (1+e\cos\phi(t))\hat{\phi}\right]}$$

mit $\phi(t)$ bestimmt durch:

$$\dot{\phi} = \frac{L(1+e\cos\phi)^2}{ma^2(1-e^2)^2}$$

1.87 Interpretation und Anmerkungen

- Der Impuls hängt wesentlich vom zeitlichen Verlauf $\phi(t)$ ab
- Für Kreisbahnen ($e = 0$) vereinfacht sich die Lösung zu $\mathbf{p}(t) = \frac{L}{a}\hat{\phi}$
- Die Zeitabhängigkeit von $\phi(t)$ ergibt sich aus einer nichtlinearen Differentialgleichung
- Für exakte Lösungen sind numerische Methoden erforderlich
- Die Korrekturterme in der Kraftgleichung führen zu Abweichungen von der klassischen Keplerlösung

1.88 Grundformel

Die Periheldrehung pro Umlauf ergibt sich aus:

$$\Delta\phi = 2\pi\left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)$$

mit dem relativistischen Korrekturfaktor:

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2a(1-e^2)}}$$

1.89 Eingangswerte für Merkur

Größe	**Symbol**	**Wert**
Große Halbachse	a	5.79×10^{10} m
Exzentrizität	e	0.2056
Sonnennasse	M	1.989×10^{30} kg

1.90 Berechnung von κ

1.90.1 Schritt 1: Nenner $c^2a(1-e^2)$

$$c^2 = (2.99792458 \times 10^8)^2 = 8.987551787 \times 10^{16}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$$

$$a(1-e^2) = 5.545 \times 10^{10}\,\mathrm{m}$$

$$c^2a(1-e^2) = 4.9826 \times 10^{27}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$$

1.90.2 Schritt 2: Zähler $6GM$

$$6GM = 7.964 \times 10^{20}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$$

1.90.3 Schritt 3: Berechnung von κ

$$\frac{6GM}{c^2a(1-e^2)} = 1.5983 \times 10^{-7}$$

$$\kappa = \sqrt{1 - 1.5983 \times 10^{-7}} = 0.999999920085$$

1.91 Periheldrehung pro Umlauf

$$\frac{1}{\kappa} = 1.000000079915$$

$$\Delta\phi = 2\pi \times 7.9915 \times 10^{-8} = 5.021 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad}$$

Umrechnung in Bogensekunden:

$$\Delta\phi = 0.10356\,\text{"}/\mathrm{Umlauf}$$

1.92 Periheldrehung pro Jahrhundert

Merkur vollendet 415 Umläufe pro Jahrhundert:

$$\Delta\phi_{\text{Jahrhundert}} = 0.10356 \times 415 = 42.98\,''/\text{Jahrhundert}$$

1.93 Vergleich mit Beobachtung

Theorie	**Periheldrehung ("/Jh.)**
Weber-Gravitation (exakt)	42.98
Allgemeine Relativitätstheorie	43.01
Beobachtung (Merkur)	43.0 ± 0.5

1.94 Zusammenfassung

Die Weber-Gravitation liefert:

$$\boxed{\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2 a(1-e^2)}}} - 1 \right)}$$

Für Merkur:

$$\boxed{\Delta\phi_{\text{Jahrhundert}} = 42.98\,\text{Bogensekunden}}$$

Dies stimmt exakt mit den Beobachtungen und der Allgemeinen Relativitätstheorie überein.

1.95 Grundgleichung der Winkelgeschwindigkeit

1.95.1 Modifizierte Winkelgeschwindigkeit nach Weber

$$\dot{\phi}(\varphi) = \frac{h}{r^2(\varphi)} \left(1 + \frac{3GM}{c^2 r(\varphi)}\right)$$

wobei:

- $h = \sqrt{GMa(1 - e^2)}$ (spezifischer Drehimpuls)
- $r(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$ (Bahnradius)
- $a =$ große Halbachse, $e =$ Exzentrizität

1.96 Winkeländerung für T = 1 Sekunde

1.96.1 Infinitesimale Änderung

Für kleine Zeitintervalle $T = 1\,\mathrm{s}$:

$$\Delta\phi \approx \dot{\phi}(\varphi_0) \cdot T$$

Explizit:

$$\Delta\phi = \left(\frac{h}{r^2(\varphi_0)} + \frac{3GMh}{c^2 r^3(\varphi_0)} \right) \cdot T$$

1.96.2 Ergebnis für $\Delta\phi$ (1 Sekunde)

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{h}{r^2(\varphi_0)} \cdot 1\,\mathrm{s} + \frac{3GMh}{c^2 r^3(\varphi_0)} \cdot 1\,\mathrm{s}}$$

Der zweite Term ist die **Weber-Korrektur**, die langfristig zur Periheldrehung führt.

1.97 Beispiel: Merkur im Perihel ($\varphi_0 = 0$)

Parameter	**Wert**
Große Halbachse a	5.79×10^{10} m
Exzentrizität e	0.2056
Radius im Perihel $r(0)$	4.60×10^{10} m

1.97.1 Berechnung

Kepler-Term:

$$\frac{h}{r^2(0)} \approx 1.236 \times 10^{-6}\,\mathrm{rad/s}$$

Weber-Korrektur:

$$\frac{3GMh}{c^2 r^3(0)} \approx 1.02 \times 10^{-13}\,\mathrm{rad/s}$$

1.97.2 $\Delta\phi$ nach 1 Sekunde

$$\Delta\phi \approx 1.236 \times 10^{-6}\,\mathrm{rad} + 1.02 \times 10^{-13}\,\mathrm{rad}$$

Die Weber-Korrektur ist winzig, aber kumuliert über 415 Umläufe (100 Jahre) ergibt sich die beobachtete Periheldrehung von $43''$.

1.98 Kumulative Periheldrehung

Bei kontinuierlicher Anwendung über $N = 415$ Umläufe (100 Jahre):

$$\Delta\phi_{\text{ges}} = N \cdot \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)} \approx 43''$$

Dies bestätigt die Konsistenz der Weber-Gravitation mit der beobachteten Periheldrehung.

1.99 Grundprinzip

Die Bewegung von Planeten wird über den Winkel ϕ parametrisiert. Die Zeit wird sekundär berechnet.

1.99.1 DGL-System

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{v_r}{\omega} \\ \dfrac{dv_r}{d\phi} = \dfrac{F_r/m - r\omega^2}{\omega} \\ \dfrac{d\omega}{d\phi} = -\dfrac{2v_r}{r} + \dfrac{F_\phi}{r\omega} \end{cases}$$

1.99.2 Zeitberechnung

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{1}{\omega}$$

1.100 Physikalische Bedeutung der Gleichungen

1.100.1 Radialposition (r)

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{v_r}{\omega}$$

Beschreibt die Änderung des Abstands vom Zentralkörper mit dem Winkel.

1.100.2 Radialgeschwindigkeit (v_r)

$$\frac{dv_r}{d\phi} = \frac{F_r/m - r\omega^2}{\omega}$$

Kombiniert radiale Kraftkomponente mit Zentrifugalbeschleunigung.

1.100.3 Winkelgeschwindigkeit (ω)

$$\frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{2v_r}{r} + \frac{F_\phi}{r\omega}$$

Zeigt die Änderung der Winkelgeschwindigkeit durch Tangentialkräfte.

1.101 Numerische Lösung

1.101.1 Schritt 1: Initialisierung

Startwerte für $r(\phi_0)$, $v_r(\phi_0)$, $\omega(\phi_0)$ festlegen.

1.101.2 Schritt 2: Kraftberechnung

Für jeden Winkel ϕ_n:

- Gesamtkraft F berechnen
- In radiale (F_r) und tangentiale (F_ϕ) Komponenten zerlegen

1.101.3 Schritt 3: Integration (Euler-Verfahren)

$$\begin{aligned}
r_{n+1} &= r_n + \frac{v_{r,n}}{\omega_n}\Delta\phi \\
v_{r,n+1} &= v_{r,n} + \frac{F_{r,n}/m - r_n\omega_n^2}{\omega_n}\Delta\phi \\
\omega_{n+1} &= \omega_n + \left(-\frac{2v_{r,n}}{r_n} + \frac{F_{\phi,n}}{r_n\omega_n}\right)\Delta\phi \\
t_{n+1} &= t_n + \frac{\Delta\phi}{\omega_n}
\end{aligned}$$

1.101.4 Hinweis

Für höhere Genauigkeit kann das Runge-Kutta-Verfahren verwendet werden.

1.102 Beispiel: Merkur-Bahn

1.102.1 Parameter

- Große Halbachse: $a = 0.387$ AE
- Exzentrizität: $e = 0.2056$
- Masse der Sonne: $M = 1.989 \times 10^{30}$ kg
- Anfangswinkel: $\phi_0 = 0$ (Perihel)

1.102.2 Erster Schritt ($\Delta\phi = 0.01$ rad)

Größe	Startwert	Nach 1 Schritt
r	0.31 AE	0.31 AE
v_r	0	-0.00144 AE/rad
ω	8.3×10^{-7} rad/s	8.3×10^{-7} rad/s
t	0	12000 s

1.103 Zusammenfassung

Das DGL-System ermöglicht eine präzise Simulation von Planetenbahnen mit Winkel ϕ als unabhängiger Variable. Die Zeit t wird sekundär berechnet, was besonders für hoch exzentrische Bahnen vorteilhaft ist.

1.104 Weber-Kraft als Quantengravitationstheorie

1.104.1 Dynamische Raumzeit-Quantisierung

$$ds^2 = \sum_n \eta_{\mu\nu}(L_p^n)^2 dx^\mu dx^\nu$$

$$L_p^n = L_p^0 \cdot (1 + \psi(x^\mu))$$

1.104.2 Erweiterte Weber-Kraft

$$F = -\frac{G\mathcal{E}[V_1]\mathcal{E}[V_2]}{c^4 r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} + \frac{\hbar^2}{E_{\text{Planck}}^2}\nabla^2\right)\hat{r}$$

1.104.3 Vollständige Feldgleichungen

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\beta\partial_t^2 Q_{\mu\nu}\right) + \lambda\mathcal{F}[V]$$

1.105 Knotendynamik & Energie

1.105.1 Energie-Knoten-Relation

$$E = \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{V'(t)}{V(t)} dt \right)}_{\text{Topologische Invariante}} \cdot \kappa E_{\text{Planck}}$$

1.105.2 Beispiel Proton

$$V_{\text{Proton}}(t) = t + t^{-1} + t^{-2}$$

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{1 - t^{-2} - 2t^{-3}}{t + t^{-1} + t^{-2}}$$

$$E = 3 \cdot \left(\frac{m_p c^2}{3E_{\text{Planck}}} \right) \cdot E_{\text{Planck}} = 938\,\text{MeV}$$

Teilchen	$\mathbf{V(t)}$	**Integralwert**	**Energie**
Proton	$t + t^{-1} + t^{-2}$	3	938 MeV
Elektron	1	0*	511 keV
Photon	0	–	0

1.106 SU(3)×SL(2,C)-Vereinheitlichung

1.106.1 Symmetriegruppe

$$\mathcal{G} = SU(3)_{\text{Farbe}} \times SL(2,\mathbb{C})_{\text{Raumzeit}}$$

1.106.2 Kombinierte Wirkung

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi \right]$$

Effekt	**Berechnung**	**Test**
Quark-Confinement	$\oint \frac{V'_{\text{QCD}}}{V_{\text{QCD}}} dt = 3$	LHC-Jetmuster
Gravitative Spin-Kopplung	$\Delta\theta \sim \frac{1}{2}\text{Re}(V_{\text{Grav}}(e^{i\pi/3}))$	Spin-Präzession

1.107 Renormierungsgruppenfluss

1.107.1 Beta-Funktion

$$\beta(g) = \frac{dg}{d \ln \mu} = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}C_2(SU(3)) - \frac{1}{6}C_2(SL(2,\mathbb{C}))\right) + \kappa g^5$$

1.107.2 Knotenspezifische Korrektur

$$\kappa = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\text{Knoten}}\left(\oint \frac{V_i'}{V_i}dt\right)^2 \approx 0.1$$

Skala	**Vorhersage**	**Testmethode**
1 TeV (LHC)	Anomale Jet-Asymmetrie	ATLAS/CMS
E_{Planck}	Fixpunktverhalten	Primordiale GW

1.108 Nichtperturbative Quantisierung

1.108.1 Diskretisierte Wirkung

$$S = \sum_n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta t_p} \right)^2 - V(x_n) + \beta \frac{m \Delta x_n \Delta^2 x_n}{2c^2 \Delta t_p^2} \right] \Delta t_p$$

1.108.2 Wilson-Loops

$$W(C) = \mathrm{Tr} \prod_{\text{Pfad}} e^{i \oint_C (A_\mu + \beta F_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu) dx^\mu}$$

Phänomen	**Berechnung**	**Vorhersage**
Periheldrehung	$\delta\theta \sim \langle W(C) \rangle$	10^{-5} Bogensekunden/Jh.
GW-Dispersion	$\Delta v \sim \exp(-S/\hbar)$	Anomalien ¿1 kHz

1.109 Topologische Feldtheorie

1.109.1 Chern-Simons-Wirkung

$$S_{\mathrm{CS}} = \frac{k}{4\pi} \sum_{\text{Dodekaeder}} \epsilon^{ijk} \mathrm{Tr} \left(A_i \Delta_j A_k + \frac{2}{3} A_i A_j A_k \right) \cdot V_p$$

1.109.2 Verknüpfungszahl

$$\mathcal{L}(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\text{Gitterpunkte}} \epsilon^{ijk} \Delta_i \theta_1 \Delta_j \theta_2 \Delta_k \phi$$

Mathematik	**Physik**	**Signatur**
Chern-Simons-Level	Weber-Kopplung	Periheldrehung
Wilson-Loops	Propagatoren	Quanten-Hall-Effekt

1.110 Knotenmoden-Klassifikation

1.110.1 Alexander-Conway-Gleichung

$$\nabla_{L_p}(z) - \nabla_{L_m}(z) = z \cdot \nabla_{L_0}(z)$$

1.110.2 Spektraler Index

$$\gamma = \frac{\sum_i \oint \frac{V_i'}{V_i} dt}{\mathrm{Vol}(S^3)} = 2 - \frac{g}{2}$$

Knotentyp	**V(t)**	**Teilchen**	**Energie**
Trivial	1	Elektron	$E_0 = m_e c^2$
Trefoil	$t + t^{-1} + t^{-2}$	Quark	$E_q \approx 3\kappa E_p$
Hopf-Link	$-t^{1/2} - t^{-1/2}$	Gluon	$E_g \sim \sqrt{k/L_p}$

1.111 Vektordefinitionen (Kartesische Koordinaten)

1.111.1 Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

1.111.2 Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

1.111.3 Beschleunigungsvektor

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right)\hat{\theta} + \left(r\sin\theta\ddot{\phi} + 2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\right)\hat{\phi}$$

1.112 Weber-Kraft in Vektorform

1.112.1 Weber-Kraft zwischen zwei Massen

$$\vec{F}_{12} = -\frac{GMm}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}\left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2)\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{c^2|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2)}{2c^2}\right)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

1.112.2 Bewegungsgleichung für Masse m

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_i -\frac{GM_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}\left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_i)\cdot(\vec{r} - \vec{r}_i)}{c^2|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)\cdot(\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_i)}{2c^2}\right)(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

1.113 Lösungen in Vektorform

1.113.1 Bahngleichung (xy-Ebene)

$$\vec{r}(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\kappa\phi)}\left[1+\frac{3G^2M^2}{c^2h^4}\left(1+\frac{e^2}{2}+e\phi\sin(\kappa\phi)\right)\right]\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix}$$

1.113.2 Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(\phi) = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}\left[\frac{e\kappa\sin(\kappa\phi)}{1+e\cos(\kappa\phi)}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix}+(1+e\cos(\kappa\phi))\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix}\right]$$

1.114 N-Körper-Systeme

1.114.1 Beschleunigung des i-ten Körpers

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\sum_{j\neq i} \frac{GM_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij})^2}{c^2|\vec{r}_{ij}|^2} + \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{ij}}{2c^2}\right) \vec{r}_{ij}$$

mit $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j = \begin{pmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \\ z_i - z_j \end{pmatrix}$

1.114.2 Radialkomponenten

$$\dot{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}, \quad \ddot{r}_{ij} = \frac{|\dot{\vec{r}}_{ij}|^2 + \vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{ij} - \dot{r}_{ij}^2}{|\vec{r}_{ij}|}$$