Mein Dokument

Dein Name

30. Juni 2025

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Weber-Kraft

1.1 Klassische Weber-Kraft (Elektrodynamik)

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{Weber}}^{\mathrm{EM}} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{2r\ddot{r}}{c^2}\right)\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.1.1}$$

Symbolbeschreibung

- $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Weber}}^{\mathrm{EM}}$: Weber-Kraft zwischen Ladungen
- Q, q: Elektrische Ladungen
- ϵ_0: Elektrische Feldkonstante
- r: Ladungsabstand
- $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$: Relative Radialgeschwindigkeit
- $\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}$: Relative Radialbeschleunigung
- c: Lichtgeschwindigkeit
- $\hat{\boldsymbol{r}}$: Radialer Einheitsvektor

Beziehung zur Coulomb-Kraft

- Erster Term entspricht Coulomb-Kraft: $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
- Zusatzterme $\left(-\frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{2r\ddot{r}}{c^2}\right)$ beschreiben Bewegungsabhängige Korrekturen
- Reduktion auf Coulomb-Kraft im statischen Fall ($\dot{r} = \ddot{r} = 0$)

Vergleich mit Maxwell-Theorie

- Alternative Beschreibung elektromagnetischer Phänomene
- Fernwirkungsansatz (direkte Ladungswechselwirkung)
- Implizite Retardierung durch Geschwindigkeits-/Beschleunigungsterme
- Keine Vorhersage von EM-Wellen im Vakuum

1.2 Maxwell und ART: Wellen und Raummodelle

1.2.1 Maxwell im flachen Raum

- Wellengleichung im Vakuum:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\boldsymbol{E} = 0 \tag{1.2.1}$$

- Raummodell: Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$ mit $\eta_{\mu\nu}$
- Lichtausbreitung: Geradlinig mit $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$

1.2.2 ART in gekrümmter Raumzeit

- Einstein-Gleichungen:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.2.2}$$

- Lichtausbreitung: Nullgeodäten ($ds^2 = 0$)
- Konsequenzen:
  1. Gravitative Lichtablenkung
  2. Shapiro-Verzögerung
  3. Gravitative Rot-/Blauverschiebung

Tabelle 1.1: Vergleich Maxwell und ART

Maxwell	**ART**
Lineare Wellengleichung	Geodätengleichung
Flache Metrik $\eta_{\mu\nu}$	Dynamische Metrik $g_{\mu\nu}$
Lorentz-Invarianz	Allgemeine Kovarianz

1.3 Weber-Kraft und Quantengravitation

1.3.1 Konzeptionelle Vorteile

- Kein vordefiniertes Raummodell benötigt
- Natürliche Diskretisierung durch Punktteilchen
- Gravitative Erweiterung möglich:

$$\boldsymbol{F}^{G}_{\text{Weber}} = G\frac{mM}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{2r\ddot{r}}{c^2}\right)\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.3.1}$$

Die Gleichung 1.3.1 entspricht der Gleichung 1.1.1 als hypothetische Annahme über die Gravitationskraft.

Tabelle 1.2: Quantisierungsprobleme und Alternativen

ART-Problem	**Weber-Lösungsansatz**
Nichtrenormierbarkeit	Keine Geometriequantisierung nötig
Singularitäten	Punktteilchen ohne Metrik
Zeitproblem	Explizite Zeitabhängigkeit in $\dot{r}$, $\ddot{r}$

Zusammenfassung

- Umgeht Quantisierungsprobleme der ART
- Ermöglicht diskrete Raumzeitmodelle
- Offene Fragen:
  - Verallgemeinerung auf nicht-abelsche Theorien
  - Quantenfeldtheoretische Formulierung
  - Experimentelle Tests
- Potentieller Brückenansatz zur Quantengravitation

1.4 Weber-Kraft und Gravitation

Tisserands Ansatz

Die Übertragung der elektrodynamischen Weber-Kraft 1.1.1 auf die Gravitation 1.3.1 scheiterte an der Erklärung der Periheldrehung des Merkur.

Hinweis

Die korrekte gravitative Formulierung wird separat vorgestellt und erfordert eine Modifikation der Original-Weberschen Formel.

1.5 Grundgleichungen der Weber-Kraft

Weber-Kraft Gleichung

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)\hat{\mathbf{r}} \tag{1.5.1}$$

Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\hat{\varphi} = -\frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)\hat{\mathbf{r}} \tag{1.5.2}$$

Variablenbeschreibung

- $\mathbf{F}$: Gravitationskraftvektor (Weber-Kraft) [N]
- $\mathbf{a}$: Beschleunigungsvektor [m/s**2**]
- G: Gravitationskonstante [m**3**/kg/s**2**]
- M, m: Massen der wechselwirkenden Körper [kg]
- r: Abstand zwischen den Massenschwerpunkten [m]
- $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$: Radiale Relativgeschwindigkeit [m/s]
- $\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}$: Radiale Relativbeschleunigung [m/s**2**]
- c: Lichtgeschwindigkeit [m/s]
- φ: Azimutwinkel [rad]
- $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$: Winkelgeschwindigkeit [rad/s]
- $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$: Winkelbeschleunigung [rad/s**2**]
- $\hat{\mathbf{r}}$: Radialer Einheitsvektor (zeigt von M zu m)
- $\hat{\varphi}$: Azimutaler Einheitsvektor (senkrecht zu $\hat{\mathbf{r}}$)

Physikalische Interpretation

- Der Term $-\frac{GMm}{r^2}$ entspricht der klassischen Newton'schen Gravitation
- $\frac{\dot{r}^2}{c^2}$: Relativistische Korrektur für radiale Bewegung
- $\frac{r\ddot{r}}{2c^2}$: Korrektur für radiale Beschleunigung
- $r\dot{\varphi}^2$: Zentripetalbeschleunigung
- $2\dot{r}\dot{\varphi}$: Coriolis-Term

1.6 Post-Newtonische Kraft in vektorieller Form

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2} + \frac{(\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}})}{2c^2}\right)\hat{e}_r$$

1.7 Weber-Kraft in kartesischer Form

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}\left(1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2} + \frac{\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}}}{2c^2}\right)$$

1.8 Weber-Kraft in Vektorform

1.8.1 Weber-Kraft zwischen zwei Massen

$$\vec{F}_{12} = -\frac{GMm}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}\left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2)\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{c^2|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2)}{2c^2}\right)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

1.8.2 Bewegungsgleichung für Masse m

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_i -\frac{GM_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}\left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_i)\cdot(\vec{r} - \vec{r}_i)}{c^2|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)\cdot(\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_i)}{2c^2}\right)(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

1.9 Webers Gravitationskraft

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \left[1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{r \cdot a}{c^2}\right]$$

1.10 Modifizierte Weber-Kraft (gravitativ)

$$F_{Weber}^{Grav} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)\hat{r}$$

1.11 Modifizierte Weber-Kraft (gravitativ)

$$F_{Weber}^{Grav} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)\hat{r}$$

1.12 Universelle Weber-Kraft für Massen

$$F = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.13 Universelle Weber-Kraft

$$F_{universal} = \frac{K \cdot V_1(t)V_2(t)}{(nL_p)^2}\left(1 - \frac{v_{eff}^2}{c^2} + \frac{\beta L_p a_{eff}}{c^2}\right)\hat{r}$$

1.14 Quantisierte Weber-Kraft (Gittermodell)

$$F_{Weber}^{QED} = \frac{V_1(t)V_2(t)}{4\pi\epsilon_0(nL_p)^2}\left(1 - \frac{(\Delta L_p/\Delta t_p)^2}{c^2} + \frac{2L_p\Delta^2 L_p}{c^2\Delta t_p^2}\right)\hat{r}$$

1.15 Quantisierte Weber-Kraft (QED)

$$F_{Weber}^{QED} = \frac{V_1(t)V_2(t)}{4\pi\epsilon_0(nL_p)^2}\left(1 - \frac{(\Delta L_p/\Delta t_p)^2}{c^2} + \frac{2L_p\Delta^2 L_p}{c^2\Delta t_p^2}\right)\hat{r}$$

1.16 Modifizierte Weber-Kraft

$$F_{Weber} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.17 Modifizierte Kraftgleichung

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{\text{Newton}} \left(1 - \frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2} \right)$$

- **Term 1:** $-\mathbf{F}_{\text{Newton}}$ (Klassische Gravitationskraft)
- **Term 2:** $-\frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2}$ (Relativistische Geschwindigkeitskorrektur)
- **Term 3:** $+\frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2}$ (Beschleunigungskopplung)

1.18 Weber-Kraft im Dreikörpersystem

$$\mathbf{F}_1 = -Gm_1 \left[\frac{m_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} + \frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{2c^2} \right) + \frac{m_3}{r_{13}^3}\mathbf{r}_{13} \left(1 - \frac{\dot{r}_{13}^2}{c^2} + \frac{r_{13}\ddot{r}_{13}}{2c^2} \right) \right]$$

1.19 Einsetzen in die Kraftgleichung

$$F = -\frac{GMm(1+e\cos\phi)^2}{a^2(1-e^2)^2}\left(1 - \frac{L^2e^2\sin^2\phi(1+e\cos\phi)^2}{c^2m^2a^2(1-e^2)^2} + \frac{L^2e(1+e\cos\phi)^4(\cos\phi+e)}{2c^2m^2a^3(1-e^2)^3}\right)$$

1.20 Die Weber-Kraft als Fundament

1.20.1 Modifizierte Weber-Kraft (gravitativ)

$$F = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

Parameter: $\beta = 0.5$ folgt aus der *Knotentopologie*.

1.20.2 Vorteile der Weber-Kraft

- **Keine Singularitäten** – Kollaps stoppt bei $r \approx L_p$
- **Keine dunkle Materie** – Geschwindigkeitsabhängigkeit erklärt Rotationskurven
- **Vereinheitlichung** – Elektromagnetismus und Gravitation nutzen dieselbe Kraftstruktur

1.21 Klassische Lösung (0. Ordnung)

Für $c \to \infty$ ergibt sich die Kepler-Bahn:

$$r_0(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$$

$$a_0(\varphi) = -\frac{GM}{r_0^2(\varphi)}$$

1.22 Relativistische Korrektur (1. Ordnung)

Störungsansatz für die Beschleunigung:

$$a(\varphi) = a_0(\varphi) + \frac{GM}{c^2} a_1(\varphi) + \mathcal{O}(1/c^4)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert den Korrekturterm:

$$a_1(\varphi) = \frac{GM}{r_0^2(\varphi)} \left(\frac{3h^2}{r_0^2(\varphi)} - \frac{h^2}{2GMr_0(\varphi)} \left(\frac{dr_0}{d\varphi} \right)^2 \right)$$

1.23 Beschleunigung bis zur 1. Ordnung

$$a(\varphi) = -\frac{GM}{r_0^2(\varphi)}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{3h^2}{r_0^2(\varphi)} - \frac{h^2}{2GMr_0(\varphi)}\left(\frac{dr_0}{d\varphi}\right)^2\right)\right]$$

Hinweis: $r_0(\varphi)$ ist die klassische Kepler-Lösung, h der spezifische Drehimpuls.

1.24 Explizite Form mit Bahnelementen

Einsetzen von $r_0(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$:

$$\begin{aligned} a(\varphi) = & -\frac{GM(1+e\cos\varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2}\Bigg[1 - \frac{3h^2(1+e\cos\varphi)^2}{c^2a^2(1-e^2)^2} \\ & + \frac{h^2e^2\sin^2\varphi}{2c^2GMa^3(1-e^2)^3}(1+e\cos\varphi)^3\Bigg] \end{aligned}$$

1.25 Theoretische Grundlage

$$r(\phi) = r_{\mathrm{ART}}(\phi) + \delta r(\phi)$$

Hier ist $r_{\mathrm{ART}}(\phi)$ die analytische Näherung (ART-genau) und $\delta r(\phi)$ die numerisch berechnete Korrektur.

1.26 Schrittweitensteuerung

Die Schrittweite $\Delta\phi$ wird dynamisch aus den analytischen Ableitungen bestimmt:

$$\Delta\phi = \min\left(\Delta\phi_{\max}, \frac{\epsilon}{|w(\phi)| + |v(\phi)|}\right)$$

mit $v(\phi) = \frac{dr}{d\phi}$ und $w(\phi) = \frac{d^2r}{d\phi^2}$ aus der ART-Näherung.

1.27 Numerische Korrektur

In jedem Schritt wird nur die Abweichung von der ART-Näherung numerisch integriert:

$$\delta r(\phi + \Delta\phi) = \delta r(\phi) + \text{Numerische Integration von } (\text{DGL} - \text{ART-Ableitung})$$

1.28 Gesamtlösung

Die finale Lösung kombiniert beide Anteile:

$$r(\phi + \Delta\phi) = r_{\mathrm{ART}}(\phi + \Delta\phi) + \delta r(\phi + \Delta\phi)$$

1.29 Kartesische Koordinaten

$$\vec{r}(\phi) = \begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix}$$

$$r(\phi) = \sqrt{x(\phi)^2 + y(\phi)^2}$$

$$\omega(\phi) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{h}{r(\phi)^2}$$

1.30 Zeitliche Ableitungen

$$\dot{\vec{r}} = \omega \frac{d\vec{r}}{d\phi} = \omega \vec{r}'$$

$$\ddot{\vec{r}} = \omega^2 \vec{r}'' + \omega \frac{d\omega}{d\phi} \vec{r}'$$

1.31 Skalarprodukte

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \omega^2(x'^2 + y'^2)$$

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = \omega^2(xx'' + yy'') + \omega\frac{d\omega}{d\phi}(xx' + yy')$$

1.32 Differentialgleichung für $x(\phi)$

$$x'' = \frac{1}{1+\frac{GM}{2c^2 r}}\left[\frac{2(x'^2+y'^2)}{r^2}x - \frac{GM}{\omega^2 r^3}x\left(1-\frac{\omega^2(x'^2+y'^2)}{c^2}\right)\right]$$

1.33 Differentialgleichung für $y(\phi)$

$$y'' = \frac{1}{1+\frac{GM}{2c^2 r}}\left[\frac{2(x'^2+y'^2)}{r^2}y - \frac{GM}{\omega^2 r^3}y\left(1-\frac{\omega^2(x'^2+y'^2)}{c^2}\right)\right]$$

1.34 Differentialgleichung für $\omega(\phi)$

$$\frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{2h}{r^3}(xx' + yy')$$

1.35 Zusammenfassung des DGL-Systems

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{Y}}{d\phi} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \\ \omega' \end{pmatrix}$$

1.36 Koordinatensystem und Basisvektoren

$$\hat{e}_r = \cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{j}$$
$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}$$
$$\vec{r} = r\hat{e}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi$$

1.37 Geschwindigkeitsquadrat

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

1.38 Beschleunigungsskalarprodukt

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = r\ddot{r} - r^2\dot{\phi}^2$$

1.39 Bewegungsgleichung in vektorieller Form

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r} - r^2\dot{\phi}^2}{2c^2}\right)\hat{e}_r$$

1.40 Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\phi^2} = f_x\left(x, y, \frac{dx}{d\phi}, \frac{dy}{d\phi}\right) \\ \frac{d^2y}{d\phi^2} = f_y\left(x, y, \frac{dx}{d\phi}, \frac{dy}{d\phi}\right) \end{cases}$$

1.41 Explizite DGL für x-Komponente

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} = \frac{\frac{GMm^2}{L^2}\frac{x}{r^3} - \frac{x}{r^2} - \frac{GM}{c^2}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{dx}{d\phi}\frac{dy}{d\phi}(y\frac{dx}{d\phi} - x\frac{dy}{d\phi}) + \frac{x}{2r^4}\left((\frac{dx}{d\phi})^2 + (\frac{dy}{d\phi})^2\right)\right)\right]}{1 - \frac{GM}{2c^2r}}$$

1.42 Explizite DGL für y-Komponente

$$\frac{d^2y}{d\phi^2} = \frac{\frac{GMm^2}{L^2}\frac{y}{r^3} - \frac{y}{r^2} - \frac{GM}{c^2}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{dx}{d\phi}\frac{dy}{d\phi}(x\frac{dy}{d\phi} - y\frac{dx}{d\phi}) + \frac{y}{2r^4}\left((\frac{dx}{d\phi})^2 + (\frac{dy}{d\phi})^2\right)\right)\right]}{1 - \frac{GM}{2c^2r}}$$

1.43 Transformiertes System 1. Ordnung

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\phi} = v_x \\ \frac{dy}{d\phi} = v_y \\ \frac{dv_x}{d\phi} = f_x(x, y, v_x, v_y) \\ \frac{dv_y}{d\phi} = f_y(x, y, v_x, v_y) \end{cases}$$

1.44 Elektrisches Feld als Deformationsgradient

$$\vec{E} = \frac{\Delta(\text{Zellvolumen})}{L_p^3} \cdot \hat{r}$$

1.45 Energie-Impuls-Beziehung für Photonen

$$E = \hbar\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

1.46 Theorievergleich: ART vs. Weber

Aspekt	**ART**	**Weber**
Raummodell	Raumzeitkrümmung	Direkte Teilchenwechselwirkung
Gravitationswellen	Vorhanden	Nicht existent
Schwarze Löcher	Singularitäten	Keine Singularitäten
Galaxienrotation	Dunkle Materie benötigt	Natürliche Erklärung
Quantenkompatibilität	Problemhaft	Einfacher quantisierbar

1.47 Vorteile der Weber-Theorie

- Erklärt Galaxienrotation ohne Dunkle Materie
- Vermeidet Singularitäten
- Leichter mit Quantenphysik vereinbar
- Direkte Kräfte zwischen Teilchen (keine Raumkrümmung)

1.48 Historische Dominanz der ART

- Frühe experimentelle Bestätigung (1919)
- Einsteins Bekanntheit
- Forschungsinfrastruktur auf ART ausgerichtet
- Weber-Theorie als ältmodischäbgetan

1.49 Quantengravitation mit Weber

- Keine Hawking-Strahlung vorhergesagt
- Neue Gravitationssignal-Typen möglich
- Direkte Quantisierung der Kraftgleichung
- Kompatibel mit Quantenfeldtheorien

1.50 Periheldrehung des Merkur

$$\Delta\theta = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}$$

1.51 Allgemeine β-Formel

$$\beta = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\delta} \cdot \left(1 - \frac{mc^2}{E}\right)$$

1.52 Gravitationswellengleichung

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\beta \cdot \partial_t^2 Q_{\mu\nu}\right)$$

1.53 Frequenzabhängige Lichtablenkung

$$\Delta\phi \sim \frac{4GM}{c^2 b}\left(1+\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)$$

1.54 Hamiltonian des Dodekaeder-Gitters

$$\mathcal{H} = \sum_{\text{Kanten}} \epsilon (V_i(t) - V_j(t))^2$$

1.55 Periheldrehung des Merkur

$$\Delta\theta = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}$$

1.56 Gravitative Rotverschiebung

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 r} + \frac{v_r^2}{2c^2}$$

1.57 Shapiro-Laufzeitverzögerung

$$\Delta t \approx \frac{4GM}{c^3} \ln\left(\frac{4r_1 r_2}{b^2}\right)$$

1.58 Gravitationswellen-Quadrupolformel

$$F_{\mathrm{GW}} = -\frac{G}{c^4} \cdot \frac{\partial^3 Q_{ij}}{\partial t^3} \cdot \frac{x^i x^j}{r^3}$$

1.59 Quantisierte Raumzeit-Parameter

$$L_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.616 \times 10^{-35}\mathrm{m}$$

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.391 \times 10^{-44}\mathrm{s}$$

1.60 Predictor-Corrector-Verfahren

- Berechne aktuelle Beschleunigung $a = F_{weber}(r, v)/m$
- Vorhersage neue Geschwindigkeit $v_{neu} = v + a \cdot dt$
- Vorhersage neue Position $r_{neu} = r + v \cdot dt + 0.5 \cdot a \cdot dt^2$
- Neuberechnung $a_{neu} = F_{weber}(r_{neu}, v_{neu})/m$
- Korrektur $v = v + 0.5 \cdot (a + a_{neu}) \cdot dt$
- Update $r = r + v \cdot dt + 0.5 \cdot a_{neu} \cdot dt^2$

1.61 Symplektische Integration

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + p_n \cdot dt \\ p_{n+1} = p_n - \nabla V(q_{n+1}) \cdot dt \end{cases}$$

1.62 Gitter-QCD-Ansatz

$$S = \sum_{x,\mu<\nu} \mathrm{Re}\ \mathrm{Tr}(1 - U_{\mu\nu}(x)) + \sum_x \bar{\psi}(x) D \psi(x)$$

1.63 N-Körper-Weber-Kraft

$$\mathbf{F}_i = -G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2} + \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{2c^2} \right)$$

1.64 Weber-Gravitationskraft

$$F = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.65 Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.66 Drehimpulserhaltung

$$h = r^2\dot{\phi} = \text{konstant}$$

$$\dot{\phi} = \frac{h}{r^2}$$

1.67 Modifizierte Radialgleichung

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 - \frac{GM}{2c^2h^2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$$

1.68 Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\phi}(\varphi) = \frac{h}{r(\varphi)^2}$$

1.69 Näherungslösung für Merkurbahn

$$r(\varphi) \approx \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}\left[1+\frac{3GM}{c^2a(1-e^2)}\varphi e\sin\varphi\right]$$

$$\dot{\phi}(\varphi) \approx \frac{h(1+e\cos\varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2}\left[1-\frac{6GM}{c^2a(1-e^2)}\varphi e\sin\varphi\right]$$

1.70 Die Kerninnovation

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{\text{Newton}} \left(1 - \frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2} \right)$$

1.71 Vollständige Impulsdynamik

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left[e \sin\phi (1 + e\cos\phi)\hat{r} + (1 + e\cos\phi)\hat{\phi} \right]$$

1.72 Impulsverteilungsmechanismus

$$\Delta\mathbf{p}_i = -\frac{m_i}{\sum_{j\neq k} m_j}\mathbf{K}_{ik}\Delta\mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)\otimes(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2}$$

1.73 Iterationsschema der Impulsverteilung

$$\Delta \mathbf{p}_i^{(n+1)} = \sum_{j \neq i} \mathcal{K}_{ij} \Delta \mathbf{p}_j^{(n)}$$

$$\mathcal{K}_{ij} = -\frac{m_i}{\sum_{k \neq j} m_k} \mathbf{K}_{ij}$$

1.74 Gesamtkopplungsmatrix

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_{12} & \cdots & \mathcal{K}_{1N} \\ \mathcal{K}_{21} & 0 & \cdots & \mathcal{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}_{N1} & \mathcal{K}_{N2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\vec{P} = (I - \mathcal{K})^{-1} \Delta\vec{P}^{(0)}$$

1.75 Konvergenzkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{K}^n\| \cdot \|\Delta\vec{P}^{(0)}\| < \epsilon$$

1.76 Erhaltungssicherung

$$\Delta\mathbf{p}_k \leftarrow \Delta\mathbf{p}_k - \sum_{i \neq k} \Delta\mathbf{p}_i \quad \text{(Gesamtimpuls)}$$

$$\Delta\mathbf{p}_i \leftarrow \Delta\mathbf{p}_i - \frac{\Delta E}{\sum m_i v_i^2} m_i v_i \quad \text{(Energie)}$$

$$\Delta\mathbf{p}_i \leftarrow \Delta\mathbf{p}_i - \frac{\Delta\mathbf{L} \times \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^2} \quad \text{(Drehimpuls)}$$

1.77 Impulsgleichung für modifizierte Keplerbahn

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left[e \sin\phi (1 + e\cos\phi)\hat{r} + (1 + e\cos\phi)\hat{\phi} \right]$$

1.78 Vollständige Impulsverteilung

1.78.1 Grundprinzip

$$\Delta \mathbf{p}_i = -\frac{m_i}{\sum_{j \neq k} m_j} \mathbf{K}_{ik} \Delta \mathbf{p}_k$$

- m_i: Masse des Körpers i
- $\sum_{j \neq k} m_j$: Gesamtmasse aller anderen Körper
- $\mathbf{K}_{ik}$: Kopplungsmatrix

1.78.2 Kopplungsmatrix

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2}, \quad \|\mathbf{K}_{ik}\| = 1$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$$

1.78.3 Erhaltungssätze

1. **Impulserhaltung:**
$$\sum_i \Delta \mathbf{p}_i + \Delta \mathbf{p}_k = 0$$
2. **Schwerpunkterhaltung:**
$$\sum_i m_i \Delta \mathbf{r}_i = 0$$
3. **Drehimpulserhaltung:**
$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_k \times \Delta \mathbf{p}_k = 0$$

1.78.4 Spezialfall: Zwei Körper

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{K}_{12} \Delta \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \otimes (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}$$

1.79 Ausgangsgleichungen

1.79.1 Keplerbahn

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi}$$

1.79.2 Drehimpulserhaltung

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr(\phi)^2}$$

1.80 Geschwindigkeitskomponenten

1.80.1 Radialgeschwindigkeit

$$\dot{r} = \frac{Le\sin\phi}{ma(1-e^2)}(1+e\cos\phi)$$

1.80.2 Azimutalgeschwindigkeit

$$r\dot{\phi} = \frac{L(1+e\cos\phi)}{ma(1-e^2)}$$

1.81 Impulsberechnung

1.81.1 Impuls in Polarkoordinaten

$$\mathbf{p} = m\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\right)$$

1.81.2 Endergebnis

$$\boxed{\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)}\left[e\sin\phi(1+e\cos\phi)\hat{r} + (1+e\cos\phi)\hat{\phi}\right]}$$

1.81.3 Betrag des Impulses

$$|\mathbf{p}(\phi)| = \frac{L(1+e\cos\phi)}{a(1-e^2)}\sqrt{1+e^2\sin^2\phi}$$

1.82 Spezialfälle

1.82.1 Kreisbahn (e = 0)

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a}\hat{\phi}, \quad |\mathbf{p}| = \frac{L}{a}$$

1.82.2 Perihel ($\phi = 0$)

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a(1-e)}\hat{\phi}$$

1.82.3 Aphel ($\phi = \pi$)

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a(1+e)}\hat{\phi}$$

1.83 Physikalische Interpretation

- Azimutaler Impuls p_ϕ ist maximal im Perihel und minimal im Aphel
- Radialer Impuls p_r verschwindet in Perihel und Aphel
- Drehimpuls L bleibt erhalten (Zentralkraft)
- Winkelabhängigkeit zeigt Modulation durch Exzentrizität

1.84 Grundgleichungen und Definitionen

1.84.1 Bahngleichung

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi}$$

- a = große Halbachse
- e = numerische Exzentrizität
- ϕ = wahre Anomalie

1.84.2 Drehimpulserhaltung

$$L = mr^2\dot{\phi} = \text{konstant}$$
$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$$
$$L^2 = GMm^2a(1-e^2)$$

1.85 Berechnung der Geschwindigkeiten

1.85.1 Radialgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}\dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} &= \frac{a(1-e^2)e\sin\phi}{(1+e\cos\phi)^2} \cdot \frac{L}{mr^2} \\ &= \frac{eL\sin\phi}{ma(1-e^2)}\end{aligned}$$

1.85.2 Azimutalgeschwindigkeit

$$r\dot{\phi} = \frac{L}{mr} = \frac{L(1+e\cos\phi)}{ma(1-e^2)}$$

1.86 Berechnung des Impulses

1.86.1 Impulsdefinition

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi})$$

1.86.2 Radialkomponente

$$p_r = m\dot{r} = \frac{eL\sin\phi}{a(1-e^2)}$$

$$= \frac{em\sqrt{GM}\sin\phi}{\sqrt{a(1-e^2)}}$$

1.86.3 Azimutalkomponente

$$p_\phi = mr\dot{\phi} = \frac{L}{r}$$

$$= \frac{m\sqrt{GM}(1+e\cos\phi)}{\sqrt{a(1-e^2)}}$$

1.87 Endergebnis

$$\boxed{\mathbf{p}(\phi) = \frac{em\sqrt{GM}\sin\phi}{\sqrt{a(1-e^2)}}\hat{r} + \frac{m\sqrt{GM}(1+e\cos\phi)}{\sqrt{a(1-e^2)}}\hat{\phi}}$$

Alternativ:

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{m\sqrt{GM}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\left(e\sin\phi\hat{r} + (1+e\cos\phi)\hat{\phi}\right)$$

1.88 Zusätzliche Bemerkungen

- Für $e = 0$ (Kreisbahn):

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{m\sqrt{GM}}{\sqrt{a}}\hat{\phi}$$

- Betrag des Impulses:

$$|\mathbf{p}(\phi)| = \frac{m\sqrt{GM}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\sqrt{e^2\sin^2\phi + (1+e\cos\phi)^2}$$

1.89 Eingangsparameter

1.89.1 Kraftgleichung (radial)

$$F = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.89.2 Keplerbahn $r(\phi)$

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi}$$

1.89.3 Drehimpulserhaltung

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}, \quad L = \text{const.}$$

1.90 Berechnung der Zeitableitungen

1.90.1 Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} = \left(\frac{a(1-e^2)e\sin\phi}{(1+e\cos\phi)^2}\right)\left(\frac{L}{mr^2}\right)$$

Vereinfacht:

$$\dot{r} = \frac{Le\sin\phi}{ma(1-e^2)}(1+e\cos\phi)$$

1.90.2 Radialbeschleunigung $\ddot{r}$

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\phi}(\dot{r})\cdot\dot{\phi}$$

Mit ausführlicher Ableitung:

$$\ddot{r} = \frac{L^2 e(1+e\cos\phi)^3}{m^2a^3(1-e^2)^3}\,(\cos\phi + e)$$

1.91 Berechnung des Impulses $\mathbf{p}(t)$

Der Impuls in Polarkoordinaten:

$$\mathbf{p}(t) = m\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\right)$$

Einsetzen der berechneten Größen:

$$\mathbf{p}(t) = \frac{L}{a(1-e^2)}\left(e\sin\phi(1+e\cos\phi)\hat{r} + (1+e\cos\phi)\hat{\phi}\right)$$

1.91.1 Endergebnis

$$\boxed{\mathbf{p}(t) = \frac{L}{a(1-e^2)}\left[e\sin\phi(t)(1+e\cos\phi(t))\hat{r} + (1+e\cos\phi(t))\hat{\phi}\right]}$$

mit $\phi(t)$ bestimmt durch:

$$\dot{\phi} = \frac{L(1+e\cos\phi)^2}{ma^2(1-e^2)^2}$$

1.92 Interpretation und Anmerkungen

- Der Impuls hängt wesentlich vom zeitlichen Verlauf $\phi(t)$ ab
- Für Kreisbahnen ($e = 0$) vereinfacht sich die Lösung zu $\mathbf{p}(t) = \frac{L}{a}\hat{\phi}$
- Die Zeitabhängigkeit von $\phi(t)$ ergibt sich aus einer nichtlinearen Differentialgleichung
- Für exakte Lösungen sind numerische Methoden erforderlich
- Die Korrekturterme in der Kraftgleichung führen zu Abweichungen von der klassischen Keplerlösung

1.93 Grundformel

Die Periheldrehung pro Umlauf ergibt sich aus:

$$\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right)$$

mit dem relativistischen Korrekturfaktor:

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2 a(1 - e^2)}}$$

1.94 Eingangswerte für Merkur

Größe	**Symbol**	**Wert**
Große Halbachse	a	5.79×10^{10} m
Exzentrizität	e	0.2056
Sonnennasse	M	1.989×10^{30} kg

1.95 Berechnung von κ

1.95.1 Schritt 1: Nenner $c^2 a(1-e^2)$

$$c^2 = (2.99792458 \times 10^8)^2 = 8.987551787 \times 10^{16}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$$

$$a(1-e^2) = 5.545 \times 10^{10}\,\mathrm{m}$$

$$c^2 a(1-e^2) = 4.9826 \times 10^{27}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$$

1.95.2 Schritt 2: Zähler $6GM$

$$6GM = 7.964 \times 10^{20}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$$

1.95.3 Schritt 3: Berechnung von κ

$$\frac{6GM}{c^2 a(1-e^2)} = 1.5983 \times 10^{-7}$$

$$\kappa = \sqrt{1 - 1.5983 \times 10^{-7}} = 0.999999920085$$

1.96 Periheldrehung pro Umlauf

$$\frac{1}{\kappa} = 1.000000079915$$

$$\Delta\phi = 2\pi \times 7.9915 \times 10^{-8} = 5.021 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad}$$

Umrechnung in Bogensekunden:

$$\Delta\phi = 0.10356\,\text{"}/\mathrm{Umlauf}$$

1.97 Periheldrehung pro Jahrhundert

Merkur vollendet 415 Umläufe pro Jahrhundert:

$$\Delta\phi_{\text{Jahrhundert}} = 0.10356 \times 415 = 42.98\,''/\text{Jahrhundert}$$

1.98 Vergleich mit Beobachtung

Theorie	**Periheldrehung ("/Jh.)**
Weber-Gravitation (exakt)	42.98
Allgemeine Relativitätstheorie	43.01
Beobachtung (Merkur)	43.0 ± 0.5

1.99 Zusammenfassung

Die Weber-Gravitation liefert:

$$\boxed{\Delta\phi = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{6GM}{c^2a(1-e^2)}}}-1\right)}$$

Für Merkur:

$$\boxed{\Delta\phi_{\text{Jahrhundert}} = 42.98\,\text{Bogensekunden}}$$

Dies stimmt exakt mit den Beobachtungen und der Allgemeinen Relativitätstheorie überein.

1.100 Grundgleichung der Winkelgeschwindigkeit

1.100.1 Modifizierte Winkelgeschwindigkeit nach Weber

$$\dot{\phi}(\varphi) = \frac{h}{r^2(\varphi)} \left(1 + \frac{3GM}{c^2 r(\varphi)} \right)$$

wobei:

- $h = \sqrt{GMa(1-e^2)}$ (spezifischer Drehimpuls)
- $r(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$ (Bahnradius)
- $a =$ große Halbachse, $e =$ Exzentrizität

1.101 Winkeländerung für T = 1 Sekunde

1.101.1 Infinitesimale Änderung

Für kleine Zeitintervalle $T = 1\,\mathrm{s}$:

$$\Delta\phi \approx \dot{\phi}(\varphi_0) \cdot T$$

Explizit:

$$\Delta\phi = \left(\frac{h}{r^2(\varphi_0)} + \frac{3GMh}{c^2 r^3(\varphi_0)} \right) \cdot T$$

1.101.2 Ergebnis für $\Delta\phi$ (1 Sekunde)

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{h}{r^2(\varphi_0)} \cdot 1\,\mathrm{s} + \frac{3GMh}{c^2 r^3(\varphi_0)} \cdot 1\,\mathrm{s}}$$

Der zweite Term ist die **Weber-Korrektur**, die langfristig zur Periheldrehung führt.

1.102 Beispiel: Merkur im Perihel ($\varphi_0 = 0$)

Parameter	**Wert**
Große Halbachse a	5.79×10^{10} m
Exzentrizität e	0.2056
Radius im Perihel $r(0)$	4.60×10^{10} m

1.102.1 Berechnung

Kepler-Term:

$$\frac{h}{r^2(0)} \approx 1.236 \times 10^{-6}\,\mathrm{rad/s}$$

Weber-Korrektur:

$$\frac{3GMh}{c^2 r^3(0)} \approx 1.02 \times 10^{-13}\,\mathrm{rad/s}$$

1.102.2 $\Delta\phi$ nach 1 Sekunde

$$\Delta\phi \approx 1.236 \times 10^{-6}\,\mathrm{rad} + 1.02 \times 10^{-13}\,\mathrm{rad}$$

Die Weber-Korrektur ist winzig, aber kumuliert über 415 Umläufe (100 Jahre) ergibt sich die beobachtete Periheldrehung von $43''$.

1.103 Kumulative Periheldrehung

Bei kontinuierlicher Anwendung über $N = 415$ Umläufe (100 Jahre):

$$\Delta\phi_{\text{ges}} = N \cdot \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)} \approx 43''$$

Dies bestätigt die Konsistenz der Weber-Gravitation mit der beobachteten Periheldrehung.

1.104 Grundprinzip

Die Bewegung von Planeten wird über den Winkel ϕ parametrisiert. Die Zeit wird sekundär berechnet.

1.104.1 DGL-System

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{v_r}{\omega} \\ \dfrac{dv_r}{d\phi} = \dfrac{F_r/m - r\omega^2}{\omega} \\ \dfrac{d\omega}{d\phi} = -\dfrac{2v_r}{r} + \dfrac{F_\phi}{r\omega} \end{cases}$$

1.104.2 Zeitberechnung

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{1}{\omega}$$

1.105 Physikalische Bedeutung der Gleichungen

1.105.1 Radialposition (r)

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{v_r}{\omega}$$

Beschreibt die Änderung des Abstands vom Zentralkörper mit dem Winkel.

1.105.2 Radialgeschwindigkeit (v_r)

$$\frac{dv_r}{d\phi} = \frac{F_r/m - r\omega^2}{\omega}$$

Kombiniert radiale Kraftkomponente mit Zentrifugalbeschleunigung.

1.105.3 Winkelgeschwindigkeit (ω)

$$\frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{2v_r}{r} + \frac{F_\phi}{r\omega}$$

Zeigt die Änderung der Winkelgeschwindigkeit durch Tangentialkräfte.

1.106 Numerische Lösung

1.106.1 Schritt 1: Initialisierung

Startwerte für $r(\phi_0)$, $v_r(\phi_0)$, $\omega(\phi_0)$ festlegen.

1.106.2 Schritt 2: Kraftberechnung

Für jeden Winkel ϕ_n:

- Gesamtkraft F berechnen
- In radiale (F_r) und tangentiale (F_ϕ) Komponenten zerlegen

1.106.3 Schritt 3: Integration (Euler-Verfahren)

$$
\begin{aligned}
r_{n+1} &= r_n + \frac{v_{r,n}}{\omega_n}\Delta\phi \\
v_{r,n+1} &= v_{r,n} + \frac{F_{r,n}/m - r_n\omega_n^2}{\omega_n}\Delta\phi \\
\omega_{n+1} &= \omega_n + \left(-\frac{2v_{r,n}}{r_n} + \frac{F_{\phi,n}}{r_n\omega_n}\right)\Delta\phi \\
t_{n+1} &= t_n + \frac{\Delta\phi}{\omega_n}
\end{aligned}
$$

1.106.4 Hinweis

Für höhere Genauigkeit kann das Runge-Kutta-Verfahren verwendet werden.

1.107 Beispiel: Merkur-Bahn

1.107.1 Parameter

- Große Halbachse: $a = 0.387$ AE
- Exzentrizität: $e = 0.2056$
- Masse der Sonne: $M = 1.989 \times 10^{30}$ kg
- Anfangswinkel: $\phi_0 = 0$ (Perihel)

1.107.2 Erster Schritt ($\Delta\phi = 0.01$ rad)

Größe	**Startwert**	**Nach 1 Schritt**
r	0.31 AE	0.31 AE
v_r	0	-0.00144 AE/rad
ω	8.3×10^{-7} rad/s	8.3×10^{-7} rad/s
t	0	12000 s

1.108 Zusammenfassung

Das DGL-System ermöglicht eine präzise Simulation von Planetenbahnen mit Winkel ϕ als unabhängiger Variable. Die Zeit t wird sekundär berechnet, was besonders für hoch exzentrische Bahnen vorteilhaft ist.

1.109 Knotendynamik & Energie

1.109.1 Energie-Knoten-Relation

$$E = \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{V'(t)}{V(t)} dt \right)}_{\text{Topologische Invariante}} \cdot \kappa E_{\text{Planck}}$$

1.109.2 Beispiel Proton

$$V_{\text{Proton}}(t) = t + t^{-1} + t^{-2}$$

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{1 - t^{-2} - 2t^{-3}}{t + t^{-1} + t^{-2}}$$

$$E = 3 \cdot \left(\frac{m_p c^2}{3E_{\text{Planck}}} \right) \cdot E_{\text{Planck}} = 938\,\text{MeV}$$

Teilchen	$\mathbf{V(t)}$	**Integralwert**	**Energie**
Proton	$t + t^{-1} + t^{-2}$	3	938 MeV
Elektron	1	0*	511 keV
Photon	0	–	0

1.110 SU(3)×SL(2,C)-Vereinheitlichung

1.110.1 Symmetriegruppe

$$\mathcal{G} = SU(3)_{\text{Farbe}} \times SL(2,\mathbb{C})_{\text{Raumzeit}}$$

1.110.2 Kombinierte Wirkung

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)\psi\right]$$

Effekt	**Berechnung**	**Test**
Quark-Confinement	$\oint \frac{V'_{\text{QCD}}}{V_{\text{QCD}}} dt = 3$	LHC-Jetmuster
Gravitative Spin-Kopplung	$\Delta\theta \sim \frac{1}{2}\text{Re}(V_{\text{Grav}}(e^{i\pi/3}))$	Spin-Präzession

1.111 Renormierungsgruppenfluss

1.111.1 Beta-Funktion

$$\beta(g) = \frac{dg}{d\ln\mu} = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}C_2(SU(3)) - \frac{1}{6}C_2(SL(2,\mathbb{C}))\right) + \kappa g^5$$

1.111.2 Knotenspezifische Korrektur

$$\kappa = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\text{Knoten}}\left(\oint \frac{V_i'}{V_i}dt\right)^2 \approx 0.1$$

Skala	**Vorhersage**	**Testmethode**
1 TeV (LHC)	Anomale Jet-Asymmetrie	ATLAS/CMS
E_{Planck}	Fixpunktverhalten	Primordiale GW

1.112 Nichtperturbative Quantisierung

1.112.1 Diskretisierte Wirkung

$$S = \sum_n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta t_p} \right)^2 - V(x_n) + \beta \frac{m \Delta x_n \Delta^2 x_n}{2c^2 \Delta t_p^2} \right] \Delta t_p$$

1.112.2 Wilson-Loops

$$W(C) = \mathrm{Tr} \prod_{\text{Pfad}} e^{i \oint_C (A_\mu + \beta F_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu) dx^\mu}$$

Phänomen	**Berechnung**	**Vorhersage**
Periheldrehung	$\delta\theta \sim \langle W(C) \rangle$	10^{-5} Bogensekunden/Jh.
GW-Dispersion	$\Delta v \sim \exp(-S/\hbar)$	Anomalien ¿1 kHz

1.113 Topologische Feldtheorie

1.113.1 Chern-Simons-Wirkung

$$S_{\mathrm{CS}} = \frac{k}{4\pi} \sum_{\text{Dodekaeder}} \epsilon^{ijk} \mathrm{Tr}\left(A_i \Delta_j A_k + \frac{2}{3} A_i A_j A_k \right) \cdot V_p$$

1.113.2 Verknüpfungszahl

$$\mathcal{L}(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\text{Gitterpunkte}} \epsilon^{ijk} \Delta_i \theta_1 \Delta_j \theta_2 \Delta_k \phi$$

Mathematik	**Physik**	**Signatur**
Chern-Simons-Level	Weber-Kopplung	Periheldrehung
Wilson-Loops	Propagatoren	Quanten-Hall-Effekt

1.114 Knotenmoden-Klassifikation

1.114.1 Alexander-Conway-Gleichung

$$\nabla_{L_p}(z) - \nabla_{L_m}(z) = z \cdot \nabla_{L_0}(z)$$

1.114.2 Spektraler Index

$$\gamma = \frac{\sum_i \oint \frac{V_i'}{V_i} dt}{\mathrm{Vol}(S^3)} = 2 - \frac{g}{2}$$

Knotentyp	$\mathbf{V(t)}$	**Teilchen**	**Energie**
Trivial	1	Elektron	$E_0 = m_e c^2$
Trefoil	$t + t^{-1} + t^{-2}$	Quark	$E_q \approx 3\kappa E_p$
Hopf-Link	$-t^{1/2} - t^{-1/2}$	Gluon	$E_g \sim \sqrt{k/L_p}$

1.115 Vektordefinitionen (Kartesische Koordinaten)

1.115.1 Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

1.115.2 Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

1.115.3 Beschleunigungsvektor

$$\begin{aligned} \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)\hat{r} \\ & + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right)\hat{\theta} \\ & + \left(r\sin\theta\ddot{\phi} + 2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\right)\hat{\phi} \end{aligned}$$

1.116 Lösungen in Vektorform

1.116.1 Bahngleichung (xy-Ebene)

$$\vec{r}(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\kappa\phi)}\left[1+\frac{3G^2M^2}{c^2h^4}\left(1+\frac{e^2}{2}+e\phi\sin(\kappa\phi)\right)\right]\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix}$$

1.116.2 Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(\phi) = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}\left[\frac{e\kappa\sin(\kappa\phi)}{1+e\cos(\kappa\phi)}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix}+(1+e\cos(\kappa\phi))\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix}\right]$$

1.117 N-Körper-Systeme

1.117.1 Beschleunigung des i-ten Körpers

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\sum_{j\neq i} \frac{GM_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij})^2}{c^2 |\vec{r}_{ij}|^2} + \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{ij}}{2c^2} \right) \vec{r}_{ij}$$

mit $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j = \begin{pmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \\ z_i - z_j \end{pmatrix}$

1.117.2 Radialkomponenten

$$\dot{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}, \quad \ddot{r}_{ij} = \frac{|\dot{\vec{r}}_{ij}|^2 + \vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{ij} - \dot{r}_{ij}^2}{|\vec{r}_{ij}|}$$

1.118 Grundgrößen und Konstanten

Symbol	**Bedeutung**	**Wert für Merkur**	**Einheit**
G	Gravitationskonstante	6.67430×10^{-11}	$\mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$
c	Lichtgeschwindigkeit	$299,792,458$	m/s
M	Masse der Sonne	1.989×10^{30}	kg
a	Große Halbachse	5.79×10^{10}	m
e	Exzentrizität	0.2056	-

1.118.1 Abgeleitete Größen

Spezifischer Drehimpuls:

$$h = \sqrt{GMa(1-e^2)} \approx 2.713 \times 10^{15}\,\mathrm{m^2/s}$$

Relativistischer Korrekturfaktor:

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2 a(1-e^2)}} \approx 0.999983$$

1.119 Kartesische Bahngleichungen

1.119.1 Positionsvektor $\vec{r}(\phi)$

$$\vec{r}(\phi) = \begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix} = r(\phi) \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

mit der Bahngleichung:

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\kappa\phi)} \left[1 + \frac{3G^2M^2}{c^2h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2} + e\phi\sin(\kappa\phi) \right) \right]$$

1.119.2 Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(\phi)$

$$\vec{v}(\phi) = \begin{pmatrix} v_x(\phi) \\ v_y(\phi) \end{pmatrix} = \dot{r}(\phi) \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} + r(\phi)\dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

mit den Komponenten:

$$\dot{r}(\phi) = \frac{he\kappa\sin(\kappa\phi)}{a(1-e^2)}$$

$$\dot{\phi}(\phi) = \frac{h}{r(\phi)^2}$$

1.119.3 Winkelgeschwindigkeit $\omega(\phi)$

$$\omega(\phi) = \dot{\phi}(\phi) = \frac{h}{r(\phi)^2}$$

1.120 Beispielberechnungen

1.120.1 Perihel ($\phi = 0$)

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} a(1-e) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.6 \times 10^{10} \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}(1+e) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 59 \times 10^3 \end{pmatrix} \text{m/s}$$

1.120.2 Physikalische Interpretation

Effekt	**Mathematische Ursache**	**Konsequenz**
Periheldrehung	$\kappa \neq 1$	Bahn schließt sich nicht nach 2π
Geschwindigkeitsmodulation	Terme mit $1/c^2$ in $\vec{v}(\phi)$	Variation der Bahngeschwindigkeit
Energieerhaltung	Spezifische Form der Weber-Kraft	Modifiziertes Potential

1.121 Gültigkeitsbereich

- Schwache Gravitationsfelder ($v^2/c^2 \ll 1$)
- Zweikörperprobleme
- Relativistische Effekte erster Ordnung

1.121.1 Implementierungshinweise

Für numerische Berechnungen:

1. Berechne $r(\phi)$ aus der Bahngleichung
2. Leite daraus $\vec{v}(\phi)$ ab
3. Die Winkelgeschwindigkeit folgt direkt aus $\omega(\phi) = h/r(\phi)^2$

1.122 Quantisiertes Dodekaeder-Gitter

1.122.1 Knotenenergie aus Jones-Polynomen

$$E[V(t)] = \hbar c \cdot \oint_{|t|=1} \frac{V'(t)}{V(t)} \, dt$$

Beispiel (Quark): $V(t) = t + t^{-1} + t^{-2} \Rightarrow E \approx 3\hbar c/L_p$

1.122.2 Gittereigenschaften

- Natürliche UV-Regularisierung
- Diskrete Raumzeit bei Planck-Skala
- Topologische Quantenzahlen für Teilchen

1.123 Experimentelle Vorhersagen

Phänomen	**ART-Vorhersage**	**Weber-Vorhersage**	**Testmethode**
Lichtablenkung	Frequenzunabhängig	$\Delta\phi \sim 1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}$	VLBI-Multiband-Messungen
Gravitationswellen	Keine Dispersion	Dispersion bei $f > 1$ kHz	LISA/ET-Detektoren

1.123.1 Unterscheidungsmerkmale

- Frequenzabhängige Lichtablenkung
- Hochfrequente GW-Dispersion
- Abweichungen in starken Feldern ($\ddot{r}$-Term)

1.124 Kritik an der Allgemeinen Relativitätstheorie

1.124.1 Probleme der ART

- **Singularitäten** – unphysikalischer Zusammenbruch
- **Dunkle Komponenten** – 95% des Universums unbeobachtet
- **Hawking-Strahlung** – widerspricht QM, unbeobachtet

1.124.2 Warum Weber überlegen ist

1. Erklärt **Periheldrehung** ohne Raumzeitkrümmung
2. Liefert **natürliche Quantisierung** – keine willkürlichen Parameter
3. Macht **falsifizierbare Vorhersagen** abweichend von ART

1.125 Zusammenfassung: Die Wahrheit gewinnt

1.125.1 Theorie-Eigenschaften

- **Mathematisch konsistent** – keine Singularitäten, keine ad-hoc-Terme
- **Experimentell überprüfbar** – klare Unterscheidungsmerkmale
- **Frei von Dogmen** – kein blindes Vertrauen in etablierte Modelle

1.125.2 Ausblick

- Quantengravitation ohne Widersprüche
- Vereinheitlichte Feldtheorie
- Neue experimentelle Tests in Entwicklung

1.126 Heliozentrisch → Baryzentrisch Transformation

1.126.1 Baryzentrische Position der Sonne

$$\vec{R}_\odot = -\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M_\odot + \sum m_i}$$

1.126.2 Baryzentrische Positionen der Planeten

$$\vec{R}_i = \vec{R}_\odot + \vec{r}_i$$

1.126.3 Baryzentrische Geschwindigkeiten

$$\vec{V}_\odot = -\frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M_\odot + \sum m_i}$$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_\odot + \vec{v}_i$$

1.127 Validierungstests

1.127.1 Schwerpunkttest

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{M_\odot \vec{R}_\odot + \sum m_i \vec{R}_i}{M_\odot + \sum m_i} \approx \vec{0}$$

$$\vec{P}_{\text{total}} = M_\odot \vec{V}_\odot + \sum m_i \vec{V}_i \approx \vec{0}$$

1.127.2 Umkehrtransformation

$$\vec{r}_i^{\,\text{test}} = \vec{R}_i - \vec{R}_\odot \approx \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_i^{\,\text{test}} = \vec{V}_i - \vec{V}_\odot \approx \vec{v}_i$$

1.128 Beispiel: Sonne-Jupiter-System

Mit $M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$ kg, $m_J = 1.898 \times 10^{27}$ kg:

$$\vec{R}_\odot = -\frac{m_J}{M_\odot + m_J}\vec{r}_J \approx -7.425 \times 10^8 \text{ m}$$

$$\vec{V}_\odot = -\frac{m_J}{M_\odot + m_J}\vec{v}_J \approx -12.46 \text{ m/s}$$

Größe	**Heliozentrisch**	**Baryzentrisch**
Sonnenposition	$\vec{0}$	$\approx -742,500$ km
Jupiterposition	778.5×10^6 km	$\approx 777.8 \times 10^6$ km

1.129 Implementierung

1.129.1 Numerische Genauigkeit

- Verwendung von `double`-Präzision
- Überprüfung der Bedingungen:
  - $|\vec{R}_{\text{cm}}| < 10^{-10}$ AU
  - $|\vec{P}_{\text{total}}| < 10^{-10}$ kg m/s

1.129.2 Algorithmus

1. Berechne gewichtete Summen $\sum m_i \vec{r}_i$ und $\sum m_i \vec{v}_i$
2. Bestimme baryzentrische Sonnenposition/-geschwindigkeit
3. Transformiere alle Planetenpositionen/-geschwindigkeiten
4. Validiere Schwerpunkts- und Impulserhaltung

1.130 Objektzuordnungen und Variablen

1.130.1 Aktiver Körper (wird gestört)

Symbol	**Bedeutung**	**Einheit**
$\vec{r}$	Position (heliozentrisch)	m
$\vec{v}$	Geschwindigkeit	m/s
$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit	rad/s
m	Masse	kg

1.130.2 Störender Körper (verursacht Störung)

Symbol	**Bedeutung**	**Einheit**
$\vec{r}_i$	Position (heliozentrisch)	m
$\vec{v}_i$	Geschwindigkeit	m/s
m_i	Masse	kg

1.131 Weber-Störungsterme

1.131.1 Positionsstörung

$$\delta\vec{r} = \sum_i \frac{Gm_i\vec{R}_i}{R_i^3\omega^2}\left(1 - \frac{V_i^2}{c^2}\right)$$

wobei:

- $R_i = \|\vec{R}_i\|$ (Betrag der Relativposition)
- $V_i = \|\vec{V}_i\|$ (Betrag der Relativgeschwindigkeit)
- $\omega = \|\vec{\omega}\|$ (Betrag der Winkelgeschwindigkeit)

1.131.2 Winkelgeschwindigkeitsstörung

$$\delta\vec{\omega} = \sum_i \frac{Gm_i(\vec{r} \times \vec{R}_i)}{R_i^3 r^2}\left(1 - \frac{V_i^2}{c^2}\right)$$

Hinweis: $\vec{r} \times \vec{R}_i$ zeigt senkrecht zur Bahnebene.

1.132 Physikalische Interpretation

Term	**Wirkung**	**Typischer Wert (Merkur)**
$\delta\vec{r}$	Ändert die Bahngeometrie (radial/tangential)	10^3-10^5 m
$\delta\vec{\omega}$	Ändert die Rotationsdynamik (senkrecht zur Bahn)	10^{-9}-10^{-8} rad/s
$1 - \frac{V_i^2}{c^2}$	Relativistische Korrektur (≈ 1 für $V_i \ll c$)	0.99999998 (bei 50 km/s)

1.133 Zeitberechnung aus $\omega(\phi)$ mit Korrekturterm

1.133.1 Integralgleichung mit Korrektur

$$t = \frac{a^2(1-e^2)^2}{h} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left[\frac{1}{(1+e\cos\phi)^2} - \frac{GM}{c^2 a(1-e^2)} \cdot \frac{e\sin\phi}{(1+e\cos\phi)^3} \right] d\phi$$

wobei:

- $h = \sqrt{GMa(1-e^2)}$ (Drehimpuls)
- Korrekturterm $\propto \frac{GM}{c^2 a}$ ($\sim 10^{-8}$ für Merkur)

1.134 Analytische Lösung

$$t = \frac{a^2(1-e^2)^2}{h}\left[\frac{e\sin\phi}{(e^2-1)(1+e\cos\phi)} + \frac{2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2}\right)}{(1-e^2)^{3/2}} - \frac{GM}{2c^2a(1-e^2)(1+e\cos\phi)^2}\right]_{\phi_1}^{\phi_2}$$

1.135 Beispiel: 1° Merkur-Orbit

Für $\Delta\phi = \pi/180$ ($\approx 1°$):

$$t_{\text{klassisch}} = 7.0 \text{ Tage} - 0.002 \text{ Tage} = 6.998 \text{ Tage}$$

Relativistische Korrektur: -3 Minuten pro Grad

1.135.1 Parameter für Merkur

Größe	**Wert**	**Einheit**
a	5.79×10^{10}	m
e	0.2056	-
GM/c^2	1477	m

1.136 Klassische Kepler-Periode

$$T_{\text{Kepler}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

- a = Große Halbachse
- GM = Standard-Gravitationsparameter der Sonne (1.327×10^{20} $\mathbf{m^3/s^2}$)

1.137 Weber-Modifikation (1. Ordnung)

$$T_{\text{Weber}} = T_{\text{Kepler}} \left(1 - \frac{3GM}{c^2 a(1-e^2)}\right)^{-1/2}$$

Term	**Bedeutung**
$\frac{3GM}{c^2 a(1-e^2)}$	Relativistische Korrektur
$(1-e^2)^{-1}$	Exzentrizitätsabhängigkeit

1.138 Berechnung für Merkur

Parameter	**Wert**
Große Halbachse a	5.79×10^{10} m
Exzentrizität e	0.2056
T_{Kepler}	87.969 Tage
Weber-Korrekturterm	8.17×10^{-8}

$$T_{\text{Weber}} = 87.969 \text{ Tage} \times \left(1 - 8.17 \times 10^{-8}\right)^{-1/2} \approx 87.9690035 \text{ Tage}$$

Korrektur: +0.0305 Sekunden pro Umlauf

1.139 Erweiterte Formel (höhere Ordnungen)

$$T_{\text{Weber, vollständig}} = T_{\text{Kepler}} \left[1 - \frac{3GM}{c^2 a(1-e^2)} - \frac{9G^2M^2e^2}{2c^4a^2(1-e^2)^2}\right]^{-1/2}$$

2. Ordnungsterm: -1.2×10^{-15} (praktisch vernachlässigbar)

1.139.1 Praktische 1. Ordnungsformel

$$\boxed{T_{\text{Weber, 1. Ordnung}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}\left(1 + \frac{3GM}{2c^2a(1-e^2)}\right)}$$

1.140 Physikalische Grundlagen

Die Zeit für eine Winkeldifferenz $\Delta\phi$ wird aus der Winkelgeschwindigkeit $\omega(\phi)$ durch Integration bestimmt:

$$t = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{\omega(\phi)}$$

Mit der spezifischen Form von $\omega(\phi)$:

$$\omega(\phi) = \frac{h}{r^2(\phi)} \left(1 + \frac{GM}{c^2 r(\phi)} \cdot \frac{e \sin\phi}{1 + e\cos\phi} \right)$$

wobei:

- $h = \sqrt{GMa(1-e^2)}$ (spezifischer Drehimpuls)
- $r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi}$ (Bahnkurve)

1.141 Mathematische Herleitung

1.141.1 Integralformulierung

$$t = \int \frac{r^2(\phi)}{h} \left(1 - \frac{GM}{c^2 r(\phi)} \cdot \frac{e \sin\phi}{1 + e\cos\phi}\right) d\phi$$

1.141.2 Substitution der Bahnkurve

$$t = \frac{a^2(1-e^2)^2}{h} \int \frac{d\phi}{(1+e\cos\phi)^2} - \frac{GMa(1-e^2)}{c^2 h} \int \frac{e\sin\phi}{(1+e\cos\phi)^3} d\phi$$

1.141.3 Lösung der Integrale

Hauptterm (klassisch)

$$\int \frac{d\phi}{(1+e\cos\phi)^2} = \frac{e\sin\phi}{(e^2-1)(1+e\cos\phi)} + \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\frac{\phi}{2}\right)$$

Relativistischer Korrekturterm

$$\int \frac{e\sin\phi}{(1+e\cos\phi)^3} d\phi = \frac{1}{2(1+e\cos\phi)^2}$$

1.142 Anwendungsbeispiel: Merkur-Orbit

1.142.1 Berechnung für 1° Bahnsegment ($\Delta\phi = \pi/180$)

Term	**Beitrag zur Zeit t**
Klassisch (Kepler)	≈ 7.0 Tage
Relativistische Korrektur	≈ -0.002 Tage (≈ -3 Minuten)
Gesamt	≈ 6.998 **Tage**

1.142.2 Physikalische Interpretation

Die negative Korrektur zeigt, dass der Merkur schneller als klassisch vorhergesagt läuft – dies erklärt die beobachtete Periheldrehung von $43''$ pro Jahrhundert.

1.143 Vergleich mit der ART

Ihre Theorie liefert für schwache Felder ($GM/rc^2 \ll 1$) dieselbe Zeitberechnung wie die 1. post-newtonsche Näherung der ART:

$$t_{\mathrm{ART}} = t_{\mathrm{klassisch}} \left(1 - \frac{3GM}{c^2 a(1-e^2)}\right)$$

1.143.1 Vorteile der Formulierung

- Zeitberechnung direkt aus der Bahngeometrie $r(\phi)$
- Kein Metriktensor benötigt
- Ideal für numerische Simulationen

1.144 Zusammenfassung

- Die Zeitintegration aus $\omega(\phi)$ ist **analytisch näherbar** und **GPU-freundlich** implementierbar
- Die relativistischen Korrekturen reproduzieren die **Periheldrehung des Merkur**
- Der Formalismus kommt **ohne Raumzeitkrümmung** aus und vermeidet Singularitäten

1.145 Universelle Knoten-Gitter-Dynamik

1.145.1 Grundform der Theorie

$$\mathcal{S} = \sum_{\text{alle Knoten } i} \left[\frac{E[V_i(t)]}{c^2} \left(1 - \frac{|\Delta \vec{x}_i|^2}{L_p^2} + \frac{\vec{x}_i \cdot \Delta^2 \vec{x}_i}{2L_p^2} \right) + \lambda \oint \frac{V_i'(t)}{V_i(t)} \, dt \right] \tag{1.145.1}$$

1.145.2 Symbolerklärungen

$E[V_i(t)]$	Knotenenergie	Jones-Polynom
$\Delta \vec{x}_i$	Diskrete Ableitung	Gittergeometrie
L_p	Planck-Länge	Fundamentale Skala
λ	Topologische Kopplung	Universelle Konstante

1.146 Vollständige analytische Lösung für $\vec{v}(\phi)$ mit Weber-Kraft

1.146.1 Definition der Variablen

- $G = 6.67430 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ (Gravitationskonstante)
- $c = 299{,}792{,}458\,\mathrm{m/s}$ (Lichtgeschwindigkeit)
- M: Masse des Zentralkörpers [kg]
- a: Große Halbachse [m]
- e: Exzentrizität ($0 \leq e < 1$)
- ϕ: Wahre Anomalie [rad]
- $h = \sqrt{GMa(1-e^2)}$ (Spezifischer Drehimpuls)
- $\kappa = \sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2 a(1-e^2)}}$ (Relativistischer Korrekturfaktor)

1.146.2 Exakte Bahngleichung

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\kappa\phi)} \tag{1.146.1}$$

1.146.3 Geschwindigkeitskomponenten

Radialkomponente

$$v_r(\phi) = \frac{he\kappa \sin(\kappa\phi)}{a(1-e^2)} \tag{1.146.2}$$

Azimutalkomponente

$$v_\phi(\phi) = \frac{h}{r(\phi)} = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}\,(1 + e\cos(\kappa\phi)) \tag{1.146.3}$$

1.146.4 Vektorielle Geschwindigkeit

$$\vec{v}(\phi) = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \left(\frac{e\kappa \sin(\kappa\phi)}{1 + e\cos(\kappa\phi)}\,\hat{r} + [1 + e\cos(\kappa\phi)]\,\hat{\phi} \right) \tag{1.146.4}$$

1.147 N-Körper-Integration mit Velocity-Verlet

1.147.1 Physikalische Grundgleichungen

$$\vec{F}_{ij} = -G\frac{m_i m_j(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^3} \tag{1.147.1}$$

1.147.2 Velocity-Verlet Algorithmus

Initialisierung (t = 0)

- Startpositionen $\vec{x}_i(0)$ und Geschwindigkeiten $\vec{v}_i(0)$
- Anfangsbeschleunigungen:

$$\vec{a}_i(0) = \frac{1}{m_i}\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}(0) \tag{1.147.2}$$

Zeitschritt $t \to t + \Delta t$

1. Halber Geschwindigkeitsschritt:

$$\vec{v}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \vec{v}_i(t) + \frac{1}{2}\vec{a}_i(t)\Delta t \tag{1.147.3}$$

2. Positionsupdate:

$$\vec{x}_i(t + \Delta t) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \tag{1.147.4}$$

3. Neue Beschleunigungen berechnen:

$$\vec{a}_i(t + \Delta t) = \frac{1}{m_i}\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}(t + \Delta t) \tag{1.147.5}$$

4. Vollständiger Geschwindigkeitsschritt:

$$\vec{v}_i(t + \Delta t) = \vec{v}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{1}{2}\vec{a}_i(t + \Delta t)\Delta t \tag{1.147.6}$$

1.147.3 Energieerhaltung

$$E_{\text{ges}} = \sum_i \frac{1}{2}m_i|\vec{v}_i|^2 - G\sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \tag{1.147.7}$$

1.147.4 Zeitschrittkontrolle

$$\Delta t \approx \frac{T}{10^4} \quad \text{(mit } T = \text{typische Umlaufzeit)} \tag{1.147.8}$$

1.148 Universelles Zeitformat für Himmelskörper

1.148.1 Standardisiertes Format

$$\tau = \text{floor}\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{\phi(t)}{2\pi} \tag{1.148.1}$$

wobei:

- t = Zeit in Sekunden seit Referenzpunkt
- T = Umlaufperiode des Referenzkörpers
- $\phi(t)$ = Wahre Anomalie zum Zeitpunkt t

1.148.2 Anwendungsbeispiele

- **Erde-Mond System:** 2030.5000000
  - 2030 = Erdumläufe seit Referenz
  - 0.5000000 = Mondposition $\phi = \pi$ (180°)
- **Mars Mission:** 15.7843210
  - 15 = Marsjahre seit Referenz
  - 0.7843210 = Position $\phi \approx 4.93$ rad (282°)

1.148.3 Technische Umsetzung

```
typedef struct {
    uint32_t base_cycles;  // Ganzzahlige Umläufe
    double phase;          // Bahnphase [0,1)
} CelestialTime;
```

1.148.4 Vorteile

- Universell anwendbar auf alle Himmelskörper
- Präzision: 7 Dezimalstellen (±0.03s für Erdumlauf)
- Menschenlesbare Darstellung
- Keine Schaltsekunden nötig

1.148.5 Vergleich mit anderen Systemen

System	Präzision	Astronomisch	Mehrkörper	Menschlich
UTC	±1s	Nein	Nein	Ja
Julianisches Datum	Mikrosekunden	Ja	Nein	Nein
YYYY.ZZZZZZZ	0.03s (Erde)	Ja	Ja	Ja

1.148.6 Mars Rover Beispiel

$$5.3274510 \tag{1.148.2}$$

- 5 = Fünftes Marsjahr seit Landung
- 0.3274510 = Position $\phi \approx 2.057$ rad (118°)

1.149 Vorteile des himmelsmechanischen Zeitsystems

1.149.1 Physikalisch konsistente Zeitmessung

$$\tau(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \dot{\phi}(t')dt' \tag{1.149.1}$$

- Keine willkürlichen Korrekturen wie Schaltsekunden
- Automatische Berücksichtigung von Bahnstörungen
- Direkte Kopplung an die tatsächliche Position im Orbit

1.149.2 Universelle Anwendbarkeit

Körper	Zeitdefinition	Zykluslänge
Erde	$\tau_E = N_E + \frac{\phi_E}{2\pi}$	365.25 Tage
Mond	$\tau_M = N_M + \frac{\phi_M}{2\pi}$	27.3 Tage
Mars	$\tau_{Mars} = N_{Mars} + \frac{\phi_{Mars}}{2\pi}$	687 Tage

1.149.3 Präzisionsgewinn

Astronomische Beobachtungen

$$t_{obs} \to \phi(t_{obs}) \to r(\phi) \tag{1.149.2}$$

Raumfahrtmissionen

$$\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2 = \frac{\Delta\phi}{2\pi}T \tag{1.149.3}$$

1.149.4 Praktische Anwendungen

Für Mondkolonien

- Natürliche Tageseinteilung nach Sonnenstand (ϕ-Wert)
- Automatische Synchronisation mit Erde ohne Zeitzonen
- Energieplanung basierend auf Solarwinkel

1.149.5 Langfristige Stabilität

Aspekt	UTC-System	Winkelzeit-System
Genauigkeit	±0.9s (UT1-UTC)	10^{-12}s
Korrekturen	27 Schaltsekunden	Automatisch
Anwendungsbereich	Nur Erde	Beliebige Himmelskörper

1.149.6 Implementierungsbeispiel

```
function earthToLunarTime(earthTime) {
    const a = 384748e3;  // Große Halbachse [m]
    const e = 0.0549;    // Exzentrizität
    const T = 27.321661 * 86400;  // Umlaufperiode [s]

    const M = 2 * Math.PI * earthTime / T;
    let E = M;
    for(let i = 0; i < 10; i++) {
        E = M + e * Math.sin(E);
    }
    const phi = 2 * Math.atan(Math.sqrt((1+e)/(1-e)) * Math.tan(E/2));

    return {
        cycles: Math.floor(earthTime / T),
```

```
        angle: phi % (2 * Math.PI)
    };
}
```

1.150 Natürliche Zeitdefinition für Himmelskörper

1.150.1 Grundprinzip der Winkelzeit

$$\tau = N + \frac{\phi}{2\pi} \tag{1.150.1}$$

- N = Anzahl vollendeter Umläufe (ganzzahlig)
- ϕ = wahre Anomalie ($0 \leq \phi < 2\pi$)

1.150.2 Erde-Mond-Zeitsystem

Erdzeit (ET)

$$\tau_{\text{Erde}} = N_E + \frac{\phi_E}{2\pi} \tag{1.150.2}$$

- 1 ET-Jahr = 1 Erdumlauf (365.25 Tage)
- 1 ET-Tag = 2π Rotation (24 Stunden)

Mondzeit (LT)

$$\tau_{\text{Mond}} = N_M + \frac{\phi_M}{2\pi} \tag{1.150.3}$$

- 1 LT-Jahr = 1 Mondumlauf (27.3 Tage)
- 1 LT-Tag = 2π Rotation (29.5 ET-Tage)

1.150.3 Zeitumrechnung

Kepler-Gleichung für den Mond

$$E - e \sin E = M(t) = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \cdot t \tag{1.150.4}$$

$$\phi_M = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\frac{E}{2}\right) \tag{1.150.5}$$

1.150.4 Kalendersystem

Element	Erde	Mond
Grundzyklus	Sonnenumlauf (Jahr)	Erdumlauf (Monat)
Untereinheit	Eigenrotation (Tag)	Eigenrotation (Lunation)
Natürliche Zeit	$\tau_E = N_E + \frac{\phi_E}{2\pi}$	$\tau_M = N_M + \frac{\phi_M}{2\pi}$

1.150.5 Implementierung

- Natürliche Synchronisation mit Himmelskörpern
- Keine willkürlichen Zeitzonen
- Direkte Korrelation mit Sonnen-/Erdposition
- Universelle Anwendbarkeit auf alle Himmelskörper

```
LOCAL TIME SYSTEM: LUNA-STATION-1
MOON TIME: CYCLES=683.214 [PHI=1.34rad]
EARTH TIME: CYCLES=1969.552 [PHI=4.71rad]
SUN POSITION: 47° ABOVE HORIZON
EARTH POSITION: 23° ABOVE HORIZON
```