

Mein Dokument

Dein Name

29. Juni 2025

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Grundgleichungen der Weber-Kraft

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

1.2 Klassische Lösung (0. Ordnung)

Für $c \rightarrow \infty$ ergibt sich die Kepler-Bahn:

$$r_0(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}$$

$$a_0(\varphi) = -\frac{GM}{r_0^2(\varphi)}$$

1.3 Relativistische Korrektur (1. Ordnung)

Störungsansatz für die Beschleunigung:

$$a(\varphi) = a_0(\varphi) + \frac{GM}{c^2} a_1(\varphi) + \mathcal{O}(1/c^4)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert den Korrekturterm:

$$a_1(\varphi) = \frac{GM}{r_0^2(\varphi)} \left(\frac{3h^2}{r_0^2(\varphi)} - \frac{h^2}{2GM r_0(\varphi)} \left(\frac{dr_0}{d\varphi} \right)^2 \right)$$

1.4 Beschleunigung bis zur 1. Ordnung

$$a(\varphi) = -\frac{GM}{r_0^2(\varphi)} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{3h^2}{r_0^2(\varphi)} - \frac{h^2}{2GM r_0(\varphi)} \left(\frac{dr_0}{d\varphi} \right)^2 \right) \right]$$

Hinweis: $r_0(\varphi)$ ist die klassische Kepler-Lösung, h der spezifische Drehimpuls.

1.5 Explizite Form mit Bahnelementen

Einsetzen von $r_0(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \varphi}$:

$$a(\varphi) = -\frac{GM(1+e \cos \varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2} \left[1 - \frac{3h^2(1+e \cos \varphi)^2}{c^2 a^2(1-e^2)^2} + \frac{h^2 e^2 \sin^2 \varphi}{2c^2 GM a^3(1-e^2)^3} (1+e \cos \varphi)^3 \right]$$

1.6 Theoretische Grundlage

$$r(\phi) = r_{\text{ART}}(\phi) + \delta r(\phi)$$

Hier ist $r_{\text{ART}}(\phi)$ die analytische Näherung (ART-genau) und $\delta r(\phi)$ die numerisch berechnete Korrektur.

1.7 Schrittweitensteuerung

Die Schrittweite $\Delta\phi$ wird dynamisch aus den analytischen Ableitungen bestimmt:

$$\Delta\phi = \min \left(\Delta\phi_{\max}, \frac{\epsilon}{|w(\phi)| + |v(\phi)|} \right)$$

mit $v(\phi) = \frac{dr}{d\phi}$ und $w(\phi) = \frac{d^2r}{d\phi^2}$ aus der ART-Näherung.

1.8 Numerische Korrektur

In jedem Schritt wird nur die Abweichung von der ART-Näherung numerisch integriert:

$$\delta r(\phi + \Delta\phi) = \delta r(\phi) + \text{Numerische Integration von } (\text{DGL} - \text{ART-Ableitung})$$

1.9 Gesamtlösung

Die finale Lösung kombiniert beide Anteile:

$$r(\phi + \Delta\phi) = r_{\text{ART}}(\phi + \Delta\phi) + \delta r(\phi + \Delta\phi)$$

1.10 Kartesische Koordinaten

$$\vec{r}(\phi) = \begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix}$$

$$r(\phi) = \sqrt{x(\phi)^2 + y(\phi)^2}$$

$$\omega(\phi) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{h}{r(\phi)^2}$$

1.11 Weber-Kraft in kartesischer Form

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}\left(1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2} + \frac{\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}}{2c^2}\right)$$

1.12 Zeitliche Ableitungen

$$\dot{\vec{r}} = \omega \frac{d\vec{r}}{d\phi} = \omega \vec{r}'$$

$$\ddot{\vec{r}} = \omega^2 \vec{r}'' + \omega \frac{d\omega}{d\phi} \vec{r}'$$

1.13 Skalarprodukte

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \omega^2(x'^2 + y'^2)$$

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = \omega^2(xx'' + yy'') + \omega \frac{d\omega}{d\phi}(xx' + yy')$$

1.14 Differentialgleichung für $x(\phi)$

$$x'' = \frac{1}{1 + \frac{GM}{2c^2 r}} \left[\frac{2(x'^2 + y'^2)}{r^2} x - \frac{GM}{\omega^2 r^3} x \left(1 - \frac{\omega^2 (x'^2 + y'^2)}{c^2} \right) \right]$$

1.15 Differentialgleichung für $y(\phi)$

$$y'' = \frac{1}{1 + \frac{GM}{2c^2 r}} \left[\frac{2(x'^2 + y'^2)}{r^2} y - \frac{GM}{\omega^2 r^3} y \left(1 - \frac{\omega^2(x'^2 + y'^2)}{c^2} \right) \right]$$

1.16 Differentialgleichung für $\omega(\phi)$

$$\frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{2h}{r^3}(xx' + yy')$$

1.17 Zusammenfassung des DGL-Systems

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{Y}}{d\phi} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \\ \omega' \end{pmatrix}$$

1.18 Koordinatensystem und Basisvektoren

$$\hat{e}_r = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}$$

$$\hat{e}_\phi = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{e}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi$$

1.19 Post-Newtonische Kraft in vektorieller Form

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2} + \frac{(\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}})}{2c^2} \right) \hat{e}_r$$

1.20 Geschwindigkeitsquadrat

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2$$

1.21 Beschleunigungsskalarprodukt

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = r\ddot{r} - r^2\dot{\phi}^2$$

1.22 Bewegungsgleichung in vektorieller Form

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r} - r^2\dot{\phi}^2}{2c^2} \right) \hat{e}_r$$

1.23 Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\phi^2} = f_x\left(x, y, \frac{dx}{d\phi}, \frac{dy}{d\phi}\right) \\ \frac{d^2y}{d\phi^2} = f_y\left(x, y, \frac{dx}{d\phi}, \frac{dy}{d\phi}\right) \end{cases}$$

1.24 Explizite DGL für x-Komponente

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} = \frac{\frac{GMm^2}{L^2} \frac{x}{r^3} - \frac{x}{r^2} - \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{dx}{d\phi} \frac{dy}{d\phi} \left(y \frac{dx}{d\phi} - x \frac{dy}{d\phi} \right) + \frac{x}{2r^4} \left(\left(\frac{dx}{d\phi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi} \right)^2 \right) \right) \right]}{1 - \frac{GM}{2c^2 r}}$$

1.25 Explizite DGL für y-Komponente

$$\frac{d^2 y}{d\phi^2} = \frac{\frac{GMm^2}{L^2} \frac{y}{r^3} - \frac{y}{r^2} - \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{dx}{d\phi} \frac{dy}{d\phi} \left(x \frac{dy}{d\phi} - y \frac{dx}{d\phi} \right) + \frac{y}{2r^4} \left(\left(\frac{dx}{d\phi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi} \right)^2 \right) \right) \right]}{1 - \frac{GM}{2c^2 r}}$$

1.26 Transformiertes System 1. Ordnung

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\phi} = v_x \\ \frac{dy}{d\phi} = v_y \\ \frac{dv_x}{d\phi} = f_x(x, y, v_x, v_y) \\ \frac{dv_y}{d\phi} = f_y(x, y, v_x, v_y) \end{cases}$$

1.27 Klassische Weber-Kraft (Elektrodynamik)

$$F_{Weber}^{EM} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{2r\ddot{r}}{c^2} \right) \hat{r}$$

1.28 Quantisierte Weber-Kraft (Gittermodell)

$$F_{Weber}^{QED} = \frac{V_1(t)V_2(t)}{4\pi\epsilon_0(nL_p)^2} \left(1 - \frac{(\Delta L_p/\Delta t_p)^2}{c^2} + \frac{2L_p\Delta^2 L_p}{c^2\Delta t_p^2} \right) \hat{r}$$

1.29 Elektrisches Feld als Deformationsgradient

$$\vec{E} = \frac{\Delta(\text{Zellvolumen})}{L_p^3} \cdot \hat{r}$$

1.30 Universelle Weber-Kraft

$$F_{universal} = \frac{K \cdot V_1(t)V_2(t)}{(nL_p)^2} \left(1 - \frac{v_{eff}^2}{c^2} + \frac{\beta L_p a_{eff}}{c^2} \right) \hat{r}$$

1.31 Energie-Impuls-Beziehung für Photonen

$$E = \hbar\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

1.32 Webers Gravitationskraft

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \left[1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{r \cdot a}{c^2} \right]$$

1.33 Theorievergleich: ART vs. Weber

Aspekt	ART	Weber
Raummodell	Raumzeitkrümmung	Direkte Teilchenwechselwirkung
Gravitationswellen	Vorhanden	Nicht existent
Schwarze Löcher	Singularitäten	Keine Singularitäten
Galaxienrotation	Dunkle Materie benötigt	Natürliche Erklärung
Quantenkompatibilität	Problemhaft	Einfacher quantisierbar

1.34 Vorteile der Weber-Theorie

- Erklärt Galaxienrotation ohne Dunkle Materie
- Vermeidet Singularitäten
- Leichter mit Quantenphysik vereinbar
- Direkte Kräfte zwischen Teilchen (keine Raumkrümmung)

1.35 Historische Dominanz der ART

- Frühe experimentelle Bestätigung (1919)
- Einsteins Bekanntheit
- Forschungsinfrastruktur auf ART ausgerichtet
- Weber-Theorie als ältnodischäbgetan

1.36 Quantengravitation mit Weber

- Keine Hawking-Strahlung vorhergesagt
- Neue Gravitationssignal-Typen möglich
- Direkte Quantisierung der Kraftgleichung
- Kompatibel mit Quantenfeldtheorien

1.37 Modifizierte Weber-Kraft (gravitativ)

$$F_{Weber}^{Grav} = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right) \hat{r}$$

1.38 Periheldrehung des Merkur

$$\Delta\theta = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}$$

1.39 Allgemeine β -Formel

$$\beta = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\delta} \cdot \left(1 - \frac{mc^2}{E}\right)$$

1.40 Universelle Weber-Kraft für Massen

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

1.41 Gravitationswellengleichung

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \beta \cdot \partial_t^2 Q_{\mu\nu} \right)$$

1.42 Quantisierte Weber-Kraft (QED)

$$F_{Weber}^{QED} = \frac{V_1(t)V_2(t)}{4\pi\epsilon_0(nL_p)^2} \left(1 - \frac{(\Delta L_p/\Delta t_p)^2}{c^2} + \frac{2L_p\Delta^2 L_p}{c^2\Delta t_p^2} \right) \hat{r}$$

1.43 Frequenzabhängige Lichtablenkung

$$\Delta\phi \sim \frac{4GM}{c^2 b} \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right)$$

1.44 Hamiltonian des Dodekaeder-Gitters

$$\mathcal{H} = \sum_{\text{Kanten}} \epsilon(V_i(t) - V_j(t))^2$$

1.45 Modifizierte Weber-Kraft (gravitativ)

$$F_{Weber}^{Grav} = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right) \hat{r}$$

1.46 Periheldrehung des Merkur

$$\Delta\theta = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}$$

1.47 Gravitative Rotverschiebung

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 r} + \frac{v_r^2}{2c^2}$$

1.48 Shapiro-Laufzeitverzögerung

$$\Delta t \approx \frac{4GM}{c^3} \ln \left(\frac{4r_1 r_2}{b^2} \right)$$

1.49 Gravitationswellen-Quadrupolformel

$$F_{\text{GW}} = -\frac{G}{c^4} \cdot \frac{\partial^3 Q_{ij}}{\partial t^3} \cdot \frac{x^i x^j}{r^3}$$

1.50 Quantisierte Raumzeit-Parameter

$$L_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.616 \times 10^{-35} \text{m}$$

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.391 \times 10^{-44} \text{s}$$

1.51 Weber-Kraft im Dreikörpersystem

$$\mathbf{F}_1 = -Gm_1 \left[\frac{m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} + \frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{2c^2} \right) + \frac{m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \left(1 - \frac{\dot{r}_{13}^2}{c^2} + \frac{r_{13}\ddot{r}_{13}}{2c^2} \right) \right]$$

1.52 Modifizierte Weber-Kraft

$$F_{Weber} = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

1.53 Predictor-Corrector-Verfahren

- Berechne aktuelle Beschleunigung $a = F_{\text{weber}}(r, v)/m$
- Vorhersage neue Geschwindigkeit $v_{\text{neu}} = v + a \cdot dt$
- Vorhersage neue Position $r_{\text{neu}} = r + v \cdot dt + 0.5 \cdot a \cdot dt^2$
- Neuberechnung $a_{\text{neu}} = F_{\text{weber}}(r_{\text{neu}}, v_{\text{neu}})/m$
- Korrektur $v = v + 0.5 \cdot (a + a_{\text{neu}}) \cdot dt$
- Update $r = r + v \cdot dt + 0.5 \cdot a_{\text{neu}} \cdot dt^2$

1.54 Symplektische Integration

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + p_n \cdot dt \\ p_{n+1} = p_n - \nabla V(q_{n+1}) \cdot dt \end{cases}$$

1.55 Gitter-QCD-Ansatz

$$S = \sum_{x, \mu < \nu} \operatorname{Re} \operatorname{Tr}(1 - U_{\mu\nu}(x)) + \sum_x \bar{\psi}(x) D \psi(x)$$

1.56 N-Körper-Weber-Kraft

$$\mathbf{F}_i = -G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2} + \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{2c^2} \right)$$

1.57 Weber-Gravitationskraft

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

1.58 Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

1.59 Drehimpulserhaltung

$$h = r^2 \dot{\phi} = \text{konstant}$$

$$\dot{\phi} = \frac{h}{r^2}$$

1.60 Modifizierte Radialgleichung

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 - \frac{GM}{2c^2h^2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2$$

1.61 Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\phi}(\varphi) = \frac{h}{r(\varphi)^2}$$

1.62 Näherungslösung für Merkurbahn

$$r(\varphi) \approx \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi} \left[1 + \frac{3GM}{c^2 a(1-e^2)} \varphi e \sin\varphi \right]$$
$$\dot{\phi}(\varphi) \approx \frac{h(1+e\cos\varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2} \left[1 - \frac{6GM}{c^2 a(1-e^2)} \varphi e \sin\varphi \right]$$

1.63 Die Kerninnovation

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{\text{Newton}} \left(1 - \frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2} \right)$$

1.64 Vollständige Impulsdynamik

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left[e \sin \phi (1 + e \cos \phi) \hat{r} + (1 + e \cos \phi) \hat{\phi} \right]$$

1.65 Impulsverteilungsmechanismus

$$\Delta \mathbf{p}_i = - \frac{m_i}{\sum_{j \neq k} m_j} \mathbf{K}_{ik} \Delta \mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2}$$

1.66 Iterationsschema der Impulsverteilung

$$\Delta \mathbf{p}_i^{(n+1)} = \sum_{j \neq i} \mathcal{K}_{ij} \Delta \mathbf{p}_j^{(n)}$$

$$\mathcal{K}_{ij} = -\frac{m_i}{\sum_{k \neq j} m_k} \mathbf{K}_{ij}$$

1.67 Gesamtkopplungsmatrix

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_{12} & \cdots & \mathcal{K}_{1N} \\ \mathcal{K}_{21} & 0 & \cdots & \mathcal{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}_{N1} & \mathcal{K}_{N2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Delta \vec{P} = (I - \mathcal{K})^{-1} \Delta \vec{P}^{(0)}$$

1.68 Konvergenzkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{K}^n\| \cdot \|\Delta \vec{P}^{(0)}\| < \epsilon$$

1.69 Erhaltungssicherung

$$\Delta \mathbf{p}_k \leftarrow \Delta \mathbf{p}_k - \sum_{i \neq k} \Delta \mathbf{p}_i \quad (\text{Gesamtimpuls})$$

$$\Delta \mathbf{p}_i \leftarrow \Delta \mathbf{p}_i - \frac{\Delta E}{\sum m_i v_i^2} m_i v_i \quad (\text{Energie})$$

$$\Delta \mathbf{p}_i \leftarrow \Delta \mathbf{p}_i - \frac{\Delta \mathbf{L} \times \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^2} \quad (\text{Drehimpuls})$$

1.70 Modifizierte Kraftgleichung

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{\text{Newton}} \left(1 - \frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2} \right)$$

- **Term 1:** $-\mathbf{F}_{\text{Newton}}$ (Klassische Gravitationskraft)
- **Term 2:** $-\frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{c^2}$ (Relativistische Geschwindigkeitskorrektur)
- **Term 3:** $+\frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{2c^2}$ (Beschleunigungskopplung)

1.71 Impulsgleichung für modifizierte Keplerbahn

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left[e \sin \phi (1 + e \cos \phi) \hat{r} + (1 + e \cos \phi) \hat{\phi} \right]$$

1.72 Vollständige Impulsverteilung

1.72.1 Grundprinzip

$$\Delta \mathbf{p}_i = - \frac{m_i}{\sum_{j \neq k} m_j} \mathbf{K}_{ik} \Delta \mathbf{p}_k$$

- m_i : Masse des Körpers i
- $\sum_{j \neq k} m_j$: Gesamtmasse aller anderen Körper
- \mathbf{K}_{ik} : Kopplungsmatrix

1.72.2 Kopplungsmatrix

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2}, \quad \|\mathbf{K}_{ik}\| = 1$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$$

1.72.3 Erhaltungssätze

1. Impulserhaltung:

$$\sum_i \Delta \mathbf{p}_i + \Delta \mathbf{p}_k = 0$$

2. Schwerpunkterhaltung:

$$\sum_i m_i \Delta \mathbf{r}_i = 0$$

3. Drehimpulserhaltung:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_k \times \Delta \mathbf{p}_k = 0$$

1.72.4 Spezialfall: Zwei Körper

$$\Delta \mathbf{p}_1 = - \frac{m_1}{m_2} \mathbf{K}_{12} \Delta \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \otimes (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}$$

1.73 Ausgangsgleichungen

1.73.1 Keplerbahn

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}$$

1.73.2 Drehimpulserhaltung

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr(\phi)^2}$$

1.74 Geschwindigkeitskomponenten

1.74.1 Radialgeschwindigkeit

$$\dot{r} = \frac{Le \sin \phi}{ma(1 - e^2)}(1 + e \cos \phi)$$

1.74.2 Azimutalgeschwindigkeit

$$r\dot{\phi} = \frac{L(1 + e \cos \phi)}{ma(1 - e^2)}$$

1.75 Impulsberechnung

1.75.1 Impuls in Polarkoordinaten

$$\mathbf{p} = m \left(\dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} \right)$$

1.75.2 Endergebnis

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left[e \sin \phi (1 + e \cos \phi) \hat{r} + (1 + e \cos \phi) \hat{\phi} \right]$$

1.75.3 Betrag des Impulses

$$|\mathbf{p}(\phi)| = \frac{L(1 + e \cos \phi)}{a(1 - e^2)} \sqrt{1 + e^2 \sin^2 \phi}$$

1.76 Spezialfälle**1.76.1 Kreisbahn ($e = 0$)**

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a} \hat{\phi}, \quad |\mathbf{p}| = \frac{L}{a}$$

1.76.2 Perihel ($\phi = 0$)

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a(1-e)} \hat{\phi}$$

1.76.3 Aphel ($\phi = \pi$)

$$\mathbf{p} = \frac{L}{a(1+e)} \hat{\phi}$$

1.77 Physikalische Interpretation

- Azimutaler Impuls p_ϕ ist maximal im Perihel und minimal im Aphel
- Radialer Impuls p_r verschwindet in Perihel und Aphel
- Drehimpuls L bleibt erhalten (Zentralkraft)
- Winkelabhängigkeit zeigt Modulation durch Exzentrizität

1.78 Grundgleichungen und Definitionen

1.78.1 Bahngleichung

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}$$

- a = große Halbachse
- e = numerische Exzentrizität
- ϕ = wahre Anomalie

1.78.2 Drehimpulserhaltung

$$L = mr^2 \dot{\phi} = \text{konstant}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$$

$$L^2 = GMm^2 a(1 - e^2)$$

1.79 Berechnung der Geschwindigkeiten

1.79.1 Radialgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} &= \frac{a(1-e^2)e \sin \phi}{(1+e \cos \phi)^2} \cdot \frac{L}{mr^2} \\ &= \frac{eL \sin \phi}{ma(1-e^2)}\end{aligned}$$

1.79.2 Azimutalgeschwindigkeit

$$r\dot{\phi} = \frac{L}{mr} = \frac{L(1+e \cos \phi)}{ma(1-e^2)}$$

1.80 Berechnung des Impulses

1.80.1 Impulsdefinition

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi})$$

1.80.2 Radialkomponente

$$\begin{aligned} p_r = m\dot{r} &= \frac{eL \sin \phi}{a(1 - e^2)} \\ &= \frac{em\sqrt{GM} \sin \phi}{\sqrt{a(1 - e^2)}} \end{aligned}$$

1.80.3 Azimutalkomponente

$$\begin{aligned} p_\phi = mr\dot{\phi} &= \frac{L}{r} \\ &= \frac{m\sqrt{GM}(1 + e \cos \phi)}{\sqrt{a(1 - e^2)}} \end{aligned}$$

1.81 Endergebnis

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{em\sqrt{GM} \sin \phi}{\sqrt{a(1-e^2)}} \hat{r} + \frac{m\sqrt{GM}(1+e \cos \phi)}{\sqrt{a(1-e^2)}} \hat{\phi}$$

Alternativ:

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{m\sqrt{GM}}{\sqrt{a(1-e^2)}} \left(e \sin \phi \hat{r} + (1+e \cos \phi) \hat{\phi} \right)$$

1.82 Zusätzliche Bemerkungen

- Für $e = 0$ (Kreisbahn):

$$\mathbf{p}(\phi) = \frac{m\sqrt{GM}}{\sqrt{a}} \hat{\phi}$$

- Betrag des Impulses:

$$|\mathbf{p}(\phi)| = \frac{m\sqrt{GM}}{\sqrt{a(1-e^2)}} \sqrt{e^2 \sin^2 \phi + (1 + e \cos \phi)^2}$$

1.83 Eingangsparameter

1.83.1 Kraftgleichung (radial)

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

1.83.2 Keplerbahn $r(\phi)$

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}$$

1.83.3 Drehimpulserhaltung

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}, \quad L = \text{const.}$$

1.84 Berechnung der Zeitableitungen

1.84.1 Radialgeschwindigkeit \dot{r}

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \left(\frac{a(1-e^2)e \sin \phi}{(1+e \cos \phi)^2} \right) \left(\frac{L}{mr^2} \right)$$

Vereinfacht:

$$\dot{r} = \frac{Le \sin \phi}{ma(1-e^2)} (1+e \cos \phi)$$

1.84.2 Radialbeschleunigung \ddot{r}

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\phi}(\dot{r}) \cdot \dot{\phi}$$

Mit ausführlicher Ableitung:

$$\ddot{r} = \frac{L^2 e (1+e \cos \phi)^3}{m^2 a^3 (1-e^2)^3} (\cos \phi + e)$$

1.85 Einsetzen in die Kraftgleichung

$$F = -\frac{GMm(1+e\cos\phi)^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{L^2 e^2 \sin^2 \phi (1+e\cos\phi)^2}{c^2 m^2 a^2 (1-e^2)^2} + \frac{L^2 e (1+e\cos\phi)^4 (\cos\phi + e)}{2c^2 m^2 a^3 (1-e^2)^3} \right)$$

1.86 Berechnung des Impulses $\mathbf{p}(t)$

Der Impuls in Polarkoordinaten:

$$\mathbf{p}(t) = m \left(\dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} \right)$$

Einsetzen der berechneten Größen:

$$\mathbf{p}(t) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left(e \sin \phi (1 + e \cos \phi) \hat{r} + (1 + e \cos \phi) \hat{\phi} \right)$$

1.86.1 Endergebnis

$$\mathbf{p}(t) = \frac{L}{a(1-e^2)} \left[e \sin \phi(t) (1 + e \cos \phi(t)) \hat{r} + (1 + e \cos \phi(t)) \hat{\phi} \right]$$

mit $\phi(t)$ bestimmt durch:

$$\dot{\phi} = \frac{L(1 + e \cos \phi)^2}{ma^2(1 - e^2)^2}$$

1.87 Interpretation und Anmerkungen

- Der Impuls hängt wesentlich vom zeitlichen Verlauf $\phi(t)$ ab
- Für Kreisbahnen ($e = 0$) vereinfacht sich die Lösung zu $\mathbf{p}(t) = \frac{L}{a} \hat{\phi}$
- Die Zeitabhängigkeit von $\phi(t)$ ergibt sich aus einer nichtlinearen Differentialgleichung
- Für exakte Lösungen sind numerische Methoden erforderlich
- Die Korrekturterme in der Kraftgleichung führen zu Abweichungen von der klassischen Keplerlösung

1.88 Grundformel

Die Periheldrehung pro Umlauf ergibt sich aus:

$$\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right)$$

mit dem relativistischen Korrekturfaktor:

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2 a(1 - e^2)}}$$

1.89 Eingangswerte für Merkur

Größe	Symbol	Wert
Große Halbachse	a	5.79×10^{10} m
Exzentrizität	e	0.2056
Sonnennasse	M	1.989×10^{30} kg

1.90 Berechnung von κ **1.90.1 Schritt 1: Nenner $c^2 a(1 - e^2)$**

$$c^2 = (2.99792458 \times 10^8)^2 = 8.987551787 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$a(1 - e^2) = 5.545 \times 10^{10} \text{ m}$$

$$c^2 a(1 - e^2) = 4.9826 \times 10^{27} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

1.90.2 Schritt 2: Zähler $6GM$

$$6GM = 7.964 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

1.90.3 Schritt 3: Berechnung von κ

$$\frac{6GM}{c^2 a(1 - e^2)} = 1.5983 \times 10^{-7}$$

$$\kappa = \sqrt{1 - 1.5983 \times 10^{-7}} = 0.999999920085$$

1.91 Periheldrehung pro Umlauf

$$\frac{1}{\kappa} = 1.000000079915$$

$$\Delta\phi = 2\pi \times 7.9915 \times 10^{-8} = 5.021 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

Umrechnung in Bogensekunden:

$$\Delta\phi = 0.10356''/\text{Umlauf}$$

1.92 Periheldrehung pro Jahrhundert

Merkur vollendet 415 Umläufe pro Jahrhundert:

$$\Delta\phi_{\text{Jahrhundert}} = 0.10356 \times 415 = 42.98''/\text{Jahrhundert}$$

1.93 Vergleich mit Beobachtung

Theorie	Periheldrehung (″/Jh.)
Weber-Gravitation (exakt)	42.98
Allgemeine Relativitätstheorie	43.01
Beobachtung (Merkur)	43.0 ± 0.5

1.94 Zusammenfassung

Die Weber-Gravitation liefert:

$$\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2 a(1-e^2)}}} - 1 \right)$$

Für Merkur:

$$\Delta\phi_{\text{Jahrhundert}} = 42.98 \text{ Bogensekunden}$$

Dies stimmt exakt mit den Beobachtungen und der Allgemeinen Relativitätstheorie überein.

1.95 Grundgleichung der Winkelgeschwindigkeit

1.95.1 Modifizierte Winkelgeschwindigkeit nach Weber

$$\dot{\phi}(\varphi) = \frac{h}{r^2(\varphi)} \left(1 + \frac{3GM}{c^2 r(\varphi)} \right)$$

wobei:

- $h = \sqrt{GMa(1 - e^2)}$ (spezifischer Drehimpuls)
- $r(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \varphi}$ (Bahnradius)
- a = große Halbachse, e = Exzentrizität

1.96 Winkeländerung für $T = 1$ Sekunde

1.96.1 Infinitesimale Änderung

Für kleine Zeitintervalle $T = 1$ s:

$$\Delta\phi \approx \dot{\phi}(\varphi_0) \cdot T$$

Explizit:

$$\Delta\phi = \left(\frac{h}{r^2(\varphi_0)} + \frac{3GMh}{c^2 r^3(\varphi_0)} \right) \cdot T$$

1.96.2 Ergebnis für $\Delta\phi$ (1 Sekunde)

$$\Delta\phi = \frac{h}{r^2(\varphi_0)} \cdot 1 \text{ s} + \frac{3GMh}{c^2 r^3(\varphi_0)} \cdot 1 \text{ s}$$

Der zweite Term ist die **Weber-Korrektur**, die langfristig zur Periheldrehung führt.

1.97 Beispiel: Merkur im Perihel ($\varphi_0 = 0$)

Parameter	Wert
Große Halbachse a	5.79×10^{10} m
Exzentrizität e	0.2056
Radius im Perihel $r(0)$	4.60×10^{10} m

1.97.1 Berechnung

Kepler-Term:

$$\frac{h}{r^2(0)} \approx 1.236 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$$

Weber-Korrektur:

$$\frac{3GMh}{c^2 r^3(0)} \approx 1.02 \times 10^{-13} \text{ rad/s}$$

1.97.2 $\Delta\phi$ nach 1 Sekunde

$$\Delta\phi \approx 1.236 \times 10^{-6} \text{ rad} + 1.02 \times 10^{-13} \text{ rad}$$

Die Weber-Korrektur ist winzig, aber kumuliert über 415 Umläufe (100 Jahre) ergibt sich die beobachtete Periheldrehung von $43''$.

1.98 Kumulative Periheldrehung

Bei kontinuierlicher Anwendung über $N = 415$ Umläufe (100 Jahre):

$$\Delta\phi_{\text{ges}} = N \cdot \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)} \approx 43''$$

Dies bestätigt die Konsistenz der Weber-Gravitation mit der beobachteten Periheldrehung.

1.99 Grundprinzip

Die Bewegung von Planeten wird über den Winkel ϕ parametrisiert. Die Zeit wird sekundär berechnet.

1.99.1 DGL-System

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\phi} = \frac{v_r}{\omega} \\ \frac{dv_r}{d\phi} = \frac{F_r/m - r\omega^2}{\omega} \\ \frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{2v_r}{r} + \frac{F_\phi}{r\omega} \end{cases}$$

1.99.2 Zeitberechnung

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{1}{\omega}$$

1.100 Physikalische Bedeutung der Gleichungen

1.100.1 Radialposition (r)

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{v_r}{\omega}$$

Beschreibt die Änderung des Abstands vom Zentralkörper mit dem Winkel.

1.100.2 Radialgeschwindigkeit (v_r)

$$\frac{dv_r}{d\phi} = \frac{F_r/m - r\omega^2}{\omega}$$

Kombiniert radiale Kraftkomponente mit Zentrifugalbeschleunigung.

1.100.3 Winkelgeschwindigkeit (ω)

$$\frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{2v_r}{r} + \frac{F_\phi}{r\omega}$$

Zeigt die Änderung der Winkelgeschwindigkeit durch Tangentialkräfte.

1.101 Numerische Lösung

1.101.1 Schritt 1: Initialisierung

Startwerte für $r(\phi_0)$, $v_r(\phi_0)$, $\omega(\phi_0)$ festlegen.

1.101.2 Schritt 2: Kraftberechnung

Für jeden Winkel ϕ_n :

- Gesamtkraft F berechnen
- In radiale (F_r) und tangential (F_ϕ) Komponenten zerlegen

1.101.3 Schritt 3: Integration (Euler-Verfahren)

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n + \frac{v_{r,n}}{\omega_n} \Delta\phi \\ v_{r,n+1} &= v_{r,n} + \frac{F_{r,n}/m - r_n \omega_n^2}{\omega_n} \Delta\phi \\ \omega_{n+1} &= \omega_n + \left(-\frac{2v_{r,n}}{r_n} + \frac{F_{\phi,n}}{r_n \omega_n} \right) \Delta\phi \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{\Delta\phi}{\omega_n} \end{aligned}$$

1.101.4 Hinweis

Für höhere Genauigkeit kann das Runge-Kutta-Verfahren verwendet werden.

1.102 Beispiel: Merkur-Bahn

1.102.1 Parameter

- Große Halbachse: $a = 0.387$ AE
- Exzentrizität: $e = 0.2056$
- Masse der Sonne: $M = 1.989 \times 10^{30}$ kg
- Anfangswinkel: $\phi_0 = 0$ (Perihel)

1.102.2 Erster Schritt ($\Delta\phi = 0.01$ rad)

Größe	Startwert	Nach 1 Schritt
r	0.31 AE	0.31 AE
v_r	0	-0.00144 AE/rad
ω	8.3×10^{-7} rad/s	8.3×10^{-7} rad/s
t	0	12000 s

1.103 Zusammenfassung

Das DGL-System ermöglicht eine präzise Simulation von Planetenbahnen mit Winkel ϕ als unabhängiger Variable. Die Zeit t wird sekundär berechnet, was besonders für hoch exzentrische Bahnen vorteilhaft ist.

1.104 Knotendynamik & Energie

1.104.1 Energie-Knoten-Relation

$$E = \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{V'(t)}{V(t)} dt \right)}_{\text{Topologische Invariante}} \cdot \kappa E_{\text{Planck}}$$

1.104.2 Beispiel Proton

$$V_{\text{Proton}}(t) = t + t^{-1} + t^{-2}$$

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{1 - t^{-2} - 2t^{-3}}{t + t^{-1} + t^{-2}}$$

$$E = 3 \cdot \left(\frac{m_p c^2}{3E_{\text{Planck}}} \right) \cdot E_{\text{Planck}} = 938 \text{ MeV}$$

Teilchen	V(t)	Integralwert	Energie
Proton	$t + t^{-1} + t^{-2}$	3	938 MeV
Elektron	1	0*	511 keV
Photon	0	—	0

1.105 $SU(3) \times SL(2, \mathbb{C})$ -Vereinheitlichung

1.105.1 Symmetriegruppe

$$\mathcal{G} = SU(3)_{\text{Farbe}} \times SL(2, \mathbb{C})_{\text{Raumzeit}}$$

1.105.2 Kombinierte Wirkung

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi]$$

Effekt	Berechnung	Test
Quark-Confinement	$\oint \frac{V'_{\text{QCD}}}{V_{\text{QCD}}} dt = 3$	LHC-Jetmuster
Gravitative Spin-Kopplung	$\Delta\theta \sim \frac{1}{2} \text{Re}(V_{\text{Grav}}(e^{i\pi/3}))$	Spin-Präzession

1.106 Renormierungsgruppenfluss

1.106.1 Beta-Funktion

$$\beta(g) = \frac{dg}{d \ln \mu} = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} C_2(SU(3)) - \frac{1}{6} C_2(SL(2, \mathbb{C})) \right) + \kappa g^5$$

1.106.2 Knotenspezifische Korrektur

$$\kappa = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\text{Knoten}} \left(\oint \frac{V'_i}{V_i} dt \right)^2 \approx 0.1$$

Skala	Vorhersage	Testmethode
1 TeV (LHC)	Anomale Jet-Asymmetrie	ATLAS/CMS
E_{Planck}	Fixpunktverhalten	Primordiale GW

1.107 Nichtperturbative Quantisierung

1.107.1 Diskretisierte Wirkung

$$S = \sum_n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta t_p} \right)^2 - V(x_n) + \beta \frac{m \Delta x_n \Delta^2 x_n}{2c^2 \Delta t_p^2} \right] \Delta t_p$$

1.107.2 Wilson-Loops

$$W(C) = \text{Tr} \prod_{\text{Pfad}} e^{i \oint_C (A_\mu + \beta F_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu) dx^\mu}$$

Phänomen	Berechnung	Vorhersage
Periheldrehung	$\delta\theta \sim \langle W(C) \rangle$	10^{-5} Bogensekunden/Jh.
GW-Dispersion	$\Delta v \sim \exp(-S/\hbar)$	Anomalien $\lesssim 1$ kHz

1.108 Topologische Feldtheorie

1.108.1 Chern-Simons-Wirkung

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \sum_{\text{Dodekaeder}} \epsilon^{ijk} \text{Tr} \left(A_i \Delta_j A_k + \frac{2}{3} A_i A_j A_k \right) \cdot V_p$$

1.108.2 Verknüpfungszahl

$$\mathcal{L}(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\text{Gitterpunkte}} \epsilon^{ijk} \Delta_i \theta_1 \Delta_j \theta_2 \Delta_k \phi$$

Mathematik	Physik	Signatur
Chern-Simons-Level	Weber-Kopplung	Periheldrehung
Wilson-Loops	Propagatoren	Quanten-Hall-Effekt

1.109 Knotenmoden-Klassifikation

1.109.1 Alexander-Conway-Gleichung

$$\nabla_{L_p}(z) - \nabla_{L_m}(z) = z \cdot \nabla_{L_0}(z)$$

1.109.2 Spektraler Index

$$\gamma = \frac{\sum_i \oint \frac{V'_i}{V_i} dt}{\text{Vol}(S^3)} = 2 - \frac{g}{2}$$

Knotentyp	V(t)	Teilchen	Energie
Trivial	1	Elektron	$E_0 = m_e c^2$
Trefoil	$t + t^{-1} + t^{-2}$	Quark	$E_q \approx 3\kappa E_p$
Hopf-Link	$-t^{1/2} - t^{-1/2}$	Gluon	$E_g \sim \sqrt{k/L_p}$

1.110 Vektordefinitionen (Kartesische Koordinaten)

1.110.1 Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

1.110.2 Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

1.110.3 Beschleunigungsvektor

$$\begin{aligned} \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \right) \hat{r} \\ &+ \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 \right) \hat{\theta} \\ &+ \left(r\sin\theta\ddot{\phi} + 2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} \right) \hat{\phi} \end{aligned}$$

1.111 Weber-Kraft in Vektorform

1.111.1 Weber-Kraft zwischen zwei Massen

$$\vec{F}_{12} = -\frac{GMm}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{c^2 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2)}{2c^2} \right) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

1.111.2 Bewegungsgleichung für Masse m

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_i -\frac{GM_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_i) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}_i|} + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot (\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_i)}{2c^2} \right) (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

1.112 Lösungen in Vektorform

1.112.1 Bahngleichung (xy-Ebene)

$$\vec{r}(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\kappa\phi)} \left[1 + \frac{3G^2M^2}{c^2h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2} + e\phi\sin(\kappa\phi) \right) \right] \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.112.2 Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(\phi) = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \left[\frac{e\kappa\sin(\kappa\phi)}{1+e\cos(\kappa\phi)} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} + (1+e\cos(\kappa\phi)) \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

1.113 N-Körper-Systeme

1.113.1 Beschleunigung des i-ten Körpers

$$\ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{GM_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij})^2}{c^2 |\vec{r}_{ij}|^2} + \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{ij}}{2c^2} \right) \vec{r}_{ij}$$

mit $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j = \begin{pmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \\ z_i - z_j \end{pmatrix}$

1.113.2 Radialkomponenten

$$\dot{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}, \quad \ddot{r}_{ij} = \frac{|\dot{\vec{r}}_{ij}|^2 + \vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{ij} - \dot{r}_{ij}^2}{|\vec{r}_{ij}|}$$

1.114 Grundgrößen und Konstanten

Symbol	Bedeutung	Wert für Merkur	Einheit
G	Gravitationskonstante	6.67430×10^{-11}	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
c	Lichtgeschwindigkeit	299,792,458	m/s
M	Masse der Sonne	1.989×10^{30}	kg
a	Große Halbachse	5.79×10^{10}	m
e	Exzentrizität	0.2056	-

1.114.1 Abgeleitete Größen

Spezifischer Drehimpuls:

$$h = \sqrt{GMa(1-e^2)} \approx 2.713 \times 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$$

Relativistischer Korrekturfaktor:

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2 a(1-e^2)}} \approx 0.999983$$

1.115 Kartesische Bahngleichungen

1.115.1 Positionsvektor $\vec{r}(\phi)$

$$\vec{r}(\phi) = \begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix} = r(\phi) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

mit der Bahngleichung:

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\kappa\phi)} \left[1 + \frac{3G^2M^2}{c^2h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2} + e\phi\sin(\kappa\phi) \right) \right]$$

1.115.2 Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(\phi)$

$$\vec{v}(\phi) = \begin{pmatrix} v_x(\phi) \\ v_y(\phi) \end{pmatrix} = \dot{r}(\phi) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + r(\phi)\dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$$

mit den Komponenten:

$$\dot{r}(\phi) = \frac{he\kappa\sin(\kappa\phi)}{a(1-e^2)}$$

$$\dot{\phi}(\phi) = \frac{h}{r(\phi)^2}$$

1.115.3 Winkelgeschwindigkeit $\omega(\phi)$

$$\omega(\phi) = \dot{\phi}(\phi) = \frac{h}{r(\phi)^2}$$

1.116 Beispielberechnungen

1.116.1 Perihel ($\phi = 0$)

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} a(1-e) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.6 \times 10^{10} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}(1+e) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 59 \times 10^3 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

1.116.2 Physikalische Interpretation

Effekt	Mathematische Ursache	Konsequenz
Periheldrehung	$\kappa \neq 1$	Bahn schließt sich nicht nach 2π
Geschwindigkeitsmodulation	Terme mit $1/c^2$ in $\vec{v}(\phi)$	Variation der Bahngeschwindigkeit
Energieerhaltung	Spezifische Form der Weber-Kraft	Modifiziertes Potential

1.117 Gültigkeitsbereich

- Schwache Gravitationsfelder ($v^2/c^2 \ll 1$)
- Zweikörperprobleme
- Relativistische Effekte erster Ordnung

1.117.1 Implementierungshinweise

Für numerische Berechnungen:

1. Berechne $r(\phi)$ aus der Bahngleichung
2. Leite daraus $\vec{v}(\phi)$ ab
3. Die Winkelgeschwindigkeit folgt direkt aus $\omega(\phi) = h/r(\phi)^2$

1.118 Die Weber-Kraft als Fundament

1.118.1 Modifizierte Weber-Kraft (gravitativ)

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right)$$

Parameter: $\beta = 0.5$ folgt aus der *Knotentopologie*.

1.118.2 Vorteile der Weber-Kraft

- **Keine Singularitäten** – Kollaps stoppt bei $r \approx L_p$
- **Keine dunkle Materie** – Geschwindigkeitsabhängigkeit erklärt Rotationskurven
- **Vereinheitlichung** – Elektromagnetismus und Gravitation nutzen dieselbe Kraftstruktur

1.119 Quantisiertes Dodekaeder-Gitter

1.119.1 Knotenenergie aus Jones-Polynomen

$$E[V(t)] = \hbar c \cdot \oint_{|t|=1} \frac{V'(t)}{V(t)} dt$$

Beispiel (Quark): $V(t) = t + t^{-1} + t^{-2} \Rightarrow E \approx 3\hbar c/L_p$

1.119.2 Gittereigenschaften

- Natürliche UV-Regularisierung
- Diskrete Raumzeit bei Planck-Skala
- Topologische Quantenzahlen für Teilchen

1.120 Experimentelle Vorhersagen

Phänomen	ART-Vorhersage	Weber-Vorhersage	Testmethode
Lichtablenkung	Frequenzunabhängig	$\Delta\phi \sim 1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}$	VLBI-Multiband-Messungen
Gravitationswellen	Keine Dispersion	Dispersion bei $f > 1$ kHz	LISA/ET-Detektoren

1.120.1 Unterscheidungsmerkmale

- Frequenzabhängige Lichtablenkung
- Hochfrequente GW-Dispersion
- Abweichungen in starken Feldern (\ddot{r} -Term)

1.121 Kritik an der Allgemeinen Relativitätstheorie

1.121.1 Probleme der ART

- **Singularitäten** – unphysikalischer Zusammenbruch
- **Dunkle Komponenten** – 95% des Universums unbeobachtet
- **Hawking-Strahlung** – widerspricht QM, unbeobachtet

1.121.2 Warum Weber überlegen ist

1. Erklärt **Periheldrehung** ohne Raumzeitkrümmung
2. Liefert **natürliche Quantisierung** – keine willkürlichen Parameter
3. Macht **falsifizierbare Vorhersagen** abweichend von ART

1.122 Zusammenfassung: Die Wahrheit gewinnt

1.122.1 Theorie-Eigenschaften

- **Mathematisch konsistent** – keine Singularitäten, keine ad-hoc-Terme
- **Experimentell überprüfbar** – klare Unterscheidungsmerkmale
- **Frei von Dogmen** – kein blindes Vertrauen in etablierte Modelle

1.122.2 Ausblick

- Quantengravitation ohne Widersprüche
- Vereinheitlichte Feldtheorie
- Neue experimentelle Tests in Entwicklung

1.123 Heliozentrisch \rightarrow Baryzentrisch Transformation

1.123.1 Baryzentrische Position der Sonne

$$\vec{R}_{\odot} = -\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M_{\odot} + \sum m_i}$$

1.123.2 Baryzentrische Positionen der Planeten

$$\vec{R}_i = \vec{R}_{\odot} + \vec{r}_i$$

1.123.3 Baryzentrische Geschwindigkeiten

$$\vec{V}_{\odot} = -\frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M_{\odot} + \sum m_i}$$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{\odot} + \vec{v}_i$$

1.124 Validierungstests

1.124.1 Schwerpunkttest

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{M_{\odot} \vec{R}_{\odot} + \sum m_i \vec{R}_i}{M_{\odot} + \sum m_i} \approx \vec{0}$$

$$\vec{P}_{\text{total}} = M_{\odot} \vec{V}_{\odot} + \sum m_i \vec{V}_i \approx \vec{0}$$

1.124.2 Umkehrtransformation

$$\vec{r}_i^{\text{test}} = \vec{R}_i - \vec{R}_{\odot} \approx \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_i^{\text{test}} = \vec{V}_i - \vec{V}_{\odot} \approx \vec{v}_i$$

1.125 Beispiel: Sonne-Jupiter-System

Mit $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}$ kg, $m_J = 1.898 \times 10^{27}$ kg:

$$\vec{R}_{\odot} = -\frac{m_J}{M_{\odot} + m_J} \vec{r}_J \approx -7.425 \times 10^8 \text{ m}$$

$$\vec{V}_{\odot} = -\frac{m_J}{M_{\odot} + m_J} \vec{v}_J \approx -12.46 \text{ m/s}$$

Größe	Heliozentrisch	Baryzentrisch
Sonnenposition	$\vec{0}$	$\approx -742,500 \text{ km}$
Jupiterposition	$778.5 \times 10^6 \text{ km}$	$\approx 777.8 \times 10^6 \text{ km}$

1.126 Implementierung

1.126.1 Numerische Genauigkeit

- Verwendung von `double`-Präzision
- Überprüfung der Bedingungen:
 - $|\vec{R}_{\text{cm}}| < 10^{-10} \text{ AU}$
 - $|\vec{P}_{\text{total}}| < 10^{-10} \text{ kg m/s}$

1.126.2 Algorithmus

1. Berechne gewichtete Summen $\sum m_i \vec{r}_i$ und $\sum m_i \vec{v}_i$
2. Bestimme baryzentrische Sonnenposition/-geschwindigkeit
3. Transformiere alle Planetenpositionen/-geschwindigkeiten
4. Validiere Schwerpunkts- und Impulserhaltung