

Weber-Kraft als fundamentale Theorie der Quantengravitation

Kapitel 1

Einleitung

Wissenschaftliches Manifest

Diese Theorie unterwirft sich keiner vorab definierten kosmologischen Erzählung – weder Expansion noch Urknall noch Konstanz der Lichtgeschwindigkeit werden axiomatisch gefordert. **Die Wahrheit emergiert aus der Mathematik der Knoten und Gitter**, nicht aus historischen Dogmen.

Fundamentale Prinzipien

1. **Emergenz statt Diktat**
Kosmologische Phänomene (wie Expansion) dürfen nur als *Folge* der Gitterdynamik auftreten, nie als Voraussetzung.
2. **Mikrophysik bestimmt Makrophysik**
Die Dodekaeder-Struktur der Raumzeit und ihre Knotenmoden generieren Gravitation – nicht umgekehrt.
3. **Experimente als einziger Schiedsrichter**
Vorhersagen müssen die ART *ohne Anpassungen* widerlegen können.

Theoretischer Rahmen

- Verzichtet auf Raumzeit-Kontinuum
- Führt Gravitation auf Knotenfluktuationen zurück
- Lässt alle kosmologischen Szenarien zu

Achtung: Wichtigster Unterschied zur ART:

Lichtablenkung folgt aus *nichtlinearer Bahndynamik* im Gitter – **ohne globale Raumzeitannahmen**.

1.1 Einführung

Klassische Weber-Kraft

$$F_{Weber}^{EM} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{2r\ddot{r}}{c^2} \right) \hat{r}$$

Modifizierte Weber-Kraft

$$F_{Weber}^{Grav} = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right) \hat{r}$$

Mit $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$

1.2 Berechnung der Periheldrehung

$$\Delta\theta = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}$$

Theorie	Vorhersage	Beobachtet
Newton	0"	✗
Weber ($\beta = 1$)	21.5"	✗
Weber ($\beta = 0.5$)	43"	✓
ART	43"	✓

Tabelle 1.1: Periheldrehung des Merkur

1.3 Physikalische Interpretation

- $\beta = 0.5$ kombiniert zeitartige und räumliche Effekte
- Entspricht beiden ART-Krümmungskomponenten

Bedeutung: Klassische Ansätze können relativistische Effekte reproduzieren.

1.4 Aktuelle Grenzen

Bereich	Herausforderung	Ansatz
Quantengravitation	Keine vollständige Formulierung	Knotenmodell
Gravitationswellen	Keine empirischen Tests	kHz-Vorhersagen

1.5 β -Formel

$$\beta = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^\delta \cdot \left(1 - \frac{mc^2}{E}\right)$$

- $\delta = 0$: Elektrodynamik
- $\delta = 1$: Gravitation

1.6 Universelle Formel

$$F = -\frac{GM}{r^2} \cdot \frac{E}{c^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{c^2} \cdot \left(1 - \frac{v_{\text{tan}}^2}{c^2}\right)\right) \hat{r}$$

Für Massen

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2}\right)$$

1.7 Rotverschiebung

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 r} \left(1 + \frac{v_r^2}{2c^2}\right)$$

- ART-Äquivalent + Geschwindigkeitsterm
- Vorhersage für $v_r \approx 0.01c$: 0.5% stärker

1.8 Gravitationswellen

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \beta \cdot \partial_t^2 Q_{\mu\nu} \right)$$

- Kollektive Gitterschwingungen
- Neue Vorhersage: Diskretisierungseffekte >1 kHz

1.9 Quantisierter Raum

Dodekaeder-Gitter

- Grundlänge: $L_p = \sqrt{\hbar G/c^3}$
- 12 Nachbarn pro Zelle

Diskrete Zeit

$$t = n \cdot t_p \quad (t_p = \sqrt{\hbar G/c^5})$$

1.10 Knotentheorie

Jones-Polynome

$$V(t) = \sum_i a_i t^i$$

Teilchen	Polynom
Elektron	1
Quark	$t + t^{-1} + t^{-2}$

1.11 Quantenelektrodynamik

$$F_{Weber}^{QED} = \frac{V_1(t)V_2(t)}{4\pi\epsilon_0(nL_p)^2} \left(1 - \frac{(\Delta L_p/\Delta t_p)^2}{c^2} + \frac{2L_p\Delta^2 L_p}{c^2\Delta t_p^2} \right) \hat{r}$$

1.12 Vorhersagekraft

Effekt	ART	Weber
Lichtablenkung	Konstant	$\sim 1 + (\lambda_0/\lambda)^2$

1.13 Historische Entwicklung

1. 1846: Weber (EM-Formulierung)
2. 1882: Tisserand (Gravitation, $\beta = 2$)
3. 2025: Modifizierte Form ($\beta = 0.5$)

1.14 Forschungs-Roadmap

- 2025-2030: Multiband-Tests
- 2035+: Gitterdispersion (LISA)
- 2040: Hochpräzision (FCC-ee)

1.15 Vergleich mit ART

Kriterium	Weber	ART
Grundkonzept	Kraft	Geometrie

1.16 Literatur

- Weber, W. (1846). „Elektrodynamische Massbestimmungen“
- Einstein, A. (1915). „Erklärung der Perihelbewegung des Merkur“
- Jones, V. (1985). „A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras“
- Assis, A.K.T. (1994). „Weber’s Electrodynamics“

Kapitel 2

Bahndynamik

2.1 Vektordefinitionen (Kartesische Koordinaten)

Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi} \quad (2.2)$$

Beschleunigungsvektor

$$\begin{aligned} \vec{a} = \ddot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \\ &= \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \hat{r} \\ &\quad + \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right) \hat{\theta} \\ &\quad + \left(r \sin \theta \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \sin \theta \dot{\phi} + 2 r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \right) \hat{\phi} \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2 Weber-Kraft in Vektorform

Weber-Kraft zwischen zwei Massen

$$\vec{F}_{12} = -\frac{GMm}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{c^2 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2)}{2c^2} \right) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (2.4)$$

Bewegungsgleichung für Masse m

$$m \ddot{\vec{r}} = \sum_i -\frac{GM_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_i) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}_i|} + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot (\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_i)}{2c^2} \right) (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.5)$$

2.3 Lösungen in Vektorform

Bahngleichung (xy-Ebene)

$$\vec{r}(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(\kappa \phi)} \left[1 + \frac{3G^2 M^2}{c^2 h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2} + e \phi \sin(\kappa \phi) \right) \right] \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(\phi) = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \left[\frac{e\kappa \sin(\kappa\phi)}{1+e\cos(\kappa\phi)} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} + (1+e\cos(\kappa\phi)) \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (2.7)$$

2.4 N-Körper-Systeme

Beschleunigung des i-ten Körpers

$$\ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{GM_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \left(1 - \frac{(\dot{\vec{r}}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij})^2}{c^2 |\vec{r}_{ij}|^2} + \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{ij}}{2c^2} \right) \vec{r}_{ij} \quad (2.8)$$

mit $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j = \begin{pmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \\ z_i - z_j \end{pmatrix}$

Radialkomponenten

$$\dot{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|} \quad (2.9)$$

$$\ddot{r}_{ij} = \frac{|\dot{\vec{r}}_{ij}|^2 + \vec{r}_{ij} \cdot \ddot{\vec{r}}_{ij} - \dot{r}_{ij}^2}{|\vec{r}_{ij}|} \quad (2.10)$$

2.5 Tensor-Notation (Indexschreibweise)

Weber-Kraft (komponentenweise)

$$F_i^k = - \sum_{j \neq i} \frac{GM_j m_i}{r_{ij}^3} \left(1 - \frac{\dot{x}_{ij}^l \dot{x}_{ij}^l}{2c^2} + \frac{x_{ij}^l \ddot{x}_{ij}^l}{2c^2} \right) x_{ij}^k \quad (2.11)$$

wobei $x_{ij}^k = x_i^k - x_j^k$ (k = 1,2,3 für x,y,z)

Notationskonventionen:

- Fettdruck: $\mathbf{r} = \vec{r}$ (Vektoren)
- Punkt: $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$ (Zeitableitung)
- $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (Betrag)
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^k b^k$ (Skalarprodukt, Einstein-Summation)

2.6 Grundgleichungen der Weber-Gravitation

Weber-Gravitationskraft

$$F = - \frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right) \quad (2.12)$$

Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = - \frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r\ddot{r}}{2c^2} \right) \quad (2.13)$$

2.7 Herleitung der Winkelgeschwindigkeit

Drehimpulserhaltung

$$h = r^2 \dot{\phi} = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{h}{r^2} \quad (2.14)$$

Diese fundamentale Beziehung bleibt auch in der Weber-Gravitation gültig.

Radialgleichung mit Weber-Korrektur

Nach Substitution von $u = 1/r$ und Linearisierung:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2 - \frac{GM}{2c^2 h^2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 \quad (2.15)$$

2.8 Lösung für die Winkelgeschwindigkeit

Exakte Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\phi}(\varphi) = \frac{h}{r(\varphi)^2} \quad (2.16)$$

wobei $r(\varphi)$ aus der modifizierten Radialgleichung zu bestimmen ist.

Näherungslösung für kleine Störungen

Für $r(\varphi)$ in erster Ordnung:

$$r(\varphi) \approx \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \varphi} \left[1 + \frac{3GM}{c^2 a(1-e^2)} \varphi e \sin \varphi \right] \quad (2.17)$$

Daraus folgt die Winkelgeschwindigkeit:

$$\dot{\phi}(\varphi) \approx \frac{h(1+e \cos \varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2} \left[1 - \frac{6GM}{c^2 a(1-e^2)} \varphi e \sin \varphi \right] \quad (2.18)$$

2.9 Anwendung auf Merkur

Parameter	Wert
Große Halbachse a	$5.79 \times 10^{10} \text{ m}$
Exzentrizität e	0.2056
Spezifischer Drehimpuls h	$2.713 \times 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$

Tabelle 2.1: Merkur-Bahnparameter

Winkelgeschwindigkeit im Perihel ($\varphi = 0$)

$$\dot{\phi}(0) = \frac{2.713 \times 10^{15}}{(4.69 \times 10^{10})^2} \approx 1.23 \times 10^{-6} \text{ rad/s} \quad (2.19)$$

Mit Weber-Korrektur:

$$\dot{\phi}_{\text{Weber}}(0) \approx 1.23 \times 10^{-6} [1 - 2.1 \times 10^{-8}] \text{ rad/s} \quad (2.20)$$

2.10 Zusammenfassung der Winkelgeschwindigkeit

Die korrekte Winkelgeschwindigkeit unter Weber-Gravitation ist:

$$\dot{\phi}(\varphi) = \frac{h}{r(\varphi)^2} \quad (2.21)$$

wobei $r(\varphi)$ aus der modifizierten Weber-Gleichung zu bestimmen ist. Die Weber-Kraft führt zu einer kleinen Modulation der klassischen Kepler-Geschwindigkeit.

Kapitel 3

Störungsrechnung

Wichtige Anmerkungen:

- Konsequente Verwendung von Doppelindizes (i,j) für alle Störterme
- Erster Index (i) = Störkörper, zweiter Index (j) = betroffener Körper
- Vollständige Definition aller verwendeten Größen
- Explizite Summation über alle relevanten Störkörper

3.1 Systemdefinition und Variablen

Symbol	Bedeutung	Einheit
M_{\odot}	Masse der Sonne	kg
M_i	Masse des i-ten Störkörpers ($i = 1..N$)	kg
r_j	Position des betrachteten Körpers j (z.B. Merkur)	km
r_i	Position des i-ten Störkörpers	km
v_j	Geschwindigkeit des Körpers j	km/s
h_j	Spezifischer Drehimpuls des Körpers j ($h_j = \vec{r}_j \times \vec{v}_j $)	km ² /s
a_i	Große Halbachse des i-ten Störkörpers	km
\hat{z}	Einheitsvektor in z-Richtung (0, 0, 1)	-

Tabelle 3.1: Definition der verwendeten Variablen

3.2 Grundlegende Störterme

Positionsstörung Δr_{ij}

Änderung der Position von Körper j durch Körper i:

$$\Delta \mathbf{r}_{ij} = \frac{M_i}{M_\odot} \cdot \frac{a_i^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$

wobei $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ der Abstand zwischen Körper j und Störkörper i ist.

Geschwindigkeitsstörung Δv_{ij}

Änderung der Geschwindigkeit von Körper j durch Körper i:

$$\Delta \mathbf{v}_{ij} = \frac{GM_i}{h_j} \cdot \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}$$

Das Kreuzprodukt $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \hat{\mathbf{z}}$ ergibt einen tangentialen Vektor.

Winkelgeschwindigkeitsstörung $\Delta \omega_{ij}$

Änderung der Winkelgeschwindigkeit von Körper j durch Körper i:

$$\Delta \omega_{ij} = \frac{(\mathbf{r}_j \times \Delta \mathbf{v}_{ij})_z + (\Delta \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{v}_j)_z}{|\mathbf{r}_j|^2}$$

wobei $(\cdot)_z$ die z-Komponente des Vektors ist.

3.3 Gesamtstörungen auf Körper j

Gesamtpositionsstörung

Summe über alle Störkörper ($i \neq j$):

$$\Delta \mathbf{r}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \Delta \mathbf{r}_{ij}$$

Gesamtgeschwindigkeitsstörung

$$\Delta \mathbf{v}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \Delta \mathbf{v}_{ij}$$

Gesamtwinkelgeschwindigkeitsstörung

$$\Delta \omega_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \Delta \omega_{ij}$$

3.4 Konkretes Beispiel: Merkur (j) gestört durch Jupiter (i=1)

Beitrag von Jupiter zur Positionsstörung

$$\Delta \mathbf{r}_{\text{Jupiter} \rightarrow \text{Merkur}} = \frac{M_{\text{Jupiter}}}{M_{\odot}} \cdot \frac{a_{\text{Jupiter}}^2}{|\mathbf{r}_{\text{Merkur}} - \mathbf{r}_{\text{Jupiter}}|^2} (\mathbf{r}_{\text{Merkur}} - \mathbf{r}_{\text{Jupiter}})$$

Beitrag von Jupiter zur Geschwindigkeitsstörung

$$\Delta \mathbf{v}_{\text{Jupiter} \rightarrow \text{Merkur}} = \frac{GM_{\text{Jupiter}}}{h_{\text{Merkur}}} \cdot \frac{(\mathbf{r}_{\text{Merkur}} - \mathbf{r}_{\text{Jupiter}}) \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r}_{\text{Merkur}} - \mathbf{r}_{\text{Jupiter}}|^3}$$

Beitrag von Jupiter zur Winkelgeschwindigkeitsstörung

$$\Delta \omega_{\text{Jupiter} \rightarrow \text{Merkur}} = \frac{(\mathbf{r}_{\text{Merkur}} \times \Delta \mathbf{v}_{\text{Jupiter} \rightarrow \text{Merkur}})_z + (\Delta \mathbf{r}_{\text{Jupiter} \rightarrow \text{Merkur}} \times \mathbf{v}_{\text{Merkur}})_z}{|\mathbf{r}_{\text{Merkur}}|^2}$$

3.5 Vollständige Zusammenfassung

Zusammenfassung der Störungsgleichungen

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_{ij} &= \frac{M_i}{M_{\odot}} \cdot \frac{a_i^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \\ \Delta \mathbf{v}_{ij} &= \frac{GM_i}{h_j} \cdot \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} \\ \Delta \omega_{ij} &= \frac{(\mathbf{r}_j \times \Delta \mathbf{v}_{ij})_z + (\Delta \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{v}_j)_z}{|\mathbf{r}_j|^2} \\ \Delta \mathbf{r}_j &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \Delta \mathbf{r}_{ij} \\ \Delta \mathbf{v}_j &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \Delta \mathbf{v}_{ij} \\ \Delta \omega_j &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \Delta \omega_{ij} \end{aligned}$$

Zusammenfassung der wichtigsten Punkte

1. Alle Störterme verwenden konsistente Doppelindizes (Störkörper → betroffener Körper)
2. Die Gesamtstörung ist jeweils die Summe über alle Störkörper
3. Für konkrete Berechnungen müssen alle relevanten Störkörper berücksichtigt werden

Kapitel 4

Baryzentrisches Koordinatensystem

4.1 Transformation: Heliozentrisch \rightarrow Baryzentrisch

Baryzentrische Position der Sonne

$$\vec{R}_\odot = -\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M_\odot + \sum m_i} \quad (4.1)$$

Baryzentrische Positionen der Planeten

$$\vec{R}_i = \vec{R}_\odot + \vec{r}_i \quad (4.2)$$

Baryzentrische Geschwindigkeiten

$$\vec{V}_\odot = -\frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M_\odot + \sum m_i} \quad (4.3)$$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_\odot + \vec{v}_i \quad (4.4)$$

4.2 Validierungstests

Schwerpunkttest

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{M_\odot \vec{R}_\odot + \sum m_i \vec{R}_i}{M_\odot + \sum m_i} \approx \vec{0} \quad (4.5)$$

$$\vec{P}_{\text{total}} = M_\odot \vec{V}_\odot + \sum m_i \vec{V}_i \approx \vec{0} \quad (4.6)$$

Umkehrtransformation

$$\vec{r}_i^{\text{test}} = \vec{R}_i - \vec{R}_\odot \approx \vec{r}_i \quad (4.7)$$

$$\vec{v}_i^{\text{test}} = \vec{V}_i - \vec{V}_\odot \approx \vec{v}_i \quad (4.8)$$

4.3 Beispiel: Sonne-Jupiter-System

Mit $M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$ kg, $m_J = 1.898 \times 10^{27}$ kg:

$$\vec{R}_\odot = -\frac{m_J}{M_\odot + m_J} \vec{r}_J \approx -7.425 \times 10^8 \text{ m} \quad (4.9)$$

$$\vec{V}_\odot = -\frac{m_J}{M_\odot + m_J} \vec{v}_J \approx -12.46 \text{ m/s} \quad (4.10)$$

Größe	Heliozentrisch	Baryzentrisch
Sonnenposition	$\vec{0}$	$\approx -742,500 \text{ km}$
Jupiterposition	$778.5 \times 10^6 \text{ km}$	$\approx 777.8 \times 10^6 \text{ km}$

Tabelle 4.1: Vergleich der Koordinatensysteme

4.4 Implementierung

Listing 4.1: Pseudocode für die Transformation

```

// Berechne gewichtete Summen
weighted_r = sum(m[i] * r[i])
weighted_v = sum(m[i] * v[i])
total_mass = M_sun + sum(m[i])

// Baryzentrische Sonne
R_sun = -weighted_r / total_mass
V_sun = -weighted_v / total_mass

// Baryzentrische Planeten
for each planet i:
    R[i] = R_sun + r[i]
    V[i] = V_sun + v[i]

```

Numerische Genauigkeit

Verwende `double`-Präzision und überprüfe die Bedingungen:

- $|\vec{R}_{\text{cm}}| < 10^{-10} \text{ AU}$
- $|\vec{P}_{\text{total}}| < 10^{-10} \text{ kg m/s}$