

Vollständige Störungsrechnung in kartesischen Koordinaten

Mit konsistenter Notation und Doppelindizes

Wichtigste Neuerungen in dieser Version:

- Konsequente Verwendung von **Doppelindizes (i,j)** für alle Störterme
- Erster Index (i) = Störkörper, zweiter Index (j) = betroffener Körper
- Vollständige Definition aller verwendeten Größen
- Explizite Summation über alle relevanten Störkörper

1 Systemdefinition und Variablen

Symbol	Bedeutung	Einheit
M_{\odot}	Masse der Sonne	kg
M_i	Masse des i-ten Störkörpers ($i = 1..N$)	kg
r_j	Position des betrachteten Körpers j (z.B. Merkur)	km
r_i	Position des i-ten Störkörpers	km
v_j	Geschwindigkeit des Körpers j	km/s
h_j	Spezifischer Drehimpuls des Körpers j ($h_j = \vec{r}_j \times \vec{v}_j $)	km ² /s
a_i	Große Halbachse des i-ten Störkörpers	km
\hat{z}	Einheitsvektor in z-Richtung (0, 0, 1)	-

Tabelle 1: Definition der verwendeten Variablen

2 Grundlegende Störterme

Positionsstörung Δr_{ij}

Änderung der Position von Körper j durch Körper i:

$$\Delta \mathbf{r}_{ij} = \frac{M_i}{M_{\odot}} \cdot \frac{a_i^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$

wobei $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ der Abstand zwischen Körper j und Störkörper i ist.

Geschwindigkeitsstörung Δv_{ij}

Änderung der Geschwindigkeit von Körper j durch Körper i:

$$\Delta \mathbf{v}_{ij} = \frac{GM_i}{h_j} \cdot \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}$$

Das Kreuzprodukt $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \hat{\mathbf{z}}$ ergibt einen tangentialen Vektor.

Winkelgeschwindigkeitsstörung $\Delta \omega_{ij}$

Änderung der Winkelgeschwindigkeit von Körper j durch Körper i:

$$\Delta \omega_{ij} = \frac{(\mathbf{r}_j \times \Delta \mathbf{v}_{ij})_z + (\Delta \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{v}_j)_z}{|\mathbf{r}_j|^2}$$

wobei $(\cdot)_z$ die z-Komponente des Vektors ist.

3 Gesamtstörungen auf Körper j

Gesamtpositionsstörung

Summe über alle Störkörper ($i \neq j$):

$$\Delta \mathbf{r}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \Delta \mathbf{r}_{ij}$$

Gesamtgeschwindigkeitsstörung

$$\Delta \mathbf{v}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \Delta \mathbf{v}_{ij}$$

Gesamtwinkelgeschwindigkeitsstörung

$$\Delta \omega_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \Delta \omega_{ij}$$

4 Konkretes Beispiel: Merkur (j) gestört durch Jupiter (i=1)

Beitrag von Jupiter zur Positionsstörung

$$\Delta \mathbf{r}_{\text{Jupiter} \rightarrow \text{Merkur}} = \frac{M_{\text{Jupiter}}}{M_{\odot}} \cdot \frac{a_{\text{Jupiter}}^2}{|\mathbf{r}_{\text{Merkur}} - \mathbf{r}_{\text{Jupiter}}|^2} (\mathbf{r}_{\text{Merkur}} - \mathbf{r}_{\text{Jupiter}})$$

Beitrag von Jupiter zur Geschwindigkeitsstörung

$$\Delta \mathbf{v}_{\text{Jupiter} \rightarrow \text{Merkur}} = \frac{GM_{\text{Jupiter}}}{h_{\text{Merkur}}} \cdot \frac{(\mathbf{r}_{\text{Merkur}} - \mathbf{r}_{\text{Jupiter}}) \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r}_{\text{Merkur}} - \mathbf{r}_{\text{Jupiter}}|^3}$$

Beitrag von Jupiter zur Winkelgeschwindigkeitsstörung

$$\Delta\omega_{\text{Jupiter} \rightarrow \text{Merkur}} = \frac{(\mathbf{r}_{\text{Merkur}} \times \Delta\mathbf{v}_{\text{Jupiter} \rightarrow \text{Merkur}})_z + (\Delta\mathbf{r}_{\text{Jupiter} \rightarrow \text{Merkur}} \times \mathbf{v}_{\text{Merkur}})_z}{|\mathbf{r}_{\text{Merkur}}|^2}$$

5 Vollständige Zusammenfassung

Zusammenfassung der Störungsgleichungen

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r}_{ij} &= \frac{M_i}{M_\odot} \cdot \frac{a_i^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \\ \Delta\mathbf{v}_{ij} &= \frac{GM_i}{h_j} \cdot \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} \\ \Delta\omega_{ij} &= \frac{(\mathbf{r}_j \times \Delta\mathbf{v}_{ij})_z + (\Delta\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{v}_j)_z}{|\mathbf{r}_j|^2} \\ \Delta\mathbf{r}_j &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \Delta\mathbf{r}_{ij} \\ \Delta\mathbf{v}_j &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \Delta\mathbf{v}_{ij} \\ \Delta\omega_j &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \Delta\omega_{ij}\end{aligned}$$

Zusammenfassung der wichtigsten Punkte

1. Alle Störterme verwenden **konsistente Doppelindizes** (Störkörper→betroffener Körper)
2. Die **Gesamtstörung** ist jeweils die Summe über alle Störkörper
3. Für konkrete Berechnungen müssen alle relevanten Störkörper berücksichtigt werden
4. Die Notation ist jetzt **eindeutig und vollständig**