系統假設

對於本系統，有以下假設：

1. 系統計算時間不計，意即駕駛位置在系統計算後會維持不變
2. 共乘費用會均勻分攤給車上的乘客，如在一段 link 上有 n 個乘客在車上，費用為 f_l，則每位乘客在該段 link 的費用為 $\frac{f_l}{n}$
3. 系統中的乘客在滿足訂單的條件下，均會允許系統分派的共乘
4. 系統中的駕駛，會接受所有系統分派的訂單
5. 乘車時間為所有經過 links 的加總
6. 在任何決策週期中，駕駛的數量充足，一定能接受所有該決策週期分派的訂單

接下來，將介紹系統中的給定參數以及決策變數

給定參數

- C：系統中駕駛的集合
- R：系統中所有訂單的集合
- R'：系統中當下決策週期未被分派的訂單的集合
- O：系統中所有訂單的起始點的集合
- D：系統中所有訂單的到達點的集合
- N：系統路網中所有 nodes 的集合，包含駕駛當下位置、所有訂單的起點與終點，$N \in C \cup O \cup D$
- L：系統路網中所有 links 的集合，路網中任意兩 nodes 即為一 link
- o_i：第 i 筆訂單的起始點，$i \in R, o_i \in O$
- d_i：第 i 筆訂單的到達點，$i \in R, d_i \in D$
- q_i：第 i 筆訂單的乘客人數，$i \in R$
- q_i^{male}：第 i 筆訂單的男性乘客人數，$i \in R$
- q_i^{female}：第 i 筆訂單的女性乘客人數，$i \in R$
- e_i：第 i 筆訂單相較於專程接送，所要求的最大共乘旅程時間增加比例限制，$i \in R$
- g_i：第 i 筆訂單相較於專程接送，所要求的最小共乘車資折扣比例限制，$i \in R$
- m_i：第 i 筆訂單的共乘旅程時間限制，$i \in R$
- n_i^{male}：第 i 筆訂單的男性人數限制，若該車限制只能有女性，則 $n_i^{male} = 0$，$i \in R$
- n_i^{female}：第 i 筆訂單的女性人數限制，若該車限制只能有男性，則 $n_i^{female} = 0$，$i \in R$
- h_i：第 i 筆訂單所要求的最大共乘人數限制，$i \in R$
- t_i：在當下決策週期中，距離第 i 筆訂單開始等待乘車時間的所剩時間，$i \in R$

- u_i ：在當下決策週期中，距離第 i 筆訂單結束等待乘車時間的所剩時間， $i \in R$
- T ：系統中等待乘車時間的額外緩衝時間
- Q_c ：駕駛 c 車上的最大允許乘車人數， $c \in C$
- L_O ：系統中所有訂單的起始點由 Node splitting 技術所產生的 artificial links 的集合
- L_D ：系統中所有訂單的到達點由 Node splitting 技術所產生的 artificial links 的集合
- P_{co_i} ：由駕駛 c 目前位置到第 i 筆訂單的起始位置 o_i 所有可能 paths 的集合，$c \in C, i \in R, o_i \in O$
- P_{cd_i} ：由駕駛 c 目前位置到第 i 筆訂單的到達位置 d_i 所有可能 paths 的集合，$c \in C, i \in R, d_i \in D$
- P_c ：由駕駛 c 目前位置至路網中任一 node (包含駕駛目前位置) 所連結的虛擬節點，該虛擬節點不屬於目前路網，且與任一路網中的 node 所形成的 link 長度為 0，$c \in C$
- t_{cl} ：駕駛 c 在 link l 上的行駛所需花費的時間，$c \in C, l \in L$
- t_{ci} ：駕駛 c 專程接送第 i 筆訂單從起始節點至到達節點所需花費的時間，$c \in C, i \in R$
- f_{cl} ：駕駛 c 在 link l 上的行駛所要花費的車資，$c \in C, l \in L$
- f_{ci} ：駕駛 c 專程接送第 i 筆訂單從起始節點至到達節點所需花費的車資，$c \in C, i \in R$
- δ_{pl}：為一 Indicator function， 若 link l 在路徑 p 上為 1，否則為 0，$l \in L, p \in P_c \cup P_{co_i} \cup P_{cd_i}$
- α：上個決策週期駕駛接單數的 fairness index，若系統中駕駛數量有增減，則該 fairness index 重設為 0
- r_c ：駕駛 c 自 fairness index 重設以來所累積的總車資收入 $c \in C$

決策變數

- x_p ：為一個二元變數, 若 p 路徑有被駕駛 c 選擇時為 1，否則為 0，$p \in P_{co_i}, c \in C, i \in R, o_i \in O$
- y_p ：為一個二元變數, 若 p 路徑有被駕駛 c 選擇時為 1，否則為 0，$p \in P_{cd_i}, c \in C, i \in R, d_i \in D$
- z_p ：為一個二元變數, 若 p 路徑有被駕駛 c 選擇時為 1，否則為 0，$p \in P_c, c \in C$
- w_{ci} ：為一個二元變數, 若駕駛 c 接受第 i 筆訂單時為 1，否則為 0，$c \in C, i \in R$
- s_{cl} ：為一個二元變數, 若駕駛 c 在共乘路徑上有經過 l link時為 1，否則為 0，$c \in C, l \in L \cup L_O \cup L_D$
- β：當前決策週期駕駛接單數的 fairness index

目標函數

本系統的目標是最小化所有訂單中，因共乘所造成的最大車程增加量，意即相比於專程載運，共乘所額外增加的繞路成本

$$\min_{c \in C} \max_{i \in R'} \frac{w_{ci} t_{ci}}{w_{ci} t_{ci} - carpool\ cost_{ci}} \tag{IP1}$$

$$\text{where } carpool\ cost_{ci} = \sum_{p \in P_{cd_i}} \sum_{l \in L} y_p \delta_{pl} t_{cl} - \sum_{p \in P_{co_i}} \sum_{l \in L} x_p \delta_{pl} t_{cl}$$

限制式

- 限制式 (3.1) 確保接送開始時間符合訂單要求

$$\sum_{p \in P_{co_i}} \sum_{l \in L} x_p \delta_{pl} t_{cl} \geq t_i - T \qquad \forall c \in C, i \in R' \tag{3.1}$$

- 限制式 (3.2) 確保接送截止時間符合訂單要求

$$\sum_{p \in P_{co_i}} \sum_{l \in L} x_p \delta_{pl} t_{cl} \leq u_i + T \qquad \forall c \in C, i \in R' \tag{3.2}$$

- 限制式 (3.3) 確保系統中任何駕駛會選擇一條路線（到訂單起點與終點，以及共乘路線），共乘路線是由駕駛當下位置至一虛擬終點，因此不管是否有在該決策週期接到任何單，都需要有一條共乘路線

$$\sum_{p \in P_c} z_p = 1 \qquad \forall c \in C \tag{3.3}$$

- 限制式 (3.4), (3.5) 確保駕駛接到訂單後，會規劃出到該訂單起訖點的路線

$$\sum_{p \in P_{co_i}} x_p = w_{ci} \qquad \forall c \in C, i \in R' \tag{3.4}$$

$$\sum_{p \in P_{cd_i}} y_p = w_{ci} \qquad \forall c \in C, i \in R' \tag{3.5}$$

- 限制式 (3.6) 確保任何一筆訂單最多分配給一位駕駛

$$\sum_{c \in C} w_{ci} \leq 1 \qquad \forall i \in R' \tag{3.6}$$

- 限制式 (3.7) 確保任何一筆訂單會先接後送（以花費時間來判斷，若到起點所需的時間少於到終點的時間，則為先接後送）

$$\sum_{p \in P_{co_i}} \sum_{l \in L} x_p \delta_{pl} t_{cl} \leq \sum_{p \in P_{cd_i}} \sum_{l \in L} y_p \delta_{pl} t_{cl} \qquad \forall c \in C, i \in R' \tag{3.7}$$

- 限制式 (3.8) 確保有接到訂單駕駛一定會經過該訂單起訖點的 artificial links

$$s_{cl} \geq w_{ci} \qquad \forall l \in L_O \cup L_D, i \in R', c \in C \tag{3.8}$$

- 限制式 (3.9), (3.10), (3.11) 確保司機從當前位置到司機接受訂單的起迄點所形成的路徑

與共乘路徑重疊

$$\sum_{p \in P_c} z_p \delta_{pl} \geq s_{cl} \qquad \forall l \in L \cup L_O \cup L_D, c \in C \tag{3.9}$$

$$\sum_{p \in P_{co_i}} x_p \delta_{pl} \leq s_{cl} \qquad \forall l \in L \cup L_O \cup L_D, i \in R', c \in C \tag{3.10}$$

$$\sum_{p \in P_{cd_i}} y_p \delta_{pl} \leq s_{cl} \qquad \forall l \in L \cup L_O \cup L_D, i \in R', c \in C \tag{3.11}$$

- 限制式 (3.12) 確保共乘中乘客人數不會超出車子載客量（在任何共乘經過的 link 中，車上的人數都不能超過限制）

$$\sum_{i \in R'} \sum_{p \in P_{cd_i}} y_p \delta_{pl} q_i - \sum_{i \in R'} \sum_{p \in P_{co_i}} x_p \delta_{pl} q_i \leq Q_c \qquad \forall l \in L, c \in C \tag{3.12}$$

- 限制式 (3.13), (3.14) 確保共乘中乘客的性別人數不會超出訂單的要求

$$\sum_{i \in R'} \sum_{p \in P_{cd_i}} y_p \delta_{pl} q_i^{male} - \sum_{i \in R'} \sum_{p \in P_{co_i}} x_p \delta_{pl} q_i^{male} \leq n_i^{male} \qquad \forall l \in L, i \in R' \tag{3.13}$$

$$\sum_{i \in R'} \sum_{p \in P_{cd_i}} y_p \delta_{pl} q_i^{female} - \sum_{i \in R'} \sum_{p \in P_{co_i}} x_p \delta_{pl} q_i^{female} \leq n_i^{female} \qquad \forall l \in L, i \in R' \tag{3.14}$$

- 限制式 (3.15) 確保共乘後的旅程時間不會超過訂單的要求

$$\sum_{p \in P_{cd_i}} \sum_{l \in L} y_p \delta_{pl} t_{cl} - \sum_{p \in P_{co_i}} \sum_{l \in L} x_p \delta_{pl} t_{cl} \leq m_i \qquad \forall c \in C, i \in R' \tag{3.15}$$

- 限制式 (3.16) 確保共乘後的繞路時程比例不會超過訂單的要求

$$\frac{\sum_{p \in P_{cd_i}} \sum_{l \in L} y_p \delta_{pl} t_{cl} - \sum_{p \in P_{co_i}} \sum_{l \in L} x_p \delta_{pl} t_{cl}}{t_{ci}} \leq e_i \qquad \forall c \in C, i \in R' \tag{3.16}$$

- 限制式 (3.17) 確保共乘後的節費比例符合訂單要求 (ϵ 為一極小常數)

$$\frac{\sum_{p \in P_{cd_i}} \sum_{l \in L} y_p \delta_{pl} f_{cl} - \sum_{p \in P_{co_i}} \sum_{l \in L} x_p \delta_{pl} f_{cl}}{f_{ci}(\sum_{i \in R'} \sum_{p \in P_{cd_i}} y_p \delta_{pl} q_i - \sum_{i \in R'} \sum_{p \in P_{co_i}} x_p \delta_{pl} q_i + \epsilon)} \geq g_i \qquad \forall c \in C, i \in R' \tag{3.17}$$

- 限制式 (3.17) 確保共乘中乘客人數不會超出訂單要求的共乘人數（在任何共乘經過的 link 中，車上的人數都不能超過限制）

$$\sum_{i \in R'} \sum_{p \in P_{cd_i}} y_p \delta_{pl} q_i - \sum_{i \in R'} \sum_{p \in P_{co_i}} x_p \delta_{pl} q_i \leq h_i \qquad \forall l \in L, c \in C \tag{3.17}$$

- 限制式 (3.18) 為駕駛接單量的 fairness index 的計算方式

$$\frac{(\sum_{c\in C}\sum_{i\in R'} w_{ci})^2}{|C|\sum_{c\in C}(\sum_{i\in R'} w_{ci})^2} = \beta \tag{3.18}$$

- 限制式 (3.19) 確保本決策週期 fairness index 不會少於上個決策週期

$$\beta \geq \alpha \tag{3.19}$$

- 限制式 (3.20), (3.21), (3.22), (3.23), (3.24) 為決策變數 x_p, y_p, z_p, w_{ci}, s_{cl} 的上下界

$$x_p \in \{0,1\} \qquad \forall p \in P_{co_i}, c \in C, i \in R' \tag{3.20}$$

$$y_p \in \{0,1\} \qquad \forall p \in P_{cd_i}, c \in C, i \in R' \tag{3.21}$$

$$z_p \in \{0,1\} \qquad \forall p \in P_c, c \in C \tag{3.22}$$

$$w_{ci} \in \{0,1\} \qquad \forall c \in C, i \in R' \tag{3.23}$$

$$s_{cl} \in \{0,1\} \qquad \forall l \in L \cup L_O \cup L_D, c \in C \tag{3.24}$$

- 限制式 (3.25) 為決策變數 β 的上下界

$$\frac{1}{|C|} \leq \beta \leq 1 \tag{3.25}$$