$C[\![x := a]\!](s) = s[x \mapsto A[\![a]\!](s)]$

$C[\![c_1 ; c_2]\!] = C[\![c_2]\!] \circ C[\![c_1]\!]$

$C[\![\text{if } b\ c_1\ c_2]\!] = cond(B[\![b]\!], C[\![c_1]\!], C[\![c_2]\!])$

$C[\![\text{while } b\ c]\!] = fix F$ (it means least fixpoint)

$$cond(f, g, h) = \lambda s. \begin{cases} g(s) & \cdots f(s) = true \\ h(s) & \cdots f(s) = false \end{cases}$$

$F(g) = cond(B[\![b]\!], g, C[\![c]\!], id)$

$F(g) = cond(B[\![b]\!], g \circ C[\![c]\!], id)$

수학적으로 while loop는 다음과 같은 사실을 의미한다.

$C[\![\text{while } b\ c]\!] = cond(B[\![b]\!], C[\![\text{while } b\ c]\!] \circ C[\![c]\!], id)$

Example,

while $\neg(x=0)$ skip

while loop의 탈출이 나가,

$F = cond(B[\![\neg(x=0)]\!], [\![g]\!] \circ skip, \boxed{id})$

$= (cond(\lambda s. s(x) \neq 0), ([\![g]\!], skip))$

$\Rightarrow \lambda s. \begin{cases} g(s) & s(x) \neq 0 \\ s & s(x) = 0 \end{cases}$

$$fix f = g_0 \begin{cases} s(x) = 0 & x \\ s(x) \neq 0 & undef \end{cases}$$

while $\neg(x=0)$ skip

$F = cond(B[\![\neg(x=0)]\!]\ [\![g]\!] \circ skip, id)$

$cond(\lambda s. (x \neq 0)(s), [\![g]\!], id)$

$$\lambda s \begin{cases} g(s) & \cdots s(x) \neq 0 \\ s & s(x) = 0 \end{cases}$$

배워야 될 개념, (p.set, LUB, glB)

Fixed point Theory.

Thm.

(cpo 집합 D에서)

Let $f : D \to D$ (자기자신) be a continuous function on a CPO D. Then f has a (unique) least fixed point, fix(f) and,

$$fix(f) = \bigsqcup_{n \geq 0} f^n(\bot)$$

The denotational semantics is well-defined if.

- $State \hookrightarrow State$ is a CPO, and.
- $F : (State \hookrightarrow State) \to (State \hookrightarrow State)$ is a continuous function

$f^0 = id$.

$fix(f) = f^0(\bot) \sqcup f^1(\bot) \sqcup \cdots f^k(\bot) \sqcup f^{k+1}(\bot)$ 일 때,

$f^k(\bot) \sqsubseteq f^{k+1}(\bot)$ 이면 stop

*. 이후 학습할 개념들 (CPO, continuous Functions, Least Fixed Point)

*. Partially Order Set.

Def: partial order.

어떤 set D가 partial order $\sqsubseteq$를 가지고 있다고 말하려면,

- reflexive: $\forall p \in D.\ p \sqsubseteq p$
- transitive; $\forall p, q, r \in D.\ p \sqsubseteq q \land q \sqsubseteq r \Rightarrow p \sqsubseteq r$.
- anti-symmetric: $\forall p, q \in D.\ p \sqsubseteq q \land q \sqsubseteq p \Rightarrow p = q$

Lemma: partial order set의 최소원소 d를 가지면 d는 유일하다 (자명)

* LUB (Least upper bound)

$(D, \sqsubseteq)$에서 Y가 D의 서브셋인 때. Y의 LUB d of D는 다음과 같이 정의됨

$\forall d' \in Y.\ d' \sqsubseteq d.$, Y의 그 어떤 원소도 d보다 작다!

$\forall d' \in Y.\ d' \sqsubseteq d.$

그리고 이 d는 D에 존재하는 어떠한 UB보다도 작아야 함

LUB of $Y = \bigsqcup Y$, LUB means join.

* Def: Greatest Lower Bound (GLB)

Partial order set $(D, \sqsubseteq)$가 있고 Y가 D의 subset일 때, GLB of Y는,

$$\forall d' \in Y,\ d \sqsubseteq d'.$$

이 때 d는 LB 중 가장 커야 한다.
GLB of Y는 $\sqcap Y$로 표기하며 meet과 의미상 같다. 즉,

LUB = Join / GLB = Meet.

* Chain.
$D \sqsubseteq$가 poset이고 Y가 D의 subset이면서 totally ordered 일 때 chain이라고 함.

$\forall y_1, y_2 \in Y,\ y_1 \sqsubseteq y_2$ or $y_2 \sqsubseteq y_1$
$\forall y_1, y_2 \in Y,\ y_1 \sqsubseteq y_2$ or $y_2 \sqsubseteq y_1$

* Def. cpo

A poset $(D, \sqsubseteq)$ is a cpo, if every chain $Y \subseteq D$ has $\sqcup Y \in D$

To show, $\sqcup\emptyset \sqsubseteq d$, $\sqcup\emptyset \in D$

$\forall d' \in \emptyset,\ d' \sqsubseteq d.$ $\boxed{\sqcup\emptyset}$

* Def. Lattice.

* lattice $(D, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap)$ is a poset, LUB와 GLB가 항상 존재해야!
$\forall a, b \in D.\ a \sqcup b \in D \land a \sqcap b \in D$

* Complete Lattice.
$(D, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$ is a poset.
every subset Y $(Y \subseteq D)$ has $\sqcup Y \in D$, and $\sqcap Y \in D$.
$\bot = \sqcup\emptyset = \sqcap D$, $\top = \sqcap\emptyset = \sqcup D$

Derived Ordered Structures

* 두 개의 complete lattice (resp. CPO), $(D_1, \sqsubseteq_1, \sqcup_1, \sqcap_1, \bot_1, \top_1)$, $(D_2, \sqsubseteq_2, \sqcup_2, \sqcap_2, \bot_2, \top_2)$ 가 있을 때 두 개의 order set의 순서를 정의하는 방법이 세 가지 있음.

∘ Lifting $(D_1 \cup \{\bot\}, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$
⇒ $\bot \notin D_1$. $\bot$ is 새로운 원소.
⇒ $a \sqsubseteq b \Longleftrightarrow a = \bot \vee a \sqsubseteq_1 b$
⇒ $\bot \sqcup a = a \sqcup \bot = a$, otherwise, $a \sqcup b = a \sqcup_1 b$ ($\sqcap$ has the same way)
⇒ $\top = \top_1$

∘ Cartesian product $(D_1 \times D_2, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$
⇒ $(d_1, d_2) \sqsubseteq (d_1', d_2')$

∘ Pointwise lifting $(S \to D, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$ when S is a set.
☑ $a \sqsubseteq b \Leftrightarrow \forall s \in S\ a(s) \sqsubseteq_1 b(s)$
☑ $\forall s \in S\ (a \sqcup b)(s) \Longleftrightarrow a(s) \sqcup_1 b(s)$

[지금까지 배운것 : CPO : 어떠한 poset D에서 존재하는 모든 체인이 항상 LUB를 가질 때.
· 체인 : 부분순서집합에 존재하는 total order set
fixpoint : CPO D→D 이고, 그게 연속함수면 무조건 유니크하게 존재.
LUB : Y가 D의 subset일 때 $d \in Y$, $d \sqsubseteq d'$ 중 가장 작은 거! $\sqcup Y$로 표기.
GLB : Y가 D의 Subset일 때 $d \in Y$ $d' \sqsubseteq d$ 중 가장 큰 거. $\sqcap Y$로 표기.
Lattice : $a, b \in D$일 때 $a \sqcup b \in D$, $a \sqcap b \in D$ 일 경우
Partial order set : reflexive, transitive, anti symmetric

* def : 단조함수 (Monotone function)

[정의 $f : D \to E$ (D, E are posets)
$\forall d, d' \in D$. $d \sqsubseteq d' \Rightarrow f(d) \sqsubseteq f(d')$

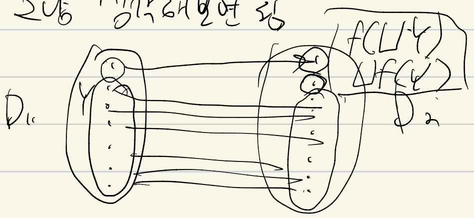
다시 말해 D에 존재하는 임의의 원소에 f를 적용해도 순서가 보존된 경우.

$$\forall d, d' \in D,\ d \sqsubseteq d' \Rightarrow f(d) \sqsubseteq f(d')$$

Lemma, $(D_1, \sqsubseteq_1)$, $(D_2, \sqsubseteq_2)$, $(D_3, \sqsubseteq_3)$ 가 CPO 라면,
$f_1 : D_1 \to D_2$, $f_2 : D_2 \to D_3$ 일 때, $g \circ f : D_1 \to D_3$ 는 단조함수이다 (자명함, 순서를 보존하기 때문에)

※ 단조함수의 성질
$(D_1, \sqsubseteq_1)$ $(D_2, \sqsubseteq_2)$ 가 CPO 이고 $f : D_1 \to D_2$ 가 단조함수 일 때
Y가 D_1의 체인이라면 $f(Y) = \{f(d) \mid d \in Y\}$
$f(Y) = \{f(d) \mid d \in Y\}$ is chain in D_2 as well
더 나아가서 $\sqcup f(Y) \sqsubseteq f(\sqcup Y)$ 가 성립한다.

그냥 생각해보면 됨



okay!

✓ def 연속함수 (Continuous Functions)

$(D_1, \sqsubseteq_1)$, $(D_2, \sqsubseteq_2)$ 가 CPO 이고 $f: D_1 \to D_2$ 일 때,
단조함수면서 f가 체인의 LUB를 보존한다면, 다시말해 ~~해~~

“ $\sqcup f(Y) = f(\sqcup Y)$ 라면.

그리고 그것이 D_1의 임의의 non-empty chain Y에 대해 성립한다면.
그것은 연속함수이다.

만약 empty chain 에 대해서도 성립한다면, 다시말하니.
“ $\bot = f(\bot)$ ”가 성립한다면 이때 f를 “Strict” 하다고 말한다.

질문1) Strict라는 개념이 따로 필요한 이유는 뭘까?

✓ def) Least Fixed Point

$(D, \sqsubseteq)$가 poset 일 때 $f: D \to D$, $d \in D$ 일 때 $f(d) = d$ 이면
그것을 fix(f), 다시 말해 least fixed point of f 라고 한다.

- $f(fix(f)) = fix(f)$ ⇒ fixed point 조건은 만족하며
- $\forall d \in D.\ f(d) = d \Rightarrow fix(f) \sqsubseteq d$ ⇒ 그 중 가장 작은 것.

More Notations

- 만약 $f(x)=x$ 면 x는 f의 fpoint, $fp(f) = \{x \mid f(x) = x\}$
- pre-fixed point of f ⇒ $x \sqsubseteq f(x)$
- post-fixed point of f ⇒ $x \sqsupseteq f(x)$
- lfp, gfp

def Kleene Fixed Point

$f: D \to D$, continuous function on a CPO D.

The f has lfp and

“ $fix(f) = \bigsqcup_{n \ge 0} f^n(\bot)$ ”, where $f^n(\bot) = \begin{cases} \bot & n = 0 \\ f(f^{n-1}(\bot)) & n > 0 \end{cases}$

Proof of Kleene fixed point.

① 이게 fp라는 증명.

$$f\left(\bigsqcup_{n\geq 0} f^n(\bot)\right) = \bigsqcup_{n\geq 0} f(f^n(\bot))$$

$$= \bigsqcup_{n\geq 0} f^{n+1}(\bot) \leftarrow \text{1부터 시작}$$

$$= \bigsqcup_{n\geq 0} f^n(\bot) \leftarrow \text{⊥부터 시작,}$$

그런데 ⊥을 join해도 의미 없지

② 이게 least라는 증명

d가 fp라고 해보자, 다시말해 $f(d)=d$. Then,

$$\bigsqcup_{n\geq 0} f^n(\bot) \sqsubseteq d$$

왜냐하면 $\forall n \in \mathbb{N}.\ f^n(\bot) \sqsubseteq d$

$f^0(\bot) = \bot \sqsubseteq d$, $f^n(\bot) \sqsubseteq d \Rightarrow f^{n+1}(\bot) \sqsubseteq f(d) = d$

$\therefore\ \mathrm{fix}(f) = \bigsqcup_{n\geq 0} f^n(\bot)$

$$\mathrm{while}(b, c) = \mathrm{Cond}(\mathcal{B}[\![b]\!], \boxed{S} \cdot (\mathcal{C}[\![c]\!]), id))$$