Péndulo Simple - Análisis, simulación y construcción

Enrique Benavides Téllez, Isaac Ayala Lozano,
Sandy Natalie Campos Martínez, Luis Gerardo Almanza Granados
y Yair Casas Flores
Robótica y Manufactura Avanzada
CINVESTAV
Ramos Arizpe, México

***Resumen*—El sistema del péndulo simple es uno de los sistemas más estudiados en teoría de control. Su fácil construcción y modelado permite el diseño de diferentes estrategias de control y una gran facilidad de probar dichas estrategias antes de implementarlas en un sistema más complejo. El documento presente muestra el estudio del sistema sin linealización. El estudio comprende la obtención de las ecuaciones de movimiento, la simulación del mismo en Matlab y la comparación del modelo con un sistema físico.**

I. Introducción

El péndulo simple es quizá el sistema físico más empleado en academia para introducir conceptos de física y teoría de control. Su estudio como sistema lineal y como sistema no lineal permite el uso de múltiples técnicas de análisis para predecir su comportamiento así como controlar el mismo. Para el caso de mínima complejidad, el sistema es modelado como un sistema de masa puntual operando en un rango de movimiento angular menor a 20 grados. Estas consideraciones permiten linearizar el sistema al reemplazar funciones trascendentales que describen su movimiento por ecuaciones polinomiales.

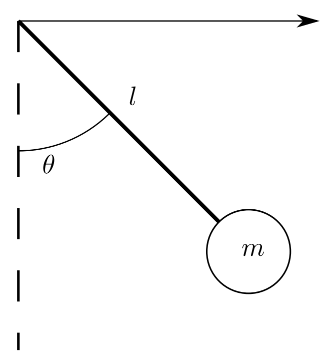

Figura 1. Sistema de Péndulo simple.

II. Desarrollo

El péndulo simple es un sistema el cual se basa en una particula de masa m sostenido de un punto fijo por medio de una barra o hilo de masa despreciable y sin extenderse mas de su distancia l. (Insertar figura del péndulo)

Para encontrar el movimiento de un péndulo se utilizaron los métodos de fuerza de Newton y el método de energías de Lagrange. Por medio del método de fuerzas de Newton, se desarrolla de la siguiente manera.

$$\sum F = ma = -F_{mg} - F_f$$
$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - kl\dot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{k}{m}\dot{\theta}$$

m = masa del péndulo
l = largo del péndulo
k = constante fricción

El modelo en base al método de Newton se basa en conocer las fuerzas actuando, las fuerzas principales que actúan sobre el péndulo es la fuerza ocasionada por el peso de la masa (F_{mg}) y la fuerza de al fricción que se opone al movimiento del péndulo (F_f).

El segundo método utilizado para encontrar las ecuaciones de movimiento fue el de energías de Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{1}$$

Por este método se necesitan desarrollar las ecuaciones de energía del péndulo. Y para desarrollar las ecuaciones de posición asignamos el marco de referencia del péndulo y se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} l\,\mathrm{sen}(\theta) \\ l(1-\cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{2}$$

Energía Cinética

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{3}$$

Derivando las ecuaciones de posición del péndulo obtenemos las ecuaciones de velocidad:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} l\dot{\theta}\cos(\theta) \\ l\dot{\theta}\,\mathrm{sen}(\theta) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Sustituyendo en la ecuacion 3 y desarrollando se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{5}$$

Energía Potencial

La energía potencial se plantea multiplicando la posición en el *eje y* del péndulo por la masa y gravedad. Se plantea de la siguiente manera:

$$V = mgl(1 - \cos\theta) \tag{6}$$

Con estas ecuaciones se puede definir el Lagrangiano el cual es el que va a ser diferenciado por medio de la ecuación 1. El Lagrangiano se define como:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(l\theta)^2$$
$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{d}{dt}ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}ml^2\dot{\theta} = ml^2\ddot{\theta} \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -gl\sin(\theta) \tag{8}$$

Al unir la ecuación 7 menos la ecuación 8, en base a la diferenciación del Lagrangiano (ecuación 1), se obtiene la ecuación de movimiento del sistema.

$$ml^2\ddot{\theta} + gl\sin(\theta) = 0 \tag{9}$$

III. Resultados

El mecanismo de péndulo simple es ....

IV. Conclusiones

El mecanismo de péndulo simple es ....
here [**?**].