

Péndulo Simple - Análisis, simulación y construcción

Enrique Benavides Téllez, Isaac Ayala Lozano,
Sandy Natalie Campos Martínez, Luis Gerardo Almanza Granados
y Yair Casas Flores
Robótica y Manufactura Avanzada
CINVESTAV
Ramos Arizpe, México

Resumen

Se presenta el desarrollo de un modelo matemático para el péndulo simple mediante dos estrategias de desarrollo: método de sumatoria de fuerzas y método de conservación de energía. Se incluye también los resultados de los simuladores desarrollados en MATLAB. Se presenta además una comparación de los modelos matemáticos con una implementación física del péndulo simple empleando el kit de LEGO Mindstorm.

I. Introducción

El péndulo simple (referido solamente como péndulo) es uno de los sistemas no lineales más estudiados por la comunidad científica y académica. La proliferación de su uso como sistema base para evaluar estrategias de control ha permitido desarrollar un conocimiento detallado del sistema.

De acuerdo a [1], para el modelo del péndulo simple, el péndulo se asume como una masa (m) concentrada en un extremo de una barra. El otro extremo se encuentra restringido por una junta de rotación que limita su movimiento a un plano. Se asume una fuerza de fricción viscosa (F_f) con factor de amortiguamiento (k). El péndulo oscila debido al efecto de la gravedad (F_{mg}). Las figuras 1 y 2 exhiben los componentes antes mencionados.

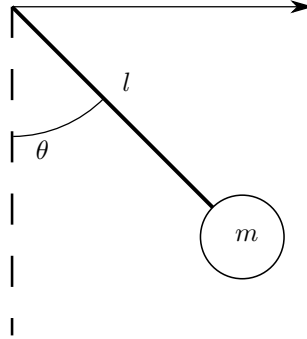


Figura 1: Sistema de Péndulo simple.

Para describir el comportamiento del sistema es necesario desarrollar ecuaciones para detallar el movimiento y velocidad del cuerpo m respecto al marco referencial de interés.

II. Marco Teórico

II-A. Leyes de movimiento de Newton

Sir Isaac Newton establece en su obra Principia Mathematica las tres leyes que fungen como la fundación de la mecánica clásica.

1. Un cuerpo mantiene su estatus quo, respecto a un marco referencial inercial, salvo que una fuerza externa actúe sobre éste. (Ley de inercia)

$$\sum \mathbf{F} = 0 \iff \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad (1)$$

2. La tasa de cambio de la cantidad de movimiento (momentum) de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza aplicada. (Conservación del momentum)

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (2)$$

3. El efecto m utuo de dos cuerpos que actúan uno sobre el otro es siempre igual y en direcciones contrarias.

$$\mathbf{F}_{a/b} = -\mathbf{F}_{b/a} \quad (3)$$

Dado que la cantidad de movimiento es descrita en función de la masa (m) del objeto y su velocidad lineal (\mathbf{v}), es posible expresar (2) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ \mathbf{p} &= m\mathbf{v} \\ \sum \mathbf{F} &= \frac{dm\mathbf{v}}{dt} \\ \sum \mathbf{F} &= m \frac{d\mathbf{a}}{dt} \end{aligned} \quad (4)$$

De manera similar, la conservación de movimiento angular (L), que relaciona el momento de inercia (I) de un cuerpo con su velocidad angular (ω), se expresa en función del torque que se aplica en un cuerpo respecto a un marco de referencia.

$$\begin{aligned} \sum \tau &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} \\ \mathbf{L} &= I\omega \\ \sum \tau &= \frac{dI\omega}{dt} \\ \sum \tau &= I \frac{d\alpha}{dt} \end{aligned} \quad (5)$$

II-B. Conservación de energía

III. Modelo Matemático

La posición del objeto (m) respecto a un marco de referencia no inercial ubicado en el punto de rotación del péndulo puede ser descrita como un par de coordenadas $\{x, y\}$ para un plano cartesiano. Estas coordenadas pueden ser expresadas también como funciones que dependen de la posición angular (θ) del objeto con respecto al eje vertical del plano cartesiano y el tiempo (t).

Se emplean dos metodologías para obtener las ecuaciones para las coordenadas $\{x, y\}$ del sistema:

- Balance de fuerzas del sistema empleando las leyes de movimiento de Newton
- Conservación de energía mediante la ecuación de Euler-Lagrange

III-A. Leyes de movimiento de Newton

Empleando las leyes de movimiento de Newton, se establece que la aceleración (\mathbf{a}) que el objeto experimenta está determinada por el efecto combinado de las fuerzas que actúan sobre el mismo. De igual manera, esta relación puede ser representada por el cambio de momento angular del sistema respecto al marco de referencia Σ_0 .

Como se observa en la figura 2, para el caso de un péndulo simple hay dos vectores de fuerza presentes en el sistema: la fuerza de gravedad ($\mathbf{F}_{mg} = m\mathbf{g}$) que actúa paralelo al eje vertical y la fuerza de fricción ($\mathbf{F}_f = kl\dot{\theta}$) que se opone al movimiento del objeto.

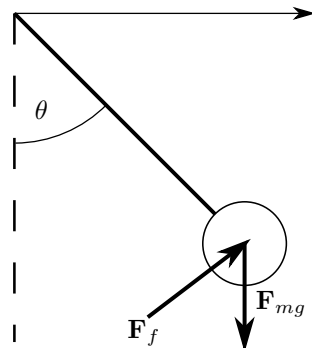


Figura 2: Diagrama de fuerzas.

Debido al movimiento circular que el péndulo experimenta, es preferible expresar el efecto combinado de las fuerzas que actúan en el sistema como la sumatoria de los torques que éstas fuerzas efectúan sobre el sistema con respecto al marco de referencia inercial.

$$\begin{aligned}\sum \boldsymbol{\tau} &= \sum (\mathbf{l} \times \mathbf{F}) \\ &= I\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}\tag{6}$$

La variable de interés es el escalar θ , por ello se replantea la ecuación (6) como la suma de las magnitudes de los momentos. Esta magnitud se expresa de la siguiente manera:

$$\tau = \langle \mathbf{l}, \mathbf{F} \rangle = lF \sin(\phi)\tag{7}$$

En donde ϕ es el ángulo entre los vectores de posición y fuerza. Para los vectores de fuerza de gravedad y fricción, solamente los componentes ortogonales al vector de posición generan un torque sobre el objeto, por lo que la expresión anterior se reduce a $\tau = lF_{\perp}$.

Retomando la ecuación (6), considerando que el momento de inercia respecto al marco refencial para una partícula es el producto de la masa y el cuadrado de la distancia ($I = ml^2$):

$$\begin{aligned}\sum \tau &= lF_{mg\perp} + lF_f \\ &= l(-mg \sin(\theta)) + l(kl\dot{\theta}) \\ &= I\alpha \\ &= (ml^2)\ddot{\theta}\end{aligned}\tag{8}$$

Se resuelve (8) para $\ddot{\theta}$

$$\begin{aligned}(ml^2)\ddot{\theta} &= l(-mg \sin(\theta)) + l(kl\dot{\theta}) \\ &= -mgl \sin(\theta) + kl^2\dot{\theta} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{k}{m}\dot{\theta}\end{aligned}\tag{9}$$

III-B. Conservación de energía | Euler-Lagrange

El modelo obtenido en

IV. Simulación

V. Modelo físico

V-A. Prueba de concepto

VI. Resultados

En la figura 3 se presenta el diagrama fase del sistema para posición y velocidad con respecto al eje x .

VII. Conclusiones

El mecanismo de péndulo simple es
here [2].

Referencias

- [1] Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control.
- [2] The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics.

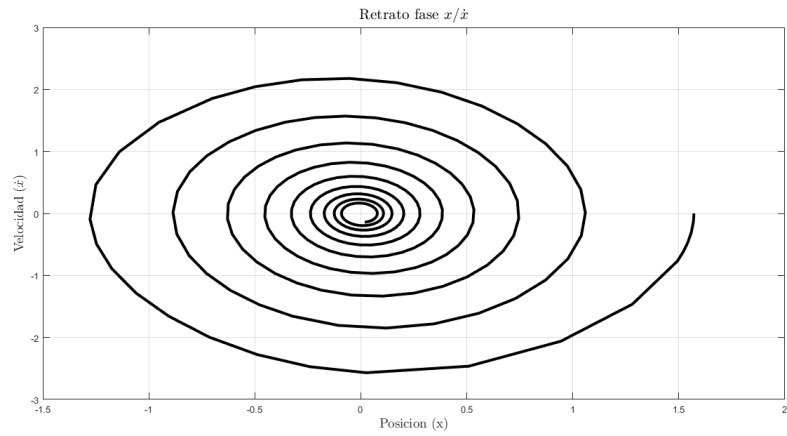


Figura 3: Diagrama de fase de $x(t)$ y $\dot{x}(t)$.

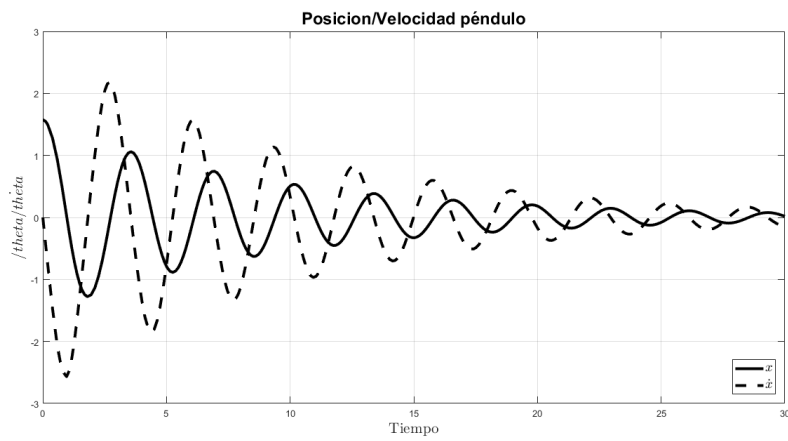


Figura 4: Comportamiento de $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ en el tiempo.

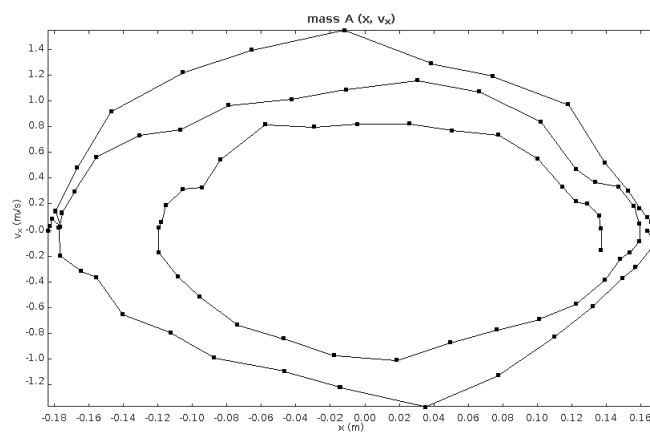


Figura 5: Diagrama de fase del modelo físico para x y \dot{x}

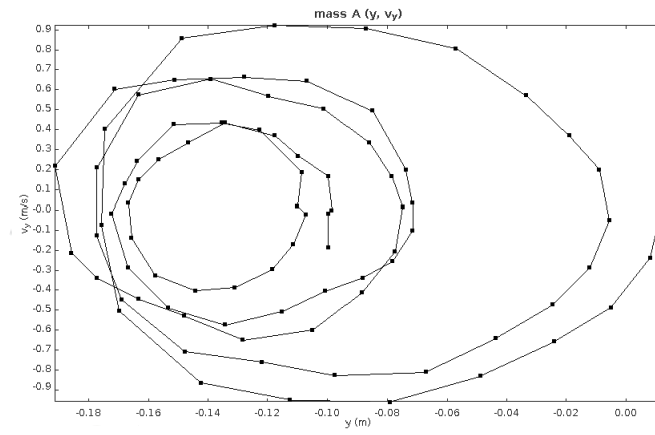


Figura 6: Diagrama de fase del modelo físico para y y \dot{y}