

Péndulo Simple

Análisis, simulación y construcción

Enrique Benavides Téllez, Isaac Ayala Lozano,
Sandy Natalie Campos Martínez,
Luis Gerardo Almanza Granados
y Yair Casas Flores

Resumen

Se presenta el desarrollo de un modelo matemático para el péndulo simple mediante dos estrategias de desarrollo: método de sumatoria de fuerzas y método de conservación de energía. Se incluye también los resultados de los simuladores desarrollados en MATLAB. Se presenta además una comparación de los modelos matemáticos con una implementación física del péndulo simple empleando el kit de LEGO Mindstorm.

1. Introducción

El péndulo simple ha sido uno de los mecanismos más estudiados por la comunidad científica a lo largo del tiempo, y sus aplicaciones han sido vastas. Galileo Galilei describió el comportamiento de este mecanismo en 1602 [drake2003galileo], llegando a la conclusión de que el movimiento del mismo es *isócrono*. Quizás la aplicación más importante del péndulo simple ha sido la invención del físico y matemático Christian Huygens: el reloj de péndulo. Inventado en 1656 y patentado en 1657 [bennet2002huygenclock], el reloj de péndulo demostró ser el instrumento más preciso para la medición del tiempo hasta la construcción del reloj de cuarzo en 1927 en Bell Laboratories [morrison1948quartzcrystalclock].

Es evidente que la comprensión detallada de este mecanismo ha dado lugar a avances científicos e invenciones importantes a lo largo de la historia de la humanidad. Este trabajo pretende mostrar un análisis de dicho mecanismo empleando dos metodologías para su análisis. El trabajo se enfoca en tres áreas de interés para el estudio del péndulo simple: el modelo matemático del sistema, la simulación del modelo matemático empleando herramientas computacionales y una implementación física del mecanismo.

2. Marco Teórico

2.1. Péndulo simple

Para su estudio, el péndulo simple se describe como una masa m concentrada en un punto [sastry2013nonlinear] que se encuentra suspendida mediante un elemento de masa despreciable y de longitud l que la conecta a un punto de pivoteo. Para el trabajo presentado, las fuerzas que actúan sobre dicha masa se restringen a la fuerza de gravedad F_{mg} , la cual induce el movimiento del cuerpo, y una fuerza de fricción viscosa F_f , la cual amortigua el sistema y lo lleva al reposo después de un tiempo dado.

La representación del péndulo simple puede ser observada en la figura ?? . La posición angular θ de la masa es medida respecto a la vertical del sistema. A su vez, la figura ?? presenta las fuerzas que actúan sobre la masa.

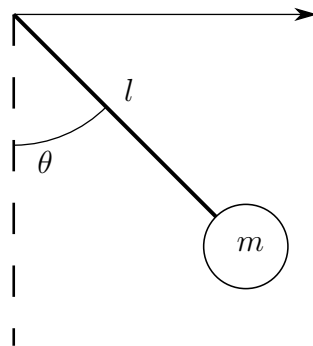


Figura 1: Sistema de Péndulo simple.

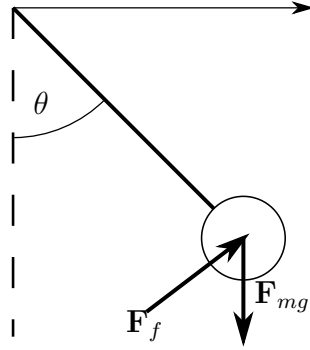


Figura 2: Diagrama de fuerzas.

2.2. Leyes de movimiento de Newton

Sir Isaac Newton establece en su obra *Principia Mathematica* las tres leyes que funcionan como el cimiento de la mecánica clásica [newton1803mathematical, díaz20183d]. A continuación se presentan las leyes mencionadas.

1. Un cuerpo mantiene su estatus quo, respecto a un marco referencial inercial, salvo que una fuerza externa actúe sobre éste.

La preservación del estatus quo de un cuerpo establece que la tasa de cambio de la velocidad \mathbf{v} del cuerpo es cero.

$$\sum \mathbf{F} = 0 \iff \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad (1)$$

2. La tasa de cambio de la cantidad de movimiento (momentum) \mathbf{p} de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza aplicada.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (2)$$

La cantidad de movimiento de un cuerpo se define como el producto de la masa del cuerpo y el vector de velocidad del mismo ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$). Con esta definición es posible expresar (??) de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \\ &= m\mathbf{a} \end{aligned} \quad (3)$$

3. El efecto mutuo de dos cuerpos que actúan uno sobre el otro es siempre igual y en direcciones contrarias.

$$\mathbf{F}_{a/b} = -\mathbf{F}_{b/a} \quad (4)$$

Las leyes de Newton pueden ser aplicadas tanto a movimientos lineales como movimientos rotacionales. Para el caso de la segunda ley de Newton, es posible extender el concepto de tasa de cambio de la cantidad de movimiento del cuerpo a la tasa de cambio del momento angular \mathbf{L} del cuerpo. Para esta nueva expresión, el momento angular se relaciona con el efecto que tiene el torque $\boldsymbol{\tau}$ que genera la fuerza sobre el cuerpo en cuestión.

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (5)$$

Considerando que el momento angular para una partícula se define como el producto del momento de inercia y la velocidad angular ($\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$), es posible expresar a (5) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum \boldsymbol{\tau} &= \frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt} \\ &= I\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (6)$$

2.3. Energía

Para una partícula solamente se consideran dos tipos de energía [susskind2014theoretical]: la energía cinética, relacionada con el movimiento de la partícula, y la energía potencial, que es una función que depende de la posición de la partícula en el espacio.

- Energía cinética.

De acuerdo a [diaz20183d], la energía cinética de una partícula se expresa de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{2}m||\mathbf{v}||^2 \quad (7)$$

- Energía potencial.

La energía potencial de la partícula es una función que depende de la posición de partícula, los detalles de esta ecuación se presentarán en el desarrollo matemático del modelo.

$$V = V(x) \quad (8)$$

2.4. Mecánica Lagrangiana

La mecánica Lagrangiana es un replanteamiento de la mecánica clásica Newtoniana, haciendo uso de *coordenadas generalizadas* $\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_i)^T$ para describir un sistema. Para sistemas como el péndulo simple, su uso simplifica el desarrollo matemático del mismo.

Se introduce el concepto del *Lagrangiano* \mathcal{L} , que es una ecuación que describe la dinámica del sistema en función de la energía.

$$\mathcal{L} = T - V(x) \quad (9)$$

Se plantea la ecuación de Euler-Lagrange, que para el cálculo de variaciones permite determinar puntos estacionarios para la ecuación funcional del sistema. Esto permite minimizar la acción \mathcal{A} del sistema.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (10)$$

3. Modelo Matemático

Para describir al sistema es necesario obtener las ecuaciones de movimiento del péndulo simple. Estas ecuaciones permiten determinar su estado para cualquier instante de tiempo, tomando en cuenta las condiciones iniciales del mismo. La posición del péndulo simple se refiere a las coordenadas $\{x, y\} \in R^2$ medidas respecto a un marco referencial inercial¹ que determinan la ubicación de la masa puntual m en el espacio. La posición del péndulo se restringe a ser bidimensional ya que se asume que el movimiento del sistema está restringido a un plano cuya coordenada z es cero.

Se emplean dos metodologías para obtener las ecuaciones para las coordenadas $\{x, y\}$ del sistema:

- Mecánica Newtoniana. Utilizando el método de balanceo de torques.
- Mecánica Lagrangiana. Basada en la ecuación de Euler-Lagrange.

¹Se define como marco referencial inercial a todo marco referencial que no experimente aceleraciones.

3.1. Mecánica Newtoniana

Las coordenadas del sistema pueden ser expresadas como funciones de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin(\theta) \\ l \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (11)$$

Empleando las leyes de movimiento de Newton, se establece que la aceleración (\mathbf{a}) que el objeto experimenta está determinada por el efecto combinado de las fuerzas que actúan sobre el mismo. De igual manera, esta relación puede ser representada por el cambio de momento angular del sistema respecto al marco de referencia Σ_0 .

Como se observa en la figura ??, para el caso de un péndulo simple hay dos vectores de fuerza presentes en el sistema: la fuerza de gravedad ($\mathbf{F}_{mg} = m\mathbf{g}$) que actúa paralelo al eje vertical y la fuerza de fricción ($\mathbf{F}_f = kl\dot{\theta}$) que se opone al movimiento del objeto.

Debido al movimiento circular que el péndulo experimenta, es preferible expresar el efecto combinado de las fuerzas que actúan en el sistema como la sumatoria de los torques que éstas fuerzas efectúan sobre el sistema con respecto al marco de referencia inercial.

$$\begin{aligned} \sum \boldsymbol{\tau} &= \sum (\mathbf{l} \times \mathbf{F}) \\ &= I\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (12)$$

La variable de interés es el escalar θ , por ello se replantea la ecuación (??) como la suma de las magnitudes de los momentos. Esta magnitud se expresa de la siguiente manera:

$$\tau = \langle \mathbf{l}, \mathbf{F} \rangle = lF \sin(\phi) \quad (13)$$

En donde ϕ es el ángulo entre los vectores de posición y fuerza. Para los vectores de fuerza de gravedad y fricción, solamente los componentes ortogonales al vector de posición generan un torque sobre el objeto, por lo que la expresión anterior se reduce a $\tau = lF_{\perp}$.

Retomando la ecuación (??), considerando que el momento de inercia respecto al marco referencial para una partícula es el producto de la masa y

el cuadrado de la distancia ($I = ml^2$):

$$\begin{aligned}
\sum \tau &= lF_{mg\perp} + lF_f \\
&= l(-mg \sin(\theta)) + l(kl\dot{\theta}) \\
&= I\alpha \\
&= (ml^2)\ddot{\theta}
\end{aligned} \tag{14}$$

Se resuelve (??) para $\ddot{\theta}$

$$\begin{aligned}
(ml^2)\ddot{\theta} &= l(-mg \sin(\theta)) + l(kl\dot{\theta}) \\
&= -mgl \sin(\theta) + kl^2\dot{\theta} \\
\ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{k}{m} \dot{\theta}
\end{aligned} \tag{15}$$

3.2. Mecánica Lagrangiana

El método de conservación de energía del sistema se sustenta en la ecuación de Euler-Lagrange (??), la cual describe que para un sistema dado la energía total del sistema permanece constante. Es imperativo obtener las ecuaciones de energía del péndulo para poder determinar las ecuaciones de movimiento del sistema.

Se establece un marco de referencia inercial en la ubicación de la masa puntual en la que la posición angular del mismo sea cero. Con este marco referencial, las coordenadas de posición se expresan así:

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin(\theta) \\ l(1 - \cos(\theta)) \end{pmatrix} \tag{16}$$

Retomando la función del Lagrangiano (??), es necesario definir la energía potencial del sistema. Para el caso del péndulo simple que se está analizando, la energía potencial del sistema se expresa de la siguiente manera.

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos(\theta)) \tag{17}$$

Para el péndulo simple, la ecuación de energía cinética considera la velocidad en ambos ejes.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{18}$$

Se obtienen expresiones para la primer derivada respecto al tiempo de las coordenadas $\{x, y\}$ en función de θ .

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\dot{\theta} \cos(\theta) \\ l\dot{\theta} \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (19)$$

Sustituyendo la ecuación ?? en ??, se plantea la ecuación de la energía cinética en función de θ .

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (20)$$

Se designa a θ como la coordenada generalizada q del sistema y se plantea la función del Lagrangiano.

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \quad (21)$$

Se obtienen las derivadas parciales del Lagrangiano para la ecuación de Euler-Lagrange.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (22)$$

Substituyendo (??) en (??) se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange para el sistema.

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = 0 \quad (23)$$

Se resuelve (??) para $\ddot{\theta}$.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) \quad (24)$$

Se observa que para el caso sin fricción ($k = 0$), las ecuaciones (??) y (??) son idénticas.

4. Simulación

El modelo matemático obtenido se implementó en MATLAB para estudiar el comportamiento del sistema. La tabla ?? muestra las condiciones de simulación del programa. El código del programa se encuentra disponible en GitHub² y se incluye como anexo.

Longitud (l)	0.3 [m]
Masa (m)	0.12166 [kg]
Coefficiente de fricción (k)	$\{0, 0.1\}$ [$N \cdot s/m$]
Posición angular inicial (θ_0)	0.5π [rad]
Velocidad angular inicial ($\dot{\theta}$)	0 [rad/s]
Tiempo de simulación	10 [s]
Gravedad (g)	9.81 [m/s^2]

Tabla 1: Condiciones de simulación del sistema.

4.1. Caso sin fricción

Para el caso sin fricción, el péndulo describe el comportamiento armónico simple. Observamos que la posición angular y la velocidad angular varían periódicamente (figura ??), y la amplitud máxima del período es el mismo para cada uno de ellos.

La ausencia de fricción en el sistema no permite al sistema encontrar un estado de reposo o estabilización. Esto se observa en la figura ??, que muestra el diagrama de fase del sistema. El comportamiento del sistema describe una elipse para todos los períodos del sistema.

²<https://github.com/der-coder/Cinvestav-SystemModeling-project/tree/master/codigosM>

4.2. Caso con fricción

Se observa que el péndulo tiende a una posición de reposo debido al efecto que la fuerza de fricción tiene sobre el sistema. El péndulo comienza en la posición angular máxima posible (θ_{max}) y la amplitud de las crestas y valles de las ecuaciones disminuye para cada período de oscilación. Esto puede ser observado en la figura ???. Se observa que conforme t se aproxima a infinito, la posición angular del sistema tiende al valor cero.

El diagrama de fase, mostrado en la figura ??, confirma esta tendencia. La curva del sistema indica que tiende a un punto de estabilización en $\theta = 0$, posicionando al péndulo en el eje vertical del marco referencial.

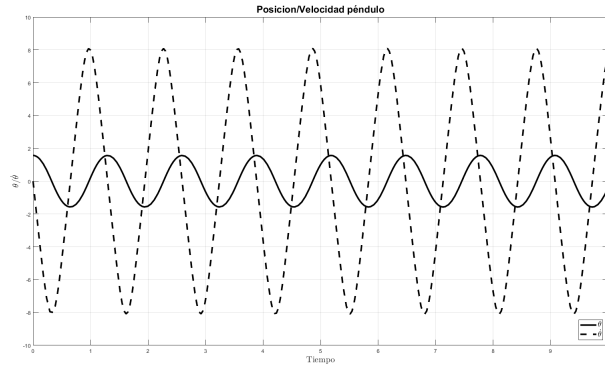


Figura 3: Comportamiento de $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ en el tiempo sin fricción.

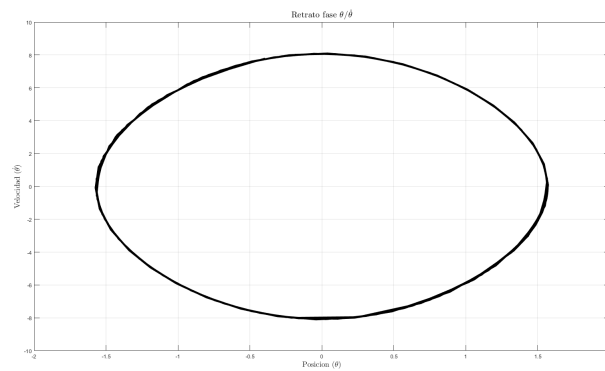


Figura 4: Diagrama de fase de $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ sin fricción.

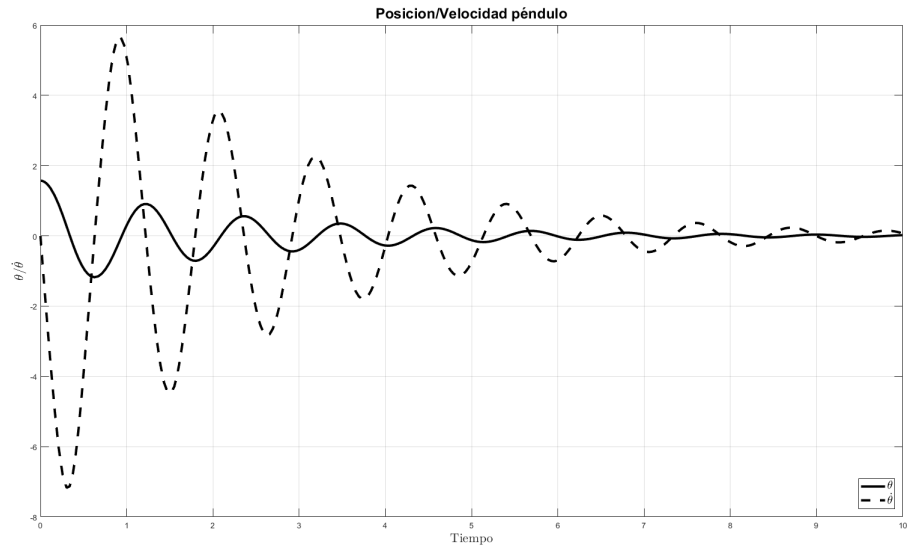


Figura 5: Comportamiento de $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ en el tiempo.

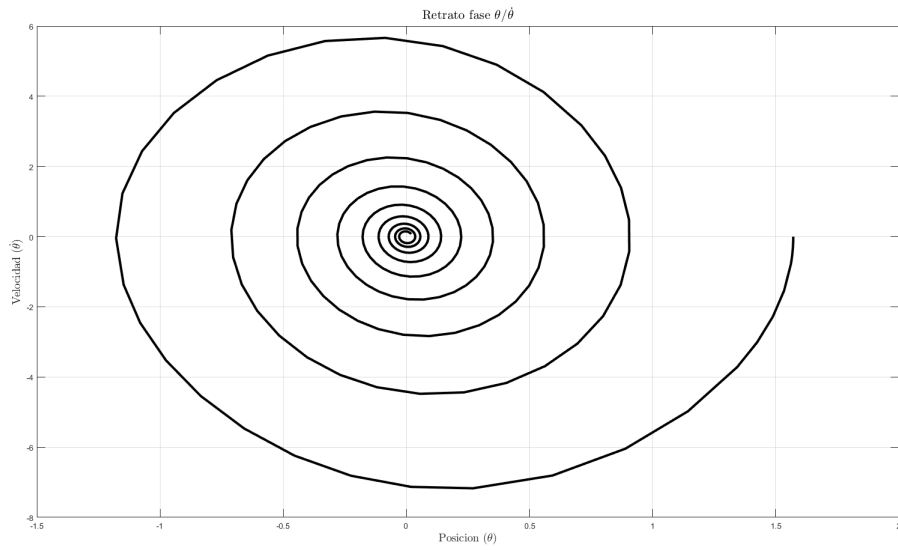


Figura 6: Diagrama de fase de $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$.

5. Modelo físico

5.1. Prueba de concepto

Se construyó un péndulo simple empleando el kit de construcción de LEGO Mindstorms. El uso de este kit presenta varias características útiles para el estudio del sistema:

- Unidad de computación integrada y programable.
- Modularidad de sus piezas.
- Facilidad de ensamble.
- Motores de corriente directa incluyen codificadores rotatorios para retroalimentación.

5.2. Análisis de video

El modelo construido se empleó para hacer un análisis de su movimiento mediante el software de *Tracker*³. Tracker es un programa *open-source* de análisis de video y modelado de ecuaciones, enfocado para sistemas físicos.

Se grabó un video del péndulo físico para evaluar el sistema y la prueba de concepto. El software es capaz de obtener mediciones sensibles para diferentes cantidades físicas como coordenadas rectangulares y polares. Las figuras ?? y ?? muestran los diagramas fase del péndulo físico. Se presenta también la coordenada x del péndulo a través del tiempo en la figura ??.

5.3. Mediciones físicas

Empleando los sensores incluidos en el kit de LEGO Mindstorms, fue posible realizar mediciones de la posición angular del péndulo para comparar con el modelo matemático y el análisis de video. La figura ?? muestra la gráfica de mediciones de θ respecto al tiempo. Se observa que las mediciones realizadas por el sensor fueron afectadas por el nivel de ruido introducido por el mismo sensor.

³<https://www.physlets.org/tracker/>

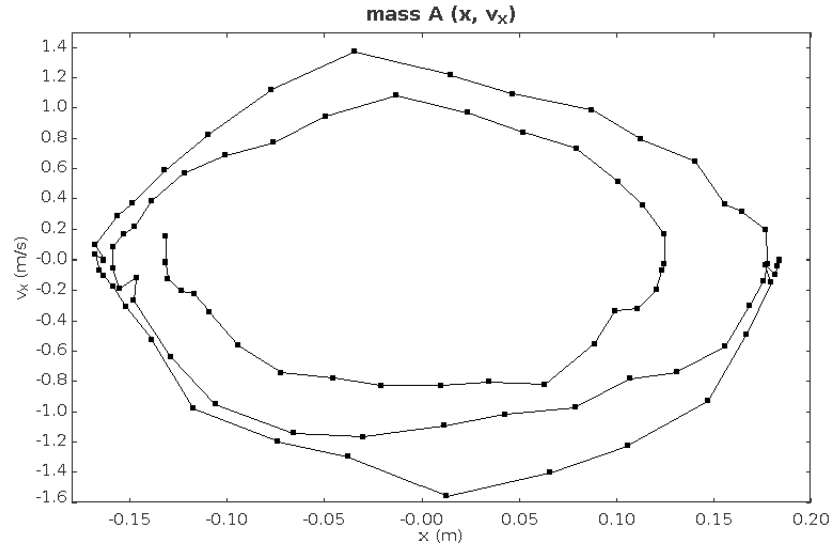


Figura 7: Diagrama de fase del modelo físico para x y \dot{x}

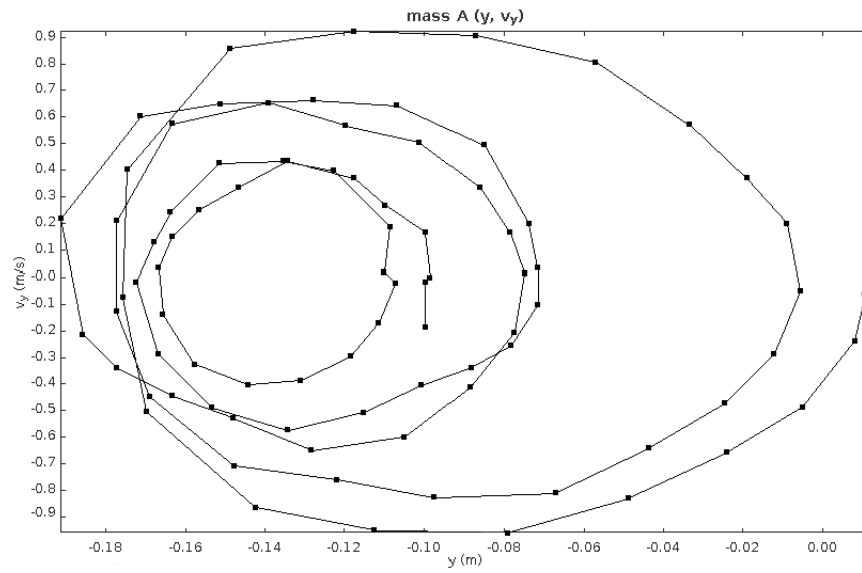


Figura 8: Diagrama de fase del modelo físico para y y \dot{y}

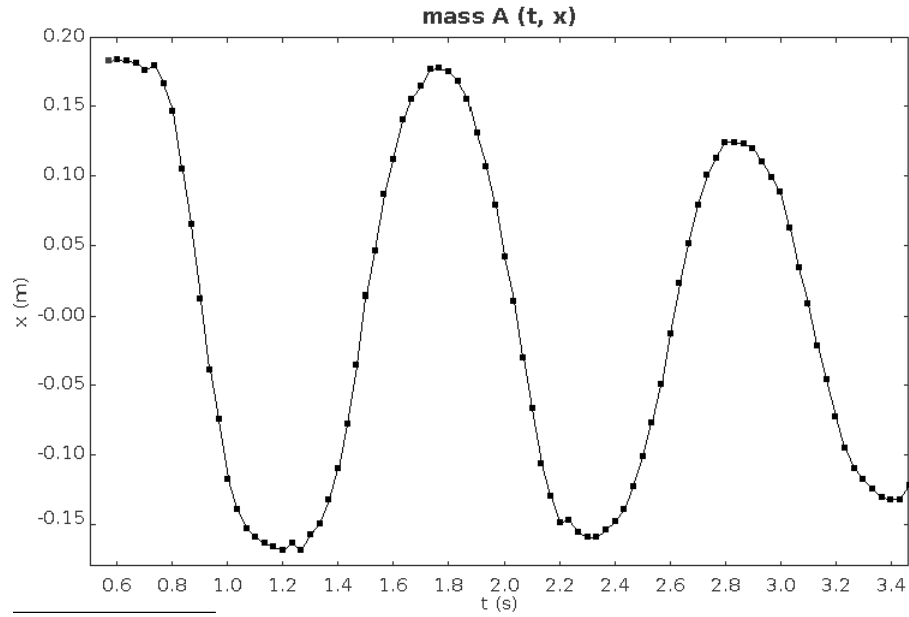


Figura 9: Diagrama de tiempo del modelo físico para x .

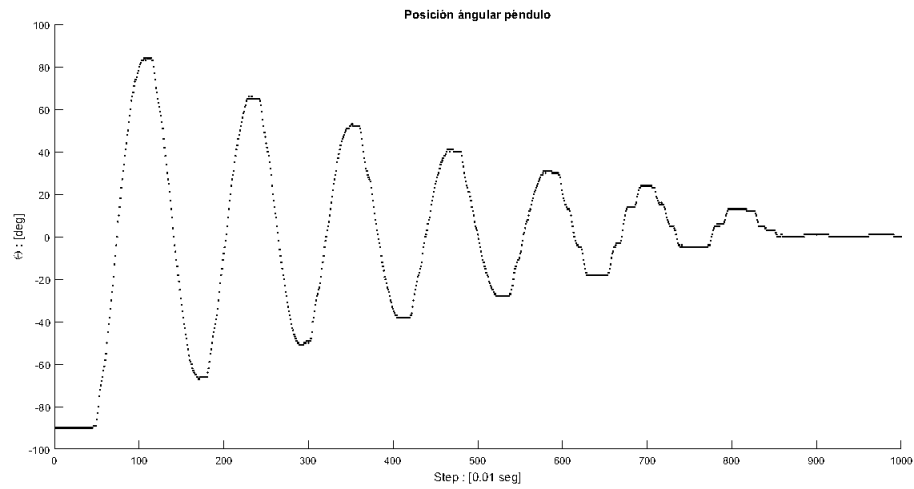


Figura 10: Mediciones de θ para el péndulo físico con el codificador rotatorio.

6. Conclusiones

El desarrollo de un modelo matemático para el péndulo simple abre la puerta para la aplicación de conocimientos de las áreas de física y matemática en un sistema de fácil construcción. Esto ha permitido desarrollar a mayor detalle el estudio del péndulo simple, pues es posible realizar comparaciones entre las simulaciones desarrolladas con el modelo matemático, el análisis de video del mecanismo y las mediciones tomadas por el mismo sistema. Este ciclo de retroalimentación da lugar a un refinamiento del modelo, pues es posible determinar con mayor precisión los valores del sistema real e implementarlos en el simulador.

Se confirma la validez del modelo matemático para el caso de fricción. Al analizar el comportamiento de θ en la simulación, como se muestra en la figura ??, se observa que esta gráfica describe el mismo perfil de movimiento que el péndulo real (figura ??).

A. Código MATLAB

```

1 function pendulin
2 %% Simulacion del pendulo
3 clear
4 clc
5 close all
6
7 %% Variables para ODE45
8 %span = 0:1/30:10;
9 tspan = [0 10];
10
11 l = 0.3;           % Largo del pendulo (m)
12 m = 0.12166;      % Masa de la bola (kg)
13 k = 0.1;          % Coeficiente de friccion
14 theta = pi/2;
15
16 p0 = [theta 0];    %theta , d_theta
17
18 [t, thet] = ode45(@(t,y)pendulo(t,y,l,m,k),tspan,p0);
19
20 figure('Name','Posicion y Velocidad')
21 plot(t, thet(:,1), 'k', t, thet(:,2), 'k—', 'linewidth',3)
22 xlabel('Tiempo', 'Interpreter','latex','fontsize',16)
23 ylabel('$\theta / \dot{\theta}$', 'Interpreter','latex',
    , 'fontsize',16)
24 legend({'$\theta$', '$\dot{\theta}$'}, 'Interpreter','
    latex','Location','Southeast','fontsize',14)
25 title('Posicion/Velocidad pndulo','fontsize',18)
26 set(gcf, 'Color',[1 1 1])
27 grid on
28
29 figure('Name','Retrato Fase')
30 plot(the(:,1), the(:,2), 'k', 'linewidth',3)
31 xlabel('Posicion ($\theta$)', 'Interpreter','latex',
    fontsize',14)
32 ylabel('Velocidad ($\dot{\theta}$)', 'Interpreter',

```



```

        latex','fontsize',14)
33 title('Retrato fase $\theta / \dot{\theta}$','
        Interpreter','latex','fontsize',16)
34 set(gcf,'Color',[1 1 1])
35 grid on
36
37
38 %% Simulacin de pendulo
39 X = l*sin(thet(:,1));
40 Y = -l*cos(thet(:,1));
41 % simulacion(t,X,Y,l)
42
43 end
44
45
46 %% Funcion para ODE45
47 function dx = pendulo(~,x,l,m,k)
48 %Parametros del pendulo
49 g = 9.81;          % Gravedad (m/s^2)
50
51 dx(1) = x(2);
52 dx(2) = -(g/l)*sin(x(1)) - (k/m)*x(2);
53 dx = dx';
54 end
55
56 function simulacion(t,x,y,l)
57
58 x_min = min(x);
59 x_max = max(x);
60 y_min = min(y);
61 y_max = max(y);
62
63 str0 = string(strcat('t = ',num2str(round(t,4))));
64 str1 = string(strcat('x = ',num2str(round(x,4))));
65 str2 = string(strcat('y = ',num2str(round(y,4))));
66
67 fig = figure(3);
68 set(gcf,'Position', get(0,'Screensize'));

```

```

69 ax = [x_min-.5 x_max+.5 y_min-.5 y_max+.5];
70 axis (ax)
71 hold on
72 grid on
73
74 n = size(t,1);
75 for i = 1:n
76     cla(gca(fig));
77     plot([0 x(i)],[0 y(i)], 'k');
78     text(1+.25,-1,str0(i), 'FontSize',16)
79     text(1+.25,-1-.10,str1(i), 'FontSize',16)
80     text(1+.25,-1-.20,str2(i), 'FontSize',16)
81     pos = [x(i) y(i)];
82     viscircles(pos,.05);
83     drawnow
84     % k(i) = getframe(fig);
85     %pause(1/30)
86 end
87 % video = VideoWriter('Pendulo', 'MPEG-4');
88 % video.FrameRate = 30;
89 % open(video);
90 % writeVideo(video, k);
91 % close(video);
92 close (fig)
93 end

```