Péndulo Simple - Análisis, simulación y construcción

Enrique Benavides Téllez, Isaac Ayala Lozano,
Sandy Natalie Campos Martínez, Luis Gerardo Almanza Granados
y Yair Casas Flores
Robótica y Manufactura Avanzada
CINVESTAV
Ramos Arizpe, México

Resumen

Se presenta el desarrollo de un modelo matemático para el péndulo simple mediante dos estrategias de desarrollo: método de sumatoria de fuerzas y método de conservación de energía. Se incluye también los resultados de los simuladores desarrollados en MATLAB. Se presenta además una comparación de los modelos matemáticos con una implementación física del péndulo simple empleando el kit de LEGO Mindstorm.

I. Introducción

El péndulo simple (referido solamente como péndulo) es uno de los sistemas no lineares más estudiados por la comunidad científica y académica. La proliferación de su uso como sistema base para evaluar estrategias de control ha permitido desarrollar un conocimiento detallado del sistema.

De acuerdo a [1], para el modelo del péndulo simple, el péndulo se asume como una masa m concentrada en un extremo de una barra. El otro extremo se encuentra restringido por una junta de rotación que limita su movimiento a un plano. Se asume una fuerza de fricción viscosa F_f con factor de amortiguamiento k. El péndulo oscila debido al efecto de la gravedad F_{mg} La figura 1 exhibe los componentes antes mencionados.

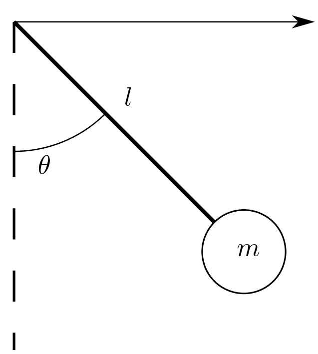

Figura 1: Sistema de Péndulo simple.

Para describir el comportamiento del sistema es necesario desarrollar ecuaciones para detallar el movimiento y velocidad del cuerpo m. Este trabajo se limitará a determinar las ecuaciones para un péndulo cuyo movimiento está restringido a un plano sin la intervención de fuerzas externas.

II. Modelo Matemático

La posición del objeto m respecto a un marco de referencia no inercial ubicado en el punto de rotación del péndulo puede ser descrita como un par de coordenadas $\{x, y\}$ para un plano cartesiano. Estas coordenadas pueden ser expresadas también como funciones que dependen de la posición angular θ del objeto con respecto al eje vertical del plano cartesiano y el tiempo t.

Existen dos metodologías para obtener las ecuaciones para las coordenadas $\{x, y\}$ del sistema:

- Balance de fuerzas del sistema empleando las leyes de movimiento de Newton.
- Conservación de energía mediante la ecuación de Euler-Lagrange

II-A. Leyes de movimiento de Newton

Empleando las leyes de movimiento de Newton, se establece que la aceleración a que el objeto experimenta está determinada por el el efecto combinado de las fuerzas que actúan sobre el mismo. Como se observa en la figura 2, para el caso de un péndulo simple sin fuerzas externas hay dos vectores de fuerza presentes en el sistema: la fuerza

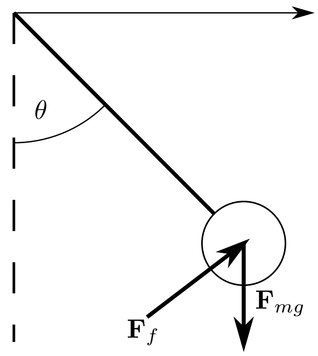

Figura 2: Diagrama de fuerzas.

de gravedad $\mathrm{F}_{mg} = mg$ que actúa paralelo al eje vertical y la fuerza de fricción $\mathrm{F}_f = kl\dot{\theta}$ que se opone al movimiento del objeto.

De acuerdo al diagrama y empleando las leyes de movimiento de Newton, el efecto combinado de las fuerzas en el objeto se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum \mathrm{F} &= m\mathrm{a} \\ \sum \mathbf{F} &= -\mathbf{F}_{mg} - \mathbf{F}_f \end{aligned} \tag{1}$$

Debido al movimiento circular del sistema, la fuerza de gravedad se descompone en dos vectores ortogonales que actúan cada uno sobre un eje diferente. Esta descomposición del vector permite despreciar el efecto de uno de ellos para el estudio del sistema.

$$\begin{aligned} \sum F &= -mg\sin\theta - kl\dot{\theta} \\ ml\ddot{\theta} &= -mg\sin\theta - kl\dot{\theta} \end{aligned}$$

Se resuelve la ecuación anterior para $\ddot{\theta}$.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{k}{m}\dot{\theta} \tag{2}$$

II-B. Conservación de energía | Euler-Lagrange

El método de conservación de energía del sistema se sustenta en la ecuación de Euler-Lagrange, la cual describe que para un sistema dado la energía total del sistema permanece constante.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{3}$$

Por este método se necesitan desarrollar las ecuaciones de energía del péndulo. Y para desarrollar las ecuaciones de posición asignamos el marco de referencia del péndulo y se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} l\,\mathrm{sen}(\theta) \\ l(1-\cos(\theta)) \end{bmatrix} \tag{4}$$

El Lagrangiano L del sistema relaciona la energía cinética T del péndulo con el potencial de energía V en el sistema.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$V = mgl\,(1-\cos\theta)$$

Recordando la ecuación para el Lagrangiano $L = T - V$ se obtienen las derivadas parciales del mismo, considerando que $q = \theta$.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \end{aligned} \tag{5}$$

Energía Cinética

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{6}$$

Derivando las ecuaciones de posición del péndulo obtenemos las ecuaciones de velocidad:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} l\dot{\theta}\cos(\theta) \\ l\dot{\theta}\,\mathrm{sen}(\theta) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Sustituyendo la ecuación 7 en 6 y desarrollando se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{8}$$

Energía Potencial

La energía potencial se plantea multiplicando la posición en el eje y del péndulo por la masa y gravedad. Se plantea de la siguiente manera:

$$V = mgl(1-\cos\theta) \tag{9}$$

Con estas ecuaciones se puede definir el Lagrangiano el cual es el que va a ser diferenciado por medio de la ecuación ??. El Lagrangiano se define como:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(l\theta)^2$$
$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}ml^2\dot{\theta} = ml^2\ddot{\theta} \tag{10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -gl\sin(\theta) \tag{11}$$

Al unir la ecuación 10 menos la ecuación 11, en base a la diferenciación del Lagrangiano (ecuación ??), se obtiene la ecuación de movimiento del sistema.

$$ml^2\ddot{\theta} + gl\sin(\theta) = 0 \tag{12}$$

III. Simulación

El modelo obtenido en

IV. Modelo físico

IV-A. Prueba de concepto

V. Resultados

En la figura 3 se presenta el diagrama fase del sistema para posición y velocidad con respecto al eje x.

VI. Conclusiones

El mecanismo de péndulo simple es ....
here [2].

Referencias

[1] Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control.
[2] The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics.

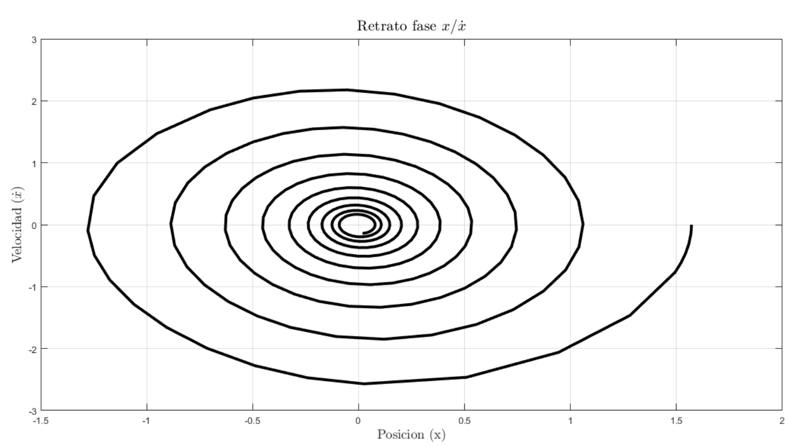

Figura 3: Diagrama de fase de $x(t)$ y $\dot{x}(t)$.

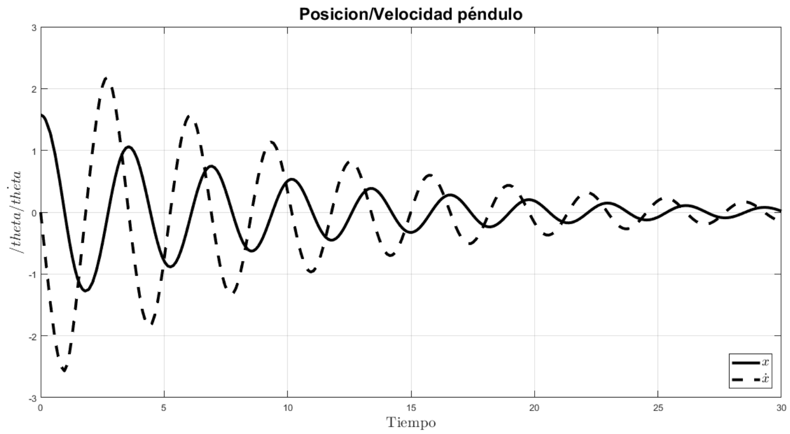

Figura 4: Comportamiento de $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ en el tiempo.

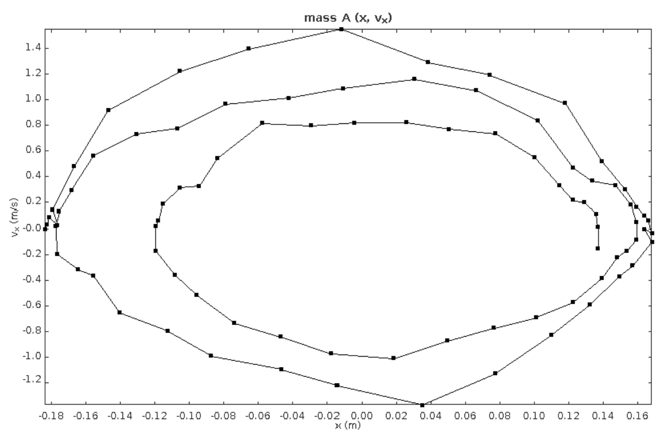

Figura 5: Diagrama de fase del modelo físico para x y $\dot{x}$

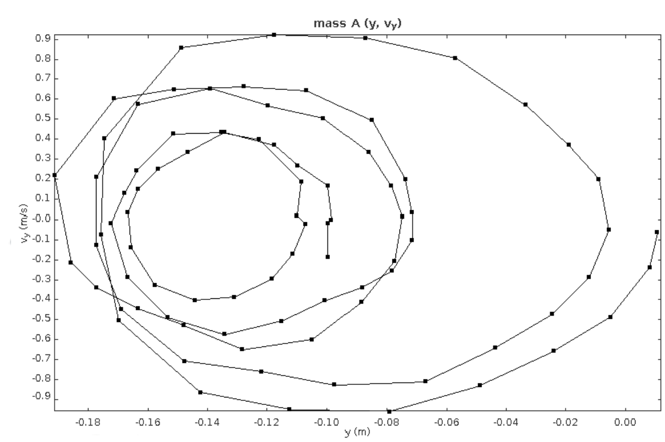

Figura 6: Diagrama de fase del modelo físico para y y $\dot{y}$