

Péndulo Simple

Modelado de sistemas

E. Benavides I. Ayala S. Campos
L. Almanza Y. Casas

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Robótica y Manufactura Avanzada

RyMA 2019

Contenido

1 Introducción

- Objetivos
- Trabajo previo

2 Nuevos desarrollos

- Formulación Hamiltoniana
- Implementación
- Análisis de video

Outline

1 Introducción

- Objetivos
- Trabajo previo

2 Nuevos desarrollos

- Formulación Hamiltoniana
- Implementación
- Análisis de video

Objetivos del proyecto

- Desarrollar el modelo matemático del péndulo simple.
- Implementar un simulador del sistema en MATLAB.
- Comparar la simulación con un modelo físico.

Outline

1 Introducción

- Objetivos

- Trabajo previo

2 Nuevos desarrollos

- Formulación Hamiltoniana

- Implementación

- Análisis de video

Diagrama de cuerpo libre

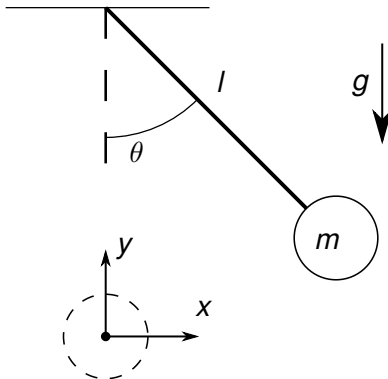


Figura 1: Péndulo simple.

Mecánica Newtoniana y Lagrangiana

- Ecuación de movimiento para la formulación de Newton

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{k}{m} \dot{\theta} \quad (1)$$

- Ecuación de movimiento para la formulación de Lagrange

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) \quad (2)$$

MATLAB

Longitud (l)	0.193 [m]
Masa (m)	0.1232109 [kg]
Coeficiente de fricción (k)	$\{0, 0.1\}$ [$N \cdot s/m$]
Posición angular inicial (θ_0)	0.5π [rad]
Velocidad angular inicial ($\dot{\theta}$)	0 [rad/s]
Tiempo de simulación	10 [s]
Gravedad (g)	9.81 [m/s^2]

Tabla 1: Condiciones de simulación del sistema.

Caso con fricción

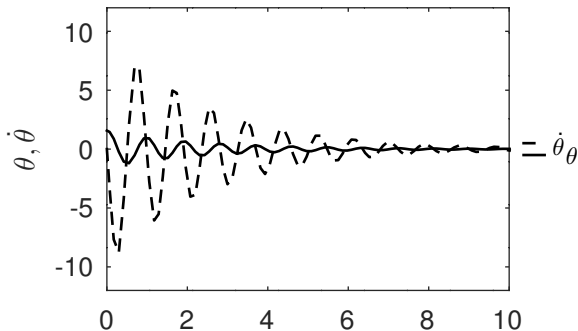


Figura 2: Comportamiento de $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ en el tiempo.

Outline

1 Introducción

- Objetivos
- Trabajo previo

2 Nuevos desarrollos

- Formulación Hamiltoniana
- Implementación
- Análisis de video

Modelo matemático

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \quad (3)$$

$$q = \theta \quad (4a)$$

$$p = P_\theta \quad (4b)$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \quad (4c)$$

$$p_\theta = ml^2\dot{\theta} \quad (4d)$$

Hamiltoniano

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L} \\ &= ml^2 \dot{\theta}^2 - \left(\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \right) \\ &= \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)\end{aligned}\tag{5}$$

Ecuaciones de movimiento

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \quad (6a)$$

$$= -mgl \sin \theta \quad (6b)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \quad (6c)$$

$$= \frac{p_\theta}{ml^2} \quad (6d)$$

Diagrama fase

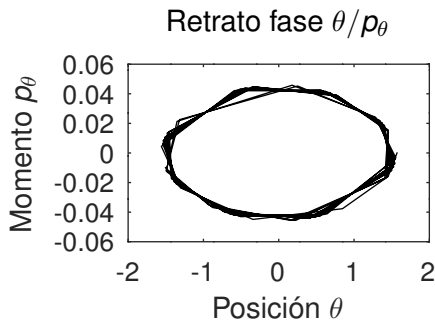


Figura 3: Comportamiento de $\theta(t)$ y p_θ en el tiempo.

Outline

1 Introducción

- Objetivos
- Trabajo previo

2 Nuevos desarrollos

- Formulación Hamiltoniana
- **Implementación**
- Análisis de video

Péndulo simple

Función de decaimiento

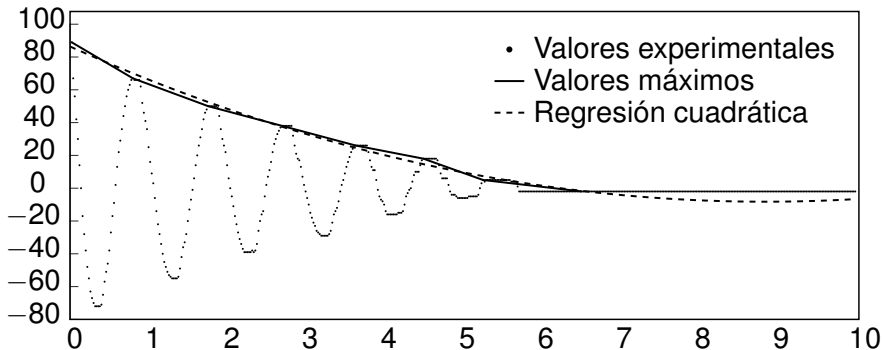


Figura 4: $y = 1.2x^2 - 21x + 86$

Outline

1 Introducción

- Objetivos
- Trabajo previo

2 Nuevos desarrollos

- Formulación Hamiltoniana
- Implementación
- Análisis de video

Tracker

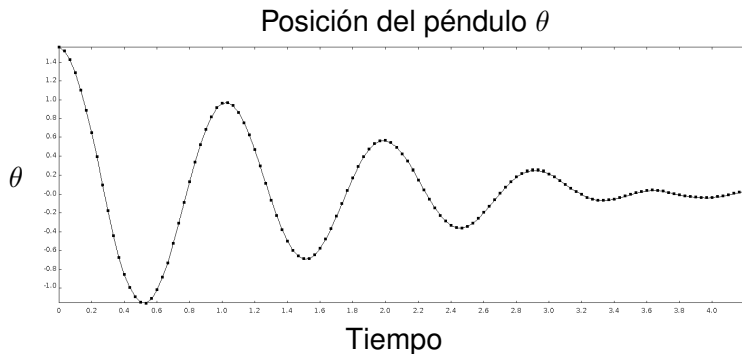


Figura 5: Diagrama de fase del modelo físico para x y \dot{x}

Tracker

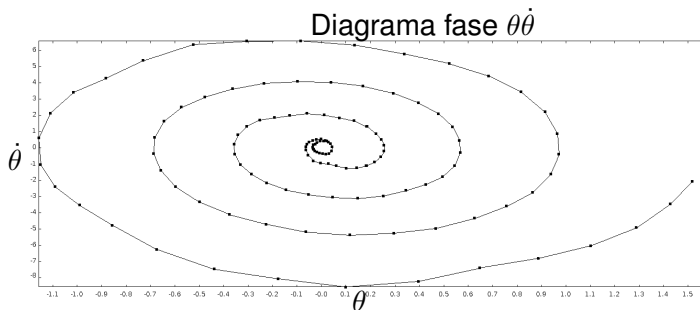


Figura 6: Diagrama de fase del modelo físico para θ y $\dot{\theta}$.

Modelo matemático original

Posición angular del péndulo

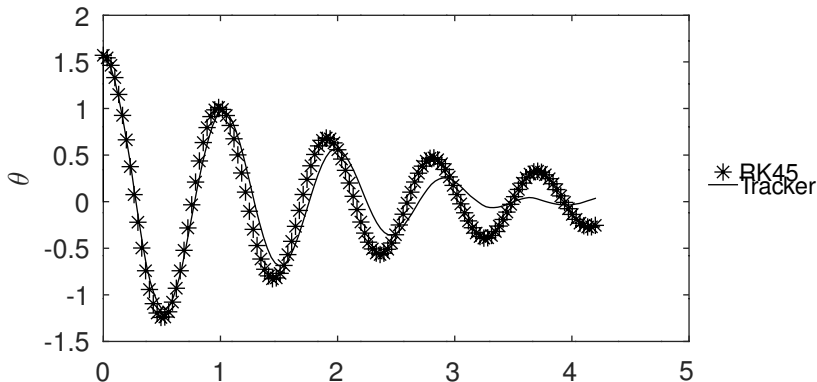


Figura 7: Comparación de la posición angular del sistema simulado y real.

Modelo matemático original

Velocidad angular del péndulo

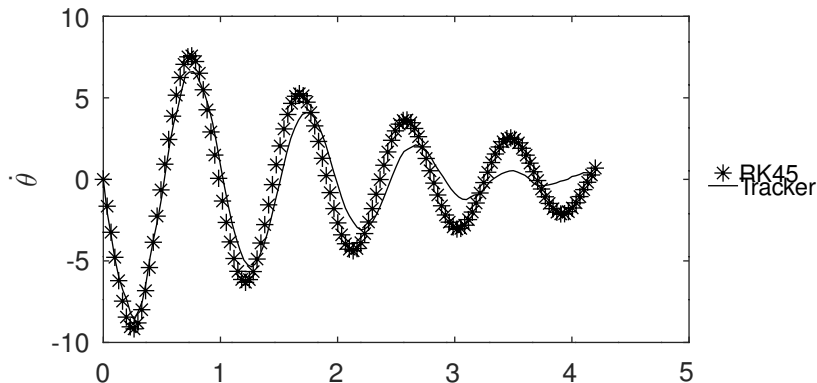


Figura 8: Comparación de la velocidad angular del sistema simulado y real.

Coeficiente de fricción

Posición angular del péndulo

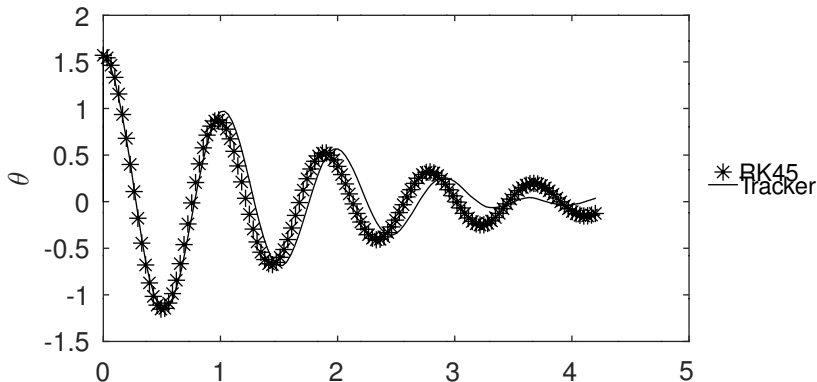


Figura 9: Posición angular para el nuevo valor del coeficiente de fricción $k = 0.135$.

Coeficiente de fricción

Velocidad angular del péndulo

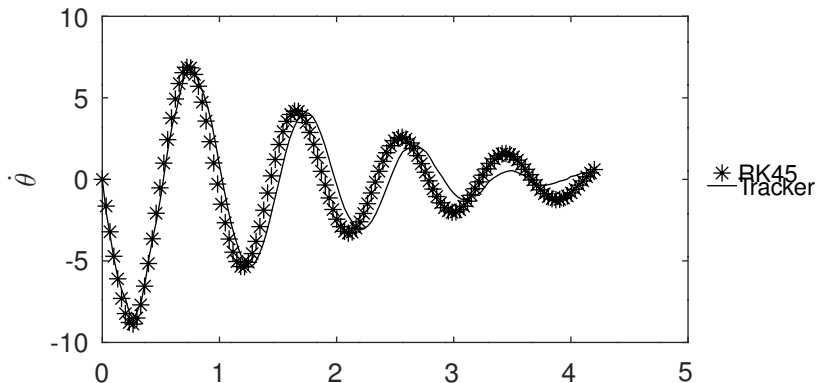


Figura 10: Velocidad angular para el nuevo valor del coeficiente de fricción $k = 0.135$.

Longitud

Posición angular del péndulo

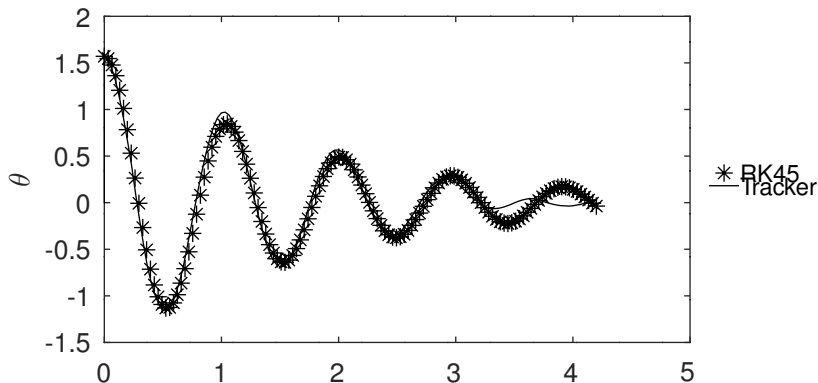


Figura 11: Posición angular para el nuevo valor de longitud $l = 0.22[m]$.

Longitud

Velocidad angular del péndulo

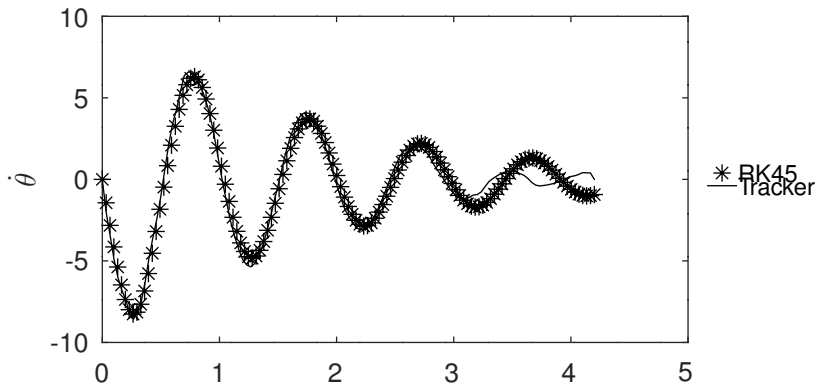


Figura 12: Velocidad angular para el nuevo valor de longitud $l = 0.22[m]$.

