Péndulo Simple - Análisis, simulación y construcción

Enrique Benavides Téllez, Isaac Ayala Lozano,
Sandy Natalie Campos Martínez, Luis Gerardo Almanza Granados
y Yair Casas Flores
Robótica y Manufactura Avanzada
CINVESTAV
Ramos Arizpe, México

Resumen—El sistema del péndulo simple es uno de los sistemas más estudiados en teoría de control. Su diseño y contrucción de baja dficultad hacen de este sistema uno de los más accesibles para modelar y contrastar con una implementación física. El documento presente muestra el estudio del sistema sin linearización. El estudio comprende la obtención de las ecuaciones de movimiento, la simulación del mismo en Matlab y la comparación del modelo con un sistema físico.

I. Introducción

El péndulo simple (referido solamente como péndulo) es uno de los sistemas no lineares más estudiados por la comunidad científica y académica. La proliferación de su uso como sistema base para evaluar estrategias de control ha permitido desarrollar un conocimiento detallado del sistema.

El péndulo se compone de una mínima cantidad de elementos:

- Un punto de rotación
- Un objeto de masa m
- Un cuerpo rígido de longitud l y masa despreciable que conecta el punto de rotación con el objeto de interés

La figura 1 exhibe los componentes antes mencionados.

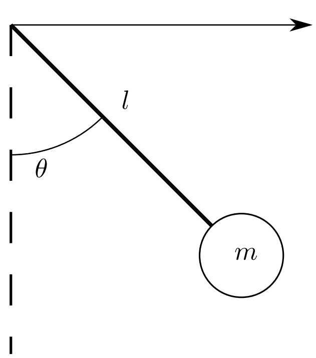

Figura 1. Sistema de Péndulo simple.

Para describir el comportamiento del sistema es necesario desarrollar ecuaciones para detallar el movimiento y velocidad del cuerpo m. Este trabajo se limitará a determinar las ecuaciones para un péndulo cuyo movimiento está restringido a un plano sin la intervención de fuerzas externas.

II. Desarrollo

II-A. Modelo matemático

La posición del objeto m respecto a un marco de referencia no inercial ubicado en el punto de rotación del péndulo puede ser descrita como un par de coordenadas $\{x, y\}$ para un plano cartesiano. Estas coordenadas pueden ser expresadas también como funciones que dependen de la posición angular θ del objeto con respecto al eje vertical del plano cartesiano y el tiempo t.

Existen dos metodologías para obtener las ecuaciones para las coordenadas $\{x, y\}$ del sistema:

- Balance de fuerzas del sistema empleando las leyes de movimiento de Newton.
- Conservación de energía mediante la ecuación de Euler-Lagrange

Empleando las leyes de movimiento de Newton, se establece que la aceleración a que el objeto experimenta está determinada por el el efecto combinado de las fuerzas que actúan sobre el mismo. Como se observa en la figura 2, para el caso de un péndulo simple sin fuerzas externas hay dos vectores de fuerza presentes en el sistema: la fuerza de gravedad $\mathrm{F}_{mg} = mg$ que actúa paralelo al eje vertical y la fuerza de fricción $\mathrm{F}_f = kl\dot{\theta}$ que se opone al movimiento del objeto.

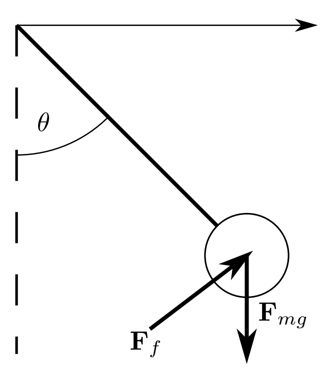

Figura 2. Diagrama de fuerzas.

De acuerdo al diagrama y empleando las leyes de movimiento de Newton, el efecto combinado de las fuerzas en el objeto se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum \mathrm{F} &= ma \\ \sum \mathbf{F} &= -\mathbf{F}_{mg} - \mathbf{F}_f \end{aligned} \tag{1}$$

Debido al movimiento circular del sistema, la fuerza de gravedad se descompone en dos vectores ortogonales que actúan cada uno sobre un eje diferente. Esta descomposición del vector permite despreciar el efecto de uno de ellos para el estudio del sistema.

$$\sum F = -mg\sin\theta - kl\dot{\theta}$$
$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kl\dot{\theta}$$

$$\sum F = ma = -F_{mg} - F_f$$
$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - kl\dot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{k}{m}\dot{\theta}$$

m = masa del péndulo
l = largo del péndulo
k = constante fricción

El modelo en base al método de Newton se basa en conocer las fuerzas actuando, las fuerzas principales que actúan sobre el péndulo es la fuerza ocasionada por el peso de la masa (F_{mg}) y la fuerza de al fricción que se opone al movimiento del péndulo (F_f).

El segundo método utilizado para encontrar las ecuaciones de movimiento fue el de energías de Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{2}$$

Por este método se necesitan desarrollar las ecuaciones de energía del péndulo.

Energía Cinética

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\theta)^2 = \frac{1}{2}ml^2\theta^2 \tag{3}$$

Energía Potencial

$$V = mgl(1-\cos\theta) \tag{4}$$

Con estas ecuaciones se puede definir el Lagrangiano el cual es el que va a ser diferenciado por medio de la ecuación 2. El Lagrangiano se define como:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(l\theta)^2$$
$$= \frac{1}{2}ml^2\theta^2 - mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}ml^2\dot{\theta} = ml^2\ddot{\theta} \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -gl\sin(\theta) \tag{6}$$

Al unir la ecuación 5 menos la ecuación 6, en base a la diferenciación del Lagrangiano (ecuación 2), se obtiene la ecuación de movimiento del sistema.

$$ml^2\ddot{\theta} + gl\sin(\theta) = 0 \tag{7}$$

III. Resultados

En la figura 3 se presenta el diagrama fase del sistema para posición y velocidad con respecto al eje x.

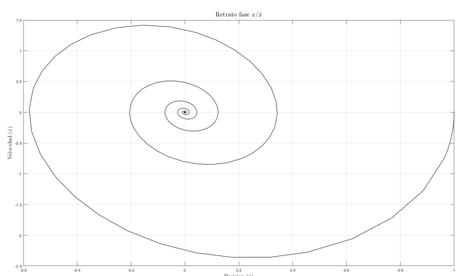

Figura 3. Diagrama de fase de $x(t)$ y $\dot{x}(t)$.

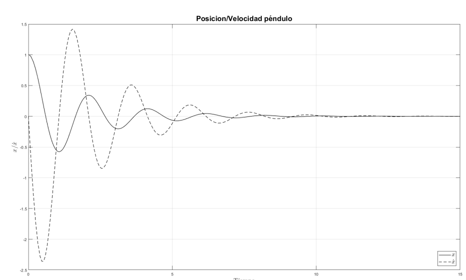

Figura 4. Comportamiento de $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ en el tiempo.

IV. Conclusiones

El mecanismo de péndulo simple es ....
here [1].

Referencias

[1] The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics.