

# Péndulo Simple

## Modelado de sistemas

E. Benavides   I. Ayala   S. Campos  
L. Almanza   Y. Casas

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Robótica y Manufactura Avanzada

RyMA 2019

# Contenido

## 1 Introducción

- Objetivos
- Trabajo previo

## 2 Nuevos desarrollos

- Formulación Hamiltoniana
- Implementación
- Análisis de video

# Outline

## 1 Introducción

### ■ Objetivos

### ■ Trabajo previo

## 2 Nuevos desarrollos

### ■ Formulación Hamiltoniana

### ■ Implementación

### ■ Análisis de video

# Objetivos del proyecto

- Desarrollar el modelo matemático del péndulo simple.
- Implementar un simulador del sistema en MATLAB.
- Comparar la simulación con un modelo físico.

# Outline

## 1 Introducción

- Objetivos

- Trabajo previo

## 2 Nuevos desarrollos

- Formulación Hamiltoniana

- Implementación

- Análisis de video

# Diagrama de cuerpo libre

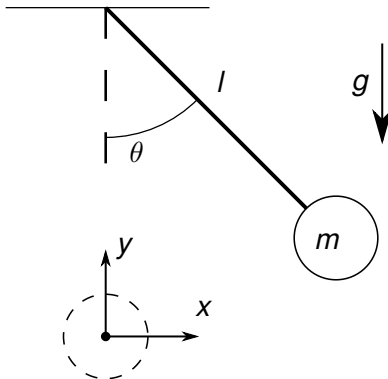


Figura 1: Péndulo simple.

# Mecánica Newtoniana y Lagrangiana

- Ecuación de movimiento para la formulación de Newton

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{k}{m} \dot{\theta} \quad (1)$$

- Ecuación de movimiento para la formulación de Lagrange

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) \quad (2)$$

# MATLAB

Longitud ( $l$ )	0.193 [m]
Masa ( $m$ )	0.1232109 [kg]
Coeficiente de fricción ( $k$ )	$\{0, 0.1\}$ [ $N \cdot s/m$ ]
Posición angular inicial ( $\theta_0$ )	$0.5\pi$ [rad]
Velocidad angular inicial ( $\dot{\theta}$ )	0 [rad/s]
Tiempo de simulación	10 [s]
Gravedad ( $g$ )	$9.81$ [ $m/s^2$ ]

**Tabla 1:** Condiciones de simulación del sistema.



# Caso con fricción

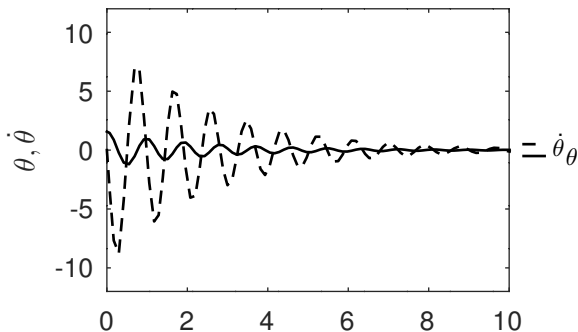


Figura 2: Comportamiento de  $\theta(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$  en el tiempo.

# Outline

## 1 Introducción

- Objetivos
- Trabajo previo

## 2 Nuevos desarrollos

- Formulación Hamiltoniana
- Implementación
- Análisis de video

# Modelo matemático

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \quad (3)$$

$$q = \theta \quad (4a)$$

$$p = P_\theta \quad (4b)$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \quad (4c)$$

$$p_\theta = ml^2\dot{\theta} \quad (4d)$$

# Hamiltoniano

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L} \\ &= ml^2 \dot{\theta}^2 - \left( \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \right) \\ &= \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)\end{aligned}\tag{5}$$

# Ecuaciones de movimiento

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \quad (6a)$$

$$= -mgl \sin \theta \quad (6b)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \quad (6c)$$

$$= \frac{p_\theta}{ml^2} \quad (6d)$$

# Diagrama fase

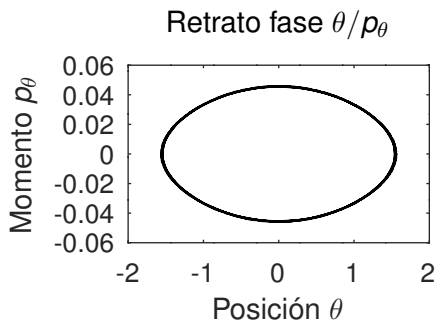


Figura 3: Comportamiento de  $\theta(t)$  y  $p_\theta$  en el tiempo.

# Outline

## 1 Introducción

- Objetivos
- Trabajo previo

## 2 Nuevos desarrollos

- Formulación Hamiltoniana
- **Implementación**
- Análisis de video

# Péndulo simple

Demostración en vivo.



# Función de decaimiento

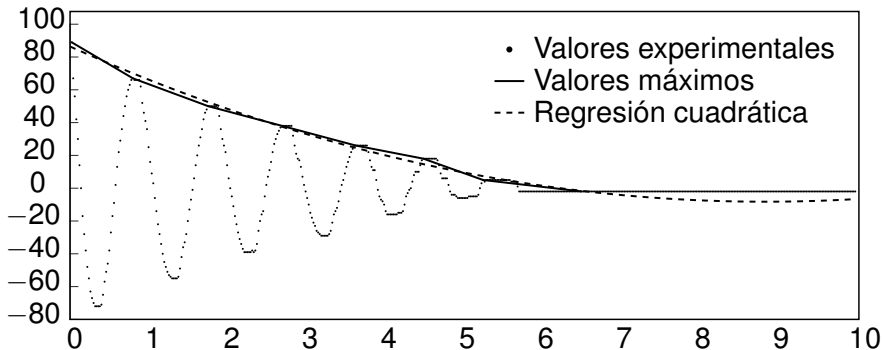


Figura 4:  $y = 1.2x^2 - 21x + 86$

# Outline

## 1 Introducción

- Objetivos
- Trabajo previo

## 2 Nuevos desarrollos

- Formulación Hamiltoniana
- Implementación
- Análisis de video

# Tracker

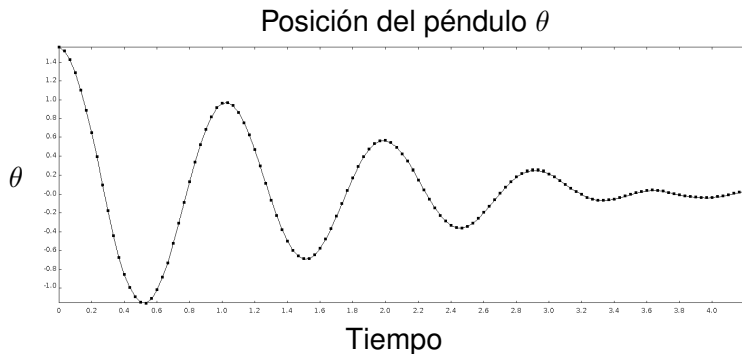


Figura 5: Diagrama de fase del modelo físico para  $x$  y  $\dot{x}$

# Tracker

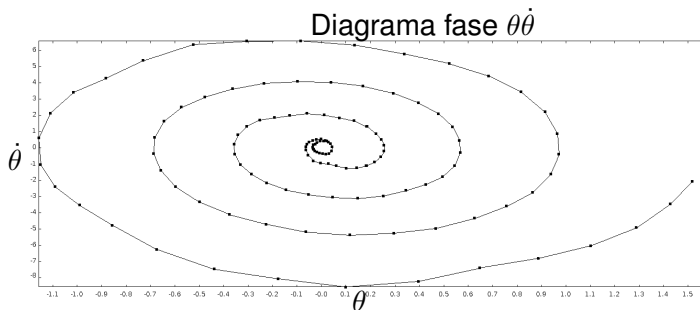
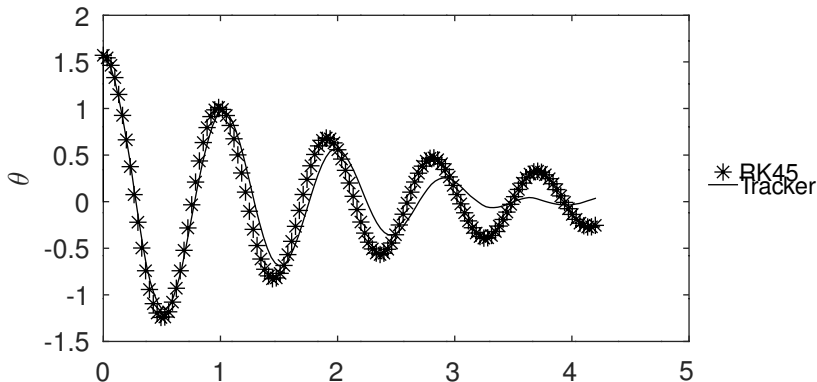


Figura 6: Diagrama de fase del modelo físico para  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ .

# Modelo matemático original

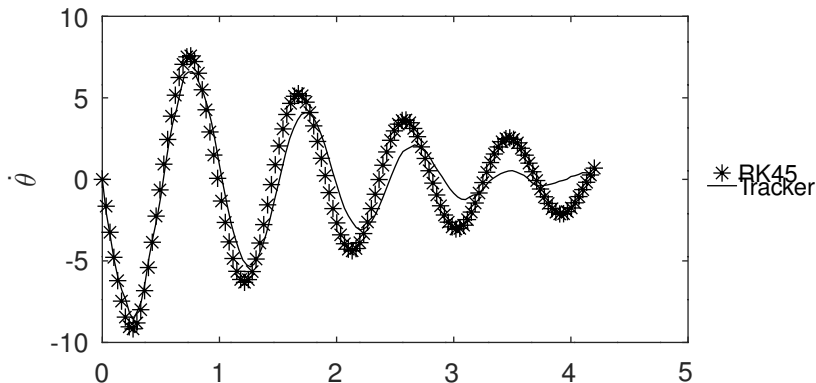
Posición angular del péndulo



**Figura 7:** Comparación de la posición angular del sistema simulado y real.

# Modelo matemático original

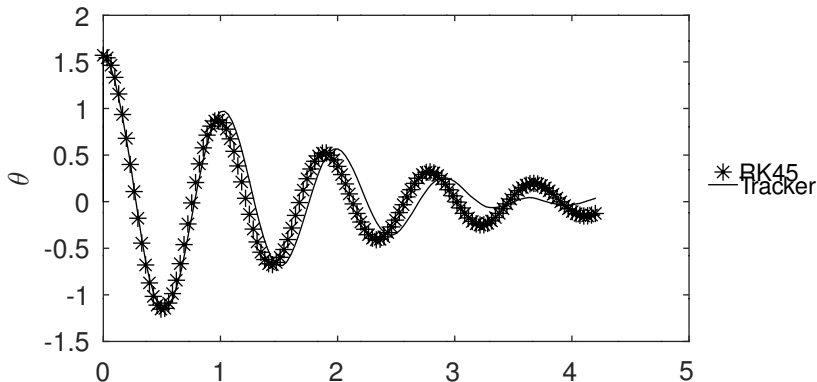
Velocidad angular del péndulo



**Figura 8:** Comparación de la velocidad angular del sistema simulado y real.

# Coeficiente de fricción

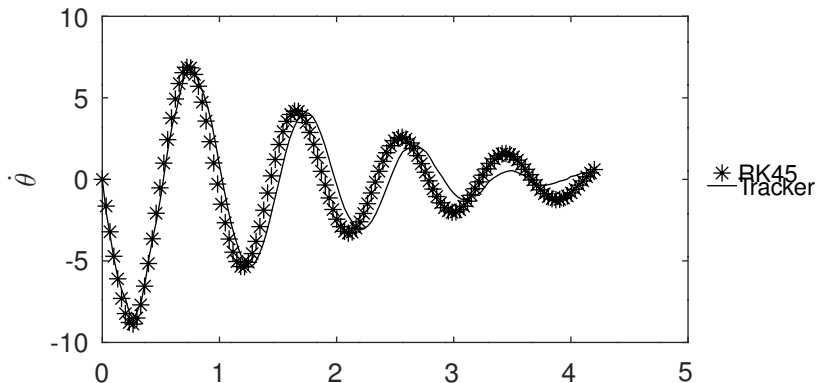
Posición angular del péndulo



**Figura 9:** Posición angular para el nuevo valor del coeficiente de fricción  $k = 0.135$ .

# Coeficiente de fricción

Velocidad angular del péndulo

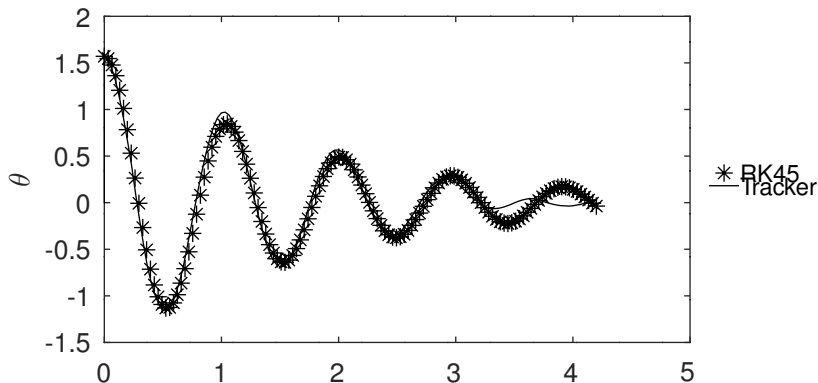


**Figura 10:** Velocidad angular para el nuevo valor del coeficiente de fricción  $k = 0.135$ .



# Longitud

## Posición angular del péndulo



**Figura 11:** Posición angular para el nuevo valor de longitud  $l = 0.22[m]$ .

# Longitud

## Velocidad angular del péndulo

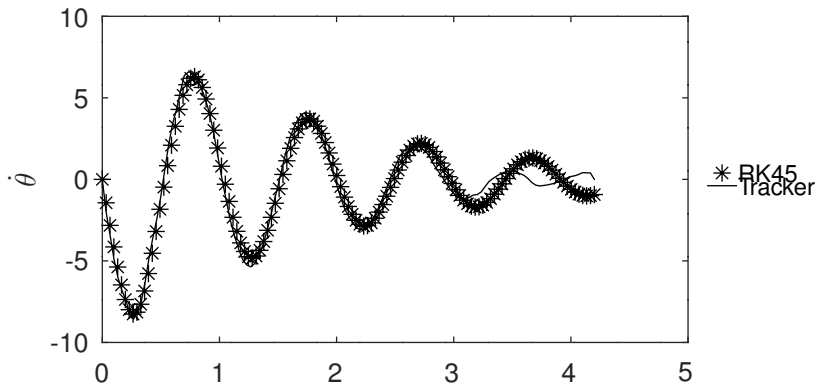


Figura 12: Velocidad angular para el nuevo valor de longitud  $l = 0.22[m]$ .

