

Péndulo Simple

Modelado, simulación y resultados

E. Benavides I. Ayala S. Campos
L. Almazán Y. Casas

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Robótica y Manufactura Avanzada

RyMA 2019

Contenido

- 1 Introducción
 - Objetivos
- 2 Modelo matemático
 - Ecuaciones de movimiento
- 3 Simulación
 - Resultados
- 4 Modelo físico
 - LEGO Mindstorms

Outline

1 Introducción

■ Objetivos

2 Modelo matemático

■ Ecuaciones de movimiento

3 Simulación

■ Resultados

4 Modelo físico

■ LEGO Mindstorms

Objetivos del proyecto

- Desarrollar el modelo matemático del péndulo simple
- Implementar un simulador en MATLAB del sistema
- Analizar un péndulo físico para validar el modelo matemático

Outline

- 1 Introducción
 - Objetivos
- 2 Modelo matemático
 - Ecuaciones de movimiento
- 3 Simulación
 - Resultados
- 4 Modelo físico
 - LEGO Mindstorms

Diagramas de cuerpo libre

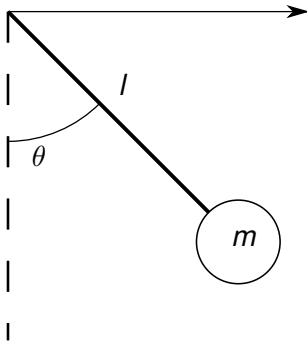


Figura 1: Péndulo simple.

Mecánica Newtoniana

- Se aplica la segunda ley de Newton para movimiento rotacional

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I \cdot F_{mg\perp} + I \cdot F_f \\ (ml^2)\ddot{\theta} &= -lmg \sin(\theta) + kl^2\dot{\theta}\end{aligned}\tag{1}$$

Mecánica Newtoniana

- Se resuelve para $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{k}{m} \dot{\theta} \quad (2)$$

Mecánica Lagrangiana

- Se plantean las coordenadas del péndulo

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin(\theta) \\ l(1 - \cos(\theta)) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Mecánica Lagrangiana

- Se obtiene la energía cinética y potencial del sistema

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos(\theta)) \quad (5)$$

Mecánica Lagrangiana

- Se expresa el Lagrangiano del sistema

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \quad (6)$$

Mecánica Lagrangiana

- Se desarrolla la ecuación de Euler-Lagrange para el mecanismo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (7)$$
$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = 0$$

Mecánica Lagrangiana

- Se resuelve para $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) \quad (8)$$

Outline

- 1 Introducción
 - Objetivos
- 2 Modelo matemático
 - Ecuaciones de movimiento
- 3 Simulación
 - Resultados
- 4 Modelo físico
 - LEGO Mindstorms

MATLAB

Longitud (l)	0.3 [m]
Masa (m)	0.12166 [kg]
Coeficiente de fricción (k)	$\{0, 0.1\}$ [$N \cdot s/m$]
Posición angular inicial (θ_0)	0.5π [rad]
Velocidad angular inicial ($\dot{\theta}$)	0 [rad/s]

Tabla 1: Condiciones de simulación del sistema.

Caso sin fricción

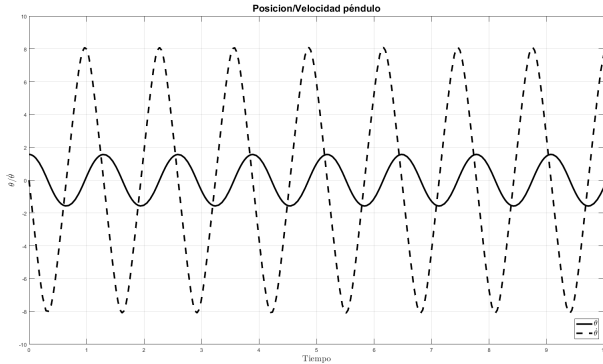
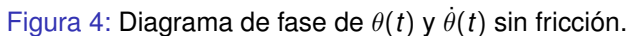


Figura 3: Comportamiento de $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ en el tiempo sin fricción.



Caso con fricción

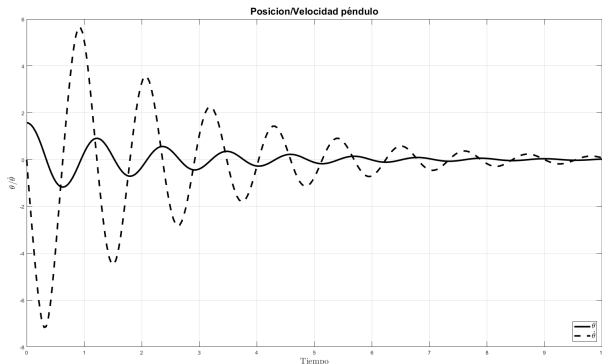


Figura 5: Comportamiento de $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ en el tiempo.

Caso con fricción

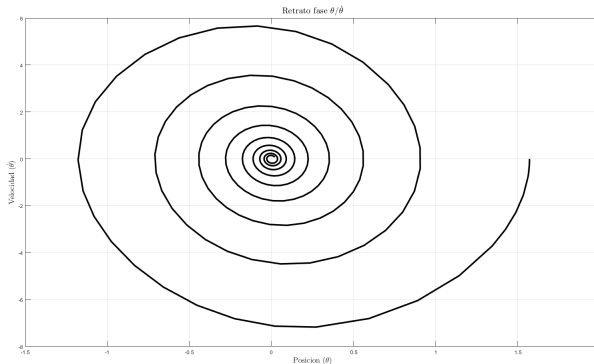


Figura 6: Diagrama de fase de $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$.

Outline

- 1 Introducción
 - Objetivos
- 2 Modelo matemático
 - Ecuaciones de movimiento
- 3 Simulación
 - Resultados
- 4 Modelo físico**
 - LEGO Mindstorms**

Análisis de video

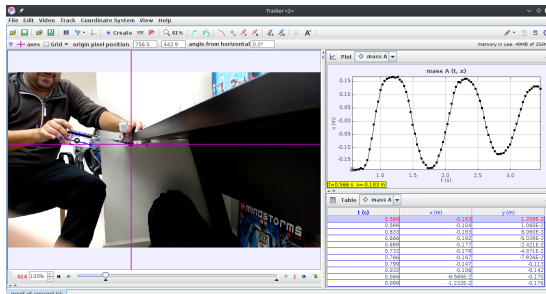


Figura 8: Análisis de movimiento - Prueba de concepto.

Análisis de video

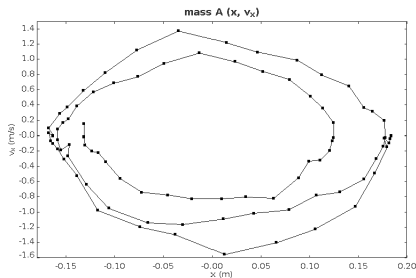


Figura 9: Diagrama de fase de x y \dot{x} del modelo físico.

Análisis de video

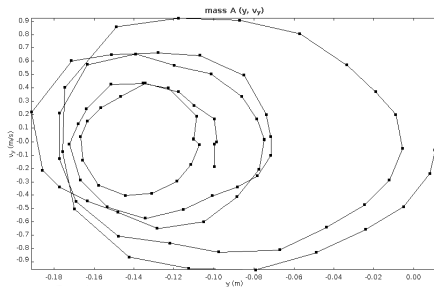


Figura 10: Diagrama de fase de y y \dot{y} del modelo físico.

Fin