

Péndulo Simple - Análisis, simulación y construcción

Enrique Benavides Téllez, Isaac Ayala Lozano,
Sandy Natalie Campos Martínez, Luis Gerardo Almanza Granados
y Yair Casas Flores
Robótica y Manufactura Avanzada
CINVESTAV
Ramos Arizpe, México

Resumen

Se presentan un estudio del sistema de péndulo simple. El estudio incluye el desarrollo de un modelo matemático para el péndulo simple mediante dos estrategias de desarrollo: método de sumatoria de fuerzas y método de conservación de energía. Se presentan los resultados de los simuladores desarrollados en MATLAB. Se incluye también la comparación de los modelos matemáticos con una implementación física del péndulo simple.

I. INTRODUCCIÓN

El péndulo simple (referido solamente como péndulo) es uno de los sistemas no lineales más estudiados por la comunidad científica y académica. La proliferación de su uso como sistema base para evaluar estrategias de control ha permitido desarrollar un conocimiento detallado del sistema.

El péndulo se compone de una mínima cantidad de elementos:

- Un punto de rotación
- Un objeto de masa m
- Un cuerpo rígido de longitud l y masa despreciable que conecta el punto de rotación con el objeto de interés

La figura 1 exhibe los componentes antes mencionados.

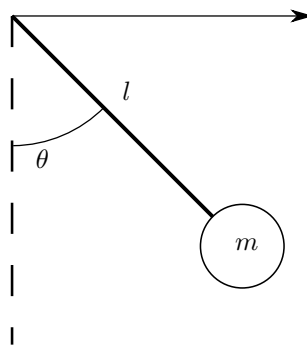


Figura 1: Sistema de Péndulo simple.

Para describir el comportamiento del sistema es necesario desarrollar ecuaciones para detallar el movimiento y velocidad del cuerpo m . Este trabajo se limitará a determinar las ecuaciones para un péndulo cuyo movimiento está restringido a un plano sin la intervención de fuerzas externas.

II. MODELO MATEMÁTICO

El péndulo simple es un sistema el cual se basa en una partícula de masa m sostenido de un punto fijo por medio de una barra o hilo de masa despreciable y sin extenderse mas de su distancia l . (Insertar figura del péndulo)

Para encontrar el movimiento de un péndulo se utilizaron los métodos de fuerza de Newton y el método de energías de Lagrange. Por medio del método de fuerzas de Newton, se desarrolla de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\sum F &= ma = -F_{mg} - F_f \\ ml\ddot{\theta} &= -mg \sin(\theta) - kl\dot{\theta} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{k}{m} \dot{\theta}\end{aligned}$$

m = masa del péndulo
l = largo del péndulo
k = constante fricción

El modelo en base al método de Newton se basa en conocer las fuerzas actuando, las fuerzas principales que actúan sobre el péndulo es la fuerza ocasionada por el peso de la masa (F_{mg}) y la fuerza de al fricción que se opone al movimiento del péndulo (F_f).

El segundo método utilizado para encontrar las ecuaciones de movimiento fue el de energías de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (1)$$

Por este método se necesitan desarrollar las ecuaciones de energía del péndulo. Y para desarrollar las ecuaciones de posición asignamos el marco de referencia del péndulo y se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} l \sin(\theta) \\ l(1 - \cos(\theta)) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Energía Cinética

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (3)$$

Derivando las ecuaciones de posición del péndulo obtenemos las ecuaciones de velocidad:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} l\dot{\theta} \cos(\theta) \\ l\dot{\theta} \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Sustituyendo la ecuación 4 en 3 y desarrollando se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (5)$$

Energía Potencial

La energía potencial se plantea multiplicando la posición en el eje y del péndulo por la masa y gravedad. Se plantea de la siguiente manera:

$$V = mgl(1 - \cos \theta) \quad (6)$$

Con estas ecuaciones se puede definir el Lagrangiano el cual es el que va a ser diferenciado por medio de la ecuación 1. El Lagrangiano se define como:

$$\begin{aligned}L &= T - V = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} ml^2\dot{\theta} = ml^2\ddot{\theta} \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -gl \sin(\theta) \quad (8)$$

Al unir la ecuación 7 menos la ecuación 8, en base a la diferenciación del Lagrangiano (ecuación 1), se obtiene la ecuación de movimiento del sistema.

$$ml^2\ddot{\theta} + gl \sin(\theta) = 0 \quad (9)$$

III. SIMULACIÓN

El modelo obtenido en

IV. MODELO FÍSICO

IV-A. Prueba de concepto

V. RESULTADOS

A continuación se muestran algunas imágenes obtenidas del simulador del péndulo simple.

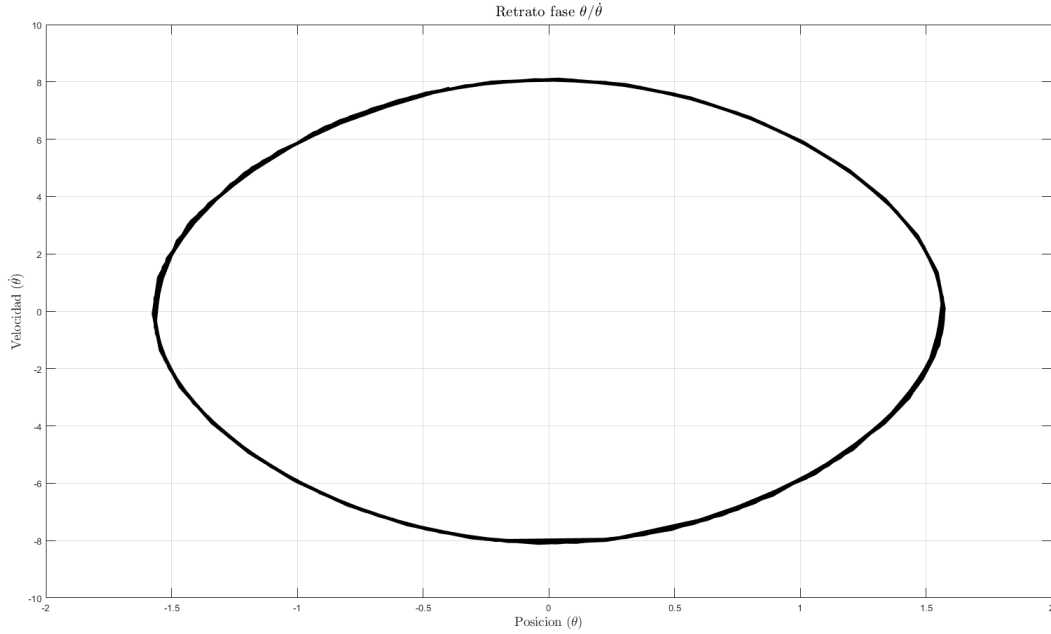


Figura 2: Diagrama de fase de $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$.

Podemos observar la figura de un círculo. Esto ocurre, porque el sistema no tiene fricción, no existe una fuerza que detenga el movimiento, ni disminuya la velocidad del péndulo, por lo cual tenemos un movimiento armónico simple.

En la figura 3 se representa la posición y velocidad del péndulo en el tiempo.

Al ser un movimiento armónico, la posición y velocidad se comportan de manera periódica, oscilando entre valores de $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$ para la posición y entre 8 y -8 radianes para la velocidad. Ya que el sistema no tiene una fuerza que se oponga el movimiento, no tiene una manera de disipar la energía del sistema, el péndulo continuara moviéndose hasta que una fuerza externa lo detenga.

En la figura 4 se representa el diagrama fase del sistema para posición y velocidad del péndulo con respecto al ángulo θ . A diferencia de las imágenes anteriores, que no estaba presente la fricción, en las siguientes la fricción está presente en nuestro sistema. Podemos observar que la velocidad y la posición comienzan a converger en cero. Lo que significa que el péndulo está comenzado a detenerse. La velocidad tiende a 0 y el péndulo tiende a estar en una posición de 0.

VI. CONCLUSIONES

El mecanismo de péndulo simple es

VI-A. *Enrique Benavides*

Durante el desarrollo del proyecto pude observar como las ecuaciones de movimiento del péndulo simple tanto por el método de fuerzas de Newton como por el método de energías por utilizando el Lagrangiano otorgan el mismo resultado de la ecuación. De igual manera observe como el sistema al no tener disipación se comporta de manera armónica y el retrato fase del péndulo se observa como un circulo a diferencia del péndulo con fricción en donde el retrato fase parece un remolino que tiende al cero tanto en velocidad como en posición.

here [?].

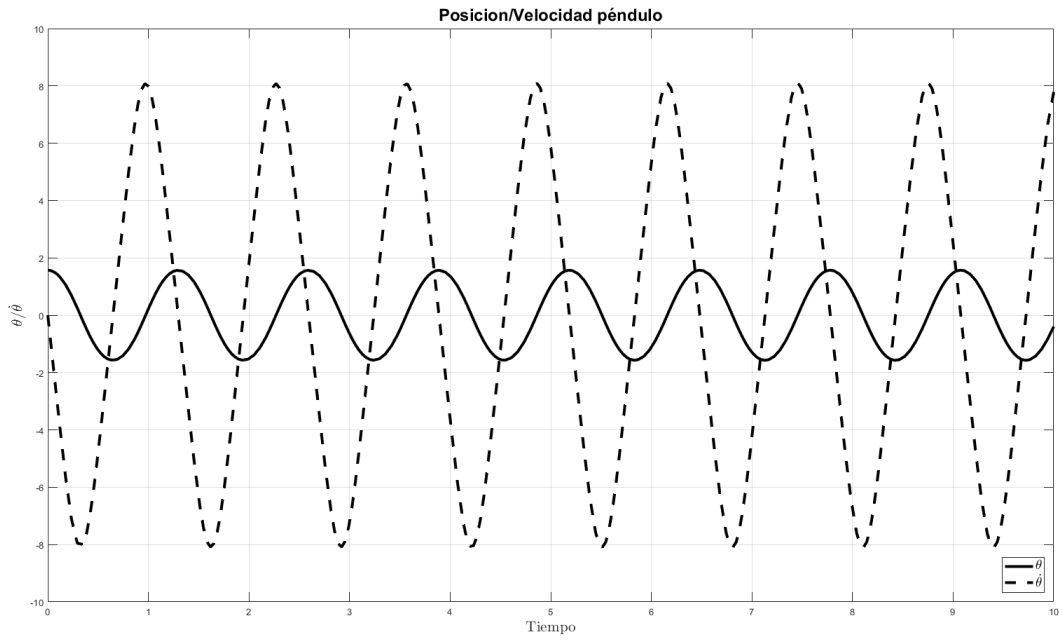


Figura 3: Comportamiento de $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ en el tiempo.

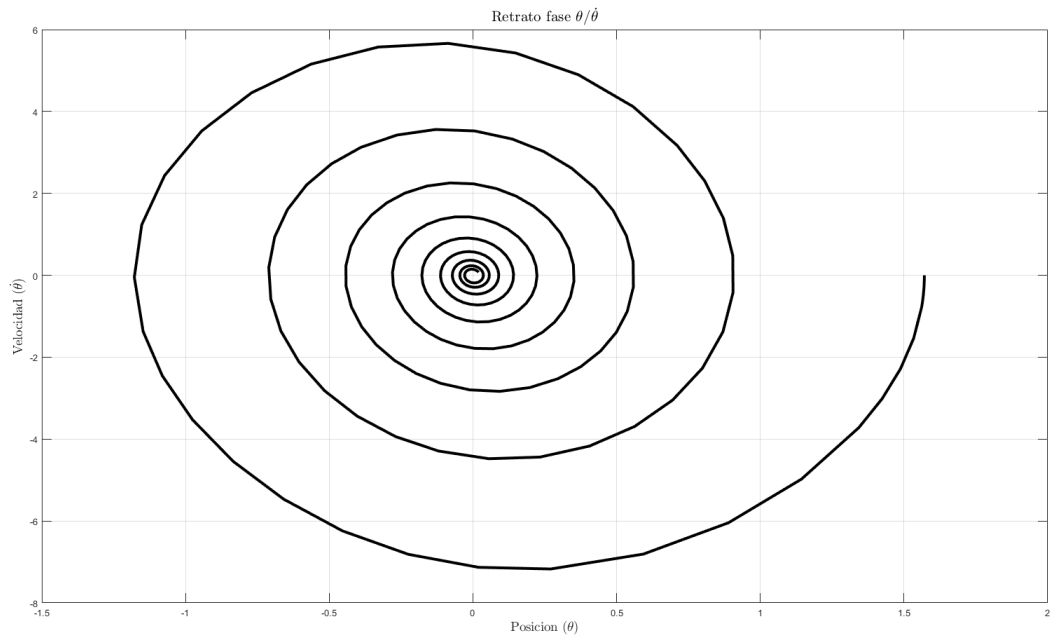


Figura 4: Diagrama de fase de $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$.

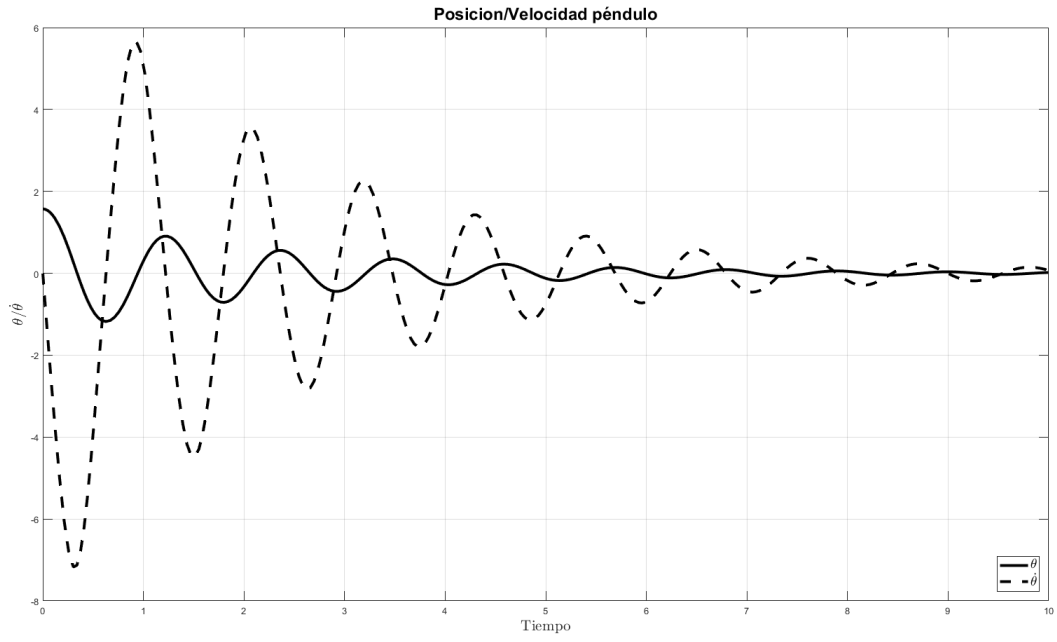


Figura 5: Comportamiento de $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ en el tiempo.

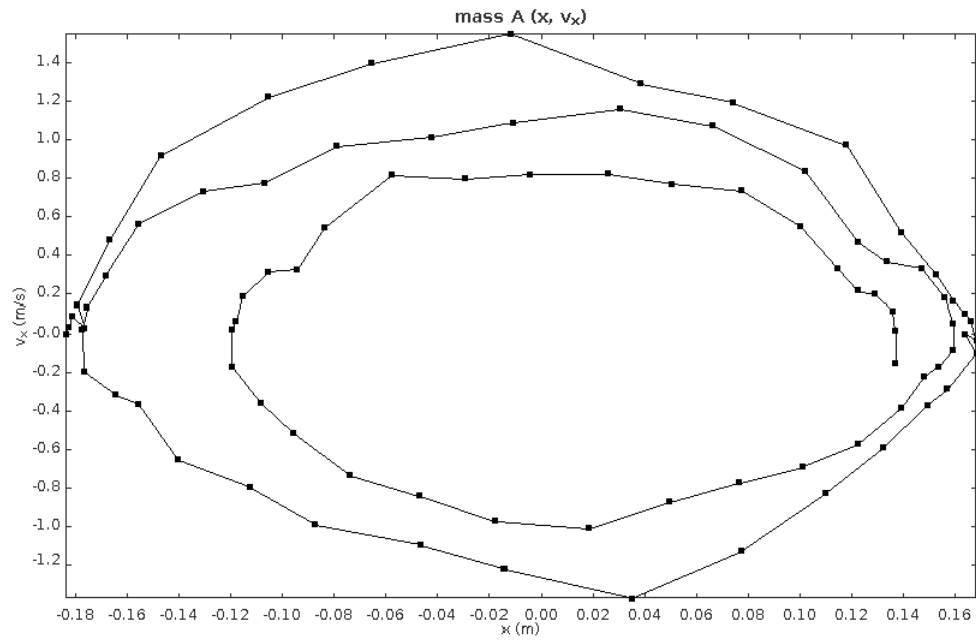


Figura 6: Diagrama de fase del modelo físico para x y \dot{x}

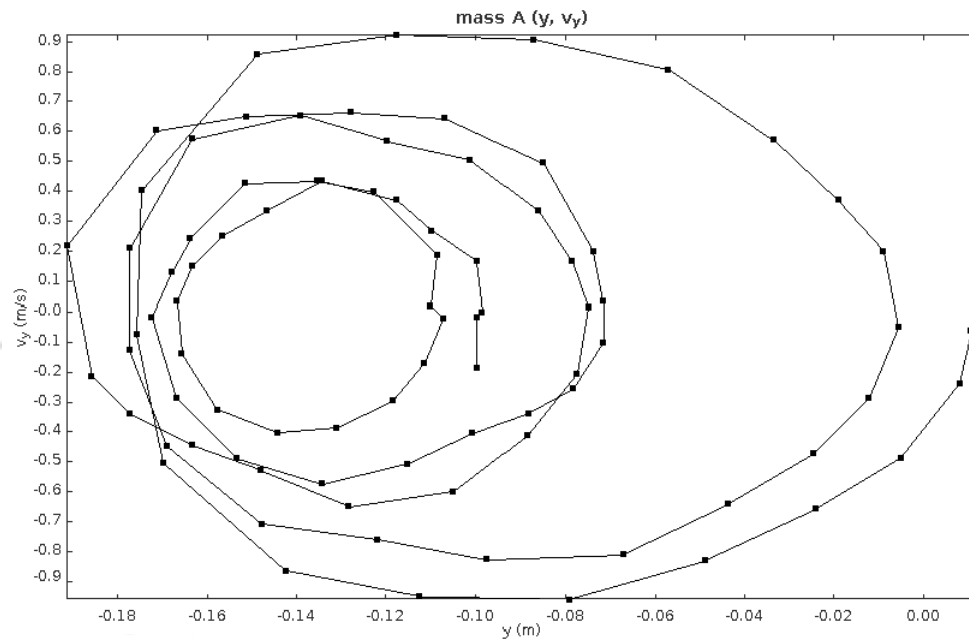


Figura 7: Diagrama de fase del modelo físico para y y \dot{y}