Péndulo Simple - Análisis, simulación y construcción

Enrique Benavides Téllez, Isaac Ayala Lozano,
Sandy Natalie Campos Martínez, Luis Gerardo Almanza Granados
y Yair Casas Flores
Robótica y Manufactura Avanzada
CINVESTAV
Ramos Arizpe, México

Resumen—El sistema del péndulo simple es uno de los sistemas más estudiados en teoría de control. Su fácil construcción y modelado permite el diseño de diferentes estrategias de control y una gran facilidad de probar dichas estrategias antes de implementarlas en un sistema más complejo. El documento presente muestra el estudio del sistema sin linearización. El estudio comprende la obtención de las ecuaciones de movimiento, la simulación del mismo en Matlab y la comparación del modelo con un sistema físico.

I. Introducción

El péndulo simple puede considerarse como uno de los sistemas físicos más utilizados en para introducir conceptos de física y teoría de control en el ámbito de educación. A pesar de su naturaleza como sistema no lineal, es posible tratarlo como un sistema lineal al restringir su movimiento angular θ a un rango no mayor a 20 grados medido desde el eje vertical.

Como se observa en la figura 1, el péndulo simple consta de un objeto de masa m suspendido en el aire mediante un cuerpo rígido de longitud l. Este cuerpo rígido se asume de masa negligible para el estudio del sistema en este trabajo.

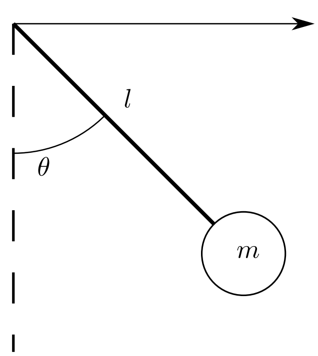

Figura 1. Sistema de Péndulo simple.

II. Desarrollo

II-A. Modelo matemático

Para describir el movimiento de un sistema de péndulo simple restringido al plano bidimensional es necesario expresar la posición y velocidad de la masa m en función del movimiento angular θ y las fuerzas que actúan sobre el sistema. Se utilizaron dos metodologías para obtener las ecuaiones de movimiento del sistema:

- Suma de fuerzas del sistema empleando las leyes de movimiento de Newton.
- Conservación de energía mediante la ecuación de Euler-Lagrange.

Partiendo de las leyes de movimiento de Newton, se establece que la aceleración del objeto de masa m puede ser descrita en función de las fuerzas presentes en el sistema. Para el caso de un péndulo simple se tienen dos fuerzas: la fuerza de gravedad F_g que actúa sobre todos los cuerpos y la fuerza de fricción F_f que se opone al movimiento del objeto.

$$\sum F = ma = -F_{mg} - F_f$$
$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - kl\dot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{k}{m}\dot{\theta}$$

m = masa del péndulo
l = largo del péndulo
k = constante fricción

El modelo en base al método de Newton se basa en conocer las fuerzas actuando, las fuerzas principales que actúan sobre el péndulo es la fuerza ocasionada por el peso de la masa (F_{mg}) y la fuerza de al fricción que se opone al movimiento del péndulo (F_f).

El segundo método utilizado para encontrar las ecuaciones de movimiento fue el de energías de Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{1}$$

Por este método se necesitan desarrollar las ecuaciones de energía del péndulo.

Energía Cinética

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\theta)^2 = \frac{1}{2}ml^2\theta^2 \tag{2}$$

Energía Potencial

$$V = mgl(1 - \cos\theta) \tag{3}$$

Con estas ecuaciones se puede definir el Lagrangiano el cual es el que va a ser diferenciado por medio de la ecuación 1. El Lagrangiano se define como:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(l\theta)^2$$
$$= \frac{1}{2}ml^2\theta^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}ml^2\dot{\theta} = ml^2\ddot{\theta} \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -gl\sin(\theta) \tag{5}$$

Al unir la ecuación 4 menos la ecuación 5, en base a la diferenciación del Lagrangiano (ecuación 1), se obtiene la ecuación de movimiento del sistema.

$$ml^2\ddot{\theta} + gl\sin(\theta) = 0 \tag{6}$$

III. Resultados

En la figura 2 se presenta el diagrama fase del sistema para posición y velocidad con respecto al eje x.

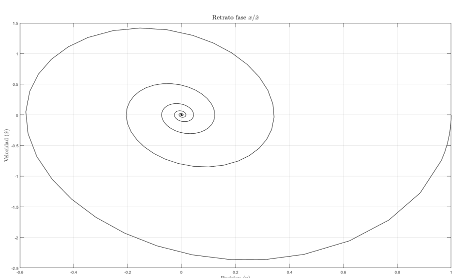

Figura 2. Diagrama de fase de $x(t)$ y $\dot{x}(t)$.

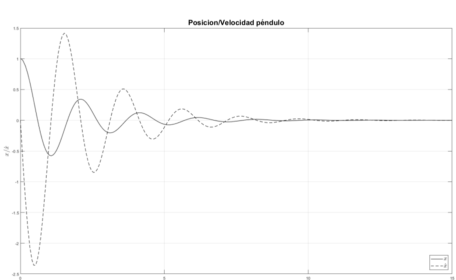

Figura 3. Comportamiento de $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ en el tiempo.

IV. Conclusiones

El mecanismo de péndulo simple es ....
here [1].

Referencias

[1] The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics.