

# Péndulo Simple

## Modelado, simulación y resultados

E. Benavides   I. Ayala   S. Campos  
L. Almanza   Y. Casas

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Robótica y Manufactura Avanzada

RyMA 2019

# Contenido

## 1 Introducción

- Objetivos

## 2 Modelo matemático

- Ecuaciones de movimiento

## 3 Simulación

- Resultados

## 4 Modelo físico

- LEGO Mindstorms

# Outline

## 1 Introducción

### ■ Objetivos

## 2 Modelo matemático

### ■ Ecuaciones de movimiento

## 3 Simulación

### ■ Resultados

## 4 Modelo físico

### ■ LEGO Mindstorms

# Objetivos del proyecto

- Desarrollar el modelo matemático del péndulo simple.
- Implementar un simulador del sistema en MATLAB.
- Comparar la simulación con un modelo físico.

# Outline

- 1 Introducción
  - Objetivos
- 2 Modelo matemático
  - Ecuaciones de movimiento
- 3 Simulación
  - Resultados
- 4 Modelo físico
  - LEGO Mindstorms

# Diagramas de cuerpo libre

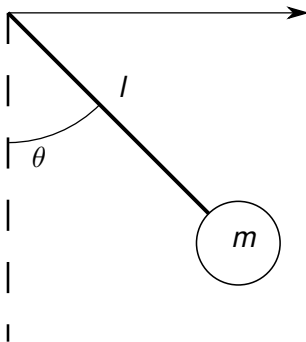


Figura 1: Péndulo simple.

# Diagramas de cuerpo libre

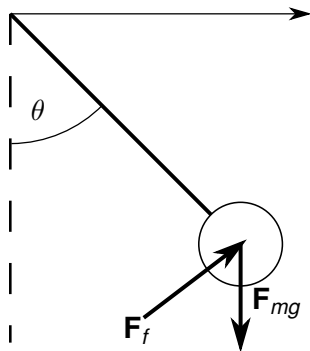


Figura 2: Péndulo simple.

# Mecánica Newtoniana

- Se aplica la segunda ley de Newton para movimiento rotacional

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I \cdot F_{mg\perp} + I \cdot F_f \\ (ml^2)\ddot{\theta} &= -lmg \sin(\theta) + kl^2\dot{\theta}\end{aligned}\tag{1}$$



# Mecánica Newtoniana

- Se resuelve para  $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{k}{m} \dot{\theta} \quad (2)$$

# Mecánica Lagrangiana

- Se plantean las coordenadas del péndulo

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin(\theta) \\ l(1 - \cos(\theta)) \end{pmatrix} \quad (3)$$

# Mecánica Lagrangiana

- Se obtiene la energía cinética y potencial del sistema

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (4)$$

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos(\theta)) \quad (5)$$

# Mecánica Lagrangiana

- Se expresa el Lagrangiano del sistema

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \quad (6)$$

# Mecánica Lagrangiana

- Se desarrolla la ecuación de Euler-Lagrange para el mecanismo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (7)$$
$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = 0$$

# Mecánica Lagrangiana

- Se resuelve para  $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) \quad (8)$$

# Outline

- 1 Introducción
  - Objetivos
- 2 Modelo matemático
  - Ecuaciones de movimiento
- 3 Simulación
  - Resultados
- 4 Modelo físico
  - LEGO Mindstorms

## MATLAB

Longitud ( $l$ )	0.3 [m]
Masa ( $m$ )	0.12166 [kg]
Coeficiente de fricción ( $k$ )	$\{0, 0.1\}$ [ $N \cdot s/m$ ]
Posición angular inicial ( $\theta_0$ )	$0.5\pi$ [rad]
Velocidad angular inicial ( $\dot{\theta}_0$ )	0 [rad/s]

Tabla 1: Condiciones de simulación del sistema.



# Caso sin fricción

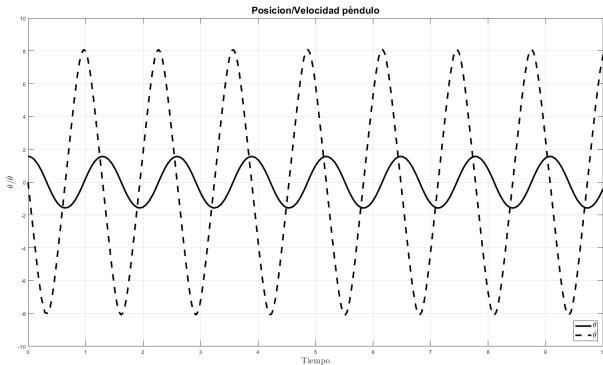


Figura 3: Comportamiento de  $\theta(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$  en el tiempo sin fricción.

# Caso sin fricción

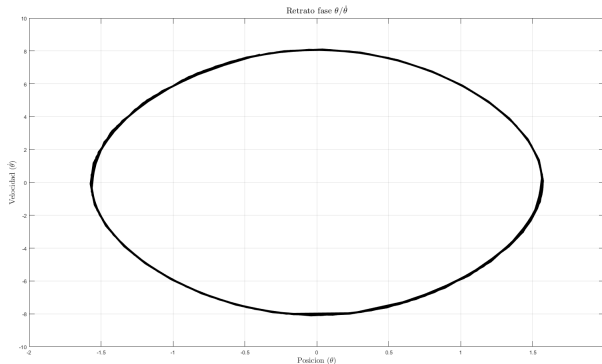


Figura 4: Diagrama de fase de  $\theta(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$  sin fricción.

# Caso con fricción

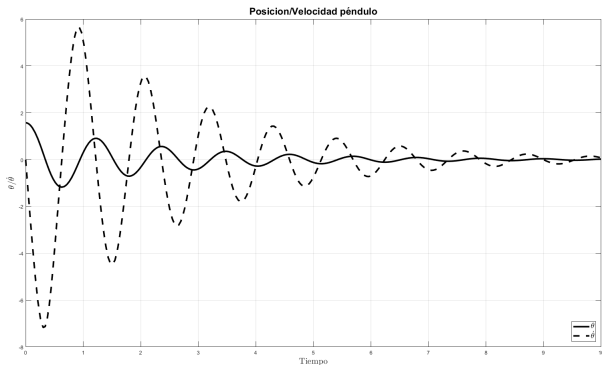


Figura 5: Comportamiento de  $\theta(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$  en el tiempo.

# Caso con fricción

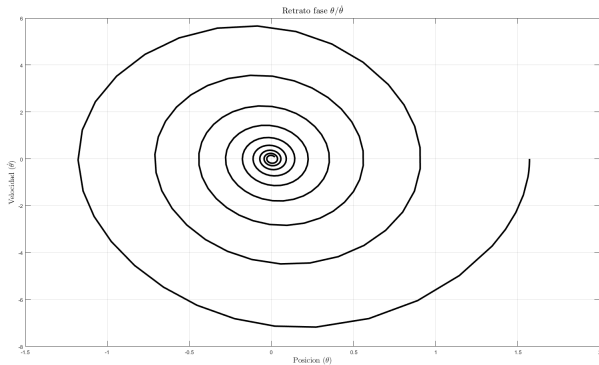


Figura 6: Diagrama de fase de  $\theta(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$ .

# Outline

## 1 Introducción

### ■ Objetivos

## 2 Modelo matemático

### ■ Ecuaciones de movimiento

## 3 Simulación

### ■ Resultados

## 4 Modelo físico

### ■ LEGO Mindstorms

# Mediciones

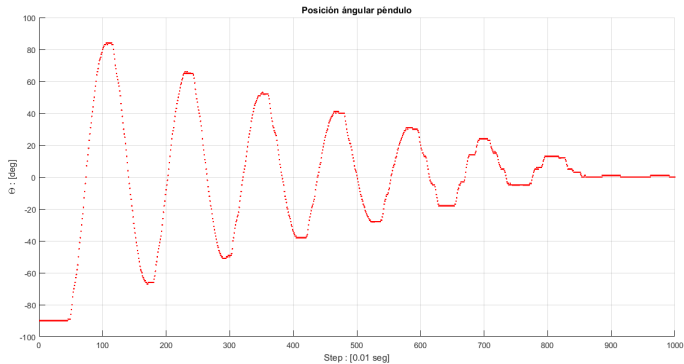


Figura 7: Mediciones de  $\theta$ .

# Análisis de video

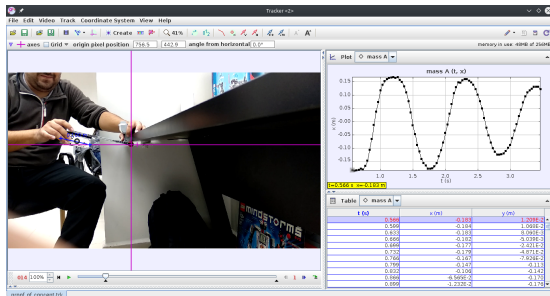


Figura 8: Análisis de movimiento - Prueba de concepto.

# Análisis de video

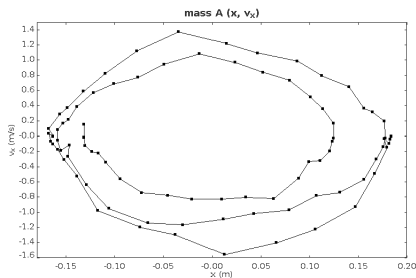


Figura 9: Diagrama de fase de  $x$  y  $\dot{x}$  del modelo físico.



# Análisis de video

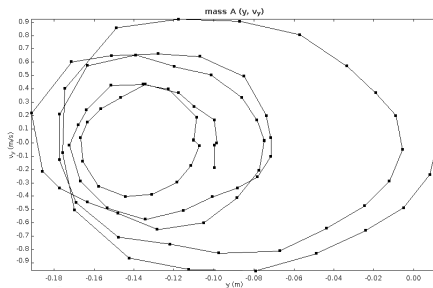


Figura 10: Diagrama de fase de  $y$  y  $\dot{y}$  del modelo físico.

