

Péndulo Simple - Análisis, simulación y construcción

Enrique Benavides Téllez, Isaac Ayala Lozano,
Sandy Natalie Campos Martínez, Luis Gerardo Almanza Granados
y Yair Casas Flores
Robótica y Manufactura Avanzada
CINVESTAV
Ramos Arizpe, México

Resumen

El sistema del péndulo simple es uno de los sistemas más estudiados en teoría de control. Su diseño y construcción de baja dificultad hacen de este sistema uno de los más accesibles para modelar y contrastar con una implementación física. El documento presenta el estudio del sistema sin linealización. El estudio comprende la obtención de las ecuaciones de movimiento, la simulación del mismo en Matlab y la comparación del modelo con un sistema físico.

I. Introducción

El péndulo simple (referido solamente como péndulo) es uno de los sistemas no lineales más estudiados por la comunidad científica y académica. La proliferación de su uso como sistema base para evaluar estrategias de control ha permitido desarrollar un conocimiento detallado del sistema.

El péndulo se compone de una mínima cantidad de elementos:

- Un punto de rotación
- Un objeto de masa m
- Un cuerpo rígido de longitud l y masa despreciable que conecta el punto de rotación con el objeto de interés

La figura 1 exhibe los componentes antes mencionados.

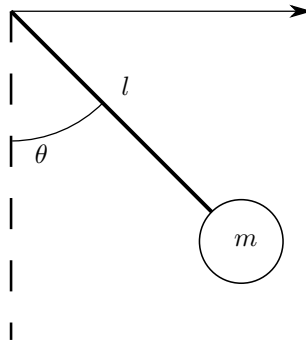


Figura 1. Sistema de Péndulo simple.

Para describir el comportamiento del sistema es necesario desarrollar ecuaciones para detallar el movimiento y velocidad del cuerpo m . Este trabajo se limitará a determinar las ecuaciones para un péndulo cuyo movimiento está restringido a un plano sin la intervención de fuerzas externas.

II. Modelo Matemático

La posición del objeto m respecto a un marco de referencia no inercial ubicado en el punto de rotación del péndulo puede ser descrita como un par de coordenadas $\{x, y\}$ para un plano cartesiano. Estas coordenadas pueden ser expresadas también como funciones que dependen de la posición angular $\theta = \theta(t)$ del objeto con respecto al eje vertical del plano cartesiano y el tiempo t .

Existen dos metodologías para obtener las ecuaciones para las coordenadas $\{x, y\}$ del sistema:

- Balance de fuerzas del sistema empleando las leyes de movimiento de Newton.
- Conservación de energía mediante la ecuación de Euler-Lagrange

II-A. Leyes de movimiento de Newton

Empleando las leyes de movimiento de Newton, se establece que la aceleración a que el objeto experimenta está determinada por el efecto combinado de las fuerzas que actúan sobre el mismo. Como se observa en la figura 2, para el caso de un péndulo simple sin fuerzas externas hay dos vectores de fuerza presentes en el sistema: la fuerza de gravedad $F_{mg} = mg$ que actúa paralelo al eje vertical y la fuerza de fricción $F_f = kl\dot{\theta}$ que se opone al movimiento del objeto.

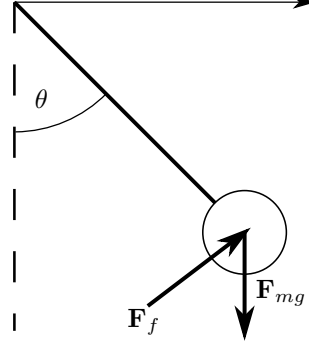


Figura 2. Diagrama de fuerzas.

De acuerdo al diagrama y empleando las leyes de movimiento de Newton, el efecto combinado de las fuerzas en el objeto se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sum F &= ma \\ \sum \mathbf{F} &= -\mathbf{F}_{mg} - \mathbf{F}_f\end{aligned}\tag{1}$$

Debido al movimiento circular del sistema, la fuerza de gravedad se descompone en dos vectores ortogonales que actúan cada uno sobre un eje diferente. Esta descomposición del vector permite despreciar el efecto de uno de ellos para el estudio del sistema.

$$\begin{aligned}\sum F &= -mg \sin \theta - kl\dot{\theta} \\ ml\ddot{\theta} &= -mg \sin \theta - kl\dot{\theta}\end{aligned}$$

Se resuelve la ecuación anterior para $\ddot{\theta}$.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{k}{m} \dot{\theta}\tag{2}$$

II-B. Conservación de energía | Euler-Lagrange

El método de conservación de energía del sistema se sustenta en la ecuación de Euler-Lagrange, la cual describe que para un sistema dado la energía total del sistema permanece constante.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\tag{3}$$

El Lagrangiano L del sistema relaciona la energía cinética T del péndulo con el potencial de energía V en el sistema.

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \\ V &= mgl(1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

Recordando la ecuación para el Lagrangiano $L = T - V$ se obtienen las derivadas parciales del mismo, considerando que $q = \theta$.

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \\
 \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl \sin \theta \\
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\ddot{\theta}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Evaluando las derivadas parciales de (4) en la ecuación (3) se obtiene

$$\begin{aligned}
 ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta &= 0 \\
 \ddot{\theta} &= -\frac{mgl \sin \theta}{ml^2} \\
 \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} \sin \theta
 \end{aligned} \tag{5}$$

Cabe resaltar que para el método de conservación de energía las fuerzas no conservativas no fueron consideradas en el desarrollo matemático del modelo. Por ello, si se desprecia el efecto de la fricción en (2) se observa que la ecuación de $\ddot{\theta}$ es la misma para ambos métodos.

II-C. Representación de espacio de estados

III. Simulación

El modelo obtenido en

IV. Resultados

En la figura 3 se presenta el diagrama fase del sistema para posición y velocidad con respecto al eje x .

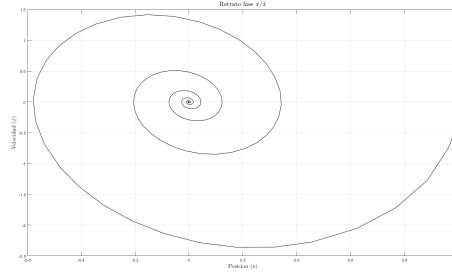


Figura 3. Diagrama de fase de $x(t)$ y $\dot{x}(t)$.

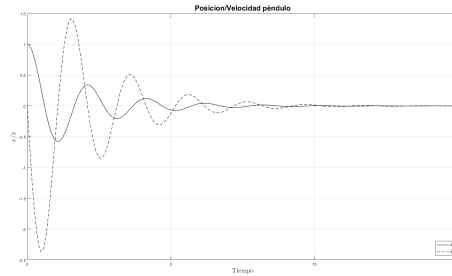


Figura 4. Comportamiento de $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ en el tiempo.

V. Conclusiones

El mecanismo de péndulo simple es
here [1].

Referencias

- [1] The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics.