

1. Desarrollo

1.1. Restricciones

La PGS al ser un robot de cadena cerrada obtiene limitaciones derivadas de la naturaleza del robot así como restricciones derivadas de los elementos que integran la PGS.

INSERTAR IMAGEN DEL CAD

La PGS diseñada para el proyecto cuenta con los siguientes parametros de diseño:

Parametros diseño	
Radio base	m (r_b)
Radio plataforma	m (r_a)
Separacion entre juntas (base)	m (k_b)
Separacion entre juntas (plataforma)	m (k_a)
Largo min actuador	m (q_{min})
Largo max actuador	m (q_{max})

Cuadro 1: Restricciones dimensionales de la PGS

Con los valores señalados previamente se determinan las restricciones dimensionales de la PGS para el desarrollo de la cinemática de la PGS.

Los primeros dos valores de la tabla 1.1 señalan la distancia radial en donde se deben de colocar las juntas de la plataforma (elementos pasivos). Estas juntas son las siguientes:

IMAGEN DE LA JUNTA CARDAN

Una junta universal o Cardan en la base de la PGS donde se permite la rotación en dos ejes, a fin del sistema propuesto las rotaciones en esta junta se realizan en el orden de rotación en eje y seguido de rotacion en eje x .

IMAGEN DE LA JUNTA ESFERICA

Una junta esférica en la plataforma de la PGS donde se permite la rotación en tres ejes, a fin del sistema propuesto las rotaciones en esta junta se realizan en el orden de rotación en eje z , rotación en eje x finalizando en rotación en eje y .

La PGS ideal debe de tener el punto de unión de las juntas en el mismo lugar, este punto se encuentra localizado en el punto generado por el radio y una separación angular de 120° a lo largo del circulo formado por el radio. Sin embargo debido a las características de las juntas, necesitan estar separadas para realizar el seguimiento de movimiento sin generar conflictos o colisiones entre los actuadores entre la juntas de la base y plataforma. Estos valores de separación se van a utilizar para obtener el desfase angular con respecto al ángulo ideal de unión. Este desfase se calcula de la siguiente manera.

$$\alpha_a = \tan^{-1} \left(\frac{k_a}{2r_a} \right) \quad (1)$$

$$\alpha_b = \tan^{-1} \left(\frac{k_b}{2r_b} \right) \quad (2)$$

Al sumar y restar el angulo de desfase α a los ángulos ideales se obtienen los vectores de desfase angular Ψ_b y Ψ_a . Utilizando r_b , r_a , Ψ_b y Ψ_a se obtienen los puntos cartesianos de unión de la junta con la plataforma y la base de la siguiente manera:

$$b_i = \begin{bmatrix} r_b \cos(\Psi_{bi}) \\ r_b \sin(\Psi_{bi}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$a_i = \begin{bmatrix} r_a \cos(\Psi_{ai}) \\ r_a \sin(\Psi_{ai}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

1.2. Cinemática de la PGS

Para la cinemática de la PGS es importante conocer la posición y orientación del efector final, el cual es la plataforma en donde se conectan los actuadores. Se define la posición de la plataforma como un vector $d = [x, y, z]^T$ y la orientación la matriz como los ángulos medidos del referencial inercial en la forma de $\theta_p = [\psi, \theta, \phi]^T$.

1.2.1. Cinemática inversa de posición

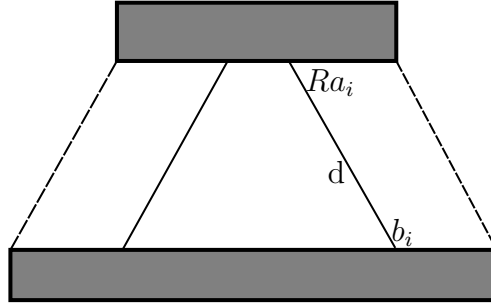


Figura 1: Diagrama de la plataforma Gough Stewart. REVISAR IMAGEN

Conociendo la posición y orientación de la PGS, se puede encontrar de manera sencilla la cinemática inversa. Observando el modelo en la figura 1 buscando el valor de p_i se puede formular lo siguiente:

$$p_i = d + Ra_i = b_i + l_i \quad (5)$$

Siendo Ra_i el punto en donde se coloca la junta esferica de la plataforma, b_i el punto donde se coloca la junta Cardan, d la distancia entre el referencial inercial y el local en la plataforma. Se define R como la rotacion extrínseca formada por los valores de θ_p con la siguiente forma:

$$R = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & -S_\psi C_\phi + C_\psi S_\theta S_\phi & S_\psi S_\phi + C_\psi S_\theta C_\phi \\ S_\psi C_\theta & C_\psi C_\phi + S_\psi S_\theta S_\phi & -C_\psi S_\phi + S_\psi S_\theta C_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \quad (6)$$

Los movimientos de la plataforma se realizan por medio de actuadores lineales controlados por el largo del mismo. El largo del piston se define como la coordenada generalizada del sistema q_i el cual se obtiene por medio de la norma euclideana del vector de largo l_i obtenido al despejar l_i de la ecuacion 5.

$$q_i = \sqrt{\langle l_i, l_i \rangle} \quad (7)$$

$$l_i = d + Ra_i - b_i \quad (8)$$

Utilizando las ecuaciones 7 y 8 se encuentra el vector unitario como:

$$\lambda_i = \frac{l_i}{q_i} \quad (9)$$

1.2.2. pseudo-Cinemática Directa

Debido a la complejidad en la cinemática directa de manera tradicional, se propone dividir cada una de las cadenas paralelas partiendo del referencial inercial al referencial local de la plataforma tomando cada cadena como un robot serial. Se asignan a cada una de las juntas referenciales de movimiento rotacionales en su respectivo eje, lo cual permite desarrollar una cadena serial que puede ser definida por medio de transformaciones homogeneas.

INSERTAR IMAGEN DE LOS REFERENCIALES DE UNA PATA

$$\sum_0^1 = \begin{bmatrix} R_z(\Psi_{bi} + \pi/2) & b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\sum_1^2 = \begin{bmatrix} R_y(\theta_{1i}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\sum_2^3 = \begin{bmatrix} R_x(\theta_{2i}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\sum_3^4 = \begin{bmatrix} I_3 & q_{min} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\sum_4^5 = \begin{bmatrix} R_z(\theta_{4i}) & l_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\sum_4^5 = \begin{bmatrix} R_x(\theta_{5i}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\sum_5^6 = \begin{bmatrix} R_y(\theta_{6i}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\sum_6^7 = \begin{bmatrix} R_z(\Psi_{ai} - \pi/2) & -Ra_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

1.2.3. pseudo-Cinemática inversa

Al asignar los referenciales a las cadenas paralelas, se definen variables que dependen de valores angulares así como del valor q_i . Para el funcionamiento de esta metodología se deben de mantener las siguientes restricciones.

- Todas las cadenas paralelas deben converger en el mismo punto.
- Las cadenas al converger en el punto también deben converger en orientación.
- El único valor activo de la cadena es $q_i = \theta_{3i}$.

Para encontrar los valores articulares de las juntas, se conoce el valor de q_i y λ_i de las ecuaciones 7 y 9 de la cinemática inversa de la plataforma. El vector unitario λ_i se encuentra a lo largo del eje z del referencial \sum_1 y del referencial \sum_4 . La cadena serial en orientación se puede escribir como:

$$R(\theta_i) = R(\psi_{bi} + \pi/2)R(\theta_{1i}, \theta_{2i})R(\theta_{4i}, \theta_{5i}, \theta_{6i})R(\psi_{ai} - \pi/2) \quad (18)$$

De la misma aseveración se puede definir

$$\lambda_i^{(bi)} = R_{z, \psi_{bi} + \pi/2}^T \lambda_i^{(0)} = R_1^2 \hat{k} \quad (19)$$

Como la configuración de R_1^2 es la matriz de rotación realizada en el eje y seguido del eje x se tiene la matriz de rotación:

$$R_1^2 = \begin{bmatrix} C_{\theta_{1i}} & S_{\theta_{1i}}S_{\theta_{2i}} & S_{\theta_{1i}}C_{\theta_{2i}} \\ 0 & C_{\theta_{2i}} & -S_{\theta_{2i}} \\ -S_{\theta_{1i}} & C_{\theta_{1i}}S_{\theta_{2i}} & C_{\theta_{1i}}C_{\theta_{2i}} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Y el valor de λ_i^{bi} se define:

$$\lambda_i^{(bi)} = R_{z, \psi_{bi} + \pi/2}^T \lambda_i^{(0)} = \begin{bmatrix} C_{\psi_{bi} + \pi/2} \lambda_{ix} + S_{\psi_{bi} + \pi/2} \lambda_{iy} \\ -S_{\psi_{bi} + \pi/2} \lambda_{ix} + C_{\psi_{bi} + \pi/2} \lambda_{iy} \\ \lambda_{iz} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Al reemplazar en la ecuación 19 se obtiene:

$$\lambda_i^{(bi)} = \begin{bmatrix} S_{\theta_{1i}}C_{\theta_{2i}} \\ -S_{\theta_{2i}} \\ C_{\theta_{1i}}C_{\theta_{2i}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Y de esta igualación se obtiene que:

$$\theta_{1i} = \arctan \left(\frac{C_{\psi_{bi} + \pi/2} \lambda_{ix} + S_{\psi_{bi} + \pi/2} \lambda_{iy}}{\lambda_{iz}} \right) \quad (23)$$

$$\theta_{2i} = \arcsen (S_{\psi_{bi} + \pi/2} \lambda_{ix} - C_{\psi_{bi} + \pi/2} \lambda_{iy}) \quad (24)$$

Los valores angulares de θ_{4i}, θ_{5i} y θ_{6i} se obtienen del despeje de R_4^6 de la ecuación 18:

$$R(\theta_{4i, 5i, 6i}) = R^T(\theta_{1i, 2i}) R^T(\psi_{bi} + \pi/2) R(\theta_i) R^T(\psi_{ai} - \pi/2) \quad (25)$$

$$R(\theta_i) = R(\theta_p)$$

Donde la matriz de rotación R_4^6 se define en los ejes z , y y x de la siguiente manera:

$$MatrizRotacion4 - 6 \quad (26)$$

Al igualar la matriz de rotación de la ecuación 26 con la matriz evaluada de la ecuación 25 se encuentran las siguientes soluciones:

$$\theta_{4i} = \arctan 2(-r_{12}, r_{22}) \quad (27)$$

$$\theta_{5i} = \arcsen(r_{32}) \quad (28)$$

$$\theta_{6i} = \arctan 2(-r_{31}, r_{33}) \quad (29)$$

1.2.4. Cinemática inversa de velocidad

La cinemática inversa de velocidad se puede obtener desarrollando la derivada de la ecuación 7.

$$\frac{d}{dt}q_i = \frac{d}{dt}\sqrt{l_i^T l_i} \quad (30)$$

Desarrollamos la derivada de q_i :

$$\dot{q}_i = \frac{1}{2q_i}(\dot{l}_i \cdot l_i + l_i \cdot \dot{l}_i) = \frac{1}{q_i}(\dot{l}_i \cdot l_i) \quad (31)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{q_i}(\dot{d} + [\omega \times] R a_i) \cdot l_i \quad (32)$$

$$= \frac{1}{q_i}(v_p - [(R a_i) \times] \omega) \cdot l_i$$

$$\dot{q} = \frac{l_i}{q_i} (v_p - [(R a_i) \times] \omega) \quad (33)$$

$$= v_p \cdot \lambda_i + [(R a_i) \times] \lambda_i \cdot \omega$$

$$\dot{q} = [\lambda_i^T, [(R a_i) \times] \lambda_i^T] \begin{bmatrix} v_p \\ \omega \end{bmatrix} \quad (34)$$

Con la expresion de la ecuación 34 se encuentra que la ecuación que corresponde a la forma

$$\dot{q} = A(d, R) \nu_p \quad (35)$$

Donde la matriz A es el jacobiano geométrico inverso $J_g^{(0)}$ de la plataforma visto desde el referencial inercial. Y mapea las velocidades de las coordenadas generalizadas al twist de la plataforma.

Al derivar la pose de la plataforma, se obtiene que el jacobiano geometrico es el que mapea los cambios de las coordenadas generalizadas en los cambios de la pose y se define como:

$$\dot{z} = J_a(\cdot) \dot{q} \quad (36)$$

Existe una relacion entre la derivada de la pose y el twist, se encuentra que la relación entre estos dos es un operador cinemático (J_z) el obtenido de la configuración de orientación utilizada en el sistema.

$$\nu_p^{(0)} = J_z \dot{z} \quad (37)$$

El operador cinemático de la plataforma que sigue el formato de ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada:

$$\text{ecuacion de operador cinemático} \quad (38)$$

Al realizar la igualación de la ecuacion 35 y 36 se encuentra:

$$\dot{q} = A(d, R)^0 J_z(\theta) \dot{z} \quad (39)$$

1.2.5. pseudo-Cinemática Directa de velocidad

Observando la transformación de Plücker la cual traslada y rota el *twist* de un referencial padre a un hijo y tiene la siguiente forma:

$$X(\cdot) = R^T(R_{i-1}^i)T(d_{i/i-1}^{i-1}) \quad (40)$$

Con la transformación de Plücker y conociendo las condiciones iniciales de la cadena serial de la plataforma se puede mapear de manera recursiva el *twist* de la plataforma de manera recursiva. El movimiento de manera local $\nu_{i/i-1}^i$ depende unicamente de θ_i en cada referencial asignado y utilizando la condición *screw* se puede definir $\nu_{i/i-1}^i = s_i \dot{\theta}_i$. Se define el calculo del *twist* de manera recursiva de la siguiente manera:

$$\nu_i = X_i(\theta_i)\nu_i + s_i \dot{\theta}_i \quad (41)$$

Y siguiendo el concepto de la traslacion y rotacion del *twist* asi como $\nu_i = J_i(\theta_i)\dot{\theta}_i$ se puede encontrar el jacobiano de manera recursiva como:

$$J_i(\theta_i) = X(\theta_i)J_{i-1} + S_i \quad (42)$$

Donde S_i es una matriz de ceros ($S_i \in R^{6 \times n}$) en donde la columna i de la junta debe de tener el vector s_i correspondiente del movimiento. Al realizar la recursion, se encuentra que el jacobiano de inicio es una matriz nula $J_0 = 0$.

La aceleración de la cadena serial puede encontrarse derivando la expresion de la ecuacion 41.

$$a_i = \frac{d}{dt}(X_i(\theta_i)\nu_i + s_i \dot{\theta}_i) \quad (43)$$

Donde se define la derivada de la transformación de Plücker como:

$$\dot{X}_i = -\theta_i \Omega(s_i)X_i \quad (44)$$

Lo cual nos deja la ecuacion de aceleracion como:

$$a_i = X_i(\theta_i)\dot{\nu}_i - \theta_i \Omega(s_i)\nu_i + s_i \ddot{\theta}_i \quad (45)$$

Con el valor inicial de la aceleración $a_0 = G_0$ se reduce la expresión anterior a la siguiente manera:

$$a_i = X_i(\theta_i)a_{i-1} - \dot{\theta}_i \Omega(s_i)\nu_i \quad (46)$$

1.2.6. Dinámica

Del modelo lagrangiano se observa que la dinámica del sistema se observa como:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) - \tau_D = \tau_e \quad (47)$$

Y bajo los conceptos del BDA los términos inerciales y de gravedad adopta la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^N J_i^T(q)F_i = \tau_e \quad (48)$$

El cual utiliza los jacobianos locales para mapear las velocidades generalizadas locales al *twist* en coordenadas locales de cada referencial asignado al igual que las fuerzas.

$$\nu_i = J_i(q)\dot{q} \quad (49)$$

$$F_i = M_i(\dot{\nu}_i - G_i) - \Omega^T(\nu_i)M_i\nu_i - F_{f_i} \quad (50)$$

Las fuerzas del sistema utilizando la formulación de Kirchoff para cuerpos rígidos.[REFERENCIA A FORMULACION DE KIRCHOFF]

Sin embargo para el desarrollo de la PGS la dinámica directa necesita de los valores del jacobiano y su derivada. Pero utilizando la ecuacion 39 en la 49 se encuentra que:

$$\nu_i = J_i(q)A(d, R)R(R)\nu_p = T_i(d, R)\nu_p \quad (51)$$

Y permite general la formulación quasi-Lagrangiana la cual nos evita tener que utilizar las coordenadas y velocidades generalizadas del sistema para encontrar la dinámica. Este modelo se expresa de la siguiente manera:

$$H_v(z)\dot{\nu}_p + h_v(z, \nu_p) = R^T(R)A^T(d, R)\tau \quad (52)$$

En donde el modelo dinámico depende de los valores de la pose y *twist* de la plataforma la cual no necesita de las coordenadas y velocidades generalizadas. Volviendo este modelo independiente a la cinemática directa de la plataforma del modelo Lagrangiano.

Se define:

$$H_v(z) = \sum_{i=1}^N T_i^T(z) M_i T_i(z) > 0 \quad (53)$$

$$h_v(z, \nu_p) = \sum_{i=1}^N T_i^T(z) \left(M_i \left(\dot{T}_i(z, \dot{z}) - G_i \right) - \Omega^T(\nu_i) M_i \nu_i - F_{e_i} \right) \quad (54)$$