Введение

При изучении самых разнообразных явлений окружающего мира, имеющих отношение как к точным, так и к гуманитарным наукам, исследователи сталкиваются в ряде случаев с тем, что функциональные зависимости между величинами находятся из уравнений, в которых присутствуют производные от искомых функций. Наиболее простыми среди них являются те, что содержат только производные первого порядка и могут быть записаны в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) ,$$

где y - искомая функция, x - независимая переменная, f(x,y) - непрерывная функция от x и y. Однако получить аналитическое решение этого уравнения для достаточно произвольной функции f не удается, и только для некоторых частных случаев, с которыми можно ознакомиться в справочной литературе.

В связи с быстрым развитием электронной вычислительной техники в последние десятилетия появилась возможность использовать приближенные математические методы для решения подобного рода задач. Один из таких подходов называется методом Рунге-Кутты и объединяет целую группу модификаций, связанных способом их получения.

Цель курсовой работы: изучить метод Рунге – Кутта 4-го порядка для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Постановка задачи: необходимо составить программу, позволяющую решать обыкновенные дифференциальные уравнения методом Рунге – Кутта 4-го порядка.

Курсовая работа состоит из 3 разделов, содержит 6 рисунков, 3 листинга, 1 приложение и 18 страниц.

1. Теоретическая часть

1.1 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Задача Коши

Для упрощения рассмотрим двумерное пространство переменных x и y и принадлежащее ему открытое множество G. Пусть f (x, y) - непрерывно дифференцируемая функция над этим открытым множеством и уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

Согласно теореме существования и единственности для каждой точки (x0, y0) ∈G существует решение y = y (x), которое определено в интервале (x0 −δ, x0 + δ) и удовлетворяет условию y (x0). = y0 такое, что точки (x, y (x)) ∈G и y'x ≡ f (x, y (x)) и это решение единственны. Задача для уравнения (1) с начальным условием y (x0) = y0 (задача Коши) состоит в том, чтобы найти функцию y (x), которая преобразует уравнение (1) и начальное условие в тождество. Предположим, что значения, принимаемые независимой переменной x, принадлежат интервалу (X0, XN), и запишем задачу Коши:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \\ X_0 \langle x \langle X_N \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Разделите отрезок $[X_0, X_N]$ на N частей так, чтобы$x_{n+1} - x_n = h_n$,

$n = 0, \dots, N-1$. В дальнейшем без ограничения общности рассмотрим случай, когда разбиение равномерное, т.е. все $h_n = h = \frac{X_N - X_0}{N}$ = const,

$n = 0, \dots, N-1$.

1.1 Сущность метода Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

с начальным состоянием

$$y(x_0) = y_0 .$$

Подставив x_0, y_0 в уравнение (1), получае значение производной в точке x_0 :

$$y'|_{x=x_0} = f(x_0, y_0).$$

Для самых наименьих Δx происходит следующее:

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_1) = y_0 + \Delta y = y_0 + y'|_{x=x_0} \cdot \Delta x = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \Delta x.$$

Указываем $f(x_0, y_0) = f_0$, перепишем последнее равенство в виде:

$$y_1 = y_0 + f_0 \cdot \Delta x. \qquad (2)$$

Если мы теперь возьмем (x_1, y_1) за новую отправную точку, мы получим то же самое:

$$y_2 = y_1 + f_1 \cdot \Delta x.$$

В целом у нас будет:

$$y_{i+1} = y_i + f_i \cdot \Delta x. \qquad (3)$$

В этом суть метода Эйлера. В этом случае Δx называется шагом интегрирования. С помощью этого метода мы получаем приблизительные значения y, потому что производная y' на самом деле не остается постоянной во всем диапазоне Δx. Итак, мы получаем ошибку при определении значения функции y, тем большую, чем больше Δx. Метод Эйлера - один из простейших методов численного интегрирования дифференциальных уравнений и систем. Его недостатки - невысокая точность и систематическое накопление ошибок.

Модифицированный метод Эйлера с преобразованием более точен. Его суть в том, что мы сначала находим так называемое «грубое приближение» (прогноз) по формуле (3).

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + f_i \cdot \Delta x,$$

а затем пересчетом $\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$ получают тоже приближенное, но более точное значение (коррекция):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f_i + \tilde{f}_{i+1}}{2} \cdot \Delta x. \qquad (4)$$

Фактически пересчет позволяет учесть, хоть и приблизительно, изменение производной y' на шаге интегрирования Δx, так как учитываются ее значения f_i в начале и $\tilde{f}_{i+1}$ в конце шага (рис. 1), а затем берется их среднее. Метод Эйлера с пересчетом (4) является по существу методом Рунге-Кутта 2-го порядка [2], что станет очевидным из дальнейшего.

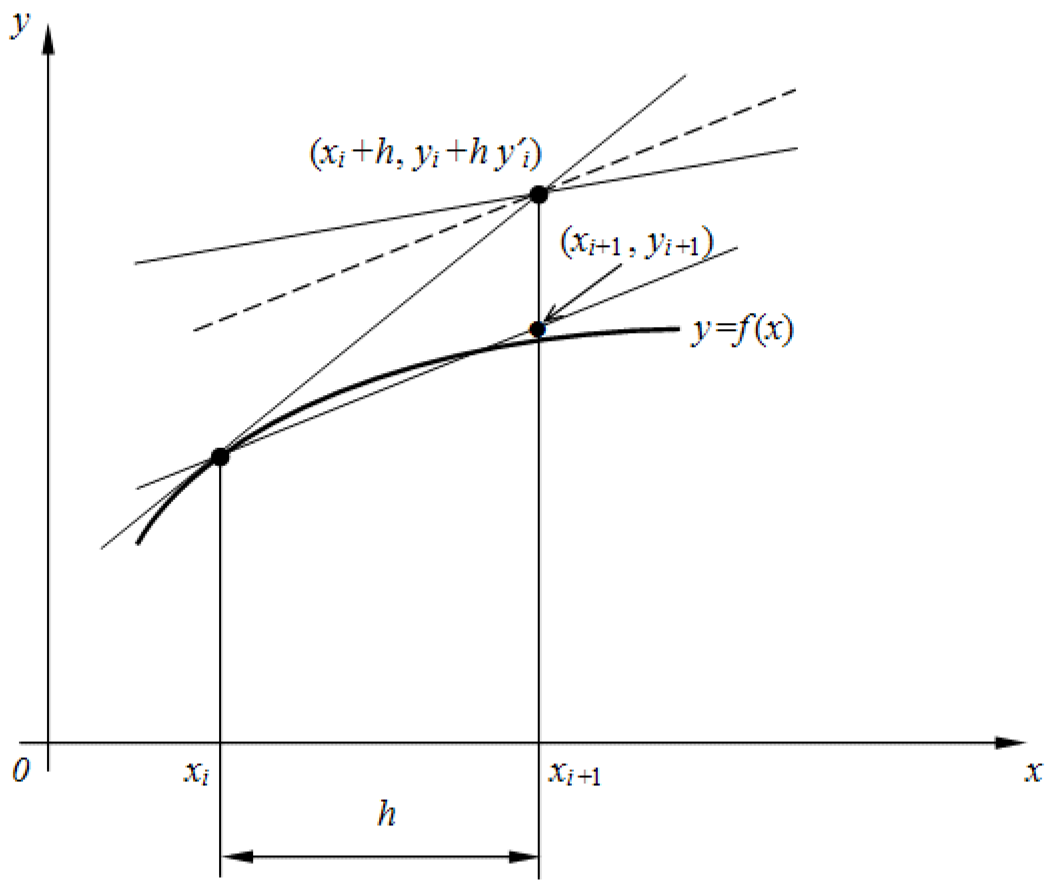

Рис. 1. Геометрическое представление метода Эйлера с пересчетом.

1.2 Суть метода Рунге-Кутта

Для разрешения ДУ широко используются методы Рунге-Кутта. Самый распространенный способ - четвертого порядка.

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{k=1}^{p} c_k \eta_k^i \qquad (3)$$

$$\eta_1^i = f(x_i, y_i) \qquad (4)$$

$$\eta_k^i = f\big(x_i, +ah, y_i + hb, f(x_i, y_i)\big) \qquad (5)$$

η_k - параметр, определяющий значение функции около точки (x_i, y_i) области определения.

Общепринятый метод четвертого порядка:

$$\eta_1^i = f(x_i, y_i) \qquad (6)$$

$$\eta_2^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right) \qquad (7)$$

$$\eta_3^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\eta_2^i\right) \qquad (8)$$

$$\eta_4^i = f\left(x_i + h, y_i + h\eta_3^i\right) \qquad (9)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(\eta_1^i + 2\eta_2^i + 2\eta_3^i + \eta_4^i\right) \qquad (10)$$

Ошибка формулы (10) пропорциональна h^5.

Этот метод намного точнее методов Эйлера, но также требует большего количества вычислений: положение точки (x_{i+1}, y_{i+1}) определяется четырехкратным вычислением значения функции f (x,y). С появлением компьютера этот недостаток перестал быть существенным, и метод Рунге-Кутты четвертого порядка получил чрезвычайно широкое распространение на практике.

Количество микро сегментов $[x_i;\ x_{i+1}]$, на которые разбивается начальный сегмент $[x_0;x_n]$, зависит от требуемой точности вычислений. Для достижения необходимой точности задача решается несколько раз последовательным удвоением количества микро сегментов n. Точность считается достигнутой, когда значения (в точках сходимости x) начального и двойного числа n не отличаются более чем на определенное значение:

$$\frac{\left|y_i^{(n)} - y_{2i}^{(2n)}\right|}{2^p - 1} < \varepsilon, \quad i = 0, .., n, \qquad (11)$$

где p – порядок точности метода.

Метод Рунге-Кутта обладает следующими свойствами:

1. Одношаговый метод (для нахождения y_{m+1} нужна предыдущая точка x_m, y_m)
2. Он не требует производной функции f (x, y), но требует вычисления самой функции.
3. Имеет небольшую погрешность

1.3 Выбор среды разработки

Microsoft Visual Studio - это линейка продуктов от Microsoft, которая включает интегрированную среду разработки и множество других инструментов. С помощью этого продукта вы можете создавать консоли, приложения с графическим интерфейсом, а также веб-сайты, веб-приложения, веб-службы в собственном и управляемом коде для всех платформ, поддерживаемых Windows, Windows Mobile, Windows CE, .NET Framework, Xbox, Windows Phone. NET Compact Framework и Silverlight.

Для этой задачи было выбрано программное обеспечение C #. Потому что он проще в использовании и отвечает всем требованиям, необходимым для создания приложения с графическим интерфейсом.

2. Практическая часть

Разработка программы начинается с описания функций.

Листинг 1 «описание функций»

Затем идет объявление и инициализация переменных, которые участвуют в вычислительном процессе: коэффициенты уравнений, границы отрезка, шаг, начальное условие(они будут получены в ходе использования программы посредством ручного ввода).

Когда все необходимые данные получены, переходим непосредственно к решению ОДУ методом Рунге - Кутты 4-го порядка и методом Эйлера.

Листинг 2 «Программная реализация решения ОДУ методом Рунге-Кутта 4-го порядка»

Листинг 3 «программная реализация решения ОДУ методом Эйлера»

Заключение

В ходе курсовой работы была реализована задача, а именно создана программа с графическим интерфейсом на языке C#, с помощью которой можно решать обыкновенные дифференциальные уравнения по методам Эйлера и Рунге-Кутты 4-го порядка.

В ходе тестирования программы были получены результаты, показывающие, что решение этими методами в достаточной степени совпадают с аналитическими.

Список использованных источников

1. Березин И.С., Жидков Н.П., Методы вычислений: Т.2 – М.: ГИФМЛ, 1960. – 620 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Бином, 2001 - с. 363-375.
3. Копченова Н.В., Марон И.А., Вычислительная математика в примерах и задачах – М.: Наука, 1972. – 368 с.
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Visual_Studio
5. https://ru.wikipedia.org/wiki/C%2B%2B_Builder