Решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Пусть дана некоторая функция $f(x)$ и требуется найти все или некоторые значения x, для которых

$$f(x) = 0. \tag{1.1}$$

Корень или решение уравнения – значение x^*, при котором $f(x^*) = 0$.

Корень x^* уравнения называется *простым*, если первая производная функции $f(x)$ в точке x^* не равна нулю, т. е. $f'(x^*) \neq 0$. Если же $f'(x*) = 0$, то корень x^* называется *кратным.*

Геометрически корень уравнения есть точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс.

Этапы нахождения корней уравнения

Большинство методов решения уравнения $f(x) = 0$ ориентировано на отыскание простых корней уравнения. Рассмотрим основные этапы.

В процессе приближенного отыскания корней уравнения (1.1) обычно выделяют два этапа:

1. Локализация корня.
2. Уточнение корня.

Локализация корня – определение отрезка $[a, b]$, содержащего один и только один корень. Отрезок можно найти с помощью:

1. Физического соображения.
2. Построения графика или таблицы значений функции $y = f(x)$.

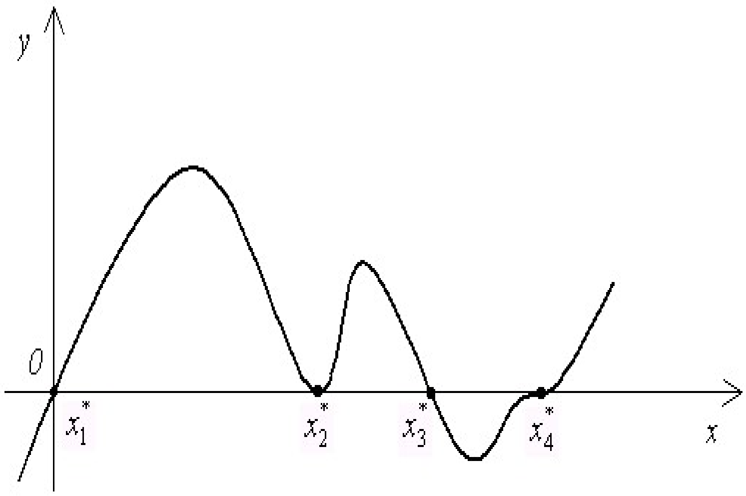

Рис. График функции y = f(x)

На наличие корня на отрезке $[a, b]$ указывает различие знаков функции на концах отрезка. Основанием для этого служит следующая теорема математического анализа.

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, так, что $f(a) * f(b) < 0$, то отрезок $[a, b]$ содержит, по крайней мере, один корень уравнения $f(x) = 0$.

Замечание! Корень четной кратности таким образом локализовать нельзя, так как в окрестности такого корня функция $f(x)$ имеет постоянный знак.

Уточнение корня – вычисление приближенного значения корня с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Данное значение уточняется с помощью различных итерационных методов.

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

К основным численным методам решения уравнений относятся такие методы как метод половинного деления, метод простых итераций, метод касательных и метод хорд. Одним из основных численных методов является метод итераций, на принципах которого основаны остальные методы.

Прежде чем использовать какой-либо численный метод, необходимо произвести отделение корней, т.е. определить количество корней в интересующей нас области и выделить достаточно малые интервалы, в каждом из которых заключен только один корень.

Условием существования корня непрерывной функции на интервале является

$$f(a) * f(b) < 0,$$

что говорит о том, что на данном интервале функция изменяет знак, т.е. пересекает ось x.

Метод половинного деления

Метод половинного деления (дихотомии, бисекции) является самым простым и надежным способом решений нелинейного решения

Метод реализуется следующим алгоритмом:

Пусть необходимо решить уравнение, $f(x) = 0$, где функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и единственный корень x заключен в том же интервале. Разделим отрезок a, b пополам и получим $x = \frac{a+b}{2}$.

Вычислим значение функции в этой точке и проверим знак условия $f(x) * f(a)$. Если знак условия положителен, то корень уравнения находится на отрезке $[x, b]$ и левая граница интервала перемещается в точку x, т.е. $a = x$. Если знак условия отрицателен, то корень уравнения находится на отрезке $[a, x]$ т.е. $[b = x]$.

Далее продолжаются вышеописанные шаги, т.е. новый отрезок вновь делится пополам и производится новый выбор. Процесс повторяется до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше заданной точности $|b - a| > \varepsilon$.

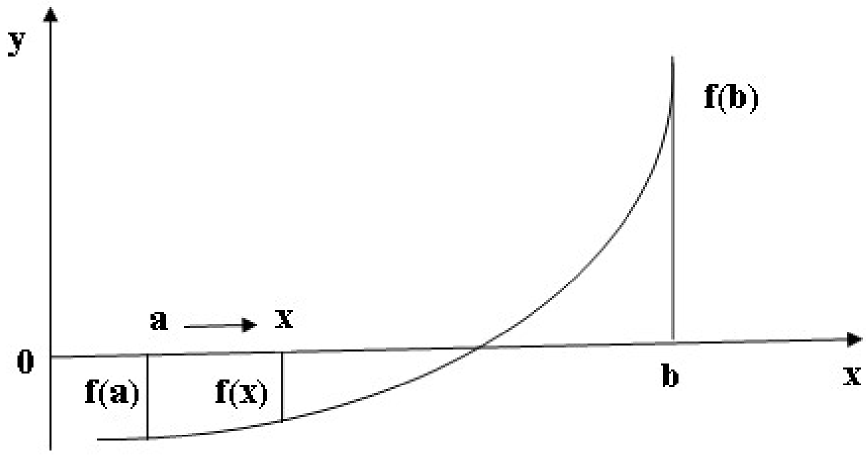

Рис. График функции $f(x)$

Число итераций при использовании этого метода значительно, и поэтому сходимость его медленная. Однако при любой ширине отрезка $[a, b]$ сходимость гарантирована. Кроме того, простота реализации метода уменьшает число вспомогательных операций и частично компенсирует невысокое быстродействие.

Метод простых итераций

Метод простых итераций является популярным способом численного решения математических задач. Его суть – нахождение алгоритма поиска по известному приближению (приближенному значению) искомой величины следующего, более точного приближения.

Метод реализуется следующим алгоритмом:

Пусть уравнение $f(x) = 0$ можно заменить эквивалентным ему уравнением

$$x = \varphi(x) \tag{2.1}$$

Выберем на отрезке $[a, b]$ начальное приближение x_0 и подставим его в правую часть уравнения (2.1). На этом шаге мы получим уточненное значение $x_1 = \varphi(x_0)$. Подставим теперь x_1в уравнение (2.1) и получим новое приближение $x_2 = \varphi(x_1)$. и т. д.

Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность приближений к корню:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \tag{2.2}$$

Процесс итераций сходится при условии $|\varphi'(x)| < 1$. Это условие является необходимым и достаточным. При $|\varphi'(x)| > 1$ в независимости от выбора начального приближения процесс будет расходиться.

Для выбора начального приближения вычисляют значения первых производных функции $\varphi(x)$ в граничных точках интервала $\{a, b\}$, содержащего корень, и за начальное приближение принимают тот конец интервала, для которого выполняется условие $|\varphi'(x)| < 1$.

Геометрически способ простых итераций можно представить следующим образом. Построим графики двух функций: $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Абсцисса точек пересечения этих графиков является корнем уравнения $f(x) = 0$).

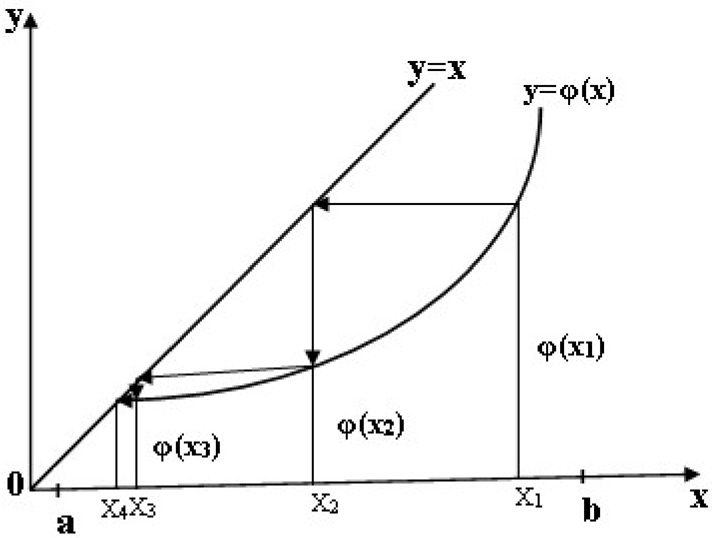

Рис. Графики функций: $y = x$ и $y = \varphi(x)$

Метод касательных (Ньютона)

Метод касательных (Ньютона) является наиболее эффективным методом решения нелинейных уравнений.

Метод основан на замене $f(x)$ в точке начального приближения $x = x_0$ касательной, пересечение которой с осью x дает первое приближение x_1 и т.д..

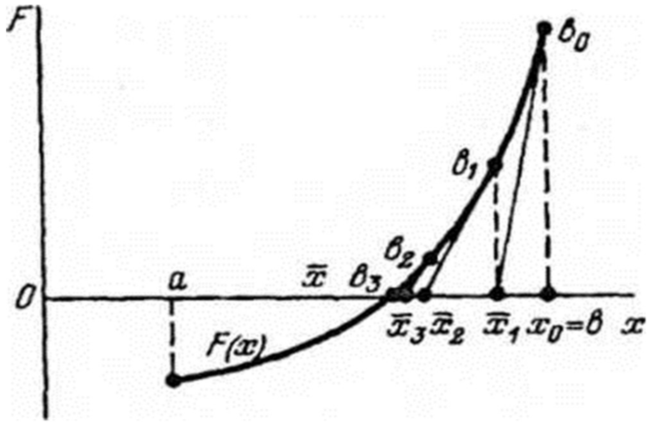

Рис. График функции $f(x)$

Уравнение касательной, проходящей через точку x_0, имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Первое пересечение получим, взяв абсциссу точки пересечения этой касательной с осью OX, т. е $y = 0, x = x_1$

$$x_1 = x_0 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Аналогично поступим с остальными точками и в результате получим последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Метод обеспечивает быструю (квадратичную) сходимость.

В качестве первого приближения x_0 выбирают тот конец отрезка $[a, b]$, для которого выполняется условие

$$f(x) * f''(x) > 0.$$

Это условие сходимости является достаточным, но не необходимым, т.е. если условие выполняется, то итерационный процесс обязательно сойдется, а если не выполняется, то может или сойтись, или не сойтись.

Метод хорд

Метод хорд является итерационным численным методом приближённого нахождения корня уравнения.

Метод реализуется следующим алгоритмом:

Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет один корень на отрезке $[a, b]$, а первая и вторая производные функции определены, непрерывны и сохраняют постоянные знаки на этом интервале.

Рассмотрим геометрическое представление метода.

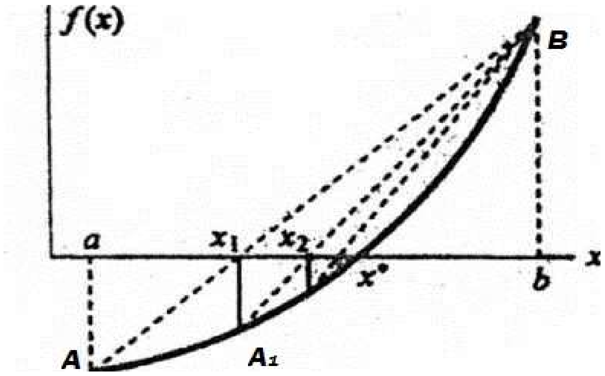

Рис. График функции $f(x)$

Проведем хорду через точки A и B. В точке пересечения хорды с осью x находим значение функции $f(x)$ и получаем точку A_1. Затем проводим новую хорду через точки A_1 и B и т.д.

Уравнение прямой, проходящей через две точки x_1 и x_2, имеет вид

$$\frac{x_k - x}{x - c} = \frac{-f(x)}{f(x) - f(c)} \tag{2.3}$$

$$\frac{y_k - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{y_k - y_1}{y_1 - y_2}$$

Из этого уравнения необходимо определить точку x_k – это точка пересечения хорды с осью x. Следовательно, в уравнении прямой $y_k = 0$.

Один из концов отрезка $[a, b]$ является подвижным (в нашем случае a), другой конец b – неподвижный.

Условием сходимости итерационного процесса является правильный выбор подвижного и неподвижного концов.

Обозначим подвижный конец интервала – x, неподвижный конец – c.

В качестве подвижного конца выбирается точка, для которой выполняется условие:

$$f(x) * f''(x) < 0.$$

Уравнение (2.3) можно записать в следующем виде:

$$\frac{x_k - x}{x - c} = \frac{-f(x)}{f(x) - f(c)}$$

Отсюда можно найти искомую точку x_k, и это будет итерационной формулой метода:

$$x_k = x - \frac{f(x) * (x - c)}{f(x) - f(\mathrm{c})}.$$

Условие сходимости итерационного процесса является достаточным, но не необходимым.