Введение

При изучении самых разнообразных явлений окружающего мира, имеющих отношение как к точным, так и к гуманитарным наукам, исследователи сталкиваются в ряде случаев с тем, что функциональные зависимости между величинами находятся из уравнений, в которых присутствуют производные от искомых функций. Наиболее простыми среди них являются те, что содержат только производные первого порядка и могут быть записаны в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) ,$$

где y - искомая функция, x - независимая переменная, f(x,y) - непрерывная функция от x и y. Однако получить аналитическое решение этого уравнения для достаточно произвольной функции f не удается, и только для некоторых частных случаев, с которыми можно ознакомиться в справочной литературе.

В связи с быстрым развитием электронной вычислительной техники в последние десятилетия появилась возможность использовать приближенные математические методы для решения подобного рода задач. Один из таких подходов называется методом Рунге-Кутты и объединяет целую группу модификаций, связанных способом их получения.

Цель курсовой работы: изучить методы Эйлера и Рунге – Кутта 4-го порядка для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Постановка задачи: необходимо составить программу, позволяющую решать обыкновенные дифференциальные уравнения методами Эйлера Рунге – Кутта 4-го порядка.

1. Теоретическая часть

1.1 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Задача Коши

Для простоты рассмотрим двумерное пространство переменных x и y и некоторое открытое множество G, принадлежащее ему. Пусть на этом открытом множестве определена непрерывно дифференцируемая функция f(x, y) и задано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

Согласно теореме существования и единственности для любой точки $(x_0,y_0) \in G$ найдется решение $y = y(x)$, определенное на некотором интервале $(x_0 -\delta, x_0 +\delta)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, такое, что точки $(x,y(x)) \in G$ и $y'_x \equiv f(x, y(x))$, причем это решение будет единственным. Задача для уравнения (1) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ (задача Коши) состоит в нахождении функции y(x), обращающей и уравнение (1), и начальное условие в тождество. Допустим, что значения, которые принимает независимое переменное x, принадлежат интервалу (X_0, X_N) и запишем задачу Коши:

(2)

Разобьём отрезок $[X_0, X_N]$ на N частей так, что $x_{n+1} – x_n = h_n$,

$n = 0, \dots ,N-1$. В дальнейшем, не ограничивая общности, рассмотрим случай, когда разбиение равномерное, т.е. все $h_n = h = \frac{X_N - X_0}{N} = const$,

$n = 0 ,\dots ,N-1$.

1.2 Суть метода Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение

(1)

с начальным условием

Подставив в уравнение (1), получим значение производной в точке :

При малом имеет место:

Обозначив , перепишем последнее равенство в виде:

(2)

Принимая теперь за новую исходную точку, точно также получим:

В общем случае будем иметь:

(3)

Это и есть *метод Эйлера*. Величина называется *шагом интегрирования*. Пользуясь этим методом, мы получаем приближенные значения y , так как производная на самом деле не остается постоянной на промежутке длиной . Поэтому мы получаем ошибку в определении значения функции y , тем большую, чем больше . Метод Эйлера является простейшим методом численного интегрирования дифференциальных уравнений и систем. Его недостатки – малая точность и систематическое накопление ошибок.

Более точным является *модифицированный метод Эйлера с пересчетом*. Его суть в том, что сначала по формуле (3) находят так называемое «грубое приближение» (прогноз):

а затем пересчетом получают тоже приближенное, но более точное значение (коррекция):

(4)

Фактически пересчет позволяет учесть, хоть и приблизительно, изменение производной на шаге интегрирования , так как учитываются ее значения в начале и в конце шага (рис. 1), а затем берется их среднее. Метод Эйлера с пересчетом (4) является по существу методом Рунге-Кутта 2-го порядка [2], что станет очевидным из дальнейшего.

Рис. 1. Геометрическое представление метода Эйлера с пересчетом.

1.3 Суть метода Рунге-Кутта

Методы Рунге-Кутта находят широкое применение при решении ДУ. Наибольшее применение нашел метод 4-го порядка.

(3)

$$\eta_1^i = f(x_i, y_i) \quad (4)$$

$$\eta_k^i = f\big(x_i, +ah, y_i + hb, f(x_i, y_i)\big) \quad (5)$$

η_k - параметр, который определяет значение функции вблизи точки (x_i, y_i) области определения.

Общепринятый метод 4-го порядка:

$$\eta_1^i = f(x_i, y_i) \quad (6)$$

$$\eta_2^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right) \quad (7)$$

$$\eta_3^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\eta_2^i\right) \quad (8)$$

$$\eta_4^i = f\left(x_i + h, y_i + h\eta_3^i\right) \quad (9)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(\eta_1^i + 2\eta_2^i + 2\eta_3^i + \eta_4^i\right) \quad (10)$$

Ошибка формулы (10) пропорциональна h^5.

Этот метод намного более точен, чем методы Эйлера, но требует и большего объема вычислений: положение точки (x_{i+1}, y_{i+1}) определяется в результате 4-кратного вычисления значения функции f (x,y). С появлением ЭВМ этот недостаток перестал быть существенным и метод Рунге-Кутта 4-го порядка применяется на практике чрезвычайно широко.

Число микроотрезков [x_i; x_{i+1}], на которые разбивается исходный отрезок [x_0;x_n], определяется требуемой точностью вычислений. Для достижения нужной точности задача решается несколько раз при последовательно удваиваемом числе микроотрезков n. Точность считается достигнутой, если при начальном и удвоенном числе n значения y_i и y_{2i} (в совпадающих точках x) отличаются не более чем на заданную величину:

$$\frac{\left|y_i^{(n)} - y_{2i}^{(2n)}\right|}{2^p - 1} < \varepsilon \text{, i =0, ..,n,} \qquad (11)$$

где p – порядок точности метода.

Метод Ругне-Кутта обладает следующими свойствами:

1. Метод является одноступенчатым (чтобы найти y_{m+1} , нужна информация о предыдущей точке x_m, y_m)
2. Не требует вычисления производных от f(x,y), а требует вычисления самой функции
3. Имеет небольшую погрешность

1.3 Выбор среды разработки

Microsoft Visual Studio — линейка продуктов компании Microsoft, включающих интегрированную среду разработки программного обеспечения и ряд других инструментальных средств. С помощью данного продукта можно разрабатывать консольные приложения, приложения с графическим интерфейсом, а также веб-сайты, веб-приложения, веб-службы как в родном, так и в управляемом кодах для всех платформ, поддерживаемых Windows, Windows Mobile, Windows CE, .NET Framework, Xbox, Windows Phone .NET Compact Framework и Silverlight.

Для выполнения поставленной задачи был выбран программный продукт C#. Так как является более простым в использовании и соответствует всем необходимым требованиям для создания приложения.

2. Практическая часть

2.1 Программная реализация метода Рунге-Кутта 4-го порядка

Разработка программы начинается с описания функций.

Листинг 1 «описание функций»

Затем идет объявление и инициализация переменных, которые участвуют в вычислительном процессе: коэффициенты уравнений, границы отрезка, шаг, начальное условие.

Когда все нужные данные получены, мы переходим непосредственно к решению ОДУ методом Рунге – Кутта 4-го порядка и методом Эйлера.

Листинг 2 «программная реализация решения ОДУ методом Рунге – Кутта

4-го порядка»

Листинг 3 «программная реализация решения ОДУ методом Эйлера»

Заключение

В ходе выполнения курсовой работы была реализована поставленная задача, а именно составлена программа, позволяющая решать обыкновенные дифференциальные уравнения методами Эйлера Рунге – Кутта 4-го порядка.

В ходе тестирования программы были получены результаты, по которым видно, что результаты решения методами Эйлера и Рунге – Кутта 4-го порядка совпадают, с достаточной точностью, с аналитическим.

Список использованных источников

1. Березин И.С., Жидков Н.П., Методы вычислений: Т.2 – М.: ГИФМЛ, 1960. – 620 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Бином, 2001 - с. 363-375.
3. Копченова Н.В., Марон И.А., Вычислительная математика в примерах и задачах – М.: Наука, 1972. – 368 с.
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Visual_Studio
5. https://ru.wikipedia.org/wiki/C%2B%2B_Builder