Integration durch Substitution

In diesem Kapitel lernen wir die Integration durch Substitution (Substitutionsregel) kennen.

Inhaltsverzeichnis

Erforderliches Vorwissen

- Was ist eine Stammfunktion?
- Was ist ein unbestimmtes Integral?
- Integrationsregeln

Einordnung

Um verkettete Funktionen

$f(x)=g(h(x))$

abzuleiten, brauchen wir die Kettenregel:

Kettenregel

$$f'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)$$

Was beim Ableiten die Kettenregel ist, ist beim Integrieren die Substitutionsregel:

Substitutionsregel

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)du$$

Dabei ist φ das kleine Phi des griechischen Alphabets.

Anleitung

Substitution vorbereiten

Den zu substituierenden Term bestimmen

Gleichung aus Schritt 1 nach x auflösen

Gleichung aus Schritt 2 ableiten

Integrationsvariable ersetzen

Substitution

Integration

Rücksubstitution

zu 1.1)

Wir müssen uns überlegen, welchen Teil der Funktion wir substituieren wollen.

Ziel ist es, das Integral auf ein bekanntes oder einfacher handhabbares Integral zurückzuführen.

zu 1.2)

In diesem Schritt berechnen wir $\varphi(u)$.

Wenn wir uns die Substitutionsregel

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)du$$

etwas genauer anschauen, können wir feststellen, dass gilt:

$x=\varphi(u)$

Um $\varphi(u)$ zu berechnen, müssen wir die Gleichung aus dem 1. Schritt nach x auflösen.

zu 1.3)

In diesem Schritt berechnen wir $\varphi'(u)$.

zu 1.4)

Wenn wir uns die Substitutionsregel

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)du$$

etwas genauer anschauen, können wir feststellen, dass gilt:

$dx=\varphi'(u)du$

$\Rightarrow$ Die Integrationsvariable x wird zu u!

zu 2)

Der Begriff Substitution kommt vom aus dem Lateinischen und bedeutet ersetzen.

Was im 2. Schritt genau ersetzt wird, schauen wir uns anhand einiger Beispiele an.

Beispiele

Beispiel 1

Berechne $\int e^{2x} dx$.

Substitution vorbereiten

Den zu substituierenden Term bestimmen

Wenn im Exponenten nur ein x stehen würde, wäre die Sache einfach:

$\int e^x dx = e^x + C$

Die Stammfunktion der e-Funktion ist die e-Funktion selbst.

Ganz so einfach ist das in unserem Beispiel aber nicht, denn der Exponent 2x stört.

Im 1. Schritt ersetzen wir den Exponenten 2x durch die Variable u:

$2x = u$

Gleichung aus Schritt 1 nach x auflösen

$2x = u \,|\, :2$

$x = \frac{1}{2}u$

$\Rightarrow \varphi(u) = \frac{1}{2}u$

Gleichung aus Schritt 2 ableiten

$\varphi'(u) = \frac{1}{2}$

Integrationsvariable ersetzen

$dx = \varphi'(u) du$

$dx = \frac{1}{2} du$

Substitution

$F(x) = \int e^{2x} dx$

mit

- $2x = u$
- $dx = \frac{1}{2} du$

ergibt

$F(u)=\int eu\cdot 1/2du=1/2\cdot\int eudu$

Durch Einführung einer neuen Integrationsvariable konnten wir einen Teil des Integranden ersetzen und auf diese Weise das Integral vereinfachen. Jetzt haben wir es mit einem einfacher handhabbarem Integral zu tun, das wir im nächsten Schritt integrieren.

Integration

$F(u)=1/2\cdot\int eudu=1/2\cdot eu+C$

Rücksubstitution

$u=2x$

in

$F(u)=1/2\cdot eu+C$

Ergibt = ½ e^2x +C