Grundlagen der Linearen Algebra

Teil des Moduls „Grundlagen der Mathematik 2“

Fachhochschule Wedel

Formale Hinweise

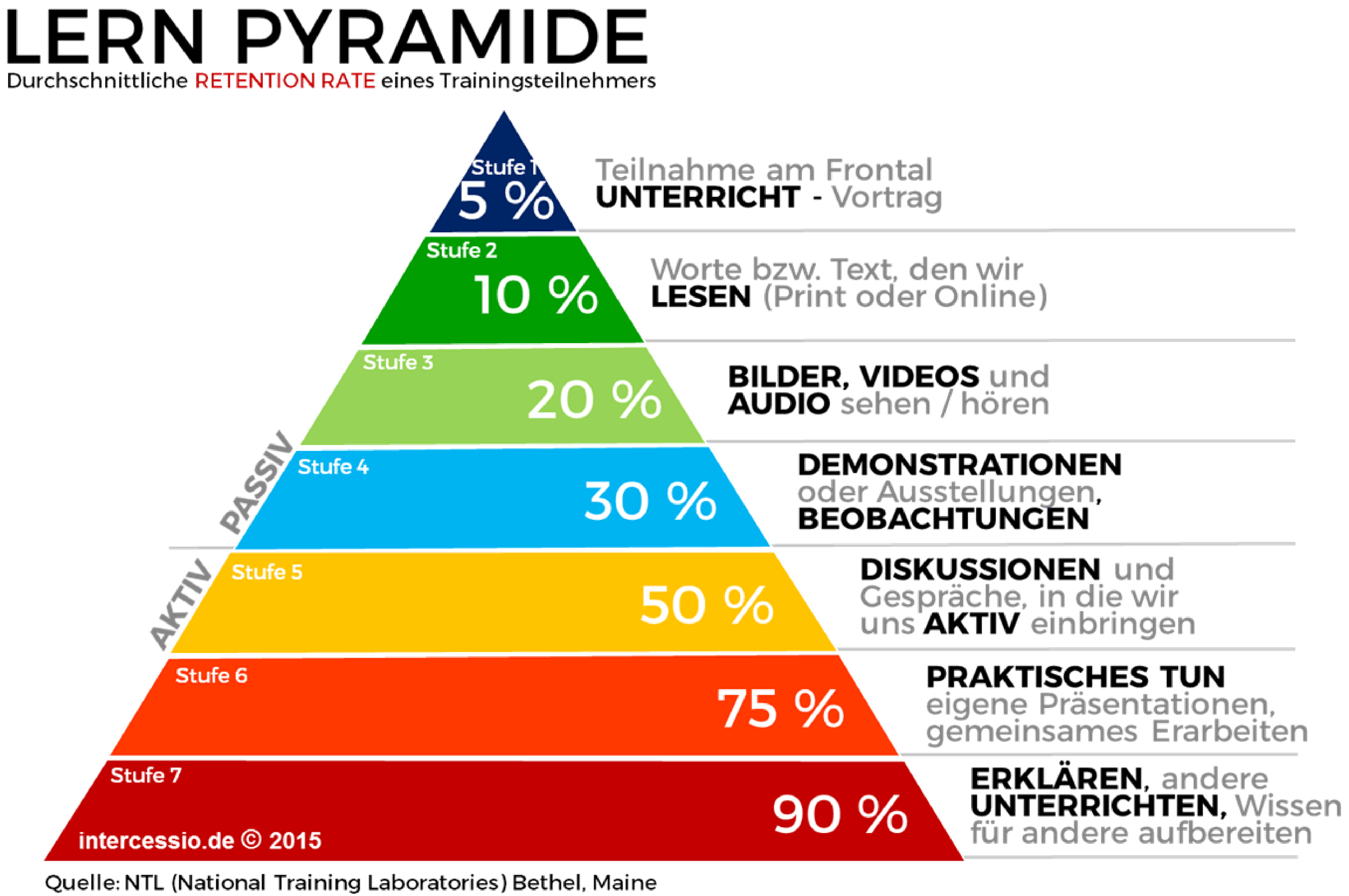
→ Beamerfolien und **Tafel**

→ Folien als Literatur **nicht** ausreichend! Mitschrift und **Buch**!

→ Vorlesung von Anfang an **kontinuierlich nacharbeiten**!

→ Stoffmenge, Geschwindigkeit und Schwierigkeit sind so ausgelegt, dass die Nachbearbeitungszeit zum Verstehen **benötigt** wird!

Formale Hinweise



Literatur

→ G. M. Gramlich
Lineare Algebra
Hanser Verlag (3. Aufl. 2011)

→ L. Papula
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Band 1 & 2 Vieweg & Teubner (13. Aufl. 2012)

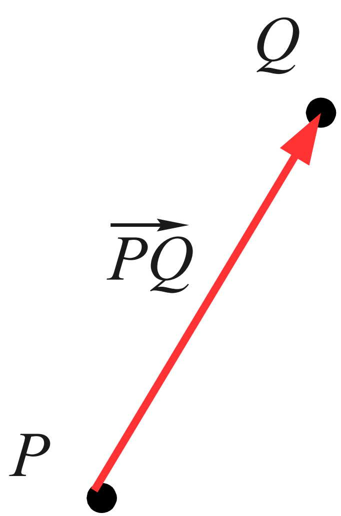
→ W. Helm, A. Pfeifer, J. Ohser;
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
Hanser Verlag (2011)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Geometrische Vektoren in der Ebene und im Raum

I.1 Definition und Rechenregeln

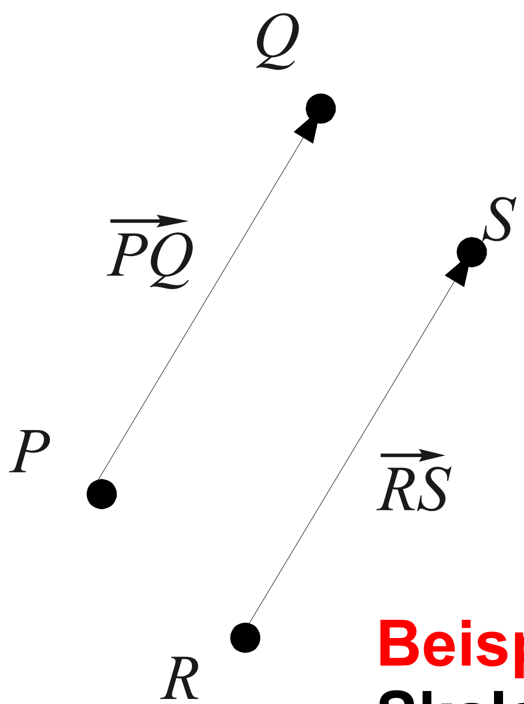


Zwischen zwei Punkten P und Q in der Ebene oder im Raum gibt es genau eine **Verschiebung**, die P nach Q „bringt“ – mathematisch: **abbildet**.

Die Verschiebung wird $\overrightarrow{PQ}$ mit bezeichnet und ist ein **geometrischer Vektor von P nach Q**.

Darstellung als **Pfeil**.

I.1 Definition und Rechenregeln



Unter der Einwirkung des gleichen Vektors $\overrightarrow{PQ}$ (der Verschiebung) wird der Punkt R nach S verschoben.

$$\overrightarrow{PQ} \,\hat{=}\, \overrightarrow{RS}$$

Gleiche Abbildung

Vektoren: Größen, die durch Länge (Betrag) und Richtung vollständig beschrieben sind.

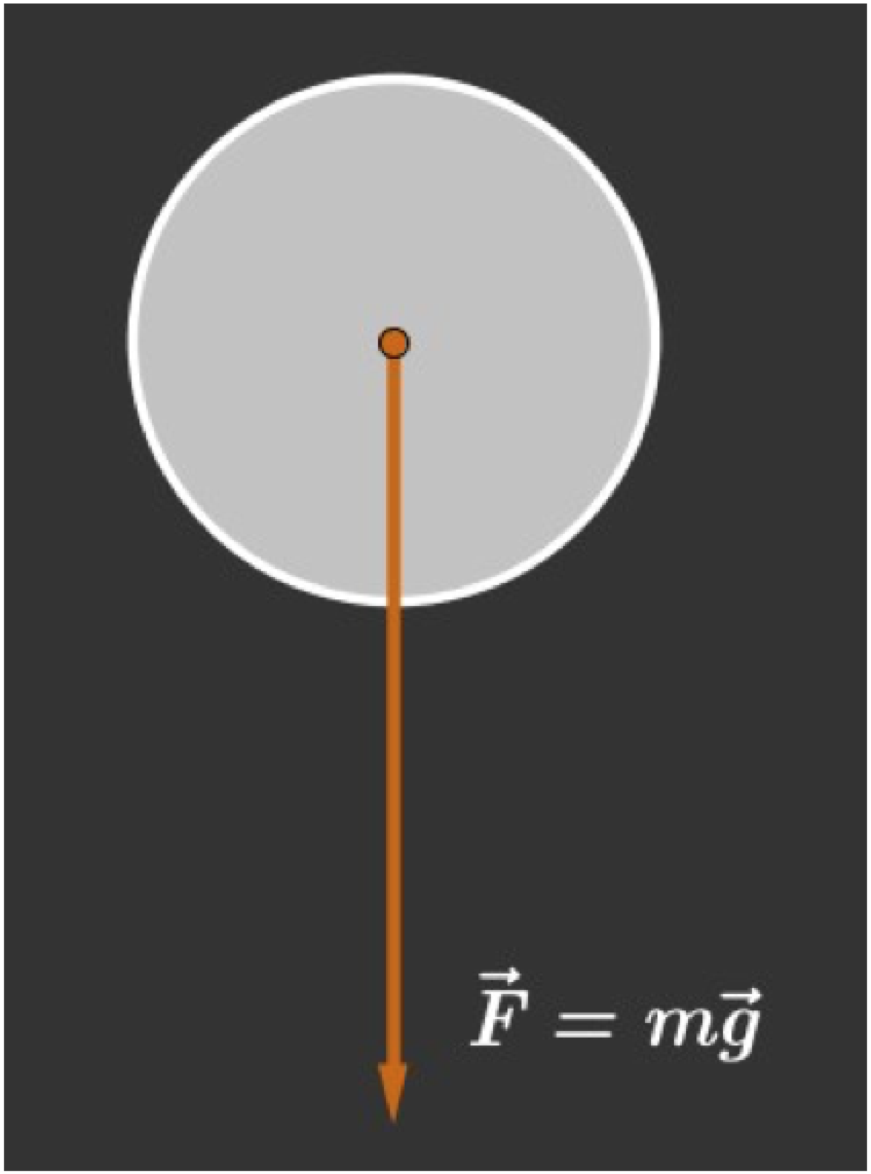
Beispiele

Skalare: Masse, Temperatur, Zeit

Freie Vektoren dürfen beliebig parallel zu sich selbst verschoben werden.

Gebundene Vektoren werden von einem festen Punkt aus abgetragen: Ortsvektor

I.1 Definition und Rechenregeln

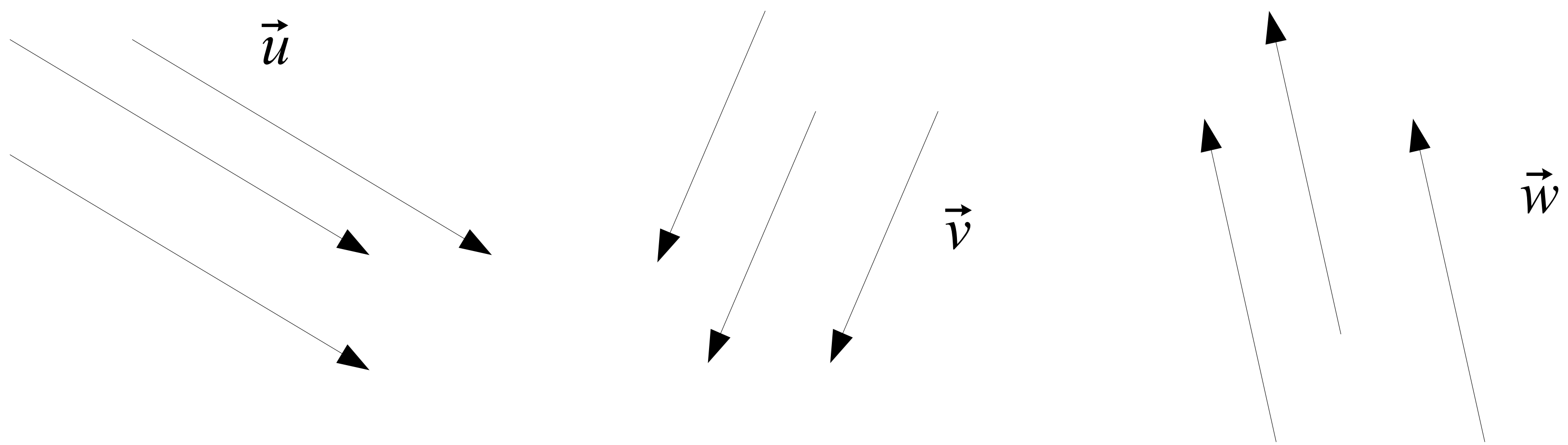


Die Schwerkraft, die auf einen festen Körper wirkt, ist ein Vektor.

Sie wird durch ihren Betrag und ihre Richtung bestimmt

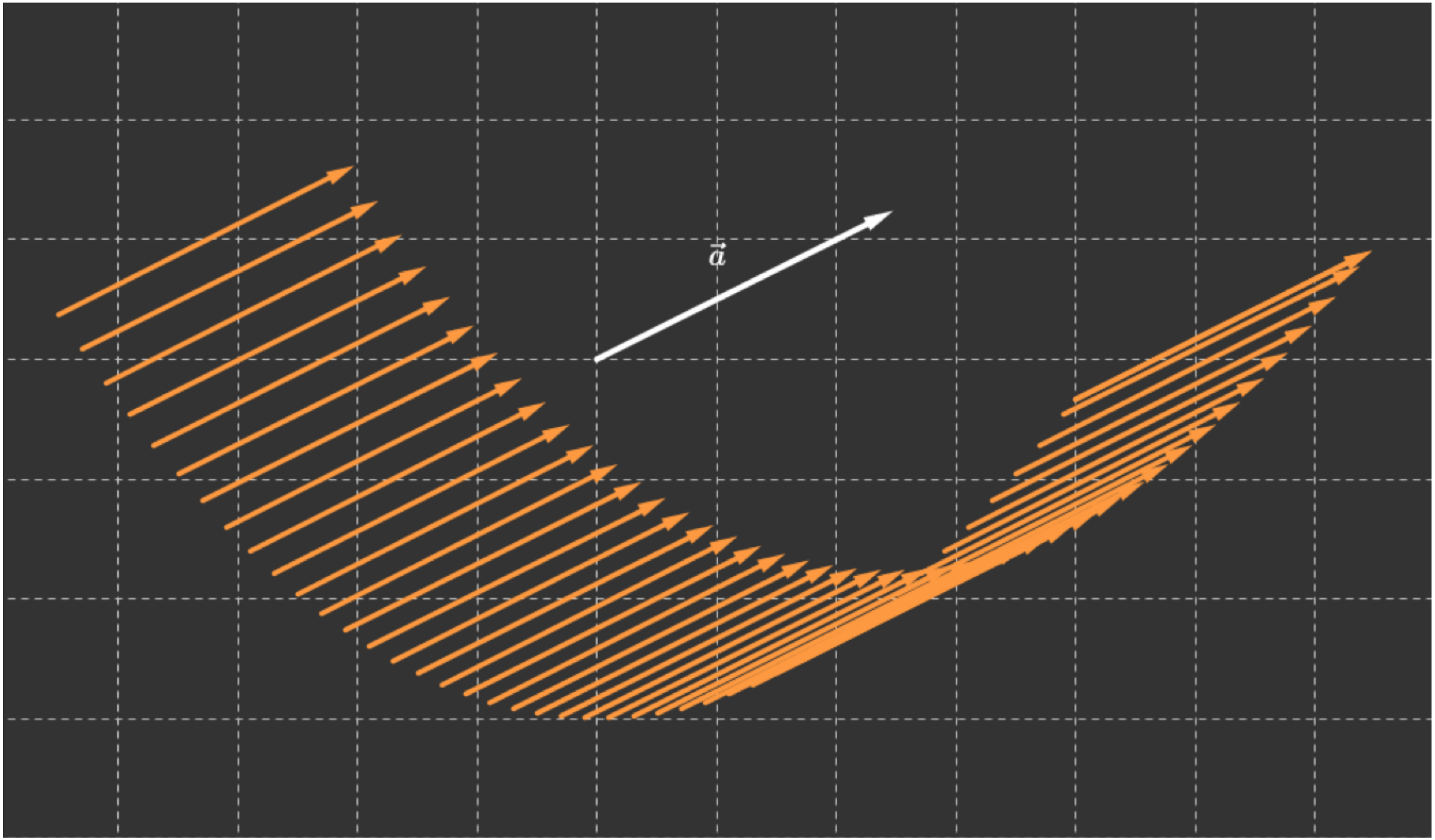
m ist die Masse des Körpers und g ist die Schwerbeschleunigung.

I.1 Definition und Rechenregeln



$\rightarrow$ Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind **gleich** $(\vec{u}=\vec{v})$ wenn die Pfeile von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zueinander p**arallel, gleich lang und gleichgerichtet** sind.

I.1 Definition und Rechenregeln



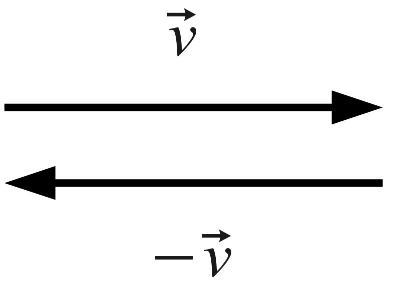
Alle gezeichneten Pfeile repräsentieren denselben Vektor. Sie sind gleich lang und haben die gleiche Richtung. Auch der Vektor a (weiß) ist ein Repräsentant des Vektors.

Spezielle Vektoren:

→ Derjenige Vektor, der jeden Punkt auf sich selbst abbildet, heißt **Nullvektor**. Der Nullvektor wird mit $\vec{0}$ bezeichnet und hat Betrag 0 und keine Richtung.

↳ Wichtig bei Frage nach Skalarprodukt: 0-Vektor hier nicht erlaubt.

→ Den zu $\vec{v}$ parallelen, gleich langen aber entgegen gesetzt gerichteten Vektor bezeichnen wir mit $-\vec{v}$ und nennen ihn **Gegenvektor**



→ Einheitsvektor, $\vec{e}$:hat Betrag 1

I.1 Definition und Rechenregeln

Elementare Vektoroperationen:

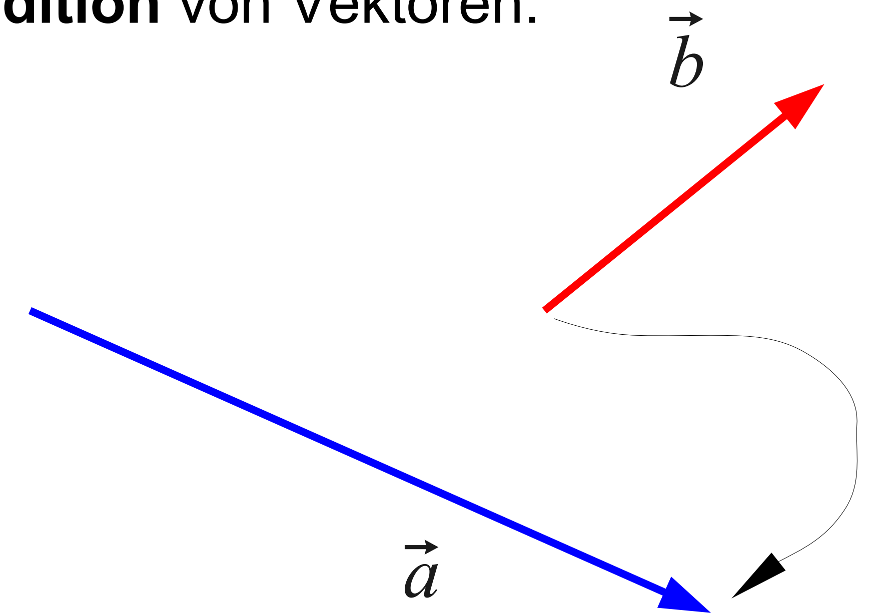
•**Addition** von Vektoren

•**Subtraktion** von Vektoren

•**Multiplikation** eines Vektors mit einer reellen Zahl (einem Skalar)

I.1 Definition und Rechenregeln

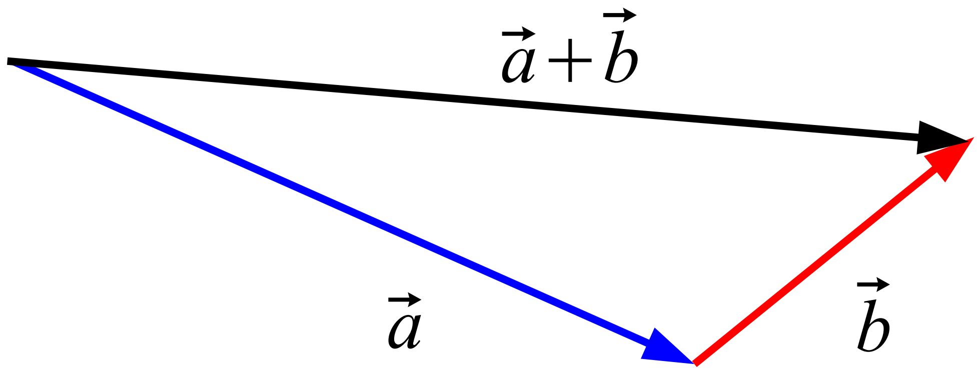
Geometrische **Addition** von Vektoren:



Der Vektor $\vec{b}$ wird <u>parallel zu sich selbst verschoben</u>, bis sein Anfangspunkt in den Endpunkt des Vektors $\vec{a}$ fällt.

I.1 Definition und Rechenregeln

Geometrische **Addition** von Vektoren:



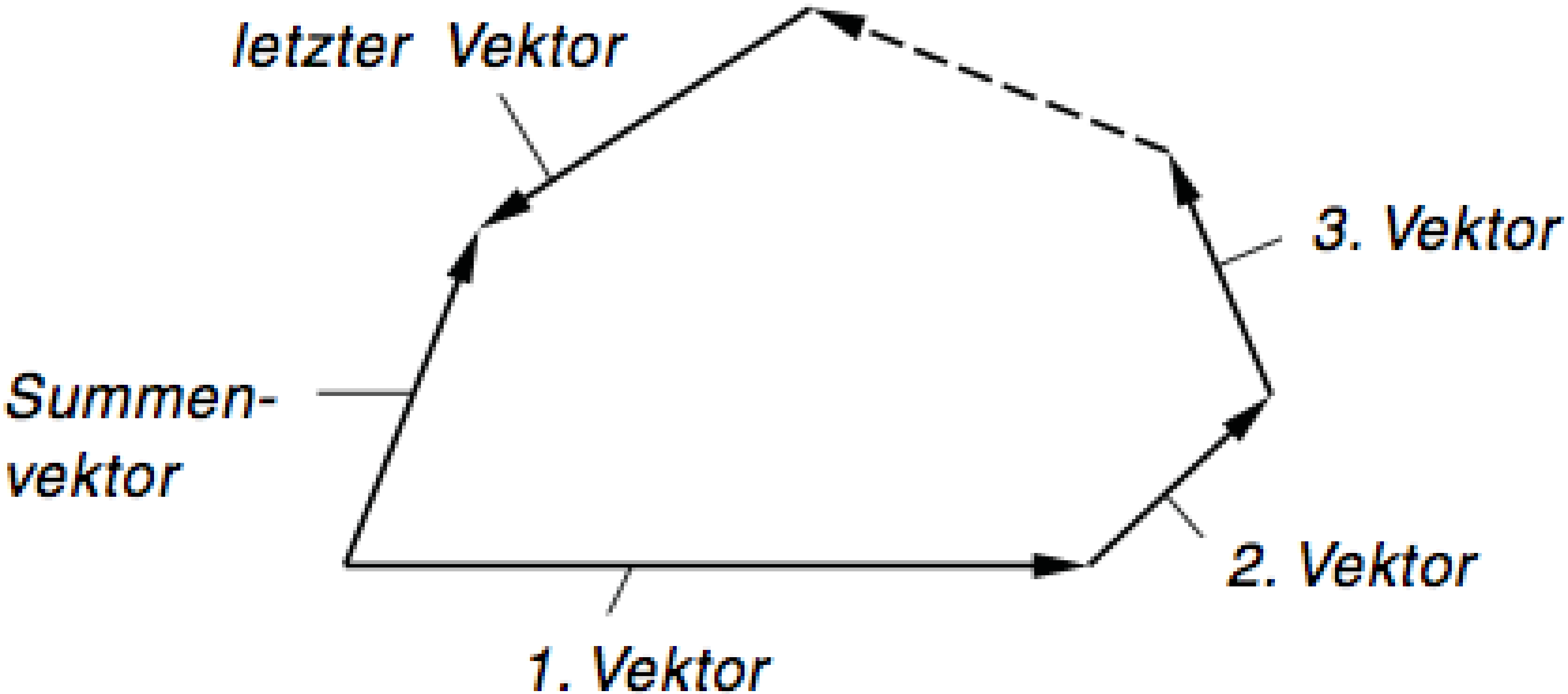
Der vom Anfangspunkt des Vektors $\vec{a}$ zum Endpunkt des verschobenen Vektors $\vec{b}$ gerichtete Vektor ist der Summenvektor

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

Summenvektor: **gerichtete Diagonale** in dem aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ konstruierten Parallelogramm

I.1 Definition und Rechenregeln

Geometrische Addition von Vektoren:

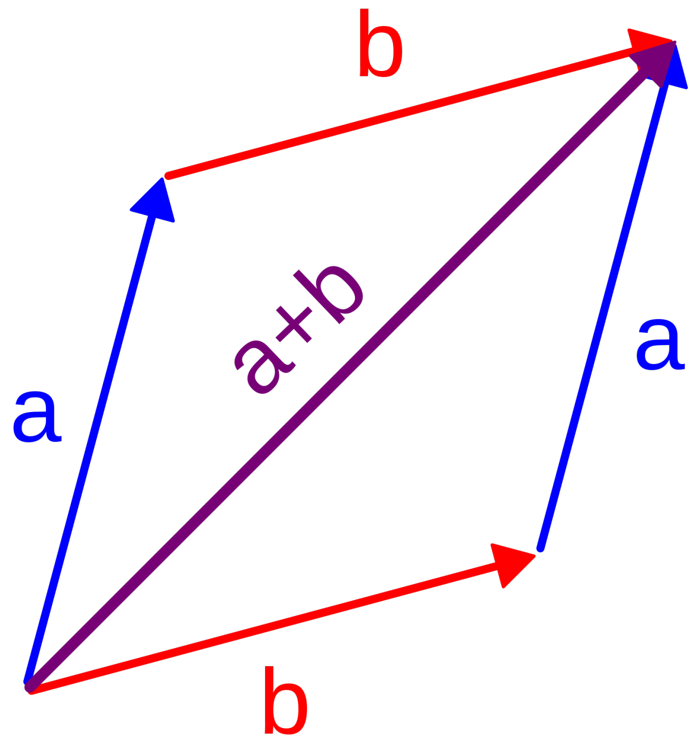


I.1 Definition und Rechenregeln

Rechenregeln für geometrische Vektoren: **Addition**

(1) **Kommutativgesetz**: Für beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



I.1 Definition und Rechenregeln

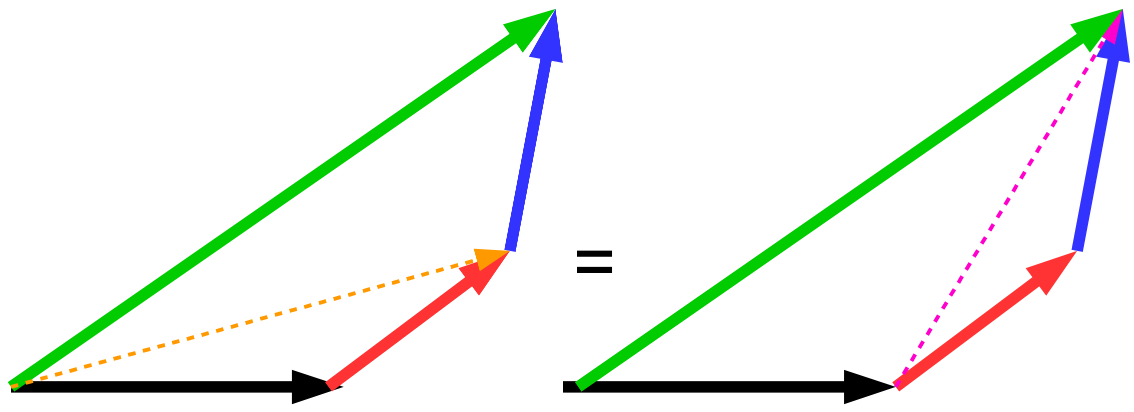
Rechenregeln für geometrische Vektoren: **Addition**

(1) Kommutativgesetz: Für beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

(2) **Assoziativgesetz:** Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



Rechenregeln für geometrische Vektoren: **Addition**

(1) Kommutativgesetz: Für beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

(2) Assoziativgesetz: Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

(3) Existenz des **neutralen** Elementes (Nullvektor): Für jeden Vektor $\vec{a}$ gilt:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

Rechenregeln für geometrische Vektoren: Addition

(1) Kommutativgesetz: Für beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

(2) Assoziativgesetz: Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

(3) Existenz des neutralen Elementes (Nullvektor): Für jeden Vektor $\vec{a}$ gilt:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

(4) Existenz des **inversen** Elementes (Gegenvektor): Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen Vektor $-\vec{a}$ mit

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

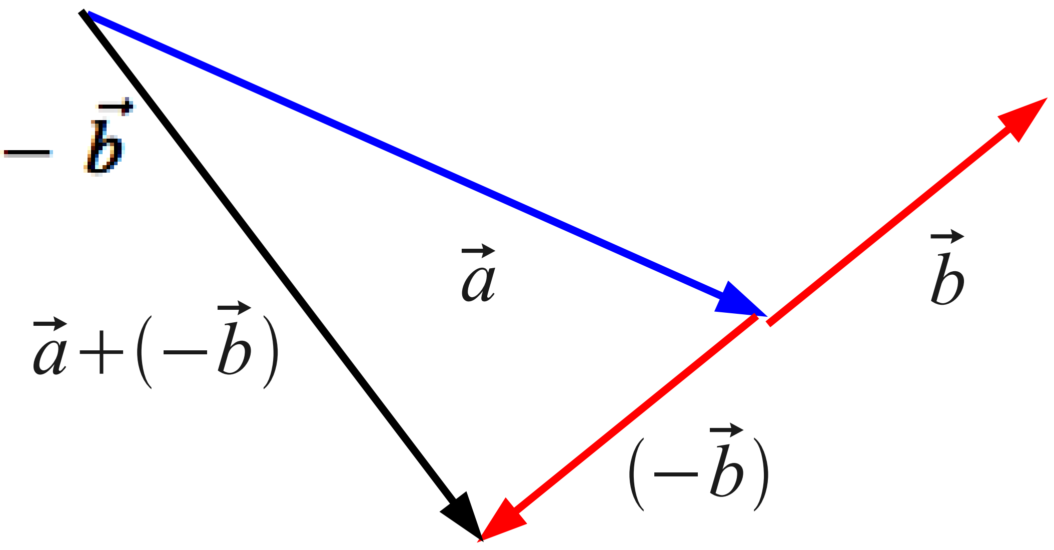
I.1 Definition und Rechenregeln

Subtraktion von Vektoren:

$\vec{b}$ wird in seiner Richtung umgekehrt: inversen Vektor $-\vec{b}$.

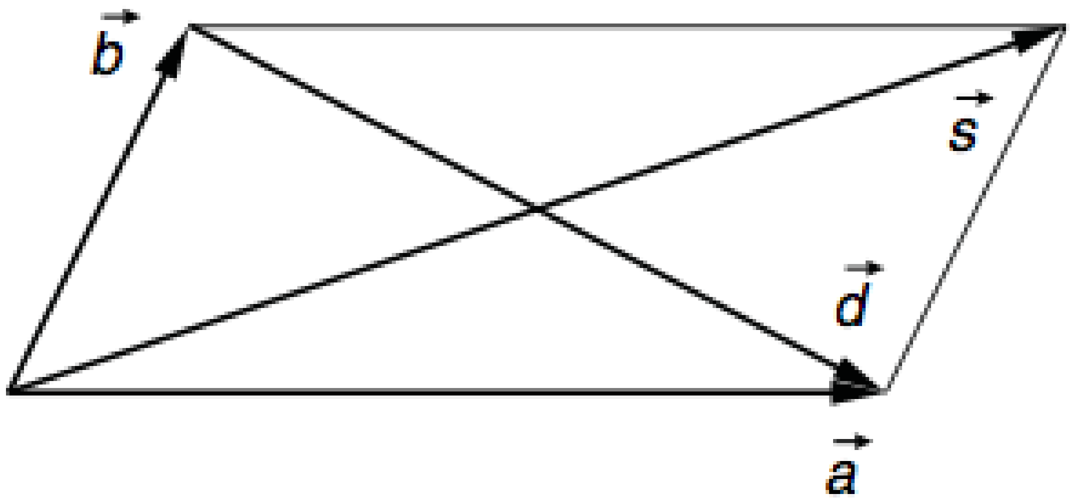
$-\vec{b}$ wird parallel zu sich selbst verschoben, bis sein Anfangspunkt in den Endpunkt von $\vec{a}$ fällt.

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$



Differenzvektor: Summe aus dem Vektor $\vec{a}$ und dem Gegenvektor von $\vec{b}$.

I.1 Definition und Rechenregeln



$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

Parallelogrammregel für die Addition und Subtraktion zweier Vektoren

I.1 Definition und Rechenregeln

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (einer reellen Zahl).

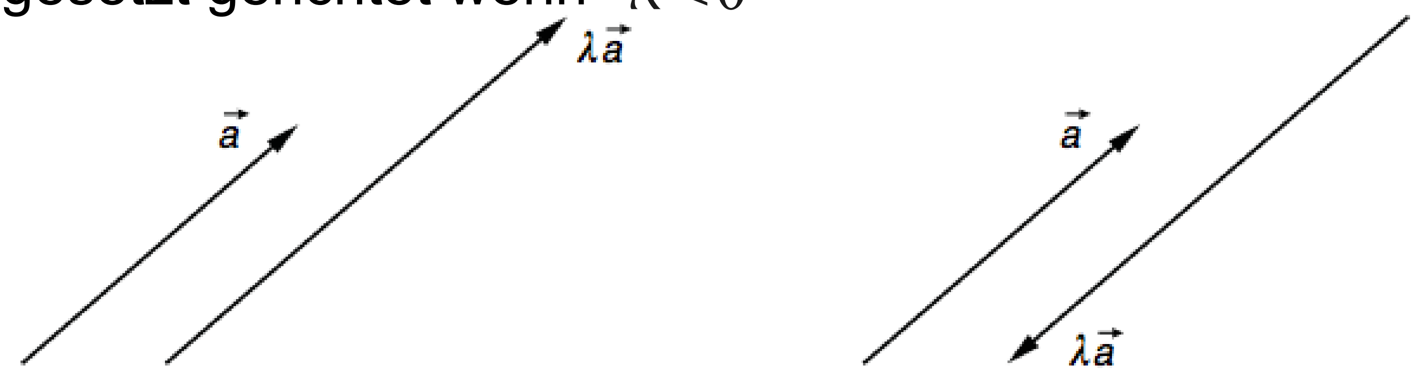
Gegeben sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\lambda \in \mathbb{R}, \; \lambda \neq 0$

Dann bezeichnet man mit $\lambda \vec{a}$ den Vektor

→ dessen Richtung parallel zu der Richtung von $\vec{a}$ ist

→ dessen Länge $|\lambda|$-mal die Länge von $\vec{a}$ ist

→ gleich gerichtet zu den Pfeilen von $\vec{a}$ ist, wenn $\lambda > 0$
und entgegen gesetzt gerichtet wenn $\lambda < 0$

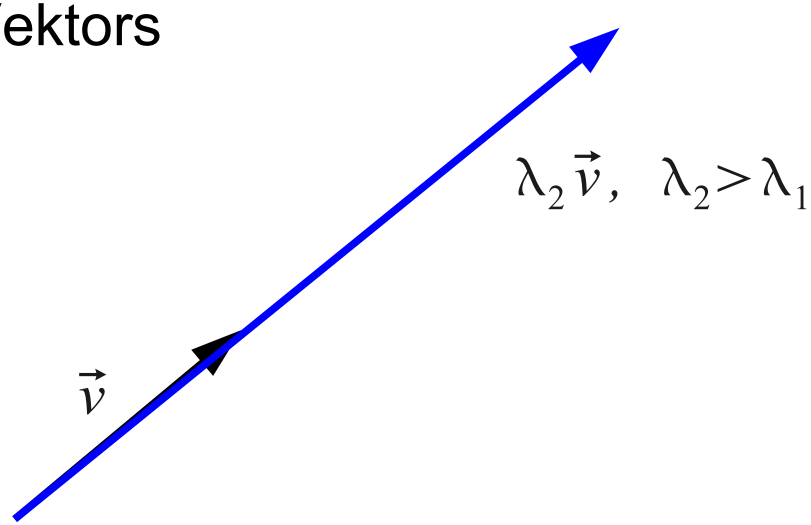


a) $\lambda > 0$ b) $\lambda < 0$

I.1 Definition und Rechenregeln

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (einer reellen Zahl)

→ geometrisch

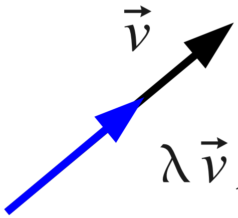


Streckung

I.1 Definition und Rechenregeln

Multiplikation eines Vektors
mit einem Skalar
(einer reellen Zahl)

→ geometrisch



$\lambda\vec{v},\ \ \lambda > 0,\ \ \lambda < 1$

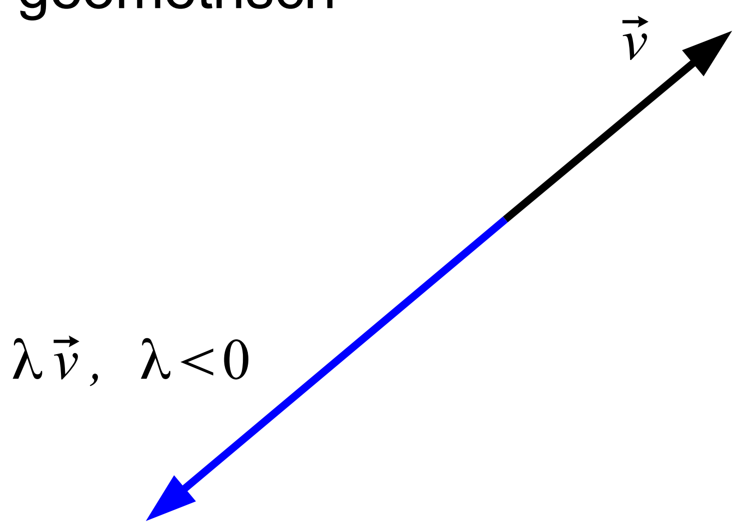
Stauchung

I.1 Definition und Rechenregeln

Multiplikation eines Vektors
mit einem Skalar
(einer reellen Zahl)

→ geometrisch

Wenn $\lambda = 0$ ist d. Nullvektor d. Ergebnis



Richtungsumkehr

I.1 Definition und Rechenregeln

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (einer reellen Zahl)

- Die Vektoren $\vec{a}$ und $\lambda\,\vec{a}$ sind kollinear.
- Die Multiplikation eines Vektors mit einer negativen Zahl bewirkt stets eine Richtungsumkehr des Vektors
- Die Division eines Vektors durch einen Skalar *μ* entspricht einer Multiplikation mit dem Kehrwert *1/μ* .

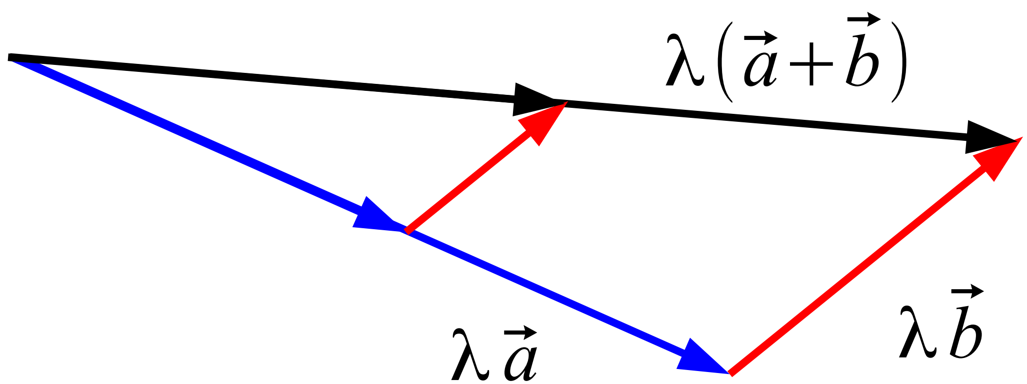
I.1 Definition und Rechenregeln

Rechenregeln für geometrische Vektoren: Multiplikation mit Skalar

Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für alle geometrischen Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ gilt:

(1) Distributivgesetze:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$



I.1 Definition und Rechenregeln

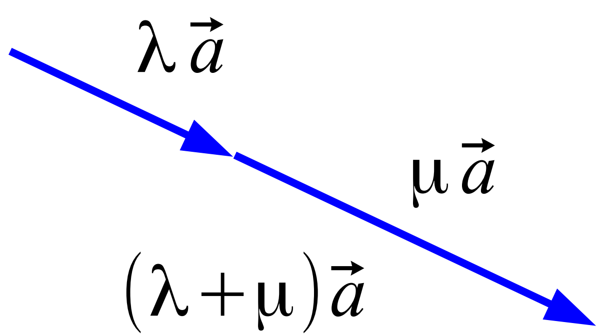
Rechenregeln für geometrische Vektoren: Multiplikation mit Skalar

Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für alle geometrischen Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ gilt:

(1) Distributivgesetze:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$



I.1 Definition und Rechenregeln

Rechenregeln für geometrische Vektoren: Multiplikation mit Skalar

Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für alle geometrischen Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ gilt:

(1) Distributivgesetze:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

(2) Assoziativgesetz:

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$$

(3)

$$1\vec{v} = \vec{v}$$

Definition: **Produktmenge** (kartesisches Produkt)

Sind *A* und *B* zwei Mengen, dann heißt die Menge

$$A \times B = \{(a, b);\ a \in A,\ b \in B\}$$

die Produktmenge (das kartesische Produkt) der Mengen *A* und *B*.
die Elemente der Menge (*A* x *B*) heißen **geordnete** Paare (a,b) -
die **Reihenfolge ist eindeutig bestimmt**.

↳ heißt schlichtweg, dass die Reihenfolge von Bedeutung ist.

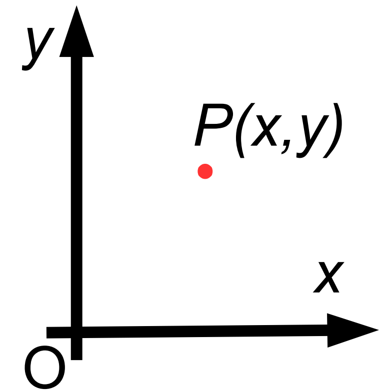
Zwei Paare (a_1, b_1) und (a_2, b_2) sind genau dann **gleich**, wenn

$$a_1 = a_2 \quad \text{und} \quad b_1 = b_2$$

I.2 Koordinatensysteme

Die **reelle Zahlenebene** ist damit

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$



Ein **rechtwinkliges Koordinatensystem** entsteht durch

→ die Vorgabe eines festgelegten Punktes O (der „**Ursprung**")
→ zweier senkrecht aufeinander stehender **reeller Zahlengeraden**, der „Achsen", deren Nullpunkt jeweils im Punkt O liegt.
→ beide Achsen sind **gleich skaliert**

Dann gibt es zu jedem Zahlenpaar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau einen Punkt *P=(x,y)* in der Ebene und umgekehrt.

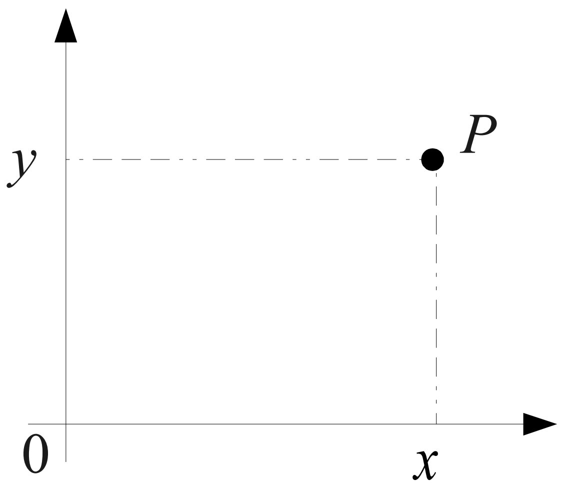
Die Menge der Punkte der Ebene ist identisch mit der Menge $\mathbb{R}^2$

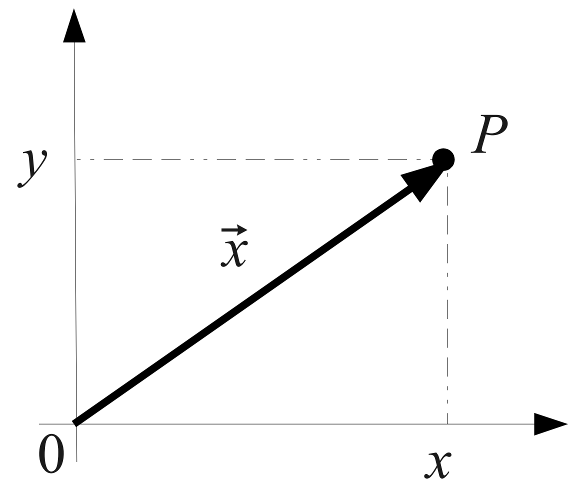
I.2 Koordinatensysteme

Ein **Vektor** in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist ein geordnetes Zahlenpaar

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

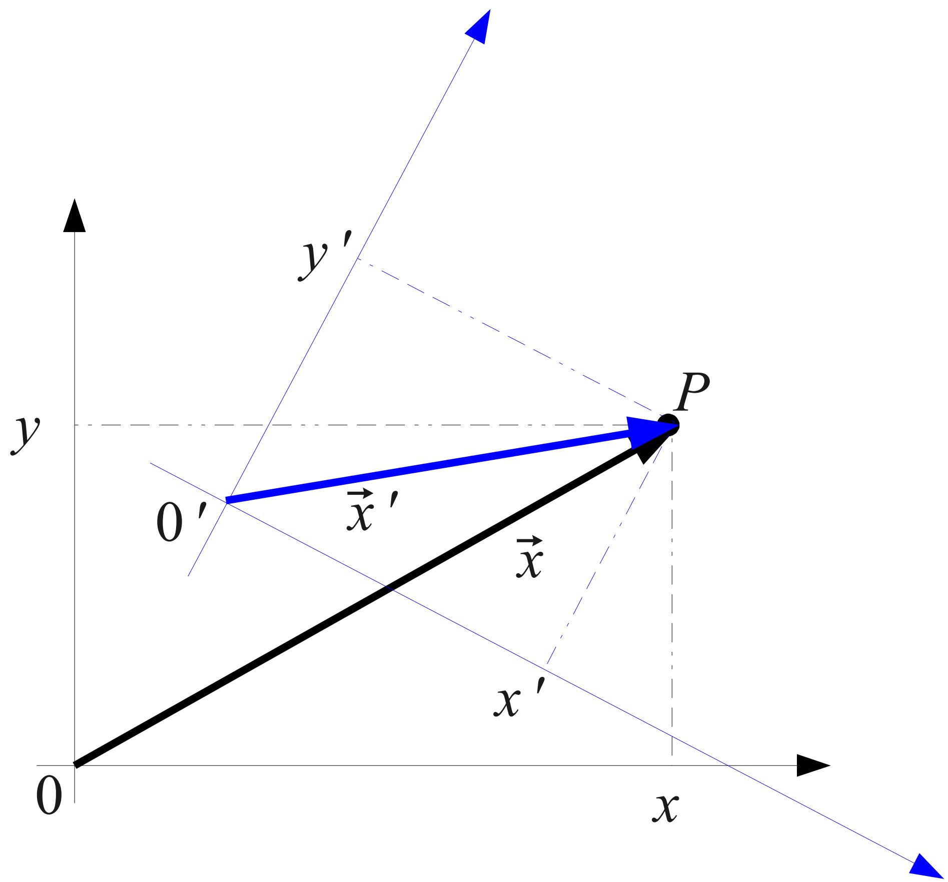
Die reellen Zahlen *x* und *y* heißen **Koordinaten** (Komponenten) von $\vec{x}$ **bezüglich des gewählten Koordinatensystems**!





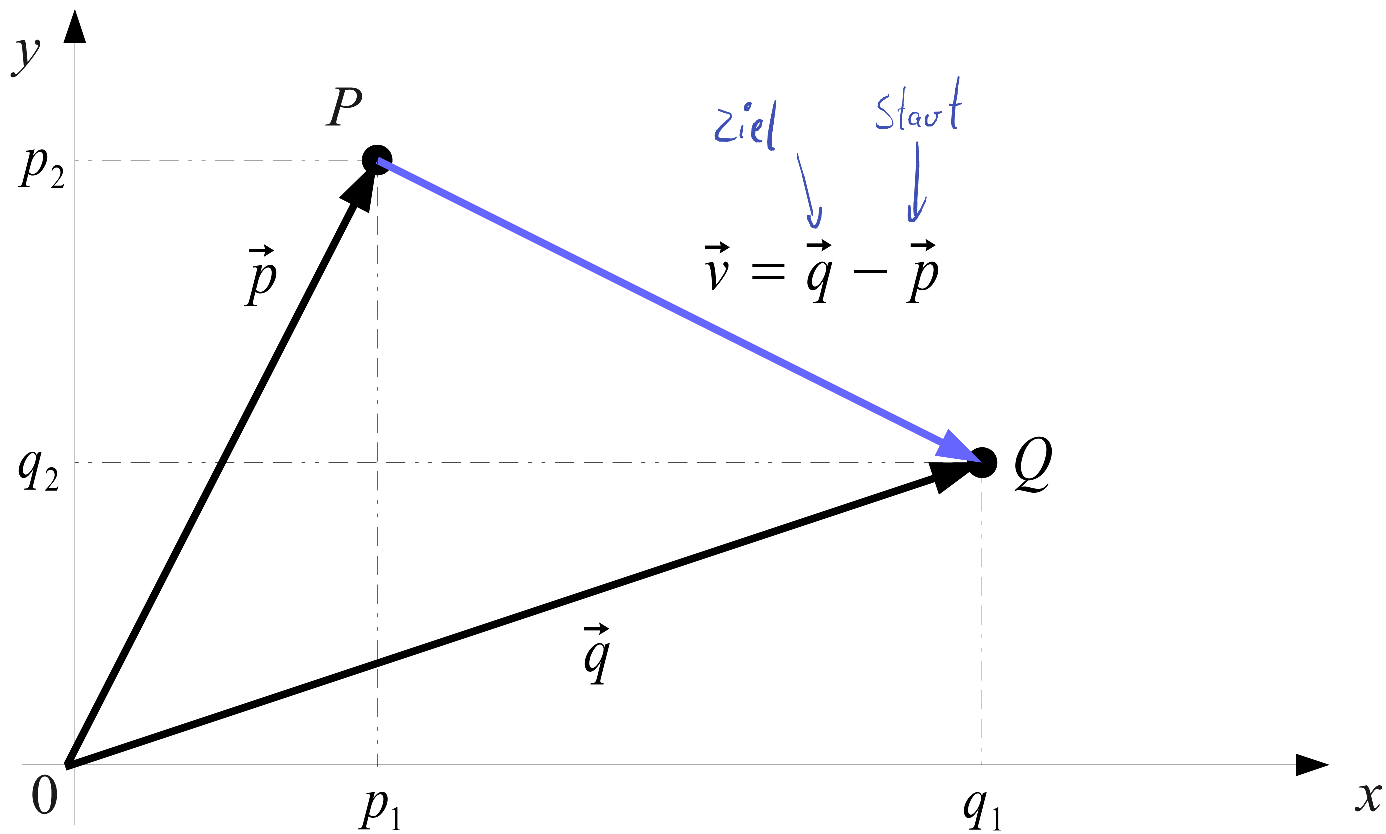
Punkt ⟷ **Ortsvektor**: Der Repräsentant des Vektors der seinen Anfang im Ursprung des KS hat!

I.2 Koordinatensysteme



Die Koordinaten eines Punktes, bzw. des zugehörigen Ortsvektors sind abhängig vom Koordinatensystem.

Allgemeiner Vektor: Differenz von 2 Ortsvektoren!



Zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

sind genau dann gleich wenn gilt $u_1 = v_{1,} \quad u_2 = v_2$
d.h. wenn alle Koordinaten zueinander entsprechend gleich sind.

Wir definieren die **Summe** der zwei Vektoren **komponentenweise**:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

Das **Produkt** einer reellen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und einem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$
wird ebenso **komponentenweise** erklärt:

$$\lambda \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$

Verallgemeinerung auf *n* Dimensionen.

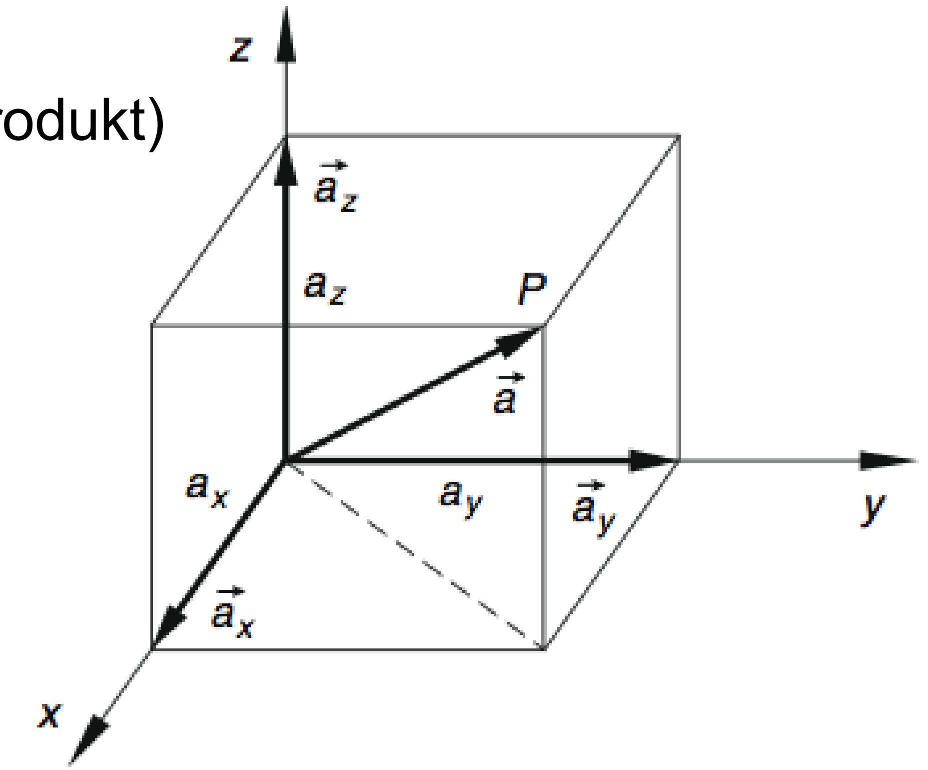
Die Menge

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n):\ x_1\in\mathbb{R},\ x_2\in\mathbb{R},\ \ldots,\ x_n\in\mathbb{R}\}$$

aller geordneten *n*-Tupel $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
heißt Produktmenge (kartesisches Produkt)

$\mathbb{R}^2$: die reelle Zahlenebene

$\mathbb{R}^3$: der 3-dimensionale Raum



I.2 Koordinatensysteme

Zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

sind genau dann gleich wenn gilt $u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$

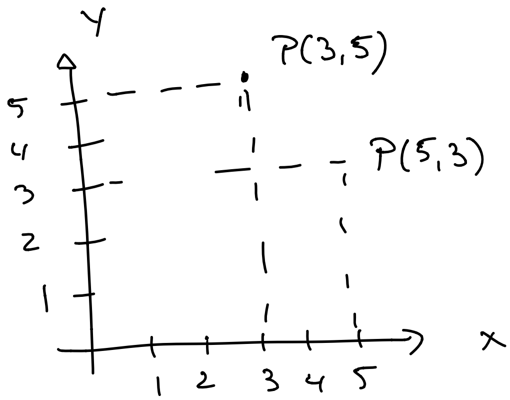
Wir definieren die **Summe** der zwei Vektoren komponentenweise:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

Das Produkt einer reelen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und einem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$
wird ebenso komponentenweise erklärt:

$$\lambda \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$$

Vorlesung 1 – Wiederholung (2018)

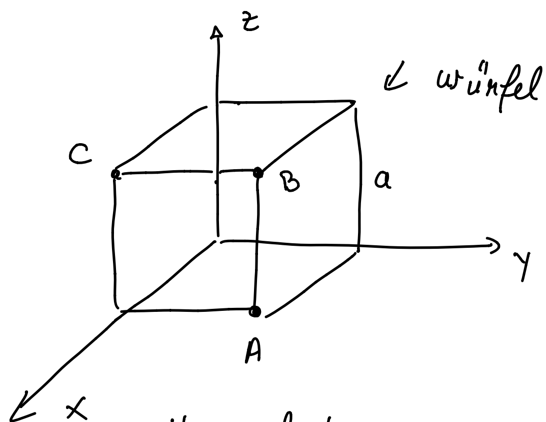


P(3,5)

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ $\quad \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$



↙ würfel.

A (a, a, 0)

B (a, a, a)

C (a, 0, a)

<u>Hausaufgabe</u>

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$-2\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$3\vec{u} - 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ -7 \end{pmatrix}$

I.2 Koordinatensysteme

Rechenregeln für Vektoren in Koordinatendarstellung:

Vektor in Koodinatendarstellung bzgl. eines rechtwinkligen Koordinatensystems

$$\Updownarrow$$

Geometrischer Vektor

$\longrightarrow$ die **gleichen Rechenregeln** wie für die geometrischen Vektoren

I.2 Koordinatensysteme

Gegeben seien $\vec{u}\,,\ \vec{v}$ und $\vec{w}\ \in \mathbb{R}^n$ sowie $k\,,\ l\ \in \mathbb{R}$

Dann gilt

1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Nullvektor (Vektor ohne Betrag)

3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

5) $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$

6) $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

7) $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$

8) $1\vec{u} = \vec{u}$

I.3 Norm

Gegeben sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

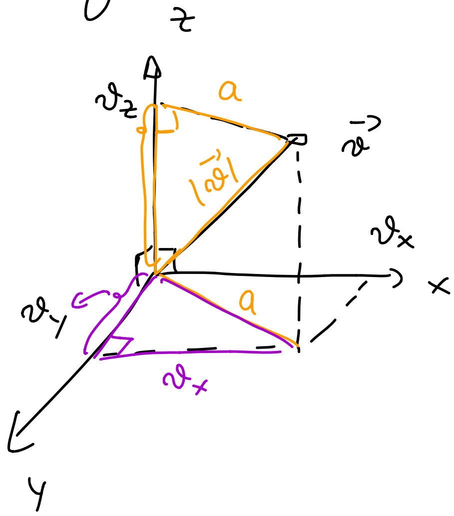
Unter der **euklidischen Norm** des Vektors $\vec{x}$ versteht man die **Zahl**

$$\boxed{|\vec{x}| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

• Zahl immer positiv

Für den anschaulichen Fall *n*=2 und *n*=3 ist die Norm die **geometrische Länge** des Vektors! Deshalb nennt man die Norm in jeder beliebigen Dimension auch einfach Länge.

Lineare Algebra #2



$$a^2 + v_z^2 = |\vec{v}|^2$$
$$a^2 = v_x^2 + v_y^2$$
$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = |\vec{v}|^2$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$$
$$\cancel{\neq \sqrt{(1)^2 - (1)^2 + (1)^2}}$$

gegeben: $\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$|\vec{a} \cdot \lambda| = \left| \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + \ldots (\lambda \cdot a_n)^2}$$
$$= \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \ldots \lambda^2 a_n^2} = \sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + \ldots a_n^2)}$$
$$= |\lambda| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2} = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

$$|\vec{e}_a| = 1$$
$$|\lambda| \cdot |\vec{a}| = 1 \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = \frac{1}{|\vec{a}|}$$
$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}.$$

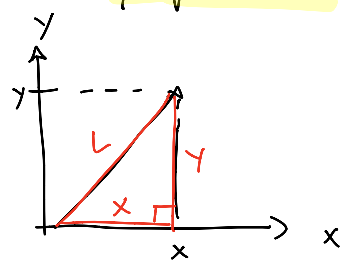
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$$

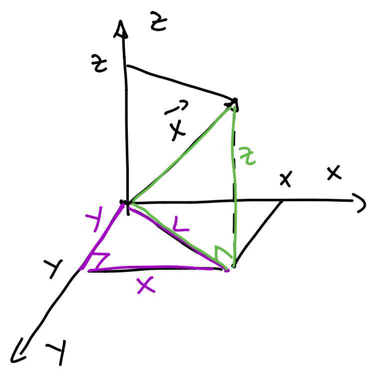
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$\neq \sqrt{-2^2 + 1^2 - 4^2}$$



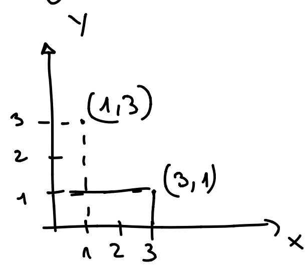
$$L^2 = x^2 + y^2$$

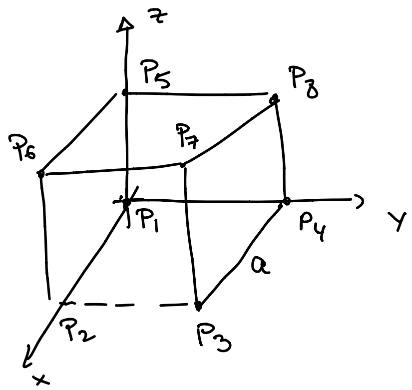


$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$|\vec{x}|^2 = L^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Grundlagen der Linearen Algebra #1.





$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{P_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_{P_3} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{P_2} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{P_8} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

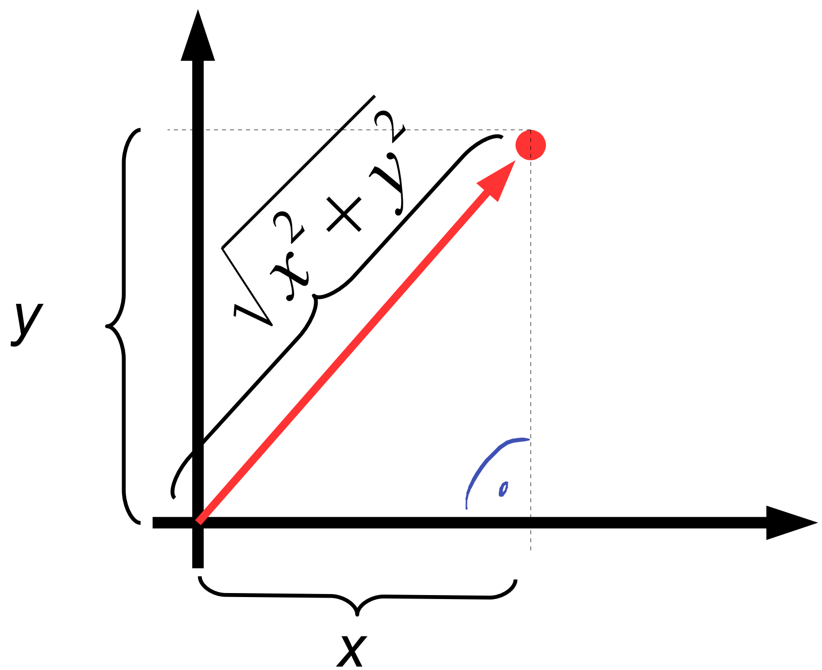
$$-2\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{u} - 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 - 2\cdot 3 \\ 3\cdot 3 - (-4)\cdot 2 \\ 3(-1) - 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ -7 \end{pmatrix}$$

I.3 Norm

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|\vec{x}| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

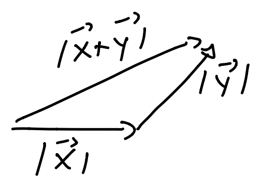


$\upuparrows$: Parallel
$\uparrow\downarrow$: Anti-Parallel
} kolinear

G.L.A #2

Gegeben seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$

$$|\vec{x}| + |\vec{y}| \geq |\vec{x} + \vec{y}|$$



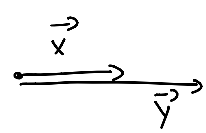
Beispiel : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{x}| = \sqrt{9+16} = 5$

$\vec{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{y}| = 5$

$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{x} + \vec{y}| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$|\vec{x}| + |\vec{y}| = 2 \cdot 5$

$|\vec{x} + \vec{y}| = \sqrt{2} \cdot 5$



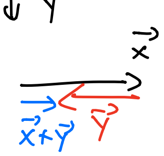
Beispiel : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{x}| = \sqrt{5}$

$\vec{y} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{y}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$|(\vec{x} + \vec{y})| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 3\sqrt{5}$

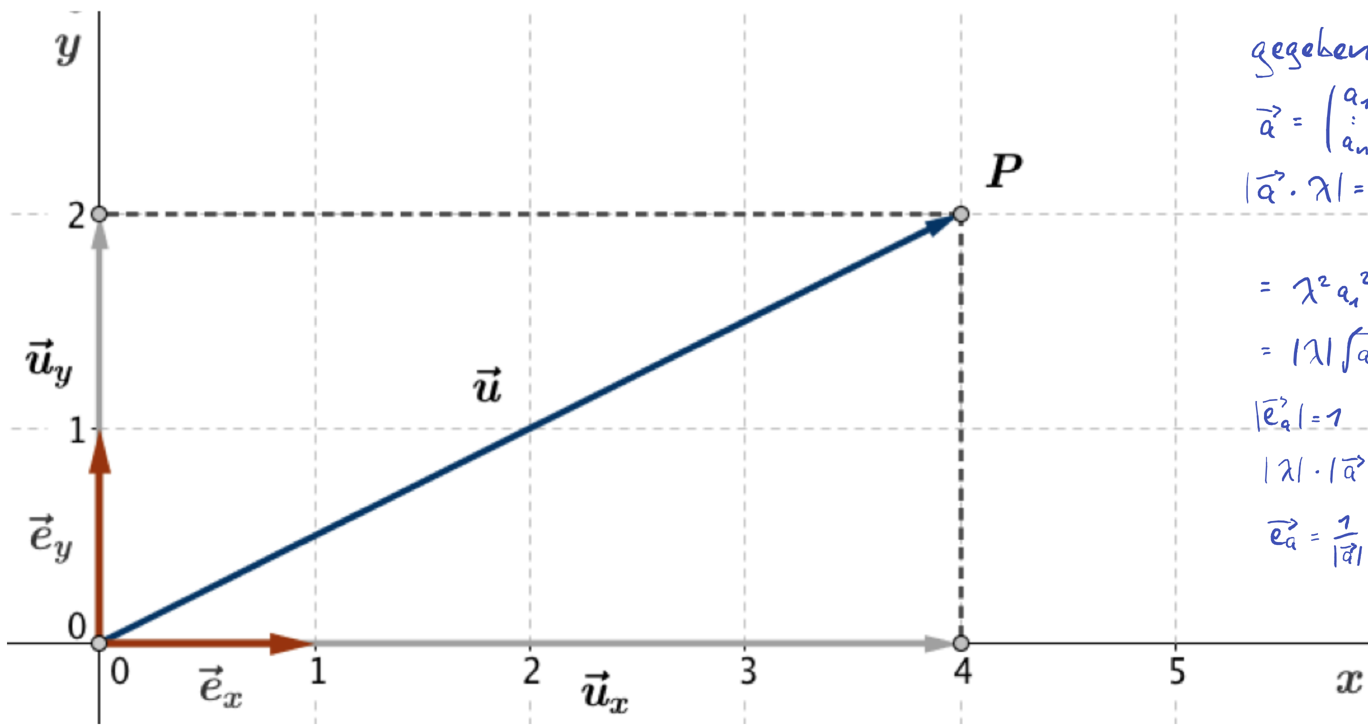
$|\vec{x}| + |\vec{y}| = |\vec{x} + \vec{y}|$ nur wenn $\vec{x} \upuparrows \vec{y}$

wenn $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$ $\Rightarrow$ $|\vec{x} + \vec{y}| = \big| |\vec{x}| - |\vec{y}| \big|$



I.3 Norm

Ein Vektor dessen Norm gleich 1 ist, nennt man **Einheitsvektor**.



gegeben: $\vec{a}$, $\lambda \in R$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \cdot \lambda| = \left| \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + \ldots}$$

$$= \lambda^2 a_1^2 + \ldots \lambda a_n^2 = \sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + \ldots a_n^2)}$$

$$= |\lambda| \sqrt{a_1^2 + \ldots a_n^2} = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

$$|\vec{e}_a| = 1$$

$$|\lambda| \cdot |\vec{a}| = 1 \Rightarrow |\lambda| = \frac{1}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{e_a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Richtungsvektoren der Koordinatenachsen:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

"Platzhalter für Richtung"

$$\vec{u} = \vec{u}_x + \vec{u}_y = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

i.A. (1) Vektor bestimmen z.B $\vec{x}+\vec{y}$

(2) Länge berechnen

Hausaufgabe : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$|\vec{a}+\vec{b}| = ?$

$|\vec{a}-\vec{b}| = ?$

Gegeben : $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|\lambda \vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(\lambda \cdot a_1)^2 + \dots (\lambda \cdot a_n)^2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 \cdot a_1^2 + \dots \lambda^2 \cdot a_n^2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + \dots a_n^2)}$$

$$= \sqrt{\lambda^2} \underbrace{\sqrt{a_1^2 + \dots a_n^2}}_{|\vec{a}|} = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

Gegeben $\vec{a} \neq \vec{0}$

Gesucht : $\lambda \in \mathbb{R}$ damit $|\lambda \cdot \vec{a}| = 1$.

Sei $\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$ $\Rightarrow$ $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$.

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Beispiel : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{21} \\ 1/\sqrt{21} \\ 4/\sqrt{21} \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{21}$

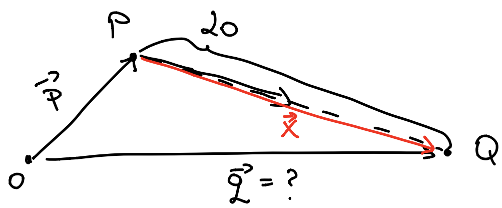
$$\vec{b} = 3 \cdot \vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 8\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_b = \frac{1}{\sqrt{89}} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Einheitsvektor, der zum $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ die entgegengesetzte Richtung hat.

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, der vom $P(3,1,5)$ im Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ um 20 Längeneinheiten entfernt liegt.



$$\vec{q} = \vec{p} + \vec{x}$$

$$|\vec{x}| = 20$$

$$\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{a}$$

$$\vec{x} = \vec{e}_a \cdot 20$$

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \frac{20}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 6\sqrt{2} \\ 1 - 10\sqrt{2} \\ 5 + 8\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$50 = 2 \cdot 25 = 2 \cdot 5^2$$

$$\sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

I.3 Norm

Ein Vektor dessen Norm gleich 1 ist, nennt man **Einheitsvektor.**

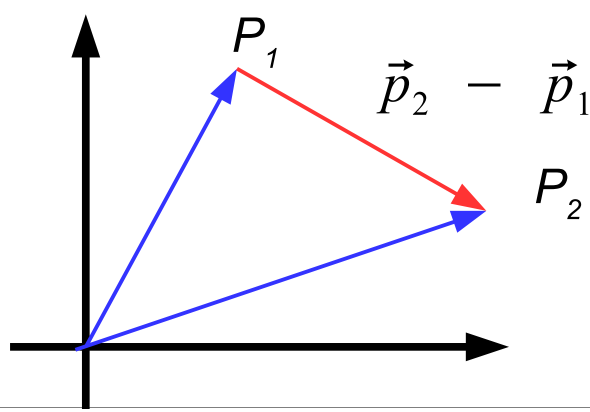
Der Abstand *d* zweier Punkte $P_1 \in \mathbb{R}^n$ und $P_2 \in \mathbb{R}^n$

ist die Norm (Länge) des Verbindungsvektors $\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$
worin $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ die Ortsvektoren der Punkte P_1 und P_2 sind

$$d(P_1, P_2) = \left|\overrightarrow{P_1 P_2}\right|$$

Speziell für zwei Punkte im 3-dimensionalen Raum $\vec{p}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad i=1,2$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



1. Summe berechnen
2. Länge berechnen

BSP.

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{v}_1 + \vec{v}_2| = \left|\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1 \\ -1+1 \end{pmatrix}\right| =$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0+1+0} = 1$

BSP. Abstand

gegeben $p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $p_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

gesucht $d(p_1 p_2) = \left|\begin{pmatrix} 3-6 \\ 3-0 \\ 3-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} = 3 = \sqrt{2}$

I.3 Skalarprodukt

Definieren das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

• gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (-4) \cdot 4$
$= -6 + 0 - 16$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Das Ergebnis ist eine **reelle Zahl**, das Skalarprodukt ist also eine Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Es gilt insbesondere **keine Kürzungsregel**!

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} \not\Rightarrow \vec{v} = \vec{u}$$

Vektoren können nicht aus Vektoren herausgekürzt werden

Skalarprodukt

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \odot \vec{b_1} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 = 3 - 2 = 1$$

$$\vec{a} \odot \vec{b_2} = 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 = 5 - 4 = 1.$$

$$\vec{a} \odot \vec{b_1} = \vec{a} \odot \vec{b_2} = 1$$

aber $\vec{b_1} \neq \vec{b_2}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \odot \vec{b} = 1 \cdot (-3) + (1) \cdot 0 + 1 \cdot 4$

$$= -3 + 4 = 1.$$

Beispiel $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} \odot \vec{x} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2$$

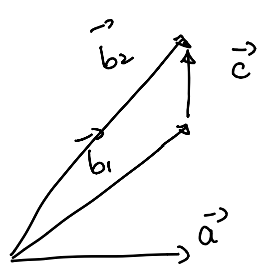
$$= 1 + 1 + 4 = 6$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \odot \vec{x}}$$

$$\vec{a} \odot \vec{b_1} = \vec{a} \odot \vec{b_2} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \odot (\vec{b_1} - \vec{b_2}) = \vec{a} \odot \vec{b_1} - \vec{a} \odot \vec{b_2} = 0$$

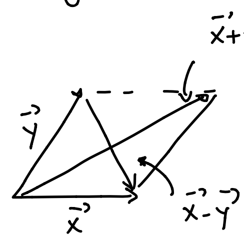
$$(\vec{b_1} - \vec{b_2}) \odot \vec{a} = 0.$$



$\vec{c} \perp \vec{a}$

Gegeben seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \odot \vec{x}}}$ $\quad |\vec{x}|^2 = \vec{x} \odot \vec{x}$

zu zeigen: $|\vec{x}+\vec{y}|^2 + |\vec{x}-\vec{y}|^2 = 2|\vec{x}|^2 + 2|\vec{y}|^2$



$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = (\vec{x}+\vec{y}) \odot (\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x} \odot (\vec{x}+\vec{y}) + \vec{y} \odot (\vec{x}+\vec{y})$$
$$= \vec{x} \odot \vec{x} + \vec{x} \odot \vec{y} + \vec{y} \odot \vec{x} + \vec{y} \odot \vec{y}$$
$$= \vec{x} \odot \vec{x} + 2\,\vec{x} \odot \vec{y} + \vec{y} \odot \vec{y}$$
$$= |\vec{x}|^2 + 2\,\vec{x} \odot \vec{y} + |\vec{y}|^2$$

$$|\vec{x}-\vec{y}|^2 = (\vec{x}-\vec{y}) \odot (\vec{x}-\vec{y}) = \vec{x} \odot (\vec{x}-\vec{y}) - \vec{y} \odot (\vec{x}-\vec{y})$$
$$= \vec{x} \odot \vec{x} - \vec{x} \odot \vec{y} - \vec{y} \odot \vec{x} + \vec{y} \odot \vec{y}$$
$$= \vec{x} \odot \vec{x} - 2\,\vec{x} \odot \vec{y} + \vec{y} \odot \vec{y}$$
$$= |\vec{x}|^2 - 2\,\vec{x} \odot \vec{y} + |\vec{y}|^2$$

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 + |\vec{x}-\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + \cancel{2\,\vec{x} \odot \vec{y}} + |\vec{y}|^2$$
$$+ \; |\vec{x}|^2 - \cancel{2\,\vec{x} \odot \vec{y}} + |\vec{y}|^2$$
$$= 2|\vec{x}|^2 + 2|\vec{y}|^2$$

$\vec{a} \odot \vec{b} = \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$

Rechenregeln des Skalarproduktes.

Sind $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (Reihenfolge egal) (Kommutativgesetz)

Skalarprodukt, immer wenn eine Multiplikation zwischen zwei Vektoren steht.

(2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (Distributivgesetz)

(3) $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$

$\vec{v} \cdot \vec{v} = v_1 \cdot v_1 + \ldots v_n \cdot v_n$
$= v_1^2 + \ldots v_n^2 = |\vec{v}|^2$

(4) $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ für $\vec{v} \neq \vec{0}$ und $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ für $\vec{v} = \vec{0}$

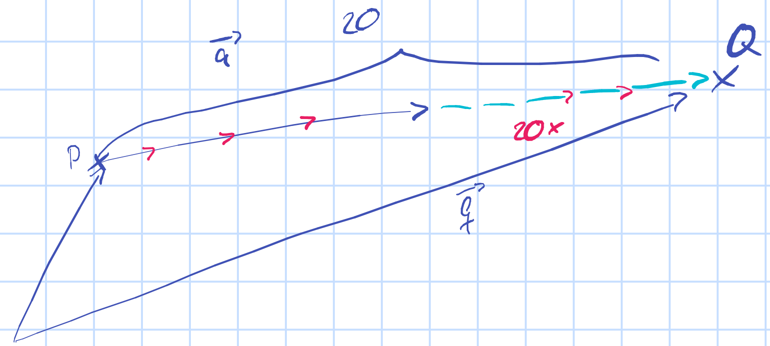
(5) $\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}}$

Beispielaufgabe:

• gegeben: $P(3,1,5)$

$$\vec a = \begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}$$

• gesucht: Q der von P in Richtung von $\vec a$ 20 Längeneinheiten entfernt liegt.



$$\vec q = \vec p + \underbrace{\frac{\vec a}{|\vec a|}}_{\vec e_a}\cdot 20$$

$$\vec q = \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{9+25+16}}\cdot 20$$

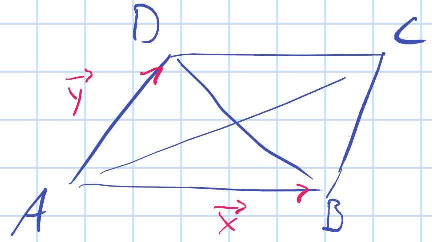
$$= \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}\cdot\frac{20}{\sqrt{50}}$$

$$= \begin{pmatrix}3+5\sqrt2\\1-10\sqrt2\\5+8\sqrt2\end{pmatrix}$$

$$\sqrt{50} = 5\sqrt2$$

$$\frac{20}{5\sqrt2} + \frac{4}{\sqrt2} = 2\sqrt2$$

Beispielaufgabe 2:



$$\underset{\vec x+\vec y}{\overset{}{AC}}{}^2 + \underset{\vec x-\vec y}{BD}{}^2 = 2\,AB^2 + 2\,AD^2$$

$$|\vec x+\vec y|^2 + |\vec x - y|^2 = 2|\vec x|^2 + 2|\vec y|^2$$

zu zeigen

$$|\vec x+\vec y| = \sqrt{(\vec x+\vec y)\cdot(\vec x+\vec y)}$$

$$\underbrace{(\vec x+\vec y)}_{\vec a}\cdot(\vec x+\vec y) + (\vec x-\vec y)\cdot(\vec x-\vec y) = 2\cdot\vec x\cdot\vec x + 2\cdot\vec y\cdot\vec y$$

$$\vec a\cdot(\vec x+\vec y) = \vec a\cdot\vec x + \vec a\cdot\vec y$$

$$(\vec x+\vec y)\vec x + (\vec x+\vec y)\cdot\vec y = \vec x\cdot\vec x + \underline{\vec y\cdot\vec x} + \vec x\cdot\vec y + \vec y\cdot\vec y$$

$$= \vec x\cdot\vec x + 2\vec x\cdot\vec y + \vec y\cdot\vec y$$

$$= |\vec x|^2 + \cancel{2\vec x\vec y} + |\vec y|^2$$

$$(\vec x-\vec y)\vec x - (\vec x-\vec y)\cdot\vec y = \vec x\cdot\vec x - \underline{\vec y\cdot\vec x} - \vec x\cdot\vec y + \vec y\cdot\vec y$$

$$= \vec x\cdot\vec x - 2\cdot\vec x\cdot\vec y + \vec y\cdot\vec y$$

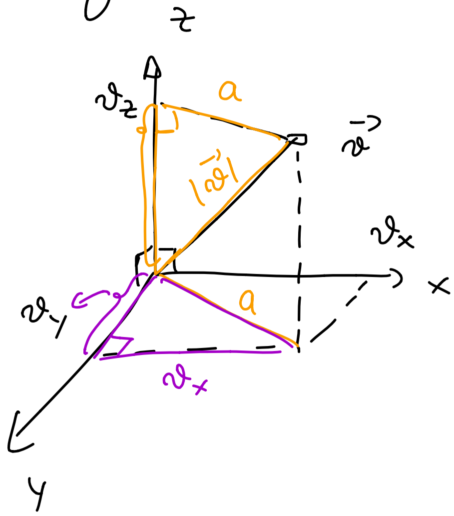
$$= |\vec x|^2 - \cancel{2\vec x\vec y} + |\vec y|^2$$

$$(\vec x+\vec y)\cdot(\vec x+\vec y) + (\vec x-\vec y)(\vec x-\vec y) = 2|\vec x|^2 + 2|\vec y|^2$$

$$|\vec x+\vec y|^2 + |\vec x-\vec y|^2 =$$

Vorlesung 2 - Wiederholung

Lineare Algebra #2



$$a^2 + v_z^2 = |\vec{v}|^2$$

$$a^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = |\vec{v}|^2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\neq \cancel{\sqrt{(1)^2 - (1)^2 + (1)^2}}$$

gegeben: $\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$|\vec{a} \cdot \lambda| = \left| \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + \dots (\lambda \cdot a_n)^2}$$

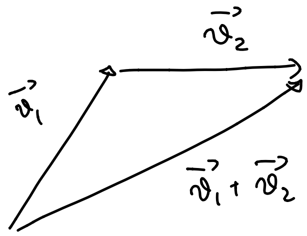
$$= \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \dots \lambda^2 a_n^2} = \sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + \dots a_n^2)}$$

$$= |\lambda| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2} = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

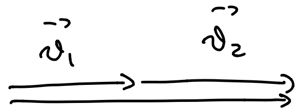
$$|\vec{e}_a| = 1$$

$$|\lambda| \cdot |\vec{a}| = 1 \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = \frac{1}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}.$$



$$|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| \geq |\vec{v}_1 + \vec{v}_2|$$



$$\leftarrow \; |\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| = |\vec{v}_1 + \vec{v}_2|$$

also: $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2|$:

1. $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ $\leftarrow$ Summe berechnen

2. $|\vec{v}|$ $\leftarrow$ Länge berechnen.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}_1 + \vec{v}_2| = \left\| \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1 \\ -1+1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad = \sqrt{0+1+0} = 1.$$

gegeben: $P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad P_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

gesucht: $d(P_1, P_2) = \left\| \begin{pmatrix} 3-6 \\ 3-0 \\ 3-3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18}$

$$= 3\sqrt{2}$$

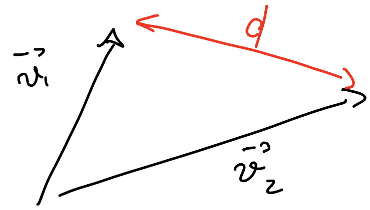
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (-4) \cdot 4$

$$= -6 + 0 - 16 = -22$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

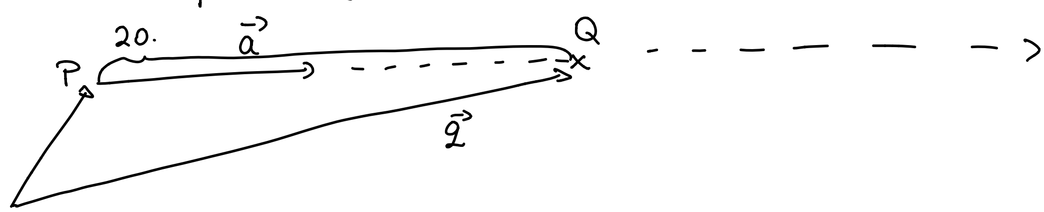
$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v_1 \cdot v_1 + \dots v_n \cdot v_n$$
$$= v_1^2 + \dots v_n^2 = |\vec{v}|^2$$



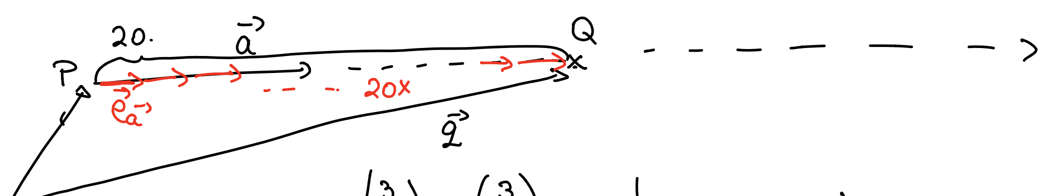
gegeben: $P(3,1,5)$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gesucht: Q der von P in Richtung von $\vec{a}$ 20 Längeneinheiten entfernt liegt.



$$\vec{q} = \vec{p} + \underbrace{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}_{\vec{e}_{\vec{a}}} \cdot 20$$



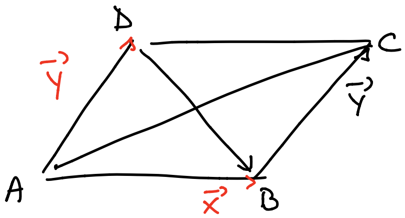
$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{9+25+16}} \cdot 20$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{20}{\sqrt{50}}$$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\frac{20}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 6\sqrt{2} \\ 1 - 10\sqrt{2} \\ 5 + 8\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



$$\underbrace{AC^2}_{\vec{x}+\vec{y}} + \underbrace{BD^2}_{\vec{x}-\vec{y}} = 2\,AB^2 + 2\,AD^2$$

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 + |\vec{x}-\vec{y}|^2 = 2\,|\vec{x}|^2 + 2|\vec{y}|^2$$

zu zeigen.

$$|\vec{x}+\vec{y}| = \sqrt{(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})}$$

$$\underbrace{(\vec{x}+\vec{y})}_{\vec{a}}\cdot(\vec{x}+\vec{y}) + (\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = 2\cdot\vec{x}\cdot\vec{x} + 2\vec{y}\cdot\vec{y}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{a}\cdot\vec{x} + \vec{a}\cdot\vec{y}$$

$$(\vec{x}+\vec{y})\vec{x} + (\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{x} + \underline{\vec{y}\cdot\vec{x}} + \underline{\vec{x}\cdot\vec{y}} + \vec{y}\cdot\vec{y}$$

$$= \vec{x}\cdot\vec{x} + 2\,\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y}$$

$$= |\vec{x}|^2 + 2\,\vec{x}\cdot\vec{y} + |\vec{y}|^2$$

$$(\vec{x}-\vec{y})\vec{x} - (\vec{x}-\vec{y})\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{x} - \underline{\vec{y}\cdot\vec{x}} - \underline{\vec{x}\cdot\vec{y}} + \vec{y}\cdot\vec{y}$$

$$= \vec{x}\cdot\vec{x} - 2\,\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y}$$

$$= |\vec{x}|^2 - 2\,\vec{x}\cdot\vec{y} + |\vec{y}|^2$$

$$(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) + (\vec{x}-\vec{y})(\vec{x}-\vec{y}) = 2|\vec{x}|^2 + 2|\vec{y}|^2$$

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 + |\vec{x}-\vec{y}|^2 =$$

Quiz

Das Skalarprodukt d. Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 9$

Die Länge (Norm, Betrag) des Vektors $2\vec{a} - \vec{b}$ ist:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \sqrt{17}$ (nicht $2\sqrt{3} - \sqrt{9}$)

- Erst Differenzvektor bilden & davon die Länge ermitteln.

Das Skalarprodukt ist:

↳ Kommutativ

↳ Nicht assoziativ

↳ Distributiv

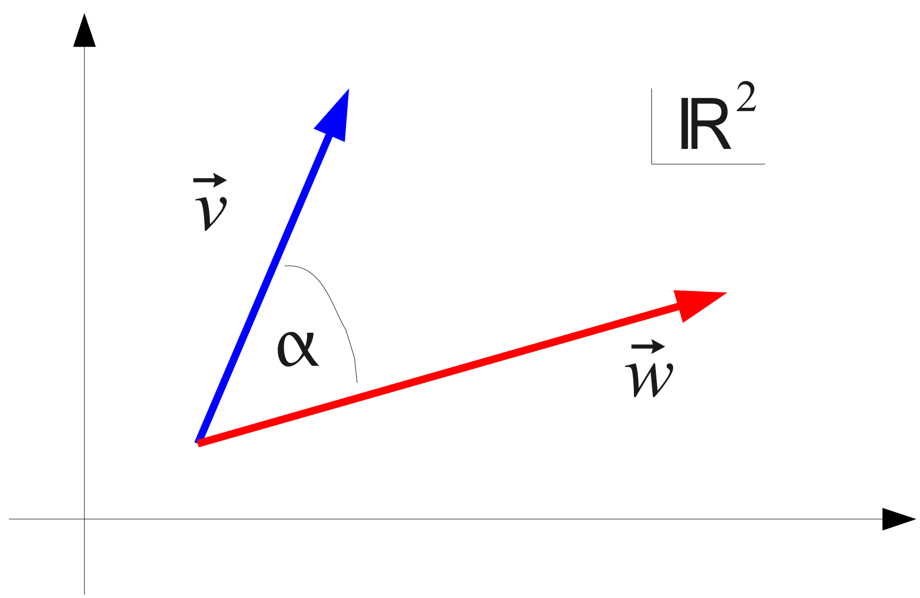
I.3 Winkel

Für zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ die bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems definiert sind gilt:

• Orthogonalität $\hat{=}$ Rechter Winkel

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos(\alpha)$$

worin α der (kleinere!) Winkel zwischen den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist



I.3 Winkel

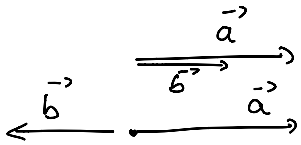
Wir definieren den **Winkel zwischen zwei Vektoren** $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

über das Skalarprodukt:

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

Zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ stehen genau dann **senkrecht aufeinander** (sind **orthogonal**), wenn ihr **Skalarprodukt verschwindet**!

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}}$$



$\alpha = 0°$ $\qquad \cos 0° = 1$

$\alpha = 180°$ $\qquad \cos 180° = -1$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha.}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-7) = -11$$

$$\cos\alpha = \frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{74}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{74}}\right)$$

$$\vec{a} = \vec{e_x} - 2\vec{e_y} + 5\vec{e_z}$$

$$\vec{b} = -\vec{e_x} - 10\vec{e_z}$$

$\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = ?$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{30}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ $\qquad |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-10)^2} = \sqrt{101}$

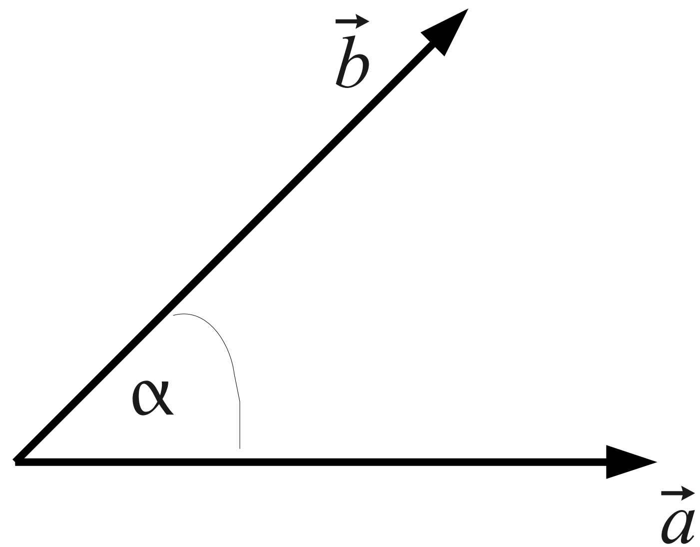
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 5 \cdot (-10) = -51$$

$$\cos\alpha = \frac{-51}{\sqrt{30 \cdot 101}}$$

Orthogonale Projektionen.

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ mit gemeinsamen Startpunkt.

"Wie viel $\vec{a}$-Anteil hat $\vec{b}$?"



I.3 Projektion

Orthogonale Projektionen.

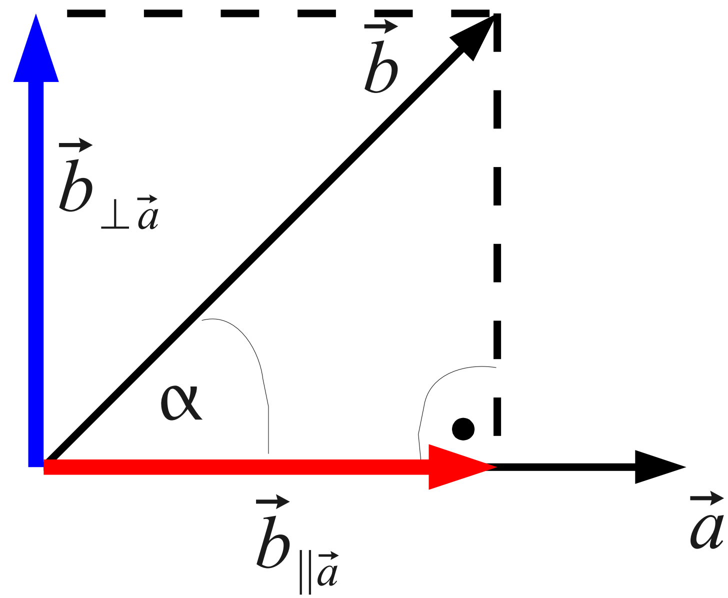
Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ mit gemeinsamen Startpunkt.

Durch fällen des Lotes vom Ende des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$ erhält man die **Komponente** des Vektors $\vec{b}$ in Richtung von $\vec{a}$

parallel

$$\vec{b}_{\|\vec{a}} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

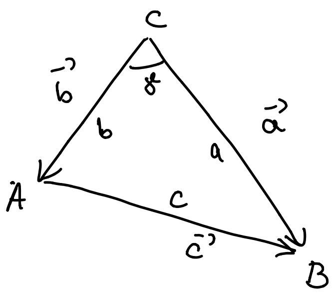
$$\vec{b}_{\|\vec{a}} + \vec{b}_{\perp a} = \vec{b}$$



Damit: **Orthogonale Zerlegung:** $\vec{b} = \vec{b}_{\|a} + \vec{b}_{\perp a}, \quad (\vec{b}_{\|a})\cdot(\vec{b}_{\perp a}) = 0$

(Herleitung auf den nächsten Seiten)

Beweis: Allgemeiner Pythagoras



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$c^2 = |\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c}$$
$$= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$
$$= \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$
$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$
$$= a^2 + b^2 - 2\, \vec{a} \cdot \vec{b}$$
$$= a^2 + b^2 - 2\, a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

falls $\gamma = 90°$, $\cos 90° = 0$ q. e. d.

$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$ (Pythagoras)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

$k = ?$ damit $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$$
$$\cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = 0$$
$$\underline{\vec{a} \cdot \vec{b}} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\sphericalangle \vec{a}, \vec{b}) \overset{!}{=} 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + k \cdot 1 + 2 \cdot k$$
$$= 3 + 3k \overset{!}{=} 0$$
$$k = -1.$$

für welchen Wert von k ist die Länge $\vec{a} - 2\vec{b}$ gleich 3.

$$\vec{a} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ k-2 \\ 2-2k \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{1 + (k-2)^2 + (2-2k)^2} \overset{!}{=} 3$$

$$1 + (k-2)^2 + (2-2k)^2 = 9$$

$$-12k + 5k^2 = 0$$

$$k(-12 + 5k) = 0$$

$\nearrow$ $k = 0$

$\searrow$ $k = \frac{12}{5}$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

gibt es einem Wert von k damit $\vec{a} \parallel \vec{b}$?

$$|\cos \alpha| = 1$$

$$= \left| \frac{3k+5}{\sqrt{4+9+k^2}\sqrt{1+9+1}} \right| = 1.$$

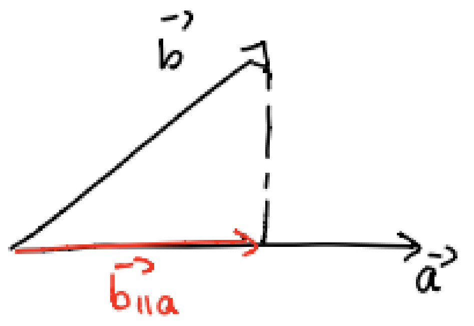
$$\frac{(3k+5)^2}{(13+k^2) \cdot 11} = 1$$

$$(3k+5)^2 = 11(13+k^2)$$

$$9k^2 + 30k + 25 - 11k^2 - 143 = 0.$$

$\rightarrow$ Keine reele Lösung.

Herleitung d. orthogonalen Zerlegung



$\vec{b}_{\parallel a} \parallel \vec{a}$

$\boxed{\vec{b}_{\parallel a} = \lambda \cdot \vec{a}}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

gesucht: λ so dass

$\boxed{\vec{b}_{\parallel a} + \vec{b}_{\perp a} = \vec{b}}$ $\leftarrow$

$\vec{b}_{\perp a} \perp \vec{a}$

$$\vec{b}_{\parallel a} + \vec{b}_{\perp a} = \vec{b} \quad | \cdot \vec{a}$$

$$\vec{b}_{\parallel a} \cdot \vec{a} + 0 = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\lambda (\vec{a} \cdot \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$

$$\vec{b}_{\parallel a} = \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right) \cdot \vec{a} \quad \neq \quad \vec{b} \cdot \left(\underbrace{\frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}}_{1}\right)$$

$$= \left(\vec{b} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right) \cdot \underbrace{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}_{\vec{e}_{\vec{a}}} \quad = \left(\vec{b} \cdot \vec{e}_a\right) \cdot \vec{e}_a$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_{\parallel a} = ? \quad \vec{b}_{\perp a} = ?$$

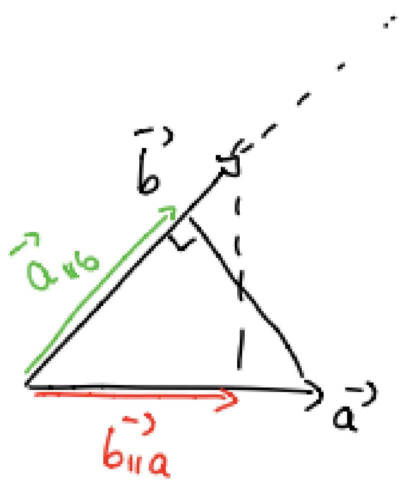
$\boxed{\vec{b}_{\parallel a} + \vec{b}_{\perp a} = \vec{b}}$ $\quad \Rightarrow \quad \vec{b}_{\perp a} = \vec{b} - \vec{b}_{\parallel a}$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = -4 - 10 = -14$$

$$|\vec{a}|^2 = 4 + 4 + 1 = 9$$

$$\vec{b}_{\parallel a} = \left(-\frac{14}{9}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_{\perp a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(-\frac{14}{9}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{a}_{\parallel b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{b}_{\parallel a} = \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right) \cdot \vec{a}$$

<u>Hausaufgabe</u> ① Sei ΔABC und M Mittelpunkt des Umkreises zu ΔABC

Zeigen Sie: falls $M \in [AB]$ dann $\gamma = 90°$

$$\vec{b}_{\parallel a} = \left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right)\cdot\vec{a} \neq \vec{b}\cdot\underbrace{\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)}_{1}$$

$$= \left(\vec{b}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)\cdot\underbrace{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}_{\vec{e}_{\vec{a}}} = (\vec{b}\cdot\vec{e}_a)\cdot\vec{e}_a$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{b}_{\parallel a} = ? \quad \vec{b}_{\perp a} = ?$$

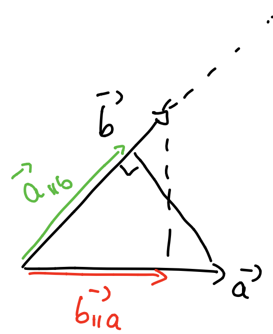
$$\boxed{\vec{b}_{\parallel a} + \vec{b}_{\perp a} = \vec{b}} \quad \Rightarrow \quad \vec{b}_{\perp a} = \vec{b} - \vec{b}_{\parallel a}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = -4-10 = -14$$

$$|\vec{a}|^2 = 4+4+1 = 9$$

$$\vec{b}_{\parallel a} = \left(-\frac{14}{9}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_{\perp a} = \begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix} - \left(\frac{-14}{9}\right)\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

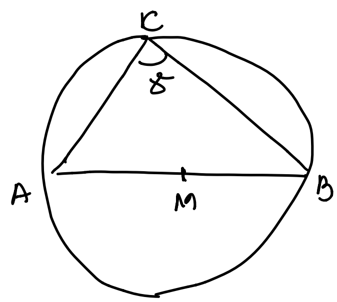


$$\vec{a}_{\parallel b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{b}_{\parallel a} = \left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right)\cdot\vec{a}$$

<u>Hausaufgabe</u> ① Sei ΔABC und M Mittelpunkt des Umkreises zu ΔABC

Zeigen Sie: falls $M \in [AB]$ dann $\gamma = 90°$



(2) Zeigen Sie: wenn ein Parallelogramm gleich lange Seiten hat dann sind die Diagonalen orthogonal.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}}$$

Quiz: 04.05.18

- Die Komponente d. Vektors $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{b}$ ist: $|\vec{a}|$
- Gegeben seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{a} \cdot (-2\vec{b}) = 0$. Denn es gilt: $\vec{a} \perp \vec{b}$ oder $\vec{a} = 0$ oder $\vec{b} = 0$
- Gegeben seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $a = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Dann gilt: $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

I.3 Kreuzprodukt

Speziell für dreidimensionale Vektoren führt man ein weiteres Produkt ein. **Das Kreuzprodukt**.

Für $\vec{a}\,,\,\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ definiert man: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

mit den Eigenschaften:

(1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

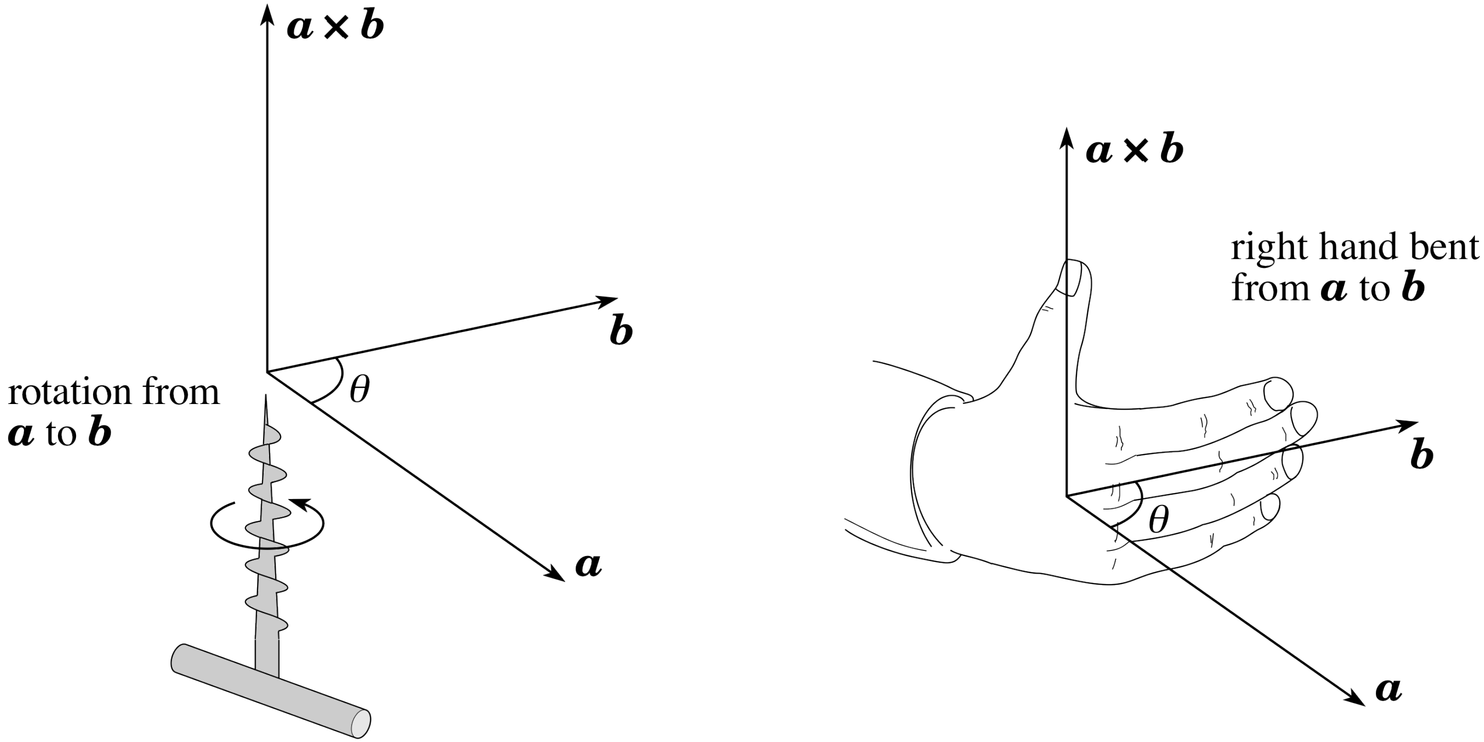
(2) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\alpha), \quad \alpha = \sphericalangle(\vec{a}\,,\vec{b})$

(3) Die Vektoren $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein **rechtshändiges System**

I.3 Kreuzprodukt

Speziell für dreidimensionale Vektoren führt man ein weiteres Produkt ein. **Das Kreuzprodukt**.

Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ definiert man: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$



(a) (b)

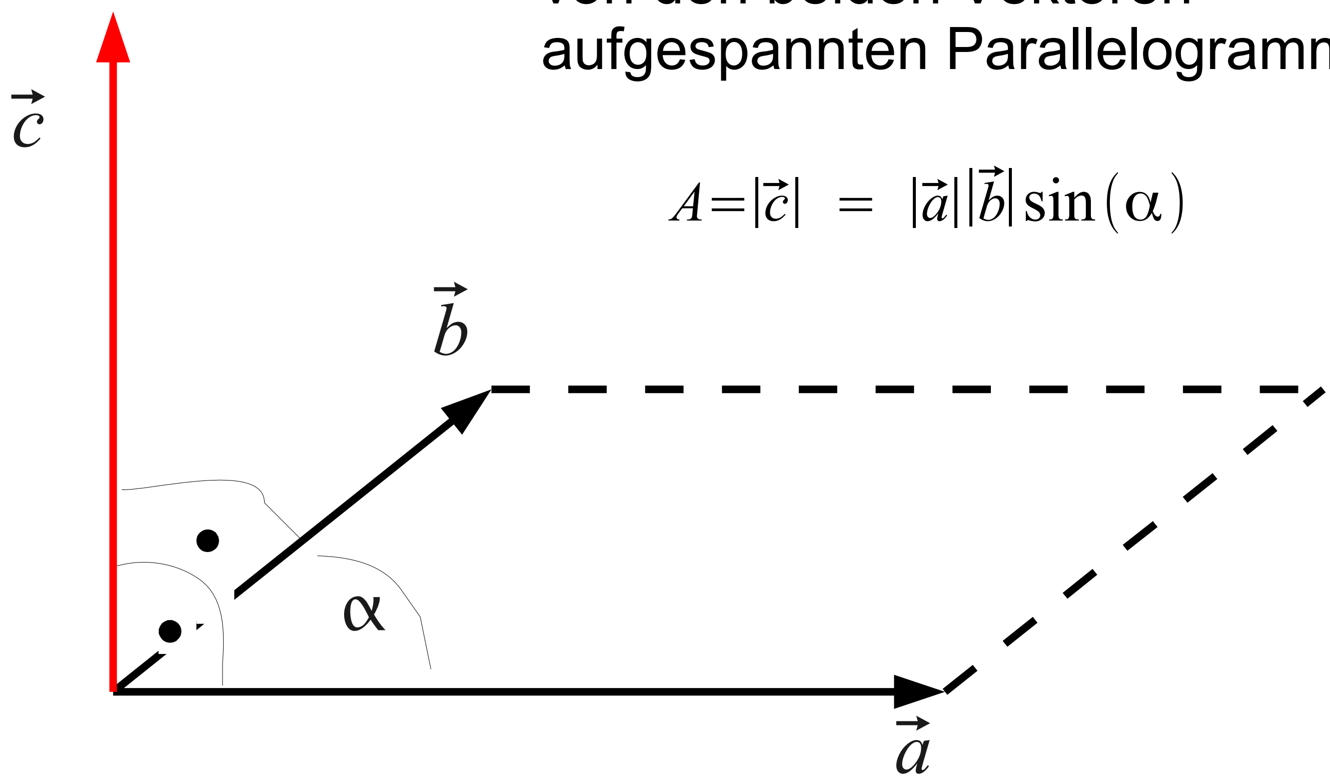
(3) Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges System

I.3 Kreuzprodukt

Speziell für dreidimensionale Vektoren führt man ein weiteres Produkt ein. **Das Kreuzprodukt**.

Geometrisch: **Flächeninhalt** des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms:

$$A = |\vec{c}| \;=\; |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\alpha)$$



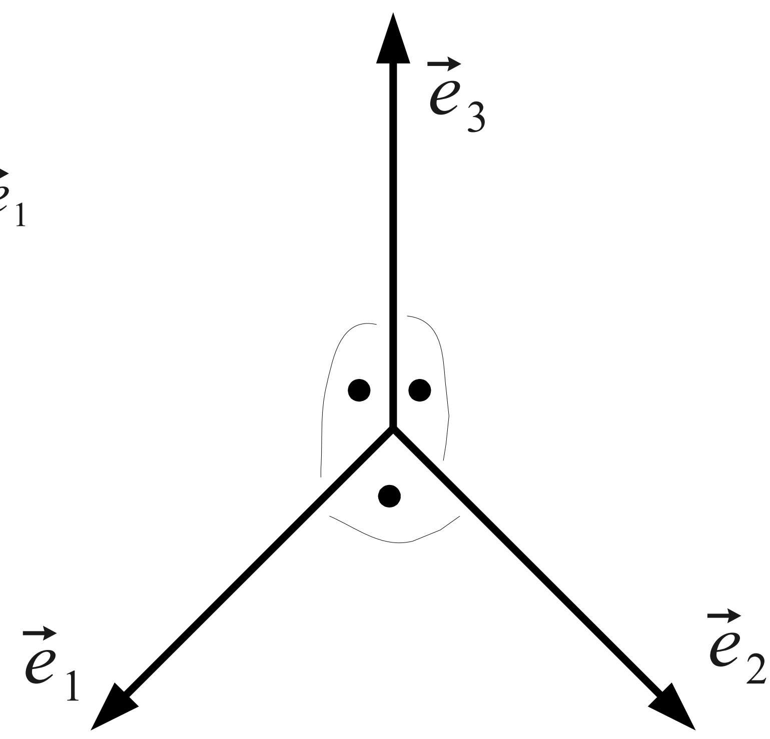
Koordinatenform des Kreuzproduktes.

Für paarweise orthogonale Einheitsvektoren in 3D $\vec{e}_k, \quad k=1,2,3$ mit

$$\|\vec{e}_i\| = 1, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

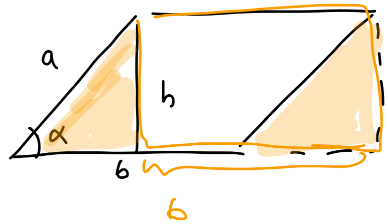
gilt: $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$



Daraus:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$



$b \cdot h$

$h = a \cdot \sin\alpha.$

$A = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2 b_3 - a_3 b_2\\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 b_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} a_1 & - & b_1 \\ a_2 & + & b_2 \\ a_3 & & b_3 \\ a_1 & & b_1 \end{array}$$

$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\4\\-6\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ 4 & & -1 \\ -6 & - & 2 \\ 1 & + & 2 \end{array}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}8 - 6\\ -12 - 2 \\ -1 - 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-14\\-9\end{pmatrix} = \vec{c}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-14\\-9\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\-6\end{pmatrix} = 2 - 4 \cdot 14 + 9 \cdot 6. = 0 \checkmark$$

(Zum Testen d. Rechnung)

gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$

gesucht: alle Vektoren die gleichzeitig orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen.

a) Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}2 - 3\\ -9 - 1 \\ -1 - 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-10\\-7\end{pmatrix} \qquad \mathcal{L} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1\\-10\\-7\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ $\qquad \left\{ \begin{array}{l} \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \end{array} \right.$

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(1) $\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}}$ (**Anti**-Kommutativität)

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (**Anti**-Kommutativität)

(2) $\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})}$ (Distributivität I)

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$ (Distributivität II)

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (**Anti**-Kommutativität)

(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ (Distributivität I)

(3) $\boxed{(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})}$ (Distributivität II)

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (**Anti**-Kommutativität)

(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ (Distributivität I)

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$ (Distributivität II)

(4) $\boxed{\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})}$

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (**Anti**-Kommutativität)

(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ (Distributivität I)

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$ (Distributivität II)

(4) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

(5) $\boxed{(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{b} = 0}$

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

Hand-/Kugelschreiber-Regel

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (**Anti**-Kommutativität)

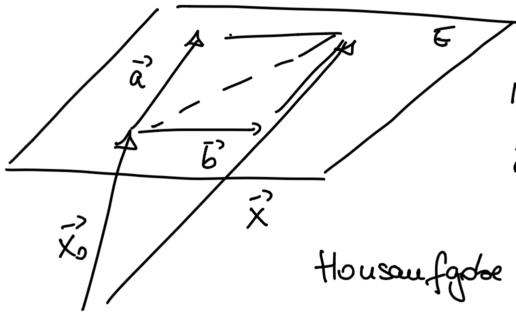
(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ (Distributivität I)

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$ (Distributivität II)

(4) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

(5) $(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{b} = 0$

(6) $\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})}$ (**nicht** assoziativ!)



$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$

Normalenvektor zu E

$$\vec{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$ ← Einheitsvektor.

Hausaufgabe: $\vec{n}$ bestimmen wenn

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} a_1 & - & b_1 \\ a_2 & + & b_2 \\ a_3 & & b_3 \\ a_1 & & b_1 \end{array}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

gesucht: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -32 - 14 \\ 7 + 24 \\ 6 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -46 \\ 31 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -46 \\ 31 \\ 2 \end{pmatrix} = 46 + 31 - 2 = 75$$

$$\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 7 & -8 \\ 3 & 1 \end{array}$$

A(1, −2, 3)

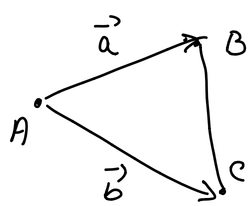
B(2, 2, 4)

C(−1, 0, 0)

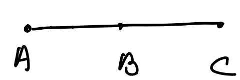
S(2, 3, 9)

Zeigen Sie: a) A, B, C bilden ein Dreieck

b) S liegt nicht in der von A, B, C festgelegten Ebene.

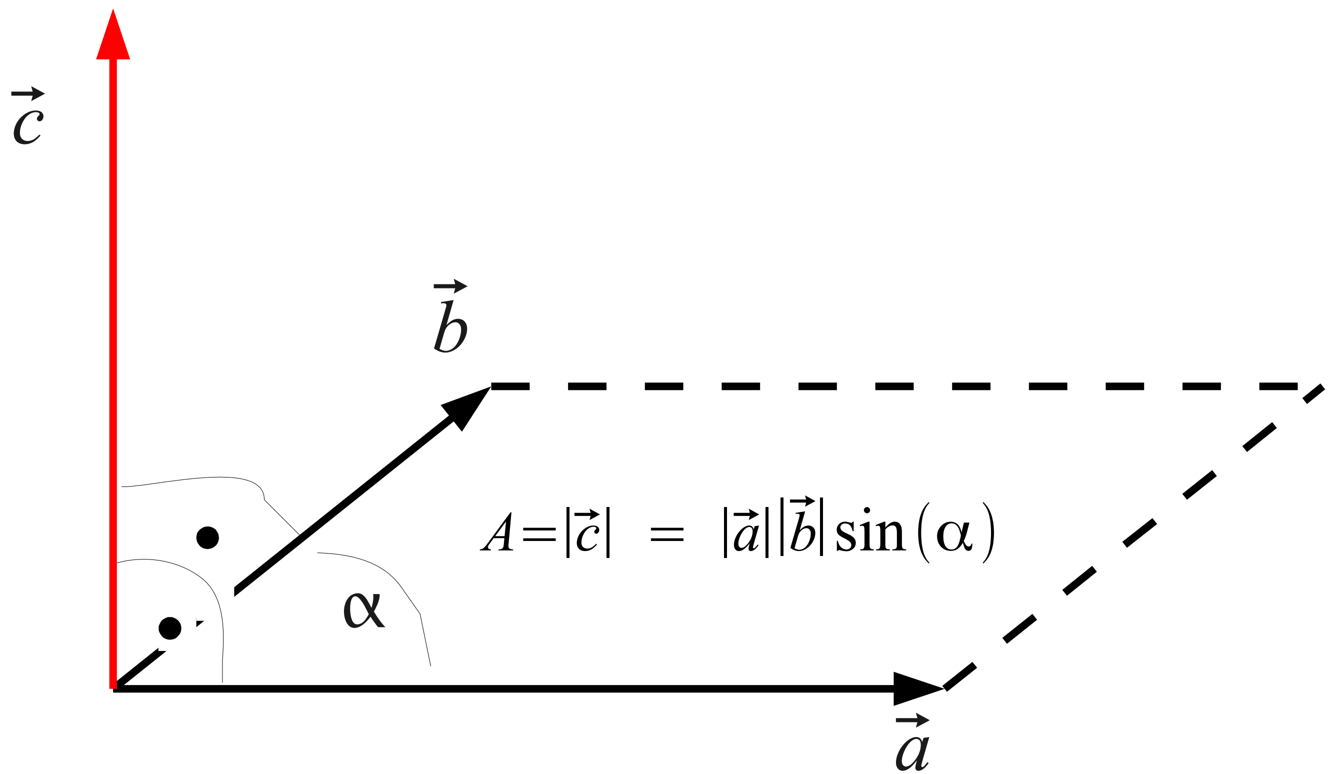


vs.



Kriterium für kollineare Vektoren

Zwei (vom Nullvektor verschiedene) Vektoren sind genau dann kollinear wenn ihr Kreuzprodukt verschwindet. (bzw. $\vec{a}$ & $\vec{b}$ sind parallel)



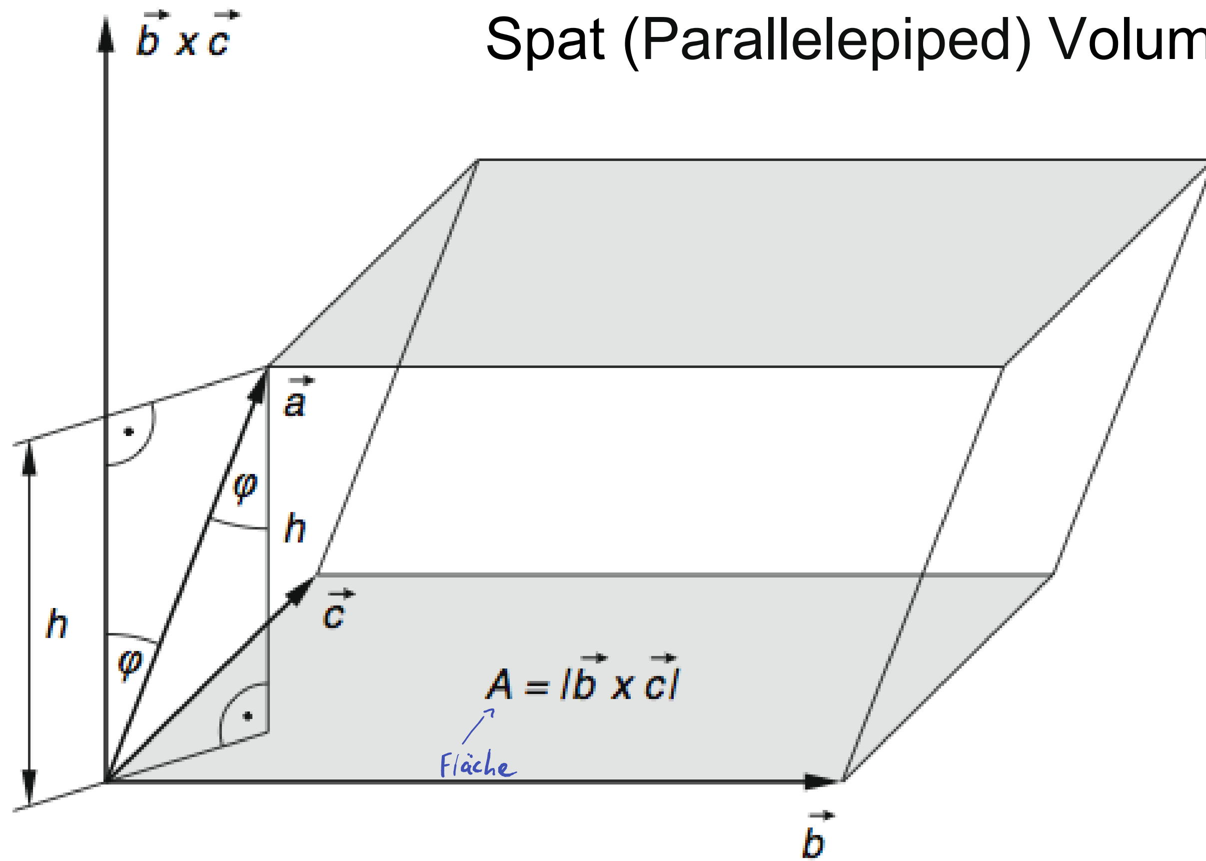
Spatprodukt (gemischtes Produkt)

Spatprodukt dreier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$
→ skalare Größe, reelle Zahl.

Geometrische Bedeutung:

Spat (Parallelepiped) Volumen

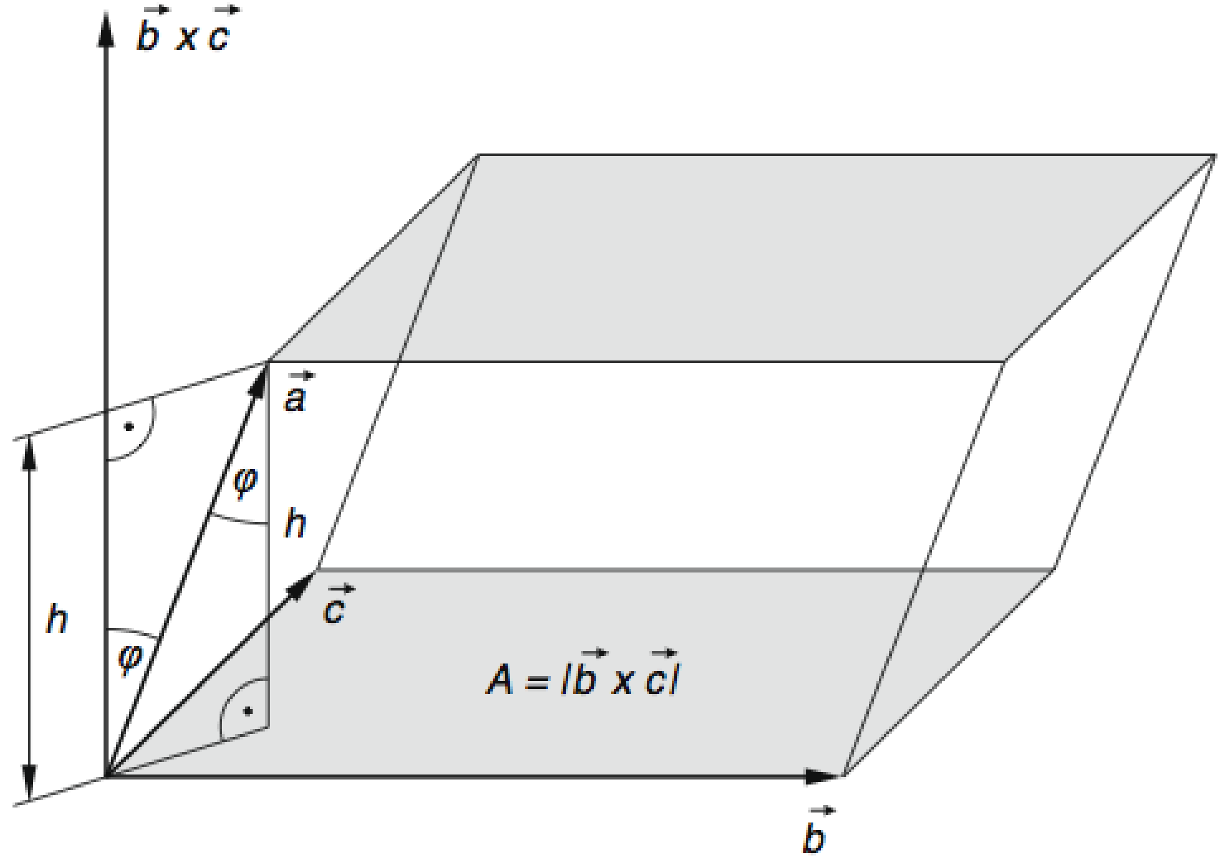
$$\boxed{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}$$



Spatprodukt (gemischtes Produkt)

Kriterium für koplanare Vektoren :drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann koplanar wenn deren Spatprodukt verschwindet

Wenn das Volumen null wird.



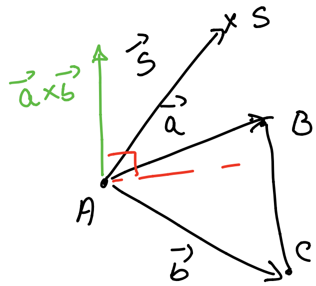
$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\nexists \lambda$ so dass $\vec{AB} = \lambda \cdot \vec{AC}$

$$\begin{cases} 1 = \lambda \cdot (-2) & \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \\ 4 = \lambda \cdot 2 & \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \\ 1 = \lambda \cdot (-3) & \end{cases}$$

-> Widerspruch.

Hausaufgabe : prüfen $\vec{AB} \times \vec{AC} \neq \vec{0}$



$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{s} \overset{?}{=} 0$ ← Hausaufgabe

$\vec{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Übung
1. Einfaches Spatprod.
2. Dreieck (a) & b))

1. - Zuerst beweisen, dass die Punkte nicht auf einer Linie liegen.

zwei Möglk.
- ↳ Prüfen ob Vektor $\vec{AB}$ & $\vec{AC}$ Vielfache voneinder sind.
- ↳ Prüfen ob $\vec{AB} \times \vec{AC} \neq \vec{0}$

2. $\vec{s}$ soll nicht senkrecht zum Spatprodukt liegen.

Quiz: 28.05.18

1. Gegeben seien $\vec{a}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ & $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. Das Kreuzprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$ ist: • $\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$
2. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel. Dann: • $\vec{a}_{\parallel \vec{b}} = \vec{a}$
3. Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ & $\vec{c}$ sind nicht coplanar (in einer Ebene) Dann: • $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) \neq 0$ außerdem $(\vec{a}\times\vec{b}) \perp \vec{b}$

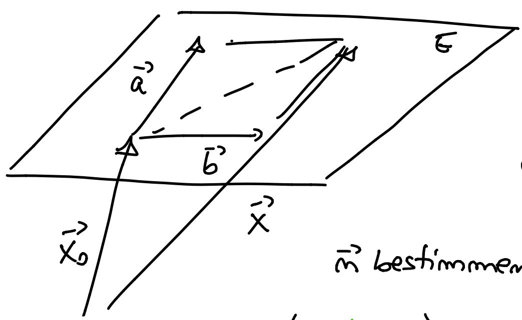
Beispielklausuraufgabe:

• Gegeben sind $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{a}=\begin{pmatrix}2k\\1\\k\end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}k\\-1\\4\end{pmatrix}$
mit d. Parameter $k \in \mathbb{R}$

1) Für welchen Wert von k sind die Vektoren $\vec{a}$ & $\vec{b}$ orthogonal?
2) Bestimmen Sie für $k=1$

(1) $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2k^2 - 1 + 4k \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow k = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ (2p)



$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

Normalenvektor zu E

$$\vec{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \quad \leftarrow \text{Einheitsvektor.}$$

$\vec{n}$ bestimmen wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

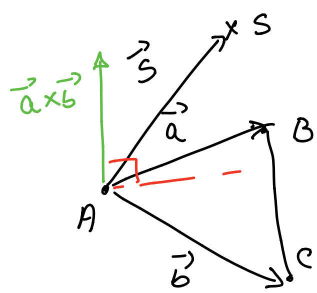
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

A(1, −2, 3)

B(2, 2, 4)

C(−1, 0, 0)

S(2, 3, 9)



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: $\vec{AB} \times \vec{AC} \neq \vec{0}$

S liegt nicht in der von A, B, C festgelegten Ebene.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{s} \neq 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{array}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 51 \neq 0 \quad ✓$$

Aufgabe 1

Gegeben sind $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2k \\ 1 \\ k \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

1. Für welchen Wert von k sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal?
2. Bestimmen Sie für $k = 1$ die Länge des Vektors $\vec{a} + 2\vec{b}$.
3. Bestimmen Sie für $k = 1$ den Winkel $\angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$.
4. Für welche Werte von k ist die Länge von $\vec{a} + \vec{b}$ gleich 4?

1

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2k^2 - 1 + 4k \overset{!}{=} 0 \Rightarrow k = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(2P)

2

$$\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 1 + 9^2} = 7\sqrt{2}$$

(2P)

3

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{-12}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{12}{2\sqrt{119}}$$

(3P)

$$\alpha = 123{,}3^\circ$$

4

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3k \\ 0 \\ 4+k \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{9k^2 + (4+k)^2} \overset{!}{=} 4$$

$$9k^2 + (4+k)^2 = 16$$

$$9k^2 + \cancel{16} + k^2 + 8k = \cancel{16}$$

$$10k^2 + 8k = 0$$

$\nearrow k = 0$

$\searrow k = -\frac{4}{5}$

(3P)