FH MÜNSTER
University of Applied Sciences

ETI
FB Elektrotechnik und Informatik
Department of Electrical Engineering
and Computer Science

Mathematik 1

Mitschrift

Frederik Sicking

Modul: **Mathematik 1**

Prof. Dr. Gernot Bauer

Wintersemester 2022 / 2023

Stand: Freitag, 11.11.2022

Frederik Sicking

frederik.sicking@fh-muenster.de

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Aussagelogik

Im Unterschied zur Umgangssprache benutzt die Mathematik eine sehr präzise Sprechweise, die wir hier einführen wollen.

1.1.1 Aussagen

Sachverhalte der Realität werden in Form von Aussagen erfasst.

Definition 1.1: Aussage

> Unter einer <u>Aussage</u> versteht man ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch sein kann.

Beispiele:

		ist Aussage
1)	5 ist kleiner als 3.	ja
2)	Kiew ist die Hauptstadt der Ukraine.	ja
3)	Das Studium der Mathematik ist schwierig.	ja
4)	Nach dem Essen Zähne putzen!	nein
5)	Nachts ist es kälter als draußen.	nein

Die Werte <u>wahr</u> und <u>falsch</u> heißen Warheitswerte. Jede Aussage hat genau einen dieser beiden Warheitswerte. Das heißt aber nicht, dass der Warheitswert auch bekannt ist.

Beispiele: Fortsetzung

		ist Aussage
6)	Der Sommer 2023 wird erneut der heißeste in Europa seit Beginn der Aufzeichnungen.	ja
7)	Jede gerade Zahl größer 2 ist Summe zweier Primzahlen. (Goldbachsche Vermutung)	ja

Bemerkung:

Eine Aussage, die einen mathematischen Sachverhalt beschreibt und wahr ist, wird als <u>Satz</u> bezeichnet.

1.1.2 Verknüpfung von Aussagen

Im folgenden Stehen lateinische Großbuchstaben $A, B, C, \ldots$ als Platzhalter (Variablen) für Aussagen.

1.1.2.1 Die „und"-Verknüpfung (Konjugation)

Eine zusammengesetzte Aussage der Form

$$A \text{ und } B \qquad \text{(Kurzbezeichnung: } A \wedge B\text{)}$$

ist wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. Andernfalls ist sie falsch.

Der Warheitswert der zusammengesetzten Aussage in Abhängigkeit von A und B kann durch folgende <u>Verknüpfungstabelle</u> (oder <u>Wahrheitstafel</u>) ausgedrückt werden. (w für wahr, f für falsch)

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beispiel: „und“

A : 7 ist ungerade. (wahr)

B : 17 < 4 (falsch)

C : Für alle reellen Zahlen x gilt: $x^2 \geq 0$ (wahr)

Die Aussage „7 ist ungerade und 17 < 4“ ($A \wedge B$) ist falsch. Die Aussage $A \wedge C$ ist wahr.

1.1.2.2 Die „oder“-Verknüpfung (Alternative, Disjunktion)

Eine zusammengesetzte Aussage der Form

$$A \text{ oder } B \qquad \text{(Kurzbezeichnung: } A \vee B\text{)}$$

ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. Sind beide Aussagen falsch, dann ist auch die zusammengesetzte Aussage $A \vee B$ falsch. Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beispiel: „oder“

A : Allerheiligen ist am 1.11. (wahr)

B : Die Erde ist eine Scheibe. (falsch)

C : Heute ist Montag. (wahr/falsch je nach Wochentag)

Die Aussage „Allerheiligen ist am 1.11. oder die Erde ist eine Scheibe“ ($A \vee B$) ist wahr, die Aussage $A \vee C$ ist ebenfalls immer wahr. $B \vee C$ ist dagegen nur an einem Montag wahr, sonst falsch.

Bemerkung:

Im Alltagssprachgebrauch trifft man häufig auf die Verknüpfung von Aussagen mit „und/oder“, etwa „Ich komme heute und/oder morgen“. Mathematisch ist das nicht sinnvoll, ein einfaches „oder“ drückt den Sachverhalt bereits treffend aus.

1.1.2.3 Die Negation („nicht“)

Eine Aussage der Form

$$\text{nicht } A \qquad \text{(Kurzbezeichnung: } \neg A\text{)}$$

ist wahr, wenn A falsch ist. Sie ist falsch, wenn A wahr ist. Die Aussage $\neg A$ heißt die <u>Negation</u> von A. Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Die Negation (oder Verneinung) kehrt den Warheitswert einer Aussage um.

1.1.2.4 Die „wenn-dann“-Verknüpfung (Implikation, Schlussfolgerung)

Eine zusammengesetzte Aussage der Form

$$A \text{ impliziert } B \qquad \text{(Kurzbezeichnung: } A \implies B\text{)}$$

ist falsch, falls A wahr und B falsch ist. Andernfalls ist sie wahr. Wahrheitstafel:

A	B	$A \implies B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Weitere übliche Sprechweisen für $A \implies B$ sind:

- Wenn A gilt, dann gilt (auch) B.
- Aus A folgt B.
- Aus A kann man B schlussfolgern.

- A ist hinreichend für B.
- A ist eine hinreichende Bedingung für B.
- B ist notwendig für A.
- B ist eine notwendige Bedingung für A.

Beispiele:

1)
$$A: \text{Weihnachten ist am 25.12.} \qquad \text{(wahr)}$$
$$B: \text{Ich fresse einen Besen.} \qquad \text{(falsch)}$$
$$C: \text{Weihnachten fällt auf Ostern.} \qquad \text{(falsch)}$$
$$D: \text{Die Goldbachsche Vermutung stimmt.} \qquad (?)$$

Die Aussage „Wenn Weihnachten am 25.12. ist, dann fresse ich einen Besen" ($A \implies B$) ist falsch.

Dagegen ist die Aussage „Wenn Weihnachten auf Ostern fällt, dann fresse ich einen Besen" ($C \implies D$) wahr!

Die Aussage $D \implies A$ ist wahr, unabhängig davon, ob Goldbach recht hatte. (D ändert nichts daran, dass Weihnachten am 25.12. ist.)

2)
$$A: \text{Es regnet.}$$
$$B: \text{Die Straße ist nass.}$$

Die Implikation $A \implies B$ ist wahr. Wenn es regnet, dann ist die Straße nass. Also ist A hinreichend für B.

Zugleich ist B notwendig für A, denn:

Wenn die Straße nicht nass ist, dann regnet es nicht.

A ist allerdings nicht notwendig für B: Die Straße kann auch nass werden, ohne dass es regnet.

Bemerkung:

Es mag überraschen, dass Schlussfolgerungen aus falschen Voraussetzungen immer wahr sind. Anders ausgedrückt:

Aus einer falschen Voraussetzung kann man jede beliebige Behauptung schlussfolgern, sei diese Behauptung auch wahr oder falsch.

Zum Beispiel kann man aus der Voraussetzung „$0 = 1$“ die Behauptung „Einstein ist der Papst“ schlussfolgern.

1.1.2.5 Die „genau-dann-wenn“-Verknüpfung (Äquivalenz)

Eine zusammengesetzte Aussage der Form

$$A \text{ ist äquivalent zu } B \qquad \text{(Kurzbezeichnung: } A \Longleftrightarrow B\text{)}$$

bedeutet, dass die Warheitswerte von A und B gleich sind. Wahrheitstafel:

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Weitere übliche Sprechweisen für $A \Longleftrightarrow B$ sind:

- A gilt genau dann, wenn B gilt.
- A gilt dann und nur dann, wenn B gilt.
- A ist gleichbedeutend mit B.
- A impliziert B und B impliziert A.
- A ist notwendig und hinreichend für B.
- B ist notwendig und hinreichend für A.

Beispiel:

Es sei m eine ganze Zahl.

A : m ist durch 6 teilbar.

B : m ist durch 2 und durch 3 teilbar.

Es gilt $A \Longleftrightarrow B$.

1.1.2.6 Komplizierte Verknüpfungen

Aus gegebenen Aussagen können durch Zusammensetzen schrittweise komplizierte Aussagen aufgebaut werden, zum Beispiel:

$$A \implies (B \vee C)$$
$$\neg(A \iff (B \vee (\neg C)))$$

Ähnlich wie in der Zahlenalgebra (zum Beispiel „Punkt vor Strich“) gibt es auch in der Aussagelogik Klammerkonventionen und eine Rangfolge der Verknüpfungssymbole:

$\neg$ bindet stärker als $\wedge$, $\vee$,

$\wedge$, $\vee$ binden stärker als $\implies$, $\iff$.

Damit gilt zum Beispiel:

$$((\neg A) \wedge B) \iff (\neg(C \vee D))$$
$$\Updownarrow$$
$$\neg A \wedge B \iff \neg(C \vee D)$$

1.1.3 Beweistechniken

In Beweisen wird stets aus der Gültigkeit einer Bestimmten Aussage, der Voraussetzung oder Prämisse , auf die Gültigkeit einer anderen Aussage, der Folgerung oder Konklusion geschlossen. Bei einem Beweis wird also gezeigt, dass eine Aussage der Form $A \implies B \text{ wahr}$ ist, wobei vorab bekannt ist, dass die Prämisse $A \text{ wahr}$ ist.

Nach der Abtrennungsregel (Modus ponens, vgl. Übung 7 h))

$$((A \implies B) \wedge A) \implies B$$

ist damit bewiesen, dass die Aussage B, die Konklusion, wahr ist. Diese Art des logischen Schließens heißt Deduktion .

Bei einer deduktiven Beweisführung sollte immer möglichst klar sein, was zu beweisen ist (die Konklusion B), was vorausgesetzt wird (die Prämisse A) und wie der Übergang

$A \implies B$, die Argumentation , verläuft. Argumente werden im Deutschen häufig mit Wörtern wie „also“, „demnach“, „folglich“ oder „somit“ eingeleitet.

Das Ende eines Beweises wird häufig mit dem Zeichen „■“ gekennzeichnet.

1.1.3.1 Der direkte Beweis

Ein direkter Beweis liegt vor, wenn $A \implies B$ mit Hilfe von Zwischenaussagen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in Form einer Argumentationskette

$$A \implies A_1 \implies A_2 \implies \cdots \implies A_n \implies B$$

gezeigt wird.

Beispiel:

Zu zeigen:

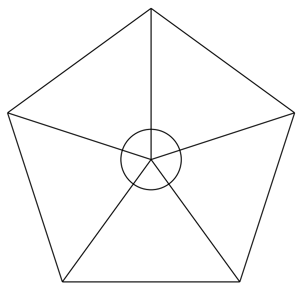
Die Summe der Innenwinkel im regelmäßigen Fünfeck ist 540°. $\}\, B$

Beweis:

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180°. $\}\, A$

Folglich ist die Summe der Innenwinkel fünf beliebiger Dreiecke $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$. $\Big\} \implies A_1$

Also ist auch die Summe der Innenwinkel der fünf deckungsgleichen Dreiecke, in die sich das regelmäßige Fünfeck unterteilen lässt, 900°. $\Big\} \implies A_2$



Die Innenwinkel dieser fünf Dreiecke, die am Mittelpunkt des Fünfecks liegen, betragen zusammen 360°. Sie tragen nicht zur Summe der Innenwinkel des Fünfecks bei. Somit ist diese Summe $900^\circ - 360^\circ = 540^\circ$. $\Bigg\} \implies B$

■

1.1.3.2 Der indirekte Beweis (Beweis durch Wiederspruch, Reductio ad absurdum)

Häufig ist es leichter, statt der Schlussfolgerung $A \implies B$ die Schlussfolgerung $\neg B \implies \neg A$ zu zeigen.

Nach der Kontraposition der Implikation (vgl. Übung 7 e)) sind beide Schlussfolgerungen gleichbedeutend.

Man leitet also ausgehend von der Annahme $\neg B$ einen Wiederspruch zu A ab.

Beispiel:

Zu zeigen:

Ein Dreieck, bei dem ein Innenwinkel 91° beträgt, ist nicht rechtwinklig. $\} \; B$

Beweis (durch Wiederspruch):

Wir nehmen an, es gäbe ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem ein Innenwinkel 91° beträgt. $\Big\} \; \neg B$

Folglich hat das Dreieck einen Innenwinkel, der 90° beträgt, und einen Innenwinkel, der 91° beträgt. Demnach ist die Summe der Innenwinkel des Dreiecks größer 180°. $\Bigg\} \implies \neg A$

Das ist ein Wiederspruch dazu, dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks 180° beträgt. Somit ist die obige Annahme $(\neg B)$ falsch und die ursprüngliche Behauptung (B) bewiesen. ■

1.2 Mengen, Relationen und Abbildungen

Zu den wichtigsten Grundpfeilern der Mathematik gehört der Mengenbegriff.

1.2.1 Mengenlehre

Definition 1.2: Menge (Cantor, 1895)

> Eine Menge ist eine beliebige Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

1.2.1.1 Sprechweisen und Notationen

Mengen werden mit Großbuchstaben gekennzeichnet. Die Objekte der Menge M werden die Elemente von M genannt.

Ist das Objekt x ein beziehungsweise kein Element von M, so schreibt man

$$x \in M \text{ bzw. } x \notin M$$

Zwei Mengen M und N heißen gleich, wenn sie genau die selben Elemente enthalten.

$$x \in M \Longleftrightarrow x \in N$$

Man schreibt dann $M = N$. Sind M und N nicht gleich, schreibt man $M \neq N$.

Bei der aufzählenden Schreibweise zur Kennzeichnung von Mengen, zum Beispiel

$$\begin{aligned} M &= \{a, e, i, o, u\} \\ B &= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \\ Y &= \{-2, 5\} \end{aligned}$$

spielt die Reihenfolge keine Rolle.

Die beschreibende Schreibweise hat die allgemeine Struktur

$$X = \{x \quad\quad | \, x \text{ hat die Eigenschaft } E\} \text{ oder}$$
$$X = \{x \in G \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\},$$

z.B. $M = \{x \mid x \text{ ist Vokal im deutschen Alphabet}\}$,

$$B = \{x \mid x \text{ ist eine ganze Zahl und } x > -4\},$$
$$Y = \{x \in B \mid x \text{ ist Lösung von } (x+4)(x+2)(x-5) = 0\}$$

Dabei wir der senkrechte Strich (|) als „mit der Eigenschaft“ gelesen, und G bezeichnet eine Grundmenge, der die Elemente x entstammen sollen.

Eine Menge, die kein Element besitzt, heißt leere Menge, und wird mit $\emptyset$ oder $\{\ \}$ bezeichnet.

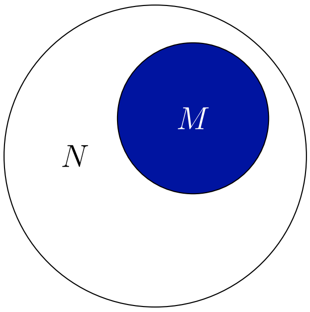
In Vorgiff auf Kapitel 2 nennen wir hier einige Wichtige Zahlenmengen:

$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$	
$\quad = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N} \vee x = 0 \vee -x \in \mathbb{N}\}$	die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n}{p} \text{ mit } n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}\}$	die Menge der rationalen Zahlen

Eine Menge M heißt <u>Teilmenge</u> der Menge N, in Zeichen $M \subset N$, wenn jedes Element von M auch Element von N ist.

$$x \in M \implies x \in N$$

Wir sagen dann auch: M ist in N enthalten, oder N ist <u>Obermenge</u> von M.



Ist M nicht Teilmenge von N, so schreibt man $M \not\subset N$.

Bemerkungen:

1) Mengen sind selbst wieder Objekte, das heißt sie können auch wieder zu Mengen zusammengefasst werden, zum Beispiel:

$$M = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}, \quad N = \{\emptyset, 1, \{1\}\}$$

M hat 4 Elemente, N hat 3 Elemente.

Einelementige Mengen der Form $\{m\}$ und ihr Element m sind unterschiedliche Objekte.

2) Beziehungen zwischen Mengen wie zum Beispiel $M \subset N$ lassen sich auch durch Verknüpfungen von Aussagen über Elementzugehörigkeiten ausdrücken:

$$M \subset N \iff (\underbrace{x \in M}_{A} \implies \underbrace{x \in N}_{B}) \circledast$$

$M = N$ gilt genau dann, wenn $M \subset N$ und $N \subset M$ denn:

$$\begin{aligned}
M \subset N \wedge N \subset M \quad & \overset{\circledast}{\iff} \quad (A \implies B) \wedge (B \implies A) \\
& \overset{\text{Tautologie}}{\iff} \quad (A \iff B) \\
& \overset{\text{Def. } A, B}{\iff} \quad (x \in M \iff x \in N) \\
& \iff \quad M = N
\end{aligned}$$

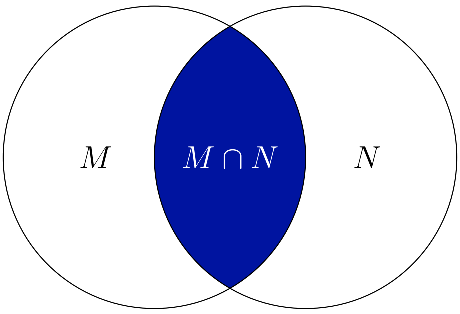
3) Für alle Mengen M gilt $M \subset M$ und $\emptyset \subset M$.

1.2.1.2 Mengenoperationen

Der <u>Durchschnitt</u> zweier Mengen M und N (Kurzbezeichnung: $M \cap N$) ist die Menge der Elemente, die sowohl in M als auch in N enthalten sind.

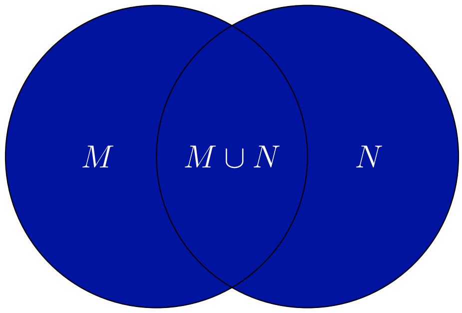
$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$$

M und N heißen disjunkt, wenn ihr Durchschnitt leer ist, das heißt wenn $M \cap N = \emptyset$.



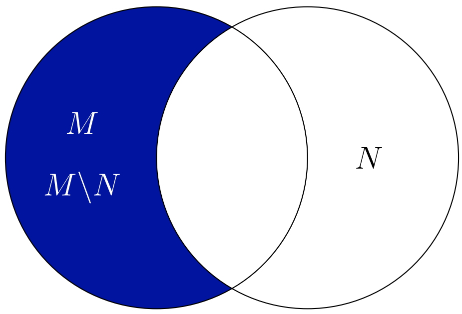
Die Vereinigung zweier Mengen M und N (Kurzbezeichnung: $M \cup N$) ist die Menge der Elemente, die in M oder in N enthalten sind.

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$$



Die Differenzmenge zweier Mengen M und N (Kurzbezeichnung: $M\backslash N$) ist die Menge der Elemente die in M, aber nicht in N enthalten sind.

$$M\backslash N = \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$$



Ist im Umgang mit Mengen eine bestimmte Grundmenge G vereinbart (bei Zahlen zum Beispiel häufig $\mathbb{R}$), so wird die Differenzmenge immer im Bezug auf diese Grundmenge gebildet, ohne dass sie explizit erwähnt wird. Statt $G\backslash N$ schreibt man dann $\overline{N}$ und nennt $\overline{N}$ das Komplement von N.

Beispiele:

$$M = \{\triangle, \bigcirc, \square\}, N = \{\blacksquare, \bigcirc, \square\}$$

$$M \cap N = \{\square, \bigcirc\}$$
$$M \cup N = \{\triangle, \bigcirc, \square, \blacksquare\}$$
$$M \backslash N = \{\triangle\}$$

Bemerkung:

Für die Mengenoperationen gelten Rechenregeln (vgl. Übung 1.13).

1.2.1.3 Quantoren

Quantoren stellen ein Bindeglied zwischen Aussagelogik und Mengenlehre dar.

An Stelle der Aussage

Es gibt ein Element x in der Menge M mit der Eigenschaft E.

schreibt man kurz

$$\exists\, x \in M \quad E$$

Das Zeichen $\exists$ heißt Existenzquantor.

An Stelle der Aussage

Für alle x in der Menge M gilt die Eigenschaft E.

schreibt man kurz

$$\forall\, x \in M \quad E$$

Das Zeichen $\forall$ heißt Allquantor.

Beispiele:

Die Aussage $\exists\, n \in \mathbb{N} \quad n < 0$ ist falsch, denn natürliche Zahlen sind nicht negativ.

Die Aussage $\forall\, x \in \mathbb{Z} \quad x$ ist durch 7 teilbar ist falsch, denn $8 \in \mathbb{Z}$ und 8 ist nicht durch 7 teilbar.

1.2.1.4 Unendliche Vereinigung, unendlicher Durchschnitt

Sei I eine Menge, die wir als Menge der Indizes bezeichnen (jedes Element von I ist ein Index). Für jedes $i \in I$ sei eine Menge M_i gegeben. Die Menge $\bigcup\limits_{i\in I} M_i$, definiert durch

$$\bigcup_{i\in I} M_i := \{x \mid \exists\, i \in I \quad x \in M_i\}$$

heißt unendliche Vereinigung der Mengen M_i.

Die Menge $\bigcap\limits_{i\in I} M_i$, definiert durch

$$\bigcap_{i\in I} M_i := \{x \mid \forall\, i \in I \quad x \in M_i\}$$

heißt unendlicher Durchschnitt der Mengen M_i.

Beispiele:

1) $I = \mathbb{N}$, $M_i = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{i}\}$. Dann ist $\bigcap\limits_{i\in I} M_i = \emptyset$
2) $I = \mathbb{N}$, $M_i = \{-i, i\}$. Dann ist $\bigcup\limits_{i\in I} M_i = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
3) $I = \{\triangle, \bigcirc, \square\}$, $M_\triangle = \{3\}$, $M_\bigcirc = \{0\}$, $M_\square = \{4\}$.

   $\bigcup\limits_{i\in I} M_i = \{3, 0, 4\}$, $\bigcap\limits_{i\in I} M_i = \emptyset$

Definition 1.3: Kartesisches Produkt

Sind M und N Mengen, so heißt die Menge $M \times N$, definiert durch

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$$

also die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$, das kartesische Produkt von M und N.

Bemerkungen und Beispiele:

1) Geordnet heißt, dass etwa $(1, 4)$ und $(4, 1)$ verschiedene Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind.

2) Das kartesische Produkt ist nicht kommutativ.

   Beispiel: $M = \{1,2\}$, $N = \{a,b,c\}$. Dann gilt

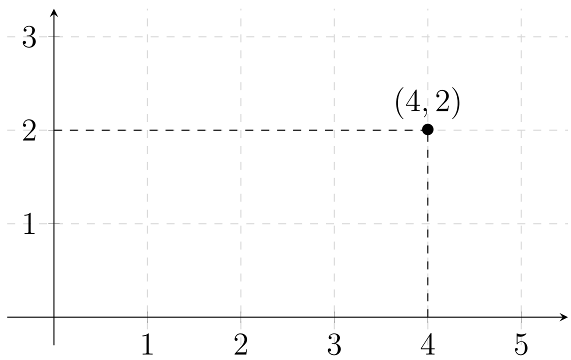
   $M \times N = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$,

   $N \times M = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$,

   das heißt $M \times N \neq N \times M$.

3) Für k Mengen ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$) $M_1, M_2, \ldots, M_k$ kann man analog das k-fache kartesiche Produkt $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_i \in M_i\}$ bilden. Die Elemente dieses Produktes heißen <u>geordnete k-Tupel</u>. Sind alle Mengen M_i gleich, $M_1 = M_2 = \cdots = M_k = M$, so schreibt man $\underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{k \text{ mal}} = M^k$.

4) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die Menge der kartesischen koordinaten in zwei Dimensionen. Die Elemente von $\mathbb{R}^2$ können als Punkte im kartesischen Koordinatenssystem in der Ebene aufgefasst werden.



1.2.2 Relationen

Definition 1.4: Relation

Sind M und N Mengen, so heißt eine Teilmenge $R \subset M \times N$ des kartesischen Produktes von M und N eine <u>Relation</u> auf $M \times N$.

Ist $M = N$, so heißt R kurz eine Relation auf M.

Statt $(x,y) \in R$ schreibt man auch kurz $x\,R\,y$.

Bemerkung:

Relation heißt Beziehung. Eine Relation auf $M \times N$ beschreibt nämlich eine Beziehung, die zwischen bestimmten Paaren von Elementen der Mengen M und N

besteht. Als Teilmenge von $M \times N$ enthält sie genau die Paare (x, y), für die die Beziehung $x \, R \, y$ gilt.

Beispiel:

Sei S die Menge der Studierenden des Fachbereichs ETI und F die Menge der angebotenen Fächer eines Studienganges. Dann ist die Menge

$$B = \{(s, f) \mid s \in S \text{ hat das Fach } f \in F \text{ bestanden}\}$$
$$B \subset S \times F$$

eine Relation auf $S \times F$.

Definition 1.5: reflexiv, symmetrisch, transitiv

> Es sei R eine Relation auf der Menge M. R heißt
>
> a) <u>reflexiv</u> , wenn für alle $x \in M$ gilt $x \, R \, x$,
>
> b) <u>symmetrisch</u> , wenn für alle $x, y \in M$ gilt $x \, R \, y \implies y \, R \, x$,
>
> c) <u>transitiv</u> , wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt $x \, R \, y \wedge y \, R \, z \implies x \, R \, z$.
>
> Eine Relation heißt <u>Äquivalenzrelation</u> , wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiele:

1) Unter den Vergleichsoperatoren $\leq, <, \geq, >, \neq, =$ für reelle Zahlen ist nur $=$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$. Beispielsweise ist

   - $<$ nicht reflexiv, denn $x < x$ ist nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ wahr (nicht einmal für irgendein x)
   - $\geq$ nicht symmetrisch, denn $x \geq y \implies y \geq x$ ist nicht für alle $x, y \in \mathbb{R}$ wahr (z.B. nicht für $x = 17$, $y = 3$)
   - $\neq$ nicht transitiv, denn $x \neq y \wedge y \neq z \implies x \neq z$ ist nicht für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ wahr (z.B. nicht für $x = 3$, $y = 7$, $z = 3$)

2) $\equiv_3 := \{(b, b') \in \mathbb{Z}^2 \mid b' - b$ ist durch 3 teilbar$\}$ ist eine Äquivalenzrelation. Beweis:

a) Reflexivität:

$b \equiv_3 b \iff 0$ ist durch 3 teilbar, und Letzteres ist für alle $b \in \mathbb{Z}$ wahr. Also ist $\equiv_3$ reflexiv.

b) Symmetrie:

$$\begin{aligned} b \equiv_3 b' &\implies b' - b \text{ ist durch 3 teilbar} \\ &\implies b' - b = k \cdot 3 \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ &\implies b - b' = (-k) \cdot 3 \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ &\implies b - b' = l \cdot 3 \text{ mit } l \in \mathbb{Z} \;\; (l = -k) \\ &\implies b - b' \text{ ist durch 3 teilbar} \\ &\implies b' \equiv_3 b \end{aligned}$$

Also ist $\equiv_3$ symmetrisch.

c) Transitivität:

$$\begin{aligned} b \equiv_3 b' \wedge b' \equiv_3 b &\implies b' - b \text{ und } b'' - b' \text{ sind durch 3 teilbar} \\ &\implies b' - b = k \cdot 3 \text{ und } b'' - b' = k' \cdot 3 \text{ mit } k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\implies b'' - b = (k + k') \cdot 3 \\ &\implies b'' - b = l \cdot 3 \text{ mit } l \in \mathbb{Z} \;\; (l = k + k') \\ &\implies b'' - b \text{ ist durch 3 teilbar} \\ &\implies b \equiv_3 b'' \text{ für alle } b, b', b'' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Also ist $\equiv_3$ transitiv.

Da $\equiv_3$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, ist $\equiv_3$ eine Äquivalenzrelation. ■

Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge X zerlegt X in sogenannte Äquivalenzklassen.

Definition 1.6: Äquivalenzklasse

> Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge X und $a \in X$, so heißt die Menge
>
> $$[a]_\sim := \{x \in X \mid x \sim a\}$$
>
> die Äquivalenzklasse von $\sim$ mit dem Repräsentanten (oder Vertreter) a.

Bemerkung:

$[a]_\sim$ ist also die Menge aller Elemente von X, die zu a in der Relation $\sim$ stehen, darunter a selbst.

Satz 1.7

> Es sei X eine nichtleere Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Die Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$ stellt eine Partition (oder Zerlegung) von X dar, das heißt
>
> 1) alle Äquivalenzklassen sind nichtleer,
> 2) je zwei verschiedene Äquivalenzklassen sind disjunkt,
> 3) die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist gleich X.

Beispiel: Restklassen

Zur Äquivalenzrelation $\equiv_3$ gibt es genau drei Äquivalenzklassen:

$$\begin{aligned}
[0]_{\equiv_3} &= \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\} \\
[1]_{\equiv_3} &= \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\} \\
[2]_{\equiv_3} &= \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}
\end{aligned}$$

Sie sind nichtleer, paarweise disjunkt, und es gilt

$$[0]_{\equiv_3} \cup [1]_{\equiv_3} \cup [2]_{\equiv_3} = \bigcup_{i=0}^{2} [i]_{\equiv_3} = \mathbb{Z}$$

das heißt die Äquivalenzklassen $[i]_{\equiv_3}$ $(i = 0, 1, 2)$ bilden eine Partition von $\mathbb{Z}$. Sie heißen Restklassen modulo 3 .

Allgemeiner bezeichnet man für $n \in \mathbb{N}$ die n verschiedenen Äquivalenzklassen $[i]_{\equiv_n}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ der Äquivalenzrelation

$$\equiv_n := \{(b, b') \in \mathbb{Z} \mid (b' - b) \text{ ist durch } n \text{ teilbar}\}$$

als die Restklassen modulo n .

1.2.3 Abbildungen

Definition 1.8: Abbildung

> Gegeben seien zwei Mengen M und N und eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zuordnet. Dann ist durch M, N und diese Zuordnungsvorschrift eine Abbildung f gegeben.
>
> Man schreibt
>
> $$\begin{aligned} f : M \to N \quad & \text{mit } x \mapsto f(x) \\ \text{oder } f : x \mapsto f(x) \quad & \text{mit } x \in M, f(x) \in N \\ \text{oder } y = f(x) \quad & \text{mit } x \in M, y \in N. \end{aligned}$$

1.2.3.1 Sprechweisen und Notationen

Man nennt f die durch $y = f(x)$ definierte Abbildung von M nach N. Vor allem wenn M und N Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, nennt man Abbildungenauch Funktionen. Weiter nennt man

x	Argument , Variable von f
y, $f(x)$	Wert oder Funktionswert von f an der Stelle x oder bei x, Bild von x (x ist Urblid von y)
$x \mapsto f(x)$, $y = f(x)$	Zuordnungsvorschrift für f
M,D_f	Definitionsmenge von f
N	Zielmenge von f

Zwei Abbildungen $f : M \to N$ und $g : U \to V$ heißen gleich, wenn $M = U$, $N = V$ und

$f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$. Man schreibt dann $f = g$.

Die Bezeichnung der Variablen in der Zuordnungsvorschrift, das heißt die Wahl der Buchstaben ist beliebig. So bedeuten folgende Zuordnungsvorschriften alle das gleiche:

$$x \mapsto x^2 \qquad v \mapsto v^2 \qquad y \mapsto y^2$$

Die Menge aller Funktionswerte $f(x)$ mit $x \in M$ heißt <u>Bildmenge</u> oder <u>Wertemenge</u> von f und wird mit $f(M)$ oder W_f bezeichnet, also

$$f(M) = \{y \in N \mid \exists\, x \in M \quad f(x) = y\}$$

Ist $U \subset M$ eine Teilmenge der Definitionsmenge, so heißt die Menge aller Funktionswerte $f(x)$ mit $x \in U$ das <u>Bild</u> von U und wird mit $f(U)$ bezeichnet, also

$$f(U) = \{y \in N \mid \exists\, x \in U \quad f(x) = y\}$$

Ist $V \subset N$ eine Teilmenge der Zielmenge, so heißt die Menge aller Argumente $x \in M$ mit $f(x) \in V$ das <u>Urbild</u> von V und wird mit $f^{-1}(V)$ bezeichnet, also

$$f^{-1}(V) = \{x \in M \mid f(x) \in V\}$$

Beispiele:

1) Die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto y$ mit $y^2 = x$ definiert keine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, weil zum Beispiel $x = -1$ kein $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet ist, und weil $x = 4$ mit $y = 2$ und $y = -2$ zwei $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet sind.

   Ebenso definiert die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ keine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, weil $x = 0$ kein Funktionswert zugeordnet ist. Durch $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ ist hingegen eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ definiert.

2) Die folgende Grafik beschreibt eine Abbildung f:

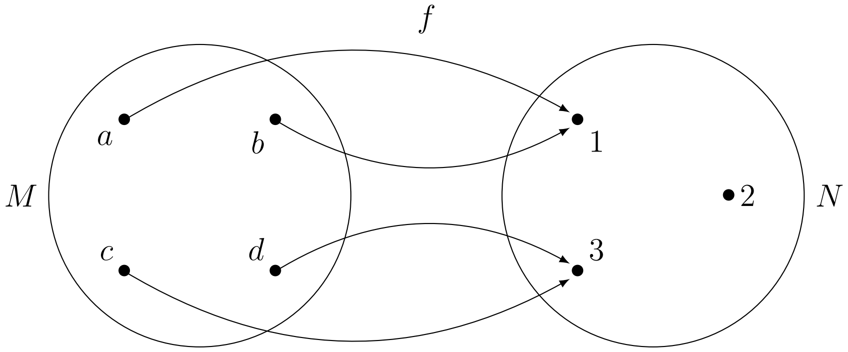
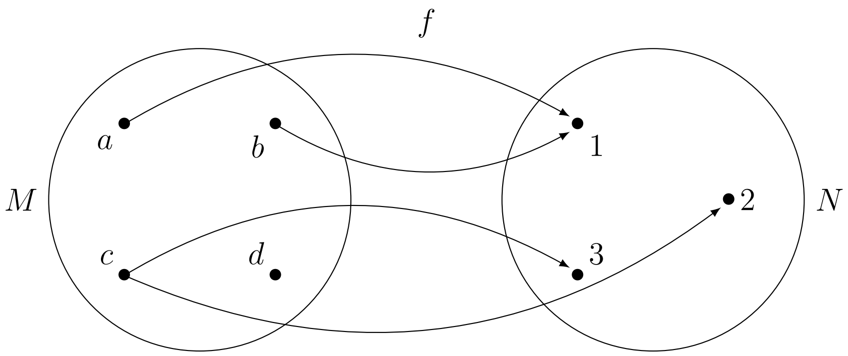


Abbildung f mit $M = \{a, b, c, d\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, $f(M) = \{1, 3\} \neq N$.

1 ist Bild von a und b. 3 ist Bild von c und d. a und b sind Urbilder von 1. c und d sind Urbilder von 3. 2 hat kein Urbild.

Das Bild von $U = \{a, b\}$ ist $f(U) = \{1\}$. Das Urbild von $V = \{2\}$ ist $f^{-1}(V) = \emptyset$. Das Urbild von $V' = \{2, 3\}$ ist $f^{-1}(V') = \{c, d\}$.

Dagegen ist



keine Abbildung:

- d hat kein Bild
- c hat zwei Bilder

3) Durch die Zuordnung $f : \{\text{a}, \text{b}, \text{c}, \dots, \text{z}\} \to \mathbb{N}$ mit

x	a	b	c	...	z
$f(x)$	26	25	24	...	1

ist eine Abbildung definiert.

Definition 1.9: injektiv, surjektiv, bijektiv

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung. f heißt

a) injektiv , wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

b) surjektiv , wenn für jedes $y \in N$ ein $x \in M$ existiert mit $f(x) = y$:

$$\forall\, y \in N \quad \exists\, x \in M \quad f(x) = y$$

c) bijektiv , wenn f injektiv und surjektiv ist.

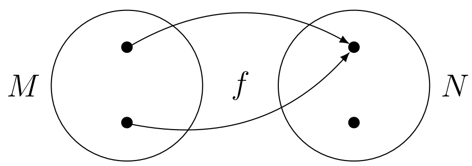
Bemerkungen:

Bei einer injektiven Abbildung werden verschiedene Elemente der Definitionsmenge stets auf verschiedene Elemente der Zielmenge abgebildet.

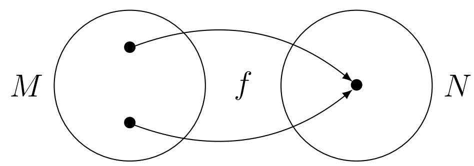
Bei einer surjektiven Abbildung hat jedes Element der Zielmenge ein Urbild, und damit ist die Zielmenge gleich der Wertemenge.

Beispiele:

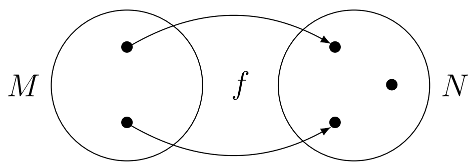
1) Die folgenden Abbildungen sind:



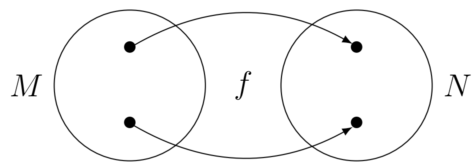
nicht injektiv, nicht surjektiv



nicht injektiv, surjektiv



injektiv, nicht surjektiv



injektiv, surjektiv

2) Die Abbildung $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto \mathrm{ggt}(m, n)$ ordnet jedem Paar zweier natürlicher Zahlen ihren größten gemeinsamen Teiler zu.

Die Abbildung ist surjektiv, denn $\mathrm{ggt}(n, n) = n$.

Sie ist nicht injektiv, denn $\mathrm{ggt}\underbrace{(3,6)}_{\in\mathbb{N}^2} = \mathrm{ggt}\underbrace{(9,12)}_{\in\mathbb{N}^2}$

$$\begin{aligned}(3,6) \neq (9,12) &\overset{\lightning}{\Longrightarrow} \mathrm{ggt}(3,6) \neq \mathrm{ggt}(9,12)\\ &\overset{\lightning}{\Longrightarrow} 3 \neq 3\end{aligned}$$

Definition 1.10: Umkehrabbildung

> Ist $f : M \to N$, $x \mapsto f(x)$ eine bijektive Abbildung, so wird durch $g : N \to M$, $y \mapsto x$ mit $y = f(x)$ eine Abbildung definiert. g heißt Umkehrabbildung oder inverse Abbildung zu f und man sagt, f sei umkehrbar. Die Umkehrabbildung wird mit f^{-1} bezeichnet.