FH MÜNSTER
University of Applied Sciences

ETI FB Elektrotechnik und Informatik
Department of Electrical Engineering
and Computer Science

Mathematik 1

Mitschrift

Frederik Sicking

Modul: **Mathematik 1**

Prof. Dr. Gernot Bauer

Wintersemester 2022 / 2023

Stand: Freitag, 28.10.2022

Frederik Sicking

frederik.sicking@fh-muenster.de

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Aussagelogik

Im Unterschied zur Umgangssprache benutzt die Mathematik eine sehr präzise Sprechweise, die wir hier einführen wollen.

1.1.1 Aussagen

Sachverhalte der Realität werden in Form von Aussagen erfasst.

Definition: Aussage

> Unter einer Aussage versteht man ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch sein kann.

Beispiele:

		ist Aussage
1)	5 ist kleiner als 3.	ja
2)	Kiew ist die Hauptstadt der Ukraine.	ja
3)	Das Studium der Mathematik ist schwierig.	ja
4)	Nach dem Essen Zähne putzen!	nein
5)	Nachts ist es kälter als draußen.	nein

Die Werte wahr und falsch heißen Warheitswerte. Jede Aussage hat genau einen dieser beiden Warheitswerte. Das heißt aber nicht, dass der Warheitswert auch bekannt ist.

Beispiele: Fortsetzung

		ist Aussage
6)	Der Sommer 2023 wird erneut der heißeste in Europa seit Beginn der Aufzeichnungen.	ja
7)	Jede gerade Zahl größer 2 ist Summe zweier Primzahlen. (Goldbachsche Vermutung)	ja

Bemerkung:

Eine Aussage, die einen mathematischen Sachverhalt beschreibt und wahr ist, wird als Satz bezeichnet.

1.1.2 Verknüpfung von Aussagen

Im folgenden Stehen lateinische Großbuchstaben $A, B, C, \ldots$ als Platzhalter (Variablen) für Aussagen.

Die „und"-Verknüpfung (Konjugation)

Eine zusammengesetzte Aussage der Form

$$A \text{ und } B \qquad \text{(Kurzbezeichnung: } A \wedge B\text{)}$$

ist wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. Andernfalls ist sie falsch.
Der Warheitswert der zusammengesetzten Aussage in Abhängigkeit von A und B kann durch folgende Verknüpfungstabelle (oder Wahrheitstafel) ausgedrückt werden. (w für wahr, f für falsch)

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beispiel: „und"

A : 7 ist ungerade. (wahr)

B : 17 < 4 (falsch)

C : Für alle reellen Zahlen x gilt: $x^2 \geq 0$ (wahr)

Die Aussage „7 ist ungerade und 17 < 4" ($A \wedge B$) ist falsch. Die Aussage $A \wedge C$ ist wahr.

Die „oder"-Verknüpfung (Alternative, Disjunktion)

Eine zusammengesetzte Aussage der Form

$$A \text{ oder } B \qquad \text{(Kurzbezeichnung: } A \vee B\text{)}$$

ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. Sind beide Aussagen falsch, dann ist auch die zusammengesetzte Aussage $A \vee B$ falsch. Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beispiel: „oder"

A : Allerheiligen ist am 1.11. (wahr)

B : Die Erde ist eine Scheibe. (falsch)

C : Heute ist Montag. (wahr/falsch je nach Wochentag)

Die Aussage „Allerheiligen ist am 1.11. oder die Erde ist eine Scheibe" ($A \vee B$) ist wahr, die Aussage $A \vee C$ ist ebenfalls immer wahr. $B \vee C$ ist dagegen nur an einem Montag wahr, sonst falsch.

Bemerkung:

Im Alltagssprachgebrauch trifft man häufig auf die Verknüpfung von Aussagen mit „und/oder", etwa „Ich komme heute und/oder morgen". Mathematisch ist das nicht sinnvoll, ein einfaches „oder" drückt den Sachverhalt bereits treffend aus.

Die Negation („nicht“)

Eine Aussage der Form

$$\text{nicht } A \qquad \text{(Kurzbezeichnung: } \neg A\text{)}$$

ist wahr, wenn A falsch ist. Sie ist falsch, wenn A wahr ist. Die Aussage $\neg A$ heißt die Negation von A. Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Die Negation (oder Verneinung) kehrt den Warheitswert einer Aussage um.

Die „wenn-dann“-Verknüpfung (Implikation, Schlussfolgerung)

Eine zusammengesetzte Aussage der Form

$$A \text{ impliziert } B \qquad \text{(Kurzbezeichnung: } A \implies B\text{)}$$

ist falsch, falls A wahr und B falsch ist. Andernfalls ist sie wahr.

Hier fehlt der Abschnitt der Vorlesung vom 14.10. bis zum 21.10.

Quantoren

Quantoren stellen ein Bindeglied zwischen Aussagelogik und Mengenlehre dar.
An Stelle der Aussage

Es gibt ein Element x in der Menge M mit der Eigenschaft E.

schreibt man kurz

$$\exists\, x \in M \quad E$$

Das Zeichen $\exists$ heißt Existenzquantor .

An Stelle der Aussage

Für alle x in der Menge M gilt die Eigenschaft E.

schreibt man kurz

$$\forall\, x \in M \quad E$$

Das Zeichen $\forall$ heißt Allquantor .

Beispiele:

Die Aussage $\exists\, n \in \mathbb{N} \quad n < 0$ ist falsch, denn natürliche Zahlen sind nicht negativ.

Die Aussage $\forall\, x \in \mathbb{Z}$ x ist durch 7 teilbar ist falsch, denn $8 \in \mathbb{Z}$ und 8 ist nicht durch 7 teilbar.

Unendliche Vereinigung, unendlicher Durchschnitt

Sei I eine Menge, die wir als Menge der Indizes bezeichnen (jedes Element von I ist ein Index). Für jedes $i \in I$ sei eine Menge M_i gegeben. Die Menge $\bigcup_{i \in I} M_i$, definiert durch

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists\, i \in I \quad x \in M_i\}$$

heißt unendliche Vereinigung der Mengen M_i.
Die Menge $\bigcap_{i \in I} M_i$, definiert durch

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \forall\, i \in I \quad x \in M_i\}$$

heißt unendlicher Durchschnitt der Mengen M_i.

Beispiele:

1) $I = \mathbb{N}$, $M_i = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{i}\}$. Dann ist $\bigcap\limits_{i \in I} M_i = \emptyset$
2) $I = \mathbb{N}$, $M_i = \{-i, i\}$. Dann ist $\bigcup\limits_{i \in I} M_i = \mathbb{Z} \backslash \{0\}$
3) $I = \{\triangle, \bigcirc, \square\}$, $M_\triangle = \{3\}$, $M_\bigcirc = \{0\}$, $M_\square = \{4\}$.

   $\bigcup\limits_{i \in I} M_i = \{3, 0, 4\}$, $\bigcap\limits_{i \in I} M_i = \emptyset$

Definition: Kartesisches Produkt

Sind M und N Mengen, so heißt die Menge $M \times N$, definiert durch

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$$

also die Menge aller <u>geordneten Paare</u> (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$, das <u>kartesische Produkt</u> von M und N.

Bemerkungen und Beispiele:

1) Geordnet heißt, dass etwa $(1, 4)$ und $(4, 1)$ verschiedene Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind.
2) Das kartesische Produkt ist nicht kommutativ.
   Beispiel: $M = \{1, 2\}$, $N = \{a, b, c\}$. Dann gilt

   $M \times N = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$,
   $N \times M = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$,
   das heißt $M \times N \neq N \times M$.
3) Für k Mengen ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$) $M_1, M_2, \ldots, M_k$ kann man analog das k-fache kartesiche Produkt $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_i \in M_i\}$ bilden. Die Elemente dieses Produktes heißen <u>geordnete k-Tupel</u>. Sind alle Mengen M_i gleich, $M_1 = M_2 = \cdots = M_k = M$, so schreibt man $\underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{k \text{ mal}} = M^k$.

4) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die Menge der kartesischen koordinaten in zwei Dimensionen. Die Elemente von $\mathbb{R}^2$ können als Punkte im kartesischen Koordinatenssystem in der Ebene aufgefasst werden.