

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»  
МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ

Департамент Прикладной Математики

Колотев Сергей Васильевич

**Моделирование пространственных эволюционных игр**

Междисциплинарная курсовая работа  
по направлению 01.04.04 Прикладная математика  
студента образовательной программы магистратуры  
«Системы управления и обработки информации»

Научный руководитель  
профессор, д. ф.-м. н.  
заведующий базовой  
кафедрой "ПИКСИС"  
ДПМ МИЭМ ВШЭ  
Щур Лев Николаевич  
подпись \_\_\_\_\_

Студент  
Колотев С.В  
подпись \_\_\_\_\_

Москва 2017

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Подсчет периметра и границы кластера</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Анализ результатов</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>14</b>

### **Аннотация**

В данной работе рассмотрена детерминистическая модель Дилеммы Узника на двумерной квадратной решетке с периодическими граничными условиями. Рассчитан периметр протекающего кластера вблизи точке перехода. Его значение увеличивается в квадрате с увеличением решетки.

### **Annotation**

In this work deterministic Prisoner Dilemma model is studied on two dimensional square lattice with periodic boundary conditions. Perimeter of percolation cluster is calculated in the near of phase transition point. Its value changes as square by increase of lattice size.

# 1 Введение

Данная работа является продолжением бакалаврской выпускной квалификационной работы на тему «Моделирование пространственных эволюционных игр». Исследования в текущей и бакалаврской работе основаны на результатах статьи Р.Мэй и М. Новака [1], опубликованной в 1992 о пространственной дилемме об эволюции.

В ней за основу взята модель Дилеммы Узника[2], помещенная на квадратную решетку с периодическими граничными условиями. В стандартной Дилемме Узника двое игроков играют друг против друга, выбирая стратегии. Дефектор получает максимум очков( $T$ ), если играет против кооператора, а кооператор в данной ситуации получает минимум( $S$ ). Если дефектор играет против дефектора, оба получают одинаковое количество очков( $P$ ) в промежутке между максимальным и минимальным. В случае если кооператор играет против кооператора, то здесь оба игрока получают количество очков( $R$ ) меньше максимума, но больше очков, чем в ситуации, когда дефектор играет против дефектора. Каждый игрок знает исход предыдущей игры и делает выбор на основе этой информации. В этом заключается стандартная Дилемма Узника.

Р.Мэй и М. Новак решили расположить игроков на решетку с периодическими граничными условиями и зафиксировать все очки, получаемые игроками, кроме максимального, которые получает дефектор за победу над кооператором. Таким образом модель Дилеммы Узника стала клеточным автоматом, в котором каждый игрок представляет собой ячейку со множеством состояний являющихся множеством стратегий. Ячейка или игрок могут быть кооператором или дефектором. Окрестность - это 8 соседей вокруг текущей ячейки. В начальном состоянии решетка заполняется случайным образом на 90% кооператоров, а также задано правило перехода, которое определяет новое состояние ячейки или иными словами, определяет, какую стратегию выберет игрок на следующем этапе. Правило гласит, что в следующем поколении игрок возьмет стратегию того соседнего игрока, чей доход от игры со своими соседями будет максимальным. Каждый игрок играет с 8 соседями и сам с собой, поэтому в определении состояния ячейки принимают участие 25 клеток. Вся система переходит в новое состояние(поколение), когда каждый игрок сыграл со своими соседями и определил новую стратегию. Количество поколений является аналогом времени  $t$ . Количество очков, получаемых при игре кооператора против кооператора равно 1, дефектора против дефектора равно 0. Кооператор при игре с дефектором также получает 0 очков, в то время как дефектор получает максимальное количество очков  $T$ , что является параметром в данной модели. Такую модель описали Р.Мэй и М. Новак и, проведя на ней вычисления, пришли к интересным результатам.

При симметричном начальном состоянии на решетке образуется «динамический фрактал» и «эволюционирующие калейдоскопы». Также найдены устойчивые образования, которые называются «glyder», «grower» и «rotator». На решетке могут существовать как кооператоры, так и дефек-

торы, это зависит от максимального дохода во время игры. При разных значениях параметра  $T$  на решетке наблюдаются различные состояния, при  $T \leq 1$  на решетке вымирают все дефекторы, остаются только кооператоры, аналогично при  $T \geq 2$  остаются только дефекторы. Игроки, имеющие среди своих соседей игроков с такой же стратегией, образуют структуру под названием кластер. Следовательно, существуют два типа кластеров - из кооператоров и дефекторов. При параметре  $T < 1.8$  растут только кластеры из кооператоров, иными словами, на решетке будет большинство игроков будут выбирать стратегию кооператора. Кластеры такого типа будут продолжать расти при  $T < 2$ . В случае  $T > 1.8$  начинают расти кластеры из дефекторов. Кроме того, обнаружен фазовый переход в  $T = 1.8$ . Именно в промежутке  $1.8 \leq T \leq 2$  кластеры обоих типов могут расти и сталкиваться в процессе роста и в данной ситуации, было вычислено, что при  $t \rightarrow \infty$  концентрация кооператоров сходится к значению  $12 \log 2 - 8 = 0.31776617...$

В бакалаврской работе[3] была воспроизведена данная модель с помощью языков программирования Python и C. Первый вариант производил вычисления достаточно долго на решетках размера  $100 \times 100$  и более, поэтому было принято решение переписать алгоритм, используя язык C. Помимо того, что компилируемый код выполняется гораздо быстрее интерпретируемого, алгоритм был дополнен инструментами параллельного программирования OpenMP. Эта технология включает в себя набор директив и команд для процессора, позволяющих распределить одинаковые вычисления между нитями процессами. OpenMP достаточно прост для внедрения и не требует серьезных изменений в программе.

Для применения OpenMP необходимо было узнать, какой участок кода нужно распределять между нитями процессора. Параллельно могут вычисляться те части кода, где данные между собой не зависят друг от друга, иначе можно получить неверные результаты. Таким образом применить OpenMP для расчета каждого поколения является неправильным решением, так как очередное состояние решетки строится исходя из предыдущего состояния. Однако, оказалось, что можно считать параллельно строки решетки. Иными словами, распределить между нитями процессора строки матрицы, чтобы каждая нить определяла новое состояние определенной строки решетки в следующем поколении.

Благодаря OpenMP, удалось значительно ускорить время выполнения программы, также стало возможным производить расчеты на решетках размером свыше  $300 \times 300$ . Из-за того, что открытие и закрытие параллельного участка кода требует большого числа операций, выполнение программы с использованием параллельного программирования на решетках размеров менее  $100 \times 100$  использовать не следует.

Текущих инструментов было достаточно лишь для общей картины. С их помощью было вычислено, что точка фазового перехода является  $T = 1.8$  с точностью  $10^{-5}$ . Но чтобы понять, что происходит с объектами на решетке, необходимо было выявить эти объекты. Была поставлена задача выделить на решетке кластеры обоих типов, применив алгоритм Хошена-Копельмана(НК-76)[4]. Данный алгоритм позволяет за один проход выде-

лить кластеры на решетке. После его применения можно узнать размеры кластеров, а также к какому из них принадлежит та или иная ячейка. Благодаря этому алгоритму было выяснено, что средний размер наибольшего кластера кооператоров при параметре  $T=1.79999$  (вблизи точки фазового перехода) в текущем состоянии занимает приблизительно 70% размера решетки, при стремлении ее размера к бесконечности.

## 2 Подсчет периметра и границы кластера

В этой главе будут рассмотрены несколько алгоритмов поиска границы протекающих кластеров. Для начала стоит дать определение протекающему кластеру. Данное понятие пришло из теории перколяции (с англ. - протекание, просачивание), которая изучает связные структуры. Область применения теории перколяции на сегодняшний день довольно обширная, начиная с маршрутизации в сети интернет и заканчивая распространением лесных пожаров. Также она нашла свое применение в медицине, физике и химии. Перколяция возникает, когда элементы структуры расположены таким образом, что можно совершить переход по ее элементам с одной стороны на другую. Таким образом, протекающим кластером является такой кластер, по элементам которого можно пройти от верхней границы решетки к нижней или наоборот. Аналогично можно рассматривать и переход слева направо и в обратную сторону, и так как они схожи, то будет рассматриваться первый вариант.

Поиск протекающего кластера осуществляется следующим образом. Каждый кластер имеет свой номер, в первой строке решетки берется первый помеченный (принадлежащий какому-либо кластеру) элемент, и ищется другой, входящий в состав этого же кластера, но уже в последней строке решетки. Конечно, может быть случай, когда у нас кластер не является протекающим, хотя его элементы присутствуют как в первой, так и в последней строке. В таком случае для поиска границы, можно убрать периодичность сверху и снизу, тогда такие кластеры не будут считаться за один. Но для общей статистики по количеству и размерам кластеров, периодичность по верхней и нижней границе необходимо учитывать.

Для определения границы протекающего кластера нужно перейти от обычной решетки к дуальной. Если в двумерную плоскую решетку внедрить новую путем расположения в центрах ячеек дополнительных узлов и соединить эти узлы между собой, то полученная система будет называться дуальной решеткой.

Дадим определение границы протекающего кластера. Данную величину можно задать несколькими способами. Один из них следующий: граница - это множество элементов протекающего кластера, среди соседей которых есть хотя бы один элемент, принадлежащий кластеру другого типа, соответственно величина границы - это мощность этого множества, т.е. количество этих элементов. Но существуют случаи, когда у протекающего кластера нет границы, например, когда есть один большой кластер одного типа, в кото-

ром находятся несколько небольших кластеров другого. В этом случае что является границей такого кластера сказать сложно. Поэтому, чтобы не возникало таких случаев при расчете длинны границы, необходимо условие, что на решетке в текущем состоянии есть протекающие кластеры обоих типов. В такой ситуации можно утверждать, что у протекающего кластера интересующего нас типа точно есть граница.

Теперь можно описать алгоритм подсчета размера границы. На текущем шаге известны номера протекающих кластеров. Для того, чтобы проще было обойти его границу, ее можно пометить. Для того, чтобы понять, какой элемент нужно пометить, необходимо посмотреть каждый на наличие среди соседей элемент кластера другого типа. После пометки всех граничных элементов, нужно взять любой помеченный элемент в первой строке и переходить к соседнему помеченному. Первыми проверяем, есть ли помеченные соседние элементы снизу, далее сбоку, и затем уже сверху(если текущий элемент не в первой строке). Нужен счетчик переходов, который увеличивается на единицу, когда происходит переход. Величина такого счетчика как раз и будет являться величиной границы. Чтобы не попасть в цикл, убираем метку после перехода, чтобы не рассматривать элемент как граничный. Также следует учитывать периодичные граничные условия. На Рис.1 представлена граница протекающего кластера, полученную с помощью данного алгоритма. Синие точки - кооператоры, красные - дефекторы, черным представлена граница.



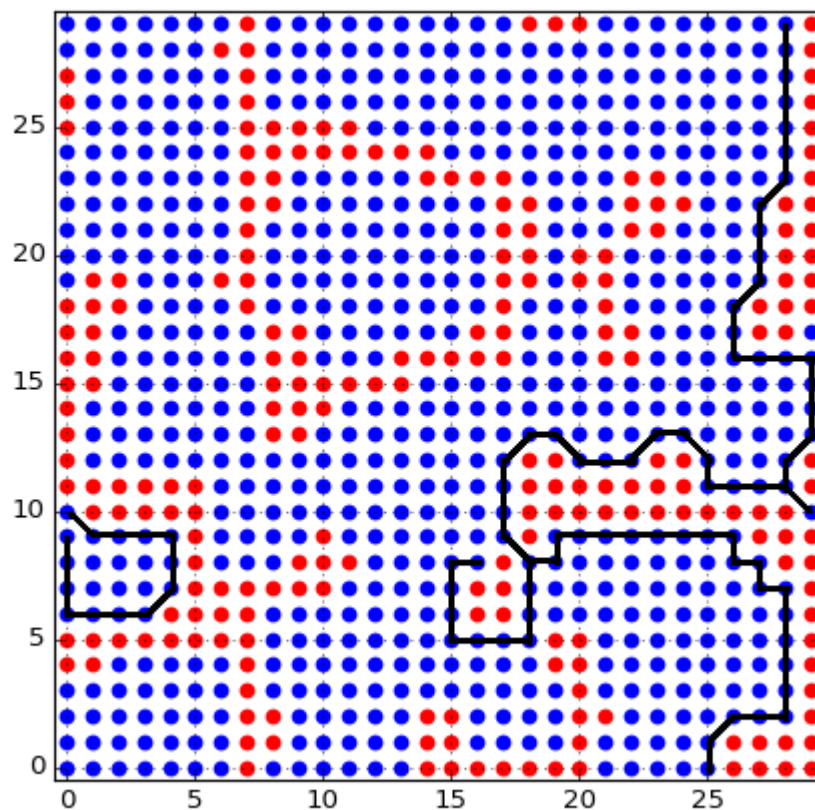


Рис. 1: Пример обхода границы

Этот алгоритм имеет серьезный недостаток. Например, если зайти в тупик, то он никогда не завершится, поэтому приходится либо начинать обход границы с другого элемента первой строки, либо возвращать величину границы равную нулю. Данная проблема решается путем изменения алгоритма на рекурсивный. При переходе необходимо знать следующие характеристики - метку элемента, номера протекающих кластеров обоих типов, текущую позицию и текущую длину. Алгоритм останавливается, когда достигнута последняя строка. Придя в тупик, происходит откат на последний элемент, у которого среди соседей было несколько помеченных элементов, и так как при переходе метка убирается, то на этот раз переход будет на новый элемент. Также при возврате длину границы не нужно пересчитывать, но необходимо иметь флаг, сигнализирующий о виде возврата, ведь возврат в рекурсии осуществляется и при окончании работы алгоритма. Но

и рекурсия всех проблем не решает. В текущей реализации не решены проблемы выбора границы, ведь алгоритм проходит по какой-то границе, а не минимальной. К тому же все направления соседей равнозначны, и какой элемент проверять на наличие метки первым также является проблемой. Кроме того, при обходе по помеченным элементам иногда угловые элементы учитываются, а иногда нет, хотя они тоже составляют часть границы.

Исходя из наличия множества недостатков, было принято решение рассмотреть полную границу протекающего кластера. Иными словами его периметр. Для этого не требуется, чтобы на в текущем состоянии были протекающие кластеры обоих типов, также не нужно помечать границу. Для вычисления периметра необходимо знать лишь номер протекающего кластера. К тому же периметр считается не как количество элементов, которые являются граничными, а как число связей между ними и элементами кластера другого типа. Такая величина является поверхностным натяжением системы, что характеризует раздел двух фаз. Другими словами, поверхностное натяжение пропорционально свободной энергии единицы площади поверхностного слоя. Алгоритм расчета периметра протекающего кластера довольно простой. Необходимо поэлементно рассмотреть протекающий кластер и посчитать сколько встречается элементов кластера другого типа. Количество таких элементов равно количеству связей на дуальной решетке. На Рис. 2 представлен периметр протекающего кластера. Синие точки - кооператоры, красные - дефекторы, черным представлена граница.

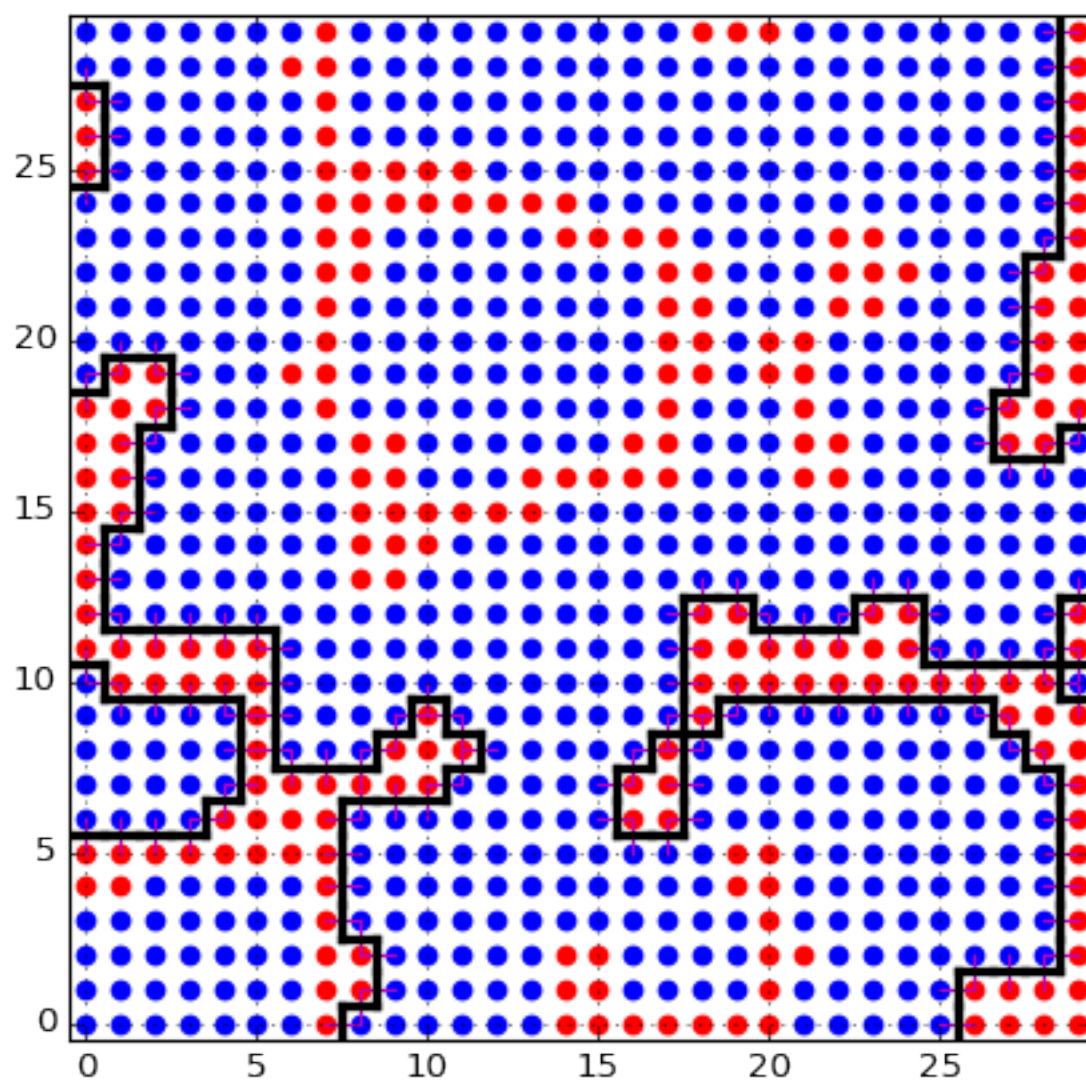


Рис. 2: Пример периметра протекающего кластера

### 3 Анализ результатов

В данной главе приведены результаты расчетов границ и периметров протекающих кластеров в зависимости от параметра  $T$  вблизи фазового перехода, слева и справа. Для каждого результата был проведен следующий расчет над моделью. Запускалась игра с указанным параметром  $T$ , вычислялась граница и периметр кластера кооператоров. Установлены следующие параметры: 26000 поколений, 50 реплик. Новая реплика - начало эксперимента, когда решетка заполняется в соотношении 90% кооператоров и 10% дефекторов. Т.е. Запускалось 50 игр по 26000 поколений, и результаты рассматривать все вместе. Чтобы убрать изначальные колебания, которые можно заметить в у М.Новакак и Р.Мэй, необходимо пропустить первые поколения, в данных расчетах пропущена первая 1000 поколений.

Были произведены вычисления одной границы протекающего кластера кооператоров, алгоритм подсчета был описан в предыдущей главе. В Таб.1 представлены данные о длине границы(SIZE) на разных размерах решетки(L). В последнем столбце(SD) указано стандартное отклонение величины границы. Приближение степенной функцией  $ax^b - c$  выглядит следующим образом:

$$a = 1.19701105 \pm 0.29714644117$$

$$b = 1.26456854 \pm 0.047342989343$$

$$c = 18.11436327 \pm 6.554490476$$

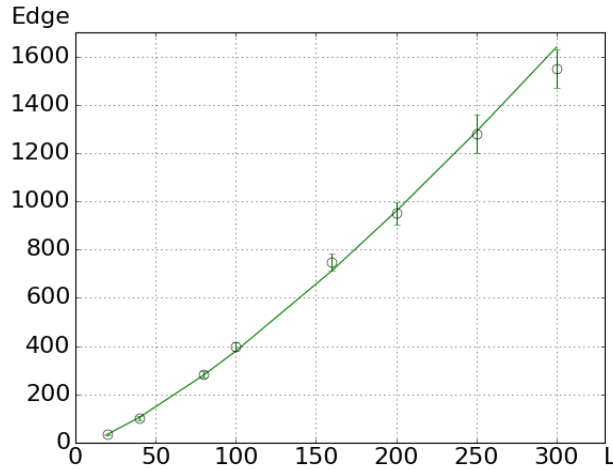


Рис. 3:  $T=1.799999$

L	SIZE	SD
20	35.2463399	7.0424445
40	101.6865767	16.0999028
80	285.2107208	61.2270698
100	397.3557487	84.6384228
160	748.1331192	166.3291768
200	950.2522597	228.5622371
250	1278.614018	364.1477427
300	1548.5866635	420.3067575

Таблица 1:  $T=1.799999$

Аналогичные измерения были проделаны и для периметра протекающего кластера кооператоров. В Таб.2, Таб.3 и Таб.4 приведены результаты

для параметра  $T$  вблизи, справа и слева от точки фазового перехода. Также было сделано приближение степенной функцией  $ax^b - c$

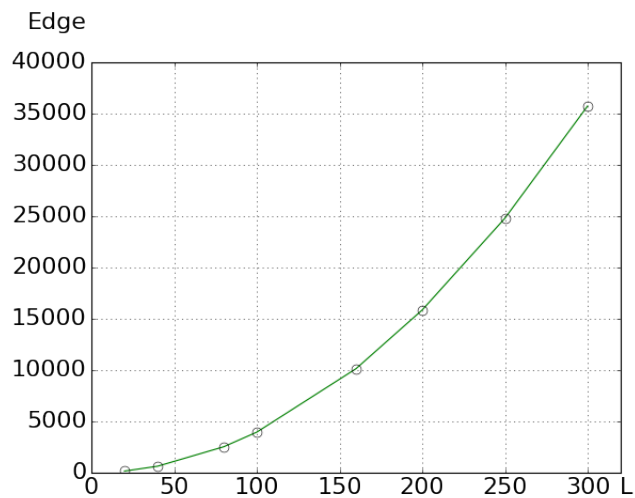


Рис. 4:  $T=1.799999$

L	SIZE	SD
20	157.363933	0.9588096
40	627.7152318	2.4366698
80	2527.0690522	5.2422666
100	3952.660201	5.4635683
160	10141.177825	10.9722955
200	15873.1174448	12.7376727
250	24780.7929112	16.6012481
300	35744.8596091	20.3251594

Таблица 2:  $T=1.799999$

Вблизи точки при параметре  $T=1.799999$  были получены следующие коэффициенты степенной функции:

$a = 0.38763412 \pm 0.0022880444$

$b = 2.00423884 \pm 0.0010799634$

$c = 0.00725958 \pm 1.1161251722$

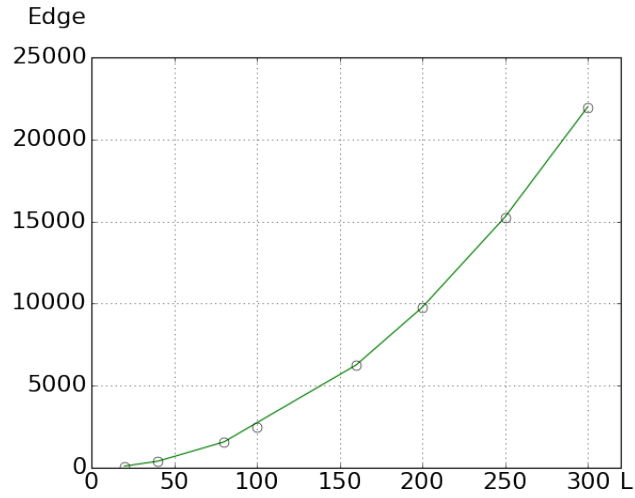


Рис. 5: T=1.85

L	SIZE	SD
20	38.4244482	4.7300971
40	391.7066584	0.0361383
80	1564.3151184	0.0876022
100	2443.3837938	0.1482743
160	6252.5685688	0.1674222
200	9767.1632024	0.255711
250	15260.4871784	0.2750390
300	21972.6163012	0.3701978

Таблица 3: T=1.85

Для T=1.85 коэффициенты такие:  
 $a = 0.24484482 \pm 0.000063518$   
 $b = 1.99948763 \pm 0.0000467144$   
 $c = 0.70602179 \pm 0.0566548321$

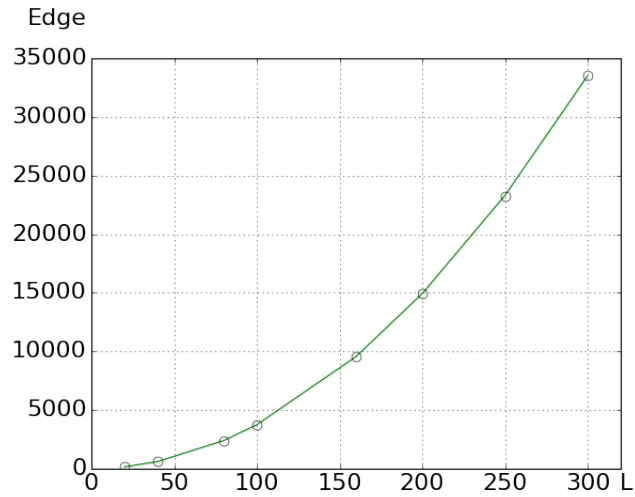


Рис. 6: T=1.75

L	SIZE	SD
20	155.3604996	1.7692564
40	604.1202568	2.9686895
80	2400.694044	6.5851788
100	3755.3912588	7.4496632
160	9548.8415264	11.6337259
200	14939.733194	16.6682224
250	23269.6086632	18.135744
300	33537.6329936	24.8820207

Таблица 4: T=1.75

Слева от точки фазового перехода (T=1.75) коэффициенты такие:  
 $a = 0.38154521 \pm 0.0030944386$

$$b = 1.99571736 \pm 0.0014786899$$
$$c = 4.51916773 \pm 1.8926722167$$

Исходя из результатов измерений можно сделать вывод, что общий периметр протекающего кластера с ростом системы имеет квадратичную зависимость.

## 4 Заключение

Полученный результаты являются неожиданными и интересными и требуют дальнейшего изучения. Также необходимо доработать и усовершенствовать алгоритм расчета одной границы протекающего кластера. А именно находить минимальную границу и понять, как она меняется с ростом системы.

## Список литературы

- [1] May R.M., Nowak M.A., "The spatial dilemmas of evolution" International Journal of Bifurcation and Chaos 3, 1993. P.35–78
- [2] Publication of Tucker's (1950) memo occurred in 1980 under the title On Jargon: The Prisoner's Dilemma, UMAP Journal 1, 101.
- [3] Колотев С.В., "Моделирование пространственных эволюционных игр *МИЭМ НИУ ВШЭ*, 2016
- [4] Hoshen J, Kopelman R., Percolation and cluster distribution I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm // Phys. Rev. B 14 (8), 1976 P.3438–3445.