

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

**Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова**

Колотев Сергей Васильевич

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ  
ИГР**

Выпускная квалификационная работа – магистерская диссертация  
по направлению 01.04.04 "Прикладная математика"  
студента образовательной программы магистратуры  
«Системы управления и обработки информации в инженерии»

Студент  
С.В.Колотев

Научный руководитель  
д.ф-м.н, проф.  
Л.Н. Щур

Рецензент

Москва, 2018 г.

## **Аннотация**

В работе изучается пространственная эволюционная игра Дилеммы Узника разработанная Р.Мэй и М.Новаком, модель игры со средним полем и модель одновременно проходящих двух игр с использованием чужого среднего поля. Используя алгоритм разбиения на кластеры Хошена-Копельмана, а также инструменты параллельного программирования OpenMP на двумерной решетке с периодическими граничными условиями исследуется точка фазового перехода. Кроме того, вычислено изменение границы интерфейса протекающего кластера в особых точках.

## **Abstract**

Simulation of Evolutionary Space Games

by Sergey Kolotev

The aim of this work is to analyze evolutionary space game Prisoner's Dilemma introduced by R.May and M.Nowak and two types of this model. The first one is model with average field and another one the same time two games with using average field of another game. Using Hoshen-Kopelman algorithm and OpenMP tools we study phase transition point on two dimensional square lattice with periodic boundary conditions. Besides, change of interface length of percolate cluster from size of lattice is calculated in the near of critical point.

Supervisor: Prof. Lev Shchur

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Модели теории игр</b>	<b>6</b>
3.1	Виды модели Дилеммы узника . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Описание алгоритмов исследования</b>	<b>8</b>
4.1	Алгоритм Хошена-Копельмана . . . . .	8
4.2	Описание модели . . . . .	10
4.3	Границы интерфейса . . . . .	11
4.4	Ускорение расчетов . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Вычисления</b>	<b>15</b>
5.1	Простая детерминистическая модель . . . . .	15
5.2	Простая модель со случайным полем . . . . .	18
5.3	Модель с чужим средним полем . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>25</b>
<b>7</b>	<b>Приложение 1</b>	<b>29</b>
<b>8</b>	<b>Приложение 2</b>	<b>30</b>
<b>9</b>	<b>Приложение 3</b>	<b>33</b>

# 1 Введение

Исследование математических и физических свойств структурных образований на плоскости, а также распознавание появления фазовых переходов вызывает большой интерес на сегодняшний день. Это объясняется двумя факторами. Первый из них - научный. Развитие стохастической эволюции Левнера (позже названной как эволюцией Шрамма-Левнера) [1], которая связывает свойства случайного блуждания в верхней полуплоскости со свойствами конформной теории поля (КТП) [2]. Она стала третьим подходом к алгебраическому решению [3] и КТП [4] решения для нахождения критических свойств некоторых двумерных системы классической статистической физики. Успешными примерами данного подхода являются задача о перколяции [5, 6] и модель Изинга [7]. Вторым фактором - это исследование физических и математических процессов планарной геометрии, связанных с практикой разработки новых материалов для микроэлектронных устройств следующего поколения [8]. Для объяснения конформной теории поля, сначала необходимо пояснить, что такое квантовая теория поля.

Квантовая теория поля изучает характеристики элементарных частиц, а также процессы взаимодействия между ними, а свойства самих частиц описываются с помощью теории относительности. Несмотря на различные происходящие процессы между элементарными частицами, их физические характеристики остаются неизменными. Если ввести конформные (т.е. сохраняющие углы в точках пересечения кривых) преобразования, то конформная теория поля - это инвариантная относительно конформных преобразований квантовая теория поля. Благодаря инвариантности, в КТП можно решить задачи, которые довольно сложно или невозможно решить в квантовой теории поля.

Эволюция Шрамма-Левнера (SLE) была впервые представлена в 1999г О. Шраммом. Это однопараметрическое семейство мер на прямых без самопересечений. Было показано, что на некоторых дискретных случайных блужданиях на решетке (например, случайное блуждание по петле [9], критический перколяционный проводник [10]) имеют SLE как предел масштабирования.

Конформные преобразования можно использовать для описания кривой без самопересечений, растущей с границы односвязной области [11]. Отображение переводит область с кривой в область без кривой внутри.

$$g_t(z) = z + 2t/z + O(1/z^2) \quad (1)$$

Формулой 1 описывается асимптотика отображения. Где  $t$  - является параметром. Если кривая касается саму себя, то отображение должно переводить в область, но уже без объединения кривой и тех точек, которые невозможно достичь из бесконечности. Левнер установил, что с помощью положения образа крайней точки можно определить как функцию  $g_t(z)$ [12], так и саму кривую, для этого нужно решить дифференциальное уравнение Левнера

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = 2[g_t(z) - \xi(t)]^{-1} \quad (2)$$

О. Шрамм показал, что мера инвариантна[1] на кривых лишь при выполнении равенства 3

$$\xi(t) = \sqrt{k}B_t \quad (3)$$

- где  $\xi(t)$  - образ кривой точки или управляющая функции,  $k$  - параметр кривизны кривой,  $B_t$  - одномерное броуновское движение.

Существуют два вида эволюции: хордальная и радиальная. Чаще всего исследования проводятся на первом типе, который описывает кривые, соединяющие один простой конец с другим в односвязной области[13]. Второй тип представляет собой двустороннюю радиальную функцию и функцию Грина[14]. Двусторонняя радиальная функция делится на две части. Первая - от простого конца во внутреннюю точку, а вторая - из внутренней точки ко второму простому концу. Иными словами, это кривая представляет собой хорду через фиксированную внутреннюю точку. Функция Грина оказалась плотностью SLE кривой с естественной параметризацией. Таким образом двусторонняя радиальная кривая соответствует дискретному случайному пути, а функция Грина - плотности пути.

Что же такое задача о перколяции? В статистической физике существует раздел, называемый "Теория перколяции которая занимается изучением поведения связанных структур на случайных графах[6]. Основным вопросом, которым занимается эта теория заключается в следующем: можно ли пройти от одного конца графа к другому по его элементам. Соответственно разделяют на перколяцию по узлам и перколяцию по связям. В наши дни теория перколяции имеет довольно широкое применение. В качестве примера можно привести ситуации из жизни. Как близко нужно садить деревья в лесу, чтобы, в случае пожара, огонь не сможет перекинуться на близлежащие деревья? Или же когда поливают пористый мате-

риал какой-нибудь жидкостью, достигнет ли она дна? В сфере медиа например, определить доступность той или иной машины в сетевом сегменте.

Перейдем к модели Изинга[7]. Пусть на двумерной решетке находятся точки, которые имеют определенное состояние, называемое "спин". Он может быть повернут вверх или вниз. Значению "вверх" соответствует  $+1$ , а "вниз"  $-1$ . Задав каждой точке свое спиновое число, получается конфигурация решетки. У конфигурации есть характеристика, называемая "энергией конфигурации" она равна сумме произведений всех соседних пар точек,

$$E(\sigma) = - \sum_{(ij)} J_{ij}^x \sigma_i \sigma_j - \sum_{(ik)} J_{ik}^y \sigma_i \sigma_k \quad (4)$$

- где  $\sigma$  - конфигурация решетки,  $\sigma_i$  - точка на решетке, имеющая спин,  $(ij)$  - сумма по строке и  $(ik)$  - сумма по столбцу,  $J$  - константа связи, являющейся параметром взаимодействия между точками. Статистическая сумма - одна из важных и полезных характеристик в статистической физике. Статсумма представляет собой функцию от температуры, позволяющую получить сведения об энергии, энтропии и других свойствах системы в термодинамическом равновесии.

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{E(\{\sigma\})/T} \quad (5)$$

- где  $T$  - температура,  $E(\{\sigma\})$  - энергия конфигурации

В теории фазовых переходов[18] наиболее исследуемыми на текущий момент являются переходы первого и второго рода. Для фазового перехода первого рода характерно изменение границы  $I$  между двумя структурами разного типа как линейная функция  $I \sim L$ [20], зависящая от размера системы. Для фазового перехода второго рода граница изменяется как степенная функция размера системы  $I \sim L^\theta$ [19]. Пару лет назад начали рассуждать на тему смешанного фазового перехода, в котором одни наблюдаемые величины ведут себя как при фазовом переходе первого рода, а другие - как второго. Аналитические исследования смешанного фазового перехода были проведены на одномерной системе[21]. В обычной задаче о перколяции вероятность принадлежать к бесконечной структуре(кластеру) подчиняется степенной функции от параметра модели. Затем было высказано предположение о том, что в динамической перколяции эта вероятность может резко меняться как функция параметра[22], известного как "discontinuous percolation"[23]

или разрывная перколяция.

## 2 Постановка задачи

Основной целью данной работы является найти ответ на вопрос - как меняются геометрические свойства стационарных или квазистационарных случайных структур?

Для этого необходимо смоделировать пространственную эволюционную игру "Дилемма узника" на квадратной решетке с периодическими граничными условиями. В которой каждый агент принимает одну из двух стратегий - кооператор (C) или дефектор (D). Начальная конфигурация случайна. Но для начала необходимо ознакомиться с самой моделью, какие вариации бывают и для чего они используются.

## 3 Модели теории игр

Середина XX века примечательна многими событиями, одним из которых является развитие теории игр. Основная цель классической теории игр заключается в поиске оптимальной стратегии в игре между двумя и более игроками, каждый из которых может определять свое поведение.[24] В повторяющейся игре агенты играют несколько раз по тем же правилам. Благодаря этому можно проследить изменения в поведении игрока, которое наблюдается из-за того, что он принимает то или иное решение исходя из результата предыдущих игр. Иными словами, его стратегия эволюционирует.

Существует множество моделей теории игр, которые являются объектом исследования ученых и по сей день.

"Ультиматум одна из самых простых моделей теории игр, придумана в 1982г. Между двумя агентами необходимо поделить сумму денег. Один из них предлагает кому сколько достанется, второй же игрок либо соглашается с вариантом и получает свою часть, либо отвергает предложение и деньги никому не достаются.

Модель "Трагедия общинного поля" была придумана ещё в первой половине XIXв Уильямом Фостером Ллойдом. Есть поле, на котором деревенские жители пасут коров. Если у всех будет пастись по одной корове, то в этом случае всё будет хорошо, травы на поле хватит, если у кого-то появится вторая корова, то

это тоже не критично. Но если каждый житель обзаведется по еще одной корове, тогда на поле не останется травы и весь скот умрет от голода.

"Проблема вагонетки" состоит в том, готов ли человек толкнуть на рельсы человека, ради спасения вагонетки с пассажирами. Предложена в 1967г Филиппой Фут.

"Аукцион". На продажу выставляется купюра и как и в обычном аукционе происходят торги, в которых участники называют свою цену. Купюру забирает тот, чья ставка была максимальной, но есть один нюанс - владелец купюры помимо суммы ставки получает также ставку предшествующей максимальной.

Одна из самых распространенных моделей теории игр является Дилемма Заключенного. В ней играют два агента, каждый из которых использует две возможные стратегии: кооператор С и дефектор D. Агент получает определенное количество очков от выбора своей стратегии и стратегии своего оппонента.

### 3.1 Виды модели Дилеммы узника

У повторяющейся Дилеммы Заключенного также существуют вариации[25], влияющие на то, как будет эволюционировать поведение агентов, какую стратегию они выберут в той или иной ситуации. Кроме того, модель может иметь большее число стратегий, чем в стандартной интерпретации. Ниже приведены некоторые из них.

В одной из вариаций каждый агент со стратегией кооператора всегда будет кооператором на протяжении всей игры и только дефекторы имеют возможность выбора стратегии. Или же ситуация наоборот - когда только кооператоры могут поменять стратегию, а дефекторы остаются дефекторами на протяжении всего времени.

Существует вероятностная модель, в которой вводится некий случайный параметр, отвечающий за то, какую стратегию выберет агент в следующей игре.

Также есть модель, в которой агент копирует поведение своего оппонента. Она имеет название "око-за-око". Помимо этого, агент может взять стратегию оппонента, если он дважды выбрал одну и ту же, или наоборот - придерживаться предыдущей стратегии оппонента несколько игр подряд.

Существуют и более хитрые вариации. Например, если одна из стратегий принесла агенту хороший доход(после игры с кооператором, если он был кооператором или дефектором), то он будет ее придерживаться, пока она не принесет ему



плохой доход. После чего он сменит стратегию и также будет ориентироваться на доход от новой стратегии.

Более того, есть модель, в которой агент придерживается стратегии кооператора, если его оппонент за все предыдущие игры был чаще кооператором, чем дефектором. Здесь приходится определять, что делать, когда оппонент принимал обе стратегии одинаковое количество раз.

Интересно задуманы следующие две модели. В первой агент рассчитывает долю игр оппонента как дефектора и использует ее в качестве вероятности принять данную стратегию самому. Во второй модели агент, прежде чем начинать рассчитывать вышеописанную долю, играет за кооператора некоторое количество игр, затем копирует поведение оппонента, и лишь только потом приступает к вычислению вероятности.

Эволюционная теория игр исследует поведение большой популяции, где макроскопическое число игроков имеет конечное число стратегий. В то время как классическая теория игр имеет дело с одиночными агентами. Пространственная эволюционная игра заключается в помещении агентов на какую-либо пространственную структуру и во взаимодействии их со своими ближайшими соседями. Структуры могут быть разнообразными - решетки, графы, сети. В качестве модели в текущем исследовании была взята пространственная эволюционная Дилемма Узника на двумерной решетке.

Пространственное расположение игроков образует геометрические структуры - группы игроков, которые синхронизируют свое поведение с соседями и конкурируют с другими группами.

## 4 Описание алгоритмов исследования

### 4.1 Алгоритм Хошена-Копельмана

Для решения задачи о перколяции был учеными Дж. Хошен и Р. Копельман придуман алгоритм, который позволяет выделить различные структурные образования на решетке или графе[26]. Одним из замечательных свойств данного алгоритма является то, что он позволяет разбить решетку на кластеры можно всего за один проход по ней. В условиях большого размера системы это несомненно является большим преимуществом. На выходе после работы алгоритма можно узнать

к какому кластеру принадлежит тот или иной агент на решетке, а также размер каждого кластера.

Принцип алгоритма довольно простой. В качестве примера будем рассматривать изучаемую модель, т.е. квадратную решетку с периодическими граничными условиями. Сразу стоит сказать, что в изначальной версии алгоритма учитываются только соседи по горизонтали или вертикали, как ладья, но лишь на соседнюю клетку. А так как в модели каждый агент взаимодействует с агентами и по диагонали, то необходимо при работе алгоритма рассматривать и их. Таким образом, при разбиении на кластеры каждый агент аналогично королю из шахмат смотрит на соседей. На Рис.1 представлена иллюстрация работы алгоритма Хошена-Копельмана без каких-либо модификаций.

В нашем случае мы начинаем проход по строкам, начиная с левого верхнего агента. Можно начать с каждого конца и идти, например, по столбцам - суть алгоритма от этого не изменяется. Цель - правильно расставить метки на агентах. Эти метки соответствуют кластеру, к которому принадлежат данные агенты. Каждой метке соответствует индекс элемента массива кластеров, а сами элементы кластера - это его размер, или иными словами - количество агентов, помеченных номером соответствующего кластера.

В самом начале, когда решетка не заполнена, на первой строке агент смотрит на предыдущего, принадлежит ли тот какому-либо кластеру, если да, то текущий агент маркируется также, как и его сосед. Если предыдущий не имеет метку или является другим типом элемента, то номер метки увеличивается на единицу. Первая строка разбивается быстро и просто.

Что касается второй строки и последующих, то там есть некоторое дополнение. Каждый агент должен смотреть на соседа слева, и на троих соседей сверху. И вот здесь происходит наиболее сложная логика алгоритма, так как вероятно, что среди этих агентов найдутся те, которые принадлежат разным кластерам. В этом случае предпочтение отдается текущий агент присоединится к кластеру с наименьшей меткой среди соседей. Кроме того, два конкурирующих кластера должны объединиться в один, так как текущий агент является их общим элементом.

Объединение двух кластеров происходит лишь на уровне массива с размерами. Кластер с большей меткой присоединяется к тому, что с меньшей, их размеры суммируются, а в массиве на место элемента кластера с большей меткой помещается

номер метки кластера, в которой произошло слияние, причем со знаком минус. Таким образом в массиве создается связь между двумя кластерами, и если мы хотим узнать, какому кластеру принадлежит элемент, то можно посмотреть на его метку, и если в массиве под таким индексом лежит отрицательное число, то оно указывает на метку кластера, к которому было присоединение.

Необходимо учитывать ситуацию, происходящую на границе решетки. Так как в текущей модели периодические границы, то необходимо, чтобы каждый крайний агент проверял другую сторону решетки на наличие метки.

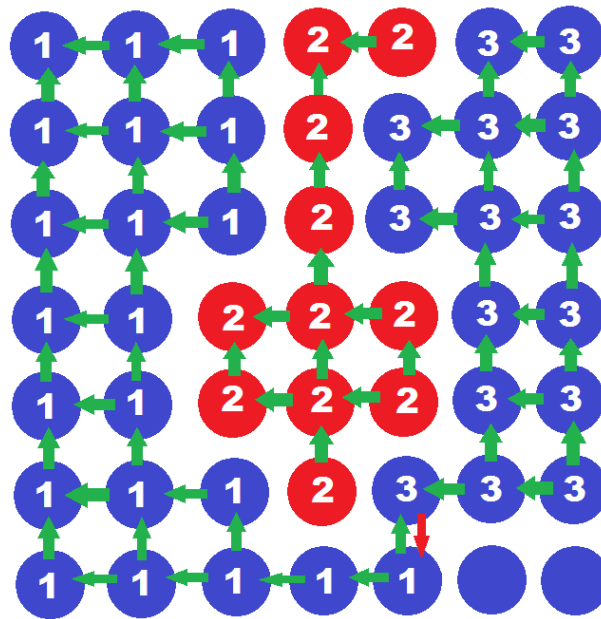


Рис. 1: Принцип алгоритма НК76. Зеленые стрелки показывают, на каких соседей смотрит текущий агент. Красная стрелка показывает ситуацию слияния одного кластера в другой

## 4.2 Описание модели

В этой работе исследование модели Дилеммы Узника началось с варианта Р.Мэя и М.Новака[15]. Ученые расположили агентов на квадратно двумерной решетке. Для минимизации граничных эффектов были взяты периодические граничные условия. Начальная конфигурация составляет 90% кооператоров. Каждый агент играет с восемью ближайшими соседями и с самим собой, получая при этом определенный доход. В следующем раунде агент возьмет стратегию с максимальным доходом среди соседей или же свою(если его стратегия была более прибыльная).

В элементарной игре количество очков зависит от выбранной стратегии. Ученые определили следующие правила:

- если оба агента дефекторы, то никто ничего не получает
- если оба кооператоры, то оба получают доход  $S = 1$
- при игре разных стратегий дефектор получает максимальный доход  $T > S$ , а кооператор ничего

Ученые пришли к выводу, что данная модель является клеточным автоматом, в котором состояние агентов зависит от окружающих его соседей, которые также зависят от своего окружения. Таким образом, в определении состояния агента в следующем раунде влияет 25 окружающих его агентов. На Рис. 4 в черной рамке показаны соседи, между которыми агент будет выбирать стратегию, а те, что в зеленой рамке участвуют только в подсчете дохода. Получается 2 уровня соседей и его текущее состояние. Также примечателен тот факт, что доход зависит только от одного параметра  $b = T/S$ .

Кроме того, было изучено поведение единичного агента среди агентов другой стратегии. Так при  $b < 1$  дефекторы исчезают всегда, а  $b > 3$  вымирают уже кооператоры. При  $1 < b < 9/5$  возникают описанные учеными некоторые структурные образования, названные глайдерами, ротейторами и гроверы. Малые структурные образования остаются не увеличиваются, а большие становятся меньше. Но в ситуации, когда  $b > 9/5$  единичный дефектор и любая структура из дефекторов начинает расти, причем единичный дефектор начинает расти как калейдоскоп, что выглядит довольно красиво. Что касается кооператоров, то они растут до того момента, когда  $b < 2$ , и большие структурные образования из кооператоров уменьшаются при  $b > 2$ . Можно заметить, что среди промежутков роста и тех и других агентов, есть промежуток, в котором растут структуры как кооператоров, так и дефекторов, поэтому там и наблюдается некое соперничество между обеими стратегиями.

### 4.3 Границы интерфейса

Целью работы - выяснить, как изменяются геометрические свойства структур на решетках. Для этого необходимо ввести понятие интерфейса или границы кластера. Само слово интерфейс, известное многим, означает средство или инструмент

взаимодействия одного объекта с другим. Например, человек взаимодействует с компьютером, управляя мышью или клавиатурой. Но в данной ситуации это не средство управления, а скорее то, что находится между двух различных сред, поэтому сюда больше подходит понятие границы.

Для определения понятия границы, нужно объяснить, что такое дуальная решетка. Возьмем обычную квадратную решетку, аналогичную той, что в модели этого исследования и наложим на неё еще одну такого же типа, но таким образом, чтобы ее ребра проходили через середины ребер первоначальной решетки и были им перпендикулярны. Такая конструкция называется и дуальной решеткой.

Так как мы наша задача тесно связана с задачей о перколяции, то исследовать геометрические свойства необходимо у протекающих кластеров. Это те кластеры, по элементам которого можно дойти от одной границы решетки к противоположной. Данные кластеры из-за периодических граничных условий являются бесконечными, поэтому они и интересны.

Теперь перейдем непосредственно к объяснению, что же такое граница. Проведем связи между крайними элементами протекающего кластера к соседям, имеющих другую стратегию. Элемент называется крайним, если по горизонтали или по вертикали среди его соседей найдется хотя бы один агент, имеющий другую стратегию. Теперь вернемся к дуальной решетке и проведем перпендикулярно этим связям линию, соединяющую узлы дуальной решетки. Совокупность этих линий является границей или интерфейсом протекающего кластера[11]. На Рис.2 изображен пример как выглядит граница протекающего кластера из дефекторов.

Численная величина границы - это количество линий, проведенных перпендикулярно связям между элементами протекающего кластера и агентами другого типа. Количество линий - это фактически число связей, через которые они были проведены, а это равно количеству соседей, имеющих другую стратегию. Таким образом алгоритм вычисления границы заключается в следующем. Идем построчно начиная с верхнего левого элемента решетки. Проверяем, принадлежит ли он протекающему кластеру. Если да, то считаем количество его соседей по вертикали и горизонтали, которые имеют другую стратегию, затем переходим к другому элементу.

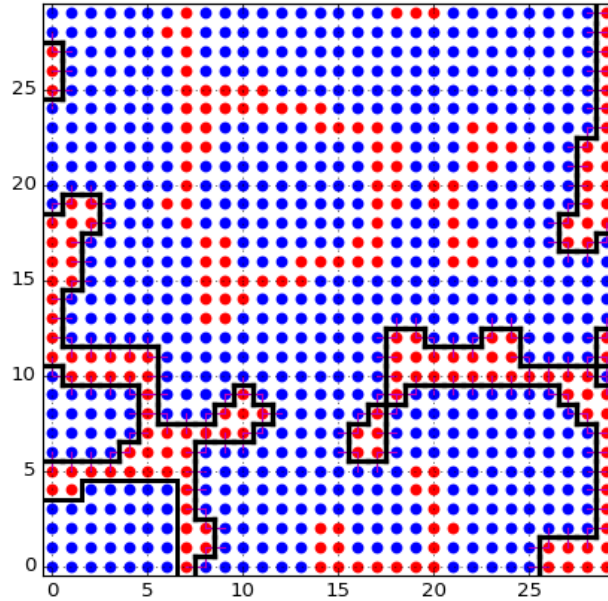


Рис. 2: Пример границы протекающего кластера из дефекторов

## 4.4 Ускорение расчетов

В этом разделе будет описан алгоритм ускорения смены конфигурации в модели. Очевидно, что увеличение размера системы требует серьезных затрат с точки зрения производительности, поэтому для вычисления на системах с разными размерами мы разработали параллельный алгоритм подсчет конфигурации системы.

Для ускорения работы алгоритма мы выбрали OpenMP[27]. Довольно простой принцип использования, которые не требует серьёзной модификации основного алгоритма позволяет получить существенный прирост производительности.

В технологии OpenMP существует главная нить, называемая "мастер в которой выполнение кода происходит последовательно. Но эта нить порождает дочерние и разделяет между ними те части кода, которые необходимо распараллелить.

Для модернизации кода необходимо поместить нужны директивы в части кода. А для использования нужно лишь задать соответствующий ключ при компиляции программы. Это также большой плюс в гибкости кода - легко переключаться между параллельной и последовательной версией программы. Но для OpenMP необходимы системы с общей памятью, а также компилятор, поддерживающий соответствующую технологию.

Одной из целей параллельного программирования является распределение однотипных инструкций процессору между нитями. Засчет этого и получается уско-

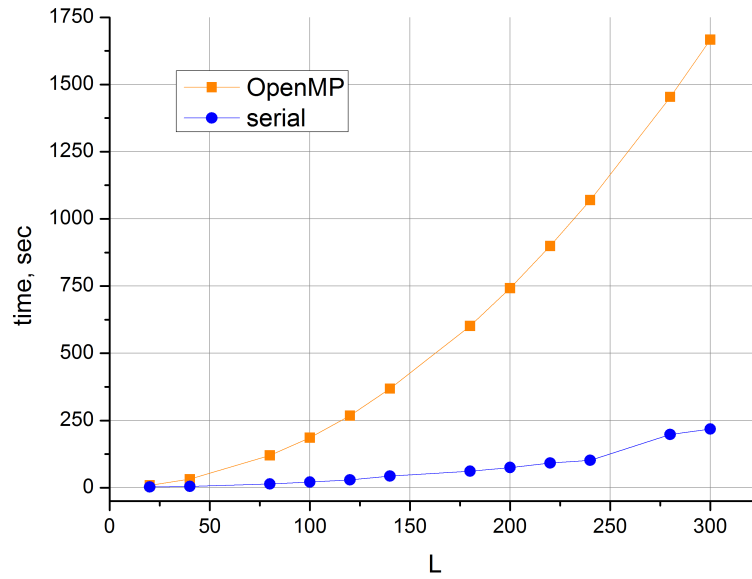


Рис. 3: Время выполнения последовательного и параллельного алгоритма в сек. По вертикали - время выполнения в сек. По горизонтали - размеры решетки.

рение. Следуя этому принципу, мы распараллелили модель эволюционной игры. Мы распределили между нитями каждую строку решетки, как показано на Рис.4 и получили соответствующий прирост в скорости выполнения программы. На Рис. показано время работы последовательного кода и варианта с использованием технологии OpenMP.

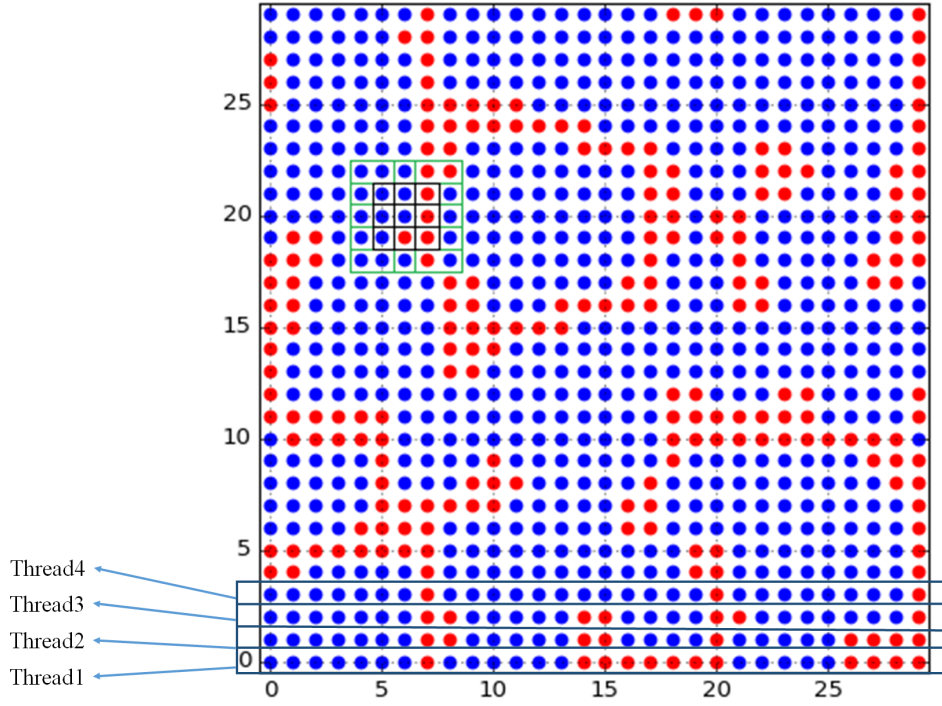


Рис. 4: Иллюстрация параллельного алгоритма и количества игроков, участвующих в определении стратегии.

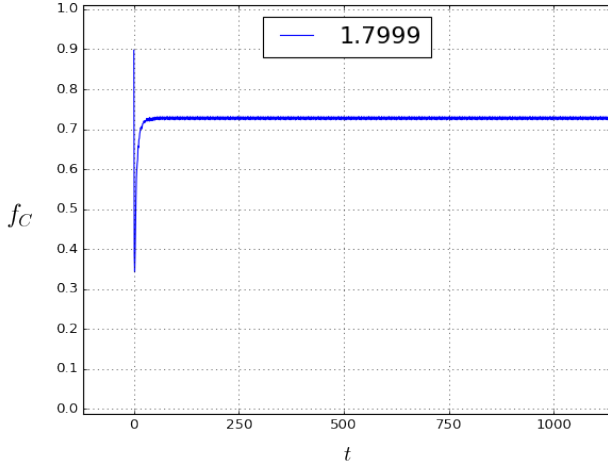
## 5 Вычисления

### 5.1 Простая детерминистическая модель

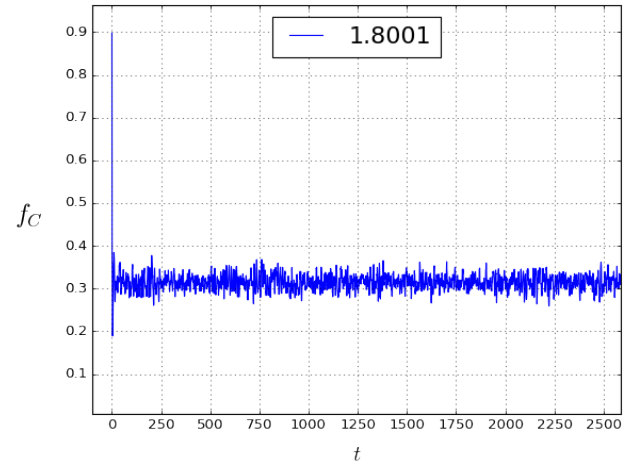
Исследуя пространственную эволюционную Дилемму Узника Р. Мэя и М. Новака, удалось выявить, что конфигурация агентов на решетке резко меняется при переходе через значение  $b = 9/5$ . При  $b < 9/5$  структура кооператоров относительно статична, а при  $b > 9/5$  наоборот можно наблюдать разнообразную динамику на решетке - рост, передвижение и столкновение.

Кроме того, ученые выяснили, что в точке  $b = 9/5$  начинает расти единичный дефектор, причем образуя при этом эволюционирующий калейдоскоп. Аналогичной точкой в модели со случайным игроком является  $b = 3/2$ . Слева от этой точки в модели Р.Мэй и М.Новака единичный дефектор живет следующим образом: 1D-9D-1D (чередование - 1 дефектор, 9 дефекторов, и снова 1 дефектор). В модели со случайным игроком происходит немного другой процесс: 1D-9D-...-8D-6D. Сначала один дефектор разрастается на 9 (квадрат 3x3), затем спустя некоторое время у него пропадает один уголок, далее через некоторое число поколений у него остается 6.

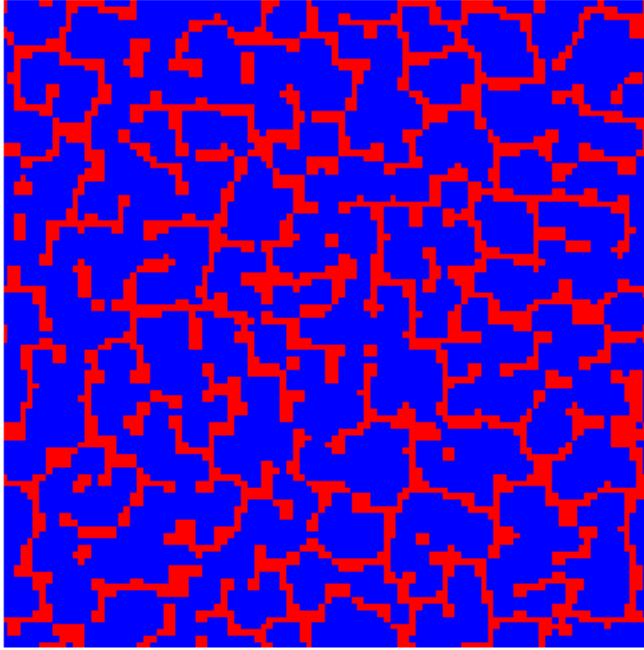




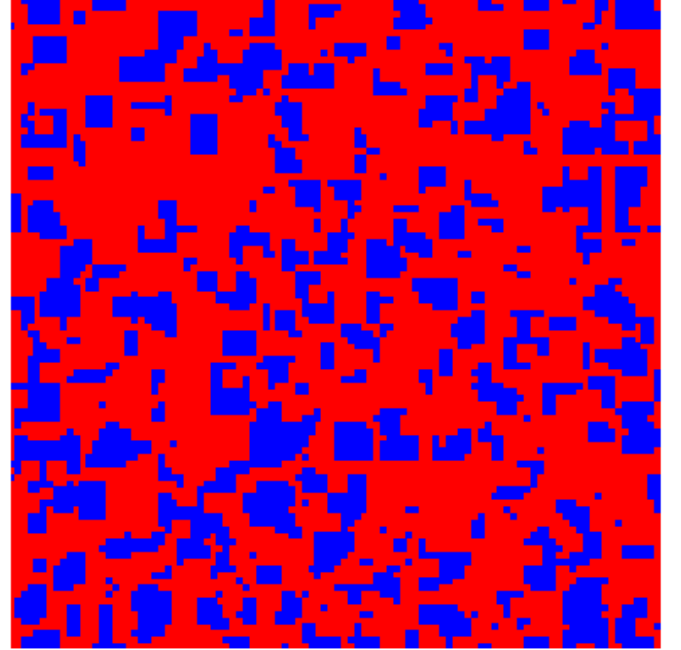
(a)  $b = 1.7999$



(b)  $b = 1.8001$



(c)  $b = 1.7999$



(d)  $b = 1.8001$

Рис. 5: Снимки решеток игры 100x100 вблизи точки фазового перехода  $b = 9/5$

На Рис.5 представлены примеры плотности кооператоров на решетке, а также самих решеток слева и справа от точки  $b = 9/5$ . Слева от точки наблюдается квазистационарный режим Рис.5с - это следует из графика плотности кооператоров на решетке выше Рис.5а. Ситуация с другой стороны иная. На решетке преобладают дефекторы Рис.5d и, исходя из графика Рис.5а, отсутствует какой-либо режим.

Для наглядного представления, как меняется динамика игры с изменением параметра  $b$ , было взято 25 независимых реализаций начального заполнения и вычислена средняя плотность кооператоров по времени, без учета первых  $10^3$  игр

для уравнивания и усреднения по  $2 \times 10^4$  раундов. На Рис. показан график изменения плотности кооператоров от параметра  $b = T/S$ , на котором отчетливо виден резкий переход в точке  $b = 9/5$ , при котором плотность кооператоров падает с 70% до 30%

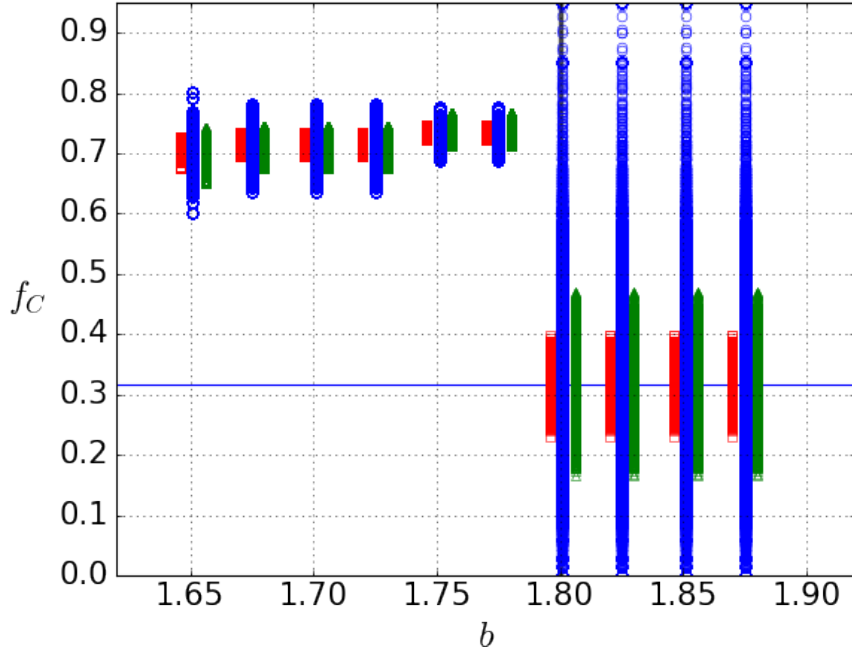


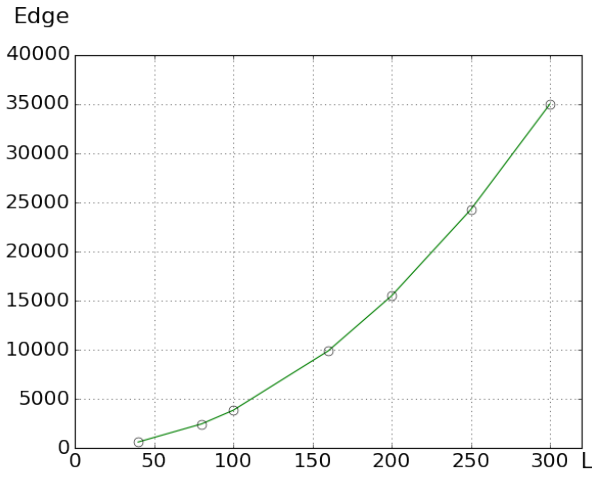
Рис. 6: Изменение плотности кооператоров от параметра  $b$

Так же можно заметить одну особенность. Не только плотность изменяется при переходе через особую точку, также распространение мелких структур резко увеличивается. Но несмотря на это, оно имеет конечный размер, уменьшающийся с ростом размера всей решетки. Второй факт заключается в том, что средняя плотность кооператоров на решетке при  $b > 9/5$  удовлетворяет значению  $f_C = 12 \log 2 - 8 \approx 0.32$ .

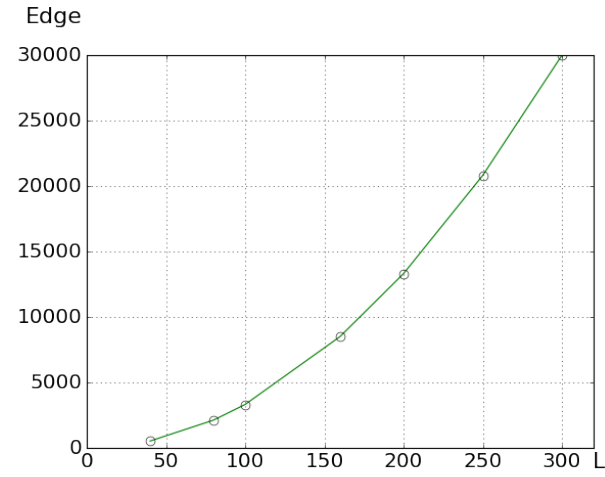
Кроме того, мы замерили как изменяется длина интерфейса протекающего кластера и приблизили это степенной функцией 6

$$I = AL^\theta + c \quad (6)$$

Замер был проведен слева и справа от точки фазового перехода Рис. 7. Слева коэффициенты закона принимают следующие значения. Для  $b = 1.7999$   $A = 0.3622(1)$ ,  $c = -10.1(1)$  и  $\theta = 2.0124(3)$ . Справа от точки перехода коэффициенты следующие при  $b = 1.8001$ ,  $A = 0.3280(1)$ ,  $c = -5.1(1)$  и  $\theta = 2.00272(5)$ . В термодинамическом пределе при стремлении размера системы к бесконечности



(a)  $b = 1.7999$



(b)  $b = 1.8001$

Рис. 7: График приближения длины границы протекающего кластера вблизи точки  $b = 9/5$

степень роста границы интерфейса в соответствии с размерностью Минковского будет  $\theta = 2$  [29], причем в обоих режимах (справа и слева от точки перехода).

## 5.2 Простая модель со случайным полем

Внесем некоторые изменения в текущую модель. Основные характеристики модели оставим без изменений, но поменяем условие игры. Каждый игрок получает доход, играя со своими 8 соседями и со средним полем. Среднее поле определяется следующим образом - вычисляется доля кооператоров на решетке в данный момент времени, генерируется число в интервале от 0 до 1 и сравнивается с долей кооператоров. Если оно оказалось больше, то девятый игрок - дефектор, если меньше - кооператор. В следующем раунде игрок выберет стратегию соседа с максимальным доходом. Случайный игрок окажется кооператором с вероятностью равной плотности кооператоров на решетке в данный момент времени. Решетка обновляется, когда каждый игрок определил свой тип в следующем раунде.

Ниже в приведены формулы, по которым рассчитываются доходы кооператора ( $P_c$ ) и дефектора ( $P_D$ )

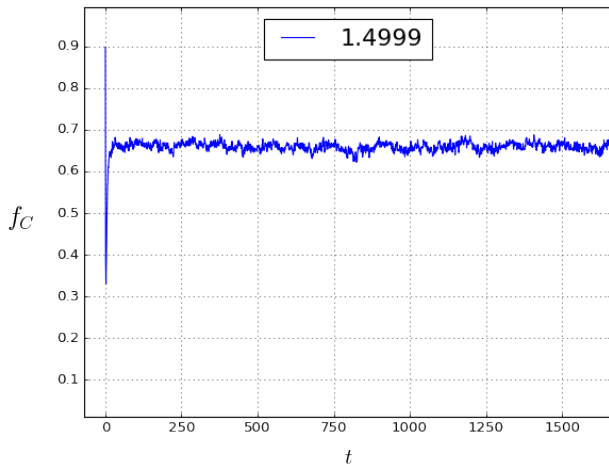
$$P_c = n_c * R + \theta(f_c - x)$$

$$P_D = n_c * R * b + \theta(f_c - x) * b$$

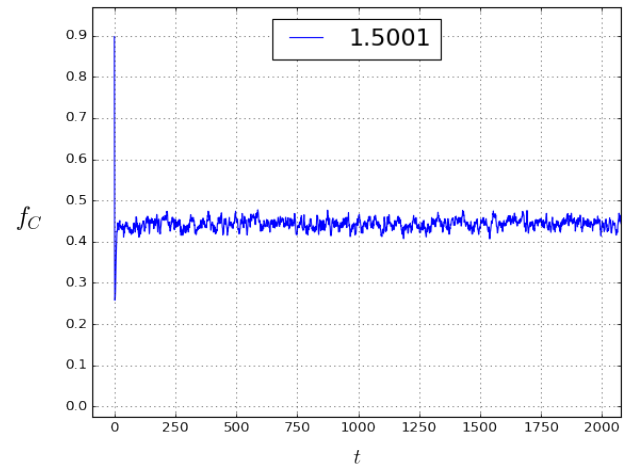
где  $f_c$  - плотность кооператоров на решетке в данный момент времени,  $\theta(f_c - x)$  - функция Хэвисайда,  $x \in [0, 1]$  - случайное число  $n_c$  - количество соседей, являющихся кооператорами

Эта модель практически совпадает с той, что описали в своих работах Р. Мэй и М. Новак в 1992г. Отличие составляет лишь то, что в их версии игрок вместо среднего поля играет сам с собой.

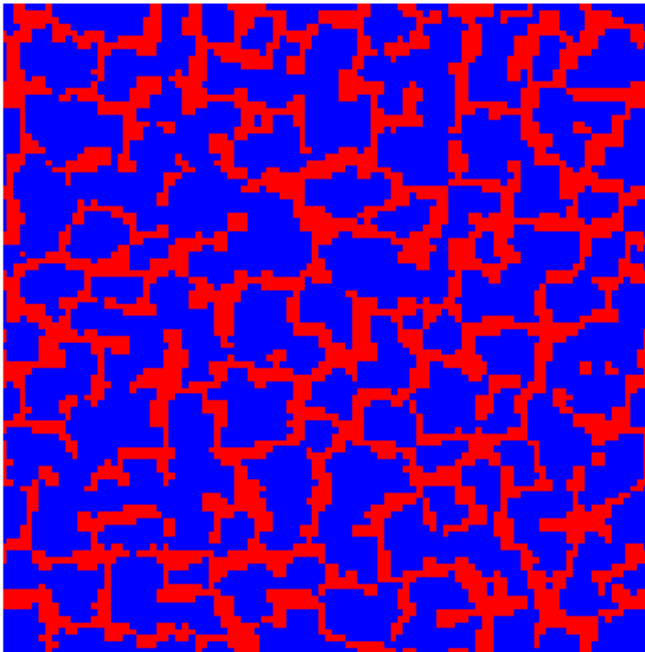
При параметре  $b > 3/2$  Происходит рост единичного дефектора, причём аналогичным образом, как и в другой модели при  $b = 9/5$ , образуется эволюционирующий калейдоскоп, но так как в исследуемой модели присутствует фактор случайности, то фрактал рушится спустя несколько поколений после начала.



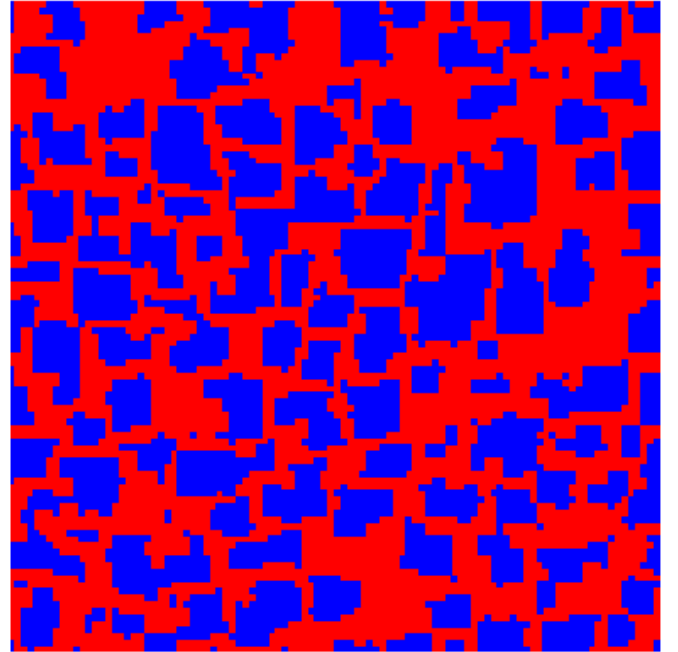
(a)  $b = 1.4999$



(b)  $b = 1.5001$



(c)  $b = 1.4999$



(d)  $b = 1.5001$

Рис. 8: Снимки решеток и графиков плотности кооператоров на ней для игры со средним полем размером 100x100 вблизи значения  $b = 3/2$

На Рис. 8 представлены снимки решеток вблизи точки  $b = 3/2$  слева и справа

от нее. Размер решетки 100x100 игроков, синим цветом обозначены кооператоры, красным - дефекторы. Исходя из Рис. 88a и 8b можно сделать вывод что квазистационарного режима нет ни слева, ни справа от точки  $b = 3/2$ .

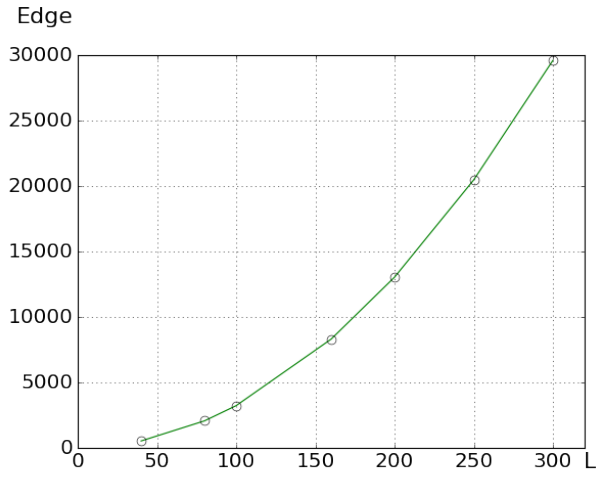
В Приложении 1 находятся графики зависимости плотности кооператоров на решетке от времени при различных значениях параметра  $b$ . Зеленым цветом показано поведение модели Р.Мэй и М.Новака. Синим - модель со случайным игроком. Начальное заполнение решетки 90% игра длится 21000 поколений. Можно заметить, что сначала присутствует резкое падение вниз плотности кооператоров, а затем с определенного момента изменение стабилизируется, причём для каждого параметра  $b$  время релаксации является различным.

При подсчете средних плотностей первоначальные изменения плотности не учитываются, поэтому начало подсчета начинается со значений, указанных в Таб.1, где  $t_{old}$  - время релаксации в модели Р.Мэй и М.Новак,  $t_{new}$  - в модели со случайным игроком,  $b$  - максимальный доход в одной игре между двумя игроками.

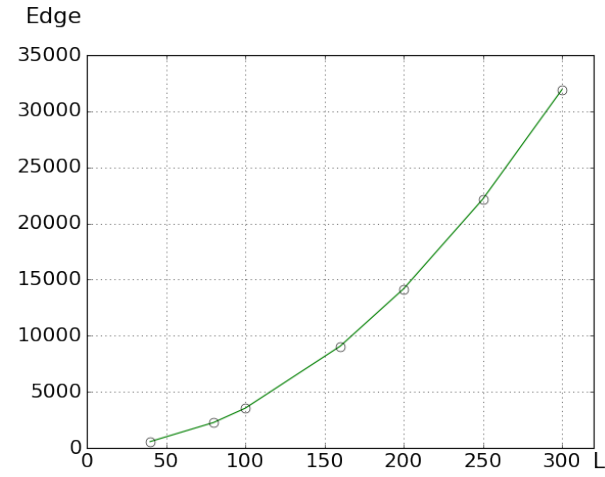
$b$	$t_{old}$	$t_{new}$
1.3	100	10000
1.35	100	16000
1.4	100	2000
1.45	100	500
1.5	400	100
1.55	400	500
1.6	16000	100
1.65	100	500
1.7	100	4000
1.75	100	1000
1.8	100	500
1.85	100	500
1.9	100	500

Таблица 1: Время релаксации при различных параметра  $b$

Следующий этап - подсчет средней плотности. Для этого запускается 25 реплик игры с количеством поколений выбранным так, чтобы в каждой реплике было 20000 поколений, начиная с времени релаксации, соответствующему параметру  $b$ . В итоге получается усреднение по 500000 поколениям.



(a)  $b = 1.4999$



(b)  $b = 1.5001$

Рис. 10: График приближения длины границы протекающего кластера вблизи точки  $b = 3/2$

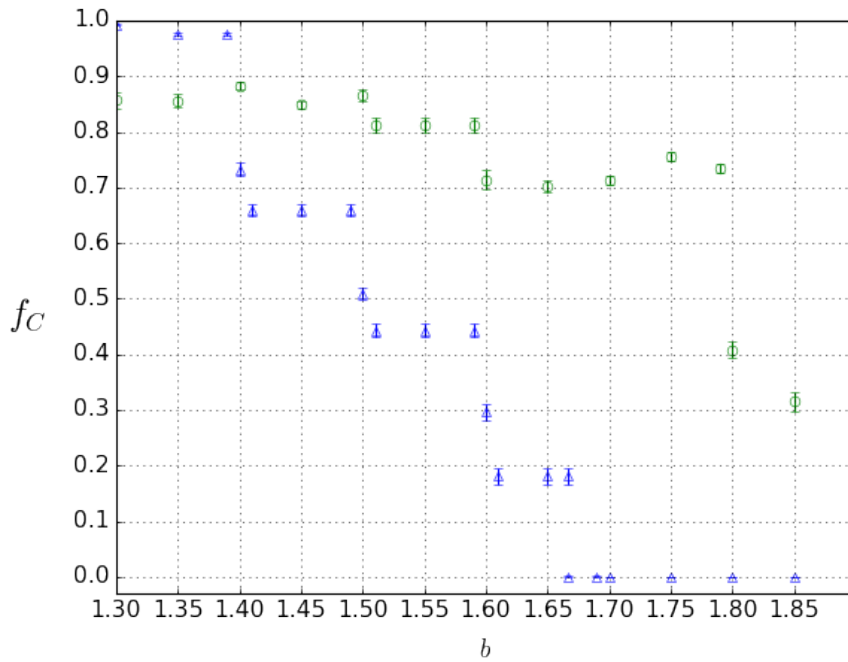


Рис. 9: График зависимости плотности кооператоров от  $b$ . Зеленые кружки - модель Р.Мэй и М.Новака, синие треугольники - модель со средним полем

В данной модели точке  $b = 9/5$  предыдущей модели соответствует  $b = 3/2$ . Справа от нее растет единичный дефектор и  $3 \times 3$  блок из кооператоров, а также отсутствуют протекающие кластеры кооператоров. Кроме того, приближение степенной функцией (6) также дало степень аналогичную из предыдущей модели - Рис.10

Таким образом и в этой модели граница протекающего кластера растет квад-

ратично из ростом размера системы. Слева коэффициенты закона принимаются следующие значения. Для  $b = 1.4999$   $A = 0.2847(2)$ ,  $c = 30(1)$  и  $\theta = 2.025(1)$ . Справа от точки перехода коэффициенты следующие  $b = 1.5001$ ,  $A = 0.34931(6)$ ,  $c = -3.64(6)$  и  $\theta = 2.00271(3)$ . В данной модели также в термодинамическом пределе  $\theta = 2$ [29].

На Рис. 9 можно заметить, что практически все точки, в которых происходит скачок средней плотности, совпадают в обеих моделях, но нельзя утверждать, что модели ведут себя одинаково в этих точках. В модели со средним полем есть точка перехода  $b = 1.66$ , после которой кооператоры вымирают полностью, не совпадает с другой моделью. Аналогичной точкой в модели Р.Мэй и М.Новака является  $b = 3$

### 5.3 Модель с чужим средним полем

Рассмотрим модель из предыдущего пункта. В котором каждый агент играл со средним полем текущей решетки. Мы внесли некоторые изменение и в эту модель. Запускаются одновременно две игры соответствующие модели игры со средним полем(см. предыдущий пункт). Изменение заключается в том, что каждый агент среди его оппонентов, помимо восьмерых его соседей он должен сыграть со средним полем другой решетки, которая запускалась вместе с первой, а на другой решетке - соответственно со средним полем первой. Графики плотностей кооператоров находятся в Приложении 4. Количество раундов для релаксации системы, которые не учитываются в вычислениях указаны в таблице ниже.

$b$	1.35	1.45	1.55	1.65
1.35	25000			
1.45	5000	5000		
1.55	5000	5000	5000	
1.65	5000	5000	5000	5000
1.75	25000	5000	5000	5000

Таблица 2: Таблица с количеством первых неучитываемых раундов игры  $b$

В Приложении 2 можно найти графики плотностей кооператоров на решетке от времени при различных значениях параметра  $b$ . Размер решетки 100x100. Всего количество раундов составляет 20000.

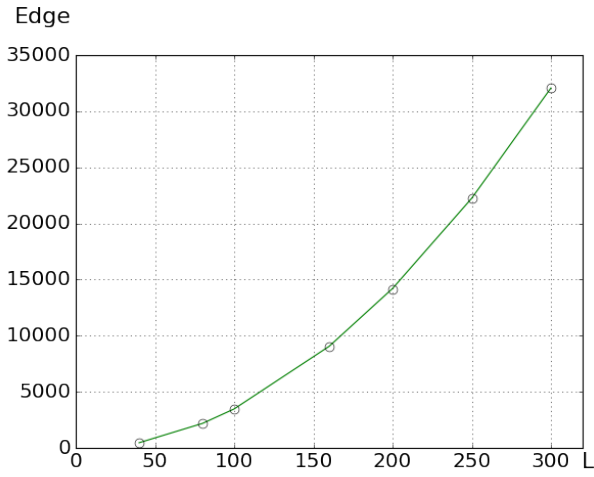
В приложении 3 находятся снэпшоты конфигураций модели при 3 вариантах

$b$	1.35	1.45	1.55	1.65	1.75	OLD
1.35	0.978(2) 0.978(2)					0.978(2)
1.45	0.78(1) 0.71(1)	0.66(1) 0.66(1)				0.66(1)
1.55	0.69(1) 0.26(3)	0.61(1) 0.35(2)	0.44(1) 0.44(1)			0.44(1)
1.65	0.861(5) 0.00	0.700(1) 0.00	0.721(1) 0.00	0.18(2) 0.18(2)		0.18(2)
1.75	0.929(6) 0.00	0.696(1) 0.00	0.725(1) 0.00	0.30(2) 0.00	0.00 0.00	0.00
OLD	0.978(2)	0.66(1)	0.44(1)	0.18(2)	0.00	

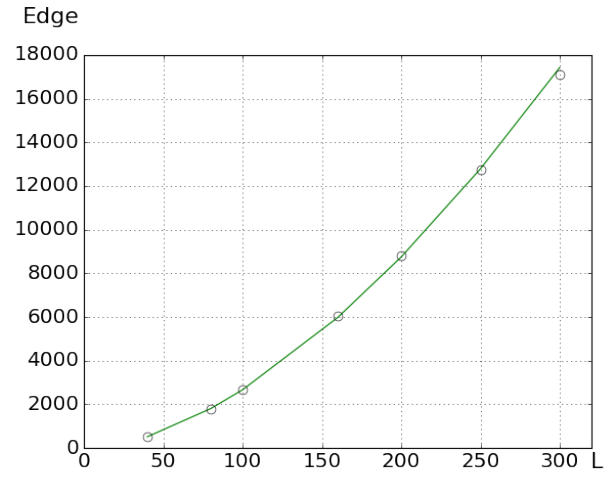
Таблица 3: Таблица средних плотностей кооператоров на решетках размером 100x100 при различных параметрах  $b$

параметра  $b$ . Значения параметра  $b$  выбирались в соответствии с условием, что обе плотности отличны от нуля(см Таб.3), иначе модель будет просто вариацией из п.5.1, только немного сдвинутой. Размер системы 100x100, отсечение первых 5000 раундов в соответствии с 2. Синие агенты - кооператоры, красные - дефекторы.

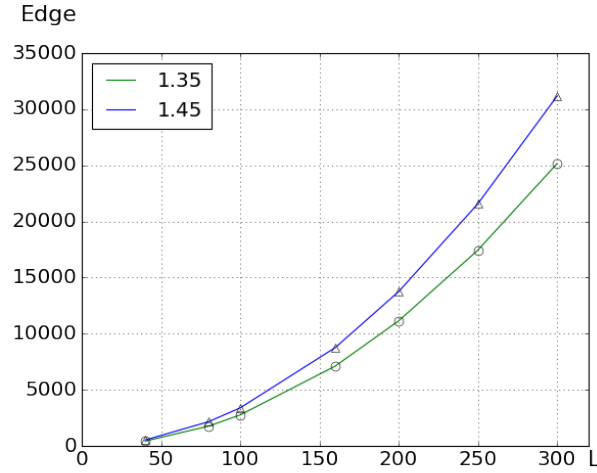




(a)  $b = 1.45$



(b)  $b = 1.45$



(c)  $b = 1.35$  и  $b = 1.45$

Рис. 11: Графики изменения границы протекающих кластеров кооператоров при различных значениях параметра  $b$

Расчет длины границы протекающего кластера в данной модели показал неожиданные результаты. При  $b > 3/2$  протекающих кластеров кооператоров нет, поэтому расчеты длины интерфейса велись при значениях  $b < 3/2$ . Приближение степенной функцией 6 для значений  $b_1 = 1.35, b_2 = 1.55$  и  $b_1 = 1.45, b_2 = 1.55$  дало следующие коэффициенты  $A = 0.3621(1), c = -114.0(2), \theta = 1.99781(7)$  и  $A = 1.128(4), c = -68.1(7), \theta = 1.6918(7)$  соответственно. Можно заметить, что ближе к точке перехода степень меняется и  $\theta \neq 2$ , как это наблюдается в остальных случаях. В случае, когда обе игры проходят слева от точки  $b = 3/2$ , то граница шкалируется степенью  $\theta = 2$ . Коэффициенты равны следующим значениям  $A = 0.26786(8), c = -13.7(1), \theta = 2.00744(6)$  и  $A = 0.31251(9), c = -9.9(1), \theta = 2.01796(6)$ . Степень  $\theta \approx 1.69$  довольно неожиданный результат. Можно предположить, что вблизи точки перехода, в случае, когда одна игра происходит с

параметром  $b$  слева от точки перехода, а другая - справа, то степень изменения размера границы уменьшается с приближением. Данная гипотеза будет проверена в дальнейших исследованиях.

## 6 Заключение

В этой работе исследуется эволюционная пространственная игра на основе Дилеммы Узника на двумерной квадратной решетке на плоскости. Несмотря на простоту правил игры, она демонстрирует интересное поведение на длительных временных интервалах. Были показаны переходы, которые характеризуются прыжками средней плотности кооператоров. Продемонстрировано, как изменяется длина интерфейса между игроками разных стратегий в зависимости от размера системы.

Все эти результаты будут полезными для тех, кто собирается исследовать или применять модель Дилеммы Узника. Дальнейшие шаги будут заключаться в более детальном изучении кластеров на решетке, а также исследовании более сложных взаимодействий, например в сетях, на динамических графах или неквадратных решетках.

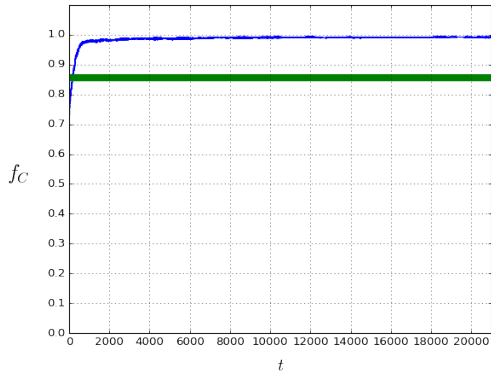
## Список литературы

- [1] O. Schramm, *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Isr. J. Math. 118, 221 (2000).
- [2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B241 333 (1984).
- [3] R.J. Baxter, *Exactly solvable models in statistical mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [4] Vl.S. Dotsenko, V.A. Fateev, *Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models*, Nucl. Phys. B240 (FS12), 312 (1984).
- [5] O. Schramm and S. Sheffield, *Harmonic Explorer and Its Convergence to SLE 4*, The Annals of Probability 33, 2127 (2005).
- [6] S. Smirnov, *Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences 333, 239 (2001).
- [7] S. Smirnov, *Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model*, Ann. Math., 172, 1435 (2010).
- [8] Y.H. Jung, H. Zhang, S.J. Cho, Z. Ma, *Flexible and Stretchable Microwave Microelectronic Devices and Circuits*, IEEE Trans. Elrctr. Dev. 64, 1881 (2017).
- [9] G. Lawler. O. Schramm, and W. Werner. *Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Ann. Probab.,32:939–995, 2004.
- [10] F. Camia, C. Newman. *Critical Percolation Exploration Path and SLE(6): a Proof of Convergence*. Probab. Theory Rel.,139:473-520, 2007.
- [11] A. Zatelepin and L. Shchur, *Duality of critical interfaces in Potts model: numerical check*, arXiv :1008.3573.
- [12] K. Lowner, *Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I*, Math. Ann., 89:1–2 (1923), 103–121.
- [13] L. V. Ahlfors. *Conformal invariants: topics in geometric function theory*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1973.

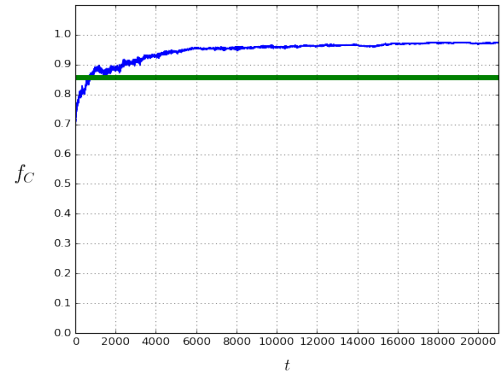
- [14] G. Lawler and S. Sheffield. A natural parametrization for the Schramm-Loewner evolution. *Ann. Probab.*, 39, 1896-1937, 2011.
- [15] M.A. Nowak and R.M. May, Evolutionary games and spatial chaos, *Nature* 359, 826 (1992).
- [16] M.A. Nowak, *Evolutionary Dynamics: Exploring the equations of life*, The Belknap Press, (2006).
- [17] M.A. Nowak and R.M. May, The spatial dilemmas of evolution, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 3, 35 (1993).
- [18] H.E. Stanley, *Introduction to phase transition and critical phenomena*, Oxford University Press 1971.
- [19] M.N. Barber, Finite size scaling, in *Phase transitions and critical phenomena*, Eds. C. Domb and J Lebowitz, volume 8 (1983).
- [20] K. Binder, Theory of first-order phase transitions, *Rep. Prog. Phys.* 50, 783 (1987).
- [21] A. Bar and D. Mukamel, Mixed-Order Phase Transition in a One-Dimensional Model, *Phys. Rev. Lett.* 112, 015701 (2014).
- [22] J. Adler, Bootstrap percolation, *Physica A* 171, 453 (1991).
- [23] H. Herrmann, Discontinuous percolation, *J. of Phys: Conf. Series* 681, 012003 (2015).
- [24] see, e.g. , S. Tadelis, *Game Theory: An Introduction*, Princeton University Press, 2013, and references therein.
- [25] Singer-Clark T., *Morality Metrics On Iterated Prisoners Dilemma Players* // URL: <http://www.scottaaronson.com/morality.pdf>
- [26] J. Hoshen, R. Kopelman, Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm, *Phys. Rev. B.* 14, 8 (1976).
- [27] OpenMP Specifications // URL: <http://openmp.org/wp/openmp-specifications/>
- [28] M. Shishikura, The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, *Annals of Mathematics* 147, 225 (1998).

- [29] Kolotev S. et al. Interfaces in evolutionary games // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2018. – T. 955. – №. 1. – C. 012023.

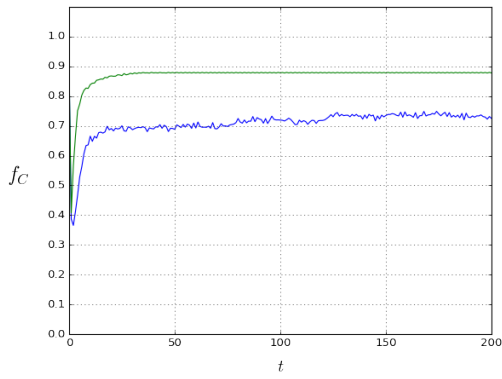
# 7 Приложение 1



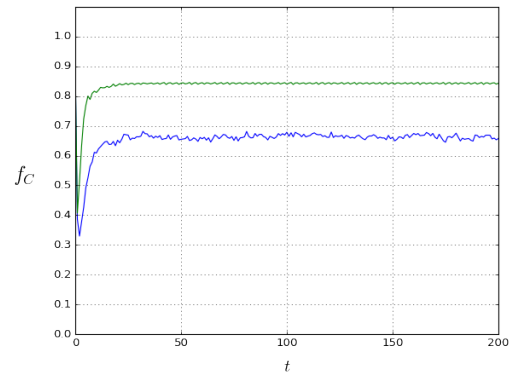
(a) 1.3



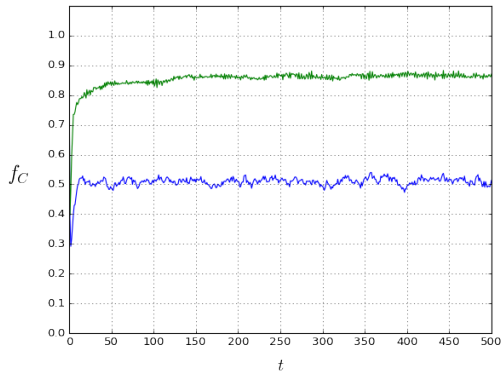
(b) 1.35



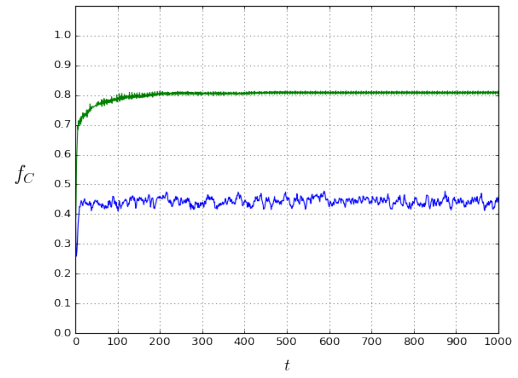
(c) 1.4



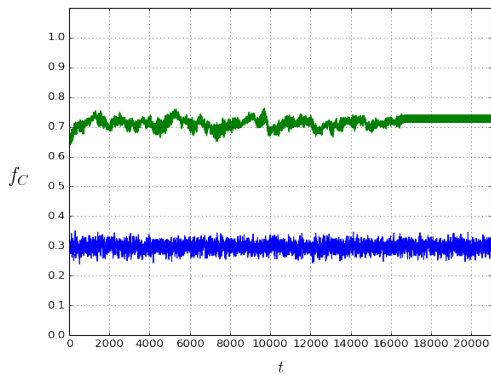
(d) 1.45



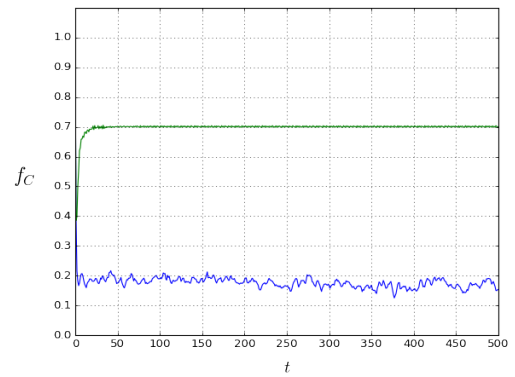
(e) 1.5



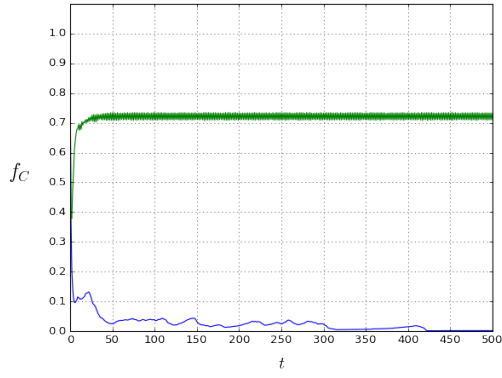
(f) 1.55



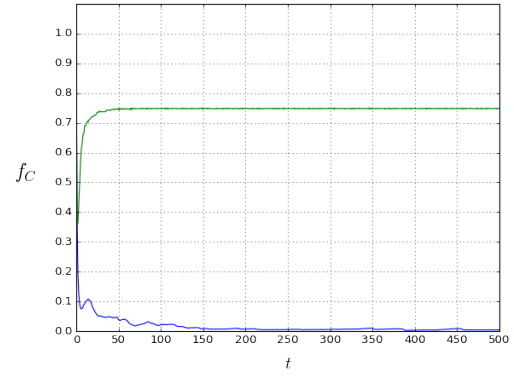
(g) 1.6



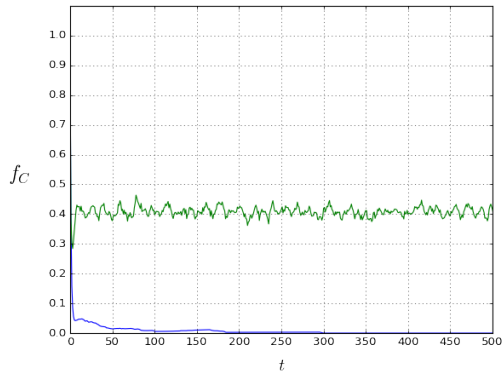
(h) 1.65



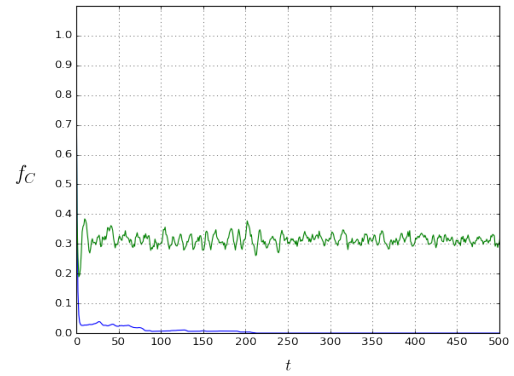
(i) 1.7



(j) 1.75



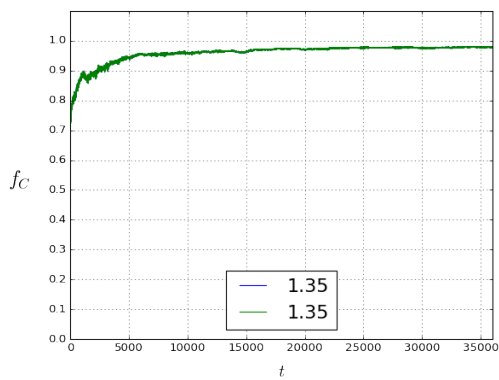
(k) 1.8



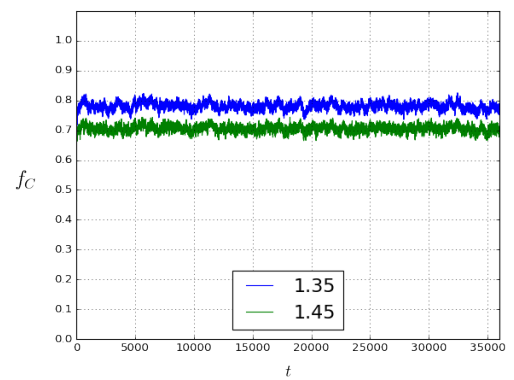
(l) 1.85

Рис. 12: Графики с плотностями кооператоров на решетке простой моделью со средним полем (синий график) и моделью Мэй и Новак(зеленый график)

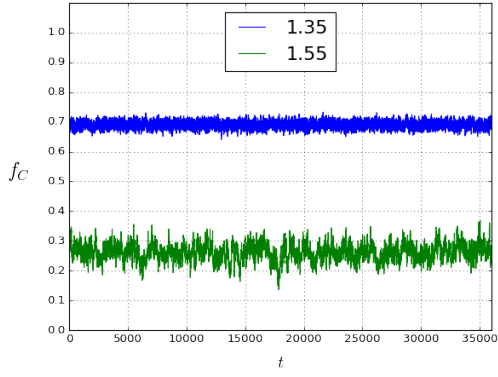
## 8 Приложение 2



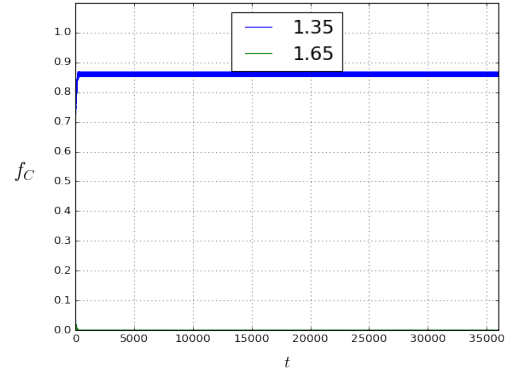
(a)  $b = 1.35$



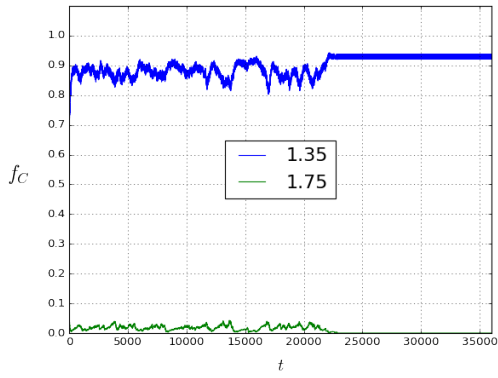
(b)  $b = 1.35$  и  $b = 1.45$



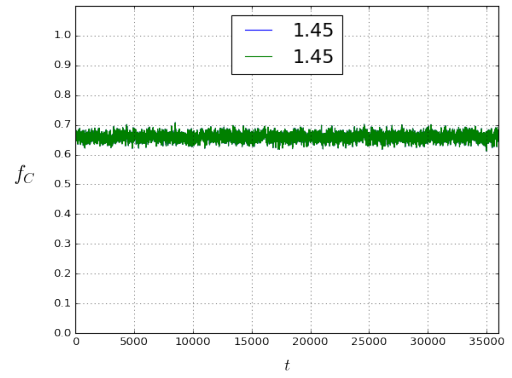
(c)  $b = 1.35$  и  $b = 1.55$



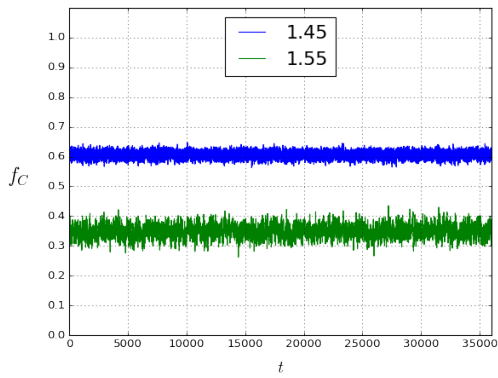
(d)  $b = 1.35$  и  $b = 1.65$



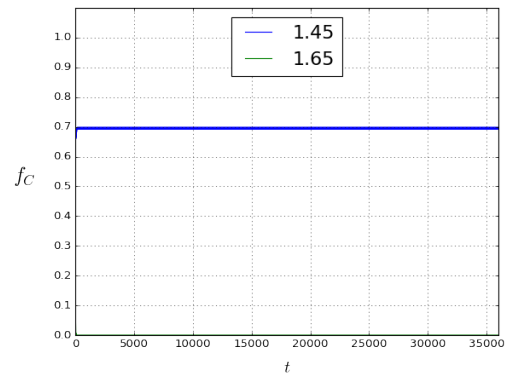
(e)  $b = 1.35$  и  $b = 1.75$



(f)  $b = 1.45$

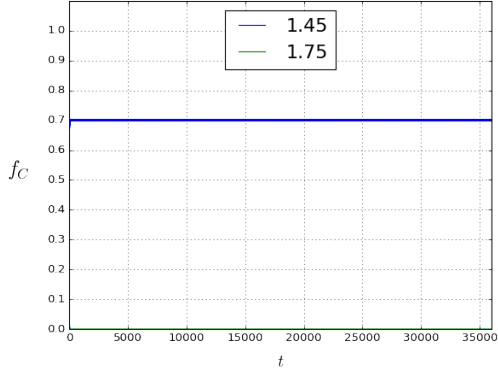


(g)  $b = 1.45$  и  $b = 1.55$

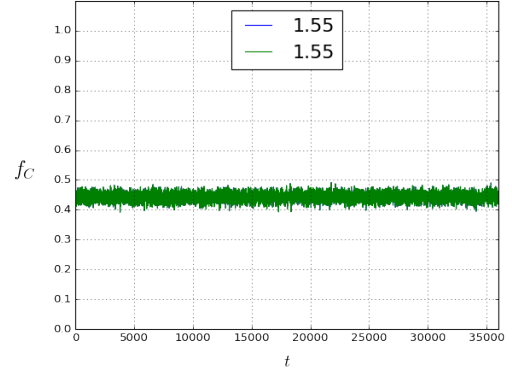


(h)  $b = 1.45$  и  $b = 1.65$

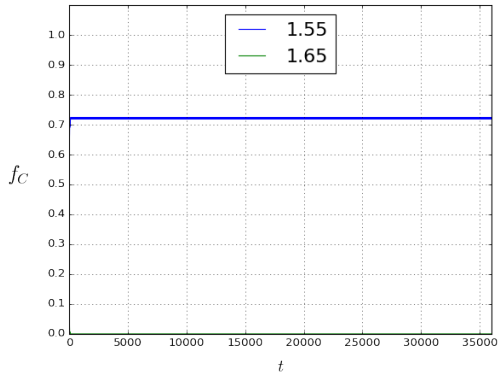




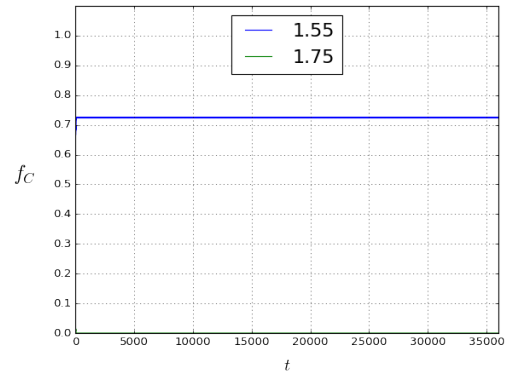
(i)  $b = 1.45$  и  $b = 1.75$



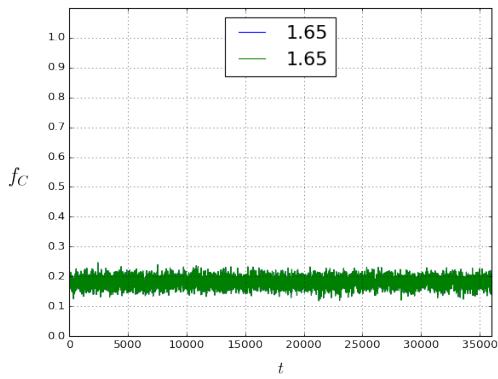
(j)  $b = 1.55$



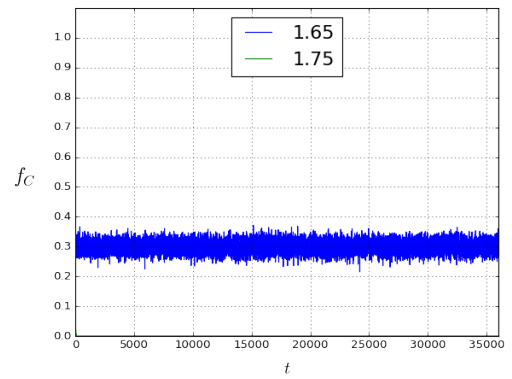
(k)  $b = 1.55$  и  $b = 1.65$



(l)  $b = 1.55$  и  $b = 1.75$



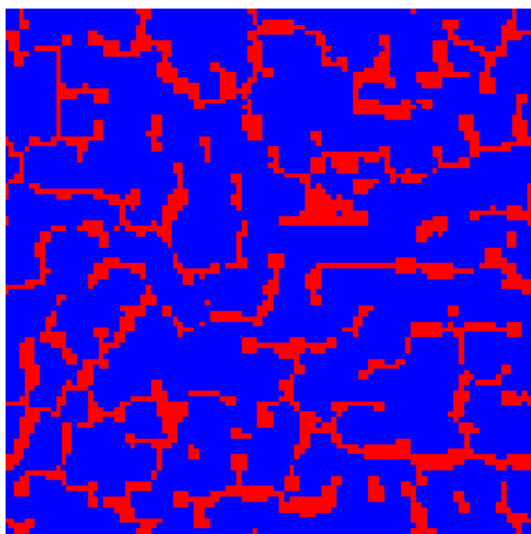
(m)  $b = 1.65$



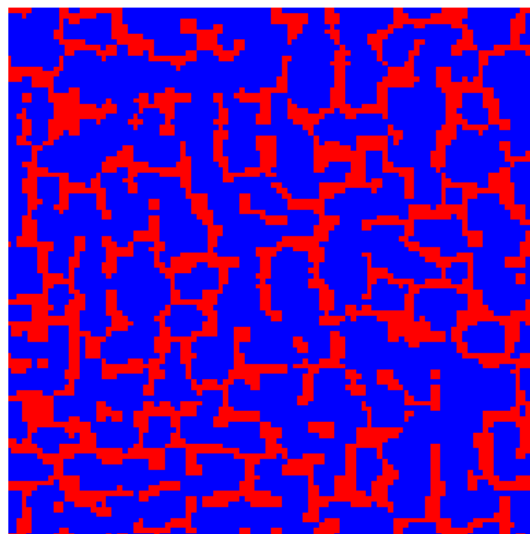
(n)  $b = 1.65$  и  $b = 1.75$

Рис. 13: Графики плотностей кооператоров модели с чужим средним полем

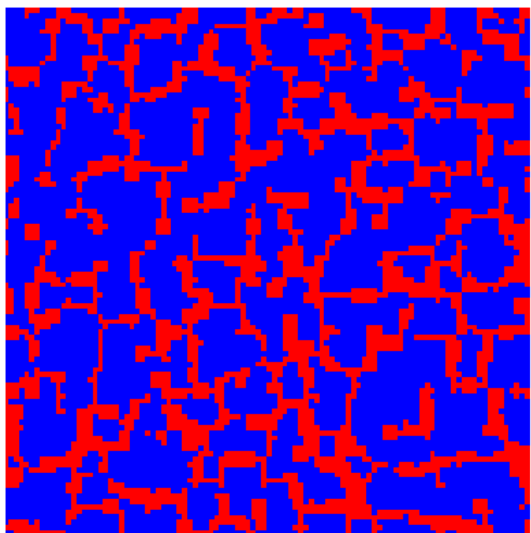
## 9 Приложение 3



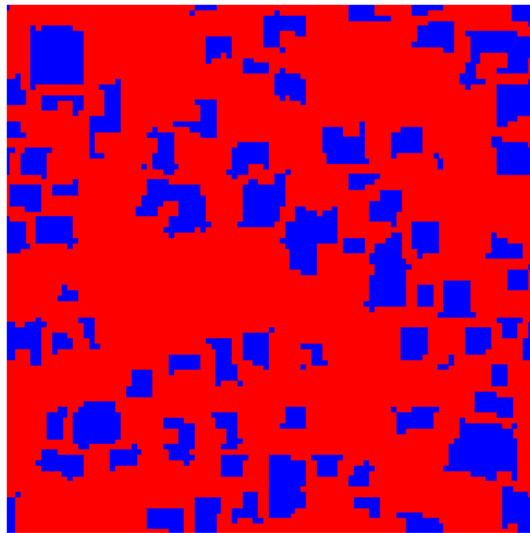
(a) 1.35



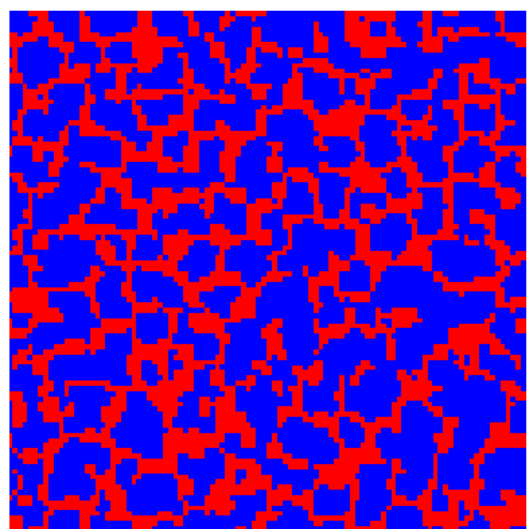
(b) 1.45



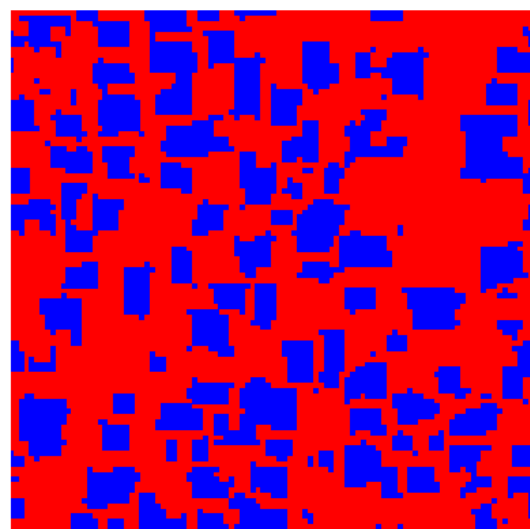
(c) 1.35



(d) 1.55



(e) 1.45



(f) 1.55

Рис. 14: Снепшоты решеток модели с чужим средним полем