

AKAD
Bachelor of Science (Wirtschaftsinformatik)
Modulzusammenfassung

WIM04

Formelsammlung

Daniel Falkner
Rotbach 529
94078 Freyung
daniel.falkner@akad.de
1. März 2013

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iv
1 Folgen	1
1.1 arithmetische Folgen	1
1.1.1 Bildungsgesetz	1
1.1.2 Grenzwerte	1
1.2 geometrische Folgen	1
1.2.1 Bildungsgesetz	1
1.2.2 Grenzwerte	1
2 Reihen	2
2.1 arithmetische Reihen	2
2.1.1 Bildungsgesetz	2
2.1.2 Grenzwerte	2
2.2 geometrische Reihen	2
2.2.1 Bildungsgesetz	2
2.2.2 Grenzwerte	2
3 Vollständige Induktion	3
4 Determinanten	4
4.1 Regel von Sarrus	4
4.1.1 Für 2×2	4
4.1.2 Für 3×3	4
4.2 CRAMER'sche Regel	5
5 Matrizen	6
5.1 Transponierte Matrix	6
5.2 Addition	6
5.2.1 vom selben Typ	6
5.3 Multiplikation	6
5.3.1 mit einer reellen Zahl (Skalar)	6
5.3.2 zweier Matrizen	6
5.3.3 spezielle Matrixprodukte	6
5.4 Inverse	6
5.4.1 Bestimmung der inversen Matrix	7
5.4.2 mit Hilfe der Adjunktion	7
6 Aussagenlogik	8
6.1 Verknüpfungen	8
6.1.1 Negation	8
6.1.2 Konjunktion (und)	8
6.1.3 Disjunktion auch Adjunktion (oder)	8
6.1.4 Subjunktion (wenn dann)	8
6.1.5 Bijunktion (genau dann, wenn)	9

6.1.6	Sonderformen	9
6.2	Gesetze	9
6.3	Normalformen	9
6.3.1	Minterme	9
6.3.2	Maxterme	10
6.3.3	Kanonische disjunktive Normalform	10
6.3.4	Kanonische konjunktive Normalform	10
7	Schaltalgebra	11
7.1	Gesetze	11
7.2	Normalformen	11
7.2.1	Minterme	11
7.2.2	Maxterme	11
7.2.3	Kanonische disjunktive Normalform	11
7.2.4	Kanonische konjunktive Normalform	11
7.3	Logikgatter	13
7.3.1	UND	13
7.3.2	ODER	13
7.3.3	NICHT	13

Abbildungsverzeichnis

1	CRAMER'sche Regel	5
2	UND Gatter	13
3	ODER Gatter	13
4	NICHT Gatter	13

1 Folgen

Eine Serie von Zahlen oder Größen

5, 10, 4, 1

$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

1.1 arithmetische Folgen

- $a_{n+1} = a_n + d$
- 7, 11, 15, 19, 23, 27, ...
- $\mapsto d = 4$

1.1.1 Bildungsgesetz

$$a_n = a_1 + d * (n - 1)$$

1.1.2 Grenzwerte

Eine arithmetische Folge divergiert immer (wird beliebig groß), wenn $d \neq 0$

1.2 geometrische Folgen

- $a_{n+1} = a_n * q$
- 2, 6, 18, 54, 162, 486, ...
- $\mapsto q = 3$

1.2.1 Bildungsgesetz

$$a_n = a_1 * q^{n-1} \Leftrightarrow q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

1.2.2 Grenzwerte

Das Verhalten einer geometrischen Folge $n \mapsto a_n$ für wachsendes n hängt vom Quotienten q ab

- Falls $|q| < 1$, streben die Glieder a_n der Folge gegen 0. Grenzwert 0 (konvergiert gegen 0)
- Falls $|q| > 1$, werden für $a_1 \neq 0$ die $|a_n|$ beliebig groß, die Folge divergiert

2 Reihen

Aus einer Folge ergibt sich eine Reihe

$$(s_n) = s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$$

$$(s_n) = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j$$

2.1 arithmetische Reihen

- $(a_n) = 7, 11, 15, 19, \dots \mapsto a_1 = 7, d = 4$
- $(s_n) = 7, 18, 33, 52, \dots$

2.1.1 Bildungsgesetz

$$s_n = \frac{n}{2} * (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} * (2a_1 + (n-1)d)$$

2.1.2 Grenzwerte

Eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer unendlichen Reihe (s_n) ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Die Folge (a_n) muss also eine so genannte Nullfolge sein.

2.2 geometrische Reihen

- $(a_n) = 2, 6, 18, 54, \dots \mapsto a_1 = 2, q = 3$
- $(s_n) = 2, 8, 26, 80, \dots$

2.2.1 Bildungsgesetz

$$s_n = a_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$$

2.2.2 Grenzwerte

Eine unendliche geometrische Reihe (s_n) mit $s_n = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1}$ konvergiert genau

gegen den Grenzwert $S = \frac{a_1}{1-q}$ wenn $|q| < 1$ ist.

3 Vollständige Induktion

Am Beispiel $2 + 4 + 6 \dots 2 * n = n + n^2$

1. Zeigen das die Formeln für $n = 1$ gelten

- $s_1 = 2 * n = 2 * 1 = 2$
- $s_1 = n + n^2 = 1 + 1^2 = 2$

2. Zeigen das die Formeln für $n + 1$ gelten

a) Induktionsannahme (*zu beweisende Formel*) festhalten

- $s_n = n + n^2$

b) Die zubeweisende Formel für $n + 1$ herleiten

- $s_{n+1} = (n + 1) + (n + 1)^2 = n^2 + 3n + 2$

c) Die Induktionsnahme + Ursprungsformel für $n + 1$ herleiten

- $s_{n+1} = n + n^2 + 2(n + 1) = n^2 + 3n + 2$

4 Determinanten

4.1 Regel von Sarrus

4.1.1 Für 2 x 2

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb.$$

4.1.2 Für 3 x 3

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

4.2 CRAMER'sche Regel

Satz: (Cramersche Regel)

LGS mit zwei Variablen und zwei Gleichungen

Ist die Determinante D der Koeffizientenmatrix des LGS

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \quad \text{ungleich Null, so hat das LGS genau eine Lösung}$$

$$(x|y) = \left(\frac{D_x}{D} \mid \frac{D_y}{D} \right) \text{ mit}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Ist $D = 0$, so hat das LGS keine oder unendlich viele Lösung(en).

LGS mit drei Variablen und drei Gleichungen

Ist die Determinante D der Koeffizientenmatrix des LGS

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \quad \text{ungleich Null, so hat das LGS genau eine Lösung}$$

$$(x|y|z) = \left(\frac{D_x}{D} \mid \frac{D_y}{D} \mid \frac{D_z}{D} \right) \text{ mit}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Ist $D = 0$, so hat das LGS keine oder unendlich viele Lösung(en).

D_x (bzw. D_y, D_z) ist die Determinante der Matrix, die aus der Koeffizientenmatrix entsteht, wenn anstelle der Spalte, die die Koeffizienten der Variablen x (bzw. y, z) enthält, die rechte Seite des LGS eingesetzt wird.

Abbildung 1: AKAD WIM01 Mathematische Grundlagen, Lerneinheit 4, Seite 46

5 Matrizen

5.1 Transponierte Matrix

A^T entsteht durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten von A

Beispiel:

$$A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} A_{(3,2)}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

5.2 Addition

5.2.1 vom selben Typ

die gleichstehenden Elemente addieren und zu einer neuen Matrix zusammenfassen

5.3 Multiplikation

5.3.1 mit einer reellen Zahl (Skalar)

alle Elemente der Matrix mit der Zahl multiplizieren

5.3.2 zweier Matrizen

Zwei Matrizen sind multiplikationsverträglich wenn die Spaltenanzahl von A mit der Zeilenanzahl von B übereinstimmt. Eine Hilfe bietet das Falk-Schema ¹

5.3.3 spezielle Matrixprodukte

- Zeilenvektor * Spaltenvektor = Skalar
- Spaltenvektor * Zeilenvektor = Matrix

5.4 Inverse

- A vom Typ (n,n) ist regulär, d.h. A^{-1} (Inverse Matrix) existiert. Dann ist die Matrixgleichung $A * X = B$ eindeutig lösbar.
- Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $|A|$ ungleich Null ist

¹ http://de.wikipedia.org/wiki/Falksches_Schema

5.4.1 Bestimmung der inversen Matrix

- Die Inverse A^{-1} lässt sich mit dem Gauß-Jordan-Verfahren ² ermitteln

5.4.2 mit Hilfe der Adjunktion

1. Determinante bestimmen und prüfen ob A^{-1} existiert
2. Unterdeterminanten ³ bestimmen
3. Kofaktorenmatrix $\text{cof}(A)$ anhand der Unterdeterminanten aufstellen. Bei ungeraden Indizes das Vorzeichen ändern
4. adjungierte Matrix aufstellen, indem die Kofaktorenmatrix transponiert wird.
 $\text{adj}(A) = [\text{cof}(A)]^T$
5. adjungierte Matrix mit dem Kehrwert der Determinante multiplizieren.

$$\frac{1}{D} * \text{adj}(A)$$

² <http://de.wikipedia.org/wiki/Gauß-Jordan-Algorithmus>

³ [http://de.wikipedia.org/wiki/Minor_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Minor_(Mathematik))

6 Aussagenlogik

6.1 Verknüpfungen

6.1.1 Negation

p	$\neg p$
w	f
f	w

6.1.2 Konjunktion (und)

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

6.1.3 Disjunktion auch Adjunktion (oder)

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Verknüpfung durch das ausschließende oder (XOR) heißt Alternative oder Antivalenz

p	q	$p \text{ XOR } q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

6.1.4 Subjunktion (wenn dann)

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

$\neg p \vee q$ ist gleich mit $p \rightarrow q$

6.1.5 Bijunktion (genau dann, wenn)

p	q	$p \leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ist gleich mit $p \leftrightarrow q$

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ ist gleich mit $p \leftrightarrow q$

6.1.6 Sonderformen

- Ist die Aussage r für alle Belegungen p und q *wahr*, so heißt r eine **Tautologie**.
- Ist die Aussage r für alle Belegungen von p und q *falsch*, so heißt r eine **Kontradiktion**.
- Ist die Aussage r *weder* eine Tautologie *noch* eine Kontradiktion, so heißt r eine **Kontingenz** oder Neutralität.

6.2 Gesetze

Verknüpfung \wedge	Gesetze	Verknüpfung \vee
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Kommutativgesetz	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	Assoziativgesetz	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributivgesetz	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotenzgesetz	$p \vee p \Leftrightarrow p$
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	Absorptionsgesetz	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
$p \wedge (w) \Leftrightarrow p$	Neutrales Element	$p \vee (f) \Leftrightarrow p$
$p \wedge (f) \Leftrightarrow (f); p \wedge \neg p \Leftrightarrow (f)$	Kontradiktion	
	Tautologie	$p \vee (w) \Leftrightarrow (w); p \vee \neg p \Leftrightarrow (w)$
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	Regeln von de Morgan	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

6.3 Normalformen

6.3.1 Minterme

Minterme sind genau diejenigen Konjunktionsterme, die den Wert 'w' nur einmal annehmen und mit dem Junktor \wedge verknüpft sind.

6.3.2 Maxterme

Maxterme sind genau diejenigen Disjunktionsterme, die den Wert 'f' nur einmal annehmen und mit dem Junktor \vee verknüpft sind.

6.3.3 Kanonische disjunktive Normalform

Ein Disjunkt (Junktor \vee) paarweise verschiedener Minterme heißt Kanonische disjunktive Normalform

A	B	C	x
w	w	w	f
w	w	f	w
...

ergibt den Minterm $A \wedge B \wedge \neg C$

6.3.4 Kanonische konjunktive Normalform

Ein Konjunkt (Junktor \wedge) paarweiter verschiedener Maxterme heißt Kanonische konjunktive Normalform

A	B	C	x
w	w	w	f
w	w	f	w
...

ergibt den Maxterm $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

7 Schaltalgebra

7.1 Gesetze

Verknüpfung +	Gesetze	Verknüpfung *
$a + b = b + a$	Kommutativgesetz	$a * b = b * a$
$a + (b * c) = (a + b)(a + c)$	Distributivgesetz	$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
$a + 0 = 0 + a = a$	Neutrales Element	$a * 1 = 1 * a = a$
$a + \bar{a} = 1$	Inverses Element	$a * \bar{a} = 0$
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Assoziativgesetz	$(a * b) * c = a * (b * c)$
$a + (a * b) = a$	Absorptionsgesetz	$a * (a + b) = a$
$a + 1 = 1$	Tautologie	
	Kontradiktion	$a * 0 = 0$
$a + a = a$	Idempotenzgesetz	$a * a = a$
$\overline{a + b} = \bar{a} * \bar{b}$	Regeln von de Morgan	$\overline{a * b} = \bar{a} + \bar{b}$

7.2 Normalformen

7.2.1 Minterme

Minterme sind genau diejenigen vollständigen Produkte, die den Leitwert 1 genau dann annehmen, wenn jeder Faktor den Leitwert 1 annimmt.

7.2.2 Maxterme

Maxterme sind genau diejenigen vollständigen Summen, die den Leitwert 0 genau dann annehmen, wenn jeder Summand den Leitwert 0 annimmt.

7.2.3 Kanonische disjunktive Normalform

Die Summe der Minterme ergibt die Schaltfunktion in kanonischer disjunktiver Normalform

a	b	c	f
1	1	1	0
1	1	0	1
...

ergibt den Minterm $a * b * \bar{c}$

7.2.4 Kanonische konjunktive Normalform

Das Produkt der Maxterme ergibt die Schaltfunktion in kanonischer konjunktiver Normalform

A	B	C	x
1	1	1	0 ergibt den Maxterm $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$
1	1	0	1
...

7.3 Logikgatter

7.3.1 UND

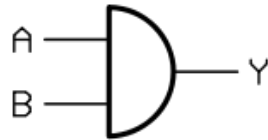


Abbildung 2: UND Gatter <http://de.wikipedia.org/wiki/Logikgatter>

7.3.2 ODER

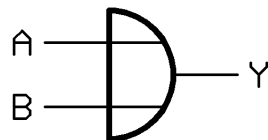


Abbildung 3: ODER Gatter <http://de.wikipedia.org/wiki/Logikgatter>

7.3.3 NICHT

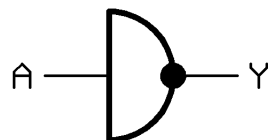


Abbildung 4: NICHT Gatter <http://de.wikipedia.org/wiki/Logikgatter>