

AKAD  
Bachelor of Science (Wirtschaftsinformatik)  
Modulzusammenfassung

**WIM04**

## **Formelsammlung**

Daniel Falkner  
Rotbach 529  
94078 Freyung  
daniel.falkner@akad.de  
1. März 2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>iv</b>
<b>1 Folgen</b>	<b>1</b>
1.1 arithmetische Folgen . . . . .	1
1.1.1 Bildungsgesetz . . . . .	1
1.1.2 Grenzwerte . . . . .	1
1.2 geometrische Folgen . . . . .	1
1.2.1 Bildungsgesetz . . . . .	1
1.2.2 Grenzwerte . . . . .	1
<b>2 Reihen</b>	<b>2</b>
2.1 arithmetische Reihen . . . . .	2
2.1.1 Bildungsgesetz . . . . .	2
2.1.2 Grenzwerte . . . . .	2
2.2 geometrische Reihen . . . . .	2
2.2.1 Bildungsgesetz . . . . .	2
2.2.2 Grenzwerte . . . . .	2
<b>3 Vollständige Induktion</b>	<b>3</b>
<b>4 Determinanten</b>	<b>4</b>
4.1 Regel von Sarrus . . . . .	4
4.1.1 Für $2 \times 2$ . . . . .	4
4.1.2 Für $3 \times 3$ . . . . .	4
4.2 CRAMER'sche Regel . . . . .	5
<b>5 Matrizen</b>	<b>6</b>
5.1 Transponierte Matrix . . . . .	6
5.2 Addition . . . . .	6
5.2.1 vom selben Typ . . . . .	6
5.3 Multiplikation . . . . .	6
5.3.1 mit einer reellen Zahl (Skalar) . . . . .	6
5.3.2 zweier Matrizen . . . . .	6
5.3.3 spezielle Matrixprodukte . . . . .	6
5.4 Inverse . . . . .	6
5.4.1 Bestimmung der inversen Matrix . . . . .	7
5.4.2 mit Hilfe der Adjunktion . . . . .	7
<b>6 Aussagenlogik</b>	<b>8</b>
6.1 Verknüpfungen . . . . .	8
6.1.1 Negation . . . . .	8
6.1.2 Konjunktion (und) . . . . .	8
6.1.3 Disjunktion auch Adjunktion (oder) . . . . .	8
6.1.4 Subjunktion (wenn dann) . . . . .	8
6.1.5 Bijunktion (genau dann, wenn) . . . . .	9

6.1.6	Sonderformen . . . . .	9
6.2	Gesetze . . . . .	9
6.3	Normalformen . . . . .	9
6.3.1	Minterme . . . . .	9
6.3.2	Maxterme . . . . .	10
6.3.3	Kanonische disjunktive Normalform . . . . .	10
6.3.4	Kanonische konjunktive Normalform . . . . .	10
<b>7</b>	<b>Schaltalgebra</b>	<b>11</b>
7.1	Gesetze . . . . .	11
7.2	Normalformen . . . . .	11
7.2.1	Minterme . . . . .	11
7.2.2	Maxterme . . . . .	11
7.2.3	Kanonische disjunktive Normalform . . . . .	11
7.2.4	Kanonische konjunktive Normalform . . . . .	11
7.3	Logikgatter . . . . .	13
7.3.1	UND . . . . .	13
7.3.2	ODER . . . . .	13
7.3.3	NICHT . . . . .	13

# Abbildungsverzeichnis

1	CRAMER'sche Regel . . . . .	5
2	UND Gatter . . . . .	13
3	ODER Gatter . . . . .	13
4	NICHT Gatter . . . . .	13

# 1 Folgen

Eine Serie von Zahlen oder Größen

5, 10, 4, 1

$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

## 1.1 arithmetische Folgen

- $a_{n+1} = a_n + d$
- 7, 11, 15, 19, 23, 27, ...
- $\mapsto d = 4$

### 1.1.1 Bildungsgesetz

$$a_n = a_1 + d * (n - 1)$$

### 1.1.2 Grenzwerte

Eine arithmetische Folge divergiert immer (wird beliebig groß), wenn  $d \neq 0$

## 1.2 geometrische Folgen

- $a_{n+1} = a_n * q$
- 2, 6, 18, 54, 162, 486, ...
- $\mapsto q = 3$

### 1.2.1 Bildungsgesetz

$$a_n = a_1 * q^{n-1} \Leftrightarrow q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

### 1.2.2 Grenzwerte

Das Verhalten einer geometrischen Folge  $n \mapsto a_n$  für wachsendes  $n$  hängt vom Quotienten  $q$  ab

- Falls  $|q| < 1$ , streben die Glieder  $a_n$  der Folge gegen 0. Grenzwert 0 (konvergiert gegen 0)
- Falls  $|q| > 1$ , werden für  $a_1 \neq 0$  die  $|a_n|$  beliebig groß, die Folge divergiert

## 2 Reihen

Aus einer Folge ergibt sich eine Reihe

$$(s_n) = s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$$

$$(s_n) = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j$$

### 2.1 arithmetische Reihen

- $(a_n) = 7, 11, 15, 19, \dots \mapsto a_1 = 7, d = 4$
- $(s_n) = 7, 18, 33, 52, \dots$

#### 2.1.1 Bildungsgesetz

$$s_n = \frac{n}{2} * (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} * (2a_1 + (n-1)d)$$

#### 2.1.2 Grenzwerte

Eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer unendlichen Reihe  $(s_n)$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Die Folge  $(a_n)$  muss also eine so genannte Nullfolge sein.

### 2.2 geometrische Reihen

- $(a_n) = 2, 6, 18, 54, \dots \mapsto a_1 = 2, q = 3$
- $(s_n) = 2, 8, 26, 80, \dots$

#### 2.2.1 Bildungsgesetz

$$s_n = a_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$$

#### 2.2.2 Grenzwerte

Eine unendliche geometrische Reihe  $(s_n)$  mit  $s_n = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1}$  konvergiert genau

gegen den Grenzwert  $S = \frac{a_1}{1-q}$  wenn  $|q| < 1$  ist.

### 3 Vollständige Induktion

Am Beispiel  $2 + 4 + 6 \dots 2 * n = n + n^2$

1. Zeigen das die Formeln für  $n = 1$  gelten

- $s_1 = 2 * n = 2 * 1 = 2$
- $s_1 = n + n^2 = 1 + 1^2 = 2$

2. Zeigen das die Formeln für  $n + 1$  gelten

a) Induktionsannahme (*zu beweisende Formel*) festhalten

- $s_n = n + n^2$

b) Die zubeweisende Formel für  $n + 1$  herleiten

- $s_{n+1} = (n + 1) + (n + 1)^2 = n^2 + 3n + 2$

c) Die Induktionsnahme + Ursprungsformel für  $n + 1$  herleiten

- $s_{n+1} = n + n^2 + 2(n + 1) = n^2 + 3n + 2$

## 4 Determinanten

### 4.1 Regel von Sarrus

#### 4.1.1 Für 2 x 2

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb.$$

#### 4.1.2 Für 3 x 3

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$



## 4.2 CRAMER'sche Regel

*Satz:* (Cramersche Regel)

### LGS mit zwei Variablen und zwei Gleichungen

Ist die Determinante  $D$  der Koeffizientenmatrix des LGS

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \quad \text{ungleich Null, so hat das LGS genau eine Lösung}$$

$$(x|y) = \left( \frac{D_x}{D} \mid \frac{D_y}{D} \right) \text{ mit}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Ist  $D = 0$ , so hat das LGS keine oder unendlich viele Lösung(en).

### LGS mit drei Variablen und drei Gleichungen

Ist die Determinante  $D$  der Koeffizientenmatrix des LGS

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \quad \text{ungleich Null, so hat das LGS genau eine Lösung}$$

$$(x|y|z) = \left( \frac{D_x}{D} \mid \frac{D_y}{D} \mid \frac{D_z}{D} \right) \text{ mit}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Ist  $D = 0$ , so hat das LGS keine oder unendlich viele Lösung(en).

$D_x$  (bzw.  $D_y$ ,  $D_z$ ) ist die Determinante der Matrix, die aus der Koeffizientenmatrix entsteht, wenn anstelle der Spalte, die die Koeffizienten der Variablen  $x$  (bzw.  $y$ ,  $z$ ) enthält, die rechte Seite des LGS eingesetzt wird.

Abbildung 1: AKAD WIM01 Mathematische Grundlagen, Lerneinheit 4, Seite 46

## 5 Matrizen

### 5.1 Transponierte Matrix

$A^T$  entsteht durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten von  $A$

Beispiel:

$$A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} A_{(3,2)}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

### 5.2 Addition

#### 5.2.1 vom selben Typ

die gleichstehenden Elemente addieren und zu einer neuen Matrix zusammenfassen

### 5.3 Multiplikation

#### 5.3.1 mit einer reellen Zahl (Skalar)

alle Elemente der Matrix mit der Zahl multiplizieren

#### 5.3.2 zweier Matrizen

Zwei Matrizen sind multiplikationsverträglich wenn die Spaltenanzahl von  $A$  mit der Zeilenanzahl von  $B$  übereinstimmt. Eine Hilfe bietet das Falk-Schema <sup>1</sup>

#### 5.3.3 spezielle Matrixprodukte

- Zeilenvektor \* Spaltenvektor = Skalar
- Spaltenvektor \* Zeilenvektor = Matrix

### 5.4 Inverse

- $A$  vom Typ  $(n,n)$  ist regulär, d.h.  $A^{-1}$  (Inverse Matrix) existiert. Dann ist die Matrixgleichung  $A * X = B$  eindeutig lösbar.
- Eine quadratische Matrix  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante  $|A|$  ungleich Null ist

---

<sup>1</sup> [http://de.wikipedia.org/wiki/Falksches\\_Schema](http://de.wikipedia.org/wiki/Falksches_Schema)

### 5.4.1 Bestimmung der inversen Matrix

- Die Inverse  $A^{-1}$  lässt sich mit dem Gauß-Jordan-Verfahren <sup>2</sup> ermitteln

### 5.4.2 mit Hilfe der Adjunktion

1. Determinante bestimmen und prüfen ob  $A^{-1}$  existiert
2. Unterdeterminanten <sup>3</sup> bestimmen
3. Kofaktorenmatrix  $\text{cof}(A)$  anhand der Unterdeterminanten aufstellen. Bei ungeraden Indizes das Vorzeichen ändern
4. adjungierte Matrix aufstellen, indem die Kofaktorenmatrix transponiert wird.  
 $\text{adj}(A) = [\text{cof}(A)]^T$
5. adjungierte Matrix mit dem Kehrwert der Determinante multiplizieren.

$$\frac{1}{D} * \text{adj}(A)$$

---

<sup>2</sup> <http://de.wikipedia.org/wiki/Gauß-Jordan-Algorithmus>

<sup>3</sup> [http://de.wikipedia.org/wiki/Minor\\_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Minor_(Mathematik))

## 6 Aussagenlogik

### 6.1 Verknüpfungen

#### 6.1.1 Negation

p	$\neg p$
w	f
f	w

#### 6.1.2 Konjunktion (und)

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

#### 6.1.3 Disjunktion auch Adjunktion (oder)

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Verknüpfung durch das ausschließende oder (XOR) heißt Alternative oder Antivalenz

p	q	$p \text{ XOR } q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

#### 6.1.4 Subjunktion (wenn dann)

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

$\neg p \vee q$  ist gleich mit  $p \rightarrow q$

### 6.1.5 Bijunktion (genau dann, wenn)

p	q	$p \leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  ist gleich mit  $p \leftrightarrow q$

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$  ist gleich mit  $p \leftrightarrow q$

### 6.1.6 Sonderformen

- Ist die Aussage r für alle Belegungen p und q *wahr*, so heißt r eine **Tautologie**.
- Ist die Aussage r für alle Belegungen von p und q *falsch*, so heißt r eine **Kontradiktion**.
- Ist die Aussage r *weder* eine Tautologie *noch* eine Kontradiktion, so heißt r eine **Kontingenz** oder Neutralität.

## 6.2 Gesetze

Verknüpfung $\wedge$	Gesetze	Verknüpfung $\vee$
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Kommutativgesetz	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	Assoziativgesetz	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributivgesetz	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotenzgesetz	$p \vee p \Leftrightarrow p$
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	Absorptionsgesetz	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
$p \wedge (w) \Leftrightarrow p$	Neutrales Element	$p \vee (f) \Leftrightarrow p$
$p \wedge (f) \Leftrightarrow (f); p \wedge \neg p \Leftrightarrow (f)$	Kontradiktion	
	Tautologie	$p \vee (w) \Leftrightarrow (w); p \vee \neg p \Leftrightarrow (w)$
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	Regeln von de Morgan	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

## 6.3 Normalformen

### 6.3.1 Minterme

Minterme sind genau diejenigen Konjunktionsterme, die den Wert 'w' nur einmal annehmen und mit dem Junktor  $\wedge$  verknüpft sind.

### 6.3.2 Maxterme

Maxterme sind genau diejenigen Disjunktionsterme, die den Wert 'f' nur einmal annehmen und mit dem Junktor  $\vee$  verknüpft sind.

### 6.3.3 Kanonische disjunktive Normalform

Ein Disjunkt (Junktor  $\vee$ ) paarweise verschiedener Minterme heißt Kanonische disjunktive Normalform

A	B	C	x
w	w	w	f
w	w	f	w
...	...	...	...

ergibt den Minterm  $A \wedge B \wedge \neg C$

### 6.3.4 Kanonische konjunktive Normalform

Ein Konjunkt (Junktor  $\wedge$ ) paarweiser verschiedener Maxterme heißt Kanonische konjunktive Normalform

A	B	C	x
w	w	w	f
w	w	f	w
...	...	...	...

ergibt den Maxterm  $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

## 7 Schaltalgebra

### 7.1 Gesetze

Verknüpfung +	Gesetze	Verknüpfung *
$a + b = b + a$	Kommutativgesetz	$a * b = b * a$
$a + (b * c) = (a + b)(a + c)$	Distributivgesetz	$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
$a + 0 = 0 + a = a$	Neutrales Element	$a * 1 = 1 * a = a$
$a + \bar{a} = 1$	Inverses Element	$a * \bar{a} = 0$
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Assoziativgesetz	$(a * b) * c = a * (b * c)$
$a + (a * b) = a$	Absorptionsgesetz	$a * (a + b) = a$
$a + 1 = 1$	Tautologie	
	Kontradiktion	$a * 0 = 0$
$a + a = a$	Idempotenzgesetz	$a * a = a$
$\overline{a + b} = \bar{a} * \bar{b}$	Regeln von de Morgan	$\overline{a * b} = \bar{a} + \bar{b}$

### 7.2 Normalformen

#### 7.2.1 Minterme

Minterme sind genau diejenigen vollständigen Produkte, die den Leitwert 1 genau dann annehmen, wenn jeder Faktor den Leitwert 1 annimmt.

#### 7.2.2 Maxterme

Maxterme sind genau diejenigen vollständigen Summen, die den Leitwert 0 genau dann annehmen, wenn jeder Summand den Leitwert 0 annimmt.

#### 7.2.3 Kanonische disjunktive Normalform

Die Summe der Minterme ergibt die Schaltfunktion in kanonischer disjunktiver Normalform

a	b	c	f
1	1	1	0
1	1	0	1
...	...	...	...

ergibt den Minterm  $a * b * \bar{c}$

#### 7.2.4 Kanonische konjunktive Normalform

Das Produkt der Maxterme ergibt die Schaltfunktion in kanonischer konjunktiver Normalform

A	B	C	x
1	1	1	0    ergibt den Maxterm $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$
1	1	0	1
...	...	...	...



## 7.3 Logikgatter

### 7.3.1 UND

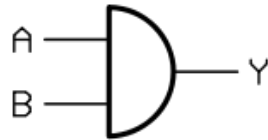


Abbildung 2: UND Gatter <http://de.wikipedia.org/wiki/Logikgatter>

### 7.3.2 ODER

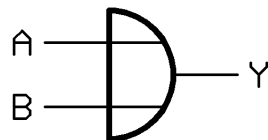


Abbildung 3: ODER Gatter <http://de.wikipedia.org/wiki/Logikgatter>

### 7.3.3 NICHT

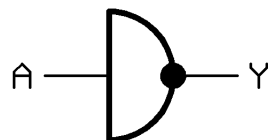


Abbildung 4: NICHT Gatter <http://de.wikipedia.org/wiki/Logikgatter>